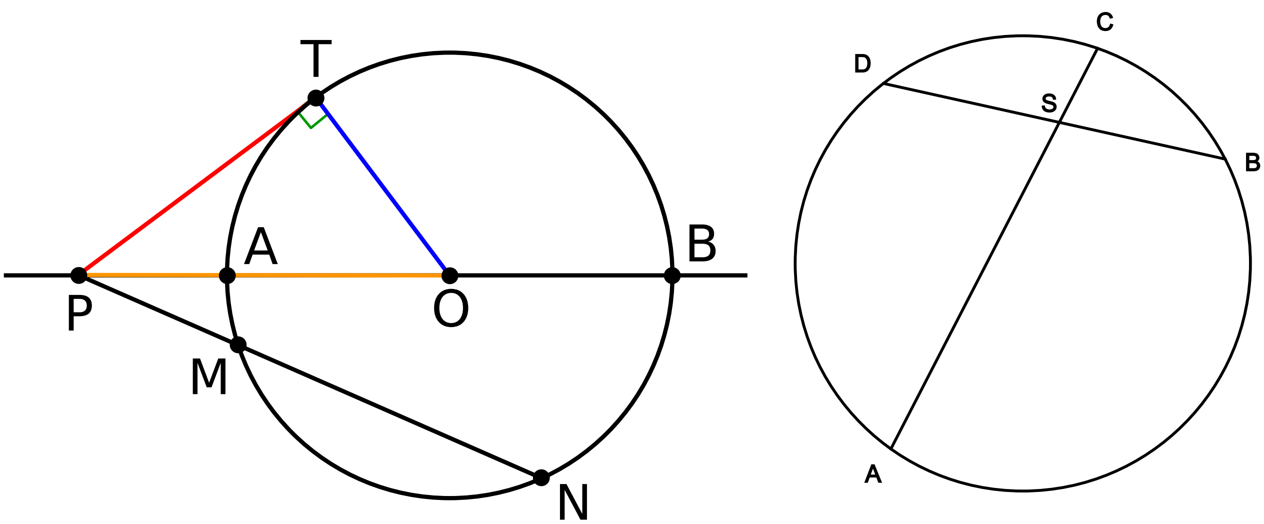
平面几何第二次讲座讲义

赵丰 616545598@qq.com[*]

2020 年 8 月 9 日

关键词: 圆幂，托勒密定理，根轴

1. 如图 1a 所示，PT 是圆 O 的切线，T 为切点，PMN 是圆 O 的割线，由 $\triangle PTM \sim \triangle PTN$ 得 $PT^2 = PM \cdot PN$, 同理 $PT^2 = PA * PB = (PO - PA) \cdot (PO + OB) = PO^2 - AO^2$, 称 PT^2 为 P 点对圆 O 的幂。



(a) P 在圆外

(b) S 在圆内

如图 1b 所示，当 S 在圆内时，有 $AS \cdot SC = BS \cdot SD$[1]。并且有

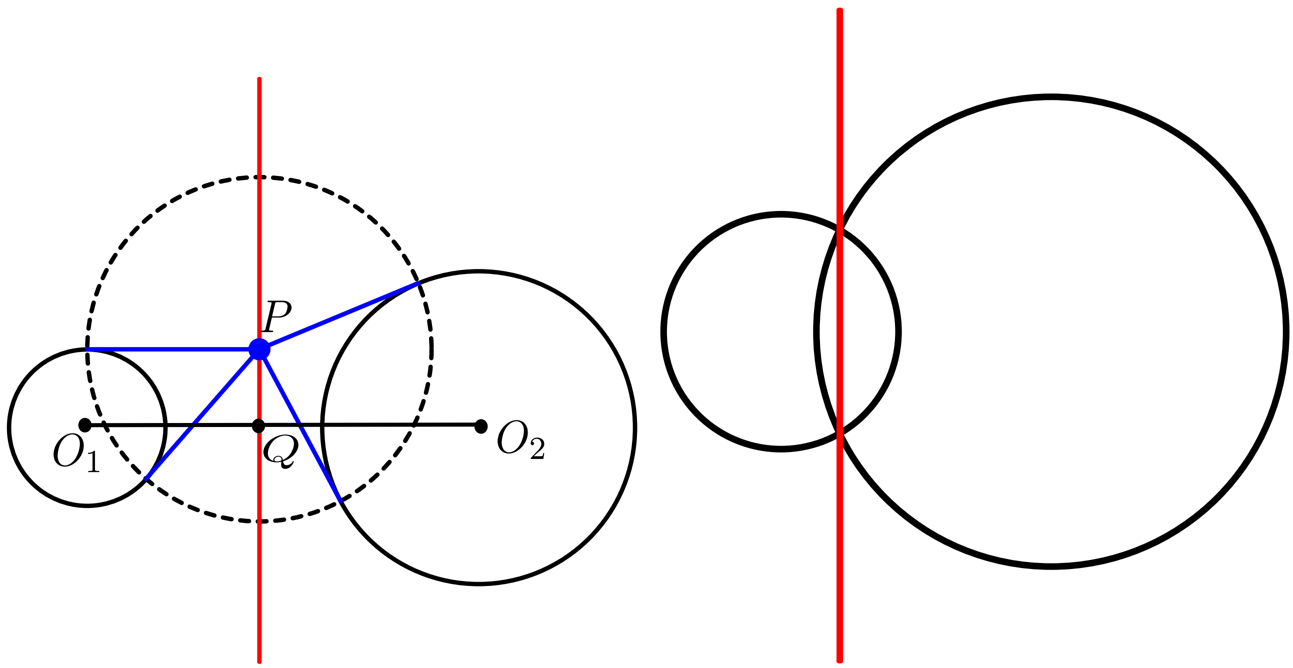
$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD \tag{1}$$

(1)式即为托勒密定理。

作业: 证明托勒密定理。

[1]S在圆内时，圆幂是负值，其绝对值等于$AS \cdot SC$

2. 如图 2a 所示，P 到两圆的幂相等，即切线长相等，则 $PO_1^2-r_1^2=PO_2^2-r_2^2$, 其中 r_1,r_2 分别为 O_1,O_2 的半径。$PQ\perp O_1O_2$。由勾股定理 $PO_1^2-PO_2^2=QO_1^2-QO_2^2 \Rightarrow QO_1^2-r_1^2=QO_2^2-r_2^2$, 所以 Q 到两圆的幂相等。由 P 的任意性，直线 PO 上所有的点对两圆等幂。称 PQ 为两圆的根轴，根轴垂直于连心线。



(a) 两圆不交　　(b) 两圆相交

图 2: 根轴定理示意图

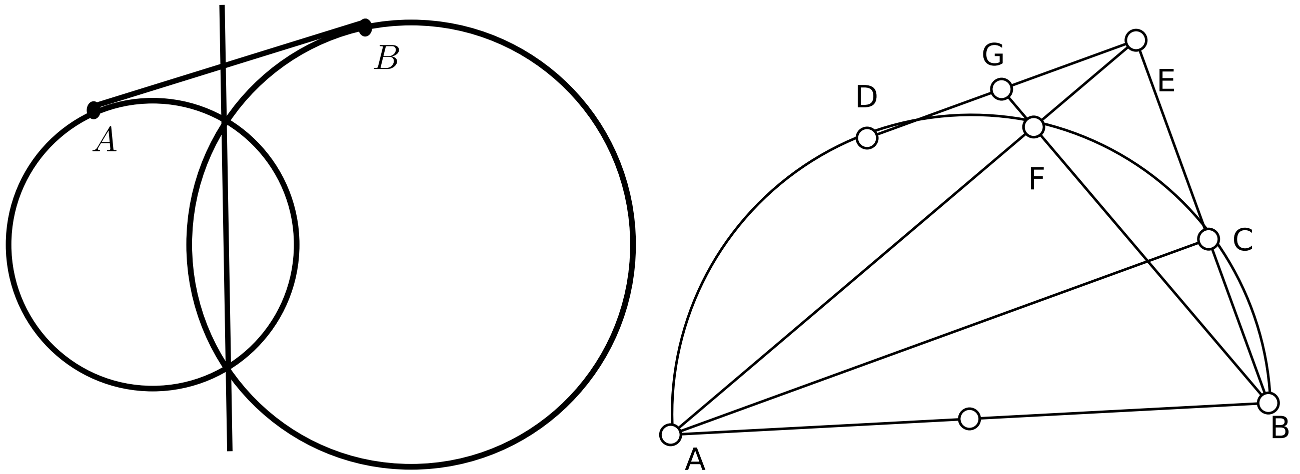
如图 2b 所示，当两圆相交时，公共弦所在直线即为根轴。

3. 课堂练习:

   (a)（圆幂）如图 3a，Γ_1,Γ_2 是两个相交的圆。AB 是 Γ_1,Γ_2 的公切线，A,B 分别是切点。证明两圆的公共弦平分 AB。

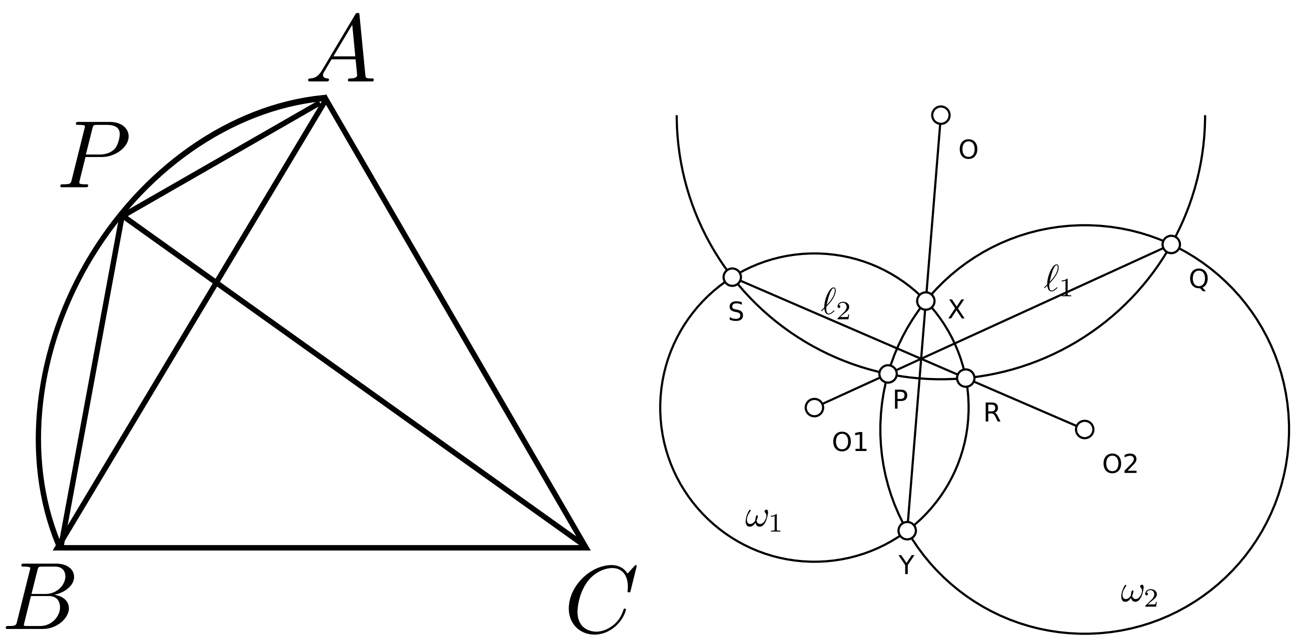
   (b) **作业**:（综合）如图 3b, 设 C 是直径为 AB 的半圆上的一点，D 是弧 AC 的中点。过 D 作 BC 的垂线，垂足为 E，F 是 AE 和半圆的交点。证明 BF 的延长线平分线段 DE。（提示：设圆心为 O，连接 DO 交 AE 于 J，交 AC 于 H，说明 $DECH$ 是长方形，由此推出 $DJ=\frac{1}{2}EC, \triangle DJE\sim\triangle GEB \Rightarrow \frac{DJ}{GE}=\frac{DE}{EB}$, 利用 $DHCE$是矩形说明DE是切线,$DE^2=GE\cdot EB \Rightarrow DE=2GE$）

   (c)（托勒密定理）如图 4a,$\triangle ABC$ 是等边三角形，P 是 $\triangle ABC$ 外接圆弧上劣弧 AB 上一点，证明 $PC=PA+PB$。能否用全等三角形证明?



(a) (b)

图 3



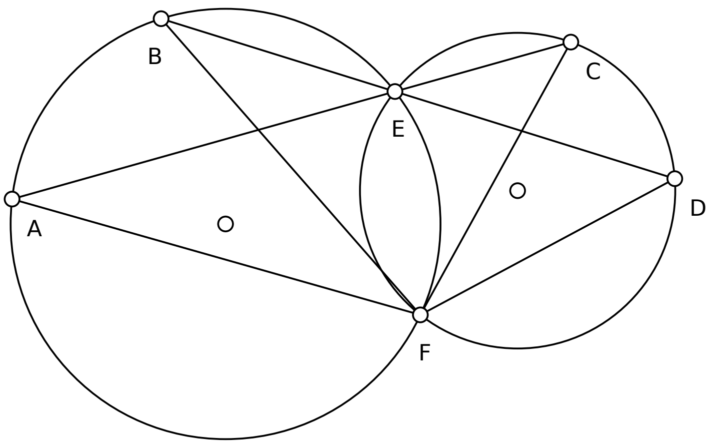
(a) (b)

图 4

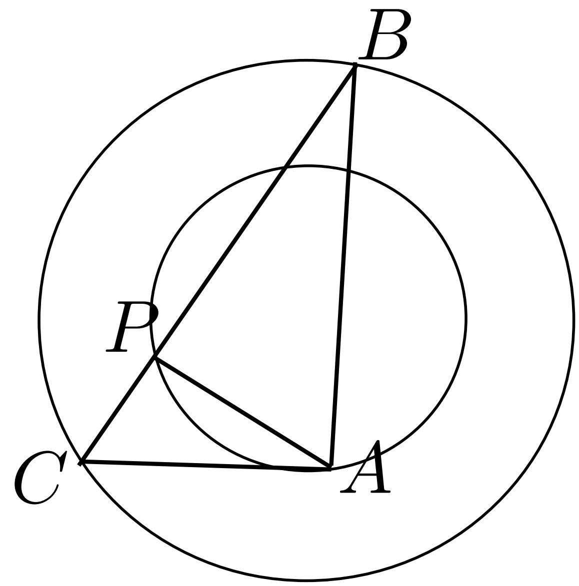
(d)（根轴）如图 4b, 圆 ω_1,ω_2 相交于 X,Y, 直线 ℓ_1 过 ω_1 的圆心 O_1 交 ω_2 于 P,Q 两点，直线 ℓ_2 过 ω_2 的圆心 O_2 交 ω_1 于 R,S 两点。已知 P,Q,R,S 四点共圆，圆心为 O。求证：圆心 O 在直线 XY 上。（提示：设 P,Q,R,S 四点圆为 ω,O_1 在 ω,ω_2 两圆的根轴上，O_1 对 ω 的幂等于 O_1 对 ω_2 的幂，同理 O_2 对 ω 的幂等于 O_2 对 ω_1 的幂，利用这两个等式可以推出 O 对 ω_1 的幂等于 O 对 ω_2 的幂）

4. **作业**

(a)（倒角）如图 5a所示，A,B,C,D 是平面上四个不同的点，AC 和 BD 不平行。AC 和 BD 交于 E。$\triangle ABE$ 的外接圆与 $\triangle CDE$ 的外接圆相交于点 F。证明 $\triangle AFC \sim \triangle BFD$。



(a)



(b)

图 5

(b)（圆幂）如图 5b所示，考虑两个同心圆，半径分别为 R 和 $r(R>r)$。P 在小圆圆弧上，B 在大圆圆弧上，BP 交大圆圆弧于 C。过 P 作 BP 的垂线交小圆圆弧于 A。证明:$BC^2+CA^2+AB^2=6R^2+2r^2$ （提示：设 BC 交小圆圆弧于 Q，$BQ=CP,AQ=2r,CP\cdot PB=R^2-r^2$，利用圆幂、勾股定理计算化简）