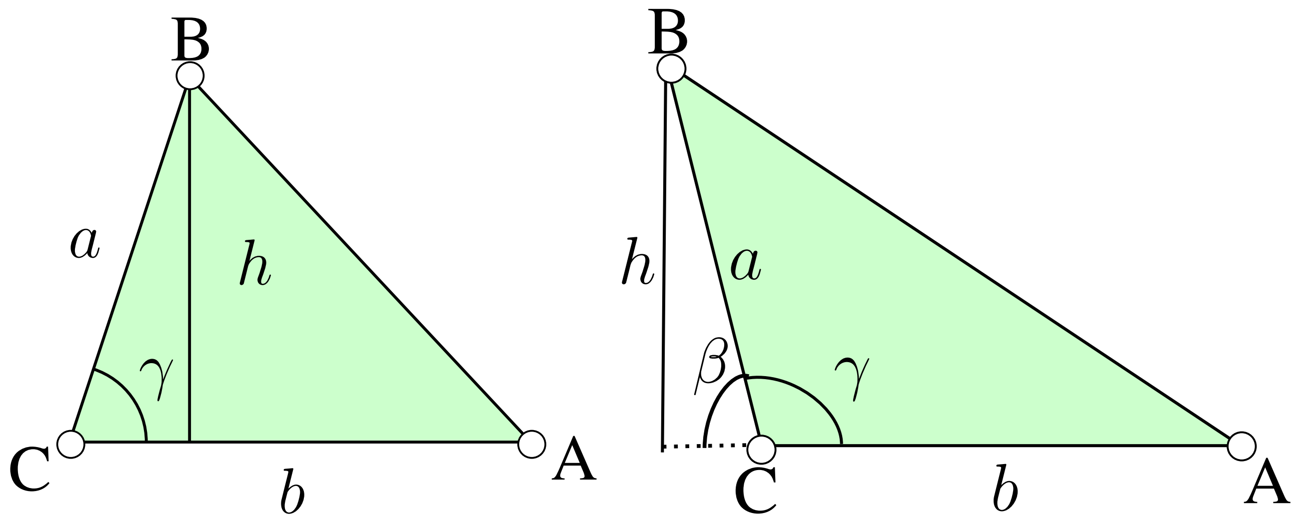
平面几何第三次讲座讲义

赵丰 616545598@qq.com*

2020 年 8 月 9 日

关键词：面积方法、塞瓦定理

1. 如图 1a 所示，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$。



(a) 角 C 是锐角　　(b) 角 C 是钝角

   如图 1b 所示，当角 C 是钝角时，$\beta+\gamma=180°$。规定 $\sin\beta=\sin\gamma$。有 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$。

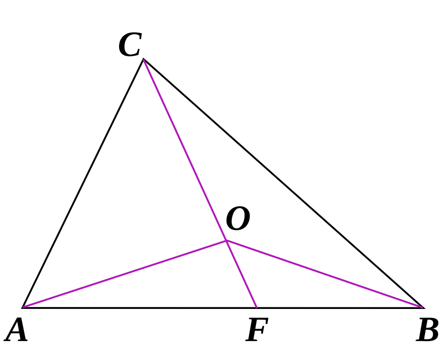
2. 如图 2a 所示，O 是三角形 ABC 内部一点，CO 交 AB 于 F,$\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}}=\frac{AF}{BF}=\frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle BOF}}$ 所以 $\frac{AF}{BF}=\frac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle BCO}}$

   如图 2b所示，$\frac{AO}{BO}=\frac{S_{\triangle CAO}}{S_{\triangle CBO}}$ 又 $\frac{AO}{BO}=\frac{S_{\triangle FAO}}{S_{\triangle FBO}}\Rightarrow\frac{AO}{BO}=\frac{S_{\triangle CAF}}{S_{\triangle CBF}}$

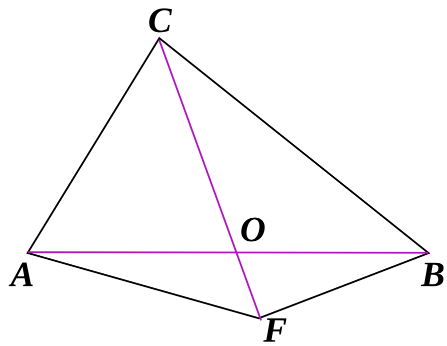
   如图 2c 所示，O 是三角形 ABC 内部一点，AO,BO,DO 分别交对边于 D,E,F, 则

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 \tag{1}$$

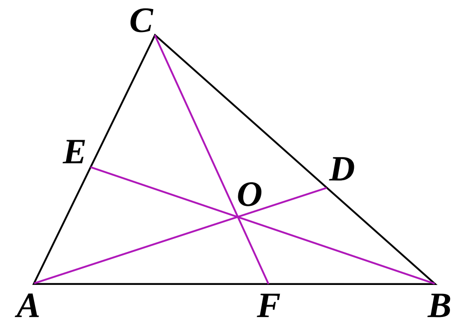
   (1)式即为塞瓦定理，（**作业**）试证明该定理。



(a) 面积比示意图



(b)

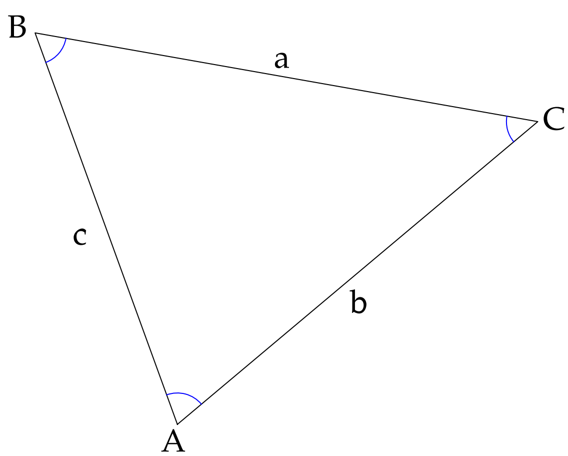


(c) 塞瓦定理示意图

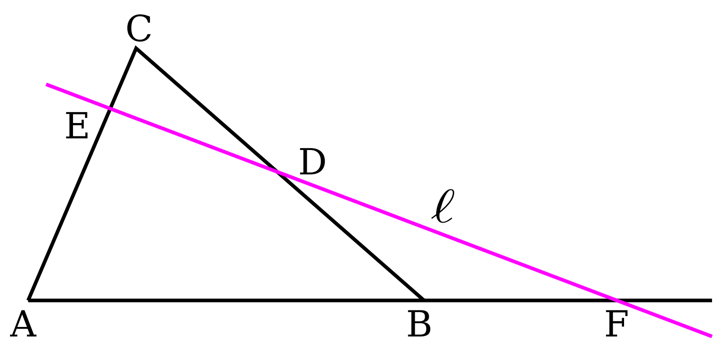
3. 课堂练习：

(i)（面积方法）如图 3a, 在锐角 $\triangle ABC$ 中，证明

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \tag{2}$$



(a)



(b)

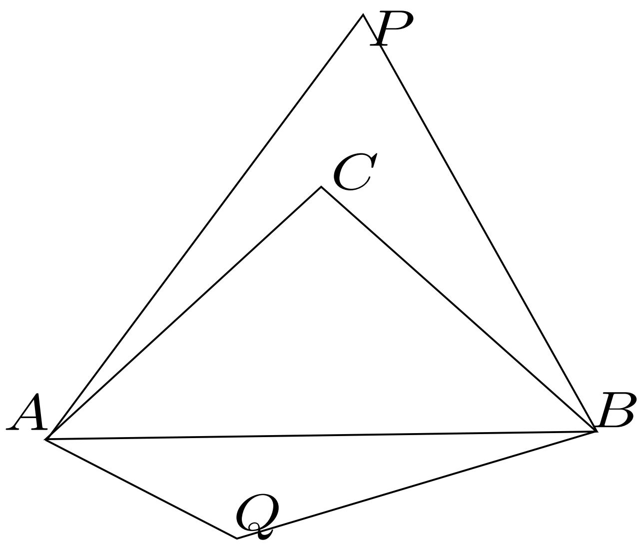
图 3

(ii) 如图 3b，直线 ℓ 交 $\triangle ABC$ 三边或其延长线于 D,E,F, 求证：

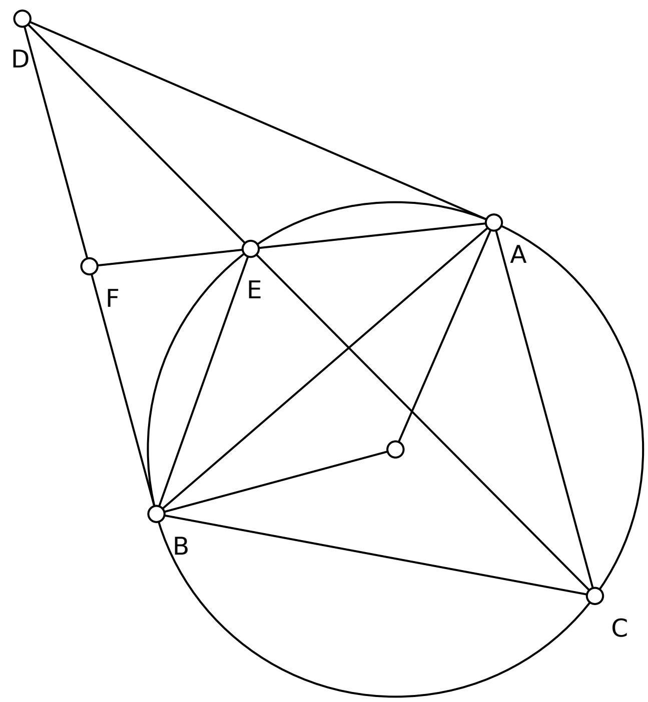
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 \tag{3}$$

（提示：利用面积比，$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle DBF}}$。类似塞瓦定理证明。）

(iii) 如图 4a, 在等腰 $\triangle ABC$ 中，$CA=CB$，点 P,Q 分别位于线段 AB 的两侧，且 $\angle CAP=\angle ABQ,\angle CBP=\angle BAQ$。证明 P,C,Q 三点共线（提示：设 PC 交 AB 于 T, 则 $\frac{AT}{TB}=\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{PA\sin\angle PAC}{PB\angle PBC}$。设 PQ 交 AB 于 R, 则 $\frac{AR}{RB}=\frac{S_{\triangle PAQ}}{S_{\triangle PBQ}}=\frac{PA\cdot AQ}{PB\cdot BQ}=\frac{PA\sin\angle ABQ}{PB\sin\angle BAQ}$ 由此推出 $\frac{AT}{TB}=\frac{AR}{RB}$）



(a)



(b)

图 4

(iv)（**作业**，综合）如图 4b,A,B,C 是圆 Γ 上的三点，$AB=BC$。过 A,B 圆 Γ 的切线相交于 D。DC 交圆 Γ 于点 E，求证 AE 平分线段 BD。（提示：证 $BD \parallel AC$，$\frac{DF}{FB}=\frac{DA\sin\angle DAF}{AB\sin\angle EAB}$，$\frac{DA}{AB}=\frac{BD}{BC}=\frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle BDC} \Rightarrow \frac{DF}{FB}=\frac{\sin\angle DCB\cdot\sin\angle DAF}{\sin\angle BDC\cdot\sin\angle EAB}$。）