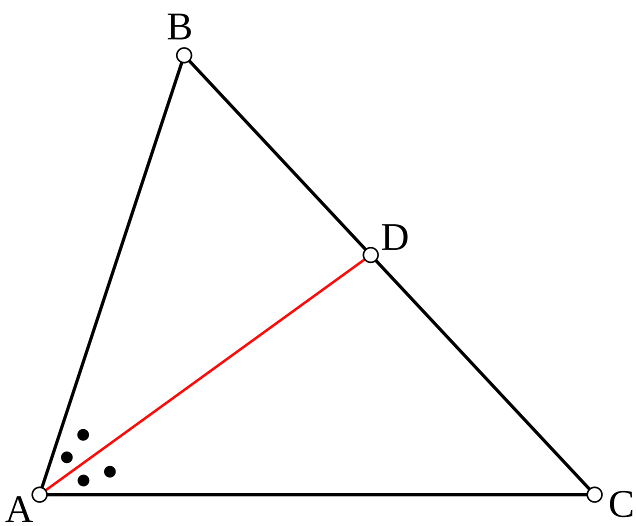
平面几何第一次讲座讲义

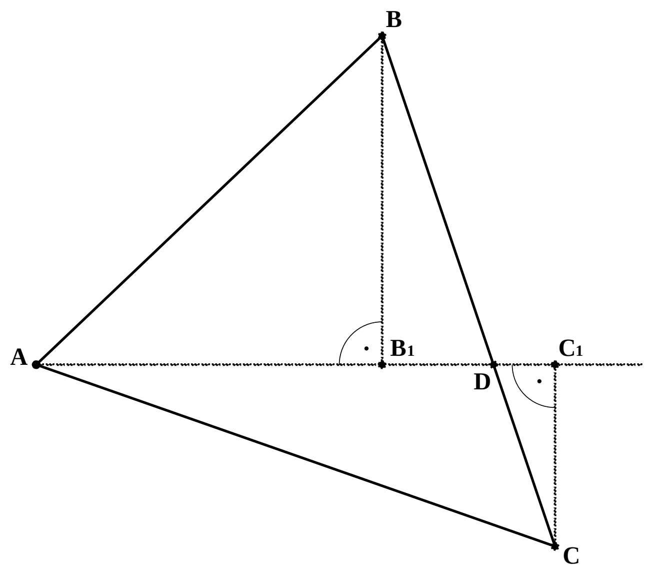
赵丰*

2020 年 8 月 9 日

1. 如图 1a 所示，$\angle BAD = \angle DAC \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$，此为角平分线定理及其逆定理。



(a) 角平分线定理示意图



(b) 角平分线证明用图

一般的, 去掉 $\angle BAD = \angle DAC$ 的条件，在图 1b 中有：

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB\sin\angle DAB}{AC\sin\angle DAC}$$

角平分线逆定理的证明如下：

证明. 在图 1b 中，过 B 作 $BB_1 \perp AD$，垂足为 B_1; 过 C 作 $CC_1 \perp AD$, 垂足为 C_1。因为 $\triangle BB_1D \sim \triangle CC_1D$, 所以 $\frac{BD}{DC} = \frac{BB_1}{CC_1}$。因为 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, 所以 $\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$。即 $\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC} \Rightarrow \sin\angle BAD = \sin\angle CAD$。因为 $\angle BAD, \angle CAD$ 都是锐角，所以 $\angle BAD = \angle CAD$。 □

另证.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD}{AC\cdot AD\cdot\sin\angle DAC} = \frac{AB}{AC}$$

□

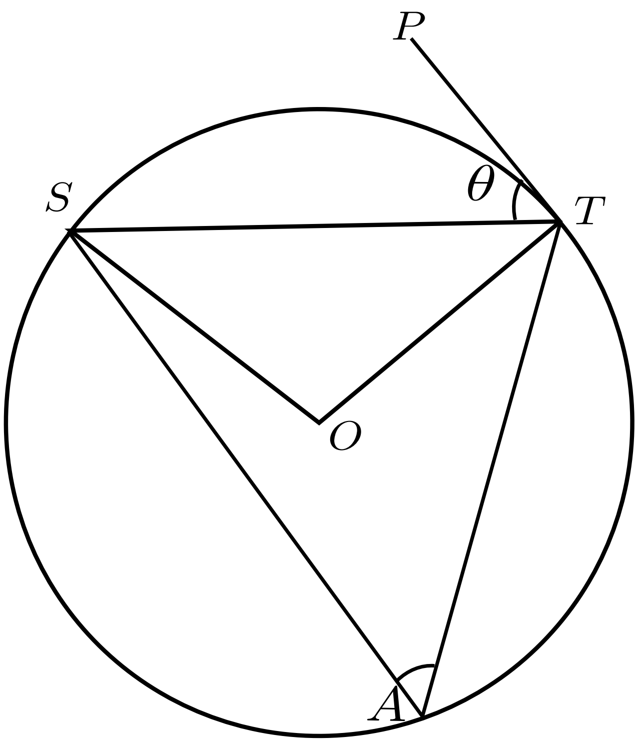
作业：证明角平分线定理。即在图 1a 中，已知 $\angle BAD = \angle DAC$, 证明 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$。

2. 如图 2a所示，TP 是圆 O 的切线，$\angle PTS$ 是弦切角。有性质 $\angle PTS = \angle TAS$

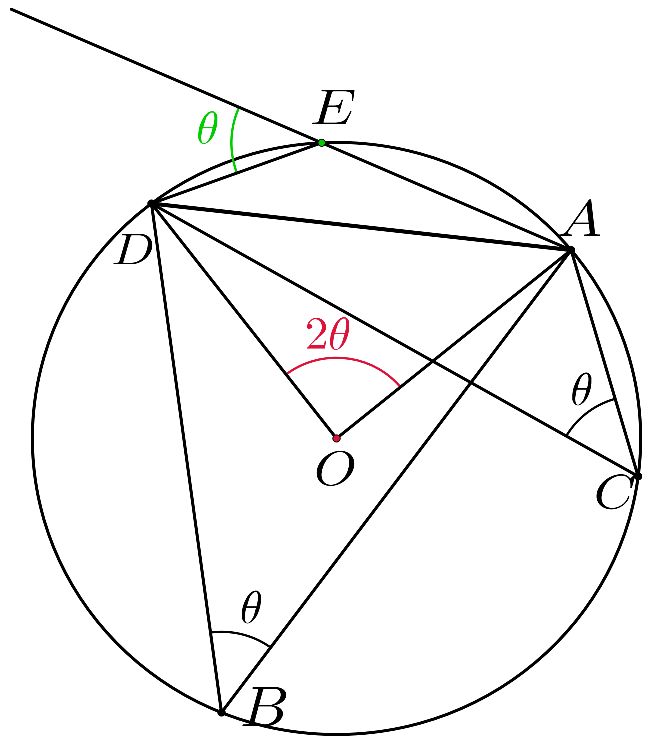
证明.

$$\angle PTS = 90^\circ - \angle STO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle STO - \angle TSO) = \frac{1}{2}\angle TOS = \angle TAS$$

□



(a) 弦切角示意图



(b) 四点共圆示意图

如图 2b所示，A, B, C, D 四点共圆 $\Leftrightarrow \angle B = \angle C$

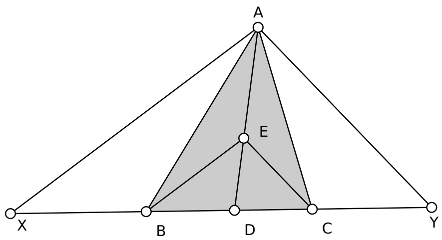
并且我们还有：A, B, D, E 四点共圆 $\Leftrightarrow \angle E = \angle B$ 或者 $\angle B + \angle DEA = 180^\circ$

练习 (**作业**)：

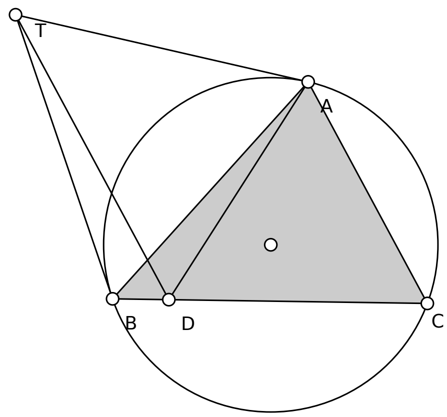
(1) 如图 3a，AD 为 $\angle BAC$ 的角平分线，交 BC 于 D 点，E 为 AD 上一点，过 A 作 BE 的平行线交 CB 于 X, 作 EC 的平行线交 BC 于 Y, 证明 $BX \cdot AC = CY \cdot AB$。

(2)（弦切角与四点共圆综合）如图 3b, 过 A, B 的 $\triangle ABC$ 的切线交于 T。过 T 作 $TD \parallel AC$ 交 BC 于 D, 证明 $AD = CD$。

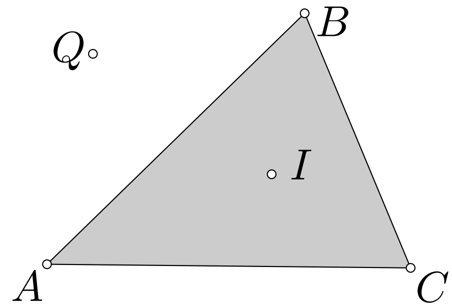
(3)（四点共圆）如图 3c, 考虑 $\triangle ABC$, I 是它的内心,Q 是 $\triangle ABI$ 的外心, 求证 CIQ 三点共线以及 $QACB$ 四点共圆。



(a) 角平分线练习题示意图



(b) 弦切角与四点共圆练习题示意图



(c) 综合练习题示意图

证明.

$$
\begin{aligned}
&\angle AIB=\angle ACB+\angle IBC+\angle IAC\\
\Rightarrow&\angle QAI+\angle QBI=2\angle BCI+\angle ABI+\angle BAI\\
\Rightarrow&\angle QAB+\angle QBA=2\angle BCI\\
\Rightarrow&\angle QAB=\angle BCI=\angle ACI
\end{aligned}
$$

所以 $\angle QIA=\angle QAI=\angle QAB+\angle BAI=\angle ACI+\angle IAC$ 即 QIC 三点共线，由 $\angle QAB=\angle BCI$ 易知 $QACB$ 四点共圆。 □

(4) 沿用图 3c,I 是 $\triangle ABC$ 的内心，延长 CI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 Q, 求证 Q 是 $\triangle ABI$ 的外心。