

2012-2017 年全国高中数学联赛二试平面几何题目*

整理者：赵丰 616545598@qq.com[†]

2020 年 8 月 9 日

1. (2012 年, 30 分) 如图 1a, 圆 I 内切于圆 O , 切点为 P , 圆 O 的弦 AB 切圆 I 于点 Q , PQ 的延长线交圆 O 于点 M , MN 为圆 O 的直径. 过点 P 作 PA 的垂线交 AN 于点 C , 求证: C, I, Q 三点共线。

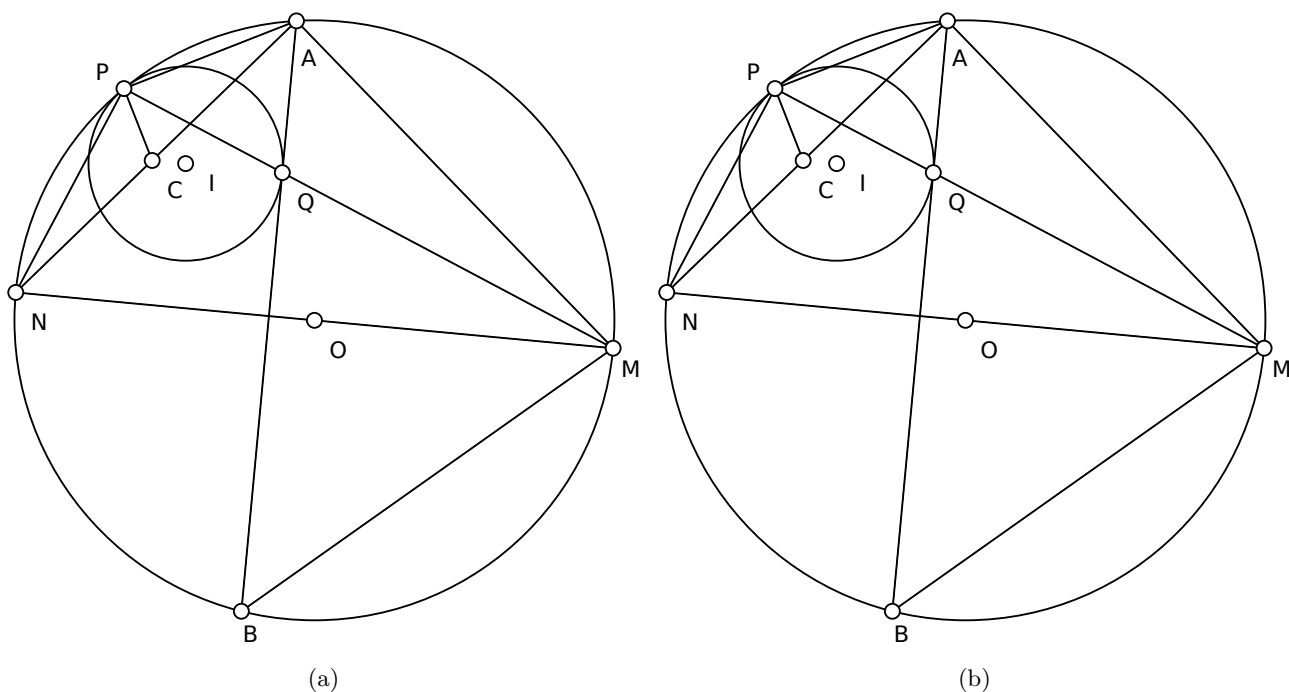


图 1

2. (2013 年, 30 分) AB 是圆 ω 的一条弦, P 为弧 AB 内的一点, E, F 为线段 AB 上的两点, 满足 $AE = EF = FB$. 连接 PE, PF 并延长, 与圆 ω 分别交于点 C, D , 求证:

$$EF \cdot CD = AC \cdot BD$$

3. (2014 年, 40 分) 如图 3a, 在锐角三角形 ABC 中, $\angle BAC \neq 60^\circ$, 过点 B, C 分别作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 BD, CE , 且满足 $BD = CE = BC$. 直线 DE 与 AB, AC 的延长线分别交于点 F, G . 设 CF 与 BD 交于点 M , CE 与 BG 交于点 N . 证明: $AM = AN$.

*试题均来源于百度文库, 查询某年试题答案的一种方法是百度搜索“XX 年全国高中数学联赛二试”

[†]All pictures in this document are produced by software C.a.R., therefore licensed by Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International. All text contents are not licensed.

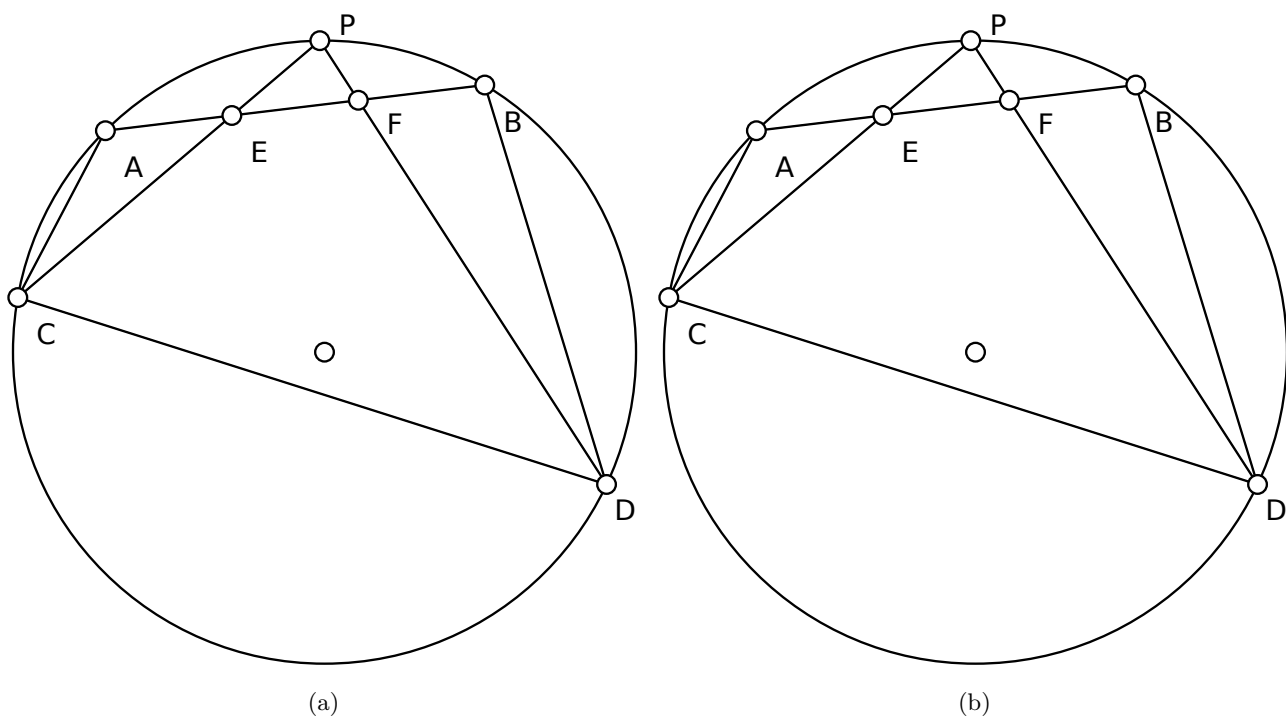


图 2

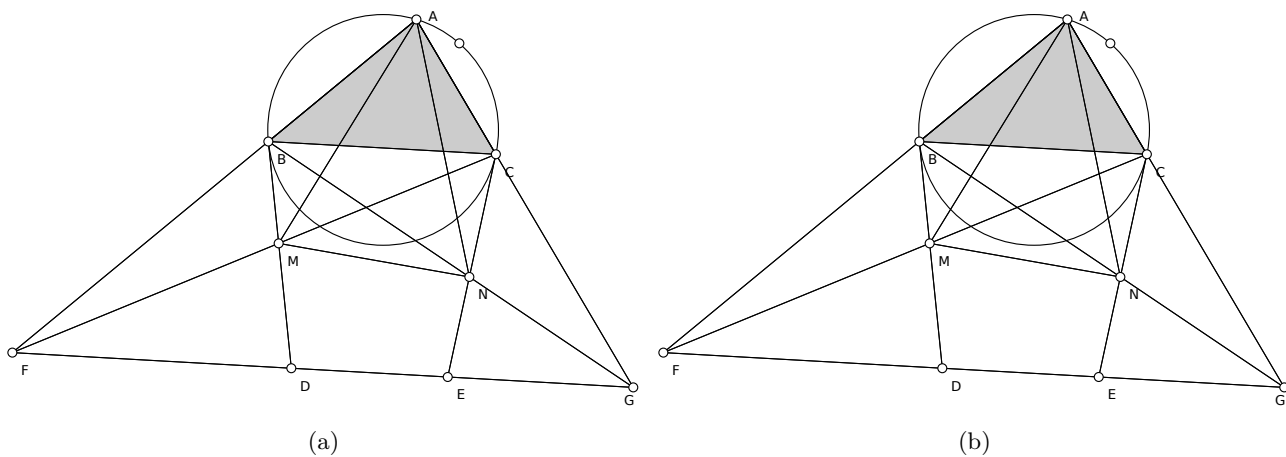


图 3

4. (2015 年,50 分) 如图 4a, $\triangle ABC$ 内接于圆 O , P 为 \widehat{BC} 上一点, 点 K 在线段 AP 上, 使得 BK 平分 $\angle ABC$, 过 K, P, C 三点的圆 Ω 与边 AC 交于点 D , 连接 BD 交圆 Ω 于点 E , 连接 PE 并延长与边 AB 交于点 F 。证明: $\angle ABC = 2\angle FCB$ 。
5. (2016 年,40 分) 如图 5a, 在 $\triangle ABC$ 中, X, Y 是直线上两点 (X, B, C, Y) 顺序排列, 使得 $BX \cdot AC = CY \cdot AB$ 。设 $\triangle ACX, \triangle ABY$ 的外心分别为 O_1, O_2 , 直线 O_1O_2 与 AB, AC 分别交于点 U, V 。证明: $\triangle AUV$ 是等腰三角形。
6. (2017 年 A 卷,40 分) 如图 6a, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, I$ 为 $\triangle ABC$ 的内心, 以 A 为圆心, AB 为半径作圆 Γ_1 ; 以 I 为圆心, IB 为半径作圆 Γ_2 , 过点 B, I 的圆 Γ_3 与 Γ_1, Γ_2 分别交于点 P, Q (不同于点 B), 设 IP 与 BQ 交于

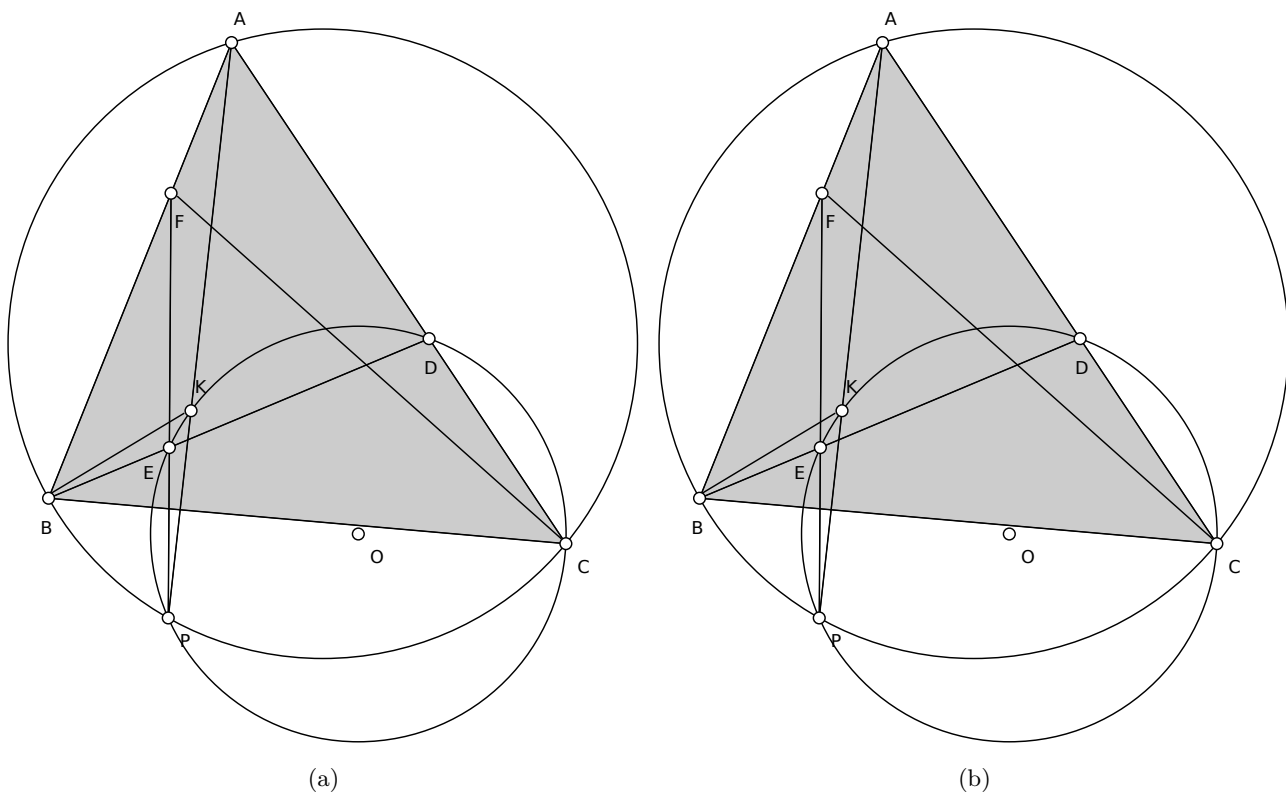


图 4

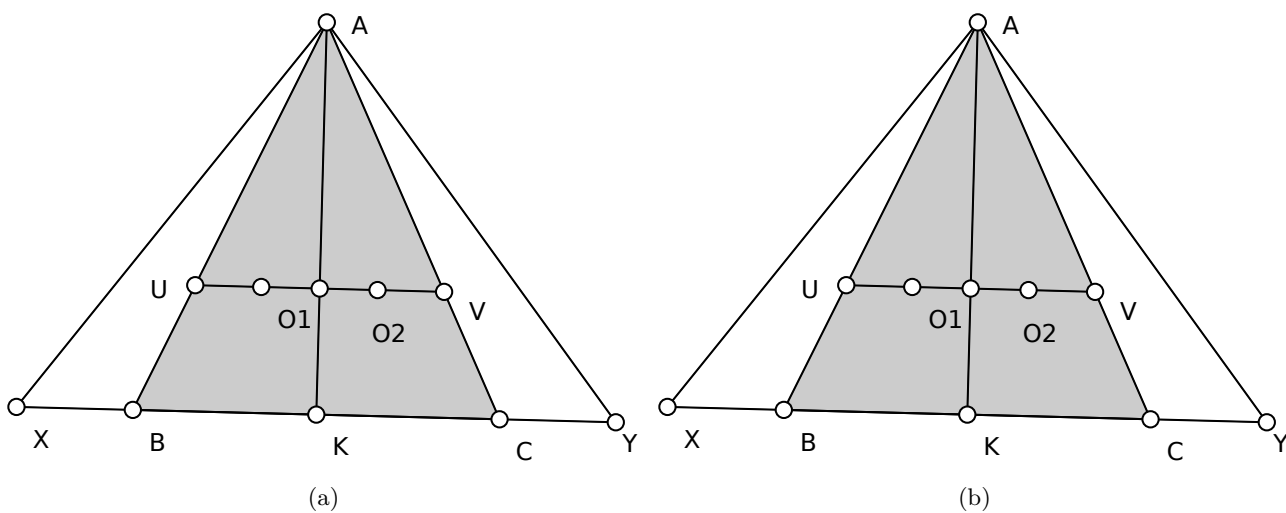


图 5

点 R 。证明: $BR \perp CR$ 。

7. (2017 年 B 卷, 50 分) 如图 7a, 点 D 是锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆 ω 上弧 BC 的中点, 直线 DA 与圆 ω 过点 B, C 的切线分别相交于点 P, Q , BQ 与 AC 的交点为 X , CP 与 AB 的交点为 Y , BQ 与 CP 的交点为 T , 求证: AT 平分线段 XY 。

