2025 年春季学期随机微分方程测试题

田草林

May 2025

一、停时

1. 谈谈你对停时这个概念的理解;
2. 谈谈你对马氏过程的理解;
3. 举一个是马氏过程但不是强马氏过程的例子。

解:

1. 停时是一个表示时间的随机变量，一般是一个随机事件发生的时刻。数学上的定义是一个概率空间，$(\Omega, F, \mathcal{F}_t, P)$ 上的一个时间随机变量 $\tau : \Omega \to T$ 满足任意 $t > 0$, $\{\tau(w) < t\} \in \mathcal{F}_t$, 那么 τ 便是一个 $\mathcal{F}_t$-停时。例如在布朗运动 W_t 可以定义 τ 为随机过程第一次经过 ω 的的时刻，记为 τ_ω。在金融数学中，股票交易时，投资者基于当前形势买入或卖出的决策点也是一个停时。停时在概论论中是一个非常实用的概念，为研究随机过程提供了强大工具。比如在研究随机微分方程和扩散过程中，停时常用来研究路劲的边界行为。停时甚至提供了从概率论的角度解 PDE 的方法。

2. 马尔可夫过程是说一个随机过程未来发生的概率只与当前时刻发生的事件相关，而与过去已经发生的事件无关。数学上的定义是设有一个随机过程 X_t，如果对任意的时间序列 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 有

$$P(X_{t_n} = x_n | X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

则称 X_t 为马尔可夫过程或者简称马氏过程。与强马尔可夫性质不同的时，强马尔可夫性质说的是停时之后发生的事件与停时之前的事件无关；当然强马尔可夫性质蕴含马尔可夫性质。马尔可夫过程中的一类特殊情形是扩散模型，如今在人工智能，金融等领域都有重要作用。基于马尔可夫链的蒙

特卡洛方法，通过模拟马尔可夫链的运行轨迹，对复杂系统进行采样和推断，也是统计学、不确定性量化等领域中的重要技术。马尔可夫过程本身也是概率论中的基础概念之一。

3. 这样的例子有很多，考虑一条无限长、有一处自交的线，和上面的一个布朗运动。在自交的那个点，过程是不知道往哪边走的。所以把停时设为访问这个点的时间，过去会影响未来，则强马氏性不成立。但是马氏性是满足的，因为对于固定的时间，过程在自交的那个点的概率为 0，不影响马氏性。

二、布朗运动

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 为满足通常条件的概率空间。

1. 叙述一维 $\mathcal{F}_t$-布朗运动 $(W_t)_{t\geq 0}$ 的定义；
2. 证明 W_t 是一个 $\mathcal{F}_t$-鞅；
3. 对于任意有界时，令 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$，$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+\tau}$。证明 (B_t) 为 $\mathcal{G}_t$-布朗运动，且和 $\mathcal{G}_0$ 独立。

解： 如果一个随机过程 W_t 关于域流 $\mathcal{F}_t$ 适应，并且满足条件 $W_0 = 0$，对于任意 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, i = 1, \ldots, n$ 互相独立，并且 $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t_i - t_{i-1}))$, 其中 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 表示均值为 0 方差为 σ^2 的正态分布. 那么 $(W_t)_{t\geq 0}$ 是 $\mathcal{F}_t$-布朗运动。

2. 对于假设 $t < s$, 那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[W_s - W_t|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_t] \\ &= W_t.\end{aligned}$$

故而 W_t 是 $\mathcal{F}_t$-鞅。

3. 证明：不难知 B_t 关于域流 $\mathcal{G}_t$ 适应并且 $B_0 = 0$, 对于任意 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ 我们有 $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} = W_{t_i+\tau} - W_{t_{i-1}+\tau}$, $i = 1, \ldots, n$ 是相互独立的，并且 $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t_i - t_{i-1}))$. 因而 B_t 关于 $\mathcal{G}_t$-布朗运动。对任意 B_t,

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{G}_0] = \mathbf{E}[W_{t+\tau} - W_\tau|\mathcal{F}_\tau] = 0$$

故而，B_t 关于 $\mathcal{G}_0$ 独立。

三、DDS 定理

令 W_t 为 1-维布朗运动。证明

1. 对于任意的 $\lambda > 0$，$X_t = e^{\lambda|W_t|}$ 是一个下鞅；
2. 证明 $P(\sup_{0\le s\le t}|W_s| > x) \le 2e^{-\frac{x^2}{2t}}$；
3. 令 $\sigma : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ 关于由 W_t 生成的 σ-域流适应，且 $1/2 \le |\sigma| \le 2$。定义 $x_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$。证明存在一个与 σ 无关的常数 c，使得 $P(\sup_{0\le s\le t}|x_s| > x) \le 2e^{-\frac{cx^2}{t}}$；
4. 令 x_t 为 (3) 中给定的随机过程。证明存在一个正常数 $\mu > 0$，使得 $Ee^{\mu\tau_1} < \infty$，其中 $\tau_1 = \inf\{t > 0 : |x_t| > 1\}$；
5. 可以利用上述 1-维的结果，把相同的结论推广到 d-维情形吗？简要说明你的理由。

证明：1. 因为 $\lambda > 0$, $e^{\lambda x}$ 是凸函数，由 Jensen 不等式，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_s|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[e^{\lambda|W_s|}|\mathcal{F}_t] \\ &\ge e^{\mathbb{E}[\lambda|W_s||\mathcal{F}_t]} = e^{\lambda|W_s|} \\ &= X_t.\end{aligned}$$

故而 X_t 是一个下鞅。

2. 令 $W^* = \sup_{0\le s\le t}|W_s|$, $X^* = \sup_{0\le s\le t} X_s$, 由 Doob 不等式

$$\begin{aligned}P(W^* > x) &= P(e^{\lambda W^*} > e^{\lambda x}) \\ &= P(X^* > e^{\lambda x}) \\ &\le e^{-\lambda x}\mathbb{E}[X_t] \\ &= 2e^{-\lambda x}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\int_0^\infty e^{\lambda y}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 t}}dy \\ &= 2e^{-\lambda x+\frac{\lambda^2\sigma^2 t}{2}} \le 2e^{-\frac{x^2}{2t\sigma^2}}.\end{aligned}$$

最后一个不等式通过优化 λ 所得。取 $\sigma^2 = 1$ 可得题目中的式子。

3. 考虑 x_t 的二次变差，$<x>_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$. 因为 $1/2 \le |\sigma_s| \le 2$,

$$\frac{t}{4} \le <x>_t \le 4t.$$

定义 $\tau(s)=\inf\{t\geq 0:<x>_t>s\}$, 由 Dambis-Dubins-Schwarz 定理知，$W_s=x_{\tau(s)}$ 是一个标准布朗运动，并且 $B_{<x>_t}=x_t$. 同时

$$\tau(s/4)\leq s\leq \tau(4s).$$

因而

$$\sup_{0\leq s\leq t}|x_s|=\sup_{0\leq s\leq t}|W_{<x>_s}|\leq \sup_{0\leq u\leq 4t}|W_u|,$$

因为 W_u 是标准布朗运动，由 2. 知

$$P(\sup_{0\leq u\leq T}|W_u|>x)\leq 2e^{-\frac{x^2}{2T}},$$

故而，令 $T=4t$,

$$P(\sup_{0\leq s\leq t}|x_s|>x)\leq P(\sup_{0\leq u\leq 4t}|W_u|>x)\leq 2e^{-\frac{x^2}{8t}}.$$

因而原命题成立。

4. 利用时间变换，我们知

$$\tau_1=\inf\{t>0:|W_{<x>_t}|>1\},$$

因为 $<x>_t\leq\frac{t}{4}$, 有

$$\tau_1\leq\inf\{t>0:|W_{4t}|>1=4\inf\{s>0:|W_s|>1\}.$$

记 $\tau_1^W=\inf\{s>0:|W_s|>1\}$，我们有

$$\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1^W}]<\infty$$

当且仅当 $\mu\leq\frac{\pi^2}{8}$。因为 $\tau_1\leq 4\tau_1^W$, 所以

$$\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}]\leq\mathbb{E}[e^{4\mu\tau_1^W}]<\infty$$

只要 $\mu<\frac{\pi^2}{32}$.

5. 能吧,需要将绝对值条件变成矩阵范数,而证明中核心定理如 Dambis-Dubins-Schwarz 定理都有相应的高维形式。最终结果会依赖维数便。

四、相对熵

给定两个概率分布 P,Q，定义:

$$H(P|Q)=E_P\left[\log\frac{dP}{dQ}\right]$$

设

$$X_t = W_t + h_t,$$

其中 W_t 是 1-维标准布朗运动，$h_0 = 0$ 且 $\dot{h}_s = \frac{d}{ds}h_s \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$。求 X_t 的路径分布 Q 相对于 Wiener 测度 P（W_t 的分布）的相对熵 $H(Q|P)$。**解：** 因为 $X_t = W_t + \int_0^t \dot{h}_s ds$, 并且 $\int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds < \infty$, 由 Girsanov 定理，过程 X_t 相对于 Q 是一个布朗运动，并且

$$\frac{dQ}{dP} = \exp(-\int_0^\infty \dot{h}_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_t^2 dt).$$

所以 $\mathbb{E}_Q[\frac{dQ}{dP}] = \mathbb{E}_Q[\int_0^\infty \dot{h}_t dW_t] - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_t^2 dt$. 并且

$$dW_t = -dX_t + \dot{h}_t dt$$

故而

$$\begin{aligned} H(Q|P) &= \mathbb{E}_Q[\log \frac{dQ}{dP}] \\ &= \mathbb{E}_Q[-\int_0^\infty \dot{h}_t dX_t + \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_t^2 dt] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_t^2 dt. \end{aligned}$$

同时我们也可以计算 $H(P|Q)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[\log \frac{dP}{dQ}] &= -\mathbb{E}_P[\log \frac{dQ}{dP}] \\ &= -\mathbb{E}_P[\int_0^\infty \dot{h}_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_t^2 dt] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_t^2 dt. \end{aligned}$$

故而，此即

$$H(P|Q) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_t^2 dt.$$

五、调和方程

令 $d \geq 2$，$D = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1, x \neq 0\}$。利用概率方法证明不存在 $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ 满足如下方程:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D \\ u(z) = 0, & \text{如果} |z| = 1 \\ u(z) = 1, & \text{如果} z = 0. \end{cases}$$

证明: 假设 W_t 是起点在 D 上的一个布朗运动, 令 $\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t \in D^c\}$, 根据条件，方程的解可以写为

$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(W_\tau)],$$

可以确定，在有限时间内，布朗运动几乎必然击中 ∂D; 但对于 $d \geq 2$, 可以确定布朗运动几乎必然不会到原点。因此对任意 $x \in D$, 有 $u(x) = 0$, 这与 $u(0) = 1$ 矛盾，因为 $u \in C(\bar{D})$.

六、support 定理

令 D 为 $\mathbb{R}^d$ 中的有界区域，考虑二阶线性椭圆型算子:

$$Lu(x) := a^{ij}(x)\partial_{ij}u(x) + b^i(x)\partial_i u(x), \quad x \in D.$$

假设系数 $a^{ij}, b^i \in C^0(D)$，$a^{ij} \in S_d^\delta$。设 $u \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$ 满足 $Lu(x) \geq 0$, $x \in D$，且 u 在 D 内部某点 x_0 处取得最大值。用 support 定理证明：要么 u 在 D 上恒等于常数，要么最大值只能出现在边界上（强极值原理）。**证明:** 假设 u 在 x_0 处取得最大值 $M = u(x_0)$ 并且 u 不是常数。因为 L 是二阶椭圆算子，可以定义一个以 L 为生成元的扩散过程，即

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, X_0 = x_0.$$

定义停时

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D\},$$

由伊藤公式,

$$u(X_{t\wedge\tau}) - u(x_0) = \int_0^{t\wedge\tau} \partial_i u(X_s)\sigma_k^i(X_s)dW_s^k + \int_0^{t\wedge\tau} Lu(X_s)ds,$$

因为 $Lu \geq 0$，故而

$$u(X_{t\wedge\tau}) \geq u(x_0) + \int_0^{t\wedge\tau} \partial_i u(X_s)\sigma_k^i(X_s)dW_s^k.$$

取期望，可知

$$\mathbb{E}[u(X_{t\wedge\tau})] \geq u(x_0) = M.$$

故而，因为 M 是 u 的最大值，所以 $\mathbb{E}[u(X_{t\wedge\tau})] = M$. 这说明 $u(X_\tau) = M$ 几乎处处成立，由支撑定理，扩散过程 $\{X_t\}$ 的路径的支撑包含所以控制方程生成的路径，或者说 $\{X_{t\wedge\tau}\}$ 在 D 中是稠密的，由于 $u(x)$ 的连续性，知 $u(x) = M, \forall x \in D$. 即说明 $u(x)$ 是一个常数，矛盾。说明强极值原理成立。

七、HJB 方程

考虑一个被控制的扩散过程：

$$dX_t^\alpha = \sigma(X_t^\alpha, \alpha_t)dW_t,$$

其中 X_t 是状态过程，A 是一个控制集合。(α_t) 是一个取值为 A 的循序可测的控制过程，该类过程全体记为 $\mathcal{A}$。控制目标是最小化代价：

$$J(t,x;\alpha) = E_{t,x}g(X_T^\alpha), \quad t \in [0,T].$$

定义最优值函数：

$$u(t,x) = \inf_{\alpha.\in\mathcal{A}} J(t,x;\alpha), \quad t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^d.$$

证明这个函数 $u(t,x)$ 满足 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}\inf_{\alpha\in A}\left\{[\sigma^{ik}\sigma^{jk}(\alpha)\partial_{ij}u]\right\} = 0, \\ u(T) = g. \end{cases}$$

（可先考虑 A 只有一个元素或者有限个元素的情况）

证明： 当 A 只有一个元素时，可以去掉 inf, 此时

$$\partial_t u = \partial_t \mathbb{E}_{t,x}[g(X_T^\alpha)],$$

由扩散过程，我们知 X_t^α 的密度函数满足 FP 方程

$$\partial_t p_t(x) = -\frac{1}{2}\sigma^{ik}\sigma^{jk}(\alpha)\partial_{ij}p_t(x),$$

可知,

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma^{ik}\sigma^{jk}\partial_{ij}\mathbb{E}[g(X_T^\alpha)] = \partial_t u + \frac{1}{2}\sigma^{ik}\sigma^{jk}\partial_{ij}u(x) = 0.$$

对于一般的情况, 需要使用 Bellmen's principle of optimality, 对任意 $h > 0$, $t + h \leq T$, 有

$$u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x}[u(t+h, X_{t+h}^\alpha)].$$

利用伊藤公式,

$$\begin{aligned} u(t+h, X_{t+h}^\alpha) = u(t+h) + \int_t^{t+h} \partial_t u(s, X_s^\alpha)ds + \int_t^{t+h} \nabla u(s, X_s^\alpha)dX_s^\alpha \\ + \frac{1}{2}\int_t^{t+h} \sigma^{ik}\sigma^{jk}(\alpha)\partial_{ij}u(s, X_s^\alpha)ds. \end{aligned}$$

两边取期望, 因为 $dX_s^\alpha = \sigma(X_s^\alpha, \alpha_s)dW_s$, 可知第二项积分期望为 0, 有

$$\begin{aligned} 0 &= \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}[u(t+h, X_{t+h}^\alpha) - u(t+h)] \\ &= \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x}[\int_t^{t+h} \partial_t u(s, X_s^\alpha)ds + \frac{1}{2}\int_t^{t+h} \sigma^{ik}\sigma^{jk}(\alpha)\partial_{ij}u(s, X_s^\alpha)ds]. \end{aligned}$$

故而

$$0 = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}(\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma^{ik}\sigma^{jk}(\alpha)\partial_{ij}u)h + o(h).$$

两边除以 h, 并且使 $h \to 0$,

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}[\sigma^{ik}\sigma^{jk}(\alpha)\partial_{ij}u] = 0.$$

当 $t = T$ 时,

$$u(T,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{T,x}[g(x)] = g(x).$$

所以, $u(t,x)$ 满足上面 HJB 方程。