Homework

邹震

一、

(1)

在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 上，若随机变量

$$\tau : \Omega \to [0, \infty]$$

满足

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \qquad \forall\, t \geq 0,$$

则称 τ 为一个停时。

停时在随机过程理论中是一个核心概念，它表示一个随机的“时间点”，这个时间点的特殊之处在于，我们是否已经到达这个时间点，仅取决于到当前时刻为止的过程历史信息，而不需要预知未来。停时在鞅论中扮演着至关重要的角色，例如可选停止定理 (Optional Stopping Theorem) 就依赖于停时的概念。它允许我们在特定的停时 τ 而非固定的时间 t 来考察鞅的性质; 在随机微分方程中，首次到达某个区域的时间通常是一个停时，这对于分析解的性质非常重要。

(2)

设 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ 为状态空间 $(E, \mathcal{E})$ 上的随机过程。若对任意 $0 \leq s < t$ 及任意有界可测函数 $f : E \to \mathbb{R}$，有

$$\mathbb{E}\big[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[f(X_t) \mid X_s\big],$$

等价于

$$\mathbb{P}\big(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s\big) = \mathbb{P}\big(X_t \in A \mid X_s\big), \quad \forall A \in \mathcal{E},$$

则称 $\{X_t\}$ 为马氏过程。

马氏过程是随机过程中的一类重要模型，其核心特性是“无记忆性”。这意味着过程在任何时刻的未来状态，只依赖于其当前状态，而与它如何到达当前状态的历史路径无关。更简洁地说，给定现在，未来与过去独立。

(3)

令 W_t 为一维布朗运动，定义

$$X_t = \begin{cases} W_t, & t < 1, \\ W_1, & t \ge 1. \end{cases}$$

则

- $\{X_t\}$ 为马氏过程，因为对任意 $s < t$，

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s).$$

- 若取停时 $\tau = 1$，则对于 $t > 0$，

$$X_{1+t} - X_1 = 0,$$

  不再具有布朗运动的独立增量性质，故 $\{X_t\}$ 非强马氏过程。

二、

(1) 一维 $\{F_t\}_{t\ge 0}$-布朗运动的定义

$$\begin{cases} W_0 = 0, \quad P\text{-几乎处处}; \\ \forall\, 0 \le s < t, \quad W_t - W_s \sim N\big(0,\ t-s\big), \\ \quad \text{且对任意} 0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n,\ \{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\}_{i=1}^n \text{ 相互独立}; \\ t \mapsto W_t(\omega) \text{ 路径连续}. \end{cases}$$

(2) 证明 $\{W_t\}$ 为 $\{F_t\}$-鞅

对任意 $0 \le s \le t$，有

$$W_t = W_s + \big(W_t - W_s\big),$$

其中 $W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$, 且

$$E\big[W_t - W_s\big] = 0.$$

因此

$$E\big[\,W_t \mid \mathcal{F}_s\big] = E\big[W_s \mid \mathcal{F}_s\big] + E\big[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s\big] = W_s + 0 = W_s,$$

故 $\{W_t\}$ 为 $\{F_t\}$-鞅。

(3) 停时平移后的布朗运动

令有界停时 τ，定义

$$B_t := W_{t+\tau} - W_\tau, \qquad \mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+\tau}.$$

(a) $B_0 = 0.$

(b) 对任意 $0 \le s < t$，

$$B_t - B_s = \big(W_{t+\tau} - W_\tau\big) - \big(W_{s+\tau} - W_\tau\big) = W_{t+\tau} - W_{s+\tau},$$

由于布朗运动增量的平稳性与独立性，可得

$$B_t - B_s \sim N\big(0,\, t-s\big), \quad B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_s.$$

(c) 路径连续性显然成立.

由此 $\{B_t\}$ 相对于滤子 $\{\mathcal{G}_t\}$ 满足布朗运动的四条定义公理，且

$$\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_\tau \quad \Longrightarrow \quad B_t\ (t>0)\ \perp\!\!\!\perp\ \mathcal{G}_0.$$

故证毕。

三、

(1)

令 W_t 为 1-维布朗运动，则 $W_t - W_s$ 独立于 $\mathcal{F}_s$ 且服从均值为 0、方差为 $t-s$ 的正态分布，$W_t = W_s + (W_t - W_s)$。

$$E[e^{\lambda|W_t|}|\mathcal{F}_s] = E[e^{\lambda|W_s+(W_t-W_s)|}|\mathcal{F}_s]$$

因为 W_s 是 $\mathcal{F}_s$-可测的，有 $E[e^{\lambda|W_s+(W_t-W_s)|}|\mathcal{F}_s] = f(W_s)$，其中 $f(x) = E[e^{\lambda|x+N(0,t-s)|}]$。我们需要证明 $f(x) \ge e^{\lambda|x|}$。令 $Y = W_t - W_s \sim N(0, t-s)$。

$$f(x) = E[e^{\lambda|x+Y|}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda|x+y|} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} dy$$

函数 $g(y) = e^{\lambda|y|}$ 是一个凸函数。根据 Jensen 不等式，对于一个随机变量 Z，$E[g(Z)] \ge g(E[Z])$。考虑函数 $\phi(y) = e^{\lambda|x+y|}$。对于固定的 x，这是关于 y 的凸函数。根据 Jensen 不等式，$E[e^{\lambda|x+Y|}] \ge e^{\lambda|x+E[Y]|}$。由于 $E[Y] = 0$，我们有 $E[e^{\lambda|x+Y|}] \ge e^{\lambda|x|}$。因此，$E[e^{\lambda|W_t|}|\mathcal{F}_s] \ge e^{\lambda|W_s|}$，故 $X_t = e^{\lambda|W_t|}$ 是一个下鞅。

(2)

令 $M_t = \sup_{0\le s\le t} W_s$。对于 $x > 0$，由反射原理，$P(M_t \ge x) = 2P(W_t \ge x)$。由于 $W_t \sim N(0,t)$，$P(W_t \ge x) = P(\frac{W_t}{\sqrt{t}} \ge \frac{x}{\sqrt{t}}) = P(Z \ge \frac{x}{\sqrt{t}})$，其中 $Z \sim N(0,1)$。对于 $z > 0$，$P(Z \ge z) \le \frac{1}{2}e^{-\frac{z^2}{2}}$。所以，$P(W_t \ge x) \le \frac{1}{2}e^{-\frac{(x/\sqrt{t})^2}{2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2t}}$。因此，$P(M_t \ge x) = 2P(W_t \ge x) \le 2 \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2t}} = e^{-\frac{x^2}{2t}}$。现在考虑 $P(\sup_{0\le s\le t}|W_s| > x)$。

$$P(\sup_{0\le s\le t}|W_s| > x) = P(\sup_{0\le s\le t} W_s > x \text{ 或 } \inf_{0\le s\le t} W_s < -x)$$

由布朗运动的对称性，$P(\inf_{0\le s\le t} W_s < -x) = P(\sup_{0\le s\le t} W_s > x)$。所以，$P(\sup_{0\le s\le t}|W_s| > x) \le P(\sup_{0\le s\le t} W_s > x) + P(\inf_{0\le s\le t} W_s < -x) = 2P(\sup_{0\le s\le t} W_s > x)$。利用反射原理的结果，$P(\sup_{0\le s\le t}|W_s| > x) \le 2e^{-\frac{x^2}{2t}}$。

(3)

x_t 是一个连续局部鞅，因为 σ_s 适应且 $|\sigma_s| \le 2$ 有界。其二次变差为 $[x]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$. 由条件 $1/2 \le |\sigma_s| \le 2$，可得 $1/4 \le \sigma_s^2 \le 4$. 故 $[x]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds \le \int_0^t 4ds = 4t$.

根据关于随机积分的指数不等式（对于局部鞅 $M_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$ 且 $\int_0^t \sigma_s^2 ds \le At$ a.s.，有 $P(\sup_{0\le s\le t} M_s > x) \le e^{-\frac{x^2}{2At}}$），

$$P(\sup_{0\le s\le t} x_s > x) \le P(\sup_{0\le s\le t} x_s > x, [x]_t \le 4t) + P([x]_t > 4t)$$

由于 $[x]_t \le 4t$ a.s.，$P([x]_t > 4t) = 0$. 所以 $P(\sup_{0\le s\le t} x_s > x) \le P(\sup_{0\le s\le t} x_s > x | [x]_t \le 4t)$. 应用指数不等式，$P(\sup_{0\le s\le t} x_s > x) \le e^{-\frac{x^2}{2\cdot 4t}} = e^{-\frac{x^2}{8t}}$.

同理，对于 $-x_t = \int_0^t (-\sigma_s) dW_s$，其二次变差为 $\int_0^t (-\sigma_s)^2 ds = \int_0^t \sigma_s^2 ds = [x]_t \le 4t$.

$$P(\inf_{0\le s\le t} x_s < -x) = P(\sup_{0\le s\le t} (-x_s) > x) \le e^{-\frac{x^2}{8t}}$$

因此，

$$\begin{aligned} P(\sup_{0\le s\le t} |x_s| > x) &= P(\sup_{0\le s\le t} x_s > x \text{ 或 } \inf_{0\le s\le t} x_s < -x) \\ &\le P(\sup_{0\le s\le t} x_s > x) + P(\inf_{0\le s\le t} x_s < -x) \\ &\le e^{-\frac{x^2}{8t}} + e^{-\frac{x^2}{8t}} = 2e^{-\frac{x^2}{8t}} \end{aligned}$$

取 $c = 1/8$.

(4)

记

$$\tau_1 = \inf\{t > 0 : |x_t| > 1\}.$$

由（3）题结果知对任意 $t > 0$：

$$P(\tau_1 \le t) = P\left(\sup_{0\le s\le t} |x_s| > 1\right) \le 2e^{-c/t},$$

其中 $c = \frac{1}{8}$。

考虑用时间变换：存在标准布朗运动 B 使得 $x_t = B_{\langle x\rangle_t}$，且 $\langle x\rangle_t \le 4t$，因此：

$$\tau_1 = \inf\{t : |x_t| > 1\} = \inf\{t : |B_{\langle x\rangle_t}| > 1\} \le \inf\{t : |B_{4t}| > 1\}.$$

换元得：

$$\{\tau_1 > t\} \subset \{\tau_1^B > t/4\}, \quad \text{其中} \tau_1^B := \inf\{u : |B_u| > 1\}.$$

已知布朗运动的首次退出时间具有指数尾：

$$P(\tau_1^B > u) \sim Ce^{-\frac{\pi^2}{8}u}, \quad u \to \infty.$$

故存在常数 $C', \lambda > 0$（如 $\lambda = \frac{\pi^2}{32}$）使得：

$$P(\tau_1 > t) \le C'e^{-\lambda t}.$$

于是：

$$\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}] = \int_0^\infty \mu e^{\mu t} P(\tau_1 > t)dt \le \mu C' \int_0^\infty e^{(\mu-\lambda)t}dt < \infty,$$

当且仅当 $\mu < \lambda$。因此可取任意 $0 < \mu < \frac{\pi^2}{32}$，有：

$$\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}] < \infty.$$

(5)

设 $X_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^d)$，其中每个分量 x_t^i 独立，均满足题设。

（i）尾部概率估计

由 3）题结论，有：

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{s\le t}\|X_s\| > x\right) &\le \sum_{i=1}^d P\left(\sup_{s\le t}|x_s^i| > \frac{x}{\sqrt{d}}\right) \\ &\le 2d\exp\left(-\frac{1}{8}\cdot\frac{(x/\sqrt{d})^2}{t}\right) \\ &= 2d\exp\left(-\frac{x^2}{8dt}\right). \end{aligned}$$

（ii）退出时间的指数矩

定义：

$$\tau^d := \inf\{t > 0 : \|X_t\| > 1\},$$

则：

$$\{\tau^d > t\} \subset \bigcap_{i=1}^d \{\tau^i > t\}, \quad 其中\tau^i := \inf\{t : |x_t^i| > 1\}.$$

因此：

$$P(\tau^d > t) \le \min_i P(\tau^i > t) \le C' e^{-\lambda t},$$

从而同样存在常数 $\mu > 0$，使得：

$$\mathbb{E}[e^{\mu\tau^d}] < \infty.$$

综上，以上一维结论可通过分量分解与时间变换法自然推广到 d 维。

四、

设在区间 $[0,T]$ 上，

$$X_t = W_t + h_t, \quad h_0 = 0,\ \dot{h} \in L^2([0,T];\mathbb{R}).$$

记 P 为标准 Wiener 测度，Q 为 X 的路径分布。由 Girsanov 定理知，

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp\Big(\int_0^T \dot{h}_s\, dW_s \;-\; \tfrac{1}{2}\int_0^T |\dot{h}_s|^2\, ds\Big).$$

其相对熵为

$$H(Q \mid P) = \mathbb{E}_Q\Big[\ln \frac{dQ}{dP}\Big] = \mathbb{E}_Q\Big[\int_0^T \dot{h}_s\, dW_s \;-\; \tfrac{1}{2}\int_0^T |\dot{h}_s|^2\, ds\Big].$$

在 Q 下，令

$$W_s = W_s^Q + \int_0^s \dot{h}_u\, du,$$

其中 $\{W_s^Q\}$ 为 Q-下的布朗运动，则

$$\int_0^T \dot{h}_s\, dW_s = \int_0^T \dot{h}_s\, dW_s^Q + \int_0^T |\dot{h}_s|^2\, ds, \quad \mathbb{E}_Q\Big[\int_0^T \dot{h}_s\, dW_s^Q\Big] = 0.$$

代入得

$$H(Q \mid P) = \int_0^T |\dot{h}_s|^2\, ds - \tfrac{1}{2}\int_0^T |\dot{h}_s|^2\, ds = \tfrac{1}{2}\int_0^T |\dot{h}_s|^2\, ds.$$

若令 $T \to \infty$，则在 $\dot{h} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ 情形下，

$$H(Q \mid P) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \big|\dot{h}_s\big|^2\, ds\,.$$

五、

令

$$D = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < |x| < 1\}, \quad d \geq 2.$$

假设存在

$$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D} \setminus \{0\})$$

满足

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D, \\ u(x) = 0, & |x| = 1, \\ \lim\limits_{x \to 0} u(x) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

记 $(W_t)_{t\geq 0}$ 为从 $x \in D$ 出发的 d 维布朗运动，定义停时

$$\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : |W_t| = 1\}, \qquad \tau_r = \inf\{t \geq 0 : |W_t| = r\}, \quad 0 < r < |x|.$$

由调和函数的鞅性质及停时定理，有

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}_x\big[u(W_{\tau_r \wedge \tau_1})\big] \\ &= \mathbb{E}_x\big[1_{\{\tau_r < \tau_1\}}\, u(W_{\tau_r}) + 1_{\{\tau_1 < \tau_r\}}\, u(W_{\tau_1})\big]. \end{aligned}$$

利用边界条件 (1) 中 $u(|x| = 1) = 0$ 及 $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$，得

$$u(W_{\tau_r}) = 1, \quad u(W_{\tau_1}) = 0,$$

从而

$$u(x) \ = \ \mathbb{P}_x(\tau_r < \tau_1).$$

而对于球对称布朗运动（$d \geq 2$）的经典结果

$$\mathbb{P}_x(\tau_r < \tau_1) = \frac{1 - |x|^{\,2-d}}{1 - r^{\,2-d}}.$$

令 $r \downarrow 0$，则

$$u(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1 - |x|^{2-d}}{1 - r^{2-d}} = 0, \quad \forall\, 0 < |x| < 1,$$

与 $\lim_{x \to 0} u(x) = 1$ 矛盾。故不存在满足 (1) 的解。

六、

令

$$a(x) = \big(a_{ij}(x)\big) = \sigma(x)\,\sigma^T(x),$$

并在 D 上考虑扩散过程

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t, \\ X_0 = x_0, \end{cases}$$

其生成元即题中算子 L。取停时

$$\tau = \inf\{t > 0 :\ X_t \notin D\}.$$

由 Itô 引理得

$$u\big(X_{t\wedge\tau}\big) = u(x_0) + \int_0^{t\wedge\tau} L\,u\big(X_s\big)\,ds + \int_0^{t\wedge\tau} \partial_i u\big(X_s\big)\,\sigma_{ij}(X_s)\,dW_s.$$

由于 $L\,u \geq 0$ 于 D，可写作

$$u\big(X_{t\wedge\tau}\big) \geq u(x_0) + M_{t\wedge\tau},$$

其中

$$M_t = \int_0^t \partial_i u\big(X_s\big)\,\sigma_{ij}(X_s)\,dW_s$$

为局部鞅。对停时 $t \wedge \tau$ 取期望并利用 $u \leq u(x_0)$ 于 $\overline{D}$，得

$$u(x_0) \ = \ \big[u(X_{t\wedge\tau})\big] \ \geq \ u(x_0),$$

故

$$\big[u(X_{t\wedge\tau})\big] = u(x_0), \quad L\,u(X_s) \equiv 0, \quad M_{t\wedge\tau} \equiv 0 \quad \text{a.s.}$$

由 Support 定理，任取 $y \in D$ 及 > 0，存在 $t > 0$ 使 $P\{X_t \in B(y,)\} > 0$。结合 $u(X_t) \equiv u(x_0)$ 可得

$$u(y) = u(x_0), \qquad \forall\, y \in D.$$

即 u 在 D 上恒为常数。

七、

令

$$u(t,x)=\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{E}_{t,x}\big[g\big(X_T^\alpha\big)\big],$$

其中 X_s^α 满足

$$\mathrm{d}X_s^\alpha=b\big(X_s^\alpha,\alpha_s\big)\,\mathrm{d}s+\sigma\big(X_s^\alpha,\alpha_s\big)\,\mathrm{d}W_s,\quad u(T,x)=g(x).$$

由动态规划原理，对任意 $h>0$ 有

$$u(t,x)=\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{E}_{t,x}\big[u\big(t+h,X_{t+h}^\alpha\big)\big].$$

对固定控制 α，在 $[t,t+h]$ 上对 $u(s,X_s^\alpha)$ 应用 Itô 公式：

$$\begin{aligned}u\big(t+h,X_{t+h}^\alpha\big)&=u(t,x)+\int_t^{t+h}\partial_s u\big(s,X_s^\alpha\big)\,\mathrm{d}s+\int_t^{t+h}\partial_i u\big(s,X_s^\alpha\big)\,\mathrm{d}X_s^{\alpha,i}\\&\quad+\tfrac{1}{2}\int_t^{t+h}\partial_{ij}u\big(s,X_s^\alpha\big)\,\mathrm{d}\langle X^{\alpha,i},X^{\alpha,j}\rangle_s\\&=u(t,x)+\int_t^{t+h}\Big[\partial_t u+b^i\,\partial_i u+\tfrac{1}{2}\,\sigma_{ik}\sigma_{jk}\,\partial_{ij}u\Big]\big(s,X_s^\alpha\big)\,\mathrm{d}s+M_{t+h},\end{aligned}$$

其中 M_{t+h} 为局部鞅。取期望并在 $\mathcal{A}$ 上取下确界：

$$0=\inf_\alpha\mathbb{E}\big[u(t+h,X_{t+h}^\alpha)\big]-u(t,x)=\inf_\alpha\mathbb{E}\Big[\int_t^{t+h}\big(\partial_t u+L^\alpha u\big)(s,X_s^\alpha)\,\mathrm{d}s\Big],$$

其中

$$L^\alpha u=b^i(x,\alpha)\,\partial_i u(x)+\tfrac{1}{2}\,\sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\,\partial_{ij}u(x).$$

令 $h\to 0$，由连续性可得

$$\inf_{\alpha\in A}\big[\partial_t u+L^\alpha u\big](t,x)=0,$$

即

$$\partial_t u(t,x)+\inf_{\alpha\in A}\Big\{b^i(x,\alpha)\,\partial_i u(t,x)+\tfrac{1}{2}\,\sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\,\partial_{ij}u(t,x)\Big\}=0,$$

联立末端条件 $u(T,x)=g(x)$，即得 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程。