随机微分方程课程作业

郑贤

2025 年 5 月 16 日

一、

1. 可以将停时理解为这样的一个时刻：当这个时刻发生时，我们可以及时地观测到它。（也就是 $[\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t$）

2. 可以把马氏过程理解为它的未来状态只依赖于现在，与历史的状态无关。

3. 记 B_t 为从 B_0 出发的布朗运动。记

$$\psi = \begin{cases} B_t & B_0 \neq 0 \\ 0 & B_0 = 0 \end{cases}$$

则易知 ψ 为马氏过程，其转移概率为

$$P(t, x, A) = \begin{cases} \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} \mathrm{d}y & x \neq 0 \\ 1_A(0) & x = 0 \end{cases}.$$

但是 ψ 不是强马氏的，否则，给定 $x \neq 0$，记 $\tau = \inf\{t \geq 0 : \psi_t = 0\}$，一方面有 $\mathbb{E}_x[1_{[\psi_1 \neq 0, \tau < 1]}] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[1_{[\psi_1 \neq 0, \tau < 1]} | \mathcal{F}_\tau]] = \mathbb{E}_x[P(1-\tau, \psi_\tau, \{0\}^c)] = 0$. 另一方面，由于 $P_x(\psi_1 = 0) = 0$，故 $\mathbb{E}_x[1_{[\psi_1 \neq 0, \tau < 1]}] = P_x(\tau < 1) > 0$. 矛盾。因此 ψ 不是强马氏的。

二、

1. W_t 为 $\mathcal{F}_t$-布朗运动当且仅当 W_t 满足以下条件：

- (i) $W_0 = 0$ P-$a.s.$；
- (ii) 对任意 $t \geq 0$，都有 W_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的；
- (iii) 对任意 $t \geq 0, s \geq 0$，都有 $W_{s+t} - W_s$ 与 $\mathcal{F}_t$ 独立，且 $W_{s+t} - W_s \sim \mathcal{N}(0, t)$；
- (iv) 对 P-$a.s.\omega$，W_t 连续。

2. W_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，且 $\mathbb{L}^1$ 可积。同时，对任意 $s \leq t$，有：$\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s] = W_s + \mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = W_s + \mathbb{E}[W_t - W_s] = W_s$。故 W_t 为 $\mathcal{F}_t$-鞅。

3. 显然 $(B_t, \mathcal{G}_t)$ 满足第 1 小问中的条件 (i)(iv)。先验证 (ii)。由 τ 的有界性和 W_t 的连续性，有：

$$B_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (W_{t+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}) 1_{A_k^n}$$

其中 $A_{k^n} = [\frac{k}{2^n} \leq \tau < \frac{k+1}{2^n}]$。任取 Borel 可测集 A 和 $s \geq t$，有：

$$\begin{aligned}
&[(W_{t+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}) 1_{A_k^n} \in A] \cap [t + \tau \leq s] \\
=& \begin{cases}
([\tau \leq s-t] \cap [0 \in A]) & s - t < \frac{k}{2^n} \\
(([\tau < \frac{k}{2^n}] \cup [\frac{k+1}{2^n} \leq \tau \leq s-t]) \cap [0 \in A]) \cup (A_k^n \cap [(W_{t+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}) \in A]) & \\
& s - t \geq \frac{k+1}{2^n} \\
([\tau < \frac{k}{2^n}] \cap [0 \in A]) \cup ([\frac{k}{2^n} \leq \tau \leq s-t] \cap [(W_{t+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}) \in A]) & \\
& \frac{k}{2^n} \leq s - t < \frac{k+1}{2^n}
\end{cases} .
\end{aligned}$$

其中 $[(W_{t+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}) \in A] \in \mathcal{F}_{t+\frac{k}{2^n}}$，

$$[0 \in A] = \begin{cases} \emptyset & 0 \notin A \\ \Omega & 0 \in A \end{cases} .$$

故 $[(W_{t+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}) 1_{A_k^n} \in A] \cap [t + \tau \leq s] \in \mathcal{F}_s$，于是 $(W_{t+\frac{k}{2^n}} - W_{\frac{k}{2^n}}) 1_{A_k^n}$ 是 $\mathcal{G}_t$ 可测的，故 B_t 是 $\mathcal{G}_t$ 可测的。

再验证 (iii)。任取 $0 \le t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_m$，$f \in C_b(\mathbb{R}^m)$ 和 $\mathcal{G}_{t_0}$ 可测集 A，由 τ 的有界性，W_t 的连续性和控制收敛定理以及 W_t 的增量独立性，有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}[1_A f(B_{t_m} - B_{t_{m-1}}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0})] \\
=&\mathbb{E}[1_A \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(W_{t_m+\frac{k}{2^n}} - W_{t_{m-1}+\frac{k}{2^n}}, \cdots, W_{t_1+\frac{k}{2^n}} - W_{t_0+\frac{k}{2^n}}) 1_{[\frac{k-1}{2^n} \le \tau < \frac{k}{2^n}]}] \\
=&\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[1_{A\cap[\frac{k-1}{2^n} \le \tau < \frac{k}{2^n}]} f(W_{t_m+\frac{k}{2^n}} - W_{t_{m-1}+\frac{k}{2^n}}, \cdots, W_{t_1+\frac{k}{2^n}} - W_{t_0+\frac{k}{2^n}})] \\
=&\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[1_{A\cap[\frac{k-1}{2^n} \le \tau < \frac{k}{2^n}]}]\mathbb{E}[f(W_{t_m} - W_{t_{m-1}}, \cdots, W_{t_1} - W_{t_0})] \\
=&P(A)\mathbb{E}[f(W_{t_m} - W_{t_{m-1}}, \cdots, W_{t_1} - W_{t_0})].
\end{aligned}
$$

取 $m = 1, t_0 = t, t_1 = s + t$，则 $B_{s+t} - B_t \sim \mathcal{N}(0, s)$，且 $B_{s+t} - B_t$ 与 $\mathcal{G}_t$ 独立。综上，B_t 为 $\mathcal{G}_t$-布朗运动。

最后证明 $(B_t)_{t\ge0}$ 与 $\mathcal{G}_0$ 独立。从先前的证明中，我们已经得到，任取 $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_m$ 有 $(B_{t_m} - B_{t_{m-1}}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0})$ 与 $\mathcal{G}_0$ 独立。故 $(B_t)_{t\ge0}$ 与 $\mathcal{G}_0$ 独立。

三、

1. W_t 为鞅，$f(x) = e^{\lambda|x|}$ 为凸函数，故 $f(W_t) = e^{\lambda|W_t|}$ 为下鞅。

2. 由鞅不等式可得：

$$
\begin{aligned}
P(\sup_{0\le s\le t} |W_s| > x) =&P(\sup_{0\le s\le t} e^{\lambda|W_s|} > e^{\lambda x}) \le e^{-\lambda x}\mathbb{E}[e^{\lambda|W_t|}] \\
\le& 2e^{-\lambda x}\mathbb{E}[e^{\lambda W_t}] = 2e^{-\lambda x} e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}.
\end{aligned}
$$

故 $P(\sup_{0\le s\le t} |W_s| > x) \le \inf_{\lambda>0} 2e^{-\lambda x} e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} = 2e^{-\frac{x^2}{2t}}$。

3. 同上：

$$
\begin{aligned}
P(\sup_{0\le s\le t} |x_s| > x) \le& e^{-\lambda x}\mathbb{E}[e^{\lambda|x_t|}] \le 2e^{-\lambda x}\mathbb{E}[e^{\lambda x_t}] = 2e^{-\lambda x}\mathbb{E}[e^{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t \sigma_s^2 \mathrm{d}s}] \\
\le& 2e^{-\lambda x} e^{2\lambda^2 t}.
\end{aligned}
$$

故 $P(\sup_{0\le s\le t} |x_s| > x) \le \inf_{\lambda>0} 2e^{-\lambda x} e^{2\lambda^2 t} = 2e^{-\frac{x^2}{8t}}$。$c = \frac{1}{8}$。

4. 对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，$\mathcal{E}_t^{\lambda}=e^{i\lambda x_{t\wedge\tau_1}+\frac{\lambda^2}{2}\langle x\rangle_{t\wedge\tau_1}}$ 是 $\mathbb{L}^1$-可积的。容易验证 $(\mathcal{E}_t^{\lambda})_{t\geq 0}$ 是鞅。取 $\lambda\in(0,\frac{\pi}{2})$，由于 $|x_{t\wedge\tau_1}|\leq 1$，所以有

$$1=\mathbb{E}[\Re(\mathcal{E}_t^{\lambda})]=\mathbb{E}[\cos(\lambda x_{t\wedge\tau_1})e^{\frac{\lambda^2}{2}\langle x\rangle_{t\wedge\tau_1}}]\geq\cos(\lambda)\mathbb{E}[e^{\frac{\lambda^2(t\wedge\tau_1)}{8}}].$$

记 $\mu=\frac{\lambda^2}{8}$，令 $t\to\infty$，由控制收敛定理可得：$\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}]\leq(\cos(\sqrt{8\mu}))^{-1}<\infty$，得证。

5. (假设 $\sigma\sigma^T\in S_4^d$。) 可以，因为 x_t 的模第一次超过 1 的时刻是小于等于 x_t 的第一个分量 x_t^1 的绝对值第一次超过 1 的时刻的。具体来说，定义 $\nu=\inf\{t\geq 0:|x_t^1|\geq 1\}$ ，则 $\tau_1\leq\nu$。

同上：取 $\lambda\in(0,\frac{\pi}{2})$，有：

$$\begin{aligned}1=&\mathbb{E}[\Re(e^{i\lambda x^1_{t\wedge\nu}+\frac{\lambda^2}{2}\langle x\rangle^1_{t\wedge\nu}})]\geq\cos(\lambda)\mathbb{E}[e^{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^{t\wedge\nu}\sum_{i=1}^d\sigma^2_{1,i,s}\mathrm{d}s}]\\ \geq&\cos(\lambda)\mathbb{E}[e^{\frac{\lambda^2(t\wedge\nu)}{8}}].\end{aligned}$$

记 $\mu=\frac{\lambda^2}{8}$，令 $t\to\infty$，由控制收敛定理可得：$\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}]\leq(\cos(\sqrt{8\mu}))^{-1}<\infty$。

四、 $\mathcal{E}_t=e^{\int_0^t\dot{h}_s\mathrm{d}W_t-\frac{1}{2}\int_0^t\dot{h}_s^2\mathrm{d}s}$，$(\mathcal{E}_t)_{0\leq t<\infty}$ 是鞅。由 $\dot{h}_s\in\mathbb{L}^2$ 可得，对于任意 $p>1$，$\mathbb{E}[\mathcal{E}_t^p]\leq e^{\frac{p^2-p}{2}\int_0^\infty\dot{h}_s^2\mathrm{d}s}$。所以 $\mathcal{E}_t$ 是一致可积的，定义 $\mathcal{E}_\infty=e^{\int_0^\infty\dot{h}_s\mathrm{d}W_t-\frac{1}{2}\int_0^\infty\dot{h}_s^2\mathrm{d}s}$，则 $(\mathcal{E}_t)_{0\leq t\leq\infty}$ 是鞅。

定义概率测度 $\tilde{Q}$ 满足 $\frac{\mathrm{d}\tilde{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}=\mathcal{E}_\infty$，由于 W_t 是布朗运动，由 Girsanov 定理可得，$\tilde{Q}_X\overset{d}{=}\mathbb{P}$。$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}=\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_X}{\mathrm{d}\tilde{Q}_X}=\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathrm{d}\tilde{Q}}\circ X^{-1}=\mathcal{E}_\infty^{-1}\circ X^{-1}$，于是可得

$$\begin{aligned}H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})=&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\log\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}[\log(\mathcal{E}_\infty^{-1}\circ X^{-1})]\\ =&\mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}[(\log\mathcal{E}_\infty^{-1})\circ X^{-1}]=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\log\mathcal{E}_\infty^{-1})]\\ =&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-\int_0^\infty\dot{h}_s\mathrm{d}W_t+\frac{1}{2}\int_0^\infty\dot{h}_s^2\mathrm{d}s]\\ =&\frac{1}{2}\int_0^\infty\dot{h}_s^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

五、 任取一个光滑函数 ϕ，考虑 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases}\Delta u=0 & x\in D,\\ u=\phi & x\in\partial D.\end{cases}$$

任取 $x \in D$，记 B_t^x 为从 x 出发的 2 维布朗运动，记 $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t^x \in \partial D\}$。由椭圆方程的 Feynman-Kac 公式可得，$u(x) = \mathbb{E}[\phi(B_\tau^x)]$。且 $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$。

假设存在题设中的 u，由于对任意 $x \in \partial D$，有 $u(x) = 0$，因此 $\phi = 0$，于是 $u(x) = \mathbb{E}[\phi(B_\tau^x)] = 0$ 对任意 $x \in D$ 成立。这与 $u(0) = 1$ 矛盾。故满足题意的 u 不存在。

六、 由题可知，以下随机微分方程有强解：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \sqrt{2a(X_t)}\mathrm{d}W_t + b(X_t)\mathrm{d}t, \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

记 $\tau = \inf\{t \geq 0 : x_0 + X_t \in \partial D\}$，由 $Lu(x) \geq 0, x \in D$ 和 Ito 公式，有：

$$\mathbb{E}[u(x_0 + X_{t\wedge\tau})] = u(x_0) + \mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\tau} Lu(x_0 + X_s)\mathrm{d}s] \geq u(x_0).$$

又因为 x_0 是最大值点，所以 $u(x_0 + X_{t\wedge\tau}) = u(x_0)$ P-$a.s.$。

如果 $x_0 \in \partial D$，得证。否则，任取 $y \in D$，存在连续函数 $\phi : [0,1] \to D$，使得 $\phi(0) = x_0, \phi(1) = y$，且 $\phi([0,1]) \subset D$。由 support 定理，对任意 $\epsilon > 0$，记 $A_\epsilon = [\sup_{t\in[0,1]} |X_t - (\phi(t) - x_0)| \leq \epsilon]$，有 $P(A_\epsilon) > 0$。

因此，在正概率集 A_ϵ 上，有 $u(\phi(1\wedge\tau)) \geq u(x_0) - \epsilon$。又 $u(y) = u(\phi(1)) = u(\phi(1\wedge\tau)) \geq u(x_0) - \epsilon$，由于 ϵ 的任意性，可得 $u(y) = u(x_0)$。由于 $y \in D$ 的任意性，可得 $u(x) = u(x_0), \forall x \in D$。得证。

七、 记 $L^\alpha(f)(x) = \frac{1}{2}\sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\partial_{ij}f(x)$。

对任意一个 $[t,T]$ 上的控制 α_0 和对应的状态过程 $X_t^{\alpha_0}$ 以及任意 $h \in (0, T-t]$，有 $J(t,x,\alpha_0) = \mathbb{E}_{t,x}[J(t+h, X_{t+h}^{\alpha_0|_{[t,t+h]}}, \alpha_0|_{(t+h,T]})]$。现在记 $[t+h,T]$ 上的最优控制为 $\tilde{\alpha}^y$，也就是说，对任意 y，有 $u(t+h,y) = J(t+h,y,\tilde{\alpha}^y)$。记 $\alpha_1 = \tilde{\alpha}^{X_{t+h}^{\alpha_0|_{[t,t+h]}}}$，记 $\alpha_2 = \alpha_0 1_{[t,t+h]} + \alpha_1 1_{(t+h,T]}$，则有：

$$\begin{aligned} u(t,x) \leq J(t,x,\alpha_2) &= \mathbb{E}_{t,x}[J(t+h, X_{t+h}^{\alpha_2|_{[t,t+h]}}, \alpha_2|_{(t+h,T]})] \\ &= \mathbb{E}_{t,x}[J(t+h, X_{t+h}^{\alpha_0|_{[t,t+h]}}, \alpha_1|_{(t+h,T]})] \\ &= \mathbb{E}_{t,x}[u(t+h, X_{t+h}^{\alpha_0})] \\ &= u(t,x) + \mathbb{E}_{t,x}[\int_t^{t+h} (\partial_t u + L^{\alpha_0}u)(r, X_r^{\alpha_0})\mathrm{d}r]. \end{aligned}$$

令 $h\to 0^+$，则有 $\partial_t u+L^{\alpha_0}u\geq 0$。由 α_0 的任意性就能得到：

$$\partial_t u+\frac{1}{2}\inf_{\alpha\in A}\{\sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\partial_{ij}u(x)\}\geq 0.$$

上述证明中，令 $h=0$，则 $\tilde{\alpha}^x$ 为 $[t,T]$ 上的最优控制，对任意 $\tilde{h}\in(0,T-t]$ 同理可得：$u(t,x)=\mathbb{E}_{t,x}[u(t+\tilde{h},X^{\tilde{\alpha}^x}_{t+\tilde{h}})]=u(t,x)+\mathbb{E}_{t,x}[\int_t^{t+\tilde{h}}(\partial_t u+L^{\tilde{\alpha}^x}u)(r,X^{\tilde{\alpha}^x}_r)\mathrm{d}r]$。令 $\tilde{h}\to 0^+$，则有：

$$\partial_t u+\frac{1}{2}(\sigma_{ik}(x,\tilde{\alpha}^x)\sigma_{jk}(x,\tilde{\alpha}^x)\partial_{ij}u(x))=0.$$

综上，u 满足 HJB 方程：

$$\begin{cases}\partial_t u+\frac{1}{2}\inf_{\alpha\in A}\{\sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\partial_{ij}u(x)\}\geq 0,\\ u(T,x)=g(x).\end{cases}$$