1. 令$\mathbf{P}$为$\Omega = [0,1]$上的Lebesgue测度. 令$\mathscr{F}_n$为由集合

$$\left\{ \left[k/2^n, (k+1)/2^n\right), k = 0,1,\ldots,2^n - 1 \right\}$$

生成的$\sigma-$代数. 显然$\{\mathscr{F}_n\}$为一单增的σ–域流. 现令 f为Ω上的μ可积函数，令$f_n = \mathbf{E}\left[f \mid \mathscr{F}_n\right]$. 证明如果$I$是$\mathscr{F}_n$中的一个区间，证明

(1). $f_n(x) = \dfrac{1}{|I|}\displaystyle\int_I f(y)dy, \quad x \in I;$

(2). 令$Mf(x) = \sup_{r>0} \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{(x-r,x+r)\cap[0,1]} |f(y)|dy$，则

$$\left| \{x \in [0,1] : Mf(x) > \lambda\} \right| \le \frac{C}{\lambda}\int_0^1 |f(x)|dx, \quad \forall \lambda > 0.$$

2. 令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathbf{P})$ 为满足通常条件的概率空间。

(1). 叙述一维 $\mathscr{F}_t$–布朗运动 $(W_t)_{t\ge 0}$ 的定义；

(2). 证明W_t 是一个$\mathscr{F}_t$–鞅;

(3). 对于任意有界停时 τ , 令$B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$, $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{t+\tau}$. 证明 B_t 为 $\mathscr{G}_t$–布朗运动，且和 $\mathscr{G}_0$ 独立.

3. 设 $f \in L^2([0,1]; R)$. 考虑方程

$$dX_t = f(t)X_t dW_t,\ X_0 = x \in R,\ \ 0 \le t \le 1.$$

(1). 试写出上述方程的一个解;

(2). 上述方程的解是唯一的吗?

4. 设 $X_t(x)$为从$x \in (0,1)$出发的一维扩散过程, 具有有界扩散系数$a(x) > 0$和有界漂移系数$b(x)$. 令 τ 为此过程首次逃出$(0,1)$的时刻. 试求概率 $\mathbf{P}(X_\tau(x) = 1)$.

5. 令W_t为一维布朗运动。证明

(1). 对于任意的 $\lambda > 0$, $X_t = e^{\lambda|W_t|}$是一个下鞅;

(2). 证明

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t} |W_s| > x\right) \le 2e^{-\frac{x^2}{2t}};$$

(3). 令$\sigma : [0,\infty)\times\Omega \to R$关于由 W_t 生成的 $\sigma-$域流适应，且$1/2 \le |\sigma| \le 2$. 定义 $x_t = \displaystyle\int_0^t \sigma_s dW_s$. 证明存在一个与$\sigma$无关的常数 c, 使得

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le t} |x_s| > x\right) \le 2e^{-\frac{cx^2}{t}};$$

(4).令 x_t 为 3. 中给定的随机过程. 证明存在一个正常数$\mu > 0$, 使得

$$\mathbf{E}e^{\mu\tau} < \infty,$$

其中 $\tau = \inf\{t > 0 : |x_t| < 1\}$.

6. 令$d \geq 2$，$D = \{x \in R^d : |x| < 1, x \neq 0\}$. 证明不存在$u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$满足如下方程：

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in D \\ u(z) = 0 \text{ 如果 } |z| = 1; \quad u(z) = 1 \text{ 如果 } z = 0 \end{cases}$$

7. 令 $C_0([0,1];R)$为满足 $f(0) = 0$ 的所有连续函数全体，定义$\|f\| = \sup_{t \in [0,1]} |f_t|$. 假设 $h \in C_0([0,1];R)$ 且 $h' \in L^2([0,1];R)$. 证明

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathbf{P}(\|W - h\| < \epsilon)}{\mathbf{P}(\|W\| < \epsilon)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 |h'(s)|^2 \, ds\right),$$

这里 W_t 是一维布朗运动.