一、(1.) 定义：$(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ 中，$\tau: \Omega \to \mathbb{N}(\mathbb{R}_+) \cup (\infty)$ 是一个停时，

若 τ 满足 $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$ ($\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$)，对 $n \in \mathbb{N}$ ($t \in \mathbb{R}_+$)

理解：停时是一类可观测的随机时刻，我们在时刻 t 就能知道是否已经发生了 $\tau \le t$ 这件事。

(2.) 马氏过程

理解：对于马氏过程，未来只依赖于现在，不依赖于过去。已知当前状态后，过去的信息对预测未来没有额外帮助。

(3.) 是马氏过程，但不是强马氏过程。(停时不满足马尔可夫性)

设 B_t 是标准布朗运动，定义 $\tau = \inf\{t > 0: B_t = 1\}$ 是首次到达 1 的时间，定义过程 $X_t = \begin{cases} B_t, & t < \tau \\ 0, & t \ge \tau \end{cases}$

二、(1.) 一维 $\mathcal{F}_t$-布朗运动 $(W_t)_{t \ge 0}$

① $W_0 = 0$. a.e.

② $t \mapsto W_t(\omega)$ 对几乎所有 $\omega \in \Omega$ 是连续函数

③ 独立增量：对 $\forall\, 0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，

$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ 相互独立

④ 正态增量：对所有 $s < t$，$W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

⑤ $\mathcal{F}_t$-适应性：对每个 $t \ge 0$，W_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的

(2.) ① 由定义知 W_t $\mathcal{F}_t$-可测

② $W_t \sim N(0,t)$，因此 $E[|W_t|] \le \sqrt{E[W_t^2]} = \sqrt{Var(W_t)} = \sqrt{t} < \infty$.

③ $E[W_t | \mathcal{F}_s] = E[W_s + (W_t - W_s) | \mathcal{F}_s] = W_s + E[W_t - W_s | \mathcal{F}_s]$

$= W_s + 0 = W_s$

(3.) 1. (B_t)是布朗运动 $B_t=W_{t+\tau}-W_\tau$

① 证 $B_0=0$ a.e.

由定义 $B_0=W_\tau-W_\tau=0$

② 证 B_t有连续路径

W_t有连续路径 $\Rightarrow$ B_t同样是连续函数

③ B_t有独立增量.

由W_t布朗运动,有强马尔可夫性,

τ是一个停时 $\Rightarrow$ $B_t=W_{t+\tau}-W_\tau$ 具有与W_t相同的性质

$\Rightarrow$ 有独立增量

④ B_t满足正态增量分布

$B_t=W_{t+\tau}-W_\tau\sim N(0,t)$

⑤ 适应性

$B_t=W_{t+\tau}-W_\tau\in\mathcal{F}_{t+\tau}=\mathcal{G}_t$

$\Rightarrow$ B_t是$\mathcal{G}_t$-可测

2. (B_t)与$\mathcal{G}_0=\mathcal{F}_\tau$独立

由 $B_t=W_{\tau+t}-W_\tau\perp\mathcal{F}_\tau$

故 $B_t\perp\mathcal{G}_0$

三. 证明:

(1.) 考虑 $f(x)=e^{a|x|}$, $a>0$. $X_t\triangleq f(W_t)$, W_t为1维布朗运动

由于$f(x)$是凸函数,由条件Jensen不等式:

$$f(E[X|\mathcal{G}])\le E[f(X)|\mathcal{G}]$$

由$\{W_t\}$一维布朗运动是一个鞅，故 $\forall\, 0\le s<t$

$$X_s = f(W_s) = f(E[W_t|\mathcal{F}_s]) \le E[f(W_t)|\mathcal{F}_s] = E[X_t|\mathcal{F}_s]$$

即 $E[X_t|\mathcal{F}_s] \ge X_s$ ，$\forall\, 0\le s<t$

即 $X_t \triangleq f(W_t) = e^{a|W_t|}$ ，$a>0$ 是下鞅.

(2.) 由(1.)下鞅以及 Doob Maximal 不等式:

$$X_t \triangleq f(W_t) = e^{a|W_t|}, \quad P\Big(\sup_{s\in[0,t]}|W_s|\ge\lambda\Big) = P\Big(\sup_{s\in[0,t]} f(W_t)\ge f(\lambda)\Big)$$

$$\Rightarrow P\Big(\sup_{s\in[0,t]} X_s \ge e^{a\lambda}\Big) \le \frac{E[X_t]}{e^{a\lambda}} = \frac{2e^{-a\lambda}}{\sqrt{2\pi t}}\int e^{ax-\frac{x^2}{2t}}dx = 2e^{\frac{a^2t}{2}-a\lambda}$$

取 $a=\frac{\lambda}{t}>0$，则得到:

$$P\Big(\sup_{s\in[0,t]} X_s \ge e^{\frac{\lambda^2}{t}}\Big) \le 2e^{-\frac{\lambda^2}{2t}}$$

故 $P\Big(\sup_{s\in[0,t]} |W_s|\ge\lambda\Big) \le 2e^{-\frac{\lambda^2}{2t}}$

(3.) 已知 $X_s = \int_0^t \sigma_s dW_s$ 是由 W_s 驱动的 Itô 积分，故 $\langle X\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$

而 $\sigma_s\in[\frac12,2] \Rightarrow \sigma_s^2\in[\frac14,4] \Rightarrow \langle X\rangle_t\in[\frac14 t,4t]$

由指数鞅不等式:

$$P\Big(\sup_{s\in[0,t]}|X_s|\ge\lambda \ \&\ \langle X\rangle_t\le y\Big) \le P\Big(\sup_{t\le y}|X_s|\ge\lambda\Big) \le 2e^{-\frac{\lambda^2}{2y}}$$

取 $M=4t \Rightarrow RHS = 2e^{-\frac{\lambda^2}{2\times4t}} = 2e^{-\frac{\lambda^2}{8t}}$

即取 $C=\frac18$.

(4.) 由(3.) $P(\tau_1\le t) = P\Big(\sup_{s\in[0,t]}|X_s|\ge 1\Big) \le 2e^{-\frac{c}{t}}$

$$P(\tau_1\le t) = P\Big(\sup_{0\le s\le t}|X_s|\ge 1\Big) \le 2e^{-\frac{c}{t}}$$

$$E[e^{u\tau_1}] = \int_0^\infty P(e^{u\tau_1}>y)dy = \int_0^\infty P\Big(\tau_1>\frac{\log y}{u}\Big)dy$$

令 $s=\frac{\log y}{u} \Rightarrow y=e^{us}$ 得

$$E[e^{u\tau_1}] = \int_0^\infty P(\tau_1>s)\,u e^{us}ds$$

$$P(\tau_1>s) = 1-P(\tau_1\le s) \le 1-2e^{-c/s}$$

$P(\tau_1 \le t) \le 2e^{-ct} \Rightarrow P(\tau_1 > t) \le 1$

(5.) $X_t = \int_0^t \sigma_s dW_s \in \mathbb{R}$

可以推广：①高维布朗运动的最大模长仍然有指数尾界.

②随机积分过程仍然成立，BDG不等式适用于多维过程

③指数停时估计结论可以推广

四、证明：要求 $KL(Q\|P) \triangleq E_Q[\log(\frac{dQ}{dP})]$

由命题形式给出，$\dot{h}_s \triangleq \frac{d}{ds}h_s \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$，$h(0)=0$

考虑过程：$X_t = W_t + \int_0^t \dot{h}_s ds$

于是：$dX_t = dW_t + \dot{h}_t dt$

由 Girsanov 定理，先验证 Novikov 条件：$E^P[\exp(\frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds)] < \infty$

而 $\dot{h}_s \in \mathcal{L}^2([0,\infty))$ 故 $\frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds = M < \infty$. 常量.

故 Novikov 条件成立

所以由 Girsanov 定义新的概率度量 Q, s.t.

$$\frac{dQ}{dP} = \exp(\int_0^\infty \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s ds)$$

使得在Q下，X_t是布朗运动

而 $\log\frac{dQ}{dP} = \int_0^\infty \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s ds$

故 $E_Q[\log\frac{dQ}{dP}]$

$= E_Q[\int_0^\infty \dot{h}_s dX_s - \int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds]$

$= E_Q[-\frac{3}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds] = -\frac{3}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds$

故 $KL(Q\|P) = -\frac{3}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds$

五、证明：设 $u\in C^2(D)\cap C(\bar{D})$ 且 $\Delta u=0$

则 $\forall x\in D$，有 $u(x)=E_x[u(W_{\tau_1})]$

其中：W_t 是 d 维布朗运动

$\tau_1=\inf\{t>0, W_t\bar{\in} D\}$ $D=\{x\in\mathbb{R}^d: |x|<1, x\neq 0\}$

E_x：起点为 x 的布朗运动下的期望

已知 $|z|=1$ 时，$u(z)=0$

$z=0$ 时，$u(z)=1$

反证法，若存在 $u=u(x)$，使方程有解，则 $\forall x\in D$，有

$u(x)=E_x[u(W_{\tau_1})]=P_x(W_{\tau_1}=0)\cdot 1+P_x(W_{\tau_1}=1)\cdot 0$

$=P_x(W_{\tau_1}=0)$

而在 $d\geq 2$ 的 B.M. 中，到 0 的概率 $P_x(\{W_{\tau_1}=0\})=0$

故 $u(x)=P_x(W_{\tau_1}=0)=0$，$\forall x\in D$

而由 u 是解，$u\in C(\bar{D})$ 连续，故

$\lim\limits_{x\to 0} u(x)=u(0)=1\neq 0=u(x)$，$\forall x\in D$

故矛盾

六、证明：考虑 $dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dW_t$，$X_0=x_0$

$\sigma\sigma^T\triangleq 2a(x)\in S_d^d$ 一般椭圆型 $\forall x\in D$

设 $Y_t\triangleq u(X_t)\xrightarrow{\text{Itô}} du(X_t)=\mathcal{L}u(X_t)dt+\nabla u(X_t)^T\sigma(X_t)dW_t$

由于 $\mathcal{L}u\geq 0$，故 Y_t 是一个下鞅

由下鞅性质 $E[Y_t|\mathcal{F}_s]\geq Y_s$

假设 u 在 D 上不到常数，由于 $u\in C^0(\bar{D})$

则存在 $y\in D$ 使得 $u(y)<u(x_0)$ 严格

考虑 $\varphi(t):=$ 从 x_0 到 y 的连续路径

由定理5.7 $\forall \varepsilon>0, \exists C=C(\varepsilon,\varphi,b,\sigma^{-1})$ s.t.

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]}|X_t-\varphi(t)|<\varepsilon\right)>C$$

即 X_t 有正概率进入 y 的局部. 这将导致 $P(u(X_t)<u(x_0))>0$

而这样的正概率事件将导致 $E[u(X_t)]<u(x_0)$.

与下鞅性矛盾

故存在不恒为常数的极大值.

七、假设 $u(t,x)$ 是 $C^{1,2}$ 的.

① 考虑 (t,x), $\forall\alpha$, $\delta>0$, $u(t,x)=\inf_{\alpha\in\Lambda}E_{t,x}[u(t+\delta,X^{\alpha}_{t+\delta})]$

② 利用Itô引理对 $u(t+\delta,X^{\alpha}_{t+\delta})$ 展开:

$$u(t+\delta,X^{\alpha}_{t+\delta})=u(t,x)+\partial_t u(t,x)\delta+\nabla u(t,x)^T dX_t^{\alpha}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{ij}\partial_{ij}u(t,x)(\sigma_{ik}\sigma_{jk})(t,x,\alpha)\delta$$
$$+\text{Martingale term}$$

$$E[u(t+\delta,X^{\alpha}_{t+\delta})]=u(t,x)+\delta\,\partial_t u(t,x)+\frac{\delta}{2}\sum_{ij}(\sigma_{ik}\sigma_{jk})(x,\alpha)\partial_{ij}u(t,x)$$
$$+o(\delta)$$

$$u(t,x)=\inf_{\alpha\in A}[u(t,x)+\delta\partial_t u+\frac{\delta}{2}\sum_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_{ij}u+o(\delta)$$

两边减去 $u(t,x)$, 除以 δ, 令 $\delta\to 0$, 得到

$$\partial_t u+\inf_{\alpha\in A}\left[\frac{1}{2}\sum_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_{ij}u\right]=0$$

③ $u(T,x)=\inf_{\alpha}E_{T,x}[g(X^{\alpha}_T)]=g(x)$

因此 $u(t,x)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2} \inf_{\alpha \in A} \left[\sigma_{ik}(x,\alpha)\, \sigma_{jk}(x,\alpha)\, \partial_{ij} u \right] = 0 \\ u(T,x) = g(x) \end{cases}$$