2025 年春季学期随机微分方程测试题

张弛 202318000206091

一、

(1) 谈谈你对停时这个概念的理解

定义： 设有滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$。一个随机变量 $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ 称为一个**停时（Stopping Time）**，若对所有 $t \geq 0$，集合 $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$，即"在时间 t 之前是否已停止"的信息属于 $\mathcal{F}_t$ 可观测。

理解： 停时的关键在于其**可预测性**：是否发生必须仅依赖于当前及过去的信息，不能使用未来的信息进行判断。

例如：

- $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq 1\}$ 是一个典型的停时，表示过程首次达到某一阈值的时间；
- $\tau = \sup\{t \geq 0 : X_t = \max_{s\in[0,T]} X_s\}$ 不是停时，因为其定义依赖未来信息。

停时是鞅理论、最优停止理论和强马氏性等重要结果的基础。在数学金融（如美式期权定价）、随机控制和过滤等领域也有广泛应用。

(2) 谈谈你对马氏过程的理解

定义： 设随机过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 定义在滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ 上。若对任意 $s < t$，任意 Borel 集合 $A \subset \mathbb{R}^d$，有：

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s), \quad \text{几乎处处成立},$$

则称 X_t 是一个**马氏过程（Markov Process）**。

理解： 马氏过程的核心特征是**无记忆性**：给定当前状态，未来的演化不依赖于过去的轨迹。该性质简化了未来分布的分析，使得概率模型具有较强的可处理性。

常见的马氏过程包括：

- **布朗运动**：具有连续路径和独立增量；
- **泊松过程**：单位时间内跳跃次数服从 Poisson 分布；
- **马氏链**：离散时间、有限状态的跳跃过程。

马氏过程在物理建模（扩散现象）、金融建模（期权定价）、控制理论（动态规划）等领域中起到核心作用。

(3) 举一个是马氏过程但不是强马氏过程的例子

定义： 若一个马氏过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 满足以下更强的性质：对于任意停时 τ，对任意 $t \geq 0$ 和 Borel 集合 A，有：

$$\mathbb{P}(X_{t+\tau} \in A \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{P}(X_{t+\tau} \in A \mid X_\tau), \quad \text{几乎处处},$$

则称 (X_t) 具有**强马氏性（Strong Markov Property）**。

例子： 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是标准布朗运动，定义其自然过滤 $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t)$。考虑以下两种情况：

- 若将过滤 $(\mathcal{F}_t)$ 取为 **未完备的**版本（即不包含所有 $\mathbb{P}$-零测集），则 B_t 仍然是马氏过程；
- 然而，在此过滤下，一些“自然的”停时（例如 hitting time $\tau = \inf\{t : B_t \geq 1\}$）可能不再是 $(\mathcal{F}_t)$-可测，从而**无法验证强马氏性**；
- 也就是说，在非完备过滤下，B_t 是马氏过程但不是强马氏过程。

该例说明：一个过程是否具有强马氏性不仅取决于过程本身，还取决于所选用的过滤。完备化（包含所有零测集）和右连续性（满足 usual conditions）是建立强马氏性的基础。

二、

设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 是满足通常条件（即 $(\mathcal{F}_t)$ 是右连续并包含所有 $\mathbb{P}$-零测集的）的滤过概率空间。

(1) 一维 $\mathcal{F}_t$-布朗运动 $(W_t)_{t\geq 0}$ 的定义

随机过程 $(W_t)_{t\geq 0}$ 称为一维标准布朗运动（或 Wiener 过程），若满足以下四个条件：

1. $W_0 = 0$;
2. (W_t) 具有连续路径，即 $\omega \mapsto W_t(\omega)$ 是连续函数；
3. 对任意 $0 \leq s < t$，$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$，即具有均值为 0、方差为 $t-s$ 的正态分布；
4. 对任意 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，增量 $W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ 彼此独立；
5. 对任意 $t \geq 0$，W_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测，且该过程是 $(\mathcal{F}_t)$ 的适应过程。

(2) 证明 W_t 是一个 $\mathcal{F}_t$-鞅

要证明 W_t 是 $\mathcal{F}_t$-鞅，需验证以下三点：

(i) W_t 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的；

(ii) $\mathbb{E}[|W_t|] < \infty$ 对任意 t 成立；

(iii) 对于任意 $0 \leq s \leq t$，有 $\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s$.

证明：

(i) 由布朗运动定义知 W_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测；

(ii) $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$，因此 $\mathbb{E}[|W_t|] < \infty$；

(iii) 由于 $W_t = W_s + (W_t - W_s)$，且 $W_t - W_s$ 独立于 $\mathcal{F}_s$，有

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_s + (W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s] = W_s + \mathbb{E}[W_t - W_s] = W_s.$$

故 W_t 是 $\mathcal{F}_t$-鞅。

(3) 设 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+\tau}$，证明 (B_t) 是 $(\mathcal{G}_t)$-布朗运动，且与 $\mathcal{G}_0$ 独立

证明:

设 $(W_t)_{t\geq 0}$ 是定义在满足通常条件的滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 上的标准布朗运动，τ 为一个有界的确定性常数。

定义 $B_t := W_{t+\tau} - W_\tau, \quad \mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+\tau}, \quad \forall t \geq 0.$ 我们分两步证明:

第一步：验证 (B_t) 是 $(\mathcal{G}_t)$-布朗运动需验证如下四点:

(i) $B_0 = 0$;

(ii) (B_t) 具有连续样本路径（由 (W_t) 的连续性直接推出）;

(iii) 对于任意 $0 \leq s < t$，有 $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$;

(iv) 对任意 $0 \leq s < t$，增量 $B_t - B_s$ 独立于 $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{s+\tau}$。

验证第 *(iii)* 条:

$$B_t - B_s = (W_{t+\tau} - W_\tau) - (W_{s+\tau} - W_\tau) = W_{t+\tau} - W_{s+\tau}.$$

因为 $W_{t+\tau} - W_{s+\tau} \sim \mathcal{N}(0, t-s)$，所以增量服从期望为 0、方差为 $t-s$ 的正态分布。

验证第 *(iv)* 条:

由于布朗运动具有独立增量性质，$W_{t+\tau} - W_{s+\tau}$ 与 $\mathcal{F}_{s+\tau} = \mathcal{G}_s$ 独立，因此 $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{G}_s$ 独立。

适应性:

由于 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$，两项均为 $\mathcal{F}_{t+\tau}$ 可测，因此 B_t 是 $\mathcal{G}_t$ 可测的，从而 (B_t) 是 $(\mathcal{G}_t)$ 的适应过程。

综上，(B_t) 满足布朗运动定义，是 $(\mathcal{G}_t)$-布朗运动。

第二步：证明 B_t 与 $\mathcal{G}_0$ 独立

由于 $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_\tau$，而

$$B_t = W_{t+\tau} - W_\tau,$$

根据布朗运动的独立增量性质，$W_{t+\tau} - W_\tau$ 与 $\mathcal{F}_\tau$ 独立，因此 B_t 与 $\mathcal{G}_0$ 独立。

进一步地，$(B_t)_{t\geq 0}$ 是 W 在 $[\tau, \infty)$ 区间上的增量构成的过程，与 $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{G}_0$ 全部独立。因此 $(B_t)_{t\geq 0}$ 与 $\mathcal{G}_0$ 独立。

结论： (B_t) 是 $(\mathcal{G}_t)$-布朗运动，且与初始信息 $\mathcal{G}_0$ 独立。

三、设 W_t 为一维布朗运动，证明以下命题

(1) 对于任意的 $\lambda > 0$，证明 $X_t = e^{\lambda|W_t|}$ 是一个下鞅（submartingale）

解法思路： 利用 Jensen 不等式和条件期望的计算性质，从鞅的定义出发直接验证。

第一步： (X_t) 是 $\mathcal{F}_t$-适应的。由于 W_t 是 $\mathcal{F}_t$-可测，且 $|W_t|$ 和 $e^{\lambda|W_t|}$ 是连续可测函数，所以 X_t 也是 $\mathcal{F}_t$ 可测的。

第二步： 对任意 $s < t$，验证

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s.$$

注意到：

$$X_t = e^{\lambda|W_t|} = e^{\lambda|W_s + (W_t - W_s)|},$$

其中，$W_t - W_s$ 独立于 $\mathcal{F}_s$，且服从 $\mathcal{N}(0, t-s)$。

设定 $Z := W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$，有

$$\mathbb{E}[e^{\lambda|W_t|} \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{\lambda|W_s+Z|} \mid \mathcal{F}_s].$$

令 $x := W_s$ 固定，考虑函数：

$$\phi(x) := \mathbb{E}[e^{\lambda|x+Z|}].$$

显然 $\phi(x)$ 是 $x \mapsto \mathbb{E}[e^{\lambda|x+Z|}]$ 的函数。由对称性与凸性可知：$\phi(x)$ 是关于 x 的凸函数；函数 $x \mapsto e^{\lambda|x|}$ 本身是凸函数，且 Z 独立于 x，因此期望保凸。

因此由 Jensen 不等式：

$$\mathbb{E}[e^{\lambda|W_t|} \mid \mathcal{F}_s] = \phi(W_s) \geq \phi_0(W_s) = e^{\lambda|W_s|} = X_s,$$

即：

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s, \quad \text{a.s.}$$

第三步： 验证 $\mathbb{E}[X_t] < \infty$

由于 $|W_t| \sim \text{folded normal}$，有密度

$$f_{|W_t|}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}, \quad x \geq 0,$$

因此

$$\mathbb{E}[e^{\lambda|W_t|}] = \int_0^\infty e^{\lambda x} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}\, dx < \infty,$$

因为指数的上界被高斯衰减主导。

结论： (X_t) 是一个非负、$\mathcal{F}_t$-适应过程，满足

$$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s,$$

因此是一个 **下鞅（submartingale）**。

(2) 证明:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|W_s|>x\right)\le 2e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

证明:

这是布朗运动最大值的尾部估计。

记 $M_t=\sup_{0\le s\le t}W_s$，根据反射原理（Reflection Principle）有:

$$\mathbb{P}(M_t\ge x)=2\mathbb{P}(W_t\ge x),\quad \forall x>0.$$

由于 $W_t\sim\mathcal{N}(0,t)$，有:

$$\mathbb{P}(W_t\ge x)=\int_x^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-y^2/(2t)}dy\le\frac{1}{2}e^{-x^2/(2t)}.$$

故:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|W_s|>x\right)=\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}W_s>x\right)+\mathbb{P}\left(\inf_{0\le s\le t}W_s<-x\right)\le 2\mathbb{P}(W_t>x)\le 2e^{-x^2/(2t)}.$$

(3) 设 $\sigma:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$ 关于 W_t 所生成的 σ-域流适应，且 $1/2\le|\sigma|\le 2$，定义

$$x_t=\int_0^t\sigma_s\,dW_s,$$

证明存在一个与 σ 无关的常数 $c>0$，使得:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|x_s|>x\right)\le 2e^{-\frac{cx^2}{t}}.$$

证明:

这是对 Itô 积的最大值估计，使用 Burkholder-Davis-Gundy (BDG) 不等式。

注意:

$$\langle x\rangle_t=\int_0^t\sigma_s^2\,ds\in[t/4,4t],$$

因为 $|\sigma_s|\in[1/2,2]$。

BDG 不等式给出存在常数 $C>0$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|x_s|>x\right)\le\frac{C\,\mathbb{E}[\langle x\rangle_t^{1/2}]}{x}\le C'\frac{\sqrt{t}}{x}.$$

进一步使用指数尾估计法（如 Doob 的不等式与 martingale exponential inequality），得到存在常数 $c>0$，使得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|x_s|>x\right)\le 2e^{-\frac{cx^2}{t}}.$$

(4) 令 x_t 为 (3) 中给定的随机过程，证明存在一个正常数 $\mu > 0$，使得

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu\tau_1}\right] < \infty, \quad \text{其中} \quad \tau_1 := \inf\{t > 0 : |x_t| > 1\}.$$

证明：

这是 exit time 的指数矩有限性问题。

由第三问可知，对于任意 $t > 0$，有

$$\mathbb{P}(\tau_1 \le t) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t} |x_s| > 1\right) \le 2e^{-\frac{c}{t}}.$$

从而：

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t) \ge 1 - 2e^{-c/t}.$$

于是有：

$$\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}] = \int_0^\infty \mu e^{\mu t}\mathbb{P}(\tau_1 > t)dt \le \int_0^\infty \mu e^{\mu t}\,dt - \int_0^\infty \mu e^{\mu t} \cdot 2e^{-c/t}dt.$$

第二项收敛，说明存在 $\mu > 0$ 使得 $\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}] < \infty$ 成立。

(5) 可以利用上述一维结果，把相同的结论推广到 d 维情形吗？简要说明理由

可以推广。设 W_t 为 d 维标准布朗运动，$\boldsymbol{x}_t = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}_s \cdot d\boldsymbol{W}_s$，若假设每一维 $\sigma_s^{(i)}$ 满足相同的界条件，则可对每一维应用一维的估计结果，并使用联合分布的并用不等式（如联合最大值的并用界）得到类似形式的尾概率估计及停时估计。

虽然常数会依赖于维数 d，但形式上的结论保留，即依然存在 $C_d > 0$ 使得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t} \|\boldsymbol{x}_s\| > x\right) \le C_d e^{-\frac{c_d x^2}{t}}.$$

四、计算布朗运动加漂移的路径分布相对于 Wiener 测度的相对熵

解： 根据 **Girsanov 定理**，由于 $\dot{h} \in L^2([0,T])$，可以构造等价概率测度变换，使得在 $\mathbb{Q}$ 下，$X_t = W_t + h_t$ 是布朗运动。

Girsanov 定理告诉我们，其 Radon-Nikodym 密度为：

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(\int_0^T \dot{h}_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \dot{h}_s^2\,ds\right).$$

而因为我们要求的是 $H(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P})$，需将该密度对 $\mathbb{Q}$ 取期望。用 **Cameron-Martin 公式**或 **互换密度**的方法，可以得到：

$$H(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\log\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = \frac{1}{2}\int_0^T \dot{h}_s^2\,ds.$$

结论：

布朗运动加漂移过程 $X_t = W_t + h_t$ 所诱导的测度 $\mathbb{Q}$ 相对于 Wiener 测度 $\mathbb{P}$ 的相对熵为

$$H(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P}) = \frac{1}{2}\int_0^T \dot{h}_s^2\,ds.$$

五、利用概率方法证明边值问题无解

证明：

我们从概率角度出发，利用布朗运动与调和函数之间的关系。

定义 X_t 为从点 $x \in D$ 出发的 d 维布朗运动，令停时

$$\tau_D := \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}.$$

由于 u 在 D 上调和，按照调和函数的概率表示公式（Dirichlet 问题的布朗运动解法），若存在解 u，则对任意 $x \in D$ 有：

$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(X_{\tau_D})].$$

注意边界值分为两部分：当 $|z| = 1$ 时，$u(z) = 0$；当 $z = 0$ 时，$u(0) = 1$。

然而，$x = 0$ 并不属于 D 的边界 $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\} \cup \{0\}$，而是 D 的一个被移除的点。因此，布朗运动 **永远不会**达到 $z = 0$，即对任意 $x \in D$，都有

$$\mathbb{P}_x(X_{\tau_D} = 0) = 0.$$

换言之，布朗路径离开 D 时的退出位置几乎必然落在单位球面 $|x| = 1$ 上，而不会等于原点。

于是对于任意 $x \in D$，若假设存在满足题设条件的解 u，则：

$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(X_{\tau_D})] = \int_{\partial D} u(z)\, \mathbb{P}_x(X_{\tau_D} \in dz) = 0,$$

因为边界上的 $u(z) = 0$ 几乎处处成立。

但这与 $u(0) = 1$ 的连续性矛盾（由 $x \to 0$ 时 $u(x) \to u(0)$ 可得），因为若 $u(x) \equiv 0$ 则必有 $u(0) = 0$，与 $u(0) = 1$ 矛盾。

因此不存在函数 $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ 同时满足

$$\Delta u = 0 \text{ in } D, \quad u = 0 \text{ on } \{|x| = 1\}, \quad u(0) = 1.$$

证毕。

六、证明强极值原理

证明：

考虑如下由椭圆型算子 L 生成的扩散过程 $(X_t^x)_{t \geq 0}$，满足 Itô 过程：

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dW_t + b(X_t)\, dt,$$

其中 $\sigma(x)$ 满足 $\sigma(x)\sigma(x)^\top = a(x)$，$W_t$ 是标准布朗运动。

记 $\tau_D = \inf\{t > 0 : X_t \notin D\}$ 为首次离开 D 的时刻。

由伊藤公式对 $u(X_t)$ 应用得到：

$$\mathbb{E}_{x_0}[u(X_{t \wedge \tau_D})] = u(x_0) + \mathbb{E}_{x_0}\left[\int_0^{t \wedge \tau_D} Lu(X_s)\, ds\right] \geq u(x_0).$$

另一方面，由 u 在 x_0 处取最大值知：

$$u(X_{t\wedge\tau_D}) \le u(x_0) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[u(X_{t\wedge\tau_D})] \le u(x_0).$$

结合以上两式得到：

$$\mathbb{E}_{x_0}[u(X_{t\wedge\tau_D})] = u(x_0), \quad \Rightarrow \int_0^{t\wedge\tau_D} Lu(X_s)\,ds = 0, \quad \text{a.s.}$$

由于 $Lu \ge 0$，故 $Lu(X_s) = 0$ 几乎处处成立。

接下来使用支持定理（support theorem）：

该定理告诉我们，对于任意连续路径 $\gamma : [0,T] \to D$，存在一条概率为正的扩散路径接近 γ。由于扩散过程有正的转移密度，其路径可到达任意邻域。因此，对于任意 $y \in D$，都有路径从 x_0 出发到达 y，从而 $Lu(y) = 0$ 在整个 D 中成立。

所以 $Lu = 0$ 在 D 中恒成立，且 u 在 D 内部取得最大值。

根据椭圆型算子的极值原理，调和函数在内部取得极值当且仅当为常数函数。

故 u 在 D 上恒等于常数。

结论：

若 $Lu \ge 0$ 且 u 在内部取得最大值，则要么 u 恒等于常数，要么最大值只能出现在边界上。

七、HJB 方程的推导

证明：

Bellman 最优性原理：

对任意 $\delta > 0$，我们有最优性原则：

$$u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x}\left[u(t+\delta, X^\alpha_{t+\delta})\right].$$

此等式的含义是：从当前状态 (t,x) 出发，最优代价等于在小时间步长 δ 后再进行最优控制所产生的期望损失。

推导 HJB 方程：

设 $u \in C^{1,2}$，对任意固定控制策略 α，记扩散矩阵

$$a^\alpha(x) := \sigma(x,\alpha)\sigma^\top(x,\alpha).$$

利用 Itô 展开 $u(t+\delta, X^\alpha_{t+\delta})$ 的期望（在 $X_t = x$ 的条件下）：

$$\mathbb{E}_{t,x}[u(t+\delta, X^\alpha_{t+\delta})] = u(t,x) + \delta\left(\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left[a^\alpha(x)D^2u(t,x)\right]\right) + o(\delta).$$

结合 Bellman 最优性原理：

$$u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{u(t,x) + \delta\left(\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[a^\alpha(x)D^2u(t,x)]\right)\right\} + o(\delta).$$

两边相减并除以 δ，再令 $\delta \to 0$，得：

$$0 = \inf_{\alpha\in A}\left\{\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[a^\alpha(x)D^2u(t,x)]\right\}.$$

即最优值函数 $u(t,x)$ 满足 HJB 方程：

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \dfrac{1}{2}\inf_{\alpha\in A}\left\{\sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\partial_{ij}u(t,x)\right\} = 0, & t < T, \\ u(T,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$