2025 年春季学期随机微分方程测试题

刘畅 202418000206021

一、（1）停时的定义为：考虑带流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$，设随机变量 τ：$\Omega \to T$，我们称 τ 为一个关于 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 的停时，若下式成立：

$$\big\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \le t\big\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in T.$$

举个例子，若考虑一个随机过程 $(X_t)_{t\ge 0}$，我们可以称其首次进入某个区间 $[a,b]$ 的时刻为停时，但我们不能称其最后一次取值于 $[a,b]$ 的时刻为停时，因为我们无法根据已掌握的信息来判断该随机过程之后是否还会再次进入区间 $[a,b]$ 内.

（2）马氏过程的数学定义为：给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, \mathbb{P})$ 和状态空间 S，我们称随机过程 $\{X_t\}_{t\ge 0}$ 为马氏过程，若对于任意 $0 \le s < t$ 和 $A \in S$，有下式成立：

$$\mathbb{P}\big(X_t \in A|\mathcal{F}_s\big) = \mathbb{P}\big(X_t \in A|X_s\big).$$

由于 $\mathcal{F}_s$ 表示 s 时刻之前的全部信息，而 X_s 表示在 s 时刻的信息，故我们可以将其通俗理解为：未来的事件只取决于现在，与过去所发生的事件无关.

（3）设 $\{B_t; t \ge 0\}$ 为布朗运动，令

$$\xi_t = \begin{cases} B_t, & B_0 \ne 0, \\ 0, & B_0 = 0. \end{cases}$$

令 $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u : u \le t)$ 为自然 σ 域，则对于任意 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$，有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A(\xi_{t+s})|\mathcal{F}_s\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A(B_{t+s})\mathbf{1}_{\{B_0\ne 0\}}|\mathcal{F}_s\big] + \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A(0)\mathbf{1}_{\{B_0=0\}}|\mathcal{F}_s\big] \\
&= \mathbf{1}_{\{B_0\ne 0\}}\int_A \frac{e^{-\frac{(\xi_s-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\,dy + \mathbf{1}_{\{B_0=0\}}\mathbf{1}_A(0) \\
&= \mathbf{1}_{\{\xi_s\ne 0\}}\int_A \frac{e^{-\frac{(\xi_s-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\,dy + \mathbf{1}_{\{\xi_s=0\}}\mathbf{1}_A(\xi_s) + \mathbf{1}_{\{\xi_s=0,B_0\ne 0,B_s=0\}}\left[\int_A \frac{e^{-\frac{(\xi_s-y)^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\,dy - \mathbf{1}_A(0)\right] \\
&= \mathbb{P}(t;\xi_s,A).
\end{aligned}$$

故 ξ 是马氏过程，但其不是强马氏过程. 否则，若令 $\tau = \inf\{t > 0; \xi_t = 0\}$，则

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\big[\xi_1 \ne 0, \tau \le 1\big] &= \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}\big(\xi_1 \ne 0, \tau \le 1|\mathcal{F}_\tau\big)\big] \\
&\le \mathbb{E}_x\big[\mathbb{P}(1-\tau;\xi_\tau,\{0\}^c)\big] \\
&= \mathbb{E}_x\big[\mathbb{P}(1-\tau;0,\{0\}^c)\big] = 0.
\end{aligned}$$

但对于 $x \ne 0$，有 $\mathbb{E}_x(\xi_1 = 0) = 0$，故

$$\mathbb{E}_x\big[\xi_1 \ne 0, \tau \le 1\big] = \mathbb{E}_x(\tau \le 1) = \mathbb{E}_x\big(\omega : \exists t \le 1, s.t. B_t = 0\big) > 0.$$

与上式矛盾. 故 ξ 是马氏过程但不是强马氏过程.

二、(1) 我们称一个定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ 上的随机过程 $\{W_t : t \geq 0\}$ 为 $\mathcal{F}_t$-布朗运动，若其满足以下性质:

(i) 对于任意 ω，有 $W_0(\omega) = 0$;

(ii) 对于所有 ω，$t \mapsto W_t(\omega)$ 是一个关于 $t \geq 0$ 的连续函数，即轨道连续;

(iii) 对于任意 $t, h \geq 0$，$W_{t+h} - W_t$ 独立于 $\sigma(W_u, 0 \leq u \leq t)$，且 $W_{t+h} - W_t \sim N(0, h)$.

(2) 首先 $W_t \in \mathcal{F}_t$，$\forall t \geq 0$. 下证 $W_t \in L^1$: 由于 $W_t \sim N(0, t)$，故

$$\mathbb{E}|W_t| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx = 2\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty.$$

最后证明鞅性: 对于任意 $0 \leq s < t$，由增量独立性我们有

$$\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\big[W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s\big] = \mathbb{E}\big[W_t - W_s\big] + W_s = W_s.$$

综上所述，W_t 是一个 $\mathcal{F}_t$-鞅.

(3) 首先证明独立增量: 对于任意 $0 \leq s < t$，有

$$B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_{s+\tau} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{s+\tau} = \mathcal{G}_s.$$

其次，由于 W_t 是一个 $\mathcal{F}_t$-布朗运动，故

$$B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_{s+\tau} \sim N(0, t-s).$$

另外，我们还有适应性:

$$B_t = W_{t+\tau} - W_\tau \in \mathcal{F}_{t+\tau} = \mathcal{G}_t.$$

最后，轨道连续性显然. 故 B_t 为 $\mathcal{G}_t$ 布朗运动. 在独立增量的证明过程中，令 $s = 0$ 即可得到 $B_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_0$.

三、(1) 首先验证 $X_t \in L^1$:

$$\mathbb{E}|X_t| = \mathbb{E}\big[e^{\lambda}|W_t|\big] = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda t)^2}{2t}} dx \leq 2e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} < +\infty.$$

然后验证下鞅性质. 由第二题 (2) 可知 W_t 是 $\mathcal{F}_t$-鞅，因此 $|W_t|$ 是 $\mathcal{F}_t$-下鞅. 对于任意 $\lambda > 0$，由 Jensen 不等式，对于任意 $0 \leq s < t$，我们有

$$\mathbb{E}\big[e^{\lambda|W_t|}|\mathcal{F}_s\big] \geq e^{\lambda \mathbb{E}[|W_t||\mathcal{F}_s]} \geq e^{\lambda|W_s|}.$$

综上，X_t 是一个下鞅.

(2) 我们需要用到上一问的结论. 首先考虑 $t = 1$ 的情况:

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq 1} |W_s| > x\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq t} X_t > e^{\lambda x}\Big) \leq \frac{\mathbb{E}X_1}{e^{\lambda x}} \leq 2e^{\frac{\lambda^2}{2} - \lambda x}$$

取 $\lambda = x$ 即可得到

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq 1} |W_s| > x\Big) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

然后利用 scaling 性质，注意到 $\frac{1}{c} W_{c^2 t} \overset{d}{=} W_t$，我们有

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq t} |W_s| > x\Big) = \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq 1} |W_s| > \frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

（3）由 x_t 的定义，我们有 $[x]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$. 且由 $1/2 \le |\sigma| \le 2$ 的假设，$\frac{t}{4} \le [x]_t \le 4t$. 由于 x_t 是连续局部鞅，故由时刻变换：存在布朗运动 $\widetilde{W}_t$，使得 $\widetilde{W}_t = x_{[x]_t^{-1}}$. 从而我们有

$$\sup_{0\le s\le t} |x_s| = \sup_{0\le s\le t} \big|\widetilde{W}_{[x]_s}\big| \le \sup_{0\le r\le 4t} \big|\widetilde{W}_r\big|.$$

由上一问的结论可知：

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\le s\le t} |x_s| > x\Big) \le 2e^{-\frac{x^2}{8t}}.$$

即存在一个独立于 σ 的常数 c 满足不等式，且我们可以显式地解出 $c = 1/8$.

（4）定义 $S := \inf\{s > 0 : |\widetilde{W}_s| > 1\}$. 由 τ_1 的定义，我们有

$$\tau_1 = \inf\{t > 0 : |\widetilde{W}_{[x]_t}| > 1\} = \inf\{t > 0 : [x]_t > S\}.$$

从而由 $\frac{t}{4} \le [x]_t \le 4t$ 得 $\frac{S}{4} \le \tau_1 \le 4S$. 故 $\mathbb{E}e^{\mu\tau_1} \le \mathbb{E}e^{4\mu S} < \infty$.

（5）可以推广到高维，此时 W_t 为 d 维布朗运动，且 σ_s 为 $d\times d$ 维矩阵值随机过程，所有的估计过程类似，但最终估计结果中可能会出现依赖于维数的常数.

四、由于 $\dot{h} \in L^2$，故其满足 Novikov 条件，从而由 Girsanov 变换，我们可以定义如下的 Radon-Nikodym 导数：

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\Big(\int_0^\infty \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds\Big).$$

且在测度 $\mathbb{Q}$ 下，$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t \dot{h}_s\, ds = W_t - h_t$ 是标准布朗运动. 对上式两端取对数，我们得到

$$\log\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \int_0^\infty \dot{h}_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2\, ds = \int_0^\infty \dot{h}_s\, d\widetilde{W}_s + \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2\, ds$$

在测度 $\mathbb{Q}$ 下取期望可得

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\log\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\int_0^\infty \dot{h}_s\, d\widetilde{W}_s\Big] + \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2\, ds = \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2\, ds.$$

五、定义 B_t 为从 $x\in D$ 出发的布朗运动，并定义停时 $\tau_D := \inf\big\{t > 0 : B_t \notin D\big\}$. 由 Itô 公式，对于 $t < \tau_D$，注意到 $\Delta u = 0$，有

$$u(B_{t\wedge\tau_D}) = u(x) + \int_0^{t\wedge\tau_D} \nabla u(B_s) dB_s.$$

两边取期望，然后令 $t\to\infty$ 得 $\mathbb{E}\big[u(B_{\tau_D})\big] = u(x)$. 然而我们还有

$$\mathbb{E}\big[u(B_{\tau_D})\big] = \mathbb{E}\big[u(B_{\tau_D})\cdot \mathbf{1}_{|B_{\tau_D}|=1}\big] + \mathbb{E}\big[u(0)\cdot \mathbf{1}_{B_{\tau_D}=0}\big] = 0.$$

即对于任意 $x\in D$，均有 $u(x) = 0$，这与 $u(0) = 1$ 矛盾.

六、定义一个从 x_0 出发的扩散过程，且其满足以下 SDE：

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

其中 $\sigma(x)\sigma^T(x) = 2a(x)$. 那么该扩散过程对应的生成元即为 L. 从而对于 $u\in C^2(D)$，由 Itô 公式可得

$$\mathbb{E}\big[u(X_t)\big] = u(x_0) + \mathbb{E}\Big[\int_0^t Lu(X_s)\, ds\Big].$$

若我们定义逃逸时 $\tau_D = \inf\{t \ge 0 : X_t \notin D\}$，那么有下式成立：

$$\mathbb{E}\big[u(X_{t\wedge\tau_D})\big] = u(x_0) + \mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau_D} Lu(X_s)\, ds\Big] \ge u(x_0).$$

上式中的最后一个不等号是由于已有假设：$Lu(x) \geq 0,\, x \in D$. 然而我们还知道，u 在 x_0 处取得最大值. 故只能有 $\mathbb{E}\big[u(X_{t\wedge\tau_D})\big] = u(x_0)$，也即 $Lu(X_s) = 0, \forall s \in [0, t\wedge\tau_D]$.

现在我们假设存在 $y \in D$, 使得 $u(y) < u(x_0)$. 那么由 u 的连续性, 存在一个 y 的 ε 邻域 $B_\varepsilon(y) \subset D$, 且对于任意 $B_\varepsilon(y)$ 中的点 x，均有 $u(x) \leq u(x_0) - \eta$，其中 $\eta > 0$. 取 $\phi : [0,T] \to D$ 为连续函数，满足 $\phi(0) = x_0$，$\phi(T) \in B_\varepsilon(y)$，且对于任意 $t \in [0,T]$，均有 $\phi(t) \in D$. 由 support 定理，

$$\mathbb{P}_{x_0}\big(X_T \in B_\varepsilon(y)\big) > 0.$$

即以正概率有下式成立：$\mathbb{E}[u(X_T)] < u(x_0)$. 但我们前面已证明过，在过程 X_t 逃出区域 D 之前，均有 $\mathbb{E}[u(X_T)] = u(x_0)$，推出矛盾.

七、我们考虑从 t 时刻做微小摄动到 $t+dt$，此时对应的状态过程为 X_{t+dt}. 由 Bellman 最优性原理，最优值函数为

$$u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\big[u(t+dt, X_{t+dt})|X_t = x\big].$$

由 Itô 公式，有下式成立：

$$u(t+dt, X_{t+dt}) = u(t,X_t) + \partial_t u(t,X_t)dt + \nabla u(t,X_t)\sigma(X_t)dW_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_k \sigma_{ik}\sigma_{jk}(\alpha)\partial_{ij}u(t,X_t)\,dt.$$

将该展开式代入上式，我们有

$$u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\Big[u(t,x) + \partial_t u(t,x)dt + \nabla u(t,x)\sigma(x)dW_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_k \sigma_{ik}\sigma_{jk}(\alpha)\partial_{ij}u(t,x)\,dt\Big].$$

由于 $u(t,x)$ 是确定的，且与 α 无关，以及鞅部分期望为 0，故

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\Big[\sum_{i,j}\sum_k \sigma_{ik}\sigma_{jk}(\alpha)\partial_{ij}u\Big] = 0.$$

边界条件 $u(T) = g$ 可由定义直接导出.