中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

数学作业纸

班级　　　　姓名　　　　编号　　　　第　　页

一、停时：在时间t下可以判断"停时是否已经发生"

可以理解为一个"随机的时间点"但这个时间点是否发生，不能依赖未来的信息，只能由"当前及过去的信息"来决定。

二、马氏过程：未来的状态仅依赖于当前状态而与过去的状态无关。即只知道当前状态，就可以对未来做出的预测。

三、B_t 是BM从x出发。

$$\text{设} X_t = \begin{cases} B_t & \text{if } B_0 \neq 0 \\ 0 & \text{if } B_0 = 0. \end{cases}$$

二(1) ① 以概率1 W_t连续路径.

② W_t is adapted to $\{\mathcal{F}_t\}$. $\forall t$. $W_t \in \mathcal{F}_t$.

③ $\forall s<t$, $W_t - W_s$ 和 $\mathcal{F}_s$ 独立. 且 $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.

④. $W_0 = 0$.

(2) ① $W_t \sim N(0,t)$. $\mathbb{E}|W_t| < \infty$.

$$(\mathbb{E}|W_t|)^2 \le \mathbb{E}|W_t|^2 = t.$$

② $\forall s<t$. $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s]$

$$= \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s]$$

$$= \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s = W_s.$$

$W_s \in \mathcal{F}_s$. $W_t - W_s$ 和 $\mathcal{F}_s$ 独立.

(3) ① $B_t^{(w)} = W_{t+\tau}^{(w)} - W_\tau^{(w)}$. 由 $W_t^{(w)}$ 连续~~路径~~.. $B_t(w)$ 连续.

②. 由~~W_t~~布朗运动 strong Markov property.

对停时 τ. $\forall t>s$,

$$B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_\tau - (W_{s+\tau} - W_\tau)$$

$$= W_{t+\tau} - W_{s+\tau}.$$ 与 $\mathcal{F}_{s+\tau} = \mathcal{G}_s$ 独立.

且 $B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_{s+\tau} \sim N(0, t-s)$.

③. $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau \in \mathcal{F}_{t+\tau} = \mathcal{G}_t$.

④ $B_0 = W_\tau - W_\tau = 0$.

且由布朗运动的强 strong Markov property.

进一步有 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ 与 $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{G}_0$ 独立.

三. (1) ① W_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，$\forall t$.

记 $f(x)=e^{\lambda|x|}$，f是连续且 convex function.

$f(W_t)=e^{\lambda|W_t|}$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测，$\forall t$.

② $\mathbb{E}[e^{\lambda|W_t|}]\le e^{\lambda|W_0|}\mathbb{E}[e^{\lambda|W_t-W_0|}]<\infty$.

由于 $W_t-W_0\sim N(0,t)$

$|W_t-W_0|$ 为 Fold normal distribution.

有mgf表达式.

③. $\forall s<t$. 由Jensen不等式. 和 BM 的鞅性.

$$\mathbb{E}[e^{\lambda|W_t|}|\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}[f(W_t)|\mathcal{F}_s]$$
$$\ge f(\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s])=f(W_s)$$
$$=e^{\lambda|W_s|}$$

(2) 由Doob不等式. $e^{\lambda|W_t|}$ 是非负下鞅.

$$\mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t}|W_s|>x)=\mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t}e^{\lambda|W_s|}>e^{\lambda x})$$
$$=\mathbb{P}(X_t^*>e^{\lambda x})$$
$$\le\frac{1}{e^{\lambda x}}\mathbb{E}X_t=\frac{1}{e^{\lambda x}}\mathbb{E}e^{\lambda|W_t|}$$
$$=e^{-\lambda x}\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty e^{\lambda u}e^{-\frac{u^2}{2t}}du$$
$$\le\frac{2e^{-\lambda x}}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(u-\lambda t)^2}{2t}}du$$
$$=2e^{-\lambda x}e^{\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

取 $\lambda = \frac{x}{t}$. $\quad \mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t} |W_s| > x\right) \le 2e^{-\frac{x^2}{2t}}$

(3): 指数鞅不等式 notes 中. Corollary 3.4:

在 $[0,t]$ 上. X_s 为 Itô 积分. X_s 是鞅. 且 $X_0=0$.

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \sigma_s\, ds \le 4t < \infty.$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le t}|X_s|>x\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s\le t}|X_s|>x \ \&\ \langle X\rangle_t \le 4t\right)$$

$$\le 2e^{-\frac{x^2}{2\times 4t}} = 2e^{-\frac{x^2}{8t}}$$

(4): $a_t = \frac{1}{2}\sigma_t^2 \qquad \frac{1}{8} \le |a_t| \le 2$. σ 非退化. ; $X_0=0$.

由 notes. Th 3.13 中. $\forall\, \tilde\mu < 8/c_5$.

$$\mathbb{E}\exp\left(\frac{\tilde\mu\tau_1}{8}\right) \le \left(1-\frac{c_5\tilde\mu}{8}\right)^{-1} \quad c_5 \text{ 只和 } d \text{ 有关}.$$

所以 取 $\mu = \frac{\tilde\mu}{8} = \frac{1}{2c_5} < \frac{1}{c_5}$

$$\mathbb{E}e^{\mu\tau_1} = \mathbb{E}e^{\frac{\tilde\mu}{8}\tau_1} \le \left(1-c_5\frac{1}{2c_5}\right)^{-1} < \infty.$$

(5) 可以推广到 d 维. 每个分量都是 1 维的 BM. 且独立.

可以分量单独处理.

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

数学作业纸

班级　　　　姓名　　　　编号　　　　第　　页

四、考虑 $[0,T]$.

(Ex 8.6.6). 由 Girsanov Th / Cameron-Martin.

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left\{\int_0^T h'_t\, dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T {h'_t}^2\, dt\right\}.$$

$$H(Q|P) = E_Q\left[\log\frac{dQ}{dP}\right] = E_P\left[\frac{dQ}{dP}\log\frac{dQ}{dP}\right]$$

$$= \int \left(\int_0^T h'_t\, dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T {h'_t}^2\, dt\right) dQ.$$

$$= \int \int_0^T h'_t\, dW_t\, dQ - \frac{1}{2}\int_0^T {h'_t}^2\, dt \int dQ$$

则由 Girsanov Th 有.

$B_t = W_t - h_t$ 是在 Q 下的标准的BM.

$dB_t = dW_t - h'_t\, dt$.

则 $\int_0^T h'_t\, dW_t = \int_0^T h'_t\, dB_t + \int_0^T {h'_t}^2\, dt$.

则 $E_Q\left[\int_0^T h'_t\, dB_t\right] = 0$.　(Itô 积分).

所以 $H(Q|P) = \frac{1}{2}\int_0^T {h'_t}^2\, dt$.

令 $T\to\infty$. 有 $H(Q|P) = \frac{1}{2}\int_0^\infty {h'_t}^2\, dt$.

三、Dirichlet 问题 有唯一的解

$u(x) = \mathbb{E}_x[\varphi(W_{\tau_D})]$. $\tau_D = \inf\{t>0 \mid W_t \notin D\}$.

W_t 是从 x 出发的 d 维标准 BM. $\forall x \in \bar{D}$

$$u(0) = \mathbb{E}_0[\varphi(W_{\tau_D})] = p(W_{\tau_D}=0)\varphi(0) + p(|W_{\tau_D}|=1)\varphi(1)$$
$$= p(W_{\tau_D}=0)$$

但当 $d \geq 2$ 时，BM 概率为 0 击中固定的点。所以 $p(W_{\tau_D}=0)=0$.

$u(0)=0$ 和 $u(0)=1$ 矛盾。

所以不存在 u.

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

数学作业纸

班级　　姓名　　编号　　第　页

六: ~~u在D上恒为常数.~~

由于 $a_{ij}\in S_\delta^d$ a对称正定. 所以 $\exists\ \sigma_t$ s.t. $a_t=\frac{1}{2}\sigma_t\sigma_t^T$

设 $X_t=\int_0^t \sigma_s\,dW_s+\int_0^t b_s\,ds+X_0$.

由Itô公式有.

$$u(X_{t\wedge\tau_D})=u(X_0)+\int_0^{\tau_D\wedge t}Lu(X_t)dt+\int_0^{t\wedge\tau_D}\sigma\,\partial_i u\,dW_s.$$

$\tau_D=\inf\{t>0: X_t\notin D\}$.

取期望. $\mathbb{E}u(X_{t\wedge\tau_D})-u(X_0)=\mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_D\wedge t}Lu(X_t)dt\right]+0\geq 0.$

由于 $Lu(x)\geq 0$. $x\in D$.

~~所以~~ 但. u在D中 x_0 取最大值. 那么 $u(X_{t\wedge\tau_D})\leq u(x_0)$. 对t.

则 $0\leq E[u(X_{t\wedge\tau_D})-u(x_0)]\leq 0$.

所以. $\mathbb{E}u(X_{t\wedge\tau_D})=u(X_0)$. 且 $\mathbb{P}(u(X_{t\wedge\tau_D})<u(x_0))=0$.

若. u在D上恒为常数. 显然成立.

若u在D上不恒为常数. 且 x_0 在D内部.

则 $\exists\ r_x>0$ s.t. $B(x_0,r_x)\subset D$. 且.

$\exists\ y$ 在D内部. $u(y)<u(x_0)$. 若在 ∂D上. 由u的连续性. 也能在D内部找到.

即 $\exists\ r_y>0$ s.t. $B(y,r_y)\subset D$. 且 $u(y')<u(x_0)$, $y'\in B(y,r_y)$

取 $\varepsilon=\frac{1}{3}\min\{r_x,r_y\}$. φ是x_0和y连接线段. 线段φ 就不会位于 ∂D 的 ε 范围内. (support Th 说明 X_t 距离在 φ 的 ε 周围).

则由support Th 有 $\exists\ c_1>0$. $\mathbb{P}^{x_0}(\tau_{B(y,r_y/2)}<\tau_D)\geq c_1$.

$\tau_{B(y,\frac{r_y}{2})}=\inf\{t>0 \mid X_t\in B(y,\frac{r_y}{2})\}$

$u(X_{\tau_{B(y,\frac{r_y}{2})}})<u(x_0)$

所以 $\mathbb{P}(u(X_{t\wedge\tau_D}) < u(x_0)) \geq \mathbb{P}^{x_0}(T_{B(y,\frac{r_y}{2})} < \tau_D) \geq c_1 > 0$ 矛盾.

所以 x_0 只能在 ∂D 上.

t: 《Stochastic Differential Equations》. Bernt Øksendal.

Th 11.2.1. 假设 A只有一个元素 / α_t 有Markov性质.

那么: $J(t,x;\alpha) = \mathbb{E}_{t,x}\, g(X_T^\alpha)$

$= \mathbb{E}_{t,x}\left[\mathbb{E}_{t,x}\left(g(X_T^\alpha) \mid \mathcal{F}_{t+\Delta t}\right)\right].$

$= \mathbb{E}_{t,x}\left[\mathbb{E}_{t+\Delta t, X(t+\Delta t)}\left(g(X_T^\alpha)\right)\right]$

$= \mathbb{E}_{t,x}\left[J(t+\Delta t, X(t+\Delta t);\alpha)\right].$

假设 α^* s.t. $u(t+\Delta t, X(t+\Delta t)) = J(t+\Delta t, X(t+\Delta t);\alpha^*)$.

则令 $\alpha_s = \begin{cases} \alpha' & t\le s< t+\Delta t. \\ \alpha_s^* & s\ge t+\Delta t. \end{cases}$ 其中 $\alpha'\in A$ 任意.

则 $u(t,x) \le J(t,x;\alpha) = \mathbb{E}_{t,x}\left[J(t+\Delta t, X_{t+\Delta t};\alpha^*)\right].$

$= \mathbb{E}_{t,x}\left[u(t+\Delta t, X_{t+\Delta t})\right]$ (*)

对u用Itô公式:

$du = \partial_t u\, dt + \sum_{i=1}^d \partial_i u\, dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d \partial_{ij}^2 u\, dX_i dX_j$

$= \partial_t u\, dt + \sum_{i=1}^d \partial_i u\, \sigma\, dW_t + \frac{1}{2}\sum_{k,i,j}^d \sigma_{ik}\sigma_{jk}\, \partial_{ij}^2 u\, dt.$

从t到t+Δt积分., dW_t 项积分为0

$u(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}) - u(t,x) = \int_t^{t+\Delta t} \left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sum_{k,i,j}^d \sigma_{ik}\sigma_{jk}\, \partial_{ij}^2 u\right) dt.$ 代入(*)

则 $u(t,x) \le u(t,x) + \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+\Delta t}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sum_{k,i,j}^d \sigma_{ik}\sigma_{jk}\,\partial_{ij}^2 u\right) dt\right]$

所以 $\mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+\Delta t} \sim dt\right] \ge 0$. 两边除以 Δt. 令 $\Delta t \to 0$.

则 $\partial_t u + \frac{1}{2}\sum_{k,i,j}^d \sigma_{ik}\sigma_{jk}\,\partial_{ij}^2 u \ge 0$.

两边取. ~~αε~~ $\inf_{\alpha\in A}$. 则 $\partial_t u+\frac{1}{2}\inf_{\alpha\in A}\sum_{k,i,j}^{d}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_{ij}^{2}u\geq 0$.

设 α^* 最优. 使得 $u(t,x)=J(t,x;\alpha^*)=\mathbb{E}_{t,x}g(X_T^{\alpha^*})$.

$u(t,x)$ 满足带时间的 Dirichlet 问题 则.

$$\partial_t u+\frac{1}{2}\sum_{k,i,j}^{d}\sigma_{ik}\sigma_{jk}(\alpha^*)\partial_{ij}^{2}u=0.$$

两边再取 $\inf_{\alpha\in A}$. $\partial_t u+\frac{1}{2}\inf_{\alpha\in A}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_{ij}^{2}u\leq 0$.

所以 $\partial_t u+\frac{1}{2}\inf_{\alpha\in A}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_{ij}^{2}u=0$.

$$u(T)=\inf_{\alpha\in A}J(T,x;\alpha)=\mathbb{E}_{T,x}(g(X_T^{\alpha}))=g.$$

Th11.2.3 在一定条件下. 可以将结果推广到一般适应过程.