一、(1) 给定带流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$，$\tau$ 是 $\Omega \to \mathbb{R}_+$ 上的一个映射，满足对任意 t，$\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$，称 τ 为停时.

停时是一个判断某个随机过程达到某种条件的时刻

例如布朗运动到达 1 的时刻

(2) 是一种从某个时间点起，状态转移只依赖于当前时刻的随机过程

即 $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$

二、(1) 布朗运动 $W_t = (W_t)_{t \ge 0}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程，满足

① $W_0 = 0$

② 对于 $t > s$，$W_t - W_s$ 与 $\{W_r, 0 \le r \le s\}$ 独立

③ $W_t - W_s$ 与 W_{t-s} 同分布，且服从 $N(0, t-s)$

④ $(W_t)_{t \ge 0}$ 的几乎所有的样本轨道连续

(2) $E[W_t \mid \mathcal{F}_s] = E[W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s] = W_s$

(3) ① $B_0 = W_{0+\tau} - W_\tau = 0$

② 对于 $t > s$，$B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_\tau - W_{s+\tau} + W_\tau$

$$= W_{t+\tau} - W_{s+\tau}$$

$$B_r = W_{r+\tau} - W_\tau, \quad 0 \le r \le s$$

因此 $B_t - B_s$ 与 $\{B_r, 0 \le r \le s\}$ 独立

③ $B_{t-s} = W_{t-s+\tau} - W_\tau$

W_{t+s+t} 与 $W_{t+t}-W_s$ 同分布

W_s-W_t 与 W_{s-t} 同分布

故 B_{t-s} 与 B_t-B_s 同分布 $\sim N(0,t-s)$

④ $(B_t)_{t\geq 0}$ 的几乎所有的样本轨道连续

对 $\forall t\geq 1$ $B_t=W_{t+t}-W_t$ 因此与 $\mathcal{G}_0=\mathcal{F}_t$ 独立

三、(1) 由 W_t 是1维布朗运动

故 $E[|W_t| \mid \mathcal{F}_s]=|W_s|$，$\forall t>s$

则 $X_s=e^{\lambda|W_s|}=e^{\lambda E[|W_t|\mid\mathcal{F}_s]}$

$\leq E[e^{\lambda|W_t|}\mid\mathcal{F}_s]=E[X_t\mid\mathcal{F}_s]$

因此 X_t 是下鞅

(2) $\mathbb{P}(\sup\limits_{0\leq s\leq t}|W_s|>x)=\mathbb{P}(\sup\limits_{0\leq s\leq t}e^{\lambda|W_s|}\geq e^{\lambda x})$

$$\leq \frac{E[e^{\lambda|W_t|}]}{e^{\lambda x}}=\frac{2\int_0^\infty e^{\lambda u}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{u^2}{2t}}du}{e^{\lambda x}}$$

$$=\frac{2\int_0^\infty e^{\lambda u-\frac{u^2}{2t}}du}{\sqrt{2\pi t}\,e^{\lambda x}}\leq 2e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

四、由 $X_t=W_t+h_t=W_t+\int_0^t \dot{h}_s ds$

有 $dX_t=dW_t+\dot{h}_t dt$

由于 $\dot{h}_s\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$，故 $\frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s ds<\infty$.

因此满足 $E_{\mathbb{P}}[e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s ds}]<\infty$，满足 Novikov's condition

由 Girsanov 定理. 定义新的概率测度 $\mathbb{Q}$

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}=e^{\int_0^\infty \dot{h}_s dW_s-\frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s ds}$$

使得在 $\mathbb{Q}$ 下，X_t 是布朗运动

故 $E_{\mathbb{Q}}[\log\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] = E_{\mathbb{Q}}[\int_0^\infty \dot{h}_s dX_s - \int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds]$

$= E_{\mathbb{Q}}[-\frac{3}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s ds] = -\frac{3}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s^2 ds$

因此 $KL(\mathbb{Q}\|\mathbb{P}) = -\frac{3}{2}\int_0^\infty \dot{h}_s ds$

五、设 $u\in C^2(D)\cap C(\bar{D})$ 且 $\Delta u=0$（即 D 内 2 阶光滑到边连续 $\Delta u=0$）

则 $x\in D$，有 $u(x) = E_x[u(W_{\tau_1})]$

其中 W_t 是 d 维布朗运动，

$\tau_1 = \inf\{t>0, W_t\in \bar{D}\}$，$D = \{x\in\mathbb{R}^d : |x|<1, x\neq 0\}$

E_x 表示初点为 x 的布朗运动下的期望

已知 $|z|=1$ 时 $u(z)=0$

$z=0$ 时 $u(z)=1$

反证法，若存在 $u=u(x)$ 使方程有解，则 $x\in D$，有

$u(x) = E_x[u(W_{\tau_1})] = \mathbb{P}_x(W_{\tau_1}=0)\cdot 1 + \mathbb{P}(W_{\tau_1}=1)\cdot 0$

$= \mathbb{P}_x(W_{\tau_1}=0)$

而在 $d\geq 2$ 的布朗运动中，$\mathbb{P}_x(\{W_{\tau_1}=0\}) = 0$

因此 $u(x) = \mathbb{P}_x(W_{\tau_1}=0) = 0$，$\forall x\in D$

而由 u 是解，$u\in C(\bar{D})$ 连续到边

故 $\lim_{x\to 0} u(x) = u(0) = 1 \neq 0 = u(x)$ $\forall x\in D$

矛盾！

六、构造一个与算子 L 对应的扩散过程

$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$，$X_0 = x_0$

$\sigma\sigma^T \triangleq 2a(x)\in S_\delta^d$，$\forall x\in D$

设 $Y_t \triangleq u(X_t)$

$du(X_t) = \mathcal{L}u(X_t)dt + \nabla u(X_t)^T \sigma(X_t) dW_t$

由于 $\mathcal{L}u \geq 0$，故 Y_t 是一个下鞅，$\mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] \geq Y_s$

反证法，若 u 在 D 上不恒为常数，

由于 $u \in C^0(\bar{D})$，存在 $y \in D$ 使得 $u(y) < u(x_0)$

考虑 $\varphi(t)$ 是从 x_0 到 y 的连续路径.

则对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists C = C(\varepsilon, \varphi, b, \sigma^{-1})$ 使得 $\mathbb{P}(\sup_{0 \le t \le T} |X_t - \varphi(t)| < \varepsilon) > C$

即 X_t 有正概率进入 y 的局部. 这将导致 $\mathbb{P}(u(X_t) < u(x_0)) > 0$

从而使得 $\mathbb{E}[u(X_t)] < u(x_0)$，与下鞅性质矛盾.

故不存在不恒为常数的极大值.