随机微分方程结课作业

滕非凡

202328000206026

AMSS CAS

2025 年 5 月 19 日

一. (1) 谈谈你对停时这个概念的理解;
(2) 谈谈你对马氏过程的理解;
(3) 举一个是马氏过程但不是强马氏过程的例子。

解答 1. (1) 首先,停时的定义是:设一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, 映射 $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^+$ 满足: $\forall t \geq 0, \{\omega : \sigma(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. 实际上,停时是一个可测的随机变量,停时的决定不需要未来的信息,只依赖于到当前时间 t 为止的信息,这也意味着在任何时刻 t,我们都能根据到 t 为止的信息判断这个事件的信息。

(2) 马氏过程的定义是:对于任意的有界可测函数 f, 以及时间 $t \geq s \geq 0, E[f(X_t)|F_s] = E[f(X_t)|X_s], \mathbb{P}_{a.s.}$. 马氏过程是具有无记忆性的随机过程, 其未来的状态只依赖于当前状态,而不依赖于过去的历史。在给定当前状态的情况下,未来的期望不依赖于更早的信息。

(3) (难) 给定 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, P^x 为 $x + B(\cdot)$ 的分布, B 为一维标准布朗运动, P^x 为一族概率测度满足:
(1) $x \neq 0$ 时, P^x 为 $x + B(\cdot)$ 的分布
(2) $x = 0$ 时, P^0 为 $w \equiv 0$ 的点测度, 其中 $w \in \Omega$。
则可验证此时 P^x 诱导的 $X(t)$ 有连续轨道, 且有马氏性: 对任意有界可测随机变量 Y,

$$E^x(Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s) = E^{X(s)} Y, P^x_{a.s}$$

验证: 若 $x \neq 0$, 则由布朗运动的马氏性立得结论; 若 $x = 0$, 两边均为 Y 在 $w \equiv 0$ 处的取值。但 X 不成立强马氏性, 因为 $x \neq 0$ 时, $\tau = \inf\{t > 0 : X(t) = 0\} \Rightarrow X(\tau) = 0$ a.s 因此, 令 $Y_t(w) = f(w(1))$, $x \neq 0$, $E^x(Y_\tau \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} f(y) dy$。而 $E^{X(\tau)} Y_\tau = f(w(1)) = f(0)$ 显然, 对一般 f 不可能成立两者恒等。

二. 令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 为满足通常条件的概率空间。
(1) 叙述一维 $\mathcal{F}_t$-布朗运动 $(W_t)_{t\geq 0}$ 的定义;
(2) 证明 W_t 是一个 $\mathcal{F}_t$-鞅;
(3) 对于任意停时 τ，令 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau, \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+\tau}$。证明 (B_t) 为 $\mathcal{G}_t$-布朗运动，且和 $\mathcal{G}_0$ 独立。

解答 2. (1) 布朗运动是具有连续时间参数的随机过程，满足以下条件:
(i) 轨道连续: $(W_t)_{t\geq 0}$ 的轨道关于 t 几乎处处连续;
(ii) 独立增量: $(W_t)_{t\geq 0}$ 增量独立于 $\mathcal{F}_s$;
(iii) 平稳 Gauss: 对 $s < t$，增量 $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$
(2) 鞅性证明: 对 $s < t$,

$$\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] = W_s + \mathbb{E}[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] = W_s,$$

由独立增量性可证 W_t 是一个 $\mathcal{F}_t$-鞅。
(3) 对于 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau, \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+\tau}$:
我们首先假设 $\mathbf{P}(\tau < +\infty) = 1$。只需证明对于每个 n，每个 $0 < t_1 < \cdots < t_n$ 以及每个连续有界的 $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，有

$$\mathbb{E}(\Phi(W_{t_1}^{(\tau)}, \cdots, W_{t_n}^{(\tau)})\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\Phi(B_{t_1}, \cdot, B_{t_n}))\mathbf{P}(A)$$

这里我们需要用离散停时来逼近一般停时。对于每个 k，令

$$\tau_k(\omega) = \frac{j}{k} \text{ 若} \tau(\omega) \in (\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}].$$

那么 τ_k 也是一个停时，并且当 $k \to \infty$ 时，$\tau_k \to \tau$ 几乎必然。由有界收敛定理，我们只需对 $\tau = \tau_k$ 验证。为此，我们有:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Phi(W_{t_1}^{(\tau_k)}, \cdots, W_{t_n}^{(\tau_k)})\mathbf{1}_A) &= \sum_{j\geq 0} \mathbb{E}(\Phi(W_{t_1}^{(\frac{j}{k})}, \cdots, W_{t_n}^{(\frac{j}{k})})\mathbf{1}_{A\cap\{\frac{j-1}{k}<\tau\leq\frac{j}{k}\}}) \\
&= \sum_{j\geq 0} \mathbb{E}(\Phi(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}))\mathbf{P}(A \cap \{\frac{j-1}{k} < \tau \leq \frac{j}{k}\}) \\
&= \mathbb{E}(\Phi(B))\mathbf{P}(A) = (4.5) \quad .
\end{aligned}$$

然后我们在 $\tau < \infty$ 几乎必然的假设下证明该定理。对于一般的 τ，我们可以按照相同的步骤证明，对于每个 $A \in \mathcal{F}_\tau$，有

$$\mathbb{E}(\Phi(W_{t_1}^{(\tau)}, \cdots, W_{t_n}^{(\tau)})\mathbf{1}_{A\cap\{\tau<\infty\}}) = \mathbb{E}(\Phi(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}))\mathbf{P}(A \cap \{\tau < \infty\})$$

然后我们可以通过两边同时除以 $\mathbf{P}(\tau < +\infty)$ 得到证明。
(i) 适应性: 由于 $W_{t+\tau} \in \mathcal{F}_{t+\tau}$, 故 B_t 是 $\mathcal{F}_{t+\tau}$-可测，故适应于 $\mathcal{G}_t$;

(ii) 独立增量：对 $s<t$，$B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_{s+\tau}$ 独立于 $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{s+\tau}$；
(iii) 正态性：对 $s<t$，增量为 $B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_{s+\tau}$，由于增量 $W_{t+\tau} - W_{s+\tau}$ 服从正态分布 $\mathcal{N}(0, t-s)$，所以 $B_t - B_s$ 也服从该正态分布；
(iv) 独立性：$B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ 的路径由 W 在 τ 后的增量构成，独立于 $\mathcal{F}_r = \mathcal{G}_0$。

三. 令 W_t 为 1-维布朗运动。证明：
(1) 对任意 $\lambda > 0$，$X_t = e^{\lambda |W_t|}$ 是下鞅；
(2) 证明

$$P\left(\sup_{0\le s\le t} |W_s| > x\right) \le 2e^{-\frac{x^2}{2t}};$$

(3) 令 $\sigma : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ 适应于 W_t 生成的 σ-域流，且 $1/2 \le |\sigma| \le 2$。定义 $x_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$。证明存在常数 $c>0$（与 σ 无关），使得

$$P\left(\sup_{0\le s\le t} |x_s| > x\right) \le 2e^{-\frac{cx^2}{t}};$$

(4) 证明存在 $\mu > 0$ 使得 $\mathbb{E}e^{\mu\tau_1} < \infty$，其中 $\tau_1 = \inf\{t>0 : |x_t| > 1\}$；
(5) 能否将上述结果推广到 d-维？说明理由。

解答 3. (1) 证明下鞅性：由条件 $|W_t|$ 是下鞅且指数函数的凸性质，由 Jensen 不等式：

$$\mathbb{E}[e^{\lambda|W_t|} \mid \mathcal{F}_s] \ge e^{\lambda \mathbb{E}[|W_t| | \mathcal{F}_s]} \ge e^{\lambda |W_s|},$$

故我们得到结论。
(2) 证明：由布朗运动的反射原理以及布朗运动的 Gauss 性质，

$$P\left(\sup_{s\le t} |W_s| > x\right) = 2P(W_t > x) \le 2e^{-x^2/(2t)}.$$

证毕。
(3) 证明：由随机积分的定义，$x_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$ 是连续局部鞅，由二次变差 $[x]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds \ge \frac{t}{4}$，定义时间变换 $\tau(t) = \inf\{s : [x]_s > t\}$，由 Dambis-Dubins-Schwarz 定理可知，连续局部鞅 x_t 可通过时间变换表示为布朗运动，即存在一个布朗运动 B_t，使得 $x_{\tau(t)} = B_t$ 是布朗运动，应用 (2) 得

$$P\left(\sup_{s\le t} |x_s| > x\right) \le 2e^{-x^2/(8t)},$$

取 $c = 1/8$，则 c 为常数，且与 σ 无关，证毕。
(4) 证明：由 (3) 知，定义停时 $\tau(t) = \inf\{s\ge 0 : [x]_s > t\}$，则存在布朗运动 B_t，使得：

$$x_{\tau(t)} = B_{[x]_t}.$$

原停时 $\tau_1 = \inf\{t > 0 : |x_t| > 1\}$ 对应布朗运动 B_t 的停时 $\tau_B = \inf\{s > 0 : |B_s| > 1\}$。由于 $[x]_t \geq \frac{t}{4}$，当 $x_t = B_{[x]_t} = 1$ 时，有：

$$[x]_{\tau_1} \geq \frac{\tau_1}{4}.$$

因此：

$$\tau_1 \leq 4\tau_B.$$

对于标准布朗运动的首达时 τ_B 的密度函数是已知的：

$$P^x(\tau_B < t) = \int_0^t \frac{|x|}{\sqrt{2\pi z^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{2z}\right) dz.$$

所以期望可以直接计算得到，存在一个正常数 μ:

$$\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}] \leq \mathbb{E}[e^{4\mu\tau_B}] < \infty.$$

(5) 可以进行高维推广：对于 d 维布朗运动由于各分量独立，$\sup_{s\leq t}\|x_s\|$ 的概率由各分量的乘积控制，可以得到类似的不等式，常数 c 依赖维度 d。

四. 给定两个概率分布 $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$，定义：

$$H(\mathbb{P}|\mathbb{Q}) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}}\left[\log \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right]$$

设

$$X_t = W_t + h_t,$$

其中 W_t 是 1 - 维标准布朗运动，$h_0 = 0$ 且 $\dot{h}_t = \frac{d}{dt}h_t \in L^2(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R})$。求 X_t 的路径分布 $\mathbb{Q}$ 相对于 Wiener 测度 $\mathbb{P}$(W_t 的分布) 的相对熵 $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$。

解答 4. 由 $X_t = W_t + h_t$ ，其中，W_t 为一维标准布朗运动，$\mathbb{Q}$ 为 X_t 的路径分布；$\dot{h}_t = \frac{d}{dt}h_t \in L^2(\mathbb{R}_{\geq 0}$ 根据 Girsanov 定理，Radon-Nikodym 导数为：

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^t \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{h}_s|^2 ds\right).$$

相对熵 $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$ 定义为：

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right].$$

将 Girsanov 密度代入，得：

$$\log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = -\int_0^t \dot{h}_t dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{h}_s|^2 ds.$$

在 $\mathbb{Q}$ 下，$W_s = X_s - h_s$，则

$$dW_s = dX_s - \dot{h}_s dt,$$

$$\log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = -\int_0^t \dot{h}_s (dX_s - \dot{h}_s ds) - \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{h}_s|^2 ds.$$

化简得：

$$\log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = -\int_0^t \dot{h}_s dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{h}_s|^2 ds.$$

在 $\mathbb{Q}$ 下，伊藤积分 $\int_0^t \dot{h}_s dX_s$ 的期望为 0，因此：

$$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] = 0 + \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_t|^2 dt.$$

因此相对熵为：$H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_t|^2 dt$.

五. 令 $d \geq 2$, $D = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1, x \neq 0\}$。利用概率方法证明不存在 $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ 满足如下方程：

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in D \\ u(x) = 0, & \text{如果}|x| = 1 \\ u(x) = 1, & \text{如果}x = 0 \end{cases}$$

解答 5. 我们用反证法来证明结论。假设存在 $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ 满足上述方程。根据 Dirichlet 问题的概率解公式，对任意 $x \in D$，有：

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[u(B_{\tau_D})\right],$$

其中 B_t 是 d-维布朗运动，$\tau_D = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D\}$ 为首离时；边界条件定义为：

$$u(z) = \begin{cases} 0, & |z| = 1 \\ 1, & z = 0 \end{cases}.$$

当 $d \geq 2$ 时，布朗运动在 $d = 2$ 常返，在 $d \geq 3$ 暂留，从而有：

$$\mathbb{P}_x(\omega : \exists t > 0, B_t = 0) = 0 \quad (\forall x \neq 0).$$

因此，它是区域常返不是点常返。对任意 $x \in D \setminus \{0\}$，

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left[0 \cdot 1_{\{B_{\tau_D} \in \partial D \setminus \{0\}\}} + 1 \cdot 1_{\{B_{\tau_D} = 0\}}\right] = 0.$$

另一方面，由 $u \in C(\overline{D})$，应有：

$$\lim_{x \to 0} u(x) = u(0) = 1,$$

但根据上述结论，当 $x \neq 0$ 时 $u(x)=0$，

$$\lim_{x \to 0} u(x) = 0 \neq 1.$$

矛盾。

六. 令 D 为 $\mathbb{R}^d$ 中的有界区域，考虑二阶线性椭圆型算子：

$$Lu(x) := a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) + b_i(x)\partial_i u(x), \quad x \in D.$$

假设系数 $a_{ij}, b_i \in C^\infty(D)$，$a_{ij} \in S_d^+$。设 $u \in C^2(D) \cap C^0(\overline{D})$ 满足

$$Lu(x) \geq 0, \quad x \in D,$$

且 u 在 D 内部某点 x_0 处取得最大值。用 support 定理证明：要么 u 在 D 上恒等于常数，要么最大值只能出现在边界上（强极值原理）。

解答 6. 考虑二阶椭圆算子 L 生成的扩散过程 X_t，满足下面的 SDE：

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad \sigma\sigma^\top = a_{ij},$$

其中 W_t 为布朗运动，σ 为 a_{ij} 的分解。对 $u(X_t)$ 应用 Itô 公式：

$$du(X_t) = Lu(X_t)dt + \nabla u(X_t) \cdot \sigma(X_t)dW_t.$$

由于 $Lu \geq 0$，则 $u(X_t)$ 是一个局部下鞅。设 $x_0 \in D$ 是 u 的内部最大值点，且 $u(x_0) = M$。取 $r > 0$ 使得闭球 $B_r(x_0) \subset D$，定义停时：

$$\tau_r = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin B_r(x_0)\}.$$

根据下鞅性质，对 $t < \tau_r$：

$$u(x_0) \geq \mathbb{E}_{x_0}[u(X_{t\wedge\tau_r})].$$

令 $t \to \infty$，由有界收敛定理：

$$u(x_0) \geq \mathbb{E}_{x_0}[u(X_{\tau_r})].$$

若 u 在 $B_r(x_0)$ 内不恒为 M，则存在 $y \in \partial B_r(x_0)$ 使得 $u(y) < M$。由连续性，存在邻域 $U \subset \partial B_r(x_0)$ 使得 $u(z) < M - \epsilon$ 对 $z \in U$。根据 support 定理，路径 X_t 以正概率到达 U，故：

$$\mathbb{E}_{x_0}[u(X_{\tau_r})] < M.$$

这与 $u(x_0) \geq \mathbb{E}_{x_0}[u(X_{\tau_r})]$ 矛盾。所以 u 在 $B_r(x_0)$ 内恒为常数 M。由 D 的连通性和 $u \in C^0(\overline{D})$，u 在整个 D 上恒为常数。否则，若 u 非常数，则其最大值必在边界 ∂D 上，由此我们得到了强极值定理。

七. 考虑一个被控制的扩散过程：

$$dX_t^\alpha = \sigma(X_t^\alpha, \alpha_t)dW_t,$$

其中 X_t 是状态过程，A 是一个控制集合，(α_t) 是一个取值为 A 的循序可测的控制过程，该类过程全体记为 $\mathcal{A}$。控制目标是最小化代价：

$$J(t,x;\alpha) = \mathbb{E}_{t,x}[g(X_T^\alpha)], \quad t \in [0,T]$$

定义最优值函数：

$$u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} J(t,x;\alpha), \quad t\in[0,T], x\in\mathbb{R}^d.$$

证明这个函数 $u(t,x)$ 满足 Hamilton - Jacobi - Bellman 方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}\inf_{\alpha\in A}\{\mathrm{tr}[\sigma\sigma^\top(x,\alpha)\partial_{ij}u]\} = 0, \\ u(T) = g. \end{cases}$$

(可先考虑 A 只有一个元素或者有限个元素的情况)

解答 7. 对任意 $t\in[0,T]$ 和 $h>0$，假设在时间段 $[t,t+h]$ 使用控制 α，然后在 $t+h$ 时根据新的状态使用最优控制，右边的期望代表在时间 $t+h$ 的最优代价的期望，而左边是最优的从 t 开始的代价, 运用动态规划原理得到：

$$u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x}\left[u(t+h, X_{t+h}^\alpha)\right].$$

不妨设 $u\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$，对 $u(t+h,X_{t+h}^\alpha)$ 应用 Itô 公式：

$$du = \partial_t u\,dt + \nabla_x u\cdot dX_t^\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma\sigma^\top\partial_{xx}u\right]dt.$$

代入 $dX_t^\alpha = \sigma(X_t^\alpha,\alpha_t)dW_t$，得：

$$u(t+h, X_{t+h}^\alpha) = u(t,x) + \int_t^{t+h}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma\sigma^\top\partial_{xx}u]\right)ds + \int_t^{t+h}\nabla_x u\cdot\sigma dW_s.$$

由于 $\int_t^{t+h}\nabla_x u\cdot\sigma dW_s$ 是随机积分，则它的期望为 0，取期望得到：

$$u(t,x) = \inf_\alpha \mathbb{E}_{t,x}\left[u(t,x) + \int_t^{t+h}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma\sigma^\top\partial_{xx}u]\right)ds\right].$$

两边化简得：

$$0 = \inf_\alpha \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+h}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\sigma\sigma^\top\partial_{xx}u]\right)ds\right].$$

两边除以 h 并令 $h \to 0$，得方程：

$$0 = \inf_{\alpha} \left[\partial_t u + \frac{1}{2} \mathrm{tr}[\sigma\sigma^\top \partial_{xx} u] \right].$$

因此：

$$\partial_t u + \frac{1}{2} \inf_{\alpha} \left\{ \mathrm{tr}[\sigma\sigma^\top \partial_{xx} u] \right\} = 0.$$

当 $t = T$ 时，$u(T, x) = \inf_\alpha \mathbb{E}_{T,x}[g(X_T^\alpha)] = g(x)$，满足方程。因此，$u(t, x)$ 满足 Hamilton - Jacobi - Bellman 方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2} \inf_{\alpha \in A} \{ \mathrm{tr}[\sigma\sigma^\top(x, \alpha) \partial_{ij} u] \} = 0, \\ u(T) = g. \end{cases}$$

证毕。