一、

(1)、停时(stopping time)是指取值在 $\bar{T}=T\cup\{\sup T\}$ 上的随机变量 τ，满足 $\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$，$\forall t$.

其中 $\mathcal{F}_t$ 是一个 σ 代数，可以理解为在 t 时刻拥有的信息.

$\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_t$ 可以理解为到 t 时刻拥有的信息可以让我判断是否在 t 时停下来，或者在 t 之前就停下来。.

(2)、马氏过程是指一个随机过程，下一时刻的状态只与当前状态有关，与之前的时刻状态无关.

(3) 例. 设 $\{B_t, t\in\mathbb{R}^+\}$ 是 Brown 运动.

$$\xi_t=\begin{cases} B_t & B_0\neq 0 \\ 0 & B_0=0\end{cases} = B_t 1_{\{B_0\neq 0\}}(\omega)$$

□.

二、(1) $(W_t)_{t\ge0}$ 满足 ① $W(0)=0$ a.s.

② $W(t)-W(s)\sim N(0,t-s)$，$\forall t\ge s\ge 0$

③ $\forall\, 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，$W(t_1), W(t_2)-W(t_1),\cdots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ 是相互独立的.

④ $t\mapsto W_t(\omega)$ 是连续的 with probability 1.

(2) ① $\mathbb{E}(W_t)=0$.

② W_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的

③ $\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}[W_t-W_s|\mathcal{F}_s]+\mathbb{E}[W_s|\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}[W_s|\mathcal{F}_s]=W_s$ a.s.

(3). ①. W 路径连续. 且 τ 是有界停时，故 $B_t=W_{t+\tau}-W_\tau$ 的路径也是连续的

---

②. $(W_t)_{t\ge0}$ 具有强马氏性.

$\forall$ 有界停时 τ，及 $\mathbb{R}$ 上有界连续函数 f，~~有~~ 有

$$\mathbb{E}[f(W_{t+\tau}-W_\tau)|\mathcal{F}_\tau]=\mathbb{E}[f(W_t)].$$

令 $\Gamma\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$，有

$$\mathbb{P}(W_{t+\tau}-W_\tau\in\Gamma)=\mathbb{E}[\mathbb{P}(W_{t+\tau}-W_\tau\in\Gamma|\mathcal{F}_\tau)]$$

$$=\mathbb{P}(W_t\in\Gamma)=\mathbb{P}(W_{t+\tau}-W_\tau\in\Gamma|\mathcal{F}_\tau)$$

故 $W_{t+\tau} - W_\tau$ 关于 $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{G}_0$ 独立

$B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$.

$\forall\ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $B_{t_k} - B_{t_{k-1}} = W_{t_k+\tau} - W_{t_{k-1}+\tau}$ $\quad k=1,2,\cdots,n$

$\forall k$, $t_{k-1}+\tau$ 是停时. 故 $\forall\ 0 \le j \le k-1$, $W_{t_j+\tau}$ 是 $\mathcal{F}_{t_j+\tau}$ 可测的,

$\mathcal{F}_{t_j+\tau} \subset \mathcal{F}_{t_{k-1}+\tau}$.

由强马氏性,

$$\mathbb{P}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in \Gamma_{n-1}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0} \in \Gamma_0)$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{P}(B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \in \Gamma_{n-1}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0} \in \Gamma_0 \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}+\tau})]$$

$$= \mathbb{E}[1\{B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}} \in \Gamma_{n-2}\} \cdots 1\{B_{t_1} - B_{t_0} \in \Gamma_0\}\, \mathbb{P}(\underbrace{B_{t_n} - B_{t_{n-1}}}_{= W_{t_n+\tau} - W_{t_{n-1}+\tau}} \in \Gamma_{n-1} \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}+\tau})]$$

$$= \mathbb{E}[1\{B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}} \in \Gamma_{n-2}\} \cdots 1\{B_{t_1} - B_{t_0} \in \Gamma_0\}\, \mathbb{P}(W_{t_n - t_{n-1}} \in \Gamma_{n-1})]$$

$$= \mathbb{P}(B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}} \in \Gamma_{n-2}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0} \in \Gamma_0)\, \mathbb{P}(W_{t_n - t_{n-1}} \in \Gamma_{n-1})$$

$$= \cdots = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(W_{t_k - t_{k-1}} \in \Gamma_{k-1}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \in \Gamma_{k-1}).$$

故 $\{B_t\}$ 是独立增量过程.

③. 且 $\forall t > s \ge 0$, $B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_{s+\tau}$ 与 W_{t-s} 同分布, 故 $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

④. $B_0 = 0$ a.s.

综上, (B_t) 为 $\mathcal{G}_t$ 布朗运动, 且和 $\mathcal{G}_0$ 独立. □.

三、(1). $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}[e^{\lambda |W_t|} \mid \mathcal{F}_s] \overset{\text{Jensen}}{\geq} e^{\lambda |\mathbb{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s)|} = e^{\lambda |W_s|} = X_s$.

(2). X_t 是下鞅. 由 Doob 不等式 $\mathbb{P}(\sup\limits_{0 \le s \le t} |W_s| > x) = \mathbb{P}(\sup\limits_{0 \le s \le t} X_s > e^{\lambda x}) \le \dfrac{\mathbb{E}(X_t)}{e^{\lambda x}}$

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(e^{\lambda |W_t|}) = 2\int_0^\infty \exp\{\lambda y\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^\infty \exp\{\lambda y - \frac{y^2}{2t}\} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{(y - t\lambda)^2}{2t}} dy\right) e^{\frac{t\lambda^2}{2}}$$

$$\le \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(y - t\lambda)^2}{2t}} dy\right) e^{\frac{t\lambda^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sqrt{2\pi t} \cdot e^{\frac{t\lambda^2}{2}} = 2 e^{\frac{t\lambda^2}{2}}$$

故 $\mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t}|W_s|>x) \le 2e^{\frac{t\lambda^2}{2}-\lambda x}$

令 $\lambda=\frac{x}{t}$. 则有 $\mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t}|W_s|>x) \le 2e^{-\frac{x^2}{2t}}$.

(3). 由 Itô 积分鞅性，鞅时间变换定理，

令 $T(s) := \inf\{t>0 : \langle X\rangle(t)>s\}$, $\langle X\rangle(t)=\int_0^t \sigma_s^2 ds$

则 $W(s) := X(T(s))$ 是 $\mathcal{F}_{T(s)}$-适应的 BM.

$X(t)=W(\langle X\rangle(t))$ a.s. $\langle X\rangle(t)=\int_0^t \sigma_s^2 ds$ 单增且 $\in[\frac{1}{4}t, 4t]$

代入(2)中有 $\mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t}|W(\langle X\rangle(s))|>x) \le \mathbb{P}(\sup_{0\le s\le 4t}|W(s)|>x) \le 2e^{-\frac{x^2}{8t}}$.

□.

---

(4). $X_t=\int_0^t \sigma_s dW_s$. $a_t=\frac{1}{2}\sigma_t^2\in[\frac{1}{8},2]$. 故 $a_t\in S_8^1$, $\dim=1$.

令 $\tau_R(x)=\inf\{t>0 : x+X_t\notin B_R\}$ 则 $\tau_1(0)=\inf\{t>0 : |X_t|>1\}$.

可知 $\mathbb{E}\,\tau_1(0)^n \le n!\left(\frac{c_S}{8}\right)^n$, 其中 c_S 是一个常数

Taylor 展开 $e^{\mu\tau_1}=e^{\mu\tau_1(0)}=1+\mu\tau_1(0)+\frac{1}{2}\mu^2\tau_1(0)^2+\cdots$

故若 $\mu<\frac{1}{c_S}$, $\mathbb{E}e^{\mu\tau_1} \le (1-c_S\mu)^{-1}<\infty$ □.

四、 $X_t = W_t + h_t$.

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^\infty \dot{h}_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\dot{h}_s)^2 ds\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) = \int_0^\infty \dot{h}_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\dot{h}_s)^2 ds$$

由Girsanov定理，Q下布朗运动W_t满足 $dW_t = dW_t^Q + \dot{h}_t dt$

其中W_t^Q是Q下的BM.

$$\mathbb{E}_Q\left[\int_0^\infty \dot{h}_s \, dW_s\right] = \mathbb{E}_Q\left[\int_0^\infty \dot{h}_s \, dW_s^Q + \int_0^\infty (\dot{h}_s)^2 ds\right] = \int_0^\infty (\dot{h}_s)^2 ds$$

故相对熵为

$$H(Q|P) = \mathbb{E}_Q\left[\int_0^\infty \dot{h}_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty (\dot{h}_s)^2 ds\right] = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\dot{h}_s)^2 ds \qquad \square.$$

五、设 $\tau_D := \inf\{t>0 : B_t \notin D\}$ 可知 $\mathbb{P}_x(\tau_D<\infty)=1$

则有 $u(x) = \mathbb{E}_x g(B_{\tau_D})$ 其中 $g(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ 0, & |x|=1 \end{cases}$ 即 $u(x)\equiv 0$

由 $u\in C(\bar{D})$，$u(0)=0$ 与条件矛盾，因此不存在这样的u. $\square$.

六、考虑 L 对应的 X_t. $X_t = \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$. 其中 $a^{ij} = \sigma(x)\sigma(x)^T$.

根据 Feynman-Kac 公式. $u(x) = \mathbb{E}_x(u(X_{\tau_D}))$.

$$\tau_D = \inf\{t>0: X_t \notin D\}.$$

support 定理表明, X_t 的路径支撑是满足以下方程的 $\phi(t)$ 的闭包

$$\dot\phi(t) = b(\phi(t)) + \sigma(\phi(t))u(t), \quad u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d).$$

若 u 在 x_0 处取得最大值, 考虑从 x_0 出发的 X_t,

若 u 不恒为常数, 则 $\exists B_r(x_0)$ s.t. $u(x)<M$ 对 $\forall$ ~~对于任意~~ $x \in B_r(x_0)\setminus\{x_0\}$.

选择 $u(t)$ 使得 $\phi(t)$ 在 x_0 附近

由 $Lu(x_0) \geq 0$, a^{ij} 正定, 有 $\mathbb{E}_{x_0}[u(X_{\tau_{B_r(x_0)}})] \leq M$

若边界 $\partial B_r(x_0)$ 上 $u<M$, 则上式严格不等式成立, 与 $u(x_0)=M$ 矛盾.

故 u 在 D 上恒为常数, 或极大值仅出现在边界 ∂D. $\square$

七. 对任意小的时间增量 $h>0$. 最优值函数满足

$$u(t,x)=\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{E}_{t,x}[u(t+h,X^{\alpha}_{t+h})] \quad ①.$$

由 $dX^{\alpha}_t=\sigma(X^{\alpha}_t,\alpha_t)dW_t$. 由 Itô 公式

$$du=\partial_t u\,dt+\nabla u\cdot\sigma dW_t+\frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^T\nabla^2 u)dt$$

积分后取期望. 可得

$$\mathbb{E}_{t,x}[u(t+h,X^{\alpha}_{t+h})]=u(t,x)+\mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+h}(\partial_t u+\frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^T\nabla^2 u))ds\right].$$

代入①式中可得

$$u(t,x)=\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left[u(t,x)+\mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+h}(\partial_t u+\frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^T\nabla^2 u))ds\right]\right]$$

两边减 $u(t,x)$. 除以 h. 令 $h\to 0$ 可得

$$0=\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}[\partial_t u+\frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^T\nabla^2 u)].$$

因此. $u(t,x)$ 满足 HJB 方程:

$$\begin{cases}\partial_t u+\frac{1}{2}\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\{[\sigma_{ik}\sigma_{jk}(\alpha)\partial_{ij}u]\}=0\\ u(T)=g\end{cases}$$

$\square$.