随机微分方程作业

姓名: 李新鹏　学号:202318000206005

一、

设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是一个概率空间, $\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的一族子 σ 代数, $X=\{X_t,t\geq 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机过程。

(1) **停时的理解**：停时是一个随机变量 $\tau:\Omega\to[0,\infty)$，满足对任意 $t\geq 0$，事件 $\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t$。例如，布朗运动首次击中某点的时间是停时。

(2) **马氏过程的理解**：马氏过程要求未来状态的条件分布仅依赖于当前状态，与过去无关。在数学上表示为对 $s<t$，有

$$P(X_t\in A\mid\mathcal{F}_s)=P(X_t\in A\mid X_s)\quad\text{a.s.}$$

例如，布朗运动是马氏过程。

(3) **例子**：考虑 Barlow 的二维扩散过程例子。该过程在平面上的扩散系数在垂直线 $x=0$ 处不连续：当从左侧 $x<0$ 接近时，水平扩散系数为 σ_1；当从右侧 $x>0$ 接近时，水平扩散系数为 σ_2。状态空间仅记录位置 (x,y)，而未记录到达方向。这一过程是马氏的，因为当前位置唯一决定了扩散系数。然而，当停时 τ 为首次到达 $x=0$ 的时间时，未来行为依赖于进入方向（左或右），而状态 $(0,y)$ 本身无法提供这一信息，导致强马氏性不成立。因此，该过程是马氏过程但不是强马氏过程。

二、

(1) **布朗运动的定义**：一维 $\mathcal{F}_t$-布朗运动 $(W_t)_{t\geq 0}$ 满足：

- $W_0=0$;
- 轨道是连续的;
- 对 $s<t$，增量 W_t-W_s 独立于 $\mathcal{F}_s$，且服从 $N(0,t-s)$ 的正态分布。

(2) **证明 W_t 是鞅**：对 $s\leq t$,

$$\mathbb{E}[W_t\mid\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}[W_s+(W_t-W_s)\mid\mathcal{F}_s]=W_s+\mathbb{E}[W_t-W_s]=W_s.$$

故 W_t 是 $\mathcal{F}_t$-鞅。

(3) **证明 (B_t) 的性质**：首先 $B_0=0$ 且 B_t 轨道连续。其次由布朗运动的独立增量性，$B_t=W_{t+r}-W_r$ 的增量独立于 $\mathcal{F}_r=\mathcal{G}_0$。且 $B_t-B_s=W_{t+r}-W_{s+r}$ 独立于 $\mathcal{G}_s$，服从 $N(0,t-s)$。故 (B_t) 是 $\mathcal{G}_t$-布朗运动。

三、

(1) **下鞅证明**：由 Jensen 不等式，$|W_t|$ 是下鞅。又因 $e^{\lambda x}$ 为凸增函数，故 $X_t=e^{\lambda|W_t|}$ 也是下鞅。

(2) **概率不等式**：应用 Doob 极大不等式于 $X_t = e^{\lambda W_t}$，取 $\lambda = x/t$，得

$$P\left(\sup_{0\le s\le t}|W_s| > x\right) = P\left(\sup_{0\le s\le t}|X_s| > e^{\frac{x^2}{t}}\right) \le 2e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

(3) **概率不等式**：由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式，存在常数 c 使得

$$\mathbb{E}[\sup_{0\le s\le t}|x_s|^2] \le c\mathbb{E}[\int_0^t \sigma_s^2 ds] \le 4ct.$$

从而知 x_t 的指数是连续鞅，再由指数鞅不等式易得

$$P\left(\sup_{0\le s\le t}|x_s| > x\right) \le 2e^{-\frac{x^2}{8t}}.$$

(4) **指数可积性**：

给定随机过程 $x_t = \int_0^t \sigma_s \, dW_s$，其中 $1/2 \le |\sigma_s| \le 2$。其二次变差为：

$$\langle x\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 \, ds \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{4}t \le \langle x\rangle_t \le 4t.$$

由 Dambis-Dubins-Schwarz 定理，存在标准布朗运动 $\{B_s\}_{s\ge0}$，使得：

$$x_t = B_{\langle x\rangle_t}.$$

则停时 $\tau_1 = \inf\{t > 0 : |x_t| > 1\}$，对应的布朗运动满足：

$$|x_{\tau_1}| = |B_{\langle x\rangle_{\tau_1}}| = 1.$$

根据二次变差的下界 $\langle x\rangle_{\tau_1} \ge \frac{1}{4}\tau_1$，可知：

$$\tau_1' \le \langle x\rangle_{\tau_1} \le 4\tau_1,$$

其中 $\tau_1' = \inf\{s : |B_s| \ge 1\}$ 为标准布朗运动首次到达 1 的时间。

而对于标准布朗运动，其首次通过时间 τ_1' 的矩生成函数满足：

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu\tau_1'}\right] < \infty \quad \text{当且仅当} \quad \mu < \frac{\pi^2}{8}.$$

结合 $\tau_1' \le 4\tau_1$，可得：

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu\tau_1}\right] \le \mathbb{E}\left[e^{4\mu\tau_1'}\right].$$

因此，当 $4\mu < \frac{\pi^2}{8}$ 即 $\mu < \frac{\pi^2}{32}$ 时，有：

$$\mathbb{E}\left[e^{\mu\tau_1}\right] \le \mathbb{E}\left[e^{\frac{\pi^2}{8}\tau_1'}\right] < \infty.$$

(5) **高维推广**：各分量独立，二次变差被控制，因此可推广到高维情形。

四、

记 $g_t = -\dot{h}_t$, 由 Girsanov 定理知

$$X_t = W_t - \int_0^t g_s\, ds$$

在 $\mathbb{Q}$ 下是标准布朗运动，其中

$$log\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \int_0^t g_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t g_s^2\, ds,$$

从而知

$$\int_0^t g_s\, dX_s = \int_0^t g_s\, dW_s - \int_0^t g_s^2\, ds,$$

两边在 $\mathbb{Q}$ 下取期望得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_0^t g_s\, dW_s] = \int_0^t g_s^2\, ds$$

因此我们有

$$H(Q|P) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[log\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_0^t g_s\, dW_s] - \frac{1}{2}\int_0^t g_s^2\, ds = \frac{1}{2}\int_0^t g_s^2\, ds = \frac{1}{2}\int_0^t \dot{h}_s^2\, ds.$$

五、

若解 u 存在，则由调和函数性质，

$$u(0) = \mathbb{E}_0[u(W_{\tau_D})]$$

表示从原点出发的布朗运动先击中原点的概率。但在 $d \geq 2$ 时，原点为极点，布朗运动几乎不击中原点，因此 $u(0) = 0$。这与 $u(0) = 1$ 矛盾，故解不存在。

六、

定义扩散过程 X_t，满足随机微分方程：

$$dX_t = \sigma(X_t)dW_t + b(X_t)dt,$$

其中 σ 满足 $\sigma\sigma^\top = (a_{ij})$，$b = (b_1, \ldots, b_d)$。

对 u 沿扩散过程应用 Itô 公式：

$$du(X_t) = (a_{ij}(X_t)\partial_{ij}u(X_t) + b_i(X_t)\partial_i u(X_t))\, dt + \partial_i u(X_t)\sigma_{ik}(X_t)dW_t^k.$$

由 $Lu \geq 0$ 得

$$du(X_t) \geq \partial_i u(X_t)\sigma_{ik}(X_t)dW_t^k.$$

两边取期望得

$$\mathbb{E}[u(X_t)] \geq u(x_0).$$

假设 u 在 $x_0 \in D$ 处取得最大值。若 u 非常数，则存在邻域 $B_\epsilon(x_0)$ 使得 $u(x) \leq u(x_0)$。由 Support 定理，扩散路径可无限接近确定性轨迹，因此有：

$$\mathbb{E}[u(X_t)] \leq u(x_0),$$

故 u 在 x_0 邻域内必为常数。

定义集合 $S = \{x \in D \mid u(x) = u(x_0)\}$。由于：

- S 非空（含 x_0）且闭（u 连续），
- S 为开集（局部恒等性），

由 D 的连通性得 $S = D$，即 u 为全局常数。

因此若 u 不恒为常数，则其最大值只能出现在边界 ∂D。

七、

考虑最优值函数 $u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} J(t,x;\alpha)$。根据动态规划原理，对任意 $h > 0$ 满足 $t + h \le T$，有：

$$u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x}\left[u(t+h, X^{\alpha}_{t+h})\right].$$

由于 $dX^{\alpha}_t = \sigma(X^{\alpha}_t, \alpha_t)dW_t$，协方差矩阵为 $d\langle X^i, X^j\rangle_t = \sigma_{ik}\sigma_{jk}dt$，由伊藤公式得：

$$du = \partial_t u\, dt + \nabla u \cdot \sigma dW_t + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial^2_{ij}u\, dt.$$

在区间 $[t, t+h]$ 上积分后取期望：

$$\mathbb{E}_{t,x}\left[u(t+h, X^{\alpha}_{t+h})\right] - u(t,x) = \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+h}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial^2_{ij}u\right)ds\right].$$

由动态规划原理，当 $h \to 0$ 时：

$$u(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{u(t,x) + \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^{t+h}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial^2_{ij}u\right)ds\right]\right\} + o(h).$$

两边消去 $u(t,x)$ 并除以 h，取极限得：

$$0 = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\left\{\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial^2_{ij}u\right\}.$$

由此得到 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + \dfrac{1}{2}\inf\limits_{\alpha\in A}\left\{\sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\partial^2_{ij}u\right\} = 0, \\ u(T,x) = g(x). \end{cases}$$

其中，对重复指标 k 求和，且边界条件由 $J(T,x;\alpha) = g(x)$ 直接给出。