2024春季学期 随机微分方程期末试题

一. （20分）令$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathbf{P})$ 为满足通常条件的概率空间。
(1). 叙述一维 $\mathscr{F}_t$–布朗运动 $(W_t)_{t\geq 0}$ 的定义；
(2). 证明W_t 是一个$\mathscr{F}_t$–鞅;
(3). 对于任意有界停时 τ ，令 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$, $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{t+\tau}$. 证明 B_t 为 $\mathscr{G}_t$–布朗运动，且和 $\mathscr{G}_0$ 独立.

二.（20分） 设 $f \in L^2([0,1]; R)$. 考虑方程

$$dX_t = f(t)X_t dW_t,\ X_0 = x \in R,\ \ 0 \leq t \leq 1.$$

(1). 试写出上述方程的一个解;
(2). 叙述上述方程强解的定义;
(3). 上述方程的解具有轨道唯一性吗?

三. （20分）设 $X_t(x)$ 为从 $x \in (0,1)$ 出发的一维扩散过程, 具有有界扩散系数 $a(x) \geq 1$ 和有界漂移系数 $b(x)$. 令 τ 为此过程首次逃出 $(0,1)$ 的时刻. 试求概率 $\mathbf{P}(X_\tau(x) = 1)$.

四.（20分）令$d \geq 2$，$D = \{x \in R^d : |x| < 1, x \neq 0\}$. 证明不存在$u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$满足如下方程：

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0,\ x \in D \\ u(z) = 0,\text{ 如果 } |z| = 1; \quad u(z) = 1,\text{ 如果 } z = 0 \end{cases}$$

五. （20分）令W_t为一维布朗运动。证明
(1). 对于任意的 $\lambda > 0$, $X_t = e^{\lambda |W_t|}$是一个下鞅；
(2). 证明

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |W_s| > x \right) \leq 2e^{-\frac{x^2}{2t}};$$

(3). 令$\sigma : [0,\infty) \times \Omega \to R$关于由 W_t 生成的 σ–域流适应，且$1/2 \leq |\sigma| \leq 2$. 定义 $x_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$. 证明存在一个与$\sigma$无关的常数 c, 使得

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} |x_s| > x \right) \leq 2e^{-\frac{cx^2}{t}};$$

(4). 令 x_t 为 (3) 中给定的随机过程. 证明存在一个正常数$\mu > 0$, 使得

$$\mathbf{E}e^{\mu\tau_1} < \infty,$$

其中 $\tau_1 = \inf\{t > 0 : |x_t| > 1\}$.
(5). 上述(1)–(4)的结果可以推广到 d 维情形吗？请简要说明理由.