随机微分方程测试题

李文桥

一、(1) 对一个可测空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t)$，停时是一个随机时刻 T 满足：$\{T\le t\}\in\mathscr{F}_t,\ \forall t\ge 0$.
停时是一种具有无后效性的随机时刻，直观上可以理解为，判断是否在某一时刻 t 停下来，只需要到 t 时刻为止所拥有的信息即可.

(2) 定义在某概率空间上取值于可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 中的随机过程 $(X_t)_{t\ge0}$ 为马氏过程，若对 $0\le t_1<t_2<\cdots<t_n<u$，$A_u\in\mathscr{E}$，$P\{X_u\in A_u|X_{t_1},\dots,X_{t_n}\}=P\{X_u\in A_u|X_{t_n}\}$.
马氏过程的特点是"无记忆性"，即未来的状态仅依赖于当前的状态，与历史状态无关.

(3) 设状态空间 $E=\mathbb{R}_{\ge0}$，过程 X 初始时停留在 0 处，停留时间服从指数分布，之后以单位速度向右移动. 容易验证 X 满足马尔可夫性（利用指数分布的无记忆性）。设停留时间为 T，则 T 为停时，且 $X_T=0$，$X_{T+t}=t$，不满足强马尔可夫性.

二、(1) $(W_t)_{t\ge0}$ 是一个一维 $\mathbb{F}_t$-布朗运动，若 W_t 适应于 $\mathbb{F}_t$，且为实值随机过程，且：

① $W_0=0$, a.s. ② $(W_t)_{t\ge0}$ 几乎所有样本轨道连续 ③ $(W_t)_{t\ge0}$ 是独立增量过程，即 $\forall 0\le t_1<t_2<\cdots<t_n$，增量 $W_{t_2}-W_{t_1},\cdots,W_{t_n}-W_{t_{n-1}}$ 相互独立

④ $\forall 0\le s<t$，$W_t-W_s\sim N(0,t-s)$.

(2) $E|W_t|\le(E(W_t^2))^{\frac12}=\sqrt{t}<\infty$，且 $E(W_t|\mathbb{F}_s)=E(W_s+W_t-W_s|\mathbb{F}_s)=W_s+E(W_t-W_s|\mathbb{F}_s)$
由独立增量性及 $W_t-W_s\sim N(0,t-s)$，$E(W_t-W_s|\mathbb{F}_s)=0$，从而 $E(W_t|\mathbb{F}_s)=W_s$，$\forall 0\le s<t$.
从而 W_t 是一个 $\mathbb{F}_t$-鞅.

(3) $B_0=W_\tau-W_\tau=0$，且对 $\forall 0\le s<t$，$B_t-B_s=W_{t+\tau}-W_{s+\tau}\sim N(0,t-s)$. 连续性继承 $(W_t)_{t\ge0}$
由 $(W_t)_{t\ge0}$ 的强马氏性，$(B_t)_{t\ge0}$ 的增量独立于 $\mathbb{F}_\tau=\mathcal{G}_0$，且彼此独立. 从而 B_t 为 $\mathcal{G}_t$-布朗运动，且与 $\mathcal{G}_0$ 独立.

三、(1) $f(x)=e^{\lambda|x|}$ 为凸函数，则由 Jensen 不等式 $E(e^{\lambda|W_t|}|\mathbb{F}_s)\ge e^{\lambda|W_s|}$，$t>s$，从而 $e^{\lambda|W_t|}$ 为下鞅

(2) 取 $\lambda=\frac{x}{t}>0$，（这里应有 $x>0$）由(1)知 $X_t=e^{\lambda|W_t|}$ 为下鞅，故由 Doob 极大不等式知

$$P(\sup_{0\le s\le t}X_t>e^{\lambda x})\le\frac{E(X_t)}{e^{\lambda x}}$$

左边即为 $P(\sup_{0\le s\le t}|W_t|>x)$，右边中 $E(X_t)=E(e^{\lambda|W_t|})$，由 $W_t\sim N(0,t)$ 知 $|W_t|$ 的矩母函数为 $E(e^{\lambda|W_t|})=2e^{\frac{\lambda^2t}{2}}$，从而右边 $=2e^{\frac{\lambda^2t}{2}-\lambda x}=2e^{-\frac{x^2}{2t}}$，故得证.

(3) X_t是连续局部鞅，其二次变分为 $\langle X\rangle_t=\int_0^t \sigma_s^2 ds$，由 $\frac{1}{2}\le|\sigma|\le 2$ 知：
$\frac{1}{4}t\le\langle X\rangle_t\le 4t$. 对 $\forall p\ge 1$，由BDG不等式知存在 $C_p>0$, s.t. $E((X_t^*)^p)\le C_p E(\langle X\rangle_t^{\frac{p}{2}})$
$\le C_p\cdot(4t)^{\frac{p}{2}}$，这里 $X_t^*:=\sup_{0\le s<t}|X_s|$. 同(1)(2)的过程，我们有：$P(X_t^*>x)\le \frac{E(e^{\lambda X_t^*})}{e^{\lambda x}}$，$\lambda>0$.
而 $E(e^{\lambda X_t^*})=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!}E((X_t^*)^p)\le\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda^p}{p!}C_p(4t)^{\frac{p}{2}}\ldots$ 之后不会了

(4) 由于 $\langle X\rangle_t\ge\frac{1}{4}t$，故容易知道 $\tau_1<\infty$ a.s. 由可选停时定理，$E(M_{\tau_1})=E(M_0)=1$
其中 $M_t:=e^{\lambda X_t-\frac{\lambda^2}{2}\langle X\rangle_t}$ 为指数鞅. 因此，$1=E(M_{\tau_1})=E(e^{\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\langle X\rangle_{\tau_1}})\ge E(e^{\lambda-2\lambda^2\tau_1})$,
因为 $X_{\tau_1}=1$，$\langle X\rangle_t\le 4t$. 进而 .... 不会了.

(5) 第(1)(2)问应该可以，跟维数关系不大.

四、

由Girsanov定理，Q相对于P的R-N导数为 $\frac{dQ}{dP}=\exp(-\int_0^{\infty}\dot{h}_t dW_t-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\dot{h}_t^2 dt)$
X_t是Q下的布朗运动，$dW_t=dX_t-\dot{h}_t dt$，则：

$$
\begin{aligned}
H(Q|P)&=E_Q(\ln\frac{dQ}{dP})=E_Q(-\int_0^{\infty}\dot{h}_t dW_t-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\dot{h}_t^2 dt)\\
&=E_Q(-\int_0^{\infty}\dot{h}_t(dX_t-\dot{h}_t dt)-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\dot{h}_t^2 dt)\\
&=E_Q(\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\dot{h}_t^2 dt-\int_0^{\infty}\dot{h}_t dX_t)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\dot{h}_t^2 dt
\end{aligned}
$$

从而所求的相对熵为 $\frac{1}{2}\|\dot{h}\|_{L_2}^2$

五、设 W_t是$\mathbb{R}^d$上的标准布朗运动，$\tau=\inf\{t\ge 0: W_t\notin D\}$，则 $P_x(\tau<\infty)=1$，$\forall x\in D$.
考虑调和函数u的概率表示，$u(x)=E_x(u(W_\tau))=1\cdot P_x(W_\tau=0)+0\cdot P_x(|W_\tau|=1)=P_x(W_\tau=0)$;
而当 $d\ge 2$ 时，$P_x(W_\tau=0)=0$，从而 $u(x)=0$，$\forall x\in D$，这会与 $u(0)=1$ 矛盾. 故不存在满足题给条件的解.

六、

七、假设 $A=\{\alpha_0\}$，则此时 $u(t,x)=E_{t,x}(g(X_T))$. 由itô公式:

$$du(t,X_t)=(\partial_t u+\frac{1}{2}\sigma^2(\alpha_0)\partial_{xx}u)dt+\sigma(\alpha_0)\partial_x u\,dW_t$$

由 $u(t,x)$ 最优性，$E(du)=0$，即: $\partial_t u+\frac{1}{2}\sigma^2(\alpha_0)\partial_{xx}u=0$. $u(T)=g$ 显然成立.

A有有限个元素的情形是类似的.