1. (1) 可直观认为，在时刻 t，仅根据过去的信息便能判断是否停下.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ 为一概率空间.

随机变量 $\tau: \Omega \to [0, \infty]$ 为停时 $\iff \forall t \geq 0$.

$$\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

(2) 可直观认为，对一随机过程，未来仅依赖于现在，与过去无关. 是无记忆的随机过程.

$\{X_t\}$ 为 Markov process $\iff$ 对 $\forall s<t$，有界可测 f 有

$$E(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s) = E(f(X_t) \mid X_s)$$

(3) 定义 X_t 为从 0 出发的 Browian motion.

且：若 $X_1 \geq 0$，则 X_t 在 $t \geq 1$ 时为 Browian motion

若 $X_1 < 0$：X_t 在 $t \geq 1$ 为 $-$ Browian motion.

由 Browian motion 定义，必有 $\{X_t\}$ 为 Markov process.

定义 $\tau = \inf\{t \geq 1 ; X_t = 0\}$. 则 $X_\tau = 0$

但 $X_{\tau+s}$ 依赖于 X_1 的符号. 不为强马氏过程.

2、 (1) (a) $W_0 = 0$ a.s.

(b) $\forall\ s \le t$, $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

(c) $\forall\ s<t$. $W_t - W_s$ 与 $\sigma(W_r, r\le s)$ 独立.

(d) 以概率1. $t \longrightarrow W_t(\omega)$ 连续.

(2) (a) 显然 $W_t \in \mathcal{F}_t$

(b) $W_t \sim N(0,t)$

故 $E|W_t| < \infty \quad \forall t$

(c) $E(W_t|\mathcal{F}_s)$

$= E(W_s + W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s)$

$= W_s$

故 W_t 为 $\mathcal{F}_t$ 鞅

(3) 由定义，$B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ 必然为连续过程.

由 Levy Characterization Theorem. 只需验证.

(i) B_t 为 $\mathcal{G}_t$ 鞅

(ii) $B_t^2 - t$ 为 $\mathcal{G}_t$ 鞅

对 (i). 由可选停时定理，对 $u \geq 0$

$\tau \wedge u$ 为有界停时.

$$E(W_{\tau\wedge u} | \mathcal{F}_s) = W_{s\wedge\tau\wedge u}$$

令 $u \to \infty$. 结合 $\tau < \infty$ a.s. 及鞅收敛定理，

$$E(W_\tau | \mathcal{F}_s) = W_{s\wedge\tau}$$

$$(W_{\tau\wedge u} \to W_\tau \ \text{a.s.} \ \text{且} \ \{W_{\tau\wedge u}\} \text{一致可积})$$

从而 $E(W_{t+\tau} - W_{s+\tau} | \mathcal{F}_{\tau+s}) = 0$

即 $E(B_t | \mathcal{G}_s) = B_s$, B_t 为 $\mathcal{G}_t$ 鞅

对 (ii). 由 $W_t^2 - t$ 为鞅，与 (i) 类似有

$E[B_t^2 - t | \mathcal{G}_s] = B_s^2 - s$ ，故 B_t 为 $\mathcal{G}_t$ - Brownian motion

由独立增量性，$B_t - B_0 \perp \mathcal{G}_0$，即 $B_t \perp \mathcal{G}_0$.

三、(1) W_t 为鞅

$e^{\lambda|x|}$ 为凸函数

故 $e^{\lambda|W_t|}$ 为下鞅

(2) $P(\sup\limits_{0\leq s\leq t} |W_s| > x)$ 由 Doob's inequality:

$$= P\left(\sup_{0\le s\le t}|X_s| > e^{\lambda x}\right),\ a>0$$

$$\le e^{-\lambda x}\, E X_t = \frac{e^{-\lambda x}}{\pi t}\int_0^\infty e^{\lambda s - \frac{s^2}{2t}}\, ds$$

$$= 2e^{\frac{\lambda^2 t}{2} - \lambda x}$$

取 $\lambda = \frac{x}{t}$ 即得.

(3) 由 Dambias - Dubins - Schwarz 定理, 设

$$X_t = W_{\langle x\rangle_t}$$

则 $\frac{1}{4}t \le \langle x\rangle_t \le 4t$

故 $P\left(\sup_{0\le s\le t}|X_s| \ge x\right) \le P\left(\sup_{0\le s\le 4t}|W_s| \ge x\right)$

由(2)对 W_t 的结论即得.

(4):

记 $\tau_0 = \inf\{t>0 : |W_t|>1\}$

则 $\tau_1 \le 4\tau_0$, $E(e^{\mu\tau_1}) \le E(e^{4\mu\tau_0})$

而对 Browian motion W_t,

$$E(e^{\mu\tau_0}) < \infty$$

$$\Leftarrow\ \mu < \frac{\pi^2}{8}$$

故当 $u < \frac{\pi^2}{32}$ 时有 $E(e^{u\tau_1}) < \infty$

(5) d 维时，可对每个分量应用上述分析方法进行估计，但最后其结果将与 d 有关。$\|X_t\| \geq 1$ 则必有某个分量 $\geq \frac{1}{\sqrt{d}}$

四、 $X_t = W_t + h_t$

$\dot{h}_s \in \mathcal{L}^2$, $E_p(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \dot{h}_s^2 ds}) < \infty$，由 Girsanov 定理

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^t \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \dot{h}_s^2 ds\right)$$

而 $dW_s = dX_s - \dot{h}_s ds$，$X_t$ 在 Q 下为 Browian motion，

$$H(Q|P) = E_Q\left[-\int_0^t \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \dot{h}_s^2 ds\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \dot{h}_s^2 ds$$

五、 $\forall x \in D$，有 $u(x) = E_x u(W_\tau)$

$$\tau = \inf\{t > 0 ; W_t \notin D\}.$$

若存在这样的解

$$u(x) = P(W_{\tau_1} = 0 \mid W_0 = x)$$

而 $d \geq 2$，故必有 $u(x) = 0 \quad \forall x \in D$

这与 $u(0) = 1$ 矛盾，

六、设 $\exists x_1 \in D$ 使 $u(x_1) < u(x_0)$

设 $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$，且 $\sigma\sigma^T \in S_s^d$ $\forall x \in D$.

考虑 $u(X_t)$. 由 $Lu \geq 0$ 知 $u(X_t)$ 为下鞅.

$$E(u_t \mid \mathcal{F}_s) \geq u_s, \quad Eu_t \geq Eu_s.$$

令 $\varphi(t)$ 为 $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$ 的连续路径.

则由 support 引理，$\forall \varepsilon > 0$. $\exists C$. s.t.

$$P\Big(\sup_{t\in[0,1]} |X_t - \varphi(t)| \leq \varepsilon\Big) \geq C.$$

故必有 $P(u(X_t) < u(X_0)) > 0$

故 $Eu(X_t) < u(X_0) \Rightarrow u(X_t)$ 为下鞅矛盾.

七、$dX_t^\alpha = \sigma(X_t^\alpha, \alpha_t)\,dW_t$

$$J(t,x;\alpha) = E_{t,x}\, g(X_T^\alpha) \quad t \in [0,T]$$

设 $u(t,x) = \inf\limits_{\alpha\in A} J(t,x;\alpha)$

由动态规划，有

$$u(t,x) = \inf_{\alpha \in A} E_{t,x}[u(t+h, X_{t+h})] \quad ①$$

由Itô's公式

$$dU(t,X_t) = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \nabla u_t dX_t + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_t\sigma_t^T\nabla^2 u_t)dt$$

$$u(t+h, X_{t+h}) = u(t,x) + \int_t^{t+h}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_{ij}u\right)ds$$

$$+ \int_t^{t+h}\nabla u \cdot \sigma dW_s$$

取期望有 $E_{t,x}(U(t+h, X_{t+h}))$

$$= u(t,x) + E_{t,x}\left(\int_t^{t+h}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_{ij}u\right)ds\right)$$

代入①有

$$u(t,x) = \inf_{\alpha \in A}\left\{u(t,x) + E_{t,x}\int_t^{t+h}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma\sigma\partial_{ij}u\right)ds\right\}$$

即 $$0 = \inf_{\alpha \in A}\left\{\frac{1}{h}E_{t,x}\int_t^{t+h}\left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\sigma_{jk}\partial_{ij}u\right)ds\right\}$$

令 $h \to 0^+$ 知

$$0 = \inf_{\alpha \in A} \left\{ \partial_t u + \frac{1}{2} b_{ik} b_{jk} \partial_{ij} u \right\}$$

$t = T$ 时 $u(T, x) = \inf_{\alpha \in A} E_{T,x}(g(X_T^\alpha)) = g(x)$

即证.