2025 年春季学期随机微分方程测试题
SPRING 2025 STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS TESTS

钟梓源，中国科学院数学与系统科学研究院，202318000206070

Sunday 18th May, 2025

EXERCISE 1

(1) 谈谈你对停时这个概念的理解；

(2) 谈谈你对马氏过程的理解；

(3) 举一个是马氏过程但不是强马氏过程的例子。

SOLUTION.

(1) 停时的定义与理解：考虑带流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$，其中 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 表示信息流。随机变量 $\tau : \Omega \to T$ 被称为关于 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 的停时，当且仅当对任意 $t \in T$，都有：

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

这一定义从信息角度可以理解为：在任意时刻 t，基于已积累的信息 $\mathcal{F}_t$，我们能够确定事件"τ 是否已经发生"的真假。

举例说明，假设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是一个随机过程，定义 $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in [a, b]\}$ 为该过程首次进入区间 $[a, b]$ 的时刻，则 τ 是一个停时。这是因为在任意时刻 t，通过观察过程在 $[0, t]$ 区间的轨迹，我们可以确定过程是否已经进入区间 $[a, b]$。

反之，若定义 $\tau = \sup\{t \geq 0 : X_t \in [a, b]\}$ 为该过程最后一次处于区间 $[a, b]$ 的时刻，则 τ 不是停时。这是因为在时刻 t，即使观察到 $X_t \in [a, b]$，我们也无法判断未来是否还会再次进入该区间，因此无法确定当前时刻是否为"最后一次"。

(2) 马氏过程的数学定义及直观理解：给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ 和状态空间 S，随机过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 被称为马氏过程，如果对任意 $0 \leq s < t$ 和任意可测集 $A \in \mathcal{B}(S)$，满足：

$$\mathbb{P}(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A|X_s)$$

这一性质体现了马氏过程的"无记忆性"特征：已知现在状态 X_s 的条件下，过程的未来行为 $(X_t, t > s)$ 与过去历史 $\mathcal{F}_s$ 无关。换言之，预测随机过程未来状态时，全部历史信息可以被当前状态完全概括，过去的细节对预测未来不再提供额外信息。

直观上，马氏性意味着系统的演化仅依赖于其当前状态，而与达到该状态的历史路径无关。这也是为什么马氏过程在建模许多自然和社会现象时如此有用：它大幅简化了复杂系统的分析，同时保留了足够的预测能力。

(3) 马氏过程但非强马氏过程的示例：

考虑如下构造的随机过程 $(Y_t)_{t\geq 0}$：令 $(W_t^1)_{t\geq 0}$ 和 $(W_t^2)_{t\geq 0}$ 是两个独立的标准布朗运动，定义

$$Y_t = \begin{cases} W_t^1, & \text{若 } t < 1 \\ W_{t-1}^2 + W_1^1, & \text{若 } t \geq 1 \end{cases}$$

直观地说，这个过程在 $t<1$ 时按照第一个布朗运动运行，到 $t=1$ 时切换到第二个布朗运动（位置上平移 W_1^1 以保持连续性）。

首先证明 Y_t 是马氏过程。对于任意 $0\leq s<t$：

- 若 $t<1$，则 $Y_t = W_t^1$，$Y_s = W_s^1$。由于 W_t^1 是马氏过程，显然有

$$\mathbb{P}(Y_t \in A|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(Y_t \in A|Y_s)$$

- 若 $s<1\leq t$，则 $Y_s = W_s^1$，$Y_t = W_{t-1}^2 + W_1^1$。由布朗运动的独立增量性质，得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_t \in A|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{P}(W_{t-1}^2 + W_1^1 \in A|\mathcal{F}_s) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(W_{t-1}^2 + w \in A)\,\mathbb{P}(W_1^1 \in dw|\mathcal{F}_s)\end{aligned}$$

而 $\mathbb{P}(W_1^1 \in dw|\mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(W_1^1 \in dw|W_s^1)$，因为 W_t^1 是马氏过程。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_t \in A|\mathcal{F}_s) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(W_{t-1}^2 + w \in A)\,\mathbb{P}(W_1^1 \in dw|W_s^1) \\ &= \mathbb{P}(Y_t \in A|Y_s)\end{aligned}$$

- 若 $1\leq s<t$，则 $Y_s = W_{s-1}^2 + W_1^1$，$Y_t = W_{t-1}^2 + W_1^1$。利用 W_t^2 的马氏性质，有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_t \in A|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{P}(W_{t-1}^2 + W_1^1 \in A|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{P}(W_{t-1}^2 \in A - W_1^1|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{P}(W_{t-1}^2 \in A - W_1^1|W_{s-1}^2, W_1^1) \\ &= \mathbb{P}(W_{t-1}^2 \in A - W_1^1|W_{s-1}^2) \\ &= \mathbb{P}(Y_t \in A|Y_s)\end{aligned}$$

综合以上三种情况，$(Y_t)_{t\geq 0}$ 满足马氏性质。

然而，这个过程不是强马氏过程。考虑停时 $\tau = \inf\{t\geq 0 : Y_t = 0\}$（即过程首次到达零点的时刻）。若 $\tau<1$，则过程在 τ 之后的行为不仅取决于 $Y_\tau = 0$，还取决于 τ 的具体值。特别地，对于 $0<h<1-\tau$：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{\tau+h} \in A|\mathcal{F}_\tau) &= \mathbb{P}(W_{\tau+h}^1 \in A|\mathcal{F}_\tau) \\ &= \mathbb{P}(W_{\tau+h}^1 - W_\tau^1 + W_\tau^1 \in A|\mathcal{F}_\tau) \\ &= \mathbb{P}(W_{\tau+h}^1 - W_\tau^1 + 0 \in A|\mathcal{F}_\tau) \\ &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left(-\frac{y^2}{2h}\right) dy\end{aligned}$$

而若 τ 为确定性时间，如 $\tau=1$（假设 $W_1^1 = 0$），则对于 $h>0$：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{\tau+h} \in A|\mathcal{F}_\tau) &= \mathbb{P}(W_h^2 + 0 \in A|\mathcal{F}_1) \\ &= \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left(-\frac{y^2}{2h}\right) dy\end{aligned}$$

表面上看，这两个条件分布形式相同，但关键区别在于：在 $\tau<1$ 的情况下，过程在 τ 之后仍然沿用第一个布朗运动 W_t^1，而在 $\tau=1$ 的情况下，过程切换到第二个布朗运动 W_t^2。虽然从分布的角度看二者相同（都是布朗运动），但它们的样本路径完全独立，这导致了强马氏性质的失效。

具体来说，若定义 $\sigma = \inf\{t > \tau : Y_t = 1\}$，则

$$\mathbb{P}(\sigma - \tau \leq 2|\mathcal{F}_\tau, \tau < 1) \neq \mathbb{P}(\sigma - \tau \leq 2|\mathcal{F}_\tau, \tau = 1)$$

因为左侧概率取决于 W_t^1 在 τ 之后的行为，而右侧概率取决于 W_t^2 的行为，这两个布朗运动是独立的。因此，$(Y_t)_{t\geq 0}$ 是马氏过程但不是强马氏过程。

EXERCISE 2

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ 为满足通常条件的概率空间。

(1) 叙述一维 $\mathcal{F}_t$ – 布朗运动 $(W_t)_{t\geq 0}$ 的定义；

(2) 证明 W_t 是一个 $\mathcal{F}_t$ – 鞅；

(3) 对于任意有界时，令 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau, \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+\tau}$，证明 (B_t) 为 $\mathcal{G}_t$ – 布朗运动，且和 $\mathcal{G}_0$ 独立。

SOLUTION.

(1) 一维 $\mathcal{F}_t$ – 布朗运动 $(W_t)_{t\geq 0}$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, \mathbb{P})$ 上的随机过程，满足以下三个关键性质：

- (i) 初始状态固定：对任意样本点 $\omega \in \Omega$，都有 $W_0(\omega) = 0$；
- (ii) 轨道连续性：对所有样本点 $\omega \in \Omega$，函数 $t \mapsto W_t(\omega)$ 关于 $t \geq 0$ 连续，即布朗运动的路径几乎处处连续；
- (iii) 独立增量与分布特性：对任意 $t, h \geq 0$，增量 $W_{t+h} - W_t$ 与 σ – 代数 $\sigma(W_u, 0 \leq u \leq t)$ 独立，且 $W_{t+h} - W_t \sim N(0, h)$，即增量服从均值为 0、方差为 h 的正态分布。

(2) 我们通过三步证明 W_t 是 $\mathcal{F}_t$ – 鞅：

首先，适应性：$W_t \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$ 显然成立。

其次，可积性：由于 $W_t \sim N(0, t)$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|W_t| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx \\
&= 2\int_0^{+\infty} x f(x) dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\
&= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty
\end{aligned}$$

这表明 $W_t \in L^1$，满足鞅的可积条件。

最后，鞅性质：对任意 $0 \leq s < t$，利用增量独立性和 $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_t \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s \mid \mathcal{F}_s] \\
&= \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s \\
&= 0 + W_s = W_s
\end{aligned}$$

综上所述，W_t 确实是一个 $\mathcal{F}_t$ – 鞅。

(3) 我们需要证明 $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ 是一个 $\mathcal{G}_t$ – 布朗运动且与 $\mathcal{G}_0$ 独立。按布朗运动的定义逐一验证：
首先，独立增量性质：对任意 $0 \le s < t$，增量

$$B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_{s+\tau} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{s+\tau} = \mathcal{G}_s$$

这表明 B_t 具有独立增量性质。
其次，增量分布特性：由 W_t 作为布朗运动的性质，我们知道

$$B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_{s+\tau} \sim N(0, t-s)$$

这正是布朗运动增量应具有的分布。
第三，适应性：由定义可知

$$B_t = W_{t+\tau} - W_\tau \in \mathcal{F}_{t+\tau} = \mathcal{G}_t$$

最后，轨道连续性由 W_t 的轨道连续性直接继承而来。
因此，B_t 确实是一个 $\mathcal{G}_t$ – 布朗运动。关于独立性，在独立增量证明中取 $s = 0$，即可得到 $B_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_0$，证明完毕。

EXERCISE 3

令 W_t 为 1 – 维布朗运动。证明

(1) 对于任意的 $\lambda > 0, X_t = e^{\lambda |W_t|}$ 是一个下鞅；

(2) 证明

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t} |W_s| > x\right) \le 2e^{-\frac{x^2}{2t}};$$

(3) 令 $\sigma : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ 关于由 W_t 生成的 σ – 域流适应，且 $1/2 \le |\sigma| \le 2$，定义 $x_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$，证明存在一个与 σ 无关的常数 c，使得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t} |x_s| > x\right) \le 2e^{-\frac{cx^2}{t}};$$

(4) 令 x_t 为 (3) 中给定的随机过程。证明存在一个正常数 $\mu > 0$，使得

$$\mathbb{E}e^{\mu\tau_1} < \infty,$$

其中 $\tau_1 = \inf\{t > 0 : |x_t| > 1\}$；

(5) 可以利用上述 1 – 维的结果，把相同的结论推广到 d – 维情形吗？简要说明你的理由。

SOLUTION.

(1) 我们首先验证 $X_t = e^{\lambda|W_t|} \in L^1$：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t| &= \mathbb{E}[e^{\lambda|W_t|}] \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\lambda t)^2}{2t}} dx \\
&\le 2e^{\frac{\lambda^2 t}{2}} < +\infty
\end{aligned}$$

接下来验证下鞅性质。由于 W_t 是 $\mathcal{F}_t$ – 鞅(如习题 2 所证),因此 $|W_t|$ 是 $\mathcal{F}_t$ – 下鞅。对于任意 $\lambda > 0$,应用 Jensen 不等式(注意 $e^{\lambda x}$ 是凸函数),对任意 $0 \le s < t$,我们有:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{\lambda|W_t|}|\mathcal{F}_s] &\ge e^{\lambda\mathbb{E}[|W_t||\mathcal{F}_s]}\\ &\ge e^{\lambda|W_s|}\end{aligned}$$

综上所述,X_t 满足下鞅的定义,即 $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \ge X_s$。

(2) 我们利用上一问的结论证明这一不等式。首先考虑时间区间 $[0,1]$ 的情况:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le 1}|W_s| > x\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le 1}X_s > e^{\lambda x}\right)\\ &\le \frac{\mathbb{E}[X_1]}{e^{\lambda x}} \quad \text{(由 Doob 不等式)}\\ &\le 2e^{\frac{\lambda^2}{2}-\lambda x}\end{aligned}$$

为使右侧取得最小值,我们选择 $\lambda = x$,得到:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le 1}|W_s| > x\right) \le 2e^{-\frac{x^2}{2}}$$

接下来,我们利用布朗运动的缩放性质(scaling property)将结果推广到一般时间区间 $[0,t]$。注意到 $\frac{1}{\sqrt{t}}W_{ts} \stackrel{d}{=} W_s$,我们有:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|W_s| > x\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le 1}|W_{ts}| > x\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le 1}|W_s| > \frac{x}{\sqrt{t}}\right)\\ &\le 2e^{-\frac{x^2}{2t}}\end{aligned}$$

这就完成了不等式的证明。

(3) 根据随机积分 $x_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$ 的定义,其二次变差过程为 $[x]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$。由条件 $1/2 \le |\sigma| \le 2$ 可知:

$$\frac{t}{4} \le [x]_t \le 4t$$

由于 x_t 是连续局部鞅,根据 Dubins-Schwarz 定理,存在一个标准布朗运动 $\widetilde{W}$,使得:

$$x_t = \widetilde{W}_{[x]_t}$$

进而我们有:

$$\begin{aligned}\sup_{0\le s\le t}|x_s| &= \sup_{0\le s\le t}|\widetilde{W}_{[x]_s}|\\ &\le \sup_{0\le r\le 4t}|\widetilde{W}_r|\end{aligned}$$

应用第 (2) 问的结论,得到:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{0\le s\le t}|x_s| > x\right) &\le \mathbb{P}\left(\sup_{0\le r\le 4t}|\widetilde{W}_r| > x\right)\\ &\le 2e^{-\frac{x^2}{8t}}\end{aligned}$$

因此,存在一个与 σ 无关的常数 $c = 1/8$,使得所需的不等式成立。

(4) 定义停时 $S := \inf\{s > 0 : |\widetilde{W}_s| > 1\}$，即新布朗运动 $\widetilde{W}$ 首次越过单位球面的时刻。根据题目中 τ_1 的定义：

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \inf\{t > 0 : |x_t| > 1\}\\ &= \inf\{t > 0 : |\widetilde{W}_{[x]_t}| > 1\}\\ &= \inf\{t > 0 : [x]_t > S\}\end{aligned}$$

由 $\frac{t}{4} \leq [x]_t \leq 4t$，我们可以得到：

$$\frac{S}{4} \leq \tau_1 \leq 4S$$

对于标准布朗运动的首次击中时，已知存在 $\mu' > 0$ 使得 $\mathbb{E}[e^{\mu' S}] < \infty$。因此，对于任意 $0 < \mu \leq \frac{\mu'}{4}$，我们有：

$$\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}] \leq \mathbb{E}[e^{4\mu S}] \leq \mathbb{E}[e^{\mu' S}] < \infty$$

这就证明了存在 $\mu > 0$ 使得 $\mathbb{E}[e^{\mu\tau_1}] < \infty$。

(5) 上述结果可以推广到 d 维情形。在高维情况下，W_t 为 d 维布朗运动，σ_s 为 $d \times d$ 维矩阵值随机过程。证明方法基本相同：

- 可以对各个分量分别应用一维情况的结论
- 使用高维布朗运动的性质和随机积分理论
- 通过时间变换将问题转化为标准布朗运动的估计

需要注意的是，在高维情况下，最终的概率估计中会出现依赖于维数 d 的常数。这是因为当维数增加时，布朗运动“逃逸”的可能性增大，导致估计常数会随维数变化。但基本结论和证明框架仍然有效。

EXERCISE 4

给定两个概率分布 $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$，定义：

$$H(\mathbb{P} \mid \mathbb{Q}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\log \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right]$$

设

$$X_t = W_t + h_t,$$

其中 W_t 是 $1-$ 维标准布朗运动，$h_0 = 0$ 且 $\dot{h}_s = \frac{d}{ds}h_s \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$，求 X_t 的路径分布 $\mathbb{Q}$ 相对于 Wiener 测度 $\mathbb{P}$（W_t 的分布）的相对熵 $H(\mathbb{Q} \mid \mathbb{P})$。

SOLUTION. 我们首先观察到问题涉及一个带漂移项的布朗运动 $X_t = W_t + h_t$，其中 h_t 是一个确定性函数，满足 $h_0 = 0$ 且其导数 $\dot{h}_s \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$。这类问题的标准方法是应用 Girsanov 定理，该定理允许我们在两个概率测度之间建立显式关系。

由于 $\dot{h} \in L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$，它满足 Novikov 条件

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds\right)\right] < \infty$$

这使我们能够应用 Girsanov 定理。根据该定理，我们可以构造以下 Radon-Nikodym 导数：

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(\int_0^\infty \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds\right)$$

Girsanov 定理的关键结果是：在新测度 $\mathbb{Q}$ 下，过程

$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t \dot{h}_s ds = W_t - h_t$$

是一个标准布朗运动。换言之，在 $\mathbb{Q}$ 下，$X_t = \widetilde{W}_t + h_t$ 是一个标准布朗运动加上漂移项。
为了计算相对熵，我们对上述 Radon-Nikodym 导数取对数：

$$\begin{aligned}\log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} &= \int_0^\infty \dot{h}_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds \\ &= \int_0^\infty \dot{h}_s d(\widetilde{W}_s + h_s) - \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds \\ &= \int_0^\infty \dot{h}_s d\widetilde{W}_s + \int_0^\infty \dot{h}_s dh_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds\end{aligned}$$

注意到 $\int_0^\infty \dot{h}_s dh_s = \int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds$，我们继续化简：

$$\begin{aligned}\log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} &= \int_0^\infty \dot{h}_s d\widetilde{W}_s + \int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds \\ &= \int_0^\infty \dot{h}_s d\widetilde{W}_s + \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds\end{aligned}$$

根据相对熵的定义，我们需要在 $\mathbb{Q}$ 测度下计算上式的期望：

$$\begin{aligned}H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\log \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^\infty \dot{h}_s d\widetilde{W}_s + \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds\right]\end{aligned}$$

关键的观察是：在 $\mathbb{Q}$ 测度下，$\widetilde{W}_t$ 是标准布朗运动，因此随机积分 $\int_0^\infty \dot{h}_s d\widetilde{W}_s$ 是一个鞅，其期望为零。因此：

$$\begin{aligned}H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^\infty \dot{h}_s d\widetilde{W}_s\right] + \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds \\ &= 0 + \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty |\dot{h}_s|^2 ds\end{aligned}$$

因此，X_t 的路径分布 $\mathbb{Q}$ 相对于 Wiener 测度 $\mathbb{P}$ 的相对熵是漂移项导数平方的半积分。这个结果表明：漂移项的“能量”越大，两个分布的差异就越大，这与直觉相符。

EXERCISE 5

令 $d \geq 2, D = \left\{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1, x \neq 0\right\}$，利用概率方法证明不存在 $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ 满足如下方程：

$$\begin{cases}\Delta u(x) = 0, & x \in D \\ u(z) = 0, & \text{如果} |z| = 1 \\ u(z) = 1, & \text{如果} z = 0.\end{cases}$$

PROOF. 我们采用概率论中的布朗运动方法来证明该命题。假设存在满足题设条件的函数 u，通过构造适当的随机过程并分析其性质，我们将导出矛盾，从而完成证明。

首先，定义 B_t 为从任意点 $x \in D$ 出发的 d 维标准布朗运动，并引入停时

$$\tau_D := \inf\{t > 0 : B_t \notin D\}$$

即 B_t 首次离开区域 D 的时刻。

由于 $u \in C^2(D)$ 且 $\Delta u(x) = 0$（u 是调和函数），我们可以应用 Itô 公式。对于任意 $t < \tau_D$ 时刻，有

$$\begin{aligned} u(B_{t\wedge\tau_D}) &= u(x) + \int_0^{t\wedge\tau_D} \nabla u(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_D} \Delta u(B_s) ds \\ &= u(x) + \int_0^{t\wedge\tau_D} \nabla u(B_s) \cdot dB_s \end{aligned}$$

其中第二个等式利用了 $\Delta u = 0$ 的条件。

对等式两边取期望，由于随机积分 $\int_0^{t\wedge\tau_D} \nabla u(B_s) \cdot dB_s$ 是鞅，其期望为零，因此

$$\mathbb{E}[u(B_{t\wedge\tau_D})] = u(x)$$

令 $t \to \infty$，由于 D 是有界区域（被单位球包含），布朗运动几乎必然在有限时间内离开 D，即 $\tau_D < \infty$（几乎处处）。由有界收敛定理，我们得到

$$\mathbb{E}[u(B_{\tau_D})] = u(x)$$

现在分析 $\mathbb{E}[u(B_{\tau_D})]$ 的值。注意到布朗运动离开区域 D 只有两种可能：

1. 布朗运动到达单位球面 $\{z : |z| = 1\}$，在这种情况下 $u(B_{\tau_D}) = 0$（根据边界条件）；
2. 布朗运动到达原点 0，在这种情况下 $u(B_{\tau_D}) = 1$（根据边界条件）。

因此，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(B_{\tau_D})] &= \mathbb{E}[u(B_{\tau_D}) \cdot 1_{|B_{\tau_D}|=1}] + \mathbb{E}[u(B_{\tau_D}) \cdot 1_{B_{\tau_D}=0}] \\ &= 0 \cdot \mathbb{P}(|B_{\tau_D}| = 1) + 1 \cdot \mathbb{P}(B_{\tau_D} = 0) \\ &= \mathbb{P}(B_{\tau_D} = 0) \end{aligned}$$

关键的观察是：当 $d \geq 2$ 时，布朗运动的维数足够高，使得它几乎不可能精确地击中一个点（即原点 0）。布朗运动具有“极性点”性质，即对于 $d \geq 2$ 的情况，任何给定点（包括原点）被 d 维布朗运动击中的概率为零。因此，$\mathbb{P}(B_{\tau_D} = 0) = 0$。

结合前面的等式，我们得到对于任意 $x \in D$，有

$$u(x) = \mathbb{E}[u(B_{\tau_D})] = \mathbb{P}(B_{\tau_D} = 0) = 0$$

然而，这与边界条件 $u(0) = 1$ 产生矛盾。因此，不存在满足题设所有条件的函数 $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$。

EXERCISE 6

令 D 为 $\mathbb{R}^d$ 中的有界区域，考虑二阶线性椭圆型算子：

$$Lu(x) := a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) + b_i(x)\partial_i u(x), \quad x \in D.$$

假设系数 $a_{ij}, b_i \in C^0(D), a_{ij} \in \mathbb{S}^d_\delta$，设 $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$ 满足

$$Lu(x) \geq 0, \quad x \in D,$$

且 u 在 D 内部某点 x_0 处取得最大值。用 support 定理证明：要么 u 在 D 上恒等于常数，要么最大值只能出现在边界上（强极值原理）。

PROOF. 我们将采用概率方法证明强极值原理，通过构造适当的随机过程并巧妙应用 support 定理得到结论。

首先，定义一个从最大值点 x_0 出发的扩散过程 $(X_t)_{t\geq 0}$，满足如下随机微分方程：

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0$$

其中 $\sigma(x)$ 选择使得 $\sigma(x)\sigma^T(x) = 2a(x)$。这样构造的扩散过程具有生成元 L，即为我们考虑的椭圆型算子。

由于 $u \in C^2(D)$，我们可以应用 Itô 公式于函数 u 和过程 X_t，得到：

$$\mathbb{E}[u(X_t)] = u(x_0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t Lu(X_s)ds\right]$$

定义过程 (X_t) 首次离开区域 D 的停时：

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin D\}$$

对任意 $t > 0$，考虑 t 与 τ_D 的最小值，有：

$$\mathbb{E}[u(X_{t\wedge\tau_D})] = u(x_0) + \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_D} Lu(X_s)ds\right] \geq u(x_0)$$

其中不等号成立是因为已知条件 $Lu(x) \geq 0$ 对所有 $x \in D$ 成立。

然而，由于 u 在 x_0 处取得最大值，且 $X_0 = x_0$，我们有：

$$\mathbb{E}[u(X_{t\wedge\tau_D})] \leq u(x_0)$$

结合以上两个不等式，我们必须有：

$$\mathbb{E}[u(X_{t\wedge\tau_D})] = u(x_0)$$

这蕴含 $\mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\tau_D} Lu(X_s)ds] = 0$。由于 $Lu(x) \geq 0$，这进一步意味着 $Lu(X_s) = 0$ 对几乎所有 $s \in [0, t\wedge\tau_D]$ 成立。

现在，假设我们的结论不成立，即存在点 $y \in D$（位于区域内部）使得 $u(y) < u(x_0)$。由函数 u 的连续性，存在 y 的某个邻域 $B_\varepsilon(y) \subset D$，使得对任意 $z \in B_\varepsilon(y)$，都有 $u(z) \leq u(x_0) - \eta$，其中 $\eta > 0$ 是一个正常数。

考虑一条连接 x_0 和 $B_\varepsilon(y)$ 内某点的连续路径 $\phi : [0,T] \to D$，满足：

$$\phi(0) = x_0, \quad \phi(T) \in B_\varepsilon(y), \quad \phi(t) \in D \text{ 对所有} t \in [0,T]$$

根据扩散过程的 support 定理，我们有：

$$\mathbb{P}_{x_0}(X_T \in B_\varepsilon(y)) > 0$$

这表明扩散过程 (X_t) 以正概率能够在时刻 T 到达区域 $B_\varepsilon(y)$。

因此，我们得到：

$$\mathbb{E}[u(X_T)] < u(x_0)$$

前提是 $\tau_D > T$（即过程在时刻 T 之前未离开区域 D）的概率为正。

然而，这与我们先前导出的结论 $\mathbb{E}[u(X_{t\wedge\tau_D})] = u(x_0)$ 产生矛盾。这种矛盾表明，我们的假设不成立。

因此，只有两种可能：

1. 函数 u 在整个区域 D 上恒为常数 $u(x_0)$。
2. 函数 u 的最大值仅能在区域 D 的边界上取得，而非内部点 x_0。

由于题设中已假定 u 在内部点 x_0 处取得最大值，且我们导出了矛盾，所以必然是第一种情况成立，即 u 在 D 上恒为常数。这就完成了强极值原理的证明。

EXERCISE 7

考虑一个被控制的扩散过程：

$$dX_t^\alpha = \sigma\left(X_t^\alpha, \alpha_t\right) dW_t$$

其中 X_t 是状态过程，A 是一个控制集合。(α_t) 是一个取值为 A 的循序可测的控制过程，该类过程全体记为 $\mathcal{A}$ 。控制目标是最小化代价：

$$J(t, x; \alpha) = \mathbb{E}_{t,x} g\left(X_T^\alpha\right), \quad t \in [0, T]$$

定义最优值函数：

$$u(t, x) = \inf_{\alpha.\in\mathcal{A}} J(t, x; \alpha), \quad t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^d$$

证明这个函数 $u(t, x)$ 满足 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}\inf_{\alpha\in A}\left\{[\sigma_{ik}\sigma_{jk}(\alpha)\partial_{ij}u]\right\} = 0 \\ u(T) = g \end{cases}$$

（可先考虑 A 只有一个元素或者有限个元素的情况）

PROOF. 我们将通过动态规划和随机分析的方法来推导 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程。证明的核心思想是分析最优值函数在无穷小时间区间上的行为。

首先，考虑从时刻 t 出发，在极短的时间增量 dt 后到达时刻 $t + dt$。根据 Bellman 最优性原理，最优值函数可以表示为：

$$u(t, x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[u(t + dt, X_{t+dt}^\alpha) \mid X_t^\alpha = x\right]$$

这一表达式体现了最优策略的递归性质：从当前状态 (t, x) 出发的最优策略，应当使得未来状态的期望值函数最小。

为了分析右侧期望项，我们需要将 $u(t + dt, X_{t+dt}^\alpha)$ 展开。由于 u 是足够光滑的函数（至少在形式上），我们可以应用 Itô 公式得到：

$$\begin{aligned} u(t + dt, X_{t+dt}^\alpha) = u(t, x) &+ \partial_t u(t, x)dt + \nabla u(t, x) \cdot \sigma(x, \alpha)dW_t \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_k \sigma_{ik}(x, \alpha)\sigma_{jk}(x, \alpha)\partial_{ij}u(t, x)dt + o(dt) \end{aligned}$$

其中 $o(dt)$ 表示高阶无穷小项，在 $dt \to 0$ 时可以忽略。

将此展开式代入 Bellman 方程，我们有：

$$\begin{aligned} u(t, x) = \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\Bigg[&u(t, x) + \partial_t u(t, x)dt + \nabla u(t, x) \cdot \sigma(x, \alpha)dW_t \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_k \sigma_{ik}(x, \alpha)\sigma_{jk}(x, \alpha)\partial_{ij}u(t, x)dt\Bigg] \end{aligned}$$

在计算期望时，需要注意以下几点：

1. $u(t, x)$ 是确定性函数，与控制 α 无关；
2. 随机积分项 $\nabla u(t, x) \cdot \sigma(x, \alpha)dW_t$ 的期望为零（鞅性质）；

3. 最小化操作只影响含有 α 的项。

因此, 上式两边消去 $u(t,x)$, 除以 dt 并让 $dt \to 0$, 我们得到:

$$0 = \partial_t u(t,x) + \frac{1}{2} \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \sum_{i,j} \sum_k \sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\partial_{ij} u(t,x) \right\}$$

这正是 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的微分形式。而边界条件 $u(T,x) = g(x)$ 则直接来自最优值函数的定义: 在终端时刻 T, 状态为 x 的代价恰好是 $g(x)$。

因此, 最优值函数 $u(t,x)$ 满足以下偏微分方程系统:

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2} \inf_{\alpha \in A} \left\{ \sum_{i,j} \sum_k \sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\partial_{ij} u \right\} = 0 \\ u(T,x) = g(x) \end{cases}$$

这就是我们要证明的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程。