一、 在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 下，

(1) 停时的概念：

一个随机时间 $\tau: \Omega \to [0,\infty]$，满足 $\forall t \geq 0$，$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

用于描述"事件发生的时间"，且只与该时刻及之前的事件有关.

(2) 马氏过程：$\forall s \leq t$，$\forall$ 可测函数 f.

$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = E[f(X_t)|X_s]$$

(3) 首先定义一个 map $f(w) = \begin{cases} (w,0) & w \leq 0 \\ (\sin w, 1-\cos w) & 0 < w < 2\pi \\ (w-2\pi, 0) & w \geq 2\pi \end{cases}$

$X(t) = f(B(t)+\pi)$，$B(t)$ 为标准 Brownian motion. 由 $B(t)$ 为连续变量，$X(t)$ 与 $B(t)$ 几乎处处为双射.

故 $p(X_{t+h} \in B | X_t = x) = p(X_{t+h} \in B | \mathcal{F}_t^X)$ a.s.，即 X 是 Markov 的. 定义 $\tau = \inf_t \{X(t) = (0,0)\}$.

若 X_t 到达原点时，$W(t) = \pi$ 时，X_t 将向右移动，$W(t) = -\pi$，则向左. 故此时 X_t 的值无法预测未来. 不再有强马氏性.

二、

(1) 在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 下，$\{\mathcal{F}_t\}$ 为一列流，称 $(W_t)_{t\geq 0}$ 为 $\mathcal{F}_t$ - Brownian motion，

若：① $W_0 = 0$

② $\forall w$，$t \mapsto W_t(w)$ 连续

③ $\forall t \geq 0$，W_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的

④ $\forall 0 \leq s < t$，$W_t - W_s$ 独立于 $\mathcal{F}_s$

⑤ $\forall 0 \leq s < t$，$W_t - W_s \sim N(0, t-s)$

(2)，只需证 $E[|W_t|] < \infty$ 且 $E[W_t|\mathcal{F}_s] = W_s$，$s \leq t$.

① $W_t \sim N(0,t)$. $E|W_t| = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < +\infty$

② $E[W_t|\mathcal{F}_s] = W_s + E[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = W_s$

(3)，$B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$，① $B_0 = 0$，② 轨道连续性易证，

而 ③ $B_t = W_{t+\tau} - W_\tau$ 是 $\mathcal{F}_{t+\tau}$ 可测，即 $\mathcal{G}_t$ - 可测；

④ $B_t - B_s = W_{t+\tau} - W_{s+\tau}$，由独立增量性知 $B_t - B_s$ 与 $\mathcal{F}_{s+\tau}$ 即 $\mathcal{G}_s$ 独立.

⑤ 且 $W_{t+\tau} - W_{s+\tau} \overset{d}{=} W_t - W_s \sim N(0, t-s)$，故 B_t 是 $\mathcal{G}_t$ - 布朗运动

往证 B_t 与 $\mathcal{G}_0$ 独立. 这由布朗运动的强马氏性可得.

三、

(1) $X_t=e^{\lambda|W_t|}$ 为 $\mathcal{F}_t$ 可测，$E[e^{\lambda|W_t|}]=\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda|y|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-y^2/2t}dy \le 2e^{\lambda^2 t/2}$

令 $\phi(x)=e^{\lambda|x|}$，为凸函数，故由 Jenson 不等式：

$E[X_t|\mathcal{F}_s]=E[\phi(W_t)|\mathcal{F}_s]\ge\phi(E[W_t|\mathcal{F}_s])=\phi(W_s)=X_s$，故 X_t 为下鞅.

(2). $P(\sup_{s\le t}X_s\ge a)\le\frac{EX_t}{a}$，取 $a=e^{\lambda x}$

又 $E[X_t]\le 2e^{\lambda^2 t/2}$，代入有 $P(\sup_{s\le t}X_s\ge e^{\lambda x})\le\frac{2e^{\lambda^2 t/2}}{e^{\lambda x}}$

故 $P(\sup_{s\le t}|W_s|>x)=P(\sup_{s\le t}X_s\ge e^{\lambda x})\le 2e^{-\lambda x+\lambda^2 t/2}$

令 $\lambda=x/t$，$P(\sup_{s\le t}|W_s|>x)\le 2e^{-x^2/2t}$

(3). $x_t=\int_0^t\sigma_s dW_s$，$\langle x\rangle_t=\int_0^t\sigma_s^2 ds\in[\frac{t}{4},4t]$，又存在标准布朗运动 B，$x_t=B_{\langle x\rangle_t}$，

$\sup_{s\le t}|x_s|>x\subset\sup_{u\le 4t}|B_u|>x$.

又 $P(\sup_{u\le 4t}|B_u|>x)\le 2e^{-x^2/8t}$，则 $c=\frac{1}{8}$ 即可.

(4). $P(\tau_1>n)=P(\sup_{s\le n}|x_s|<1)\le 2e^{-c/n}$，故 $E[e^{\mu\tau_1}]=\int_0^\infty P(e^{\mu\tau_1}>y)dy$

$=\int_0^1 P(e^{\mu\tau_1}>y)dy+\int_1^{+\infty}P(e^{\mu\tau_1}>y)dy$

$\le 1+\int_1^{+\infty}2e^{\frac{-c\mu}{\log y}}dy$

(5) 可以推广，以上证明方法在 d-维情形都有类似推广.

四、$H(Q|P)=E_Q[\log\frac{dQ}{dP}]$，而 $\frac{dQ}{dP}=\left(\frac{dP}{dQ}\right)^{-1}=\exp(\int_0^T\dot h_s dX_s+\frac{1}{2}\int_0^T\dot h_s^2 ds)$。在 Q 下，$X_t$ 为标准布朗，

$\int_0^T\dot h_s dX_s=\underbrace{\int_0^T\dot h_s dB_s}_{E_Q[\,]=0}$，$E_Q\int_0^T\dot h_s^2 ds=\int_0^T\dot h_s^2 ds$

故 $H(Q|P)=E_Q[\int_0^T\dot h_s dB_s+\frac{1}{2}\int_0^T\dot h_s^2 ds]=0+\frac{1}{2}\int_0^T\dot h_s^2 ds$

五、

$\forall x\in D$，B_t^x 为从 x 出发的 d-维布朗运动，

$\tau=\inf\{t\ge0:\|B_t^x\|=1\}$，$d\ge2$ 时，$\tau<\infty$ a.s.，且 $B_\tau^x\in\partial D$，

由 Dynkin 公式，$u(x)=E[u(B_\tau^x)]=E[0]=0$，$\forall x\in D$，这与 $x=0$ 时，

$u(x)=u(0)=1$ 矛盾.

文：

$D \subset \mathbb{R}^d$，$Lu(x) = a_{ij}(x)\partial_{ij} u(x) + b_i(x)\partial_i u(x)$，若 $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$，$Lu \geq 0$，

往证：① u在D的内部取最值，则 u为常数

② 在∂D处取最值.

若极大值点 $x_0 \in D \setminus \partial D$，$\nabla u(x_0) = 0$，$\nabla^2 u(x_0) \leq 0$，即有 $\nabla u(x_0) = 0$，$Lu(x_0) = a_{ij}(x_0)\partial_{ij} u(x_0) \leq 0$.

又 $Lu \geq 0$，

故 $Lu(x_0) = 0$，$a_{ij}(x_0)\partial_{ij} u(x_0) = 0$

令 $\varphi(t) = x_0 + tv$，满足 $\nabla u(x_0+tv)\cdot v < 0$，这由$u$非恒定所致。令 $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$，$\sigma(x)$是 $a_{ij}(x)$的平方根矩阵，

$a_{ij}(x) = \sigma_{ik}(x)\sigma_{jk}(x)$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists c > 0$，s.t. $P\left(\sup\limits_{t\in[0,1]} \|X_t - \varphi(t)\| \leq \varepsilon\right) \triangleq P(A) \geq c > 0$

由 $Lu \geq 0$，$u(X_t)$为下鞅，$E[u(X_t)|\mathcal{F}_s] \geq u(X_s)$，且 $u(X_1) \leq u(x_0) - \delta$，$\omega \in A$

由 Dynkin 公式，$u(x_0) = E u(X_1) = E u(X_1) I_A + E u(X_1) I_{A^c}$

$$\leq (u(x_0) - \delta)\, P(A) + u(x_0)(1 - P(A))$$ ，矛盾.

$$= u(x_0) - \delta P(A) < u(x_0)$$

故u满足强极值原理.