一. (1) 停时是针对某个σ-代数流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ 定义的随机变量

$\tau: \Omega \longrightarrow I\cup\{+\infty\}$ 为停时, 如果 $\forall t\in I$ 都有 $\{\omega\in\Omega: \tau(\omega)\leq t\}\in\mathcal{F}_t$

σ-代数 $\mathcal{F}_t$ 可以理解为 t 时已知的信息, 由停时的定义知道到 t 时为止的信息可以判断是否停止 ($\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t$).

停时也可以看作是一种只依赖于当前和过去信息的策略.

(2) 马氏过程定义: 考虑定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上, 以 $(E,\mathcal{E})$ 为状态空间的随机过程 $(X_t: t\in I)$, 且关于流 $(\mathcal{G}_t: t\in I)$ 适应. 称 (X_t) 具有马氏性, 如果 $\forall s<t\in I$, $B\in\mathcal{E}$

$$\mathbb{P}(X_t\in B\mid \mathcal{G}_s) = \mathbb{P}(X_t\in B\mid X_s)$$

直观解释: 在已知某时刻 s 之前的全部信息 $\mathcal{G}_s$ 条件下, 过程在将来时刻 t 的取值只依赖于现在 (X_s), 而与过去无关。

(3) 是马氏过程但非强马氏过程的例子:

反射布朗运动

二. (1) 一维 $\mathcal{F}_t$-布朗运动 $(W_t)_{t\geq 0}$ 定义:

$(W_t)_{t\geq 0}$ 满足: ① 增量 W_t-W_s 是均值为 0, 方差为 $t-s$ 的 Gaussian r.v. $\forall s\leq t$.

② 增量 W_t-W_s 独立于 $\sigma(W_r: r\leq s)$

③ $t\mapsto W_t(\omega)$ 几乎处处连续

(2) pf: ① $\forall t\geq 0$, $W_t\sim N(0,t)$ $\Rightarrow$ 可积

② W_t 关于 $\mathcal{F}_t$ 适应

③ $\forall 0<s<t$ $\quad \mathbb{E}[W_t\mid\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t-W_s+W_s\mid\mathcal{F}_s]$

$= \mathbb{E}[W_t-W_s\mid\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s\mid\mathcal{F}_s]$

(独立增量 + $W_t-W_s\sim N(0,t-s)$ + W_s 可测) $=\quad 0 + W_s$

(3) pf: 取 $A\in\mathcal{G}_0=\mathcal{F}_\tau$ 及 $0\le t_1<\cdots<t_m$，令 f 为 $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}_+$ 有界连续函数.

下证 $\mathbb{E}[1_A\cdot f(B_{t_1},\cdots,B_{t_m})]=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{E}[f(W_{t_1},\cdots,W_{t_m})]$ (*)

对 $\forall n\ge1$，$\forall t\ge0$，记 $[t]_n$ 为形如 $\frac{k}{2^n}$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ 且属于区间 $[t,\infty)$ 的最小实数.

观察到：$f(W_{t_1+\tau}-W_\tau,\cdots,W_{t_m}-W_\tau)=\lim\limits_{n\to\infty}f(W_{t_1+[\tau]_n}-W_{[\tau]_n},\cdots,W_{t_m+[\tau]_n}-W_{[\tau]_n})$

由控制收敛定理：（记 $B_t^\tau=W_{t+\tau}-W_\tau$）

$\mathbb{E}[1_Af(B_{t_1}^\tau,\cdots,B_{t_m}^\tau)]=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[1_Af(B_{t_1}^{[\tau]_n},\cdots,B_{t_m}^{[\tau]_n})]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}[1_A\cdot 1_{\{(k-1)/2^n<\tau\le k/2^n\}}f(B_{t_1}^{k/2^n},\cdots,B_{t_m}^{k/2^n})]$

$A\cap\{(k-1)/2^n<\tau\le k/2^n\}=(A\cap\{\tau\le k/2^n\})\cap\{\tau\le(k-1)/2^n\}^c\in\mathcal{F}_{k/2^n}$

由布朗运动马氏性

$\mathbb{E}[1_{A\cap\{(k-1)/2^n<\tau\le k/2^n\}}f(B_{t_1}^{k/2^n},\cdots,B_{t_m}^{k/2^n})]$

$=\mathbb{P}(A\cap\{(k-1)/2^n<\tau\le k/2^n\})\cdot\mathbb{E}[f(W_{t_1},\cdots,W_{t_m})]$

对 k 求和得证 (*)

对 (*) 取 $A=\Omega$ 得 (B_t) 为 $\mathcal{G}_t$-布朗运动. 由 $\forall 0\le t_1<\cdots<t_m$ 和 $(B_{t_1},\cdots,B_{t_m})$ 独立于 $\mathcal{F}_\tau$，即 B_t 与 $\mathcal{G}_0$ 独立.

三.(1) pf: $x\to e^{a|x|}$ 凸函数.

① $\mathbb{E}[X_t]=1<\infty$ 可积 ② X_t 关于 $\mathcal{F}_t$ 适应.（同 W_t 关于 $\mathcal{F}_t$ 适应）

③ $\forall s<t$：$\mathbb{E}[X_t\mid\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}[e^{a(|W_t|-|W_s|+|W_s|)}\mid\mathcal{F}_s]$

$=e^{a|W_s|}\cdot\mathbb{E}[e^{a(|W_t|-|W_s|)}\mid\mathcal{F}_s]$

$\ge e^{a|W_s|}\cdot e^{a\cdot\mathbb{E}[|W_t|-|W_s|\mid\mathcal{F}_s]}$

$=e^{a|W_s|}$

$=\mathbb{E}[X_s\mid\mathcal{F}_s]$ $\therefore$ X_t 为下鞅.

(2) pf: 由 Doob 不等式及(1)

$$\mathbb{P}(W_t^* > \lambda) = \mathbb{P}(X_t^* > e^{a\lambda}) \le e^{-a\lambda}\mathbb{E}X_t = \frac{2e^{-a\lambda}}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty e^{ax-\frac{x^2}{2t}}dx = 2e^{\frac{a^2t}{2}-a\lambda}.$$

取 $a=\frac{\lambda}{t}$ 得 $\mathbb{P}(W_t^*>\lambda) \le 2e^{-\frac{\lambda^2}{2t}}$

(3) pf: 由于 $X_t = \int_0^t \sigma_s dW_s \Rightarrow \langle X,X\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds \in [\frac{1}{4}t, 4t]$

X_t 为连续鞅，由 Dubins - Schwarz's 定理 令 $T_t = \langle X\rangle_t^{-1} := \inf\{s\ge 0: \langle M\rangle_s > t\}$

有 $B_t := X_{T_t}$ 为布朗运动 且 $X_t = B_{\langle X,X\rangle_t}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t}|X_s| > x) = \mathbb{P}(\sup_{0\le s\le t}|B_{\langle X,X\rangle_s}| > x)$$

$$\le \mathbb{P}(\sup_{0\le s\le 4t}|B_{\langle X,X\rangle_s}| > x)$$

$$\le 2e^{-\frac{x^2}{8t}}$$ 取 $c=\frac{1}{8}$ 即可.

(4). pf: 利用课上结论，对 $X_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$ $\quad T_1 = \inf\{t\ge 0: |X_t| > 1\}$

$\exists$ 常数 C 和 正常数 $0<\mu<\frac{4}{C}$ s.t. $\mathbb{E}[e^{\mu T_1}] \le C < \infty$

(5) 对 d 维 B.M. $(W_t^{(1)},\cdots,W_t^{(d)})$ 令 $M_t := \sup_{0\le s\le t}\|W_s\|$ $\quad M_t^{(i)} := \sup_{0\le s\le t}|W_s^{(i)}|$

$\|W_s\| \le \sum_{i=1}^d |W_s^{(i)}| \le \sqrt{d}\cdot\max_i M_t^{(i)}$, $\mathbb{P}(M_t > x) \le \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(M_t^{(i)} > \frac{x}{\sqrt{d}}) \le 2d\exp(-\frac{x^2}{2dt})$

其余估计同理，常数依赖于 $C(d)$.

四. 解: W_t 为 $\mathbb{P}$ 下的标准布朗运动，由 Girsanov 定理，对于使得 X_t 为布朗运动的 $\mathbb{Q}$, Radon-Nikodym 导数为:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp(-\int_0^T h_t' dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T (h_t')^2 dt)$$

记 $\mathbb{Q}$ 下 $dX_t = dB_t$, B_t 为 $\mathbb{Q}$ 下的布朗运动 $\Rightarrow dW_t = dB_t - h_t' dt$

$$\Rightarrow \int_0^T h_t' dW_t = \int_0^T h_t' dB_t - \int_0^T (h_t')^2 dt$$

又 $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\int_0^T h_t' dB_t] = 0 \Rightarrow H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\log\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}]$

$$= \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\frac{1}{2}\int_0^\infty (h_t')^2 dt] = \frac{1}{2}\int_0^\infty (h_t')^2 dt$$

五. pf: 反证法, 若存在 $u\in C^2(D)\cap C(\bar{D})$ 满足 $\begin{cases}\Delta u(x)=0 & x\in D\\ u(z)=0 & \text{if } |z|=1\\ u(z)=1 & \text{if } z=0\end{cases}$

则由 u 调和函数, 我们有 $u(x)=\mathbb{E}^x[u(B_\tau)]$ $\forall x\in D$, $\tau=\inf\{t>0: B_t\notin D\}$

对于 $D=\{x\in\mathbb{R}^d: |x|<1,\ x\neq 0\}$ $\partial D=\{|x|=1\}\cup\{0\}$

$d\geq 2$ 时, 布朗运动几乎不去中心点, 因此 $B_\tau\in\{|x|=1\}$

由于 $u(x)=\mathbb{E}^x[u(B_\tau)]=0$ $\forall x\in D$ 令 $x\to 0$, 由于 $u\in C(\bar{D})$, $u(x)\to u(0)=1$ 矛盾.

六. 构造扩散过程 $dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dW_t$ $\frac{1}{2}\sigma_k^i\sigma_k^{jT}=a_{ij}$

b_i 为 L 算子的漂移项, 设 $x_0\in D$ 取 u 最大值 M.

对 $\forall x\in D$, $x\neq x_0$, 习 $\varphi(t):[0,1]\to D$ 连续 且 $\varphi(0)=x_0$, $\varphi(1)=x$.

由 Support theorem 存在 X_t 沿 $\varphi(t)$ 以正概率逼近 x

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}|X_t-\varphi(t)|\leq\varepsilon\Big)\geq c$$

又由 Itô 公式, 对 x 及 τ_D 有 $u(X_{t\wedge\tau_D})=u(x)+M_{t\wedge\tau_D}+\int_0^{t\wedge\tau_D}Lu(X_s)ds$

取期望 $u(x)\leq\mathbb{E}^x[u(X_{t\wedge\tau_D})]$ $\forall x\in D$ (1)

若 x_0 在 D 内部且 u 非常数, 则习 $u(x)<M$, X_t 沿 $\varphi(t)$ 以正概率逼近 x 有

$$\Rightarrow\quad u(x_0)\leq\mathbb{E}^{x_0}[u(X_{t\wedge\tau_D})]<M \quad 矛盾$$

即 x_0 在 D 内部时, u 为常数. 另一方面 由(1) 和 x_0 可取在边界上.

七. 对 $\forall h>0$, 最优值函数满足

$$u(t,x)=\inf_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{E}_{t,x}[u(t+h,X_{t+h}^\alpha)]$$

对 $u(t+h,X_{t+h}^\alpha)$ 由 Itô公式 ($\mathcal{L}^\alpha u=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_{ik}(x,\alpha)\sigma_{jk}(x,\alpha)\partial_{ij}u$)

$$u(t+h, X_{t+h}^{\alpha}) = u(t,x) + \int_t^{t+h} (\partial_t u + \mathcal{L}^{\alpha} u)\, ds + \int_t^{t+h} \nabla u \cdot \sigma\, dW_s$$

取期望 $\mathbb{E}_{t,x}[u(t+h, X_{t+h}^{\alpha})] = u(t,x) + \mathbb{E}_{t,x}[\int_t^{t+h} (\partial_t u + \mathcal{L}^{\alpha} u)\, ds]$

$$\Rightarrow u(t,x) = \inf_{\alpha \in A} \mathbb{E}_{t,x}[\, u(t,x) + \mathbb{E}_{t,x}[\int_t^{t+h} (\partial_t u + \mathcal{L}^{\alpha} u)\, ds]\,]$$

$h \to 0$ inf $\mathbb{E}_{t,x}[\int_t^{t+h} (\partial_t u + \mathcal{L}^{\alpha} u) ds] \approx h \cdot (\partial_t u(t,x) + \mathcal{L}^{\alpha} u(t,x))$

$$\Rightarrow 0 = \inf_{\alpha \in A} \{ \partial_t u + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ik}(x,\alpha)\, \sigma_{jk}(x,\alpha)\, \partial_{ij} u \}$$

$\Rightarrow u(t,x)$ 满足 $\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2} \inf_{\alpha \in A} \{ [\sigma_{ik} \sigma_{jk} \partial_{ij} u] \} = 0 \\ u(T) = g. \end{cases}$