第七章 内排序

主讲教师
杨晓波

排序

- 是按关键字升序（指非递减）或降序（指非递增）的顺序对一组记录重新进行排列的操作
  - 注：如不做特殊声明，本章的排序默认为按升序排序
- 形式化定义
  - 设含**n**个记录的序列为$\{R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n\}$，其相应的关键字序列为$\{K_1, K_2, \ldots\ldots, K_n\}$，则排序是确定这个**n**个记录的一种排列$R_{p1}, R_{p2}, \ldots\ldots R_{pn}$，使得各记录按关键字有序，即：
  - $K_{p1} \le K_{p2} \le \ldots \le K_{pn}$

排序的分类1——按排序涉及的存储器

- 可分内部排序和外部排序
  - 若待排序的记录数不很大，整个排序过程不需要访问外存便能完成，则称此类排序问题为内部排序。
  - 若待排序的记录数很大，整个排序过程不可能都在内存中完成，需要访问外存，则称此类排序问题为外部排序。
  - 数据结构课程中我们只考虑内部排序

本章学习要点

- 主要介绍适用于在计算机内存对一组记录进行排序的标准算法，包括：
  - 排序术语及记号
  - 三种代价为$O(n^2)$的排序方法
    - 插入排序、冒泡排序、选择排序
  - shell排序
  - 快速排序
  - 归并排序
  - 堆排序
  - 分配排序和基数排序
  - 对各种排序算法的实验比较
  - 排序问题的下限

排序术语及记号

术语

- 记录——结点 文件——线性表
- 关键码：能够唯一确定结点的一个或若干域。
- 排序码：作为排序运算依据的一个或若干域。
- 组合排序码，(主关键码，次关键码)

例，(总分数，数据结构分数，计算引论分数)

- 排序：排序就是将一组杂乱无章的数据按一定的规律排列起来

术语

- 排序问题：给定一组记录$r_1,r_2,\ldots r_n$,其排序码分别为$k_1,k_2,\ldots,k_n$，将这些记录排成顺序为$r_{s1},r_{s2},\ldots,r_{sn}$的一个序列S，满足条件$k_{s1}\le k_{s2}\le \ldots\ldots \le k_{sn}$。
- 排序算法的稳定性：如果在对象序列中有两个对象r[i]和r[j]，它们的关键码 k[i] == k[j]，且在排序之前，对象r[i]排在r[j]前面。如果在排序之后，对象r[i]仍在对象r[j]的前面，则称这个排序方法是**稳定**的，否则称这个排序方法是**不稳定**的。
- 排序——在内存中进行的排序
- 外排序——排序过程还要访问外存(因为待排记录的数量太大，内存容纳不下)

本节学习要点

- 简单排序方法
  - 插入排序
  - 冒泡排序
  - 选择排序
- 都基于对相邻数据的比较
- 复杂度为O（n^2）

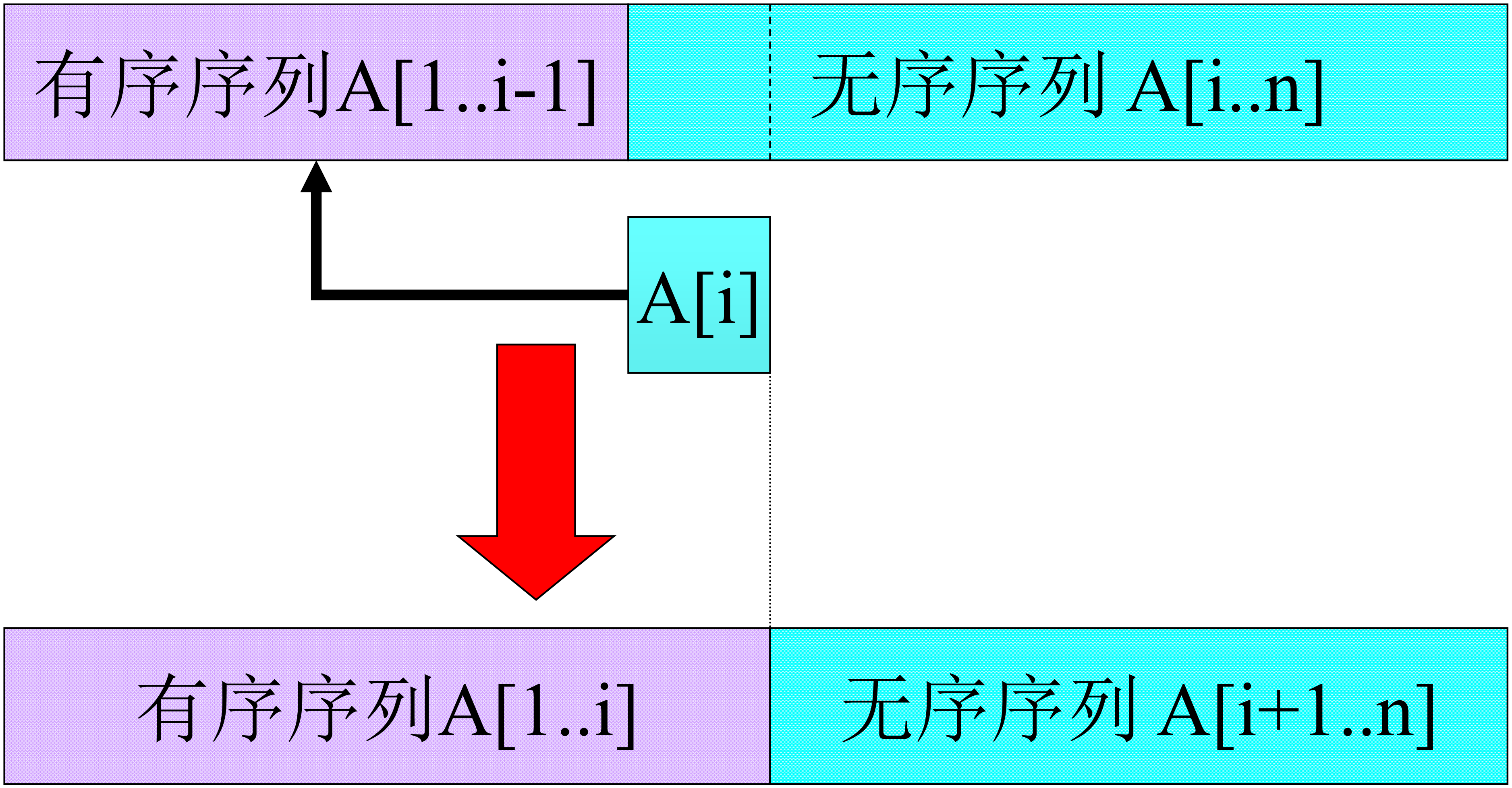
插入排序

上面已排好序

改变元素位置

	i=1	2	3	4	5	6	7
42	20	17	13	13	13	13	13
20	42	20	17	17	14	14	14
17	17	42	20	20	17	17	15
13	13	13	42	28	20	20	17
28	28	28	28	42	28	23	20
14	14	14	14	14	42	28	23
23	23	23	23	23	23	42	28
15	15	15	15	15	15	15	42

一趟直接插入排序的基本思想



实现“一趟插入排序”分三步进行

1．在A[1..i-1]中**查找**A[i]的插入位置，

$A[1..j].key \le A[i].key < A[j+1..i-1].key$；

2．将A[i-1]至A[j+1]中的所有**记录按照从后向前的顺序**依次**后移**一个位置；

3．将A[i] **插入**(复制)到A[j+1]的位置上。

插入排序算法描述

```
template <typename E, typename Comp>
void inssort(E A[], int n) {
  for (int i=1; i<n; i++)//从第2个记录开始插入
    for (int j=i; (j>0)&&(Comp::prior(A[j], A[j-1])); j--)
    swap(A,j,j-1);//交换当前记录与前一记录
}
```

分析：交换每次涉及三个基本操作，效率不高。

加入监视哨的插入排序算法

```
template < typename E, typename Comp >
void inssort(E A[], int n) {//记录存储在A[1]~A[n]
  for (int i=2; i<=n; i++)
```

从后往前

```
   { A[0]=A[i];j=i-1;//设置监视哨A[0]
    while (Comp::prior(A[0], A[j]))
        //把比A[i]大的数据逐一后移
     { A[j+1]=A[j];j--;}
      A[j+1]=A[0];
     }}
```

与前面的方法比较改进点：减少了交换，比较次数不变

直接插入排序时间分析

最好的情况（关键字在记录序列中顺序有序）：

“比较”的次数： “移动”的次数：

$$\sum_{i=2}^{n} 1 = n - 1$$

$$0$$

最坏的情况（关键字在记录序列中逆序有序）：

“比较”的次数： “移动”的次数：

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=2}^{n}(i+1) = \frac{(n+4)(n-1)}{2}$$

本节学习要点

- 简单排序方法
  - 插入排序
  - 冒泡排序
  - 选择排序
- 都基于对相邻数据的比较
- 复杂度为O（n^2）

冒泡排序（起泡排序）的基本原理

- 冒泡排序（起泡排序）是交换排序的一种
- 其基本方法是:
  - 设待排序元素列中元素的个数为n，则从后至前依次将相邻两个记录的排序字段的值进行比较，如果发生逆序（即前一个排序字段的值大于后一个），则将这两个元素交换；这称之为一趟起泡，结果将最小的元素交换到待排序元素序列的第一个位置，其他元素也都向最终排序的方向移动。
  - 每一趟起泡排序把剩余待排序记录中一个排序码最小的记录前移到最后应在的位置，所以叫做起泡排序。
  - 这样最多做n-1趟起泡就能把所有元素排好序。

冒泡排序算法

```
template < typename E, typename Comp >
void bubsort(E A[], int n) {
  for (int i=0; i<n-1; i++)
    for (int j=n-1; j>i; j--)
      if (Comp::prior(A[j], A[j-1]))
        swap(A, j, j-1);
}
```

第一趟把最小的排在最前

冒泡排序（起泡排序）

	i=0	1	2	3	4	5	6
42	13	13	13	13	13	13	13
20	42	14	14	14	14	14	14
17	20	42	15	15	15	15	15
13	17	20	42	17	17	17	17
28	14	17	20	42	20	20	20
14	28	15	17	20	42	23	23
23	15	28	23	23	23	42	28
15	23	23	28	28	28	28	42

改进的冒泡排序算法

```
template < typename E, typename Comp >
void bubsort(E A[], int n) {
  int flag;
  for (int i=0; i<n-1; i++)
    {
    flag=FALSE；//加标志位
     for (int j=n-1; j>i; j--)
      if (Comp::prior(A[j], A[j-1]))
        { swap(A, j, j-1);flag=TRUE;}
     if(flag==FALSE) return;//发现已经全部有序了
}}
```

一趟排序中一次都不交换
则说明已有序

冒泡排序时间分析

最好的情况（关键字在记录序列中顺序有序）：

只需进行一趟起泡

"比较"的次数：

n-1

"移动"的次数：

0

最坏的情况（关键字在记录序列中逆序有序）：

需进行n-1趟起泡

"比较"的次数：

$$\sum_{i=n}^{2}(i-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

"移动"的次数：

$$3\sum_{i=n}^{2}(i-1)=\frac{3n(n-1)}{2}$$

本节学习要点

- 简单排序方法
  - 插入排序
  - 冒泡排序
  - 选择排序
- 都基于对相邻数据的比较
- 复杂度为O（n^2）

直接选择排序

- 【算法思想】

  每一趟从待排序的记录中选出排序字段值最小（最大）的记录，与当前待排序的第一个记录交换位置。选择排序的第i次是“选择”数组中第i小的记录，并将该记录放到数组的第i个位置。直到全部待排序的记录全部排完。

- 稳定性
  - 不稳定

直接选择排序算法

```
template < typename E, typename Comp >
void selsort(E A[], int n) {
  for (int i=0; i<n-1; i++) {
    int lowindex = i; // Remember its index
    for (int j=n-1; j>i; j--) // Find least
      if (Comp::prior(A[j], A[lowindex]))
        lowindex = j; // Put it in place
    swap(A, i, lowindex);
  }
}
```

直接选择排序举例

	i=0	1	2	3	4	5	6
42	13	13	13	13	13	13	13
20	20	14	14	14	14	14	14
17	17	17	15	15	15	15	15
13	42	42	42	17	17	17	17
28	28	28	28	28	20	20	20
14	14	20	20	20	28	23	23
23	23	23	23	23	23	28	28
15	15	15	17	42	42	42	42

直接选择排序时间性能分析

对n个记录进行简单选择排序，所需进行的**关键字间的比较次数**总计为：

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=\frac{n(n-1)}{2}$$

移动记录的次数，最小值为 0, 最大值为3(n-1) 。

时间代价

	Insertion	Bubble	Selection
Comparisons:			
Best Case	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Average Case	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Worst Case	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Swaps			
Best Case	0	0	$\Theta(n)$
Average Case	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$
Worst Case	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$

排序低速原因

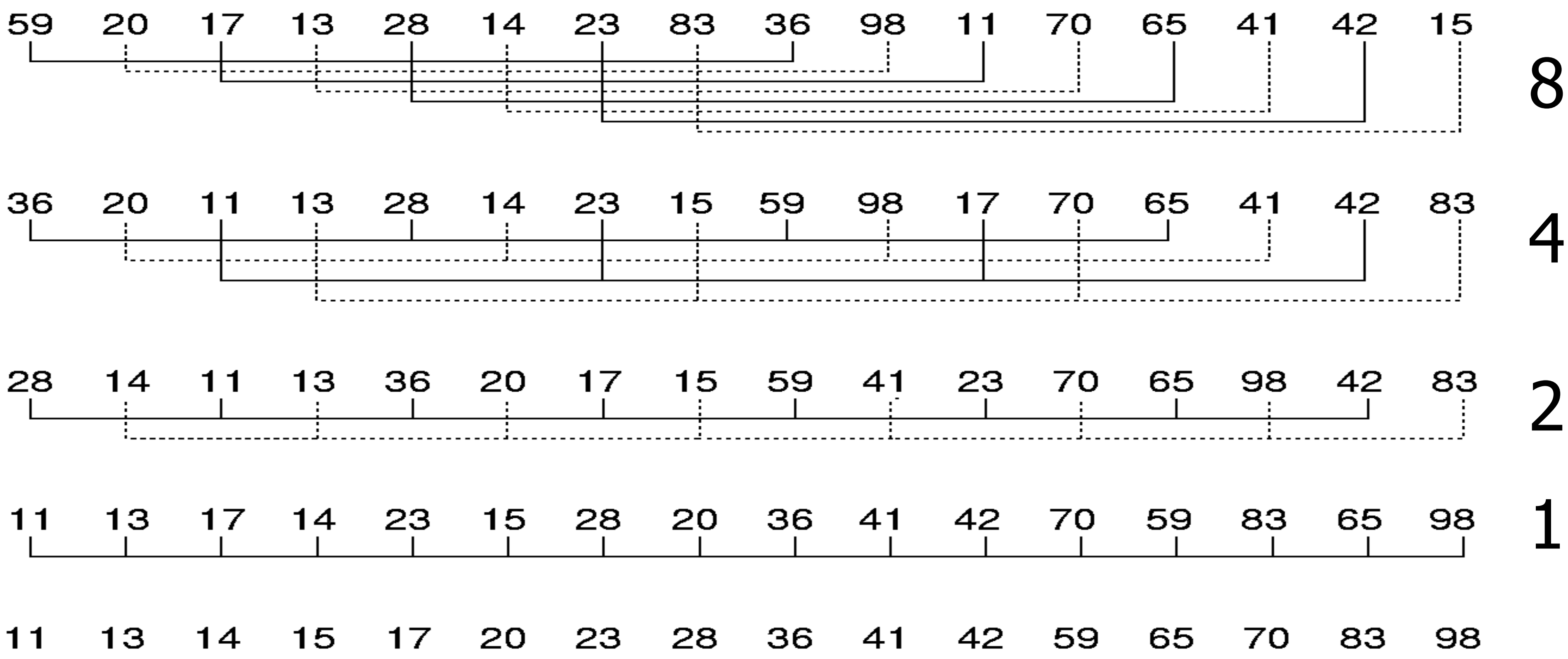
- **关键瓶颈**
  - **只比较相邻的元素；**
  - **因此，比较和移动只能一步步进行（除选择排序外）**
  - **都属于交换排序**

后面讨论的排序算法是在不相邻的记录之间进行比较与交换，如：希尔排序、快速排序等。

Shell 排序

- 又称**缩小增量排序法**
- 与交换排序不同的是，shell排序是在不相邻的记录之间进行比较与交换
- n很小时，或基本有序时排序速度较快
- 基本原理
  - 利用插入排序的最佳时间代价特性，先对所有记录按增量进行分组，组内进行插入排序；
  - 减少增量重复上面步骤直至增量为1时止。

Shell 排序举例


59 20 17 13 28 14 23 83 36 98 11 70 65 41 42 15
8
36 20 11 13 28 14 23 15 59 98 17 70 65 41 42 83
4
28 14 11 13 36 20 17 15 59 41 23 70 65 98 42 83
2
11 13 17 14 23 15 28 20 36 41 42 70 59 83 65 98
1
11 13 14 15 17 20 23 28 36 41 42 59 65 70 83 98

希尔排序

将记录序列分成若干子序列，分别对每个子序列进行**插入排序**。

例如：将 n 个记录分成 d 个子序列：

{ A[1]，A[1+d]，A[1+2d]，…，A[1+kd] }

{ A[2]，A[2+d]，A[2+2d]，…，A[2+kd] }

…

{ A[d]，A[2d]，A[3d]，…，A[kd]，A[(k+1)d] }

其中，d 称为增量，它的值在排序过程中从大到小逐渐缩小，直至最后一趟排序减为 1。

例如：

16	25	12	30	47	11	23	36	9	18	31

11/2=5

第一趟希尔排序，设增量 d=5 分为5组

11	23	12	9	18	16	25	36	30	47	31

第二趟希尔排序，设增量 d=3 可以选2也可以选3

9	18	12	11	23	16	25	31	30	47	36

第三趟希尔排序，设增量 d=1

9	11	12	16	18	23	25	30	31	36	47

shell排序算法

```
template < typename E, typename Comp >
void inssort2(E A[], int n, int incr) {//子序列插入排序
  for (int i=incr; i<n; i+=incr)
    for (int j=i;
         (j>=incr) &&
         (Comp::prior(A[j], A[j-incr])); j-=incr)
      swap(A, j, j-incr);
}
```

shell排序算法

```
template < typename E, typename Comp >
void shellsort(E A[], int n) { // Shellsort
  for (int i=n/2; i>2; i/=2)  // For each incr
    for (int j=0; j<i; j++)   // Sort sublists
      inssort2<E,Comp>(&A[j], n-j, i);
  inssort2<E,Comp>(A, n, 1);
}
```

增量

插入排序

- 不稳定算法，时间代价$O(n^{1.5})$

快速排序

- 目前所有内排序算法中在平均情况下最快的一种，如：qsort函数，体现了“分治法”的思想。

60为枢轴

一趟快速排序

目标： 找一个记录，以它的关键字作为 **"枢轴"**，凡其**关键字小于枢轴**的记录均**移动至该记录之前**，反之，凡**关键字大于枢轴**的记录均**移动至该记录之后**。

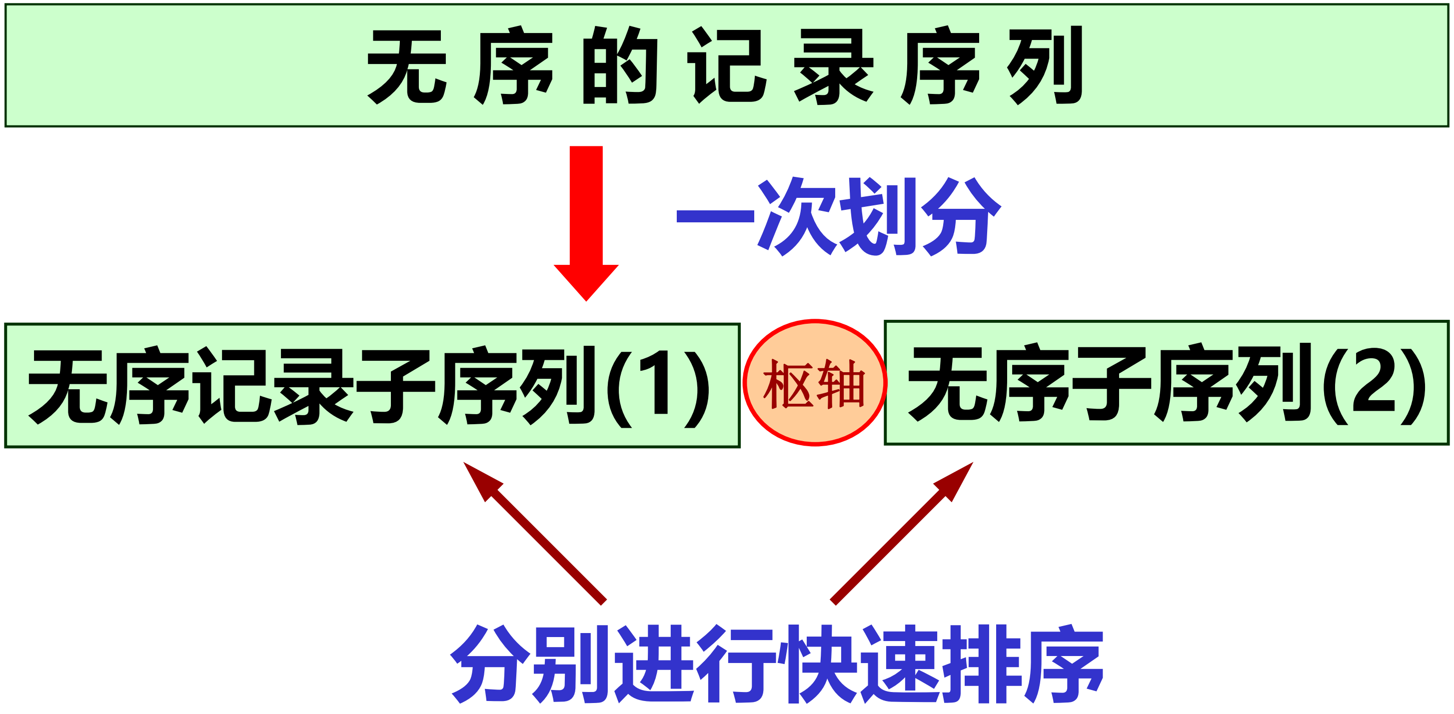
致使**一趟排序**之后，记录的无序序列A[s..t]将**分割成两部分**：A[s..i-1]和A[i+1..t]，且

A[j1].key≤ A[i].key ≤ A[j].key

(s≤j1≤i-1)　**枢轴**　(i+1≤j≤t)。

快速排序

首先对无序的记录序列进行“**一次划分**”，之后**分别**对分割所得两个子序列“**递归**”**进行快速排序。**



快速排序

将枢轴与最后一个交换

原始数列 72 6 57 88 60 42 83 73 48 85

60为
枢轴

Initial	72	6	57	88	85	42	83	73	48	60
l										r
Pass 1	72	6	57	88	85	42	83	73	48	60
	l								r	
Swap 1	48	6	57	88	85	42	83	73	72	60
	l								r	
Pass 2	48	6	57	88	85	42	83	73	72	60
				l		r				
Swap 2	48	6	57	42	85	88	83	73	72	60
				l		r				
Pass 3	48	6	57	42	85	88	83	73	72	60
					l r					

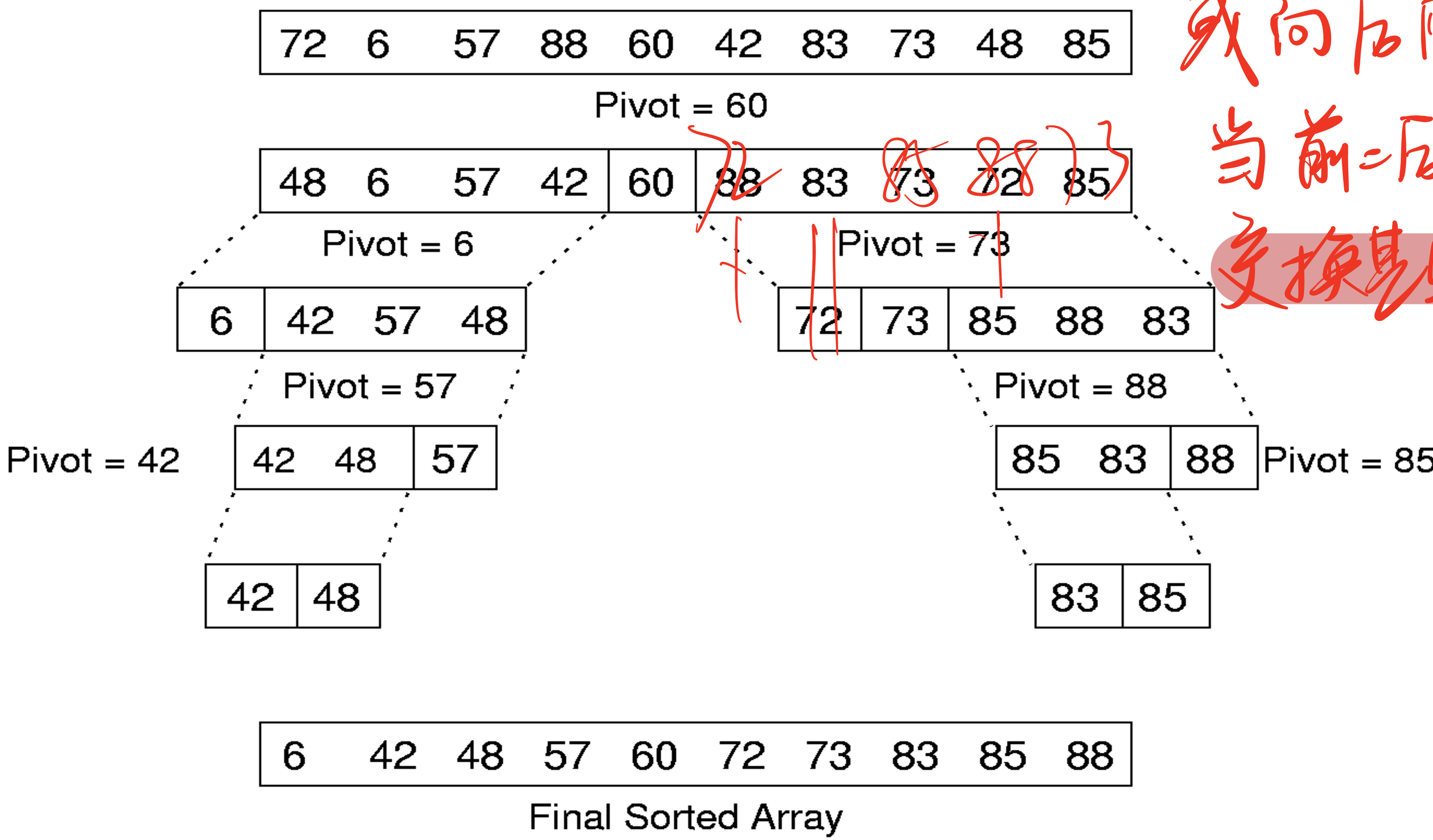
第一趟快排的结果为：

48 6 57 42 60 88 83 73 72 85

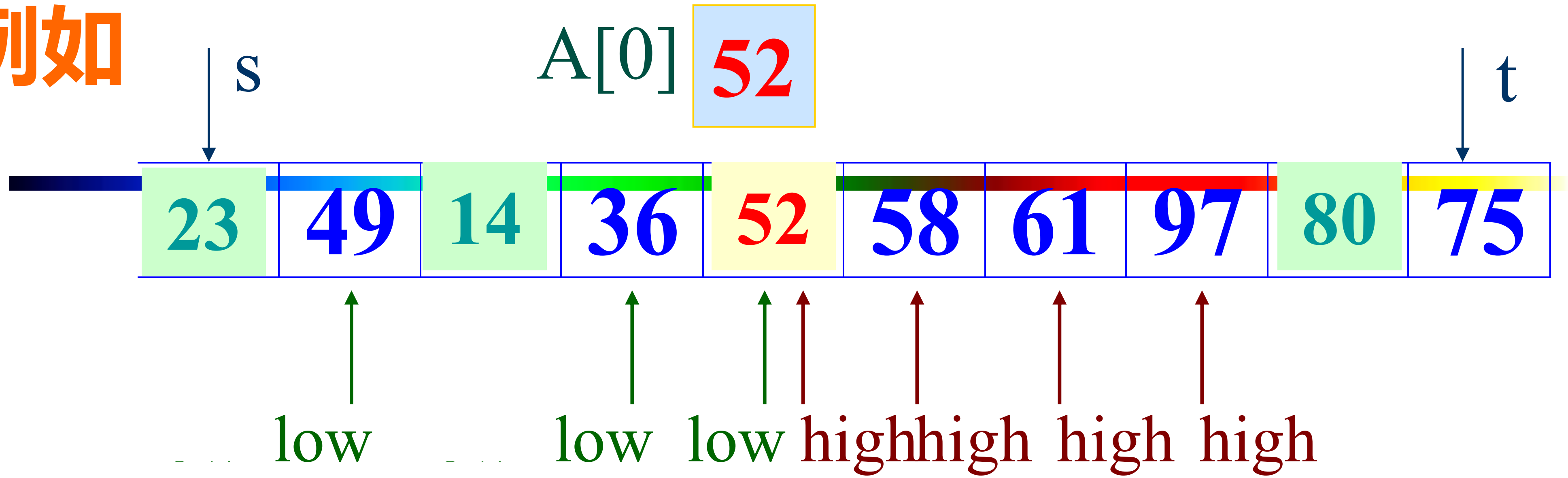
快速排序

首先交换Pivot和最后一个

找到一个之后，另一个不断向前
或向后匹配
当前=后时，
交换其与最后一个



例如



设 A[s]=52 为枢轴

将 A[high].key 和 枢轴的关键字进行比较，要求A[high].key ≥ 枢轴的关键字

将 A[low].key 和 枢轴的关键字进行比较，要求A[low].key ≤ 枢轴的关键字

快速排序算法

```
template < typename E, typename Comp >
void qsort(E A[], int i, int j) {
  if (j <= i) return; // List too small
  int pivotindex = findpivot(A, i, j);
  swap(A, pivotindex, j);  // Put pivot at end
  // k will be first position on right side
  int k = partition<E,Comp>(A, i-1, j, A[j]);
  swap(A, k, j);          // Put pivot in place
  qsort<E,Comp>(A, i, k-1);
  qsort<E,Comp>(A, k+1, j);
}
```

快速排序算法

```
template < typename E>
inline int findpivot(E A[], int i, int j)
  { return (i+j)/2; }//取中间为轴
template < typename E, typename Comp >
inline int partition(E A[], int l, int r,E& pivot) {
  do { // Move the bounds in until they meet
    while (Comp::prior(A[++l], pivot));
    while ((l<r) && Comp::prior(pivot ,A[--r]));
    swap(A, l, r); // Swap out-of-place values
  } while (l < r); // Stop when they cross
  //swap(A, l, r);   // Reverse last swap 在第三版已删除
  return l;       // Return first pos on right
}
```

快速排序的时间分析

假设一次划分所得枢轴位置 *i*=*k*，则对*n* 个记录进行快排所需时间：

$$T(n) = T_{pass}(n) + T(k-1) + T(n-k)$$

其中 $T_{pass}(n)$为对 *n* 个记录进行一次划分所需时间。

若待排序列中记录的关键字是随机分布的，则 *k* 取 1 至 *n* 中任意一值的可能性相同。

由此可得快速排序所需时间的平均值为：

$$T_{avg}(n) = Cn + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[T_{avg}(k-1) + T_{avg}(n-k)\right]$$

设 $T_{avg}(1) \le b$

则可得结果：

$$T_{avg}(n) < (\frac{b}{2} + 2c)(n+1)\ln(n+1)$$

结论：快速排序的时间复杂度为O(nlogn)

快速排序的时间分析

若待排记录的初始状态为按关键字有序时，快速排序将蜕化为起泡排序， 其时间复杂度为$O(n^2)$。

归并排序 基于递归、不基于递归

通常采用的是**2-路归并**排序。基本思想也是基于分治法，即：**将一个序列分成两个等长的子序列，分别对这两个子序列递归地调用归并排序算法，再将两个位置相邻的记录有序子序列**

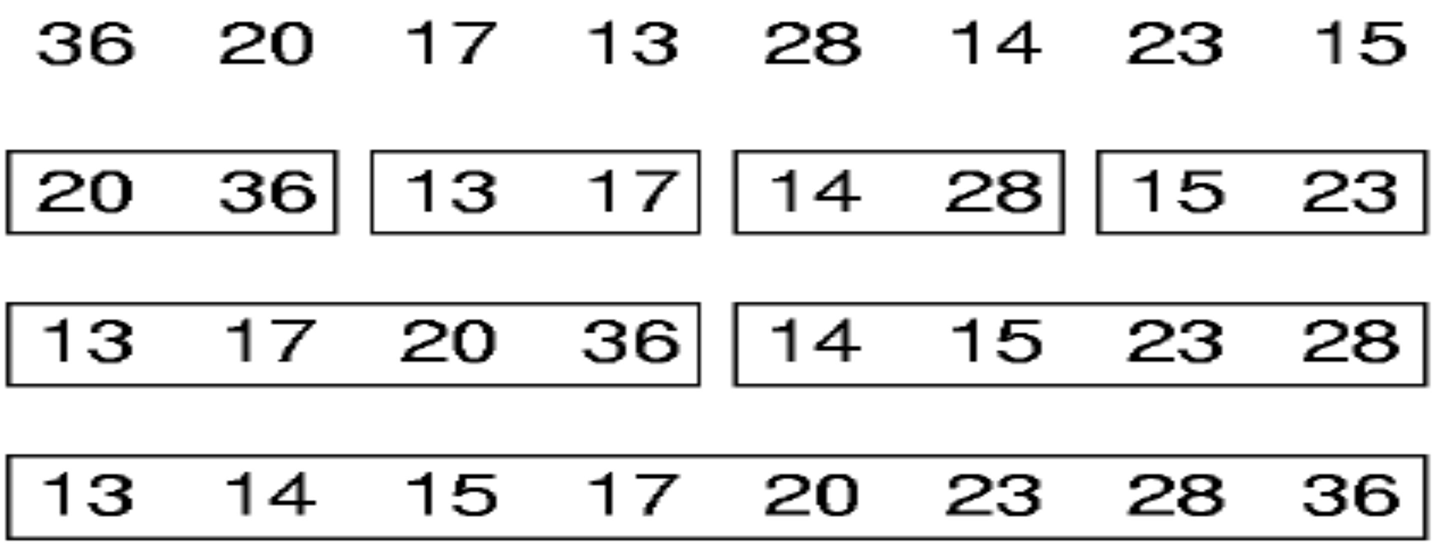
有序子序列 R[$l..m$]	有序子序列 R[m+1..n]

归并为一个记录的有序序列。

有 序 序 列 R[$l..n$]

归并排序

```
List mergesort(List inlist) {
  if (inlist.length() <= 1)return inlist;
  List l1 = half of the items from inlist;
  List l2 = other half of items from inlist;
  return merge(mergesort(l1),mergesort(l2));
}
```



板书递归调用和归并过程

归并排序的算法

如果记录无序序列 A[*left*..*right*] 的两部分

$A[left..\lfloor(left+right)/2\rfloor]$ 和 $A[\lfloor(left+right)/2\rfloor+1..right]$

分别按关键字有序，

则利用上述归并算法很容易将它们归并成整个记录序列是一个有序序列。

由此，应该先分别对这两部分进行2-路归并排序。

例如：

52, 23, 80, 36, 68, 14 (left=1, right=6)

[52, 23, 80] [36, 68, 14]

[52, 23][80] [36, 68][14]

[52] [23] [36][68]

[23, 52] [36, 68]

[23, 52, 80] [14, 36, 68]

[14, 23, 36, 52, 68, 80]

归并排序算法

```
template < typename E, typename Comp >
void mergesort(E A[], E temp[], int left, int right) {
 if (left == right) return;
 int mid = (left+right)/2;
  mergesort<E,Comp>(A, temp, left, mid);
  mergesort<E,Comp>(A, temp, mid+1, right);
  for (int i=left; i<=right; i++) // Copy
    temp[i] = A[i];
  int i1 = left; int i2 = mid + 1;
  for (int curr=left; curr<=right; curr++) {
    if (i1 == mid+1)      // Left exhausted
      A[curr] = temp[i2++];
    else if (i2 > right)  // Right exhausted
      A[curr] = temp[i1++];
    else if (Comp::prior(temp[i1], temp[i2]))
      A[curr] = temp[i1++];
    else A[curr] = temp[i2++];
}}
```

优化归并排序算法（R.Sedgewich提出）

```
template < typename E, typename Comp >
void mergesort(E A[], E temp[],int left, int right) {
 if ((right-left) <= THRESHOLD) {
  inssort<E,Comp>(&A[left],right-left+1);
  return;
 }
 int i, j, k, mid = (left+right)/2;
 if (left == right) return;
 mergesort<E,Comp>(A, temp, left, mid);
 mergesort<E,Comp>(A, temp, mid+1, right);
 for (i=mid; i>=left; i--) temp[i] = A[i];//正序复制前半个表
 for (j=1; j<=right-mid; j++)
  temp[right-j+1] = A[j+mid];//逆序复制后半个表
 for (i=left,j=right,k=left; k<=right; k++)//从前后两半个表相向比较
   来复制较小值
  if (temp[i] < temp[j]) A[k] = temp[i++];
  else A[k] = temp[j--];
```

归并排序算法效率

设需排序元素的数目为n，递归的深度为logn（简单起见，设n是2的幂），第一层递归是对一个长度为n的数组排序，下一层是对两个长度为n/2的子数组排序，…，最后一层对n个长度为1的子数组排序。

时间复杂度：$T(n)=O(n\log_2 n)$

空间复杂度：$S(n)=O(n)$

堆排序

堆排序：

将无序序列建成一个堆，得到关键字最小（或最大）的记录；输出堆顶的最小（大）值后，使剩余的n-1个元素重又建成一个堆，则可得到n个元素的次小值；重复执行，得到一个有序序列，这个过程叫堆排序。

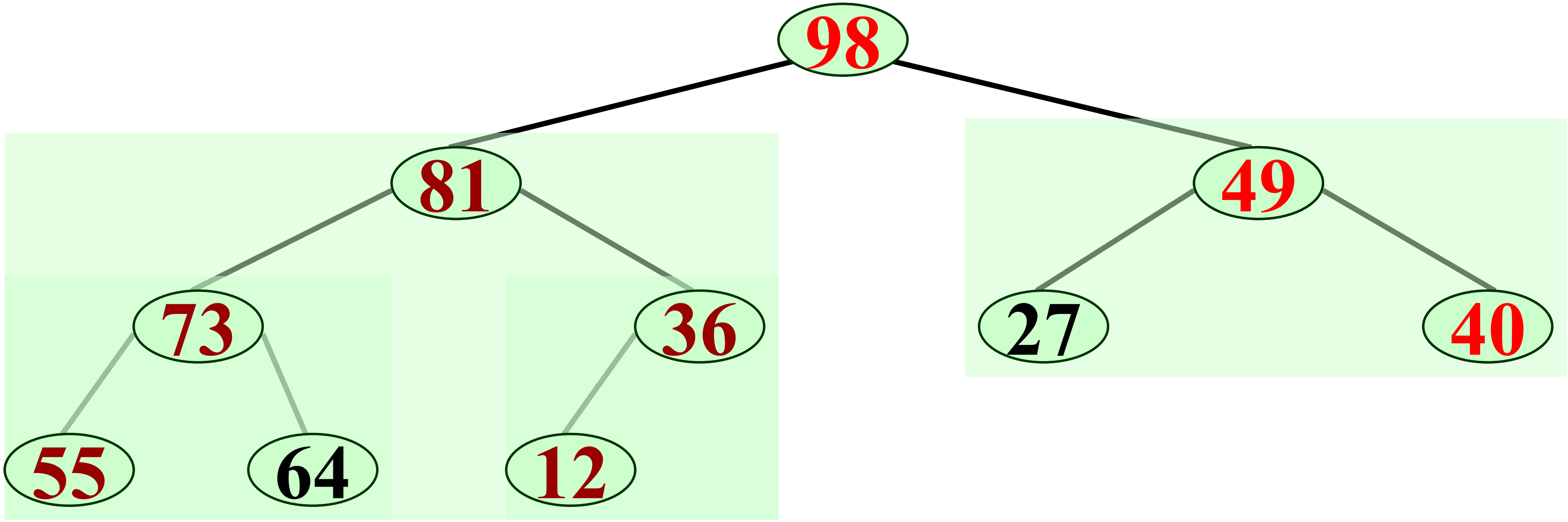
堆排序需解决的两个问题：

如何由一个无序序列建成一个堆?

如何在输出堆顶元素之后，调整剩余元素，使之成为一个新的堆?

建堆是一个从下往上进行“筛选”的过程

例如：排序之前的关键字序列为



现在，左/右子树都已经调整为堆，最后只要调整根结点，使整个二叉树是个“堆”即可。

堆排序算法

第二个问题解决方法——筛选

输出堆顶元素之后，以堆中最后一个元素替代之；然后将根结点值与左、右子树的根结点值进行比较，并与其中小者进行交换；重复上述操作，直至叶子结点，将得到新的堆，称这个从堆顶至叶子的调整过程为“筛选”。

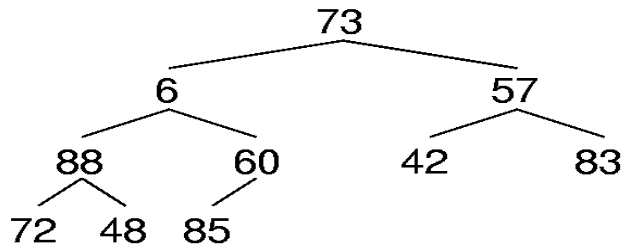
堆排序算法

```
template < typename E, typename Comp >
void heapsort(E A[], int n) { // Heapsort
  E maxval;
  maxheap<E,Comp> H(A, n, n);
  for (int i=0; i<n; i++)        // Now sort
    maxval=H.removefirst();     // Put max at end
}
```

Heapsort Example (1)

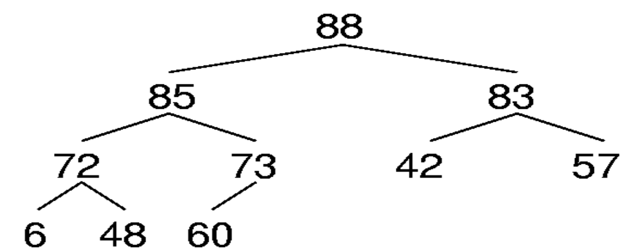
Original Numbers

73	6	57	88	60	42	83	72	48	85



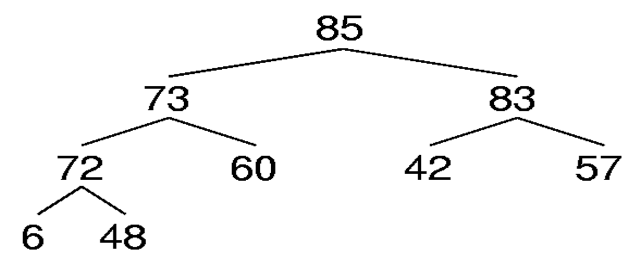
Build Heap

88	85	83	72	73	42	57	6	48	60



Remove 88

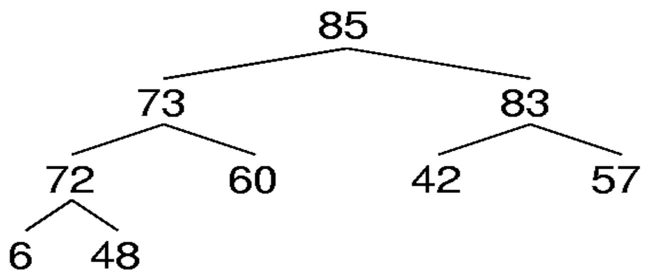
85	73	83	72	60	42	57	6	48	88



Heapsort Example (2)

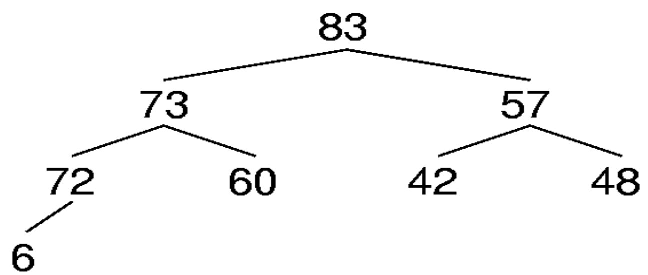
Remove 88

85	73	83	72	60	42	57	6	48	88



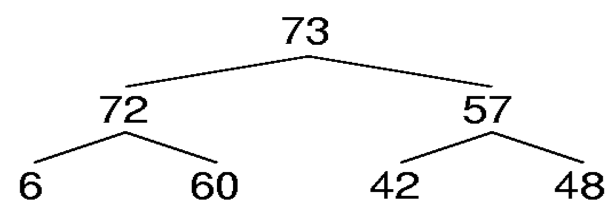
Remove 85

83	73	57	72	60	42	48	6	85	88



Remove 83

73	72	57	6	60	42	48	83	85	88



堆排序的时间复杂度分析

1. 对深度为 k 的堆，“筛选”所需进行的关键字比较的次数至多为2(k-1)；

2. 对 n 个关键字，建成深度为 $h(=\lfloor log_2 n \rfloor+1)$ 的堆，所需进行的关键字比较的次数至多 $4n$；

3. 调整“堆顶” $n-1$ 次，总共进行的关键字比较的次数不超过

$$2\,(\lfloor log_2(n-1)\rfloor+\lfloor log_2(n-2)\rfloor+\ldots+log_2 2) < 2n(\lfloor log_2 n\rfloor)$$

因此，**堆排序的时间复杂度为 $O(n\log n)$。**

分配排序

- 动机：
  - 按关键码分配存储位置，不进行比较；
- 基本思想
  - 根据记录的关键码来确定其排序的最终位置

分配排序基本思想 举例

初始关键字序例： 3 2 0 4 1 5

	0	1	2	3	4	5
读入3:				3		
读入2:			2	3		
读入0:	0		2	3		
读入4:	0		2	3	4	
读入1:	0	1	2	3	4	
读入5:	0	1	2	3	4	5

分配排序

分配排序:

```
for (i=0; i<n; i++)
    B[A[i]] = A[i];
    //根据关键码确定每条记录的位置
```

优点：O（n）

缺点：适用范围窄

扩展:

- 允许关键码重复，让每个盒子成为一个链表的头结点;
- 允许关键码的范围大于n，即比记录多，但还要使得每条记录有个盒子。

分配排序

```
template < typename E, class getKey >
void binsort(E A[], int n) {
  List<E> B[MaxKeyValue];
  E item;
  for (i=0; i<n; i++) B[A[i]].append(getKey::key(A[i]));
  for (i=0; i<MaxKeyValue; i++)
    for (B[i].setStart();
         B[i].getValue(item); B[i].next())
      output(item);
}
```

分配排序的性能分析

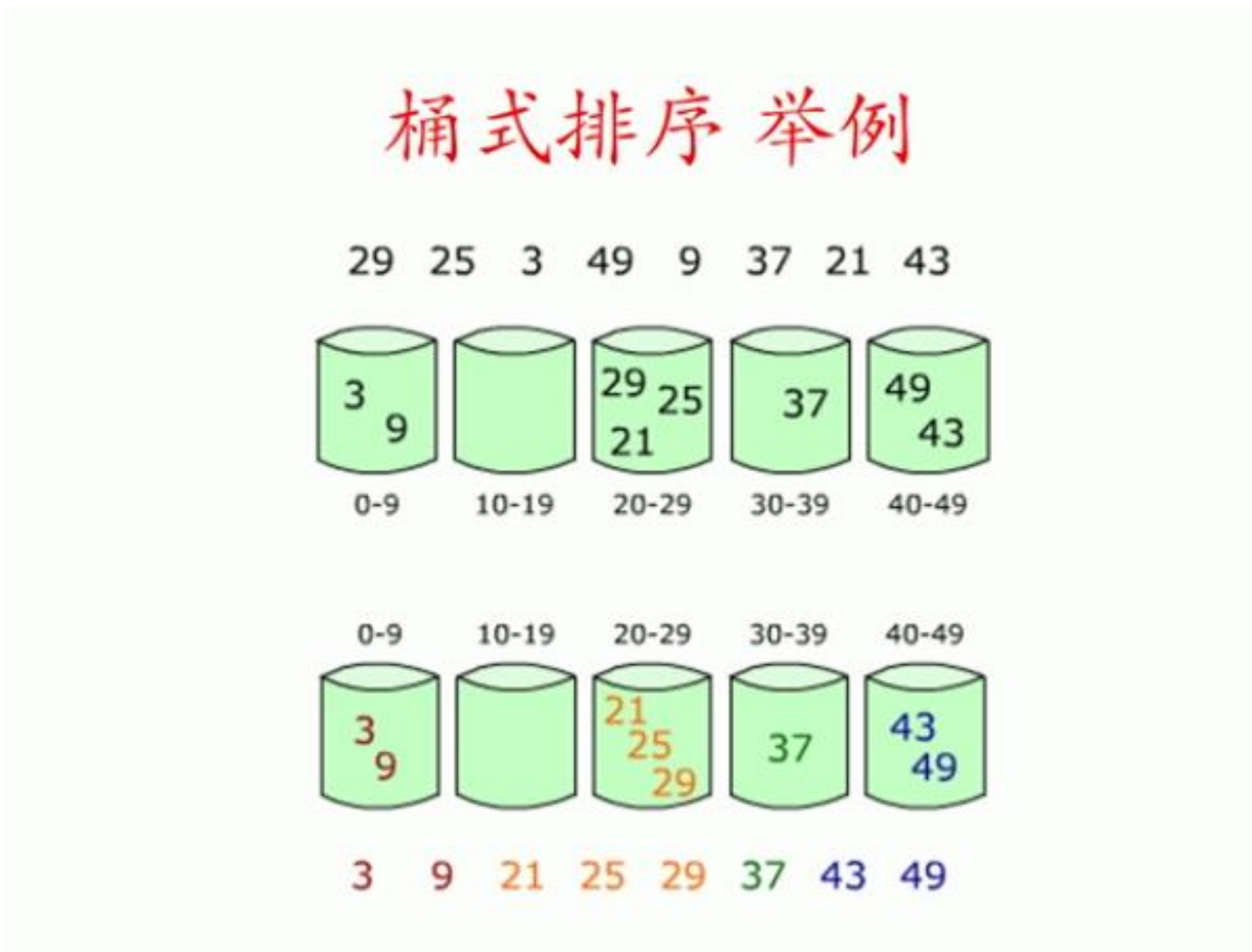
时间代价:

- 分配排序的时间代价初看起来是$\Theta(n)$
- 实际上时间代价为$\Theta(n + \mathrm{MaxKeyValue})$

如果MaxKeyValue很大，那么这个算法的时间代价可能会为$\Theta(n^2)$ 或更差

空间代价:

$O(n + \mathrm{MaxKeyValue})$


桶式排序 举例
29 25 3 49 9 37 21 43
3 9
29 25 21
37
49 43
0-9 10-19 20-29 30-39 40-49
0-9 10-19 20-29 30-39 40-49
3 9
21 25 29
37
43 49
3 9 21 25 29 37 43 49

桶式排序（bucket sort）

（每个桶并非跟一个关键码有关，而是跟一组关键码有关）

分治法：

- 将序列中的元素分配到一组（数量有限的）桶中
- 每个桶再分别排序（可以使用其它排序方法或递归使用桶式排序）
- 最后，依序遍历每个桶，将所有元素有序放回序列

基数排序Radix sort

动机:

分配排序：按关键码划分；不进行关键码比较；而是一种多关键字的排序

基本思想:

将关键码看成有若干个关键字复合而成。

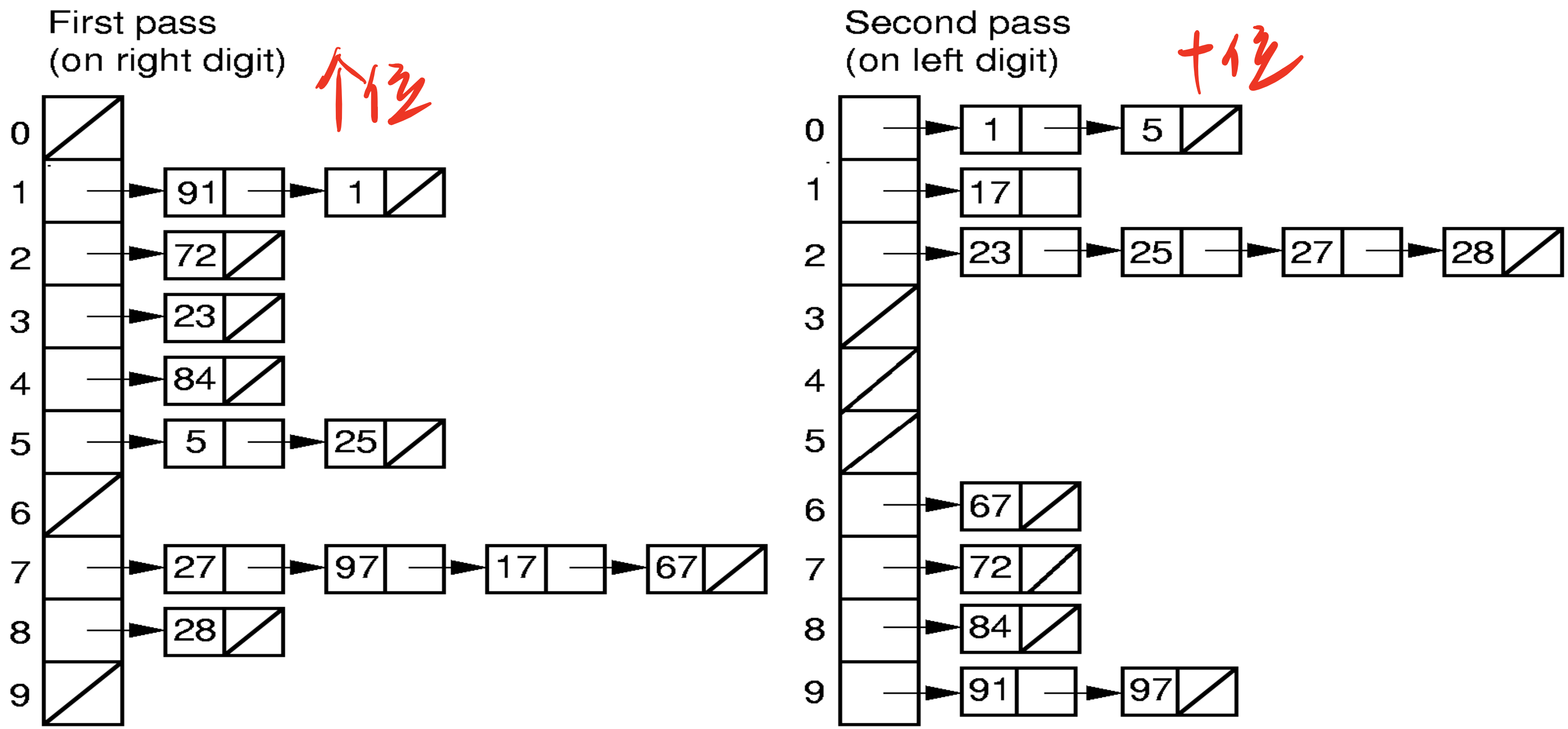
然后对每个关键字进行分配（计数）排序

依次重复

最终得到一个有序序列

基数排序举例

Initial List: 27 91 1 97 17 23 84 28 72 5 67 25



Result of first pass: 91 1 72 23 84 5 25 27 97 17 67 28
Result of second pass: 1 5 17 23 25 27 28 67 72 84 91 97

基数排序的算法过程

将所有待排序数值（正整数）按照基数 r 统一为同样的数位长度，数位较短的数前面补零。然后，从最低位开始，依次进行每趟（计数分配）排序。

定义一个长度为r的辅助数组cnt。记录每个盒子里有多少个元素。初始值为0。

定义一个和原数组A一样大小的数组B。

依次处理每个元素，根据元素的值计算其盒子编号，统计出每个盒子需要存放的记录数。（cnt[j]存储了数位j（第j个盒子）在这一趟排序时分配的记录数）

利用cnt的值，计算该盒子在数组B中的（最后一个）下标位置

从后向前，依次把数组A中的元素，依据该元素在cnt中记录的下标，把元素值存入（分配）数组B的（盒子中）相应位置

将数组B的值依次复制到数组A，进行下一趟排序。

Suppose that the record R_i has r keys.

- K_i^j ::= the j-th key of record R_i
- K_i^0 ::= the most significant key of record R_i
- K_i^{r-1} ::= the least significant key of record R_i
- A list of records $R_0, \ldots, R_{n-1}$ is lexically sorted with respect to the keys $K^0, K^1, \ldots, K^{r-1}$ iff

$$(K_i^0, K_i^1, \cdots, K_i^{r-1}) \le (K_{i+1}^0, K_{i+1}^1, \cdots, K_{i+1}^{r-1}),\ 0 \le i < n-1.$$

That is, $K_i^0 = K_{i+1}^0, \ \ldots, \ K_i^l = K_{i+1}^l, \ K_i^{l+1} < K_{i+1}^{l+1}$ for some $l < r-1$.

〖Example〗 A deck of cards sorted on 2 keys

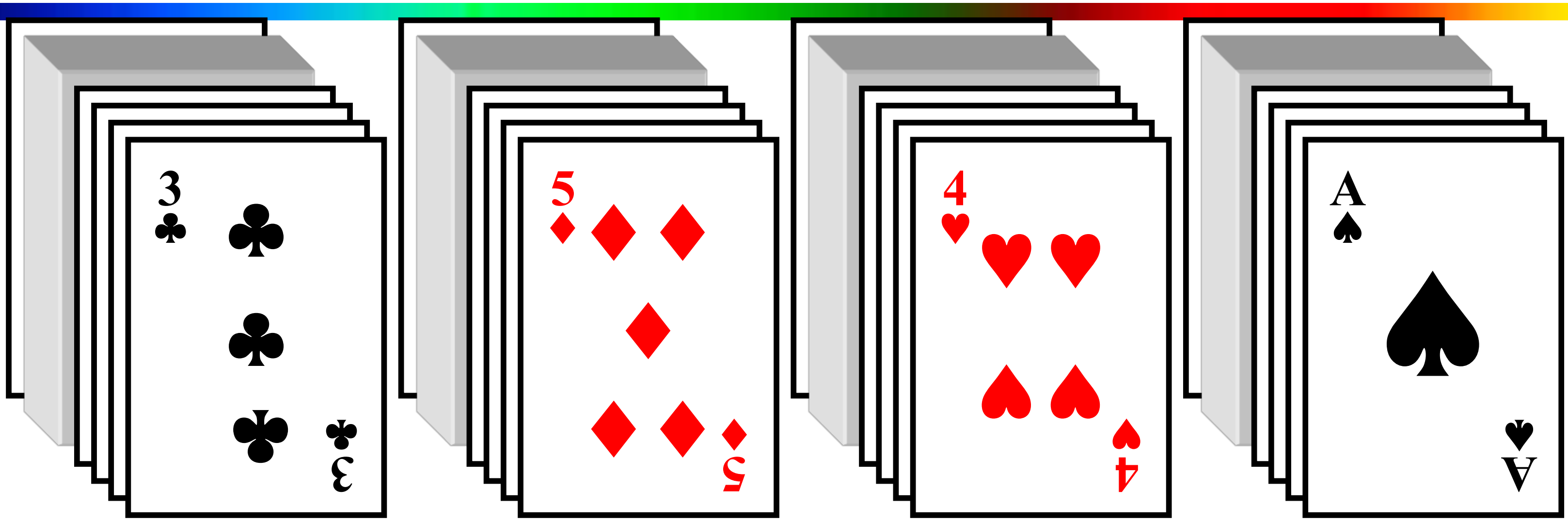
K^0 [Suit] ♣ < ♦ < ♥ < ♠

K^1 [Face value] 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < J < Q < K < A

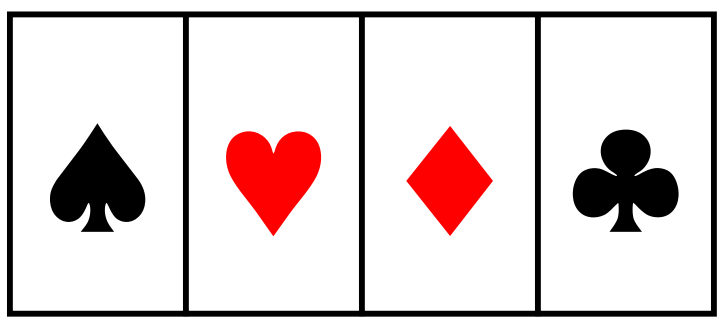
Sorting result : 2♣ ... A♣ 2♦ ... A♦ 2♥ ... A♥ 2♠ ... A♠

☞ MSD (Most Significant Digit) Sort

① **Sort on K^0: for example, create 4 buckets for the suits**

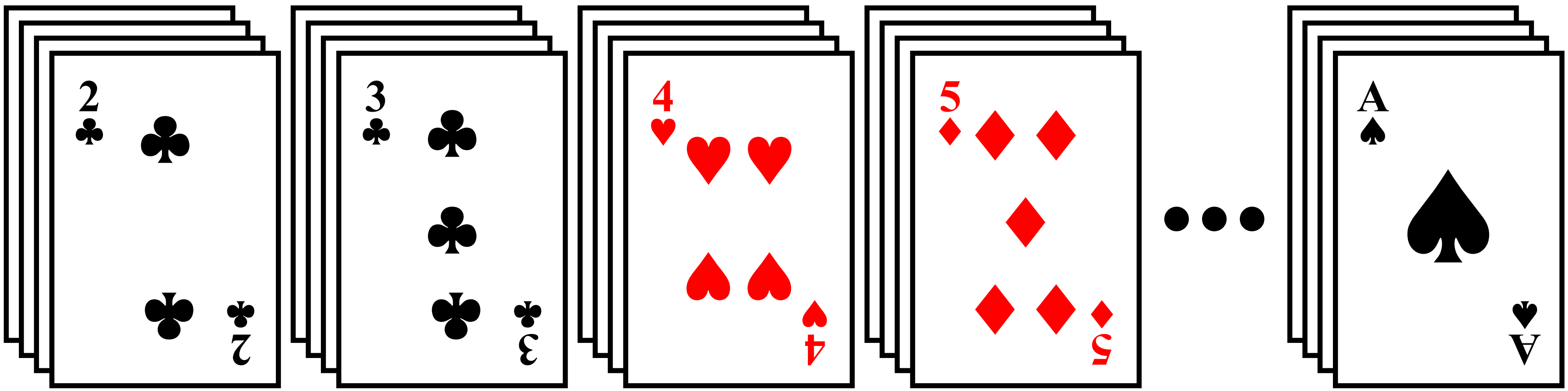


② **Sort each bucket independently (using any sorting technique)**



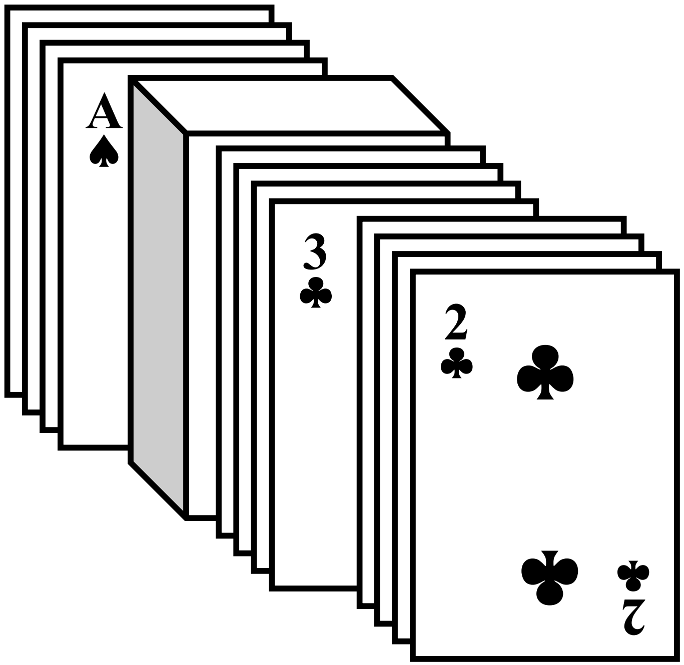
☞ LSD (Least Significant Digit) Sort

① Sort on K^1: for example, create 13 buckets for the face values



② Reform them into a single pile

③ Create 4 buckets and resort



基数排序算法

```
template < typename E, class getKey >
void radix(E A[], E B[], int n, int k, int r, int cnt[]) {
//k是位数（关键字个数），r是盒子数（基数）
  // cnt[i] stores # of records in bin[i]
  int j;          ri
  for (int i=0, rtoi=1; i<k; i++, rtoi*=r) {
    for (j=0; j<r; j++) cnt[j] = 0;//初始化计数值
    // Count # of records for each bin，计算每个盒子的记录数
    for(j=0; j<n; j++) cnt[(getKey ::key(A[j])/rtoi)%r]++;
    // cnt[j] will be last slot of bin j.计算每个盒子最后一个槽的位置
    for (j=1; j<r; j++)
      cnt[j] = cnt[j-1] + cnt[j];
    for (j=n-1; j>=0; j--)//从后向前，将每个记录放入盒子相应位置
      B[--cnt[getKey ::key(A[j])/rtoi)%r]] = A[j];
    for (j=0; j<n; j++) A[j] = B[j];将数组B复制回去
  }}
```

基数排序举例

Initial Input: Array A

27	91	1	97	17	23	84	28	72	5	67	25

First pass values for Count 个位
rtok = 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	1	1	1	2	0	4	1	0

Count array:
Index positions for Array B.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	3	4	5	7	7	11	12	12

End of Pass 1: Array A.

91	1	72	23	84	5	25	27	97	17	67	28

Second pass values for Count.
rtok = 10.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	4	0	0	0	1	1	1	2

Count array:
Index positions for Array B.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	7	7	7	7	8	9	10	12

End of Pass 2: Array A.

1	5	17	23	25	27	28	67	72	84	91	97

基数排序算法效率

代价分析:

对于n个数据的序列，假设基数为r，这个算法需要k趟分配工作。每趟分配的时间为Θ(n+r)，因此总的时间开销为Θ(nk+rk)。因为r是基数，它一般是比较小的。可以把它看成是一个常数。变量k与关键码长度有关，它是以r为基数时关键码可能具有的最大位数。在一些应用中我们可以认为k是有限的，因此也可以把它看成是常数。在这种假设下，基数排序的最佳、平均、最差时间代价都是Θ(n)，这使得基数排序成为我们所讨论过的具有最好渐近复杂性的排序算法。

各种排序方法时间性能

1.平均的时间性能

时间复杂度为 $O(n\log n)$：

快速排序、堆排序和归并排序

时间复杂度为 $O(n^2)$：

直接插入排序、起泡排序和简单选择排序

时间复杂度为 $O(n)$:

基数排序

各种排序方法时间性能

2.当待排记录序列按关键字顺序有序时

直接插入排序和起泡排序能达到**O(n)**的时间复杂度，

快速排序的时间性能**蜕化为O(n^2)**。

3.简单选择排序、堆排序和归并排序的时间性能不随记录序列中关键字的分布而改变。

各种排序方法空间性能

指的是排序过程中所需的辅助空间大小

1.所有的**简单排序方法**(包括：直接插入、起泡和简单选择) **和堆排序**的空间复杂度**为O(1)**；

2.**快速排序为O(log*n*)，**为递归程序执行过程中，栈所需的辅助空间；

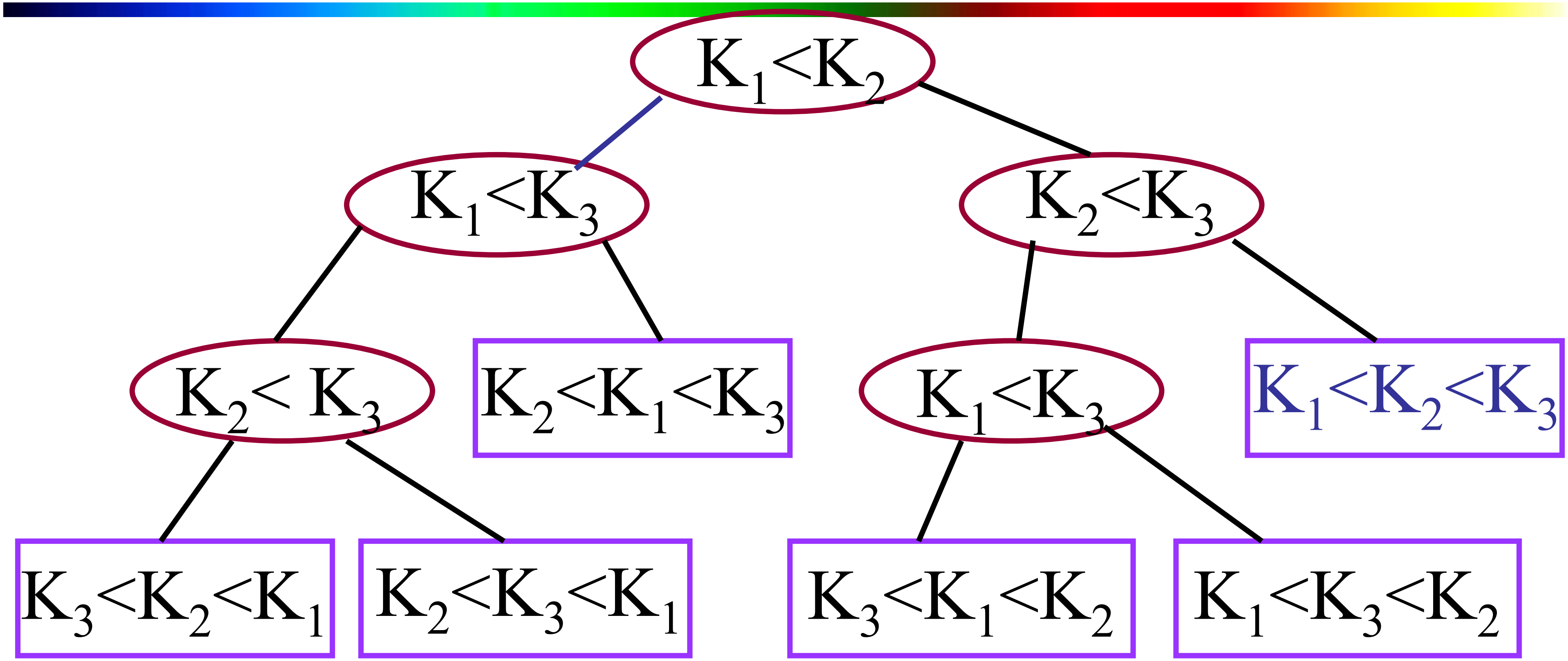
3.**归并排序**所需辅助空间最多，其空间复杂度为**O(*n*);**

排序方法的时间复杂度的下限

本章讨论的各种排序方法，除基数排序外，其它方法都是**基于“比较关键字”进行排序的排序方法。**

可以证明， 这类排序法**可能达到的最快的时间复杂度为O($n$log$n$)。** (基数排序不是基于“比较关键字”的排序方法，所以它不受这个限制。)

例如:对三个关键字进行排序的判定树如下:



1．**树上的每一次“比较”都是必要的**

2．**树上的叶子结点包含所有可能情况。**

一般情况下，对n个关键字进行排序，可能得到的结果有$n!$种，由于含$n!$个叶子结点的二叉树的深度不小于$\lceil \log_2(n!) \rceil+1$，则对 n 个关键字进行排序的比较次数至少是$\lceil \log_2(n!) \rceil \approx n\log_2 n$ (斯蒂林近似公式)。

所以，**基于“比较关键字”进行排序的排序方法，可能达到的最快的时间复杂度为 O($n$log$n$)。**