第10讲 复指数分析法与阻抗

一、激励与响应

二、阻抗

三、基于阻抗模型的电路分析

激励与响应

- 内容

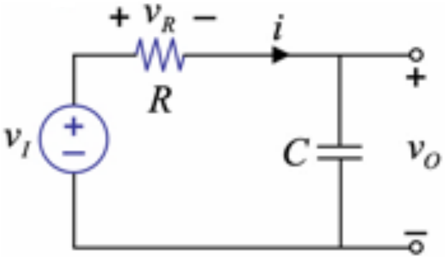
  不同激励下求解响应的方法

- 目标

  解释为什么要在频域研究余弦激励响应。

激励与响应（1/7）

- 问题：如何求响应



$$\frac{v_O - v_I}{R} + C\frac{dv_O}{dt} = 0 \ \rightarrow \ RC\frac{dv_O}{dt} + v_O = v_I$$

$$\frac{dv_O}{dt} + \frac{1}{RC}v_O = \frac{v_I}{RC} \ \rightarrow \ \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

- 解的结构

$$y = \mathrm{K}e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx$$

齐次方程通解y_{ch}　　非齐次方程特解y_{cf}

$$v_O = \mathrm{K}e^{-\frac{t}{RC}} + v_I \rightarrow v_O = v_I(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

暂态　　稳态

- 问题1：能否简单一点，不要解微分方程？
- 问题2：能否不对各种输入都进行研究，真的没完没了？

激励与响应（2/7）

- 解决的办法
  - 办法1：将研究从时域搬到某个变换域，如频域（或S域）

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt = F(j\omega)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = j\omega F(j\omega)$$

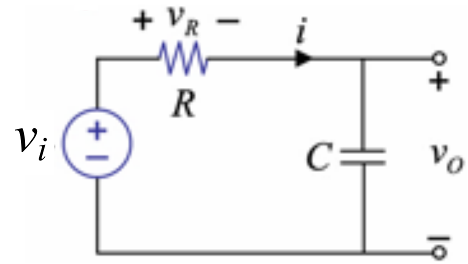
$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = (j\omega)^2\, F(j\omega)$$

在时域做微分运算，相当于在频域做代数运算

激励与响应（3/7）

- 解决的办法
  - 办法2：只研究少数不同输入信号，如余弦输入

设 $v_i = V_i cos\omega t$



解方程 $\dfrac{dv_o}{dt} + \dfrac{1}{RC} v_o = \dfrac{V_i}{RC} cos\omega t$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx$$

齐次方程通解y_{ch}　　非齐次方程特解y_{cf}

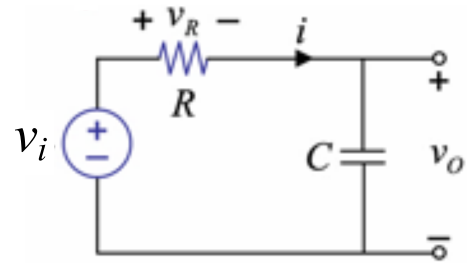
通解y_{ch}与输入无关，特解y_{cf}为：

$$v_{cf} = e^{-\int \frac{1}{RC}dt} \int \frac{V_i \cos \omega t}{RC} e^{\int \frac{1}{RC}dt} dt = \frac{V_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \boxed{\int \cos \omega t \, e^{\frac{t}{RC}} dt}$$

激励与响应（4/7）

$$\frac{V_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int \cos\omega t \, e^{\frac{t}{RC}} dt$$

- 解决的办法
  - 改进办法2：将激励设为虚拟的复指数信号



设 $\tilde{v}_i = V_i e^{j\omega t}$

解方程 $\dfrac{dv_o}{dt} + \dfrac{1}{RC} v_o = \dfrac{V_i}{RC} e^{j\omega t}$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)\, e^{\int P(x)dx} dx$$

齐次方程通解y_{ch}　　非齐次方程特解y_{cf}

通解y_{ch}与输入无关，特解y_{cf}为：

$$\widetilde{v_{cf}} = e^{-\int \frac{1}{RC} dt} \int \frac{V_i e^{j\omega t}}{RC} e^{\int \frac{1}{RC} dt} dt = \frac{V_i}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \int e^{\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right)t} dt$$

$$= \frac{1}{1 + j\omega RC} V_i e^{j\omega t}$$

激励与响应（5/7）

- 虚拟激励及响应与余弦激励及响应（正弦）的关系

则 $e^{j\omega t} = cos\omega t + jsin\omega t$

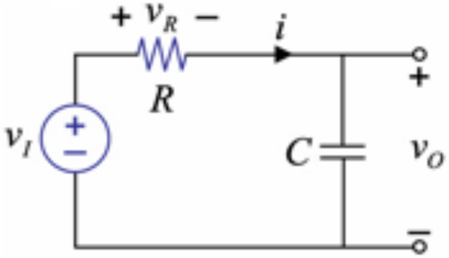
即：余弦输入为复指数输入的实部

余弦激励稳态响应是复指数响应的实部（叠加原理）

$$v_{cf} = \mathrm{Re}\left[\frac{V_i}{1 + j\omega RC} e^{j\omega t}\right]$$

激励与响应（6/7）

- 问题：如何求动态电路的响应



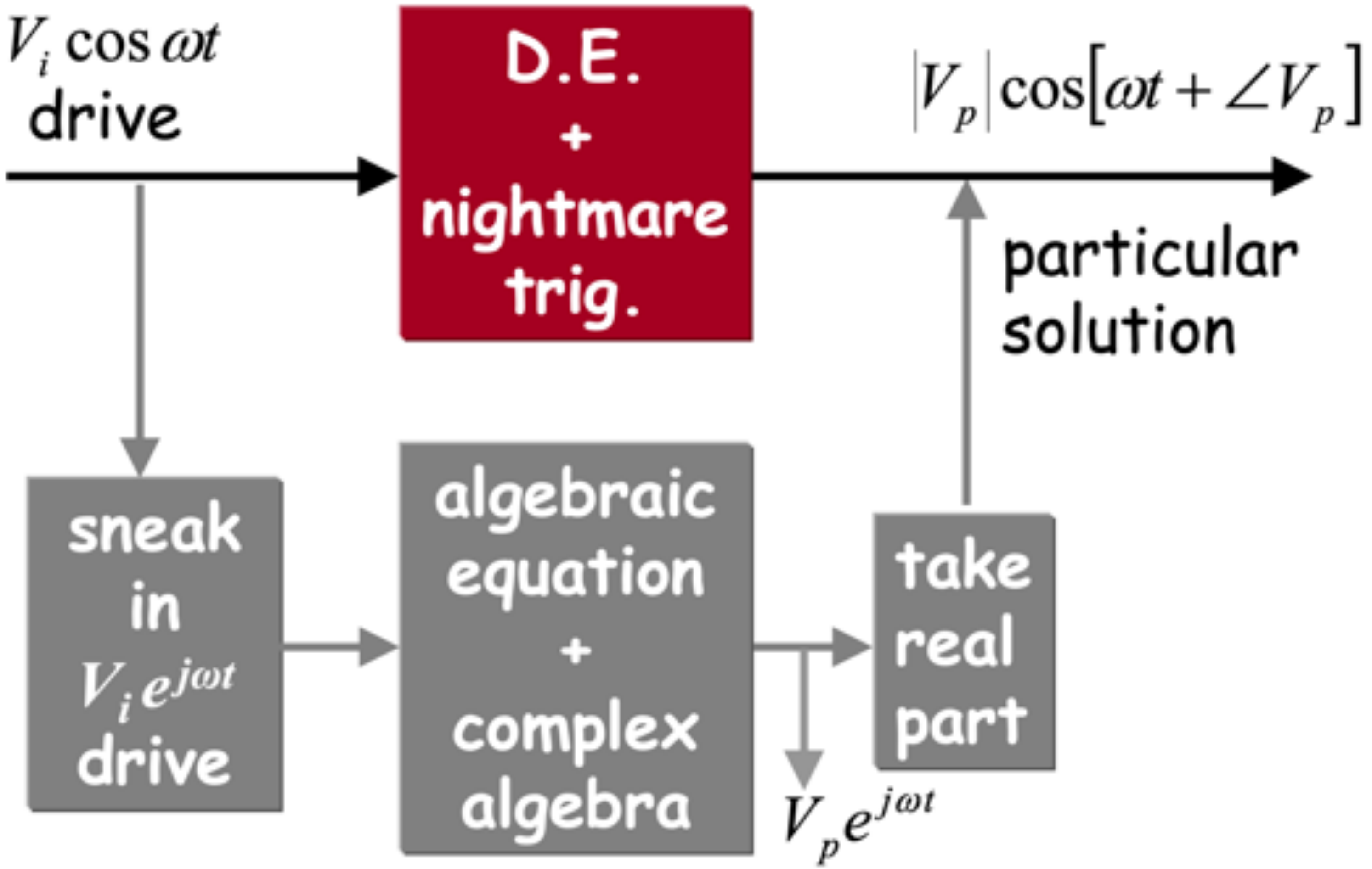
$$RC\frac{dv_o}{dt}+v_o=v_I$$

解微分方程

$$v_{\mathrm{O}}=v_{\mathrm{I}}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

- 问题1：能否简单一点，不要解微分方程？
- 问题2：能否不对各种输入都进行研究，真的没完没了？
- 办法1：将研究从时域搬到某个变换域，如频域
- 办法2：只研究少数不同输入信号，如余弦输入
- 改进2：将激励设定为虚拟的 $e^{j\omega t}=cos\omega t+jsin\omega t$

激励与响应（7/7）



the sneaky path!

阻抗

- 内 容

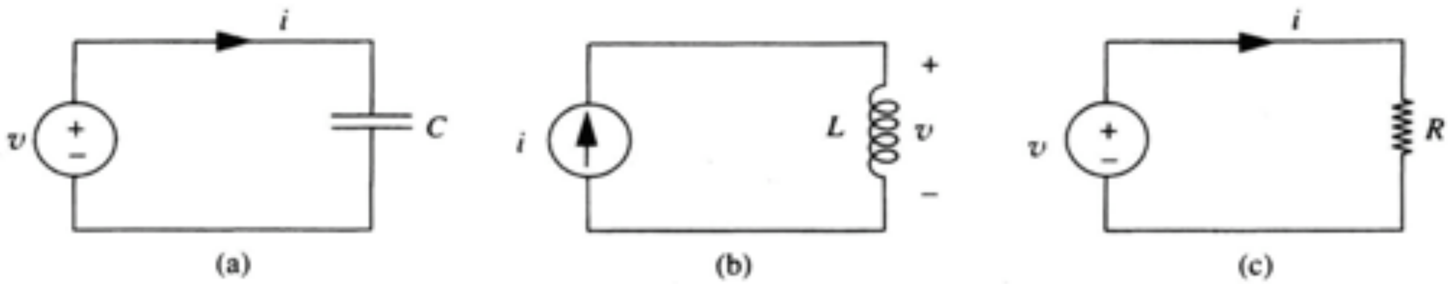
  电阻、 电容、 电感的阻抗

- 目 标

  解释电阻、 电容、 电感的阻抗特性。

阻抗（1/2）

- 电阻、电容、电感的阻抗



对于图(a)有

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

设：$v = Ve^{j\omega t}$

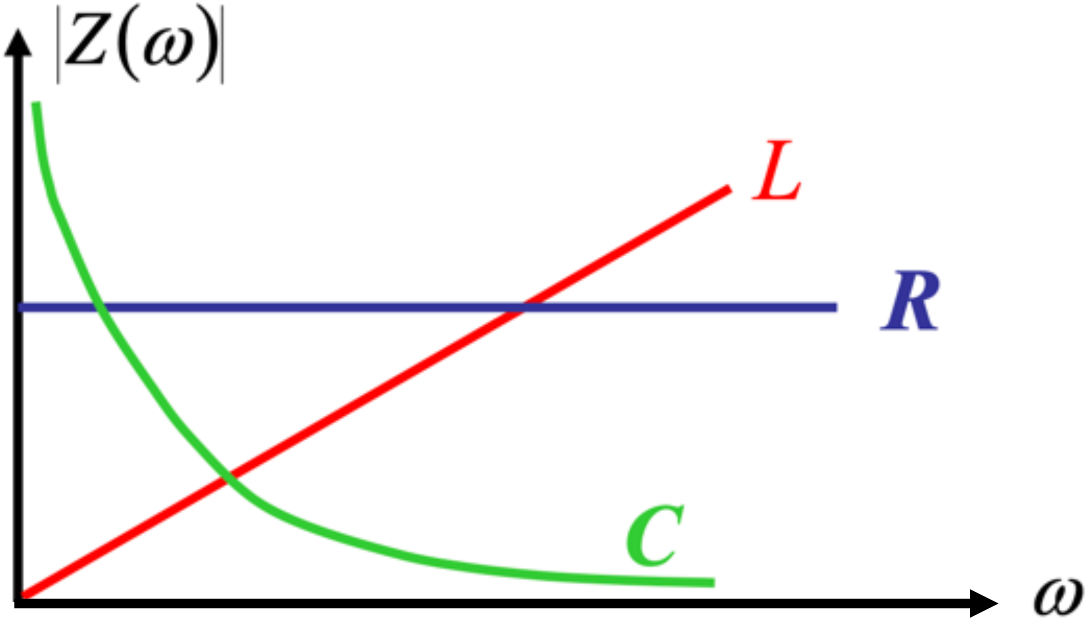
则：$i = C\frac{d(Ve^{j\omega t})}{dt} = j\omega CVe^{j\omega t} = Ie^{j\omega t} \rightarrow Z_C = \frac{v}{i} = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$

同理，对于图(b)和图(c)分别有：

$$Z_L = \frac{V}{I} = j\omega L \text{和} Z_R = \frac{V}{I} = R$$

阻抗（2/2）

- （广义）欧姆定律：电阻、电容、电感上电压的复幅值等于电流的复幅值和阻抗的乘积（关联变量约定）。
- 阻抗幅值曲线
  - 电阻 $Z_R = R$
  - 电容 $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$
  - 电感 $Z_L = j\omega L$



- KVL、KCL、戴维南定理、节点法、回路法在复数域仍然成立

基于阻抗模型的电路分析

- 内容

  用阻抗模型分析电路

- 目标

  基于阻抗模型，用各种方法分析电路。

基于阻抗模型的电路分析（1/7）

$$RC\frac{dv_o}{dt}+v_o=V_ie^{j\omega t}$$

- 回顾解决的办法
  - 改进办法2：将激励设为虚拟的复指数$V_ie^{j\omega t}$

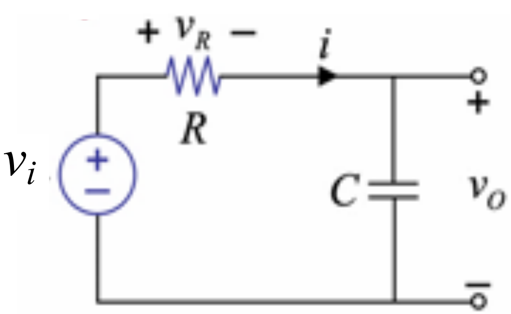
$$\widetilde{v_{cf}}=e^{-\int\frac{1}{RC}dt}\int\frac{V_ie^{j\omega t}}{RC}e^{\int\frac{1}{RC}dt}dt=\frac{V_i}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\int e^{\left(j\omega+\frac{1}{RC}\right)t}dt$$

$$=\frac{1}{1+j\omega RC}V_ie^{j\omega t}=\frac{1/j\omega C}{R+1/j\omega C}V_ie^{j\omega t}$$

电容上电压的复幅值

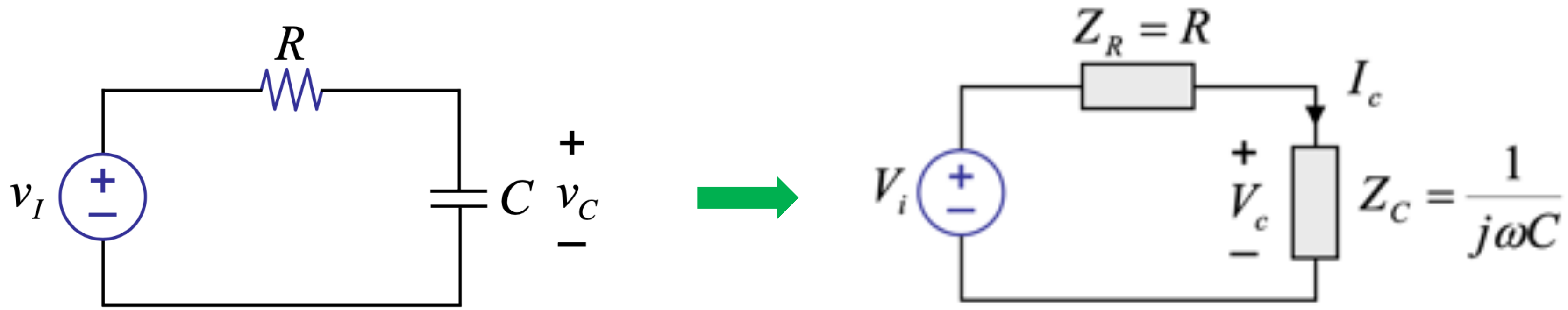
$$\widetilde{v_{cf}}=\frac{1/j\omega C}{R+1/j\omega C}V_ie^{j\omega t}$$

分压公式



基于阻抗模型的电路分析（2/7）

- 基于阻抗模型，电路求解过程变为“代数处理”
  - 电阻与电容的串联



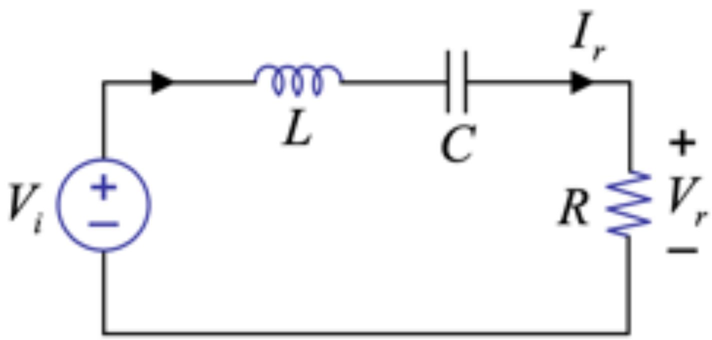
$$V_C = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} V_i = \frac{1/_{j\omega C}}{1/_{j\omega C} + R} V_i = \frac{1}{1 + j\omega RC} V_i$$

  - 频率ω很低时，$V_C \approx Vi$，电容近似开路
  - 频率ω很高时，$V_C \approx 0$，电容近似短路

$$v_C(t) = Re\left[V_C e^{j\omega t}\right] = \frac{V_i}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \tan^{-1}(-\omega RC))$$

基于阻抗模型的电路分析（3/7）

- 基于阻抗模型，电路求解变为简单的“代数处理”
  - 电阻、电容、电感的串联



$$V_r = \frac{Z_R}{Z_L + Z_C + Z_R} V_i = \frac{R}{j\omega L + {}^1\!/_{j\omega C} + R} V_i$$

$$= \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} V_i$$

- 求正弦稳态响应：求复指数激励响应的实部，即：

$$v_r(t) = Re\left[V_r e^{j\omega t}\right] = \frac{\omega RCV_i}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\frac{\omega RC}{1-\omega^2 LC}))$$

基于阻抗模型的电路分析（4/7）

- KVL、KCL、戴维南定理、节点法、回路法仍成立
  - KVL、KCL定律

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$$

$$K_1 cos(\omega t + \phi_1) + K_2 cos(\omega t + \phi_2) + \cdots + K_n cos(\omega t + \phi_n) = 0$$

$$Re\left[K_1 e^{j\phi_1} e^{j\omega t}\right] + Re\left[K_2 e^{j\phi_2} e^{j\omega t}\right] + \cdots + Re[K_n e^{j\phi_n} e^{j\omega t}] = 0$$

$$Re[K_1 e^{j\phi_1} e^{j\omega t} + K_2 e^{j\phi_2} e^{j\omega t} + \cdots + K_n e^{j\phi_n} e^{j\omega t}] = 0$$

$$Re[(K_1 e^{j\phi_1} + K_2 e^{j\phi_2} + \cdots + K_n e^{j\phi_n}) e^{j\omega t}] = 0$$

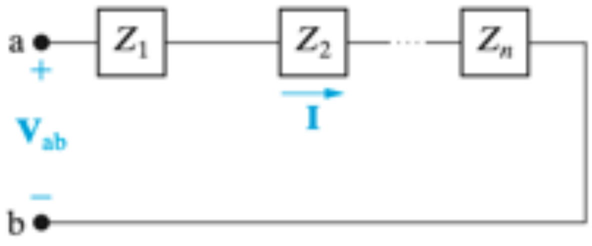
$$Re[(\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \cdots + \boldsymbol{V}_n) e^{j\omega t}] = 0$$

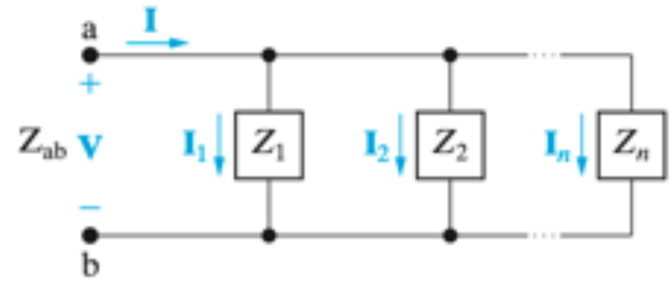
$$\boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \cdots + \boldsymbol{V}_n = 0$$

同理有： $\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 + \cdots + \boldsymbol{I}_n = 0$

基于阻抗模型的电路分析（5/7）

- 阻抗的串联与并联



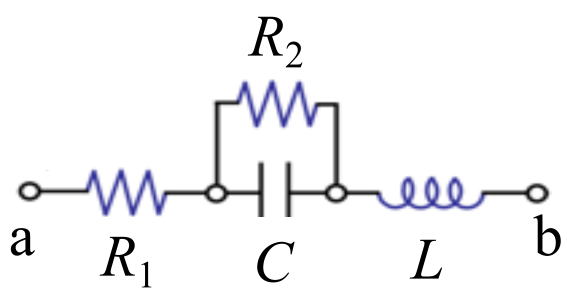


$$\boldsymbol{V}_{ab} = Z_1\boldsymbol{I} + Z_2\boldsymbol{I} + \cdots + Z_n\boldsymbol{I}$$
$$= (Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)\boldsymbol{I}$$

$$\frac{\boldsymbol{V}}{Z_{ab}} = \frac{\boldsymbol{V}}{Z_1} + \frac{\boldsymbol{V}}{Z_2} + \cdots + \frac{\boldsymbol{V}}{Z_n}$$

$$Z_{ab} = \frac{\boldsymbol{V}_{ab}}{\boldsymbol{I}} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

$$\frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$

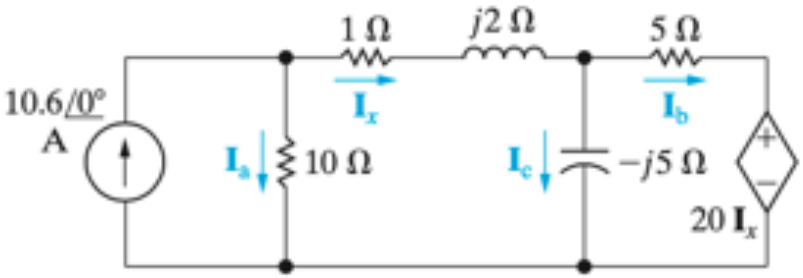


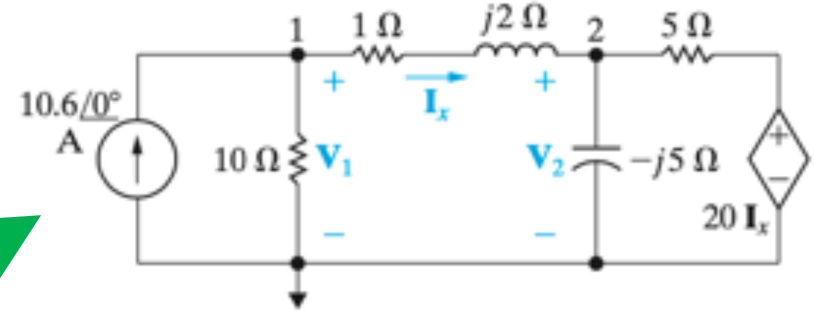
$$Z_{ab} = R_1 + Z_C \| R_2 + Z_L$$
$$= R_1 + \frac{Z_C R_2}{Z_C + R_2} + Z_L$$

基于阻抗模型的电路分析（6/7）

- 节点法

例11.1 求下电路中I_a、I_b、I_c。





$$\begin{cases} -10.6\angle 0^{\circ} + \dfrac{V_1}{10} + \dfrac{V_1 - V_2}{1+j2} = 0 \\ \dfrac{V_2 - V_1}{1+j2} + \dfrac{V_2}{-j5} + \dfrac{V_2 - 20I_x}{5} = 0 \\ I_x = \dfrac{V_1 - V_2}{1+j2} \end{cases}$$

$$V_1 = 68.4 - j16.8, \quad V_2 = 68 - j26$$

$$I_x = \frac{V_1 - V_2}{1+j2} = 3.76 + j1.68$$

$$I_a = {V_1}/{10} = 6.84 - j1.68$$

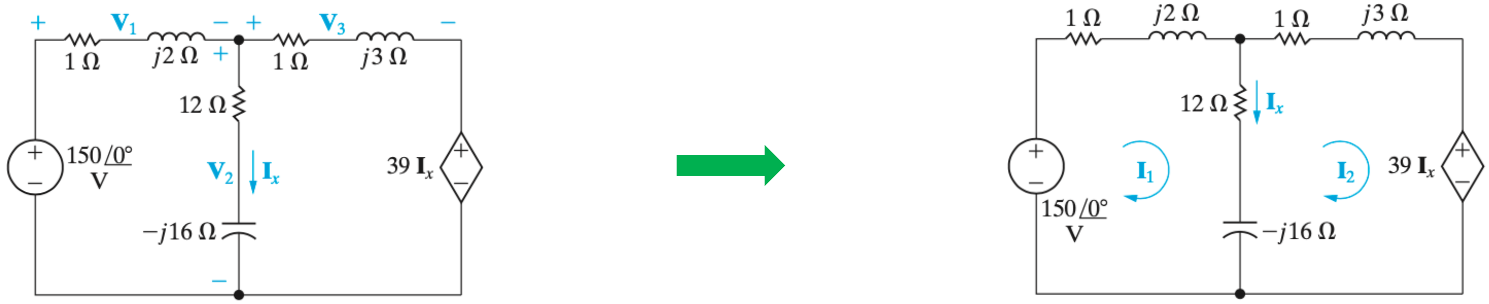
$$I_b = \frac{V_2 - 20I_x}{5} = -1.44 - j11.92$$

$$I_c = \frac{V_2}{-j5} = 5.2 + j13.6$$

基于阻抗模型的电路分析（7/7）

- 回路法

例11.2 求下电路中V_1、V_2、V_3。



$$\begin{cases}(1+j2)\boldsymbol{I}_1+(12-j16)(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{I}_2)=150\angle 0^\circ \\ (12-j16)(\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{I}_1)+(1+j3)\boldsymbol{I}_2+39\boldsymbol{I}_x=0 \\ \boldsymbol{I}_x=\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{I}_2\end{cases}$$

$\boldsymbol{I}_1=-26-j52$ $\qquad$ $\boldsymbol{V}_1=(1+j2)\boldsymbol{I}_1=78-j104$

$\boldsymbol{I}_2=-24-j58$ $\qquad$ $\boldsymbol{V}_1=(12-j16)\boldsymbol{I}_x=72+j104$

$\boldsymbol{I}_x=2-j6$ $\qquad$ $\boldsymbol{V}_1=(1+j3)\boldsymbol{I}_2=150-j130$

小结

- 激励与响应
  - 时域分析要解微分方程，通解-暂态响应，特解-稳态响应
  - 只研究少数不同输入信号，如余弦输入或虚拟的复指数信号
  - 频域分析只需做代数运算，取实部可得时域结果
- 阻抗模型
  - 电阻阻抗为常数、电容阻抗与频率和电容成反比，电感阻抗与频率和电感成正比
  - 使用阻抗模型，电路拓扑结构不变
- 基于阻抗模型的电路分析
  - 基于阻抗模型，基尔霍夫电压定律、基尔霍夫电流定律、戴维南定理、节点法、回路法依然成立