第四节 高阶系统的时域分析

- 以二阶以上微分方程描述的控制系统称为高阶系统。
- 在控制工程中，大量的控制系统都是高阶系统，确定其瞬态性能指标是比较复杂的工作。
- 对于存在闭环主导极点的高阶系统，工程上常将它们简化为一阶或二阶系统，从而得到高阶系统瞬态性能指标的估算公式。
- 对于不能简化为低阶系统的高阶系统，可采用数值计算的方法进行仿真，得出系统的瞬态性能指标。

一、典型三阶系统的瞬态响应

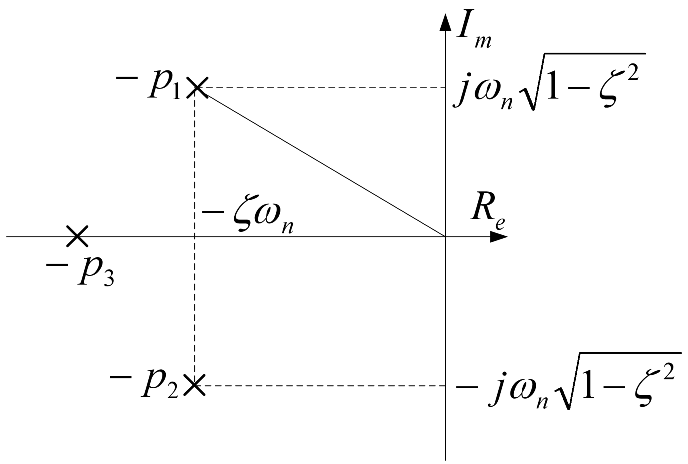
传递函数：$\Phi(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{(Ts+1)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})}$

当 $0<\zeta<1$ 时，极点分布如下：

$$-p_1=-\zeta\omega_n+j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$-p_2=-\zeta\omega_n-j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$-p_3=-\frac{1}{T}$$



相当于在典型二阶系统的基础上增加了一个惯性环节，或增加了一个实极点。

三阶系统的单位阶跃响应:

$$Y(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}p_3}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(s+p_3)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1 s+A_2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}+\frac{A_3}{s+p_3}$$

式中: $A_0=[sY(s)]|_{s=0}=1$

由 $Y(s)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})|_{s=-\zeta\omega\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=(A_1 s+A_2)|_{s=-\zeta\omega\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

可得: $A_1=\dfrac{-\zeta^2\beta(\beta-2)}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}$

$$A_2=\frac{-\zeta\beta[2\zeta^2(\beta-2)+1]\omega_n}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}$$

$\beta=\dfrac{p_3}{\zeta\omega_n}$ 表示实极点和共轭复极点的相对位置。

同理:$A_3=[(s+p_3)Y(s)]|_{s=-p_3}=\dfrac{-1}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}$

三阶系统的单位阶跃响应:

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}\{\zeta^2\beta(\beta-2)\cos\omega_d t+\frac{\zeta\beta[\zeta^2(\beta-2)+1]}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\}$$

$$-\frac{e^{-p_3 t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1},\quad t\geq 0$$

三阶系统单位阶跃响应的紧凑形式如下:

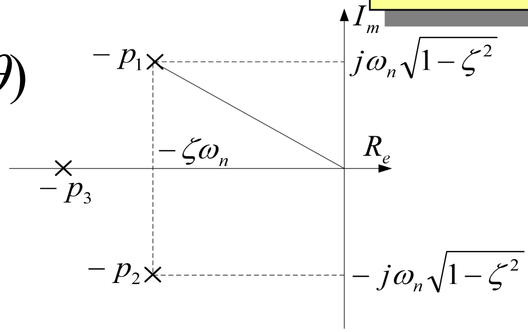
$$y(t)=1-\frac{\zeta\beta e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}}\sin(\omega_d t+\theta)-\frac{e^{-p_3 t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1},t\geq 0$$

式中:

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\zeta(\beta-2)\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta^2(\beta-2)+1}$$

$$y(t)=1-\frac{\zeta\beta e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2\beta(\beta-2)+1}}\sin(\omega_d t+\theta)-\frac{e^{-p_3 t}}{\zeta^2\beta(\beta-2)+1},\qquad t\geq 0$$

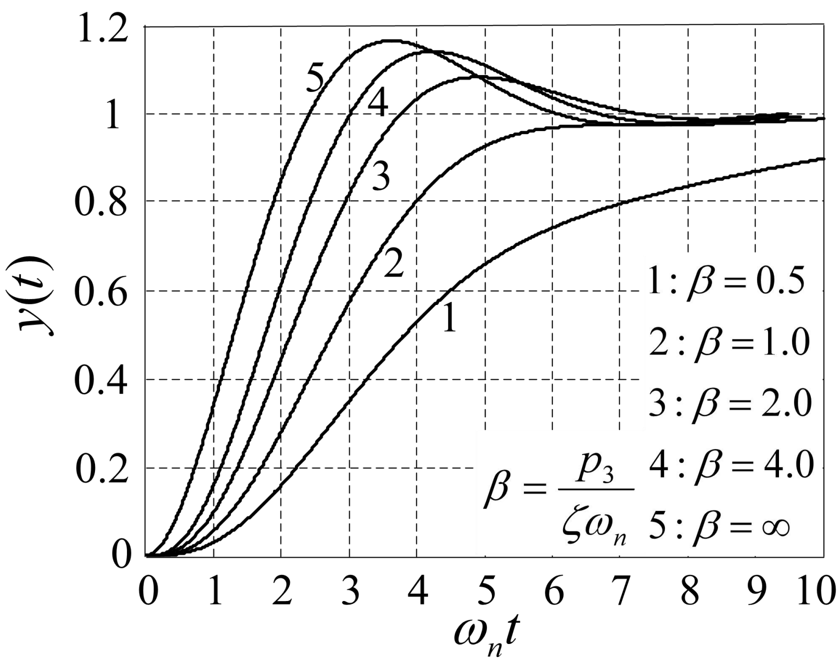


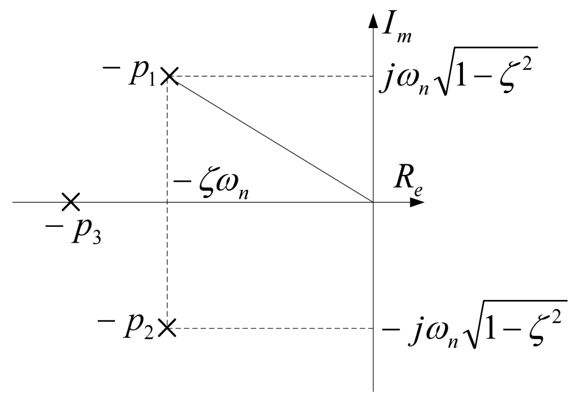
$$\beta=\frac{p_3}{\zeta\omega_n}$$

[分析]：三阶系统的单位阶跃响应由三部分组成：稳态项，共轭复极点形成的衰减振荡分量，实极点构成的衰减指数项分量。

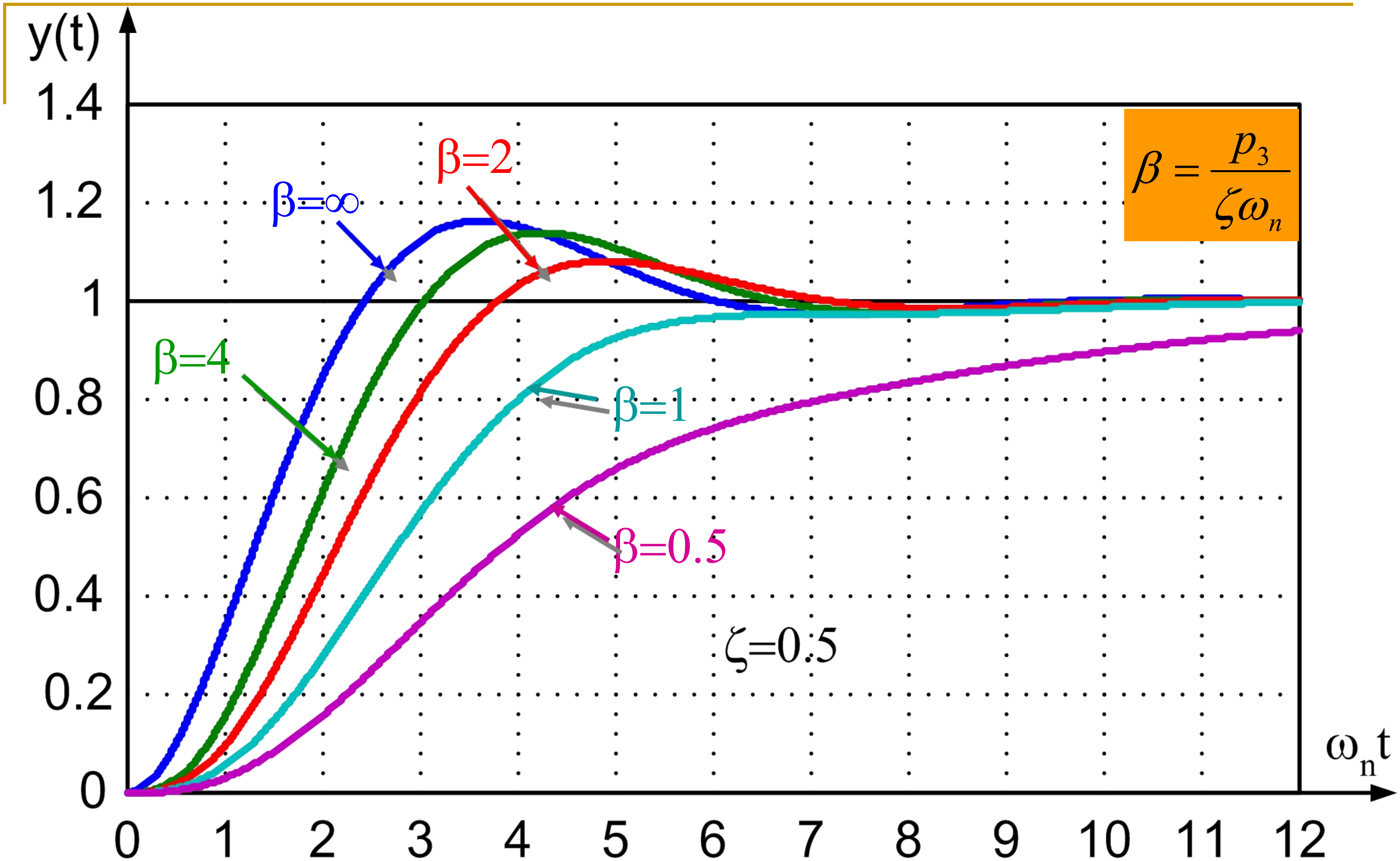
1. 当$\beta>>1$时，表示实极点远离虚轴，共轭复极点离虚轴近，系统的瞬态特性主要由共轭复极点决定，呈二阶系统的特性，即系统的特性由二阶系统的特征参数ζ和ω_n决定。
2. 当$\beta<<1$时，表示实极点离虚轴近，共轭复极点离虚轴远，系统的瞬态特性主要由实极点$-p_3$决定，呈一阶系统的特性。
3. 一般情况下三阶系统的阶跃响应与实极点和共轭复极点的相对位置有关。
4. 阻尼系数ζ对三阶系统的影响与对二阶系统的影响相似。

β为参变量时三阶系统的单位阶跃响应曲线





当β= 无穷大时（曲线5），即负实极点远离虚轴时，三阶系统即为典型二阶系统。在一般情况下，0<β<无穷大，因此具有负实极点的三阶系统，比较二阶系统而言，其瞬态响应的振荡性减弱，超调量减小，调整时间增加，也就是相当于系统的惯性增加了。



图中β=∞，表示无实极点。由图可见，加入实极点后，当ζ不变时，超调量下降了，但调节时间增加了。

二、高阶系统分析

高阶系统传递函数的一般形式为：

$$\Phi(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}\qquad m\le n$$

写成零、极点形式：

$$\Phi(s)=\frac{k_g\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{l=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_l\omega_l s+\omega_l^2)}\qquad n_1+2n_2=n,\quad m\le n$$

其单位阶跃响应为（当所有极点互异，且$0<\zeta_l<1$时）

$$Y(s)=\frac{A_0}{s}+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{A_j}{s+p_j}+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{B_l(s+\zeta_l\omega_{nl})+C_l\omega_{nl}\sqrt{1-\zeta_l^{\ 2}}}{s^2+2\zeta_l\omega_{nl}s+\omega_{nl}^{\ 2}}$$

$$Y(s)=\frac{A_0}{s}+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{A_j}{s+p_j}+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{B_l(s+\zeta_l\omega_{nl})+C_l\omega_{nl}\sqrt{1-\zeta_l^{\ 2}}}{s^2+2\zeta_l\omega_{nl}s+\omega_{nl}^{\ 2}}$$

A_0是$Y(s)$在输入信号极点(s=0)处的留数，A_j是$Y(s)$在实数极点(s=-p_j)处的留数。B_l和C_l分别为$Y(s)$在共轭复数极点处留数的实部和虚部。

$$A_0=\lim_{s\to 0}sY(s)=\frac{b_0}{a_0}=\frac{k_g\prod_{i=1}^{m}z_i}{\prod_{j=1}^{n_1}p_j\cdot\prod_{l=1}^{n_2}\omega_{nl}^{\ 2}}$$

$$A_j=\lim_{s\to -p_j}(s+p_j)Y(s),\quad j=1,2,\ldots,\quad n_1$$

B_l和C_l的计算略。

高阶系统的单位阶跃响应分析

$$y(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{n_1} A_j e^{-p_j t}$$

$$+\sum_{l=1}^{n_2} B_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \cos \omega_{nl} \sqrt{1-\zeta_l^{\ 2}}\, t + \sum_{l=1}^{n_2} C_l e^{-\zeta_l \omega_{nl} t} \sin \omega_{nl} \sqrt{1-\zeta_l^{\ 2}}\, t，\quad t \geq 0$$

1、高阶系统的单位阶跃响应是由稳态项、实极点构成的衰减指数项、共轭复极点对构成的衰减振荡项三部分线性组合而成。即高阶系统的单位阶跃响应是由多个一阶和二阶瞬态响应分量所组成。

2、$y(t)$不仅与极点$-p_j$、$-\zeta_l \omega_{nl} \pm j\sqrt{1-\zeta_l^2}\,\omega_{nl}$有关，而且与系数$A_0, A_j, B_l, C_l$有关(这些系数都与零点和极点有关)。所以，高阶系统的单位阶跃响应取决于系统的零、极点分布。

[定性分析]:

- 极点的影响

对于稳定的高阶系统(极点均位于s左半平面)，负实极点或具有负实部共轭复极点，分别对应$y(t)$的衰减指数项或衰减正弦项，但衰减的快慢取决于极点离虚轴的距离。距虚轴近的极点所对应的项衰减的慢；距虚轴远的极点所对应的项衰减的快。同时，距虚轴近的极点相对应项的系数大，而距虚轴远的极点相对应项的系数小。所以，距虚轴近的极点对瞬态响应影响大。

$$Y(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{10}{9}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{9}\frac{1}{s+10}$$

$$y(t)=1-\frac{10}{9}e^{-t}+\frac{1}{9}e^{-10t}$$

零点的影响

零点不影响高阶系统阶跃响应的形式。零点只影响极点对应各瞬态分量（项）的系数。

零点若靠近某个极点，则该极点对应项的系数就小。

$$Y(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{9}\frac{s+9}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{80}{81}\frac{1}{s+1}-\frac{1}{81}\frac{1}{s+10}$$

$$Y(s)=\Phi(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{10}{1.1}\frac{s+1.1}{s(s+1)(s+10)}=\frac{1}{s}-\frac{10}{99}\frac{1}{s+1}+\frac{89}{99}\frac{1}{s+10}$$

偶极子

若有一对零、极点，它们之间的距离比它们的模值小一个数量级，这对零、极点称为偶极子。偶极子对瞬态性能的影响可以忽略。但影响稳态性能。

- [总之]高阶系统各瞬态响应分量的系数 A_0, A_j, B_l, C_l 取决于零、极点分布。各瞬态响应分量系数大小有以下几种情况：
  - 若极点远离原点，则其相应的瞬态响应分量系数小；
  - 极点靠近一个零点，远离其他极点和零点，系数小；
  - 极点远离零点，又接近原点或其他极点，系数大。

衰减慢且系数大的瞬态响应分量，在瞬态过程中起主导作用。

[主导极点]：满足下列条件的极点称为主导极点。

- 高阶系统若存在离虚轴最近的一对共轭极点或一个实极点；
- 极点附近无零点；
- 其他极点距虚轴的距离比该极点与虚轴的距离大5倍以上。

主导极点在$y(t)$中对应的瞬态响应分量衰减最慢，系数很大，系统的瞬态性能指标主要由它决定。

具有主导极点的高阶系统可近似为二阶或一阶系统。

[例如]： $-p_{1,2}=-\zeta_1\omega_{n1}\pm \mathrm{j}\omega_{n1}\sqrt{1-\zeta_1^{\ 2}}=-\sigma\pm \mathrm{j}\omega_d$ 为某高阶系统的主导极点，则单位阶跃响应近似为：

$$y(t)\approx a_0+e^{-\sigma t}(\beta_1\cos\omega_d t+\gamma_1\sin\omega_d t)$$

[利用主导极点可对高阶系统的特性做近似的估计分析]

具有主导极点的高阶系统可近似为二阶或一阶系统。此时高阶系统的瞬态特性可用等效低阶系统的特性做近似的估计分析。（降阶）

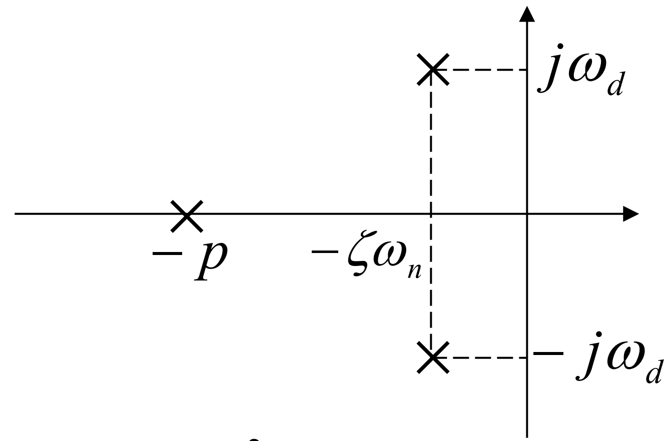
高阶系统近似简化原则：

- 在近似前后，确保输出量的稳态值不变；
- 在近似前后，瞬态过程基本一致。

具体步骤：

- 确定系统的主导极点。
- 将高阶系统传递函数写为时间常数形式，再将小时间常数项略去。

例如： $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(s+p)}$



如果： $\dfrac{p}{\zeta\omega_n}>5$

则： $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{p(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(1+\dfrac{1}{p}s)}\approx\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{p(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})}$

利用主导极点的概念

可否直接去掉(s+p)?

[关于该简化的说明]

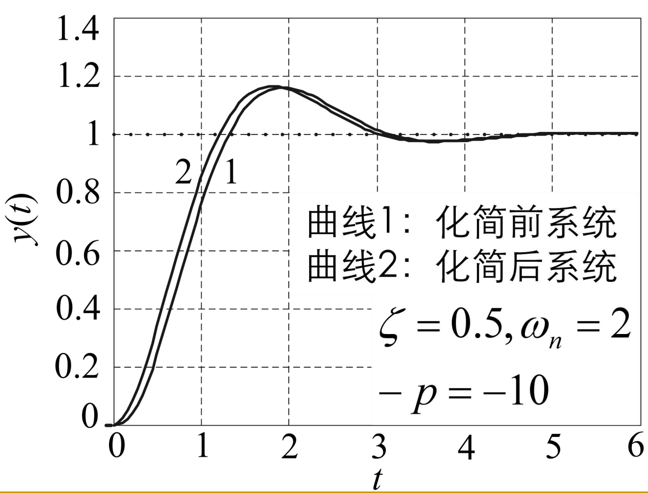
- 数学的角度：1/p较小，可略去。
- 特性的角度：-p为非主导极点，可略去，可将高阶系统近似降阶为典型二阶系统。

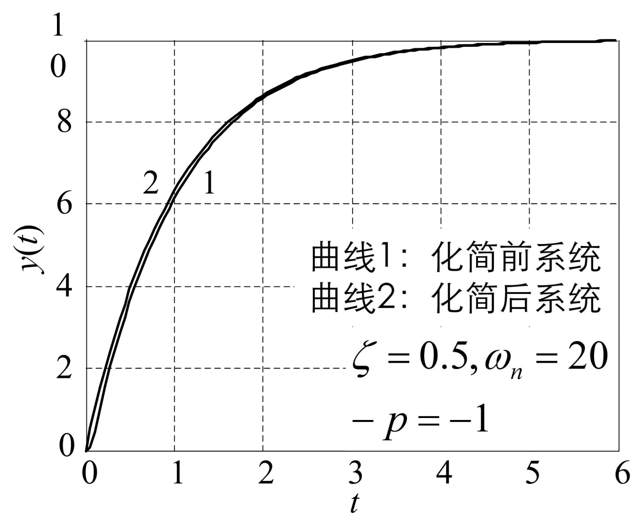
[测试]：假设输入$1/s$，则化简前后系统的稳态值不变。

$$\because \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^{\ 2}}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})(s+p)}=\frac{1}{p}$$

$$\text{而}\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{\omega_n^{\ 2}}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2})p}=\frac{1}{p}$$

当共轭复极点 $-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 和实极点$-p$分别为系统的主导极点时，瞬态过程如下：





小结

- 定性分析
- 零、极点位置对高阶系统单位阶跃响应曲线的影响情况。极点位置决定响应的形态和衰减快慢，零点和极点同时决定各项系数的大小
- 主导极点
- 高阶系统简化为低阶系统的原则和步骤

思考题：3.21；作业：3.24