第三章　线性系统的时域分析

本章主要内容

- 典型输入信号和时域性能指标
- 一阶系统的瞬态响应
- 二阶系统的瞬态响应
- 高阶系统分析
- 稳定性和代数稳定判据
- 稳态误差分析

第一节 典型输入信号和时域性能指标

什么是时域分析?

指控制系统在一定的输入信号作用下，根据输出量的时域表达式，分析系统的稳定性、瞬态性能和稳态性能。

时域分析是一种在时域中对系统进行分析的方法，具有直观和准确的优点。由于系统输出量的时域表达式是时间的函数，所以系统输出量的时域表达式又称为系统的时间响应。

系统的响应可由微分方程得到，也可由传递函数得到。零初始状态时，可利用传递函数进行研究，用传递函数间接的评价系统的性能指标。

控制系统的性能指标，可以通过在输入信号作用下系统的瞬态和稳态过程来评价。系统的瞬态和稳态过程不仅取决于系统本身的特性，还与输入信号的形式有关。

[典型初始状态]

规定控制系统的初始状态均为零状态，即在 $t=0^-$ 时

$$y(0^-)=\dot{y}(0^-)=\ddot{y}(0^-)=\cdots=0$$

这表明，在外作用加入系统之前系统是相对静止的，被控量及其各阶导数相对于平衡工作点的增量为零。

典型输入信号

在分析和设计控制系统时，需要确定一个对各种控制系统的性能进行比较的基础。这个基础就是预先规定一些具有特殊形式的测试信号作为系统的输入信号，然后比较各种系统对这些输入信号的响应。

选取测试信号时必须考虑的原则:

- 选取的输入信号的典型形式，应反映系统工作时的大部分实际情况。
- 选取输入信号的形式应尽可能简单，易于在实验室获得，以便于数学分析和实验研究。
- 应选取那些能使系统工作在最不利情况下的输入信号作为典型的测试信号。

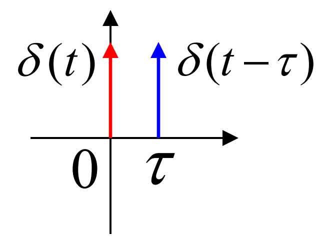
在控制工程中采用下列五种信号作为典型输入信号

◆ 脉冲函数:

理想单位脉冲函数:

[定义]: $\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$， 且$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$，其积分面积为1。

其拉氏变换后的像函数为: $L[\delta(t)]=1$

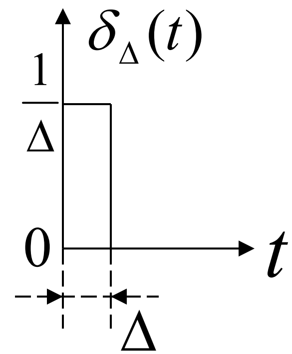


- 出现在$t=\tau$时刻，积分面积为A的理想脉冲函数定义如下:

$$A\delta(t-\tau)=\begin{cases}0, t\neq\tau\\ \infty, t=\tau\end{cases} \quad 且 \quad \int_{-\infty}^{\infty}A\delta(t-\tau)dt=A$$

- 实际单位脉冲函数：

$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}0, & t<0和t>\Delta \\ \dfrac{1}{\Delta}, & 0\le t\le\Delta\end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta_\Delta(t)dt=\Delta\times\frac{1}{\Delta}=1$$

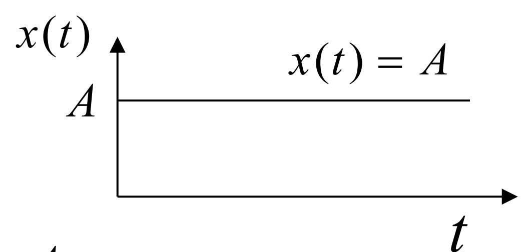


当$\Delta\to 0$时，$\delta_\Delta(t)=\delta(t)$

- **阶跃函数：**

$$x(t)=\begin{cases}0, t<0 \\ A, t\ge 0\end{cases}$$

A阶跃幅度，A=1时称为单位阶跃函数，记为$1(t)$。

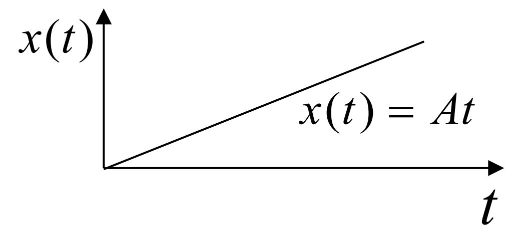


其拉氏变换后的像函数为：$L[x(t)]=\dfrac{A}{s}$

斜坡函数（速度阶跃函数）：

$$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ At, t\geq 0\end{cases}$$

A=1时称为单位斜坡函数。

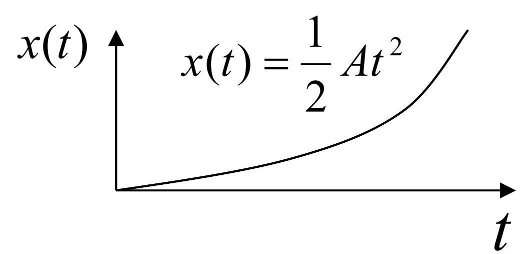


其拉氏变换后的像函数为：$L[x(t)]=\dfrac{A}{s^2}$

抛物线函数（加速度阶跃函数）

$$x(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \dfrac{1}{2}At^2, t\geq 0\end{cases}$$

A=1时称为单位抛物线函数。



其拉氏变换后的像函数为：$L[x(t)]=\dfrac{A}{s^3}$

[说明]：上述几种典型输入信号的关系如下：

$$A\delta(t)=\frac{d}{dt}[A\times 1(t)]=\frac{d^2}{dt^2}[At]=\frac{d^3}{dt^3}[\frac{1}{2}At^2]$$

- **正弦函数：** $x(t)=A\sin\omega t$，式中，A为振幅，ω为频率。其拉氏变换后的像函数为：

$$L[\sin\omega t]=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

选择哪种典型输入信号进行系统特性分析?

- 分析系统特性究竟采用何种典型输入信号，取决于实际系统在正常工作情况下最常见的输入信号形式。
- 当系统的输入具有突变性质时，如指令的突然转换、电源的突然接通、负荷的突变等可选择阶跃函数为输入信号；当系统的输入是随时间线性增长变化时，可选择斜坡函数为典型输入信号；当考虑海浪对舰艇的扰动、电源及机械噪声等可近似为正弦输入。
- 讨论线性定常系统的时域性能指标时，通常选择**单位阶跃信号**作为典型输入信号。

典型响应

1、单位脉冲响应： $Y(s)=G(s)\times 1,\ \ y(t)=L^{-1}[G(s)]$

2、单位阶跃响应： $Y(s)=G(s)\times\frac{1}{s},\ \ y(t)=L^{-1}[\frac{G(s)}{s}]$

3、单位斜坡响应： $Y(s)=G(s)\times\frac{1}{s^2},\ \ y(t)=L^{-1}[\frac{G(s)}{s^2}]$

4、单位抛物线响应： $Y(s)=G(s)\times\frac{1}{s^3},\ \ y(t)=L^{-1}[\frac{G(s)}{s^3}]$

[说明]：上述几种典型响应有如下关系

单位脉冲响应 $\underset{\text{微分}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}}$ 单位阶跃响应 $\underset{\text{微分}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}}$ 单位斜坡响应 $\underset{\text{微分}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}}$ 单位抛物线响应

瞬态响应和稳态响应

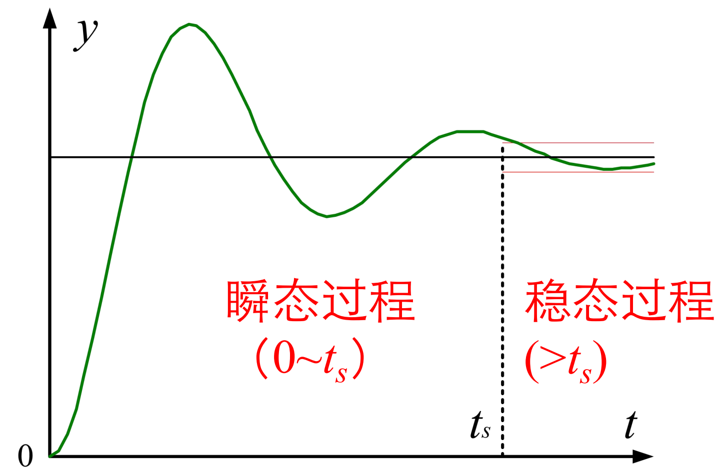
在典型输入信号的作用下，任何一个控制系统的时间响应都由瞬态响应和稳态响应两部分组成。

1. 瞬态响应：又称为瞬态/动态过程或过渡过程。是指系统在典型输入信号的作用下，系统的输出量从初始状态到最终状态的响应过程。

- 由于实际控制系统存在惯性、阻尼及其它一些因素，系统的输出量不可能完全复现输入量的变化，瞬态过程曲线形态可表现为衰减振荡、等幅振荡、单调变化和发散等形式。
- 瞬态过程包含了输出响应的各种运动特性，这些特性称为系统的瞬态性能。
- 一个可以实际运行的控制系统，瞬态过程必须是收敛的。即系统必须是稳定的。

2．稳态响应：又称为稳态过程。是指系统在典型输入信号的作用下，当时间趋近于无穷大时，系统的输出响应状态。

- 稳态过程反映了系统输出量最终复现输入量的程度，包含了输出响应的稳态性能。
- 理论上说，只有当时间趋于无穷大时，才进入稳态过程，但这在工程应用中是无法实现的。因此在工程上只讨论典型输入信号加入后一段时间里($0\sim t_s$)的瞬态过程，在这段时间里，反映了系统主要的瞬态性能指标。而在这段时间之后，认为进入了稳态过程。$t_s=?$



线性微分方程的解

时域分析以线性定常微分方程的解来讨论系统的特性和性能指标。设微分方程如下：

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1 y'(t)+a_0 y(t)$$
$$=b_m x^{(m)}(t)+b_{m-1}x^{(m-1)}(t)+\ldots+b_1 x'(t)+b_0 x(t)$$

式中，$x(t)$为输入信号，$y(t)$为输出信号。

微分方程的解可表示为：$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$，其中$y_h(t)$为对应的齐次方程的通解，只与系统本身的特性或系统的特征方程的根有关，与输入无关。对于稳定的系统，当时间趋于无穷大时，通解趋于零。根据通解或特征方程的根可以分析系统的稳定性。

$y_p(t)$为特解，与系统和输入有关。一般来说，当时间趋于无穷大时特解趋于一个稳态的函数。

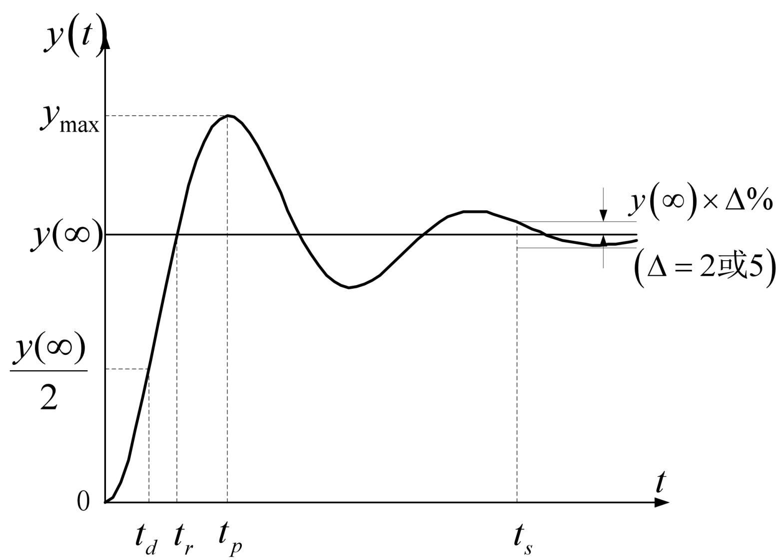
瞬态性能指标和稳态性能指标

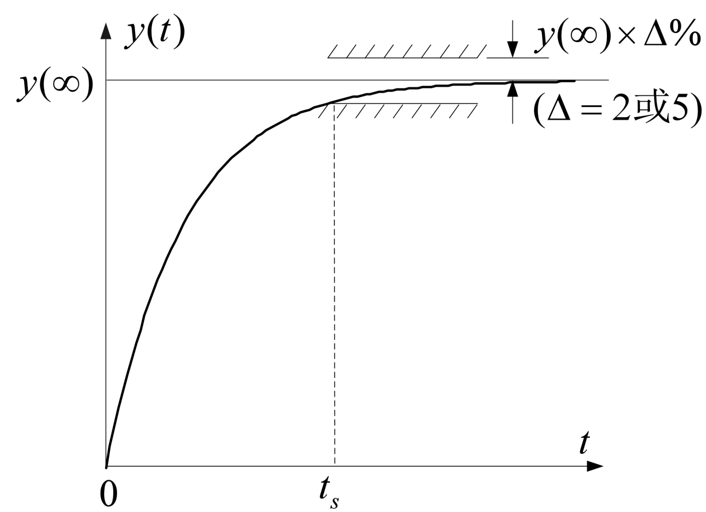
- 控制系统在典型输入信号作用下的性能指标，由瞬态性能指标和稳态性能指标两部分组成。
- 由于稳定是控制系统能够正常运行的首要条件，因此只有当瞬态过程收敛时，研究系统的瞬态和稳态性能才有意义。
- 在工程应用上，通常使用单位阶跃信号作为测试信号，来计算系统时域瞬态和稳态性能指标。

瞬态过程的性能指标

描述稳定系统的瞬态过程随时间t的变化状况的性能指标，称为瞬态性能指标，或称为动态性能指标。

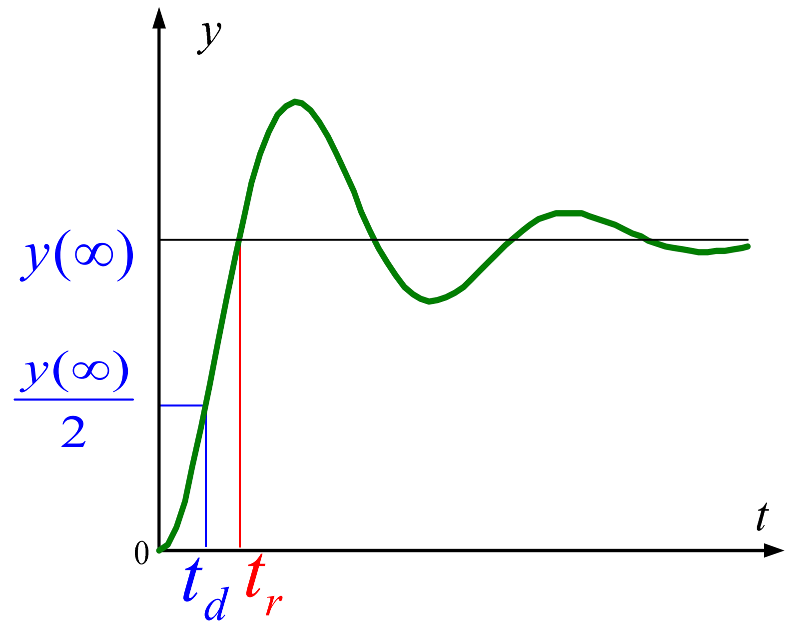
通常以阶跃响应来衡量系统控制性能的优劣和定义瞬态过程的时域性能指标。零初始条件下，稳定的控制系统单位阶跃响应曲线有衰减振荡和单调变化两种类型。





（一）衰减振荡:

具有衰减振荡的瞬态过程如右图所示:



1、延迟时间 t_d:

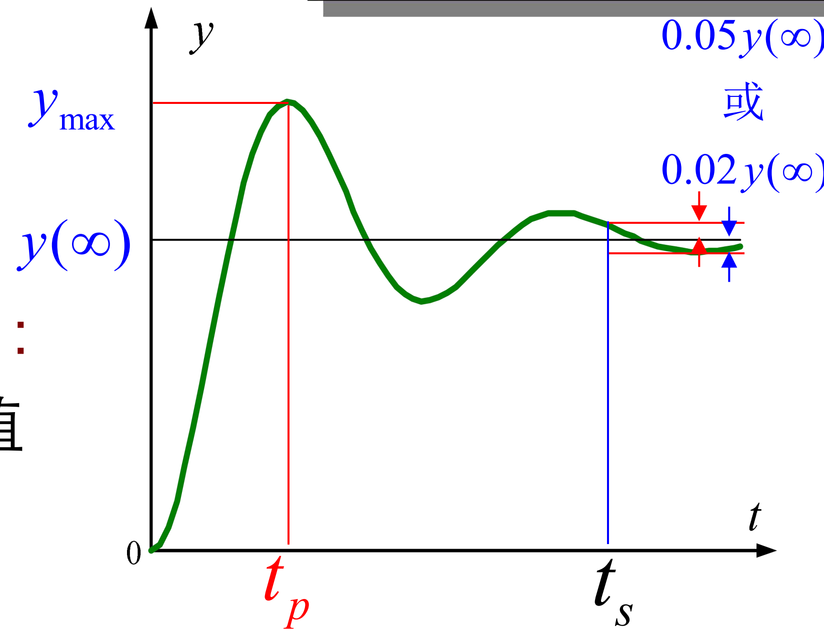
输出响应第一次达到稳态值的50%所需的时间。

2、上升时间t_r:

输出响应第一次达到稳态值$y(\infty)$所需的时间。

3. 峰值时间 t_p ：

输出响应超过稳态值达到第一个峰值y_{max}所需要的时间。



4. 最大超调量(简称超调量) $\delta\%$ ：

瞬态过程中输出响应的最大值超过稳态值的百分数。

$$\delta\% = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

式中：y_{max} —输出响应的最大值； $y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t)$ —稳态值；

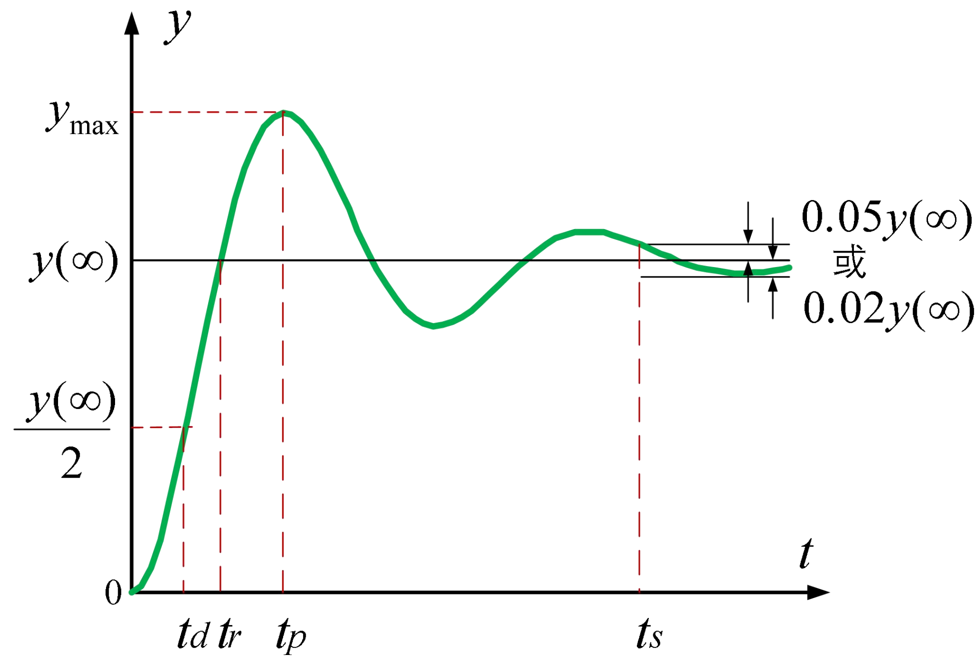
5. 调整时间或过渡过程时间 t_s：

当$y(t)$和$y(\infty)$之间的误差达到规定的范围之内［一般取$y(\infty)$的±5%或±2%，称允许误差范围，用Δ表示］且以后不再超出此范围的最小时间。即当 $t \geq t_s$，有：

$$|\, y(t) - y(\infty)\,| \leq y(\infty) \times \Delta\% \qquad (\Delta = 2或5)$$

6、振荡次数N:

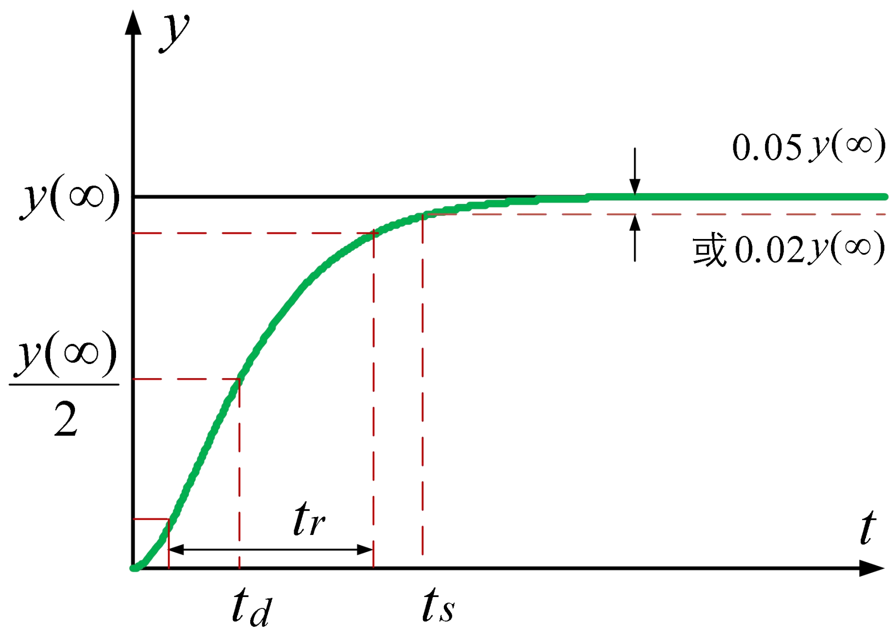
在调整时间内，$y(t)$偏离$y(\infty)$的振荡次数。或在$0 < t < t_s$时间内，阶跃响应穿越其稳态值次数的一半，定义为振荡次数。



上述几种瞬态性能指标中，t_d, t_p，t_r，t_s表示瞬态过程进行的快慢，是快速性指标；而δ%，N反映瞬态过程的振荡程度，是振荡性指标。其中δ%和t_s是两种最常用的性能指标。

（二）单调变化：

单调变化响应曲线如下图所示



这种响应没有超调量，只用调整时间 t_s 表示瞬态过程的快速性，调整时间的定义同衰减振荡中所述。有时也采用上升时间 t_r 这一指标。上升时间的定义修改为由稳态值的10%上升到90%所需的时间。

稳态过程的性能指标

当响应时间$t > t_s$时，系统的输出响应进入稳态过程。稳态过程的性能指标主要是稳态误差。当时间趋于无穷大时，若系统的输出量不等于输入量，则系统存在稳态误差，稳态误差是控制系统精度或抗干扰能力的一种度量。系统稳定时：

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

式中：$e(t)$=给定输入值-反馈值；$e(t)$、$E(s)$是系统的误差；e_{ss}为稳态误差。

对控制系统性能的要求

- 系统应该是稳定的。
- 系统达到稳态时，应满足给定的稳态误差的要求。
- 系统在瞬态过程中应有好的快速性（调节时间短），振荡要小（超调量小）。

简称：**稳、准、快**

小结

- 典型输入信号及其之间的关系
- 典型输出响应及其之间的关系
- 瞬态过程和稳态过程
- 瞬态过程的性能指标(衰减振荡和单调变化)
- 稳态过程的性能指标(稳态误差)
- 对一个控制系统的要求(稳、准、快)