第一讲 矩阵及其运算

贺丽君
信息与通信工程学院
Email: lijunhe@mail.xjtu.edu.cn
2023-02

内容提要

- 矩阵的引入：求解线性方程组
- 消去与置换矩阵
- 矩阵乘法与Google MapReduce
- 逆矩阵
- 矩阵的LU分解

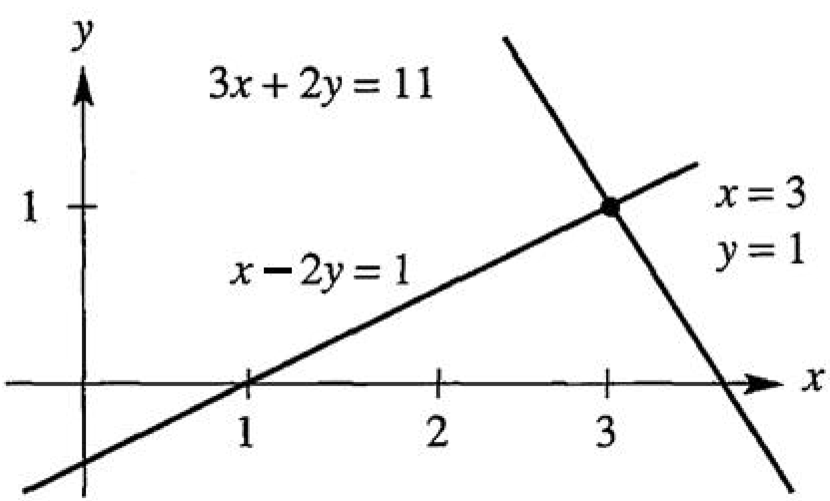
内容提要

- 矩阵的引入：求解线性方程组
- 消去与置换矩阵
- 矩阵乘法与Google MapReduce
- 逆矩阵
- 矩阵的LU分解

线性方程组的求解

➢ 2×2线性方程组

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & & \mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \end{array}$$



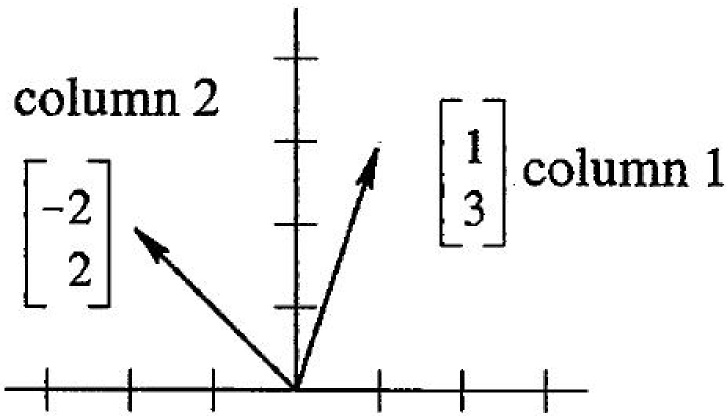
- 线性方程组的解是两条直线的交点
- 矩阵乘以向量

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} (\text{row } 1)\cdot\mathbf{x} \\ (\text{row } 2)\cdot\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

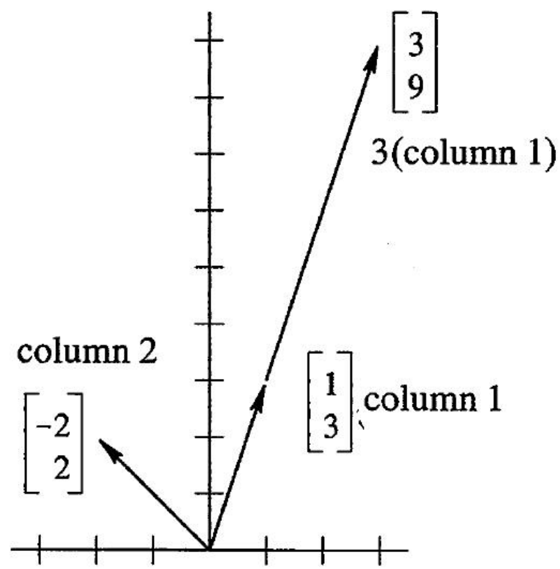
线性方程组的求解

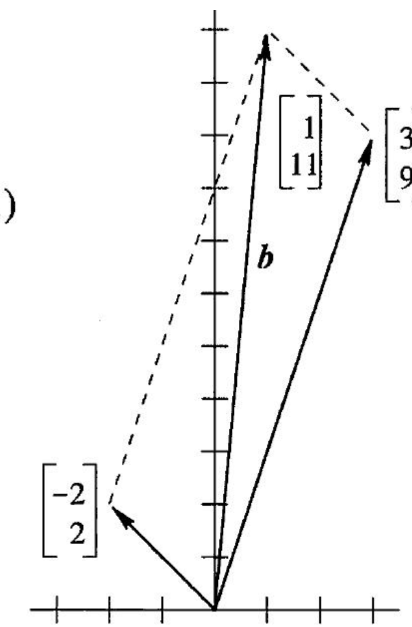
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3x + 2y &= 11 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\11\end{bmatrix}$$

$$\quad \mathbf{a}_1 \qquad\qquad \mathbf{a}_2 \qquad\qquad \mathbf{b}$$



A的列向量以怎样的方式**线性组合**以得到b?



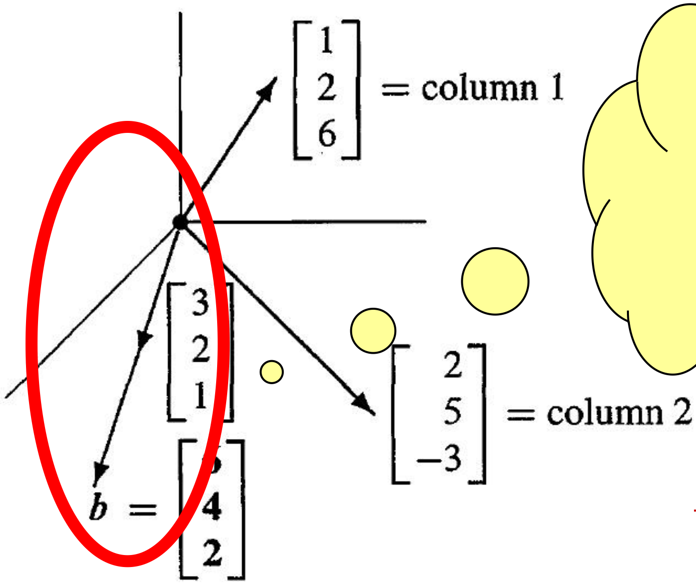


$$\mathbf{Ax} = x_1\left(\text{column } 1\right) + x_2\left(\text{column } 2\right)$$

线性方程组的求解

➢ 3×3线性方程组

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 6 \\
2x + 5y + 2z &= 4 \\
6x - 3y + \ \ z &= 2
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
x\overset{\mathbf{a}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}} + y\overset{\mathbf{a}_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}} + z\overset{\mathbf{a}_3}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = \overset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}
$$



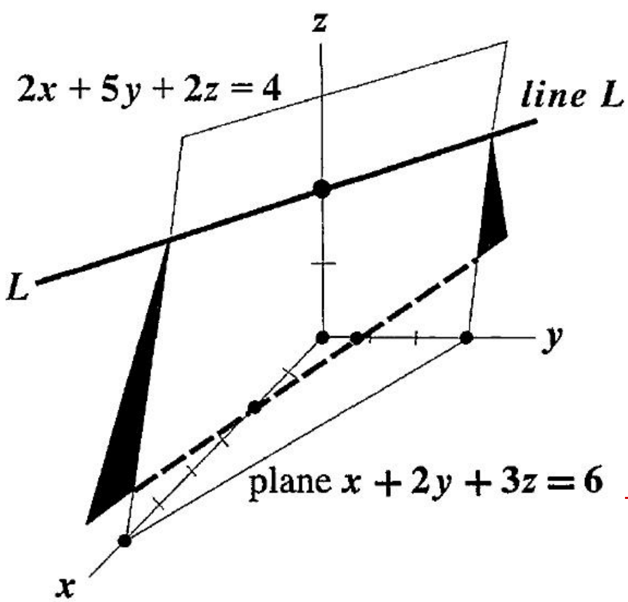
$x=0$,
$y=0$,
$z=2$

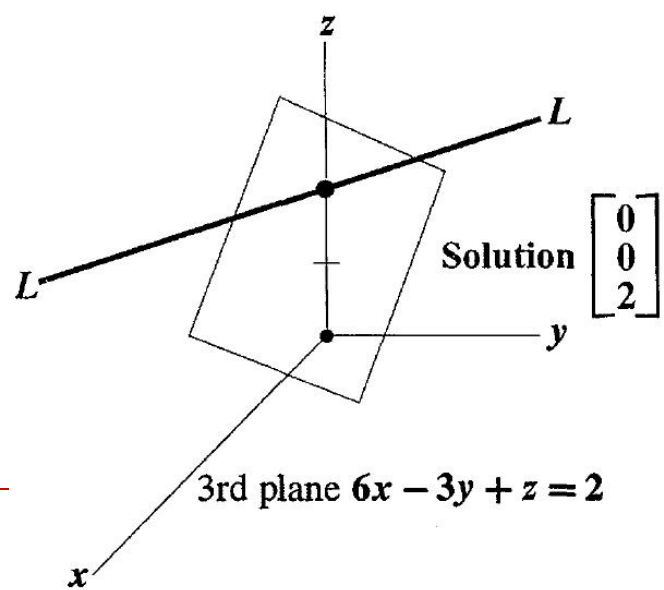
- **Ax表示A的各列向量的线性组合**
- **线性方程组Ax=b有解意味着什么？**

线性方程组的求解

- 3×3线性方程组

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 5y + 2z &= 4 \\ 6x - 3y + z &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}$$





线性方程组的求解

3×3线性方程组

- Ax表示A的各列向量的线性组合
- 线性方程组Ax=b有解意味着什么?
- 对于任意的b，线性方程组Ax=b都有解意味着什么?
- 如果A的各列张成R^3，意味着什么?
- 如果A的各列线性独立，那么Ax=b有唯一解。
- 如果方程组有唯一解，那么A一定是可逆的。

方程组的解、向量的相关性、线性空间、矩阵的逆

内容提要

- 矩阵的引入：求解线性方程组
- 消去与置换矩阵
- 矩阵乘法与Google MapReduce
- 逆矩阵
- 矩阵的LU分解

消元与回代

$$\begin{aligned} x + 2y + \ \ z &= 2 \\ 3x + 8y + \ \ z &= 12 \\ 4y + \ \ z &= 2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

消元与回代过程：

主元

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}} \xrightarrow{(2,1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \underset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}$$

注意：主元不能为零

消元与回代

$$
\begin{aligned}
x + 2y + \ \ z &= 2 \\
3x + 8y + \ \ z &= 12 \\
4y + \ \ z &= 2
\end{aligned}
\qquad
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}
$$

消元与回代过程：

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
\quad\ \mathbf{A} \qquad\quad \mathbf{b}
\end{array}
\xrightarrow{(2,1)}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\xrightarrow{(3,2)}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix} \\
\qquad \mathbf{U} \qquad\quad \mathbf{c}
\end{array}
$$

$$x = 2;\ y = 1;\ z = -2$$

消去矩阵 (Elimination Matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

消元的过程如何用矩阵抽象？

两个基本结果：

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{col}_1 & \mathrm{col}_2 & \mathrm{col}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1 \\ \mathrm{row}_2 \\ \mathrm{row}_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1\mathrm{col}_1 + x_2\mathrm{col}_2 + x_3\mathrm{col}_3 \qquad = x_1\mathrm{row}_1 + x_2\mathrm{row}_2 + x_3\mathrm{row}_3$$

消去矩阵 (Elimination Matrix)

Step 1：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2,1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$row_2 \leftarrow row_2 - 3 \times row_1$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

E_{21}：用于修正(2,1)处元素值的消去矩阵

E_{21}是否可逆？

消去矩阵 (Elimination Matrix)

Step 2：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$row_3 \leftarrow row_3 - 2 \times row_2$：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{0} & 5 \end{bmatrix}$$

E_{32}：用于修正(3,2)处元素值的消去矩阵

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}_{32}(\mathbf{E}_{21}\mathbf{A}) = \mathbf{E}_{32}\mathbf{E}_{21}\mathbf{A}$$

消元失败的情况：主元为零

几何解释？

例1：

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x-6y=11 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ 0y=8 \end{cases} \Rightarrow \text{无解}$$

例2：

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x-6y=3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ 0y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{无穷多解}$$

例3：

$$\begin{cases} 2y=4 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{行交换}} \begin{cases} 3x-2y=5 \\ 0x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \text{有唯一解}$$

置换矩阵 (Permutation Matrix)

➢ 2×2的情况

P：完成矩阵两行的互换

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

类似地，互换矩阵两列可采用如下操作实现：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

置换矩阵 (Permutation Matrix)

- 3×3的情况

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$\mathbf{I}$ $\qquad$ $\mathbf{P}_{12}$ $\qquad$ $\mathbf{P}_{13}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$\mathbf{P}_{23}$ $\qquad$ $\mathbf{P}_{23}\mathbf{P}_{12}$ $\qquad$ $\mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{23}$

置换矩阵 (Permutation Matrix)

- 置换矩阵的性质

  - 对n阶方阵，共有$n!$个置换矩阵
  - 如果P是置换矩阵，则P^T也是置换矩阵

    P每行每列都是一个1，P^T也是

置换矩阵 (Permutation Matrix)

- 置换矩阵的性质
  - 对n阶方阵，共有$n!$个置换矩阵
  - 如果P是置换矩阵，则P^T也是置换矩阵
  - 若干个置换矩阵的乘积仍然是置换矩阵

    多次行交换仍然是行交换

置换矩阵 (Permutation Matrix)

➢ 置换矩阵的性质

- 对n阶方阵，共有$n!$个置换矩阵
- 如果P是置换矩阵，则P^T也是置换矩阵
- 若干个置换矩阵的乘积仍然是置换矩阵
- 如果P是置换矩阵，则P^{-1}也是置换矩阵
- 对于置换矩阵P，$P^T = P^{-1}$

内容提要

- 矩阵的引入：求解线性方程组
- 消去与置换矩阵
- 矩阵乘法与Google MapReduce
- 逆矩阵
- 矩阵的LU分解

矩阵乘法

➢ 矩阵乘法的定义

$$\begin{bmatrix} & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i5} \\ & * & & \\ & * & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & b_{1j} & * & * & * \\ & & b_{2j} & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & b_{5j} & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & * & & & \\ * & * & (AB)_{ij} & * & * & * \\ & & * & & & \\ & & * & & & \end{bmatrix}$$

A is 4 by 5 B is 5 by 6 AB is 4 by 6

$$(\mathbf{AB})_{i,j} = (\text{row } i \text{ of } \mathbf{A}) \cdot (\text{column } j \text{ of } \mathbf{B})$$

- 为什么要这么定义?

矩阵乘法

- 矩阵乘法的其他计算方式

1.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_1 & \cdots & \mathbf{Ab}_p \end{bmatrix}$$

A的各列向量的线性组合

2.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

B的各行向量的线性组合

矩阵乘法

- **矩阵乘法正确性验证**

$$(AB)_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}$$

$$(AB)_{*,j} = a_{*,1}b_{1,j} + a_{*,2}b_{2,j} + \cdots + a_{*,n}b_{n,j}$$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_1 & \cdots & \mathbf{Ab}_p \end{bmatrix}$$

$$(AB)_{i,*} = a_{i,1}b_{1,*} + a_{i,2}b_{2,*} + \cdots + a_{i,n}b_{n,*}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

矩阵分块

注意成立条件

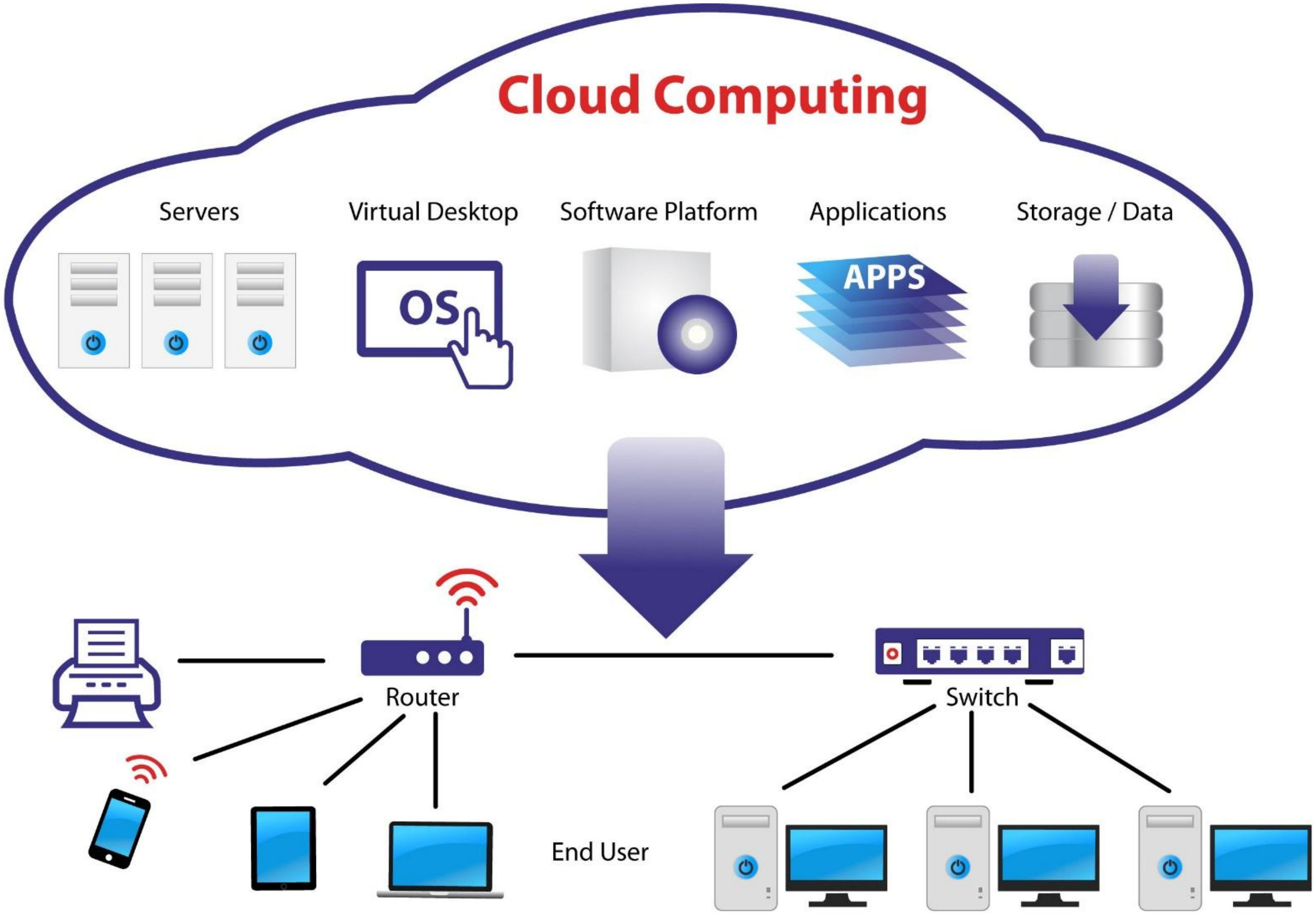
➢ 分块乘法

$$\begin{bmatrix} \boxed{A_{11} \quad A_{12}} \\ A_{21} \quad A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} B_{11} \\ B_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & \cdots \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & \cdots \end{bmatrix}$$

➢ 一种特殊形式

$$\begin{bmatrix} | & & | \\ a_1 & \cdots & a_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & b_1 & - \\ & \vdots & \\ - & b_n & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \end{bmatrix}$$

矩阵分块的应用—— MapReduce

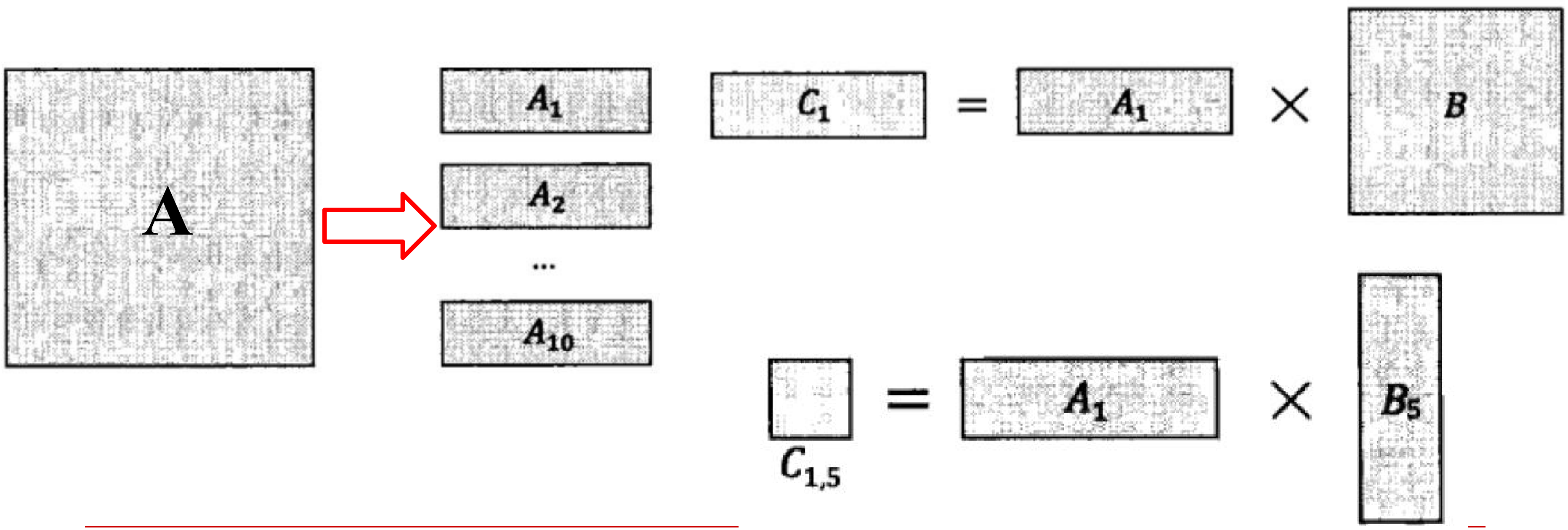


矩阵分块的应用——MapReduce

- 云计算的关键问题之一是：如何将一个大规模的计算问题，分解到许多计算和存储资源有限的计算机上，共同完成
- 解决上述问题的基本思想是：分而治之(Divide-and-Conquer)
- MapReduce是实现上述思想的一种方法：问题分解(Map)+子问题结果合并(Reduce)

矩阵分块的应用——MapReduce

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{N1} & b & \cdots & b_{NN} \end{bmatrix}$$



内容提要

- 矩阵的引入：求解线性方程组
- 消去与置换矩阵
- 矩阵乘法与Google MapReduce
- 逆矩阵
- 矩阵的LU分解

逆矩阵

- 定义：

当且仅当存在一个方阵A^{-1}满足如下关系时，称矩阵A是可逆的，且A^{-1}是A的逆矩阵：

$$A^{-1}A = I \quad \text{and} \quad AA^{-1} = I.$$

- 几点性质：
  - 如果A可逆，则$Ax=0$只有零解
  - 如果A和B均为可逆矩阵，则$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
  - $\mathrm{diag}\{d_1,\ldots,d_n\}$的逆矩阵为$\mathrm{diag}\{1/d_1,\ldots,1/d_n\}$

逆矩阵的计算——Gauss-Jordan方法

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

须求解两个线性方程组

Gauss-Jordan的思想：一次完成n个线性方程组的求解

逆矩阵的计算——Gauss-Jordan方法

构造增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$\mathbf{A}$ $\mathbf{I}$ $\mathbf{I}$ $\mathbf{A}^{-1}$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{I}\end{bmatrix}$$

注意到

$$\mathbf{E}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{I}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{EA} & \mathbf{EI}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & ?\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{EA} = \mathbf{I}$$

$$\boxed{? = \mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}}$$

内容提要

- 矩阵的引入：求解线性方程组
- 消去与置换矩阵
- 矩阵乘法与Google MapReduce
- 逆矩阵
- 矩阵的LU分解

矩阵的LU分解

➢ 3×3的例子

$$U = EA$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E = E_{32}E_{31}E_{21}} U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{E_{32}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{E_{31}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

矩阵的LU分解

- 2×2的例子

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \underset{\mathbf{E_{21}}}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{bmatrix}}\underset{\mathbf{A}}{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 7\end{bmatrix}}=\underset{\mathbf{U}}{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 8 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \boxed{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad \mathbf{A=LU}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{A=LDU}$$

L: 下三角矩阵

U: 上三角矩阵

D: 对角矩阵

矩阵的LU分解

➤ LDU分解

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \boxed{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{A=LU}$$

L: 下三角矩阵
U: 上三角矩阵
D: 对角矩阵

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{A=LDU}$$

$$\mathbf{U} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{13}/d_1 & \cdot \\ & 1 & u_{23}/d_2 & \cdot \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \quad \textbf{A=LDU}$$

矩阵的LU分解

上三角阵：对角线元素是主元

- 3×3的例子

$$A = E^{-1}U = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}U = LU$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{E_{21}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{E_{31}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{E_{32}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{3} & 1 & 0 \\ \boxed{3} & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}}$$

下三角阵：对角线元素是1，对角线下方是消元乘子

矩阵的LU分解

下三角阵L：对角线元素是1，对角线下方是消元乘子

$$A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$$

$$A=LU,EA=U\Rightarrow L=E^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\Leftarrow$$

$$u_1=a_1\Rightarrow a_1=u_1$$

$$u_2=a_2-l_{21}a_1\Rightarrow a_2=l_{21}u_1+u_2$$

$$u_3^{(1)}=a_3-l_{31}a_1\Rightarrow a_3=u_3^{(1)}+l_{31}u_1$$

$$u_3^{(2)}=u_3^{(1)}-l_{32}u_2\Rightarrow u_3^{(2)}=a_3-l_{31}u_1-l_{32}u_2$$

$$a_3=l_{31}u_1+l_{32}u_2+u_3^{(2)}$$

矩阵的LU分解

下三角阵L：对角线元素是1，对角线下方是消元乘子

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad A = LU, EA = U \Rightarrow L = E^{-1}$$

1. A可逆：不可逆没有唯一解，那么无法化成主元均不为零的上三角矩阵U

2.不存在行交换：

$$P_2 E_2 P_1 E_1 A = U \Rightarrow A = E_1^{-1} P_1^{-1} E_2^{-1} P_2^{-1} U$$

矩阵的LU分解

方程组有唯一解，但是无法直接做LU分解怎么办？

➢ 存在行交换的情况

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad PA=LU$$

A　　　　　　PA　　　　　　P

矩阵的LU分解

消元法的计算量

$n-1$ 阶

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

第一列完成消元计算量：

1. 计算消元乘子： $n-1$
2. 乘法： $n(n-1)$
3. 加减法： $n(n-1)$

共计算 $n-1$ 步

矩阵的LU分解

➢ 消元法的计算量

消元过程所需的乘除法次数为：

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1)=\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}\approx\frac{n^3}{3}$$

消元过程所需的加减法次数为：

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1)=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}\approx\frac{n^3}{3}$$

回代过程所需的乘除法次数为： $\frac{n(n+1)}{2}$

回代过程所需的加减法次数为： $\frac{n(n-1)}{2}$

结论：n阶方程组的求解复杂度是n^3

矩阵的LU分解

➢ 基于LU分解求解复杂度

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \xrightarrow{\mathbf{A} = \mathbf{LU}} \mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{Ly} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{Ux} &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} y_k$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \right)$$

前向回代+反向回代，

求解两个方程组

矩阵的LU分解

➢ 基于LU分解求解复杂度

极大降低了复杂度？

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \xrightarrow{\mathbf{A}=\mathbf{LU}} \mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \mathbf{Ly} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \end{array}}$$

$$y_1 = b_1$$

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} y_k$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \right)$$

1.前向回代：

$$\sum_{i=2}^{n} \Big(\overbrace{\boxed{(i-1)}}^{\text{乘法}} + \overbrace{\boxed{i-1-1+1}}^{\text{加减法}} \Big) = \sum_{i=2}^{n} (2i-2)$$

2.反向回代：

$$\sum_{i=n}^{1} \Big(\underbrace{\boxed{n-i+1}}_{\text{乘法}} + \underbrace{\boxed{n-(i+1)}}_{\text{加减法}} \Big) = \sum_{i=n}^{1} (2n-2i)$$

$\boxed{\text{结论：基于}LU\text{分解的求解复杂度是}n^2}$

矩阵的LU分解

- LU分解的意义

1.如果只求解一个线性方程组，消元和LU分解复杂度相同；

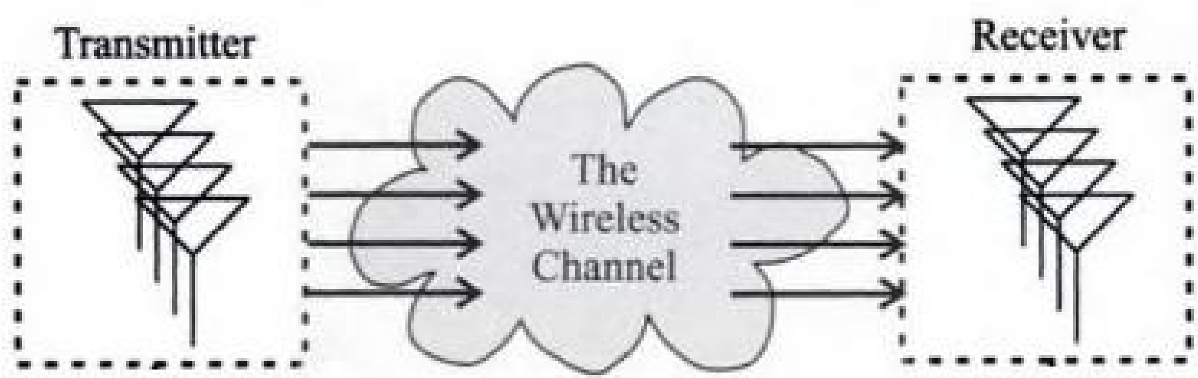
2.实际应用中，都需要求解多个方程组，共同点是系数矩阵相同，但是右侧向量b不同。

LU分解仅需一次，降低复杂度。

矩阵的LU分解

- LU分解的意义

多天线系统



$$y_1 = h_{11}x_1 + h_{12}x_2$$

$$y_2 = h_{21}x_1 + h_{22}x_2$$

$$\vec{y} = H\vec{x}$$

短期内信道状态可认为是平稳的，因此，H不变。

谢谢大家！