第五节 脉冲响应函数

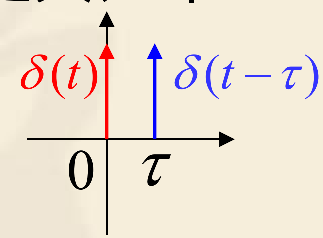
　　脉冲响应函数表示零初始条件时，线性系统对理想单位脉冲输入信号的响应。它也是线性系统的数学模型。

① 理想单位脉冲函数:

[定义]: $\delta(t)=\begin{cases}0, t\neq 0\\ \infty, t=0\end{cases}$，且 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$，其积分面积为1。

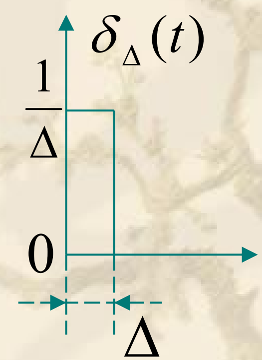
- 出现在$t=\tau$时刻，积分面积为A的理想脉冲函数定义如下:

$$A\delta(t-\tau)=\begin{cases}0, t\neq \tau\\ \infty, t=\tau\end{cases}\qquad 且\int_{-\infty}^{\infty}A\delta(t-\tau)dt=A$$



- 实际单位脉冲函数:

$$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}0,\ t<0 和 t>\Delta\\ \frac{1}{\Delta},\ 0<t<\Delta\end{cases},\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta_\Delta(t)dt=\Delta\times\frac{1}{\Delta}=1,$$



当$\Delta\to 0$时，$\delta_\Delta(t)=\delta(t)$

讨论线性控制系统在单位脉冲信号$\delta(t)$作用下的输出响应$g(t)$，称为脉冲响应函数。

$$\because L[\delta(t)]=1, \therefore Y(s)=1\times G(s),$$

$$故: y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[G(s)]=g(t)$$

从上式可以看出，$g(t)$是系统的脉冲响应函数，它等于系统传递函数的拉氏反变换。$g(t)$与$G(s)$有一一对应的关系。$g(t)$也是线性控制系统的数学模型。

[例2-16]：设系统的脉冲响应函数是 $g(t)=4e^{-\frac{1}{2}t}$，求$G(s)$。

[解]： $G(s)=L[g(t)]=L[4e^{-\frac{1}{2}t}]=\dfrac{4}{s+1/2}=\dfrac{8}{2s+1}$

可以不证明地表示出：利用脉冲响应函数$g(t)$，可以求出系统在任何输入$x(t)$下的输出响应$y(t)$。

$$y(t)=\int_0^\infty x(\tau)g(t-\tau)d\tau \text{ 或 } y(t)=\int_0^\infty g(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

式中，$g(t)$是脉冲响应函数，上述两式称为卷积。

表示为：$y(t)=x(t)*g(t)=g(t)*x(t)$

根据拉氏变换的卷积定理，有$L[y(t)]=L[x(t)*g(t)]$，所以：$Y(s)=X(s)G(s)$

② 单位阶跃响应函数:

单位阶跃响应函数也是线性控制系统的一种数学模型。它是在单位阶跃函数1(t)的作用下的输出响应$h(t)$。

$$x(t)=1(t)=\begin{cases}0, t<0\\1, t\geq 0\end{cases}$$

$$X(s)=L[x(t)]=L[1(t)]=\frac{1}{s}$$

则输出: $y(s)=\frac{1}{s}G(s)$

单位阶跃响应函数: $h(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s}G(s)]$

③ 脉冲响应函数和单位阶跃响应函数之间的关系

$$g(t)=L^{-1}[G(s)],\ \ h(t)=L^{-1}[G(s)/s]$$

根据积分定理：当零初值时，有

$$L[\int g(t)dt]=\frac{G(s)}{s},\ \ 则: \mathrm{L}^{-1}[\frac{\mathrm{G(s)}}{\mathrm{s}}]=\int \mathrm{g(t)dt}$$

$$\therefore h(t)=\int g(t)dt$$

$$或 g(t)=\frac{dh(t)}{dt}$$

小结

- 脉冲响应函数
- 脉冲响应函数与传递函数之间的关系
- 单位阶跃响应函数
- 脉冲响应函数和单位阶跃响应函数之间的关系

本章总结

- 讨论了控制系统数学模型问题，数学模型是实际系统与控制理论联系的桥梁，建立系统的数学模型是对系统进行分析的第一步。
- 介绍了时域和频域的数学模型：系统的微分方程，传递函数，方块图，信号流图，脉冲响应函数等。请注意各种数学模型之间的联系。
- 本章研究的数学模型是基于线性定常控制系统的，是研究输入输出之间的关系，不涉及系统内部状态的变化，故称为输入/输出模型。

基本要求

- 会列写控制系统中常用元件的数学模型以及根据系统的组成列写系统的微分方程
- 根据微分方程求传递函数的方法
- 熟悉绘制方块图和信号流图的方法
- 熟悉由方块图和信号流图求取传递函数的方法
  - 方块图和信号流图的等效变换
  - 在方块图和信号流图上，用列方程的方法求传递函数
  - 梅森增益公式