

1. 1 解:

- | | | |
|--------------------|--------------|--------------|
| (1) 机器人踢足球: 开环系统 | 输入量: 足球位置 | 输出量: 机器人的位置 |
| (2) 人的体温控制系统: 闭环系统 | 输入量: 正常的体温 | 输出量: 经调节后的体温 |
| (3) 微波炉做饭: 开环系统 | 输入量: 设定的加热时间 | 输出量: 实际加热的时间 |
| (4) 空调制冷: 闭环系统 | 输入量: 设定的温度 | 输出量: 实际的温度 |

1. 2 解:

开环系统: 优点: 结构简单, 成本低廉; 增益较大; 对输入信号的变化响应灵敏; 只要被控对象稳定, 系统就能稳定工作。

缺点: 控制精度低, 抗扰动能力弱

闭环控制 优点: 控制精度高, 有效抑制了被反馈包围的前向通道的扰动对系统输出量的影响; 利用负反馈减小系统误差, 减小被控对象参数对输出量的影响。

缺点: 结构复杂, 降低了开环系统的增益, 且需考虑稳定性问题。

1.3

解: 自动控制系统分两种类型: 开环控制系统和闭环控制系统。

开环控制系统的特点是: 控制器与被控对象之间只有顺向作用而无反向联系, 系统的被控变量对控制作用没有任何影响。系统的控制精度完全取决于所用元器件的精度和特性调整的准确度。只要被控对象稳定, 系统就能稳定地工作。

闭环控制系统的特点:

- (1) 闭环控制系统是利用负反馈的作用来减小系统误差的
- (2) 闭环控制系统能够有效地抑制被反馈通道包围的前向通道中各种扰动对系统输出量的影响。
- (3) 闭环控制系统可以减小被控对象的参数变化对输出量的影响。

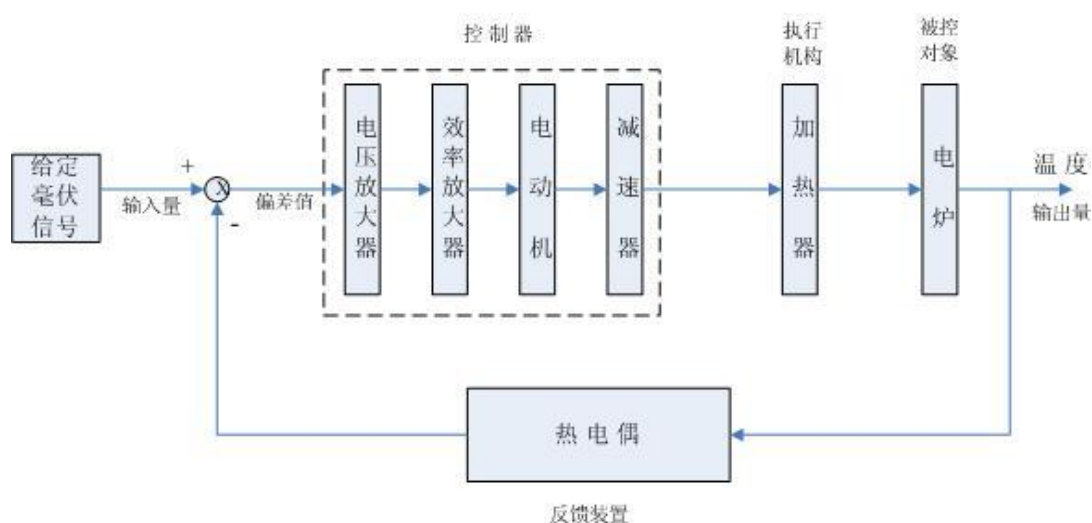
1.4 解

输入量: 给定毫伏信号

被控量: 炉温

被控对象: 加热器 (电炉)

控制器: 电压放大器和功率放大器



系统原理方块图如下所示:

工作原理: 在正常情况下, 炉温等于期望值时, 热电偶的输出电压等于给定电压, 此时偏

差信号为零，电动机不动，调压器的滑动触点停留在某个合适的位置上。此时，炉子散失的热量正好等于从加热器获取的热量，形成稳定的热平衡状态，温度保持恒定。

当炉温由于某种原因突然下降时，热电偶的输出电压下降，与给定电压比较后形成正偏差信号，该偏差信号经过电压放大器、功率放大器放大后，作为电动机的控制电压加到电动机上，电动机带动滑线变阻器的触头使输出电压升高，则炉温回升，直至达到期望值。当炉温高于期望值时，调节过程相反。

1.5 解

不正确。引入反馈后，形成闭环控制系统，输出信号被反馈到系统输入端，与参考输入比较后形成偏差信号，控制器再按照偏差信号的大小对被控对象进行控制。在这个过程中，由于控制系统的惯性，可能引起超调，造成系统的等幅振荡或增幅振荡，使系统变得不稳定。所以引入反馈之后会带来系统稳定性的问题。

1.6

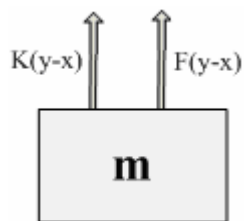
解：

对自动控制系统的基本要求是：稳定性、快速性和准确性。

增大系统增益使得闭环控制系统的调整时间减小，提高系统的快速性。

2.1 解

对质量 m 的受力分析如下图所示：



由牛顿第二定律得：

$$-kz(t) - f \frac{dz(t)}{dt} = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

同时 $z(t) = y(t) - x(t)$

综合上述两式得其微分方程为

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + f \frac{dz(t)}{dt} + kz(t) = -m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

设输入量输出量及其各阶导数的初始值均为零，对上式进行拉氏变换得式

$$ms^2 Z(s) + fsZ(s) + kZ(s) = -ms^2 X(s)$$

$$\text{故其传递函数为 } G(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = -\frac{ms^2}{ms^2 + fs + k}$$

2.2 解

受力分析得：

对于 M 有：

$$Mg \sin \theta = ML \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$F = Mg \cos \theta$$

对于 m 有：

$$F \sin \theta - \frac{k}{2}x - \frac{k}{2}x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

整理后得：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{L} \sin \theta$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{M}{m} g \cos \theta \sin \theta - \frac{k}{m} x$$

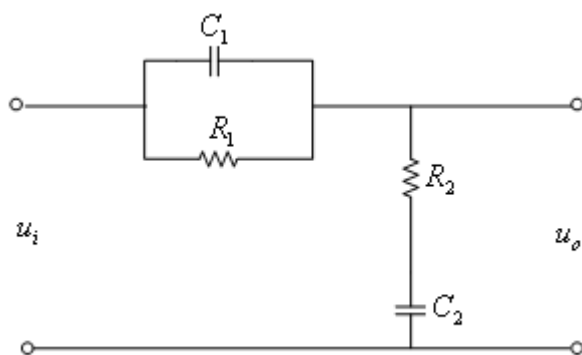
削去 θ 的系统的微分方程：

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x - \frac{M}{m} L \ddot{\theta} = 0$$

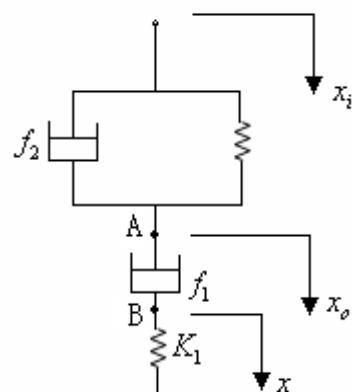
对上式做拉普拉斯变换后整理得系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{ms^2 + k}{MLs^2}$$

2.3 解



(a) 电气系统



(b) 机械系统

证：(a) 由电路可得：

$$\begin{aligned} \frac{u_o}{u_i} &= \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 S}}{R_2 + \frac{1}{C_2 S} + \frac{R_1 \frac{1}{C_1 S}}{R_1 + \frac{1}{C_1 S}}} = \frac{(R_2 + \frac{1}{C_2 S})(R_1 + \frac{1}{C_1 S})}{(R_2 + \frac{1}{C_2 S})(R_1 + \frac{1}{C_1 S}) + R_1 \frac{1}{C_1 S}} \\ &= \frac{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2) S + 1}{R_1 R_2 C_1 C_2 S^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) S + 1} \end{aligned}$$

则其微分方程为：

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_o}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) \frac{du_o}{dt} + u_o = R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 u_i}{dt^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2) \frac{du_i}{dt} + u_i$$

(b) 取 A、B 两点进行受力分析，列出方程得：

$$f_2 \frac{d(x_i - x_o)}{dt} + k_2(x_i - x_o) = f_1 \frac{d(x_o - x)}{dt} \quad (1)$$

$$f_1 \frac{d(x_o - x)}{dt} = k_1 x \quad (2)$$

由 (1) 式、(2) 式得

$$f_2 \frac{dx_i}{dt} - f_2 \frac{dx_o}{dt} + k_2 x_i - k_2 x_o = k_1 x \quad (3)$$

$k_1 \times (1) + f_1 \times (3)$ 得

$$f_1 f_2 \frac{d^2 x_o}{dt^2} + (f_1 k_1 + f_1 k_2 + f_2 k_1) \frac{dx_o}{dt} + k_1 k_2 x_o = f_1 f_2 \frac{d^2 x_i}{dt^2} + (f_1 k_2 + f_2 k_1) \frac{dx_i}{dt} + k_1 k_2 x_i$$

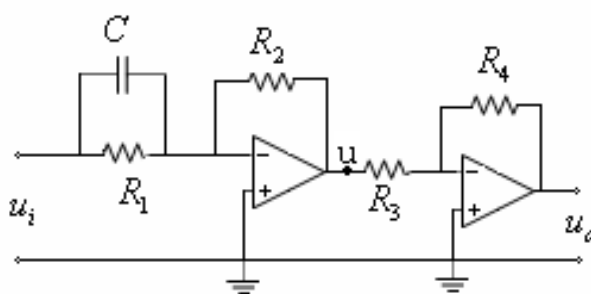
经比较，电气系统 (a) 与机械系统 (b) 的微分方程具有相同的形式，故两个系统为相似系统。

2.4 解

$$\text{传递函数 } \frac{U_o}{U_i} = \frac{\frac{1}{c_2 s}}{\frac{1}{c_1 s} + sL + \frac{1}{c_2 s}} = \frac{c_1}{c_1 + c_2 + c_1 c_2 L s^2}$$

$$\text{微分方程 } (c_1 + c_2)u_o + c_1 c_2 L \frac{d^2 u_o}{dt^2} = c_1 u_i$$

2.5 解



由电路得：

$$\frac{u_i}{R_1 \frac{1}{CS}} = -\frac{u}{R_2} \quad (1)$$

$$\frac{u}{R_3} = -\frac{u_o}{R_4} \quad (2)$$

综合 (1)、(2) 式，消去变量 u ，可得其传递函数为：

$$G(s) = \frac{u_o}{u_i} = \frac{R_1 R_2 R_4 C s + R_2 R_4}{R_1 R_3}$$

进而得其微分方程为

$$\frac{R_2 R_4 C}{R_3} \frac{du_i}{dt} + \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} u_i = u_o$$

2.6 解

对系统中各个部分建立相应的微分方程如下：

$$u_c = R_c i_c + L_c \frac{di_c}{dt}$$

$$u_{12} = u_q = k_1 i_c = R_q i_q + L_q \frac{di_q}{dt}$$

$$u_{34} = u_d = (R_a + R_d) i_d + (L_a + L_d) \frac{di_d}{dt}$$

$$u_a = R_d i_d + L_d \frac{di_d}{dt}$$

$$T_m \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} = k_1 u_a$$

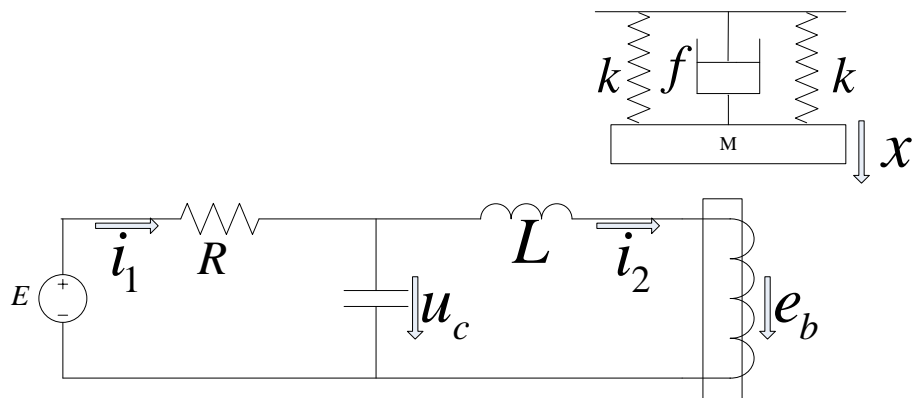
对上面各式拉氏变换并整理得到：

$$\begin{cases} I_c(s) = \frac{1}{R_c + L_c s} U_c(s) \\ I_q(s) = \frac{k_1}{R_q + L_q s} I_c(s) \\ I_d(s) = \frac{k_2}{(R_a + R_d) + (L_a + L_d)s} I_q(s) \\ U_a(s) = (R_a + L_a s) I_d(s) \\ \theta(s) = \frac{k_1}{s(1 + T_m s)} U_a(s) \end{cases}$$

对上式削去中间变量得到系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U_c(s)} = \frac{k_1^2 k_2 (R_a + L_a s)}{s(1 + T_m s) [(R_a + R_d) + (L_a + L_d)s] (R_q + L_q s) (R_c + L_c s)}$$

2.7 解



由图示及题中条件得：

$$\begin{cases} e(t) = Ri_1(t) + u_c(t) \\ i_1(t) - i_2(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \\ u_c(t) - e_b(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} \\ e_b(t) = k_1 \frac{dx}{dt} \\ F_0 = k_2 i_2(t) \\ F_0 - 2kx(t) - f \frac{dx(t)}{dt} = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \end{cases}$$

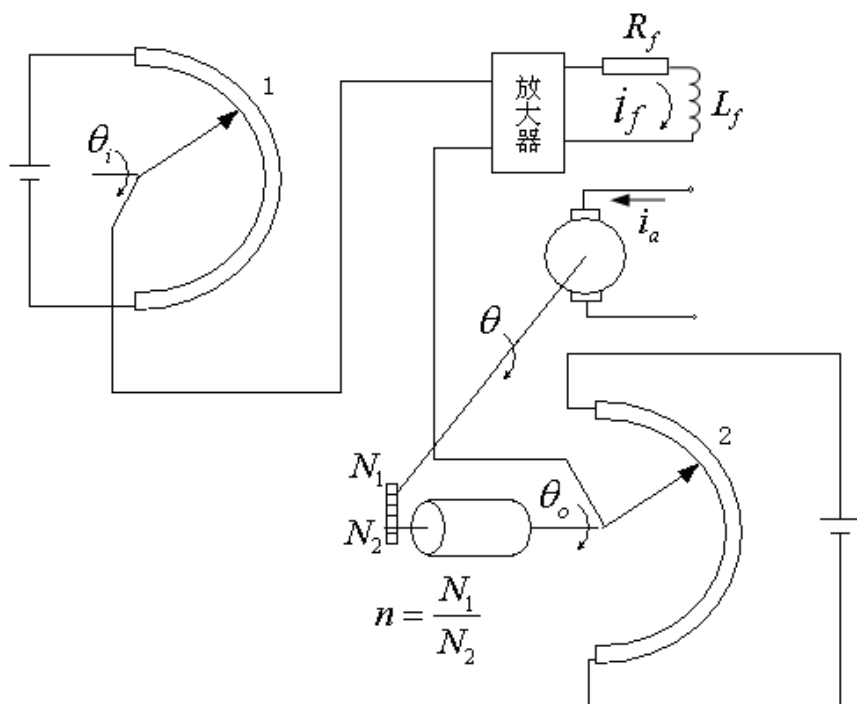
对上式进行拉式变换得：

$$\begin{cases} E(S) = RI_1(S) + U_c(S) \\ I_1(S) - I_2(S) = CSU_c(S) \\ U_c(S) - E_b(S) = LSI_2(S) \\ E_b(S) = k_1 SX(S) \\ F_0 = k_2 I_2(S) \\ F_0 - 2kX(S) - fSX(S) = MS^2 X(S) \end{cases}$$

则通过消去中间变量得传递函数如下：

$$G(S) = \frac{X(S)}{E(S)} = \frac{k_2}{(RCLS^2 + LS + R)(MS^2 + fS + 2k) + k_2(RCk_1S^2 + k_1S)}$$

2.8 解



由题意得：

$$\begin{cases} [\theta_i(t) - \theta_o(t)]k_1 = u_e(t) \\ k_2 u_e(t) = i_f(t)R_f + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \\ \theta(t) = \frac{N_1}{N_2} \theta_o(t) \\ M(t) = k_m i_f(t) \\ J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + f \frac{d\theta(t)}{dt} = M(t) \end{cases}$$

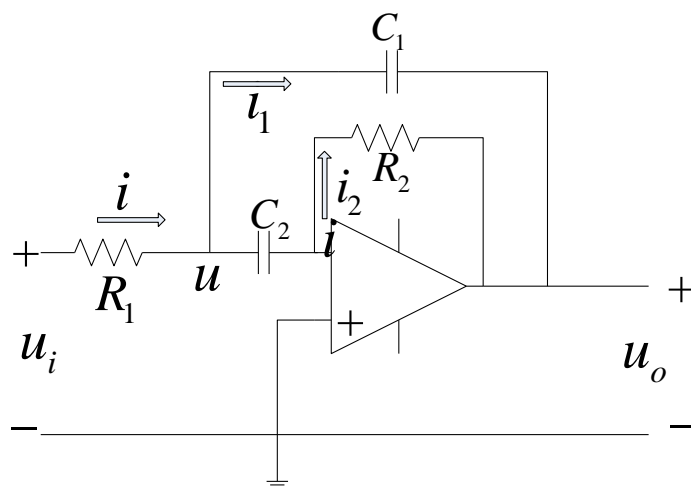
其中 k_m 为磁控式电动机转矩系数，令初始条件为零，作拉氏变换得：

$$\begin{cases} [\theta_i(S) - \theta_o(S)]k_1 = U_e(S) \\ k_2 U_e(S) = I_f(S)R_f + L_f I_f(S)S \\ \theta(S) = \frac{N_1}{N_2} \theta_o(S) \\ M(S) = k_m I_f(S) \\ J \theta(S)S^2 + f \theta(S)S = M(S) \end{cases}$$

解得：

$$G(S) = \frac{\theta_o(S)}{\theta_i(S)} = \frac{k_1 k_2 k_m N_2}{k_1 k_2 k_m N_2 + N_1 (JS^2 + fS)(L_f S + R_f)}$$

2.9 解 由图示得电路的微分方程如下：

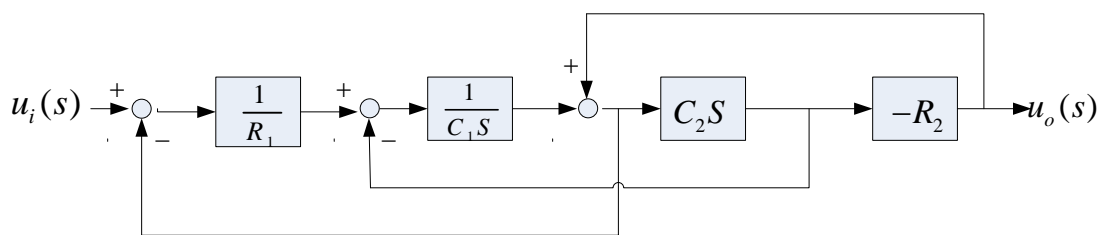


$$\begin{cases} u_i(t) - u(t) = i(t)R_1 \\ i = i_1 + i_2 \\ C_1 \frac{d[u(t) - u_o(t)]}{dt} = i_1(t) \\ i_2(t)R_2 = -u_o(t) \\ C_2 \frac{du(t)}{dt} = i_2(t) \end{cases}$$

作拉氏变换得：

$$\begin{cases} U(S) = U_i(S) - I(S)R_1 \\ I(S) = I_1(S) + I_2(S) \\ C_1 S [U(S) - U_o(S)] = I_1(S) \\ I_2(S)R_2 = -U_o(S) \\ C_2 S U(S) = I_2(S) \end{cases}$$

则初始方块图如下：

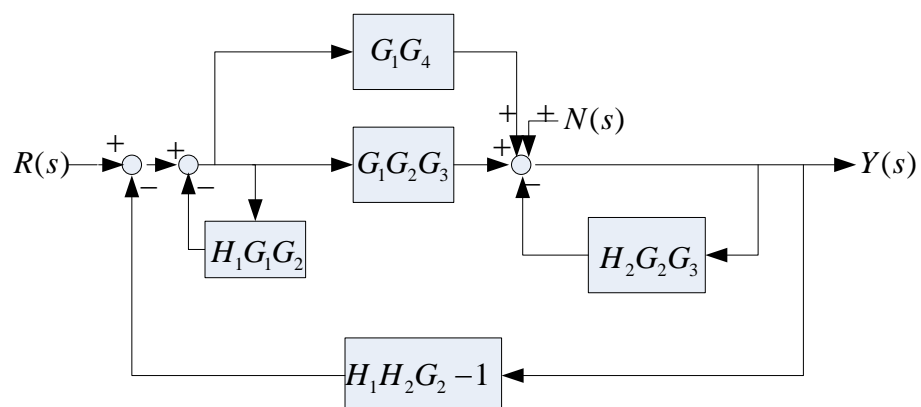
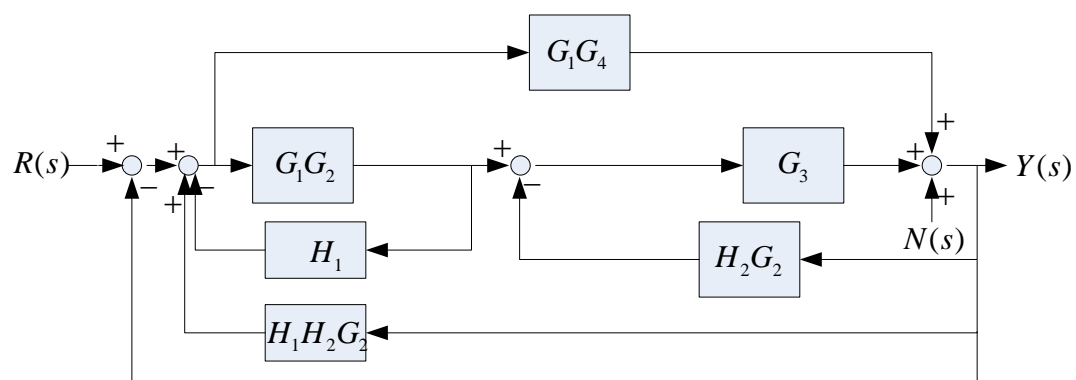
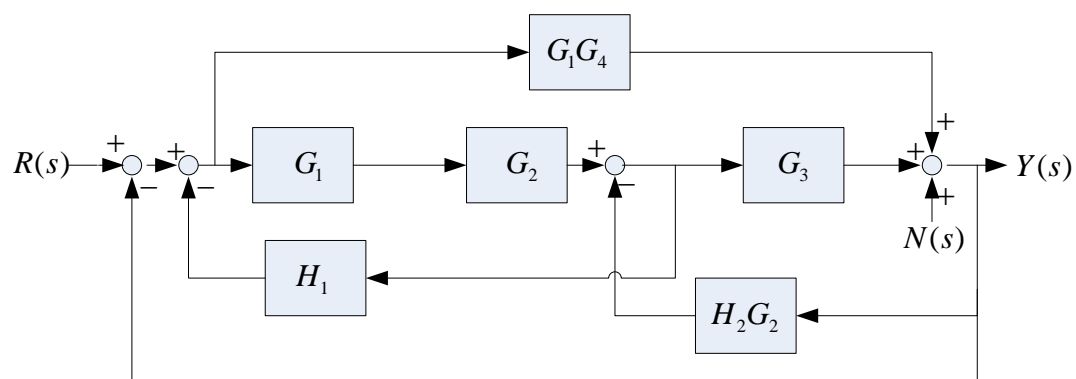
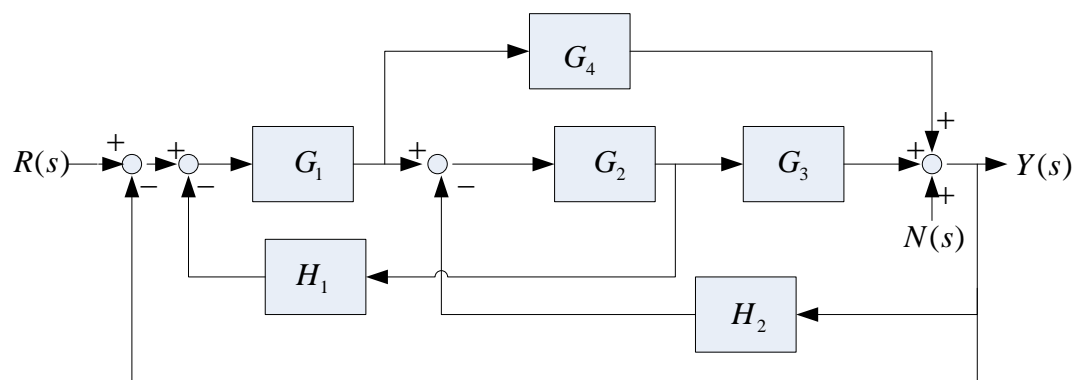


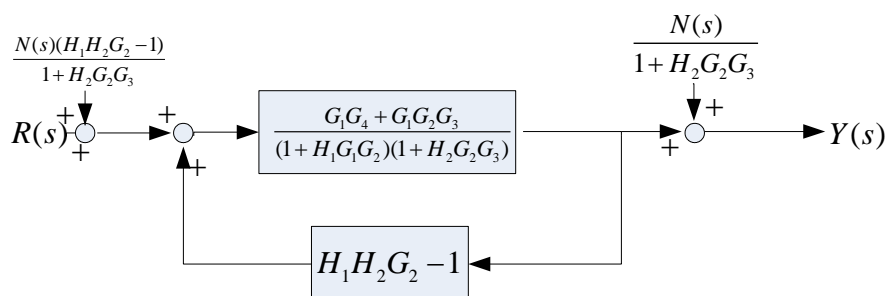
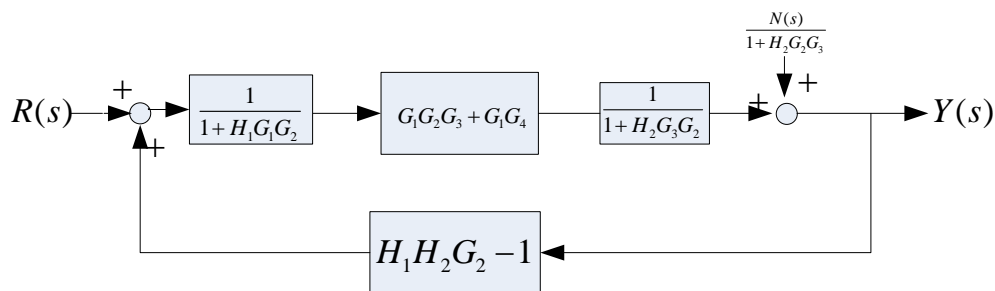
由梅森公式得其传递函数如下：

$$G(S) = \frac{U_o(S)}{U_i(S)} = \frac{-C_2 R_2 S}{C_1 C_2 R_1 R_2 S^2 + C_1 R_1 S + C_2 R_1 S + 1}$$

2.10 解

对方块图进行简化得：





由梅森公式得

$$\frac{G_1G_4 + G_1G_2G_3}{1 + H_2G_2G_3 + H_1G_1G_2 + G_1G_2G_3 + G_1G_4 - H_1H_2G_1G_2G_4} R(S) + \frac{1 + H_1G_1G_2}{1 + H_2G_2G_3 + H_1G_1G_2 + G_1G_2G_3 + G_1G_4 - H_1H_2G_1G_2G_4} N(S) = Y(S) \quad (1\text{式})$$

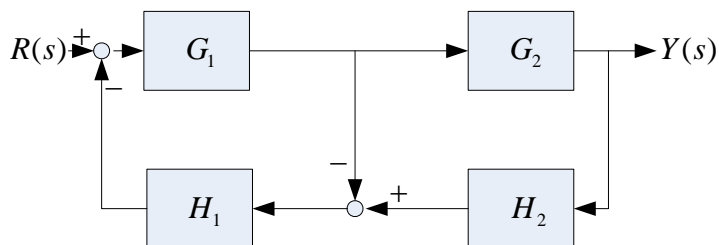
(1) 当 $N(S)$ 为零时可得传递函数为:

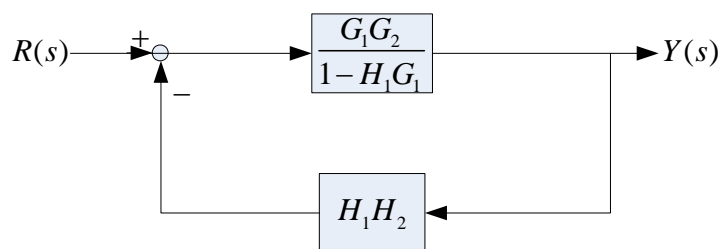
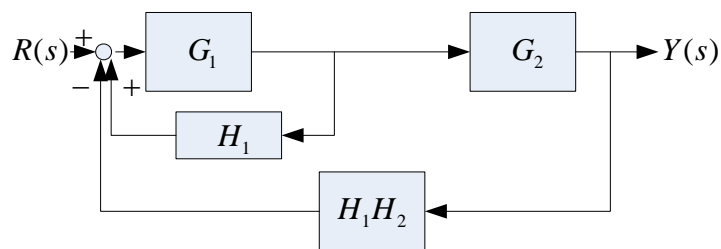
$$G(S) = \frac{G_1G_4 + G_1G_2G_3}{1 + H_2G_2G_3 + H_1G_1G_2 + G_1G_2G_3 + G_1G_4 - H_1H_2G_1G_2G_4}$$

(2) 由 (1 式) 得当 $1 + H_1G_1G_2 = 0$ 时, 输出 $Y(S)$ 不受干扰 $N(S)$ 的影响。

2.11 解

(a) (1) 方块图化简如下所示:

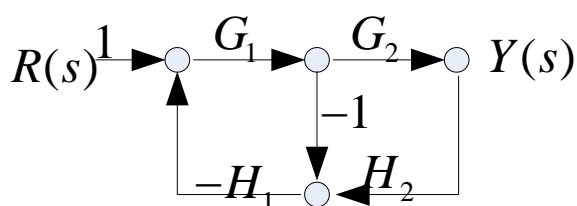




从而可得其传递函数为：

$$G(S) = \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 H_1 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

(2) 其信号流图如下所示：

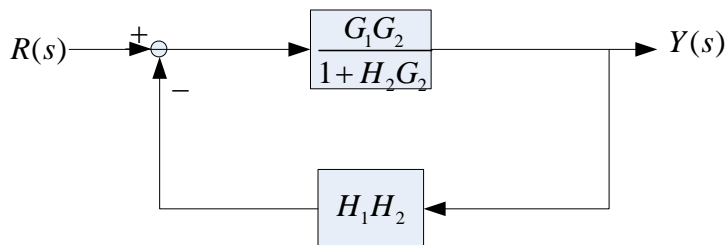
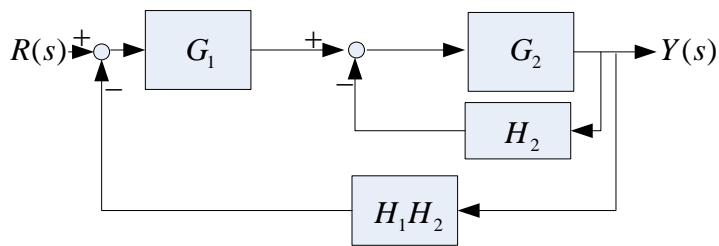
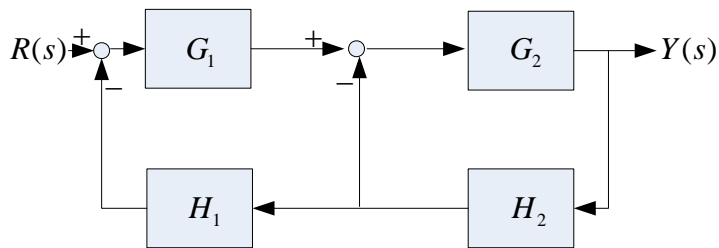


系统信号流图中共有 2 个回路。增益分别为 $L_1 = G_1 H_1$ $L_2 = -G_1 G_2 H_1 H_2$ ，无两两不接触回路。所以信号的特征式 $\Delta = 1 - (G_1 H_1 - G_1 G_2 H_1 H_2)$ 。

系统有 1 条前向通路，增益为 $P_1 = G_1 G_2$ ，回路均与此前向通路接触，故 $\Delta_1 = 1$ ，从而可得其传递函数为

$$G(S) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2}{1 - G_1 H_1 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

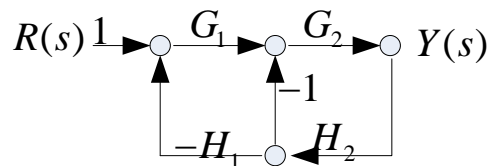
(b) (1) 方块图化简如下所示：



从而可得其传递函数为：

$$G(S) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

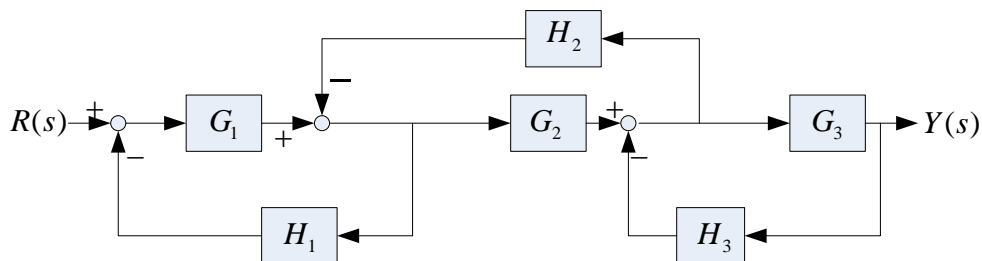
(2) 其信号流图如下所示：

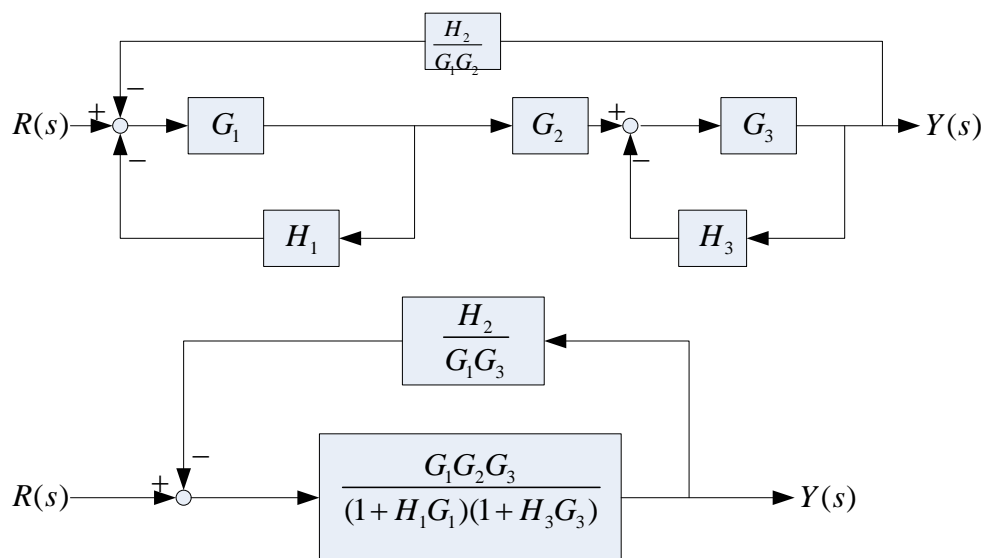


与 a 原理相同可得其传递函数为：

$$G(S) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

(c) (1) 方块图化简如下所示：

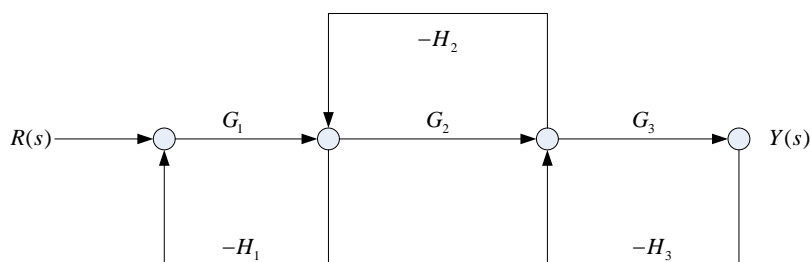




从而可得其传递函数为：

$$G(S) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3 + H_1 H_3 G_1 G_3}$$

(2) 其信号流图如下所示：

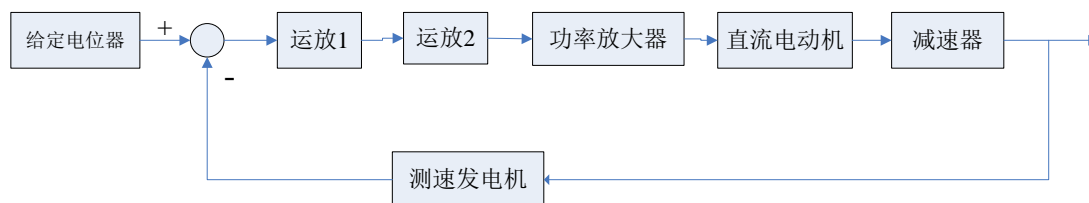


与 a 原理相同可得其传递函数为：

$$G(S) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + H_1 G_1 + H_2 G_2 + H_3 G_3 + H_1 H_3 G_1 G_3}$$

2.12 解

速度控制系统的方框图为：

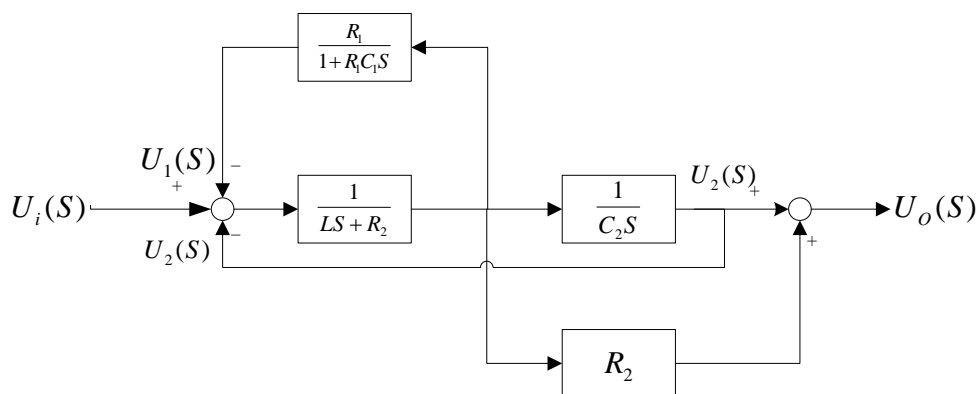


该系统的微分方程为

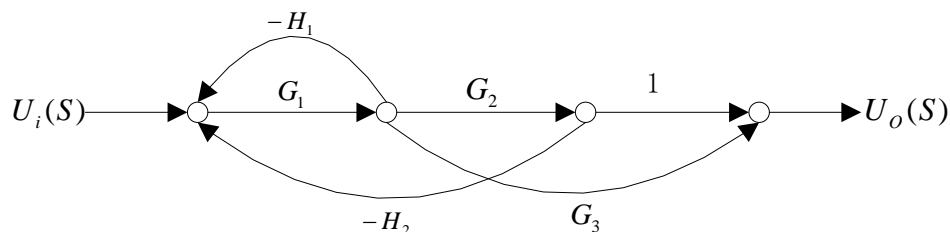
$$T_m' \frac{d\omega}{dt} + \omega = K_g' \frac{du_i}{dt} + K_g u_i - K_c' M_c$$

当 $M_c = 0$ 时，传递函数为 $\frac{\omega}{U_i} = \frac{K_g' s + K_g}{T_m' s + 1}$

2. 13 解： 例 2.4.1 中的方块图如下所示：



其对应的信号流图为：

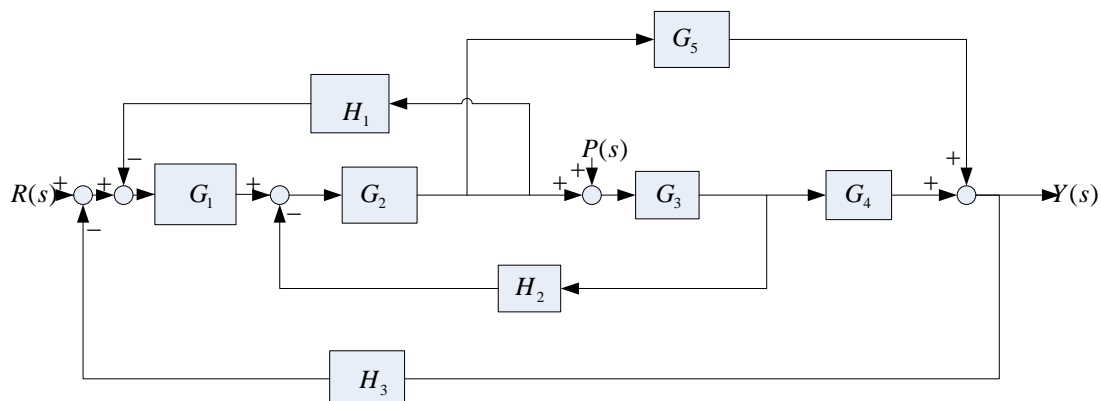


其中 $G_1 = \frac{1}{LS + R_2}$ $G_2 = \frac{1}{C_2S}$ $G_3 = R_2$ $H_1 = \frac{R_1}{1 + R_1C_1S}$ $H_2 = 1$

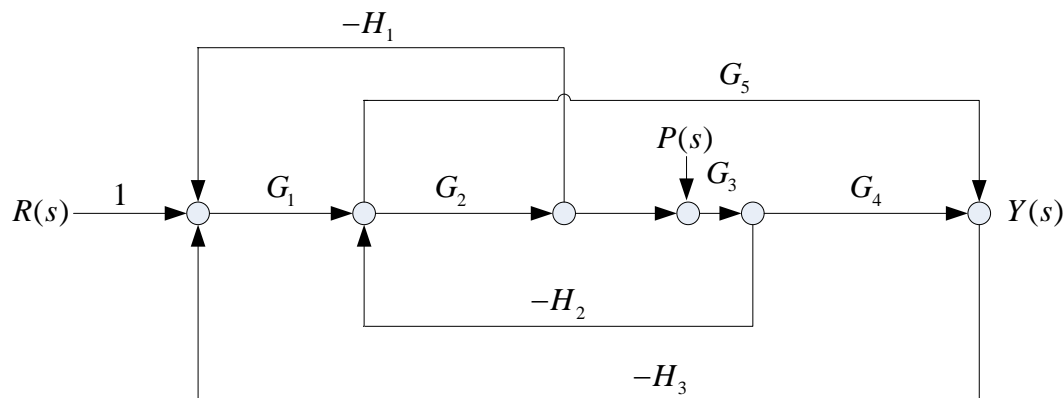
由梅森公式得：

$$G(S) = \frac{U_o(S)}{U_i(S)} = \frac{G_1G_2 + G_1G_3}{1 + G_1H_1 + G_1G_2H_2} = \frac{(\frac{1}{LS + R_2})(\frac{1}{C_2S} + R_2)}{1 + (\frac{1}{LS + R_2})(\frac{R_1}{1 + R_1C_1S} + \frac{1}{C_2S})} = \frac{R_1R_2C_1C_2S^2 + (R_1C_1 + R_2C_2)S + 1}{R_1C_1C_2LS^3 + (R_1C_1C_2R_2 + LC_2)S^2 + (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)S + 1}$$

2.14 解



系统对应的信号流图如下所示：



由梅森公式得

$$\frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3 + G_1 G_5 H_3} R(S) + \frac{G_3 G_4 (1 + G_1 G_2 H_1) - G_3 G_5 H_2}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3} P(S) = Y(S) \quad (1 \text{式})$$

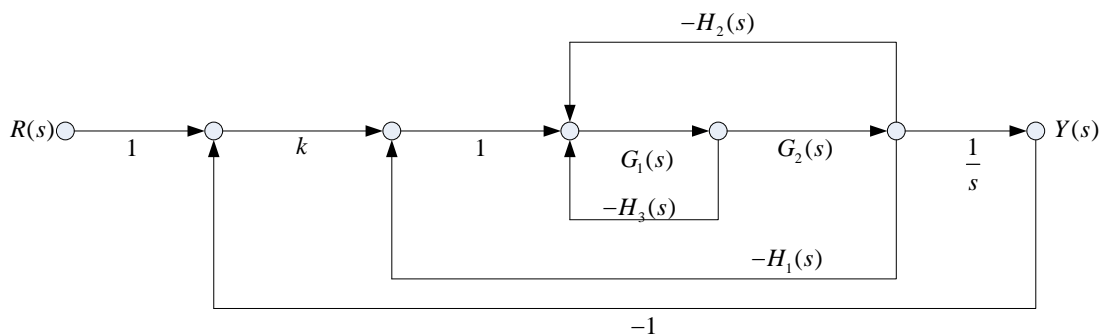
(1) 当 $N(S)$ 为零时可得传递函数为:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_5}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_3 + G_1 G_5 H_3}$$

(2) 由 (1 式) 得当 $G_3 G_4 (1 + G_1 G_2 H_1) - G_3 G_5 H_2 = 0$ 时, 输出 $Y(S)$ 不受干扰 $P(S)$

的影响, 此时可得 $G_4 (1 + G_1 G_2 H_1) = G_5 H_2$

2.15 解



系统信号流图有 4 个回路, 增益如下:

$$L_1 = -H_3(S)G_1(S) \quad L_2 = -H_2(S)G_1(S)G_2(S)$$

$$L_3 = -H_1(S)G_1(S)G_2(S) \quad L_4 = -\frac{k}{S}G_1(S)G_2(S)$$

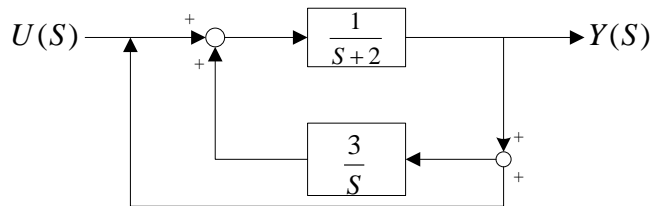
无两两不接触回路, 系统有 1 个前向通路, 其增益为 $P_1 = \frac{k}{S}G_1(S)G_2(S)$ 。所有回路均

与 P_1 接触, 所以 $\Delta_1 = 1$ 。从而可得其传递函数为:

$$G(S) = \frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{kG_1(S)G_2(S)}{kG_1(S)G_2(S) + S[1 + H_3(S)G_1(S) + H_2(S)G_1(S)G_2(S) + H_1(S)G_1(S)G_2(S)]}$$

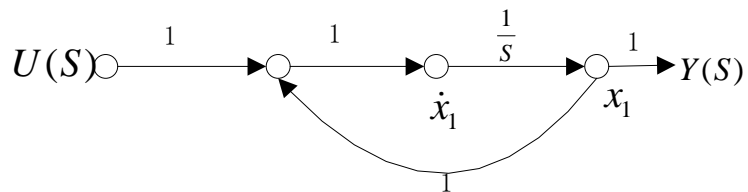
2.17 解

(a) 方块图为:



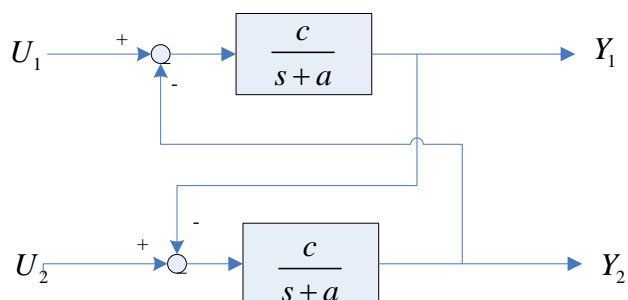
其传递函数为: $G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{\frac{1}{S+2} + \frac{3}{S(S+2)}}{1 - \frac{3}{S(S+2)}} = -\frac{1}{S-1}$

其信号流图为:



其状态方程为: $\dot{x}_1 = x_1 + u \quad y = x_1$

(b)



由框图得其传递函数为:

$$Y_1 = \frac{(S+a)C}{(S+a)^2 - C^2} U_1 + \frac{-C^2}{(S+a)^2 - C^2} U_2$$

$$Y_2 = \frac{-C^2}{(S+a)^2 - C^2} U_1 + \frac{(S+a)C}{(S+a)^2 - C^2} U_2$$

故可得其状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a^2 - c^2) & -2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_2$$

$$y_1 = [ac - c^2, c] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

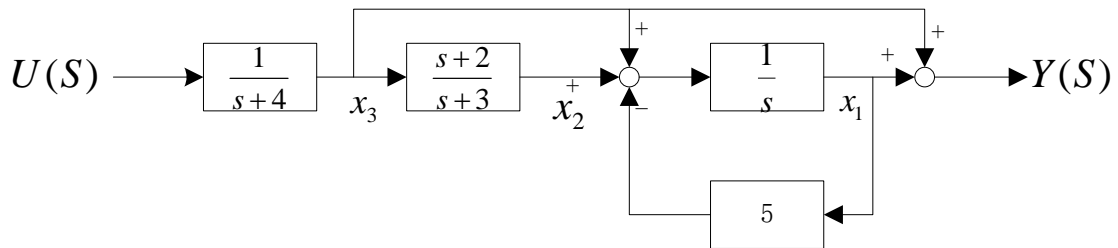
$$y_2 = [ac - c^2, c] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

综合得：

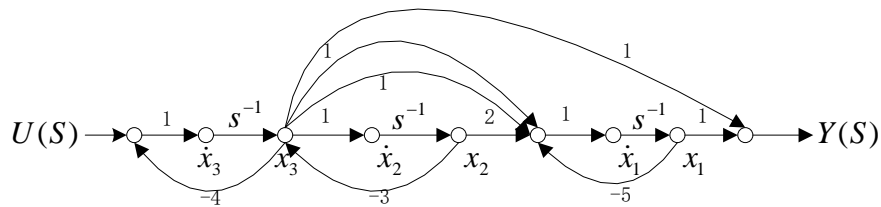
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a^2 - c^2) & -2a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - c^2 & c \\ ac - c^2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(c)



由方块图得信号流图：



故 $\dot{x}_1 = -5x_1 + 2x_2 + x_3$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 + 2x_3$$

$$\dot{x}_3 = -4x_3 + U$$

$$y = x_1 + x_3$$

其状态方程为：

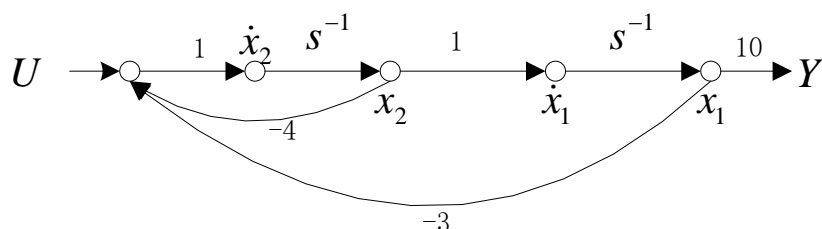
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$y = \begin{bmatrix} 1, 0, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2. 19 解：状态空间的表达式为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_1 \quad y = \begin{bmatrix} 10, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(1) 得其信号流图为：



故其传递函数为： $G(s) = \frac{10S^{-2}}{1 + 4S^{-1} + 3S^{-2}} = \frac{10}{S^2 + 4S + 3}$

(2) 用矩阵法得出的传递函数为：

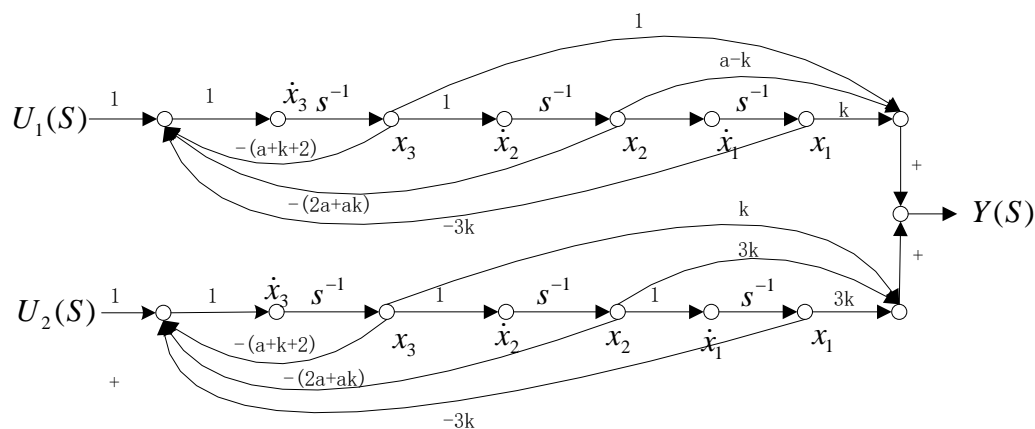
$$G(s) = ([SI - A]^{-1} B + 1) = \begin{bmatrix} 10, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & S-1 \\ S+3 & S+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{10}{S^2 + 4S + 3}$$

2. 21 解：

(1) 其传递函数：

$$Y(S) = \frac{S^2 + (a-k)s + k}{S^3 + (a+k+2)S^2 + (2a+ak)S + 3k} U_1(S) + \frac{kS^2 + 3kS + 3k}{S^3 + (a+k+2)S^2 + (2a+ak)S + 3k} U_2(S)$$

故可得信号流图：



故可得：

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = x_3 \quad \dot{x}_3 = -3kx_1 - (2a + ak)x_2 - (a + k + 2)x_3 + U_1(s) + U_2(s)$$

$$y = kx_1 + (a - k)x_2 + x_3 + 3kx_1 + kx_3 = 4kx_1 + (a + 2k)x_2 + (k + 1)x_3$$

故其状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3k & -(2a + ak) & -(a + k + 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_1(S) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U_2(S)$$

$$y = [4k, a + 2k, k + 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2) 用矩阵法得:

$$G(S) = ([SI - A]^{-1} B + 1) \\ = [4k, a + 2k, k + 1] = \left[\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3k & -(2a + ak) & -(a + k + 2) \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.1 答: 该系统不存在, 任何一阶系统的单位阶跃响应都不能超过 1。

3.2 解:

假设系统的初始条件为零, 则系统的传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{0.5s + 1}$$

(1) 单位脉冲响应

输入信号为单位脉冲信号 $r(t) = \delta(t)$, 其拉氏变换为 $R(s) = 1$,

$$\text{则系统的输出为 } Y(s) = \frac{10}{0.5s + 1}$$

则系统的单位脉冲响应函数为: $y(t) = 20e^{-2t}, t \geq 0$

(2) 单位阶跃响应

输入信号为单位阶跃信号 $r(t) = 1(t)$, 其拉氏变换为 $R(s) = \frac{1}{s}$

$$\text{则系统的输入为 } Y(s) = \frac{10}{s(0.5s + 1)}$$

则系统的单位阶跃响应函数为: $y(t) = 10 - 10e^{-2t}, t \geq 0$

(3) 单位斜坡响应

输入信号为单位斜坡信号 $r(t) = t$, 其拉氏变换为 $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\text{则系统的输出为 } Y(s) = \frac{10}{s^2(0.5s + 1)}$$

则系统的单位斜坡响应函数为: $y(t) = 10t - 5(1 - e^{-2t}), t \geq 0$

3.3 解:

(1) 输入信号的拉氏变换为 $R(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$, 输出为 $Y(s) = \frac{1}{s^2} + 0.8\frac{1}{s} - 0.8\frac{1}{s+5}$

则系统的闭环传递函数为: $\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s+5}$

开环传递函数为: $G(s) = \frac{5}{s}$

(2) 系统的单位阶跃响应为: $Y(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{5}{s(s+5)}$, 则 $T = 0.2$

系统的上升时间为: $t_r = 2.197T = 0.4394$

调整时间为: $t_s = \begin{cases} 0.8, \Delta = 2 \\ 0.6, \Delta = 5 \end{cases}$

超调量不存在。

3.4 解

证明: 当初始条件为零时, 有 $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}$

单位阶跃输入信号为 $R(s) = \frac{1}{s}$

所以, 系统的输出为 $Y(s) = \frac{\tau s + 1}{Ts + 1} R(s) = (\frac{\tau s + 1}{Ts + 1}) \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T - \tau}{Ts + 1}$

$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 - \frac{T - \tau}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

根据定义, (1) 当 $t_s = T[3 + \ln \frac{T - \tau}{T}]$

所以 $t_d = (0.693 + \ln \frac{T - \tau}{T})T$

(2) 求 t_r (即 $y(t)$ 从 $0.1 \rightarrow 0.9$ 时所需的时间)

当 $y(t) = 1 - \frac{T - \tau}{T} e^{-\frac{t_2}{T}} = 0.9$ 时, 有 $t_2 = T[\ln(\frac{T - \tau}{T}) - \ln 0.1]$

当 $y(t) = 1 - \frac{T - \tau}{T} e^{-\frac{t_1}{T}} = 0.1$ 时, 有 $t_1 = T[\ln(\frac{T - \tau}{T}) - \ln 0.9]$

则 $t_r = t_2 - t_1 = T \ln \frac{0.9}{0.1} = 2.2T$

(3) 求调整时间 t_s

假设误差宽度 $\Delta=5$, 则有

$$y(t_s) = 1 - \frac{T-\tau}{T} e^{-\frac{t_s}{T}} = 0.95$$

解得 $t_s = T[3 + \ln \frac{T-\tau}{T}]$

3.5 解:

由方框图, 可以求得系统的闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{100}{s+100\tau}$$

(1) 若 $\tau=0.1$, 则系统闭环传递函数为: $\Phi(s) = \frac{100}{s+10}$

则 $T=0.1$, 调整时间 $t_s = \begin{cases} 0.4, \Delta=2 \\ 0.3, \Delta=5 \end{cases}$

(2) 时间常数 $T = \frac{1}{100\tau}$, 若要求 $t_s \leq 0.1s$, 则

$$\tau \geq 0.4, \Delta=2$$

$$\tau \geq 0.3, \Delta=5$$

(3) 反馈系数 τ 使得系统的时间常数减小了, 从而使系统的调整时间也减小, 但却使得系统的闭环增益也减小了。

3.6 解:

系统的闭环传递函数为: $\Phi(s) = \frac{G_k(s)}{1+G_k(s)} = \frac{16}{s^2+4s+16}$, 则 $\omega_n=4, \xi=0.5$

单位阶跃响应, 系统的输出为: $Y(s) = \frac{1}{s} \bullet \frac{16}{s^2+4s+16}$

系统的响应函数为: $y(t) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-2t} \sin(2\sqrt{3}t + 60^\circ), t \geq 0$

单位脉冲响应, 系统的输出为: $Y(s) = \frac{16}{s^2+4s+16}$

系统的响应函数为: $y(t) = \frac{8\sqrt{3}}{3} e^{-2t} \sin(2\sqrt{3}t)$

3.7 解: (1) $\Phi(s) = \frac{120}{s^2+12s+120}$

得: $\omega_n = \sqrt{120} = 10.95$ $\delta = \frac{6}{\sqrt{120}} = 0.55$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = 0.343$$

$$t_s = \begin{cases} \frac{4}{\delta \omega_n} = 0.667 & \Delta = 2 \\ \frac{3}{\delta \omega_n} = 0.5 & \Delta = 5 \end{cases}$$

$$\delta\% = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \times 100\% = 12.7\%$$

$$(2) \quad \Phi(s) = \frac{8}{3s^2 + 8.4s + 48} = \frac{1}{6} \frac{16}{s^2 + 2.8s + 16}$$

$$\text{得: } \omega_n = \sqrt{16} = 4 \quad \delta = 0.35$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}} = 0.84$$

$$t_s = \begin{cases} \frac{4}{\delta \omega_n} = 2.857 & \Delta = 2 \\ \frac{3}{\delta \omega_n} = 2.143 & \Delta = 5 \end{cases}$$

$$\delta\% = e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \times 100\% = 30.9\%$$

$$3.8 \text{ 解: 系统的传递函数 } \phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + as + bk}, \omega_n = \sqrt{bk}, \xi = \frac{a}{2\sqrt{bk}}$$

$$\text{由图可知 } t_p = 0.3, \quad y(\infty) = 2.5, \quad \sigma\% = \frac{2.7 - 2.5}{2.5} \times 100\% = 8\%,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 0.3 \\ \sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 8\% \\ y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{k}{s^2 + as + bk} \right) \frac{1}{s} = \frac{1}{b} = 2.5 \end{array} \right.$$

$$\text{解得, } b=0.4, \quad a=16.8, \quad k=451.1$$

$$3.9 \text{ 解: (1) 引入速度反馈前: } \phi(s) = \frac{k_1 k_2}{Ts^2 + s + k_1 k_2} = \frac{100}{s^2 + 5s + 100}, \quad \omega_n = 10, \xi = 0.25$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 44.45\%,$$

$$ts = \begin{cases} \frac{4}{\xi\omega_n} = 1.6s, \dots \square = 2 \\ \frac{3}{\xi\omega_n} = 1.2s, \dots \square = 5 \end{cases}$$

引入速度反馈后:

$$\phi(s) = \frac{k_1 k_2}{Ts^2 + (1 + k_2 \tau)s + k_1 k_2} = \frac{100}{s^2 + 10s + 100}, \omega_n = 10, \xi_v = 0.5$$

$$\xi = e^{-\frac{\pi\zeta_v}{\sqrt{1-\xi_v^2}}} \times 100\% = 16.13\%$$

$$ts = \begin{cases} \frac{4}{\xi_v \omega_n} = 0.8, \dots \square = 2 \\ \frac{3}{\xi_v \omega_n} = 0.6, \dots \square = 5 \end{cases}$$

(2)

临界阻尼时, $\xi_v = 1$, 解得 $\tau = 6$

3.10 略

3.11 解: 由系统框图可得系统传递函数为:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{(K_1 + \tau s) \frac{K_2}{s(1+Ts)}}{1 + (K_1 + \tau s) \frac{K_2}{s(1+Ts)}} = \frac{K_2(K_1 + \tau s)}{s(Ts + 1) + K_2(K_1 + \tau s)} = \frac{5(20 + s)}{s^2 + 10s + 100} \\ &= \frac{1}{20} \bullet \frac{100(s + 20)}{s^2 + 10s + 10^2} \end{aligned}$$

与标准型进行对比可得:

$$\omega_n = 10 \quad \xi = 0.5 \quad z=20$$

$$\therefore \varphi = \arctan \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{z - \xi\omega_n} = \frac{\pi}{6}$$

$$r = \frac{\xi\omega_n}{z} = 0.25$$

$$l = \sqrt{z^2 - 2z\xi\omega_n + \omega_n^2} = 10\sqrt{3}$$

$$\text{故: } \delta\% = \frac{\sqrt{\xi^2 - 2r\xi + r^2}}{\xi} e^{-\frac{\xi(\pi-\varphi)}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 11.0\%$$

$$T_s = \begin{cases} (4 + l_n \frac{l}{z}) \bullet \frac{1}{\xi \omega_n} = 0.77s & \Delta = 2 \\ (3 + l_n \frac{l}{z}) \bullet \frac{1}{\xi \omega_n} = 0.57s & \Delta = 5 \end{cases}$$

3.12 解:

$$\Phi(s) = \frac{12}{s^3 + 8s^2 + 14s + 12} = \frac{12}{(s+6)(s+1+j)(s+1-j)}$$

系统有三个极点:

$$P_{1,2} = -1 \pm j \quad P_3 = -6$$

$$\text{由于: } \left| \frac{P_3}{\text{REAL}[P_{1,2}]} \right| = 6 > 5$$

所以系统的主导极点为: $P = -1 \pm j$

$$\Phi(s) \approx \frac{2}{(s^2 + 2s + 2)(\frac{s}{6} + 1)} = \frac{2}{(s^2 + 2s + 2)}$$

$$\text{所以: } \omega_n = \sqrt{2} \quad \xi = 1/\sqrt{2}$$

$$\text{故: } \delta\% = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 4.3\%$$

$$T_s = \begin{cases} \frac{4}{\xi \omega_n} = 4s & \Delta = 2 \\ \frac{3}{\xi \omega_n} = 3s & \Delta = 5 \end{cases}$$

$$3.13 \text{ 解: (1) } s^4 + 7s^3 + 19s^2 + 22s + 12 = 0$$

劳斯阵列如下:

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 18 & 12 \\ s^3 & 7 & 22 & 0 \\ s^2 & \frac{104}{7} & 12 & 0 \\ s^1 & \frac{1700}{104} & 0 & 0 \\ s^0 & 12 & 0 & 0 \end{array}$$

第一列全为正数, 稳定 特征根全在左半平面

$$(2) s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3 = 0$$

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$0(\xi)$	3.5	0
s^2	$\frac{6\xi-7}{\xi}$	3	0
s	$\frac{-3\xi^2+21\xi-24.5}{6\xi-7}$	0	0
s^0	3	0	0

$$\frac{6\xi-7}{\xi} < 0 \quad \frac{-3\xi^2+21\xi-24.5}{6\xi-7} > 0$$

第一列符号变化两次，故有两个特征根在右半平面，系统不稳定

$$(3) \quad 5s^4 + 3s^3 - 10s^2 + 14s + 12 = 0$$

s^4	5	-10	12
s^3	3	14	0
s^2	$-\frac{100}{3}$	12	0
s^1	15.08	0	0
s^0	12	0	0

有两个根在右半平面，系统不稳定

$$(4) \quad s^4 + 7s^3 + 42s + 30 = 0$$

s^4	1	0	30
s^3	7	42	0
s^2	-6	30	0
s^1	7	0	0
s^0	30	0	0

有两根在右半平面，系统不稳定

$$(5) \quad s^5 + 6s^4 + 13s^3 + 18s^2 + 22s + 12 = 0$$

s^5	1	13	22
s^4	6	18	12
s^3	10	20	0
s^2	6	12	0
s^1	0	0	0
s^0			

s^1 出现全零行，则用 s^2 系数构造辅助方程： $6s^2 + 12 = 0$ 。对其求导，得： $12s = 0$ 。则：

$$\begin{array}{cccc} s^2 & 6 & 12 & 0 \\ s^1 & 12 & 0 & 0 \\ s^0 & 12 & 0 & 0 \end{array}$$

系统有两个共轭虚根，系统临界稳定

$$(6) \quad s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56 = 0$$

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 6 & 8 \\ s^4 & 7 & 42 & 56 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

s^3 出现全零行，则用 s^4 系数构造辅助方程： $7s^4 + 42s^2 + 56 = 0$ 。对其求导，得：

$28s^3 + 84s = 0$ ，两边同除以 28 得 $s^3 + 3s = 0$ 。则

$$\begin{array}{cccc} s^3 & 1 & 3 & 0 \\ s^2 & 21 & 56 & 0 \\ s^1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ s^0 & 56 & 0 & 0 \end{array}$$

系统有两个共轭虚根，系统临界稳定

$$3.14 \text{ 解 (1) 特征方程为 } s^4 + 2s^3 + 2s^2 + k = 0$$

劳斯阵列如下

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 2 & k \\ s^3 & 2 & 0 & \\ s^2 & 2 & k & \\ s^1 & -k & & \\ s^0 & k & & \end{array}$$

由劳斯稳定判据，无论 k 取何值，系统都是不稳定的

(2) 特征方程为 $s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (10+k)s + 4k = 0$ ，由劳斯稳定判据知系统稳定的 k 值范围为 $0 < k < 126$

$$3.15 \text{ 解: } G(s) = \frac{k(s+2)}{(s+2)(s+4)(s^2+6s+25)+k}$$

特征方程： $s^4 + 12s^3 + 69s^2 + 198s + 200 + k = 0$

劳斯阵列如下：

s^4	1	69	$200 + k$
s^3	12	198	0
s^2	52.5	$206 + k$	0
s	$\frac{7995 - 12k}{52.5}$	0	0
s^0	$200 + k$	0	0

要使系统稳定： $200 + k > 0$ 且 $\frac{7995 - 12k}{52.5} > 0$ 得出： $-200 < k < 666.25$

当 $k = 666.25$ 时，系统临界稳定，系统响应 $y(t)$ 持续振荡，频率

$$\omega_n = \sqrt{\frac{872.25}{52.5}} = \sqrt{16.5} \approx 4 \text{ rad/s}$$

3.16 解

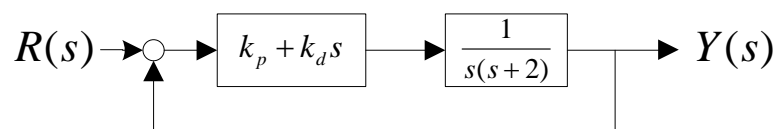
没加速度反馈之前，系统的特征方程为 $3s^3 + 7s^2 + 3s + 1 = 0$ ，可以看出系统是稳定的。

加了速度反馈后，系统的特征方程为 $3s^3 + (7 + 3\tau)s^2 + (3 + \tau)s + 1 = 0$

利用劳斯稳定判据可知，只有当 $\tau > \frac{\sqrt{10} - 8}{3} (-1.6)$ 时系统是稳定的。

综合可知，加入速度反馈后使系统的稳定性变差，只有当 τ 取合适的值才能使系统稳定。

3.17 解：



传递函数： $\Phi(s) = \frac{k_d s + k_p}{s^2 + (2 + k_d)s + k_p}$

特征方程： $s^2 + (2 + k_d)s + k_p = s^2 + 2.1s + 1 = 0$

令 $z = s + 1$ ，则特征方程为 $z^2 + 0.1z - 0.1 = 0$

系统特征方程系数不全为正，可知系统不稳定，故系统没有 $\sigma = 1$ 的稳定裕度。

3.18 解

系统是I型系统，所以当输入为单位1 (t)，t， $t^2/2$ 时，稳态误差为0，1/k， ∞ 。

当输入为 $1(t) + t + t^2/2$ 时，稳态误差为 ∞ 。

3. 19 证明：由 $\varphi(s)$ 的系统开环传递函数： $G(S) = \frac{\varphi(S)}{1 - \varphi(S)}$ $E(S) = \frac{1}{S^2[1 + G(S)]}$

故

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + G(S)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{S} \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \cdots a_1 s + a_0 - (b_m s^m + \cdots b_1 s + b_0)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \cdots a_1 s + a_0}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_2 s - (b_m s^{m-1} + \cdots b_2 s) + (a_1 - b_1) + (a_0 - b_0) s^{-1}}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \cdots a_1 s + a_0}$$

要想使 $e_{ss}=0$ ，只有使 $a_1 = b_1$ $a_0 = b_0$

3.20 解

(1)

当 $R(s)=0$ 时， $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s.E(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s. \frac{\frac{k_2}{s(\tau s + 1)}}{1 + k_1 \frac{k_2}{s(\tau s + 1)} (k_3 + k_4 s)} \cdot (k_3 + k_4 s) = -\frac{D}{k_1 k_3}$ ，

$$T_L(s) = D/s$$

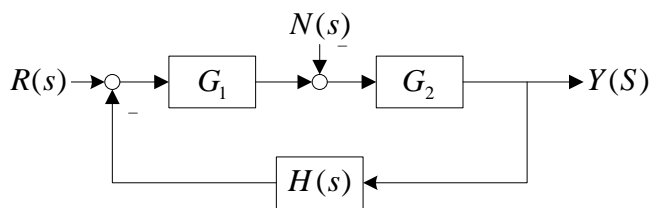
$$Y(s) = \frac{\frac{k_2}{s(\tau s + 1)}}{1 + k_1 \frac{k_2}{s(\tau s + 1)} (k_3 + k_4 s)} \cdot \frac{D}{s}$$

稳态误差 $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s.E(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s. \frac{\frac{k_2}{s(\tau s + 1)}}{1 + k_1 \frac{k_2}{s(\tau s + 1)} (k_3 + k_4 s)} \cdot (k_3 + k_4 s) = -\frac{D}{k_1 k_3}$

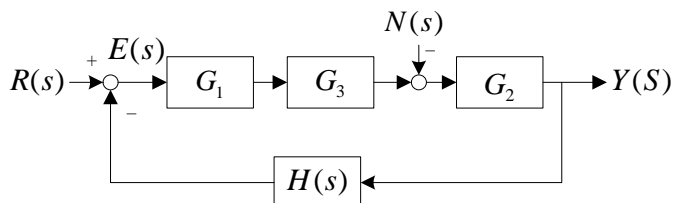
(2) 当 $R(s)=1/s, T_L(s)=0$ ，

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s. \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k_1 k_2 (k_3 + k_4 s)}{s(\tau s + 1)}} = 0$$

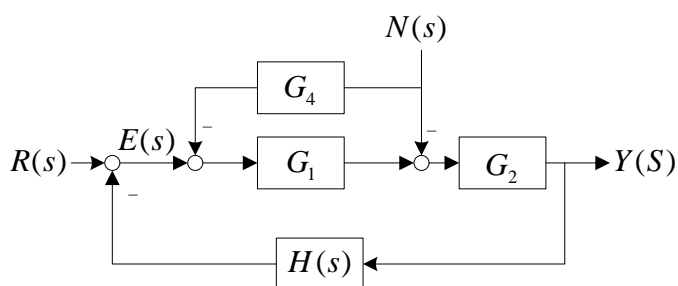
3. 21 解：



(a) 恒值调节系统



(b) 加入积分环节



(c) 采用前馈控制

由劳斯判据得该系统的稳定：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \bullet N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.5(0.05s+1)}{(0.2s+1)(0.05s+1)+40} = \frac{1}{82} = 0.0122 > 0.01$$

(1) 当串入积分环节 $G_3(s) = \frac{k}{s}$ 后：

$$e_{ssm} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)H(s)} \bullet N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.5s(0.05s+1)}{s(0.05s+1)(0.2s+1)+40k} = 0$$

其特征方程为： $s^3 + 25s^2 + 100s + 4000k = 0$

由劳斯判据得： $0 < k < \frac{5}{8}$

(2) 当采用符合前反馈时：

$$e_{ssm} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(-\frac{[1 - G_1(s)G_4(s)]G_2(s)H(s)}{1 + G_2(s)G_1(s)H(s)} \right) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0.5(0.05s+1) - 40G_4}{(0.05s+1)(0.2s+1)+40}$$

要使 $e_{ssm} = 0$ ，只有使 $G_4 = 0.5(0.05s+1)/40 = \frac{0.05s+1}{80}$

3.22 解 (1)

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s(E_r(s) + E_n(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{k_1 k_3}{s(T_1 s + 1)}} + \frac{-\frac{k_2}{T_2 s + 1}}{1 + \frac{k_1 k_3}{s(T_1 s + 1)}} \right) = \frac{A}{k_1 k_3} (1 - k_2)$$

(2)

$$\begin{aligned} e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} &= \lim_{s \rightarrow 0} s(E_r(s) + E_n(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s^2} \left(\frac{1 + \frac{k_d k_1 s}{s(\tau s + 1)(T_2 s + 1)}}{1 + \frac{k_1 k_3}{s(T_1 s + 1)}} + \frac{-\frac{k_2}{T_2 s + 1}}{1 + \frac{k_1 k_3}{s(T_1 s + 1)}} \right) \\ &= \frac{A}{k_1 k_3} (1 + k_d k_1 - k_2) \end{aligned}$$

所以，当 $1 + k_d k_1 - k_2 = 0$ ， $k_d = \frac{k_2 - 1}{k_1}$ 时， $e_{ss} = 0$ 。

3. 23 证明：一个 γ 型系统的开环传递函数可写为： $G_k(s) = \frac{k}{s^\gamma} G_0(s)$ 的形式：

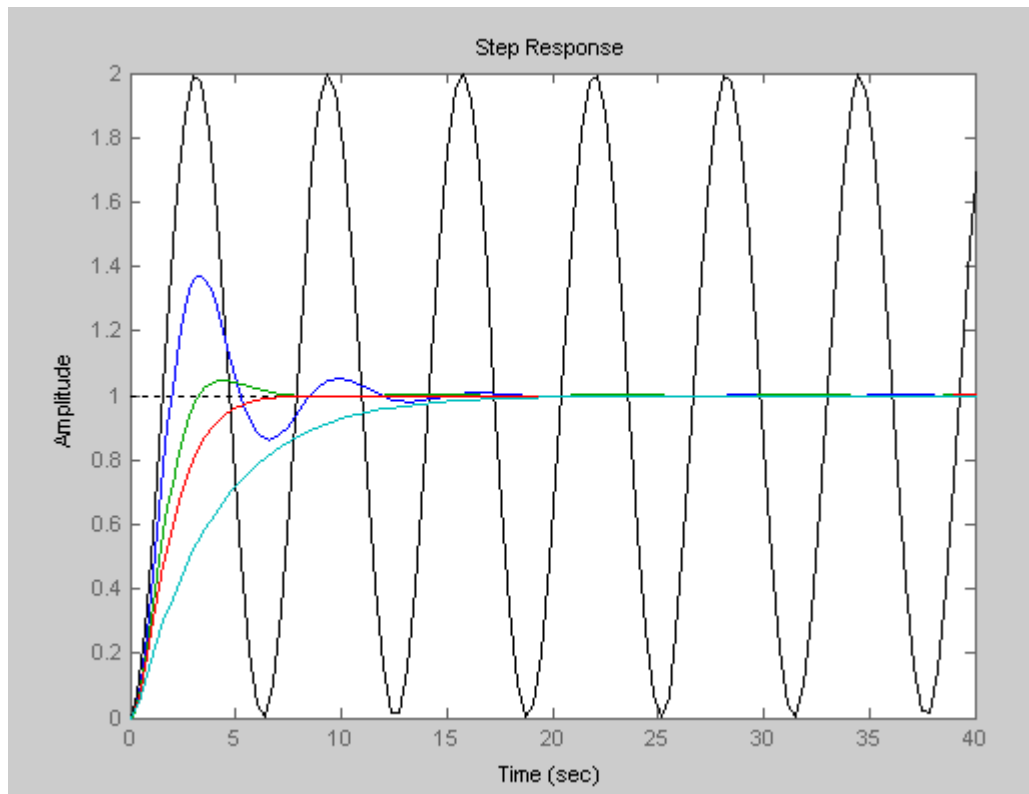
$$\begin{aligned} \text{则： } e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{1 + G(s)} s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + \frac{k}{s^\gamma} G_0(s)} \left(a_0 \frac{1}{s} + a_1 \frac{1}{s} + \cdots + a_{\gamma-1} \frac{1}{s^{\gamma-1}} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\gamma+1} \left(a_0 \frac{1}{s} + a_1 \frac{1}{s^2} \cdots + a_{\gamma-1} \frac{1}{s^\gamma} \right)}{s^\gamma + k G_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a_0 s^\gamma + a_1 s^{\gamma-1} + \cdots + a_{\gamma-1} s}{s^\gamma + k G_0(s)} = 0 \end{aligned}$$

3.24

程序：

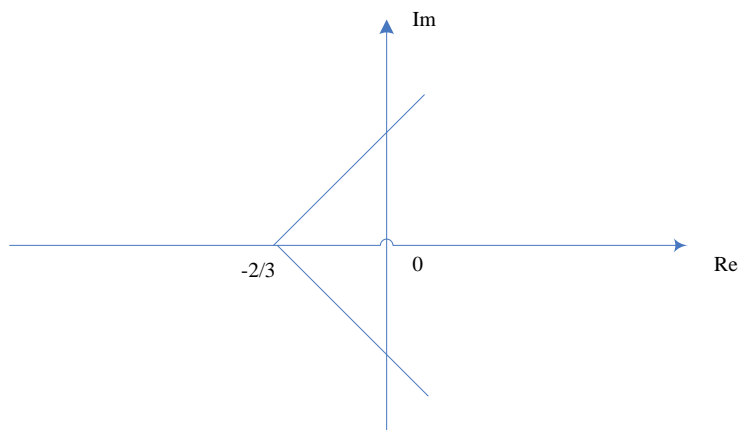
```
wn=1;
zeta=[0, 0.3, 0.7, 1, 2];
figure(1);
hold on;
for i=zeta
    num=wn^2
    den=[1, 2*i*wn, wn^2]
    step(num, den)
end
```

运行结果：



4.2 解:

(1)



渐近线与实轴的夹角为: $\frac{\pi}{3}, \pi, -\frac{\pi}{3}$

渐近线与实轴的交点为: $-\sigma = \frac{-1-2j-1+2j}{3} = -\frac{2}{3}$

(2)

离开复极点的出射角为: $\theta_{pk} = \pi + \sum \angle(-p_k + z_j) - \sum \angle(-p_k + p_j)$

$$-p_1 = -1 + 2j, -p_2 = -1 - 2j,$$

$$\theta_{p1} = \pi - (\pi - \arctan 2 + \frac{\pi}{2}) = -26.6^\circ, \quad \theta_{p2} = -\theta_{p1} = 26.6^\circ$$

(3)

闭环特征方程为： $s^3 + 2s^2 + 5s + k_g = 0$ ，其劳斯阵列为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 2 & k_g \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} s^1 & \frac{10-k_g}{2} & \end{array}$$

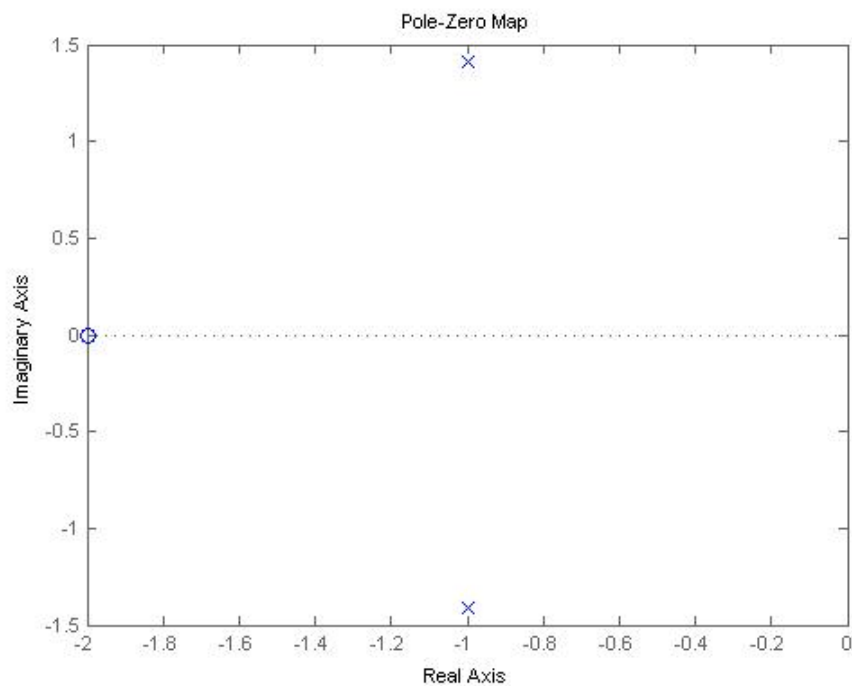
$$\begin{array}{ccc} s^0 & k_g & \end{array}$$

令 s^1 行为 0，得 $k_g = 10$ ，得两个虚根为 $\pm\sqrt{5}j$

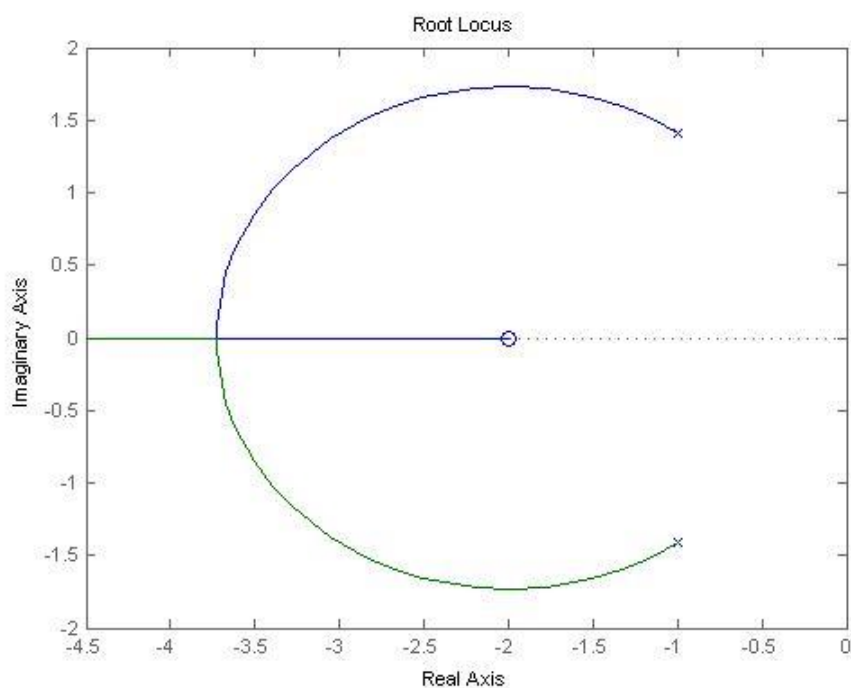
4.3

$$G_k(s) = \frac{k_g(s+2)}{s^2+2s+3}, k_g \geq 0$$

零极点分布图：



根轨迹图：



(1) 令 $N(s)=s+2, D(s)=s^2+2s+3$

代入 $N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=0$ 得:

$$s^2+4s+1=0$$

$$s_1 \approx -0.27, s_2 \approx -3.73$$

实轴上根轨迹区间是: $(-\infty, -2]$

所以, $s=-2-\sqrt{3}=-3.73$ 为会合点 (舍去 $s=-3.73$)

$$\text{会合点处的根轨迹增益: } K_{gd} = -\frac{D'(s)}{N'(s)} \Big|_{s=-\alpha d} = 5.46$$

$$(2) \theta_{p1} = 180^\circ + \angle(-P_1+Z_1) - \angle(-P_1+P_2) = 180^\circ + 54.7^\circ - 90^\circ = 144.7^\circ$$

由对称性可知 $\theta_{p2} = -\theta_{p1} = -144.7^\circ$

(3)

方法一:

利用圆的数学表达式

根轨迹方程为 $1+G_k(s)=0$, 即: $s^2+(2+K_g)s+(3+2K_g)=0$

$$\text{所以: } s = \frac{-(2+K_g) \pm \sqrt{8+4K_g-K_g^2}}{2} \quad (*)$$

设 $s=x+jy$, 由(*)可得:

$$\begin{cases} x = -\frac{2+K_g}{2} \\ y^2 = \frac{8+4K_g-K_g^2}{4} \end{cases}$$

由上式得: $(x+2)^2+y^2=3$

所以, 不在负实轴上的根轨迹是圆周上的一部分。

方法二:

利用根轨迹的相角条件

设 $s=x+jy$

根据根轨迹的相角条件: $\sum_{j=1}^m \angle(s+z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s+p_i) = (2k+1)\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

得到: $\tan^{-1} \frac{y}{x+2} - [(\pi - \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}-y}{-x-1}) + (\pi - \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}+y}{-x-1})] = \pi$

化简得: $(x+2)^2+y^2=3$

所以, 不在负实轴上的根轨迹是圆周上的一部分。

4.4 解:

(1) 系统的开环极点为 $-2 \pm j$, 开环零点为-1, 由规则知实轴上的根轨迹区域为 $(-1, \infty)$

(2) 令 $N(s)=s+1, D(s)=s^2+4s+5$

则由 $N'(s)D(s) + N(s)D'(s) = 0$, 得 $s^2+2s-1=0$, 解得 $-1-\sqrt{2}$ (舍), $-1+\sqrt{2}$

所以, 根轨迹与实轴的交点为 $-1-\sqrt{2}$

(3) 复极点: $-2 \pm j$

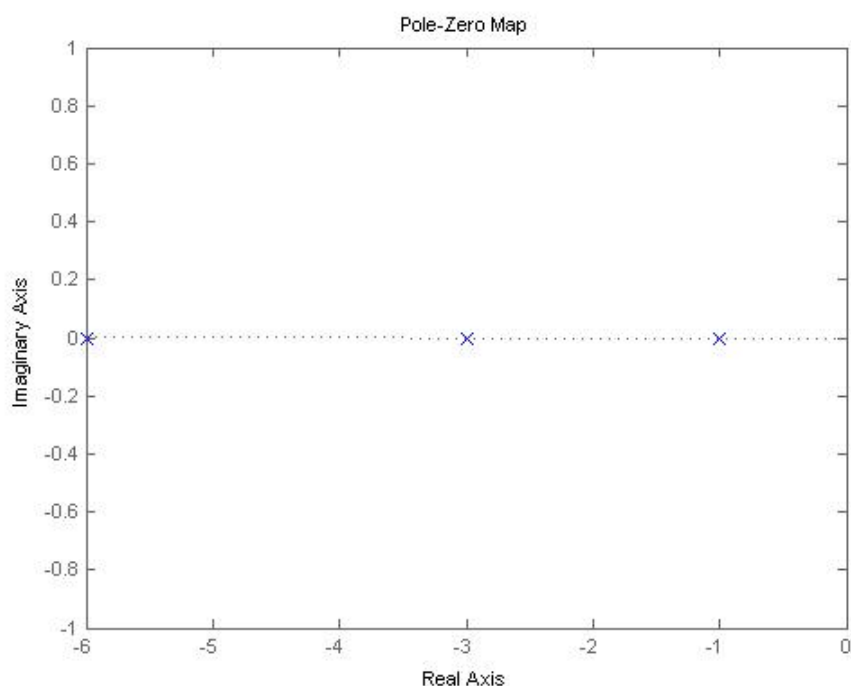
出射角为: 45° , -45°

4.5

$$G_k(s) = \frac{K_g}{(s+1)(s+3)(s+6)}, -\infty < K_g < +\infty$$

由 $G_k(s)$ 得出系统的三个开环极点为:

$$s_1=-1, \quad s_2=-3, \quad s_3=-6$$



I 当 $0 < K_g < +\infty$ 时，根据 180° 等相角根轨迹规则，有：

(1) 实轴上的根轨迹区域为： $(-\infty, -6] \cup [-3, -1]$

(2) 渐近线与实轴的交点： $-\sigma = -\frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n - m} = -\frac{1 + 3 + 6}{3 - 0} = -\frac{10}{3}$

$$\text{角度为： } \varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \begin{cases} 60^\circ & k=0 \\ 180^\circ & k=1 \\ -60^\circ & k=2 \end{cases}$$

(3) 分离点： $N(s)=1, D(s)=(s+1)(s+3)(s+6)$

代入 $N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$ 得：

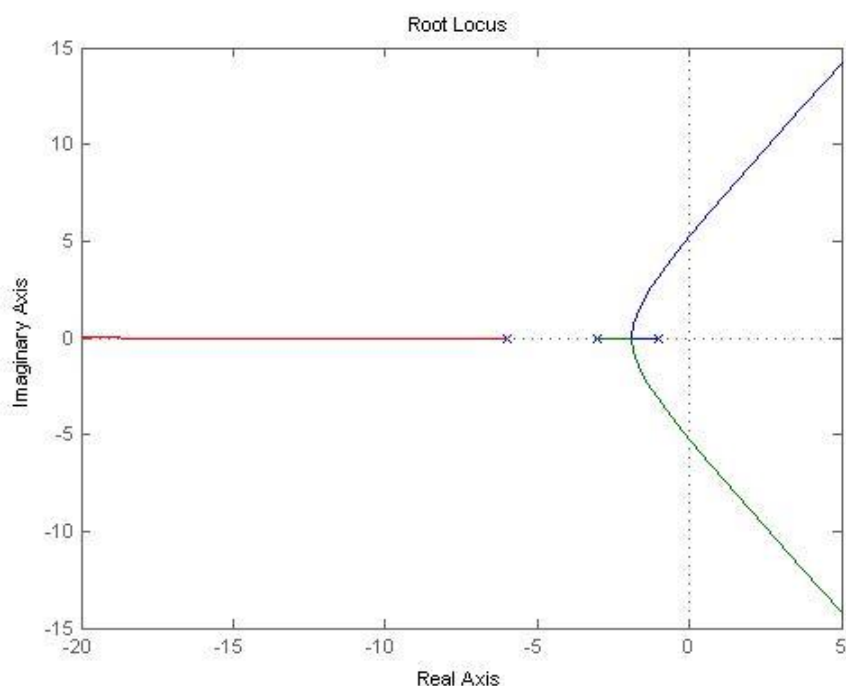
$$3s^2 + 20s + 27 = 0$$

$$s_1 \approx -1.88, s_2 \approx -4.79$$

因为：实轴上的根轨迹区域为： $(-\infty, -6] \cup [-3, -1]$

所以， $s_1 = -1.88$ 是分离点（舍去 $s = -4.79$ ）

(4) 分离点处的根轨迹增益值为： $K_{gd} = -\frac{D(s)}{N(s)} \Big|_{s=-\sigma_d} = 4.06$



II 当 $-\infty < K_g < 0$ 时，根据 0° 等相角根轨迹规则，有：

(1) 实轴上的根轨迹区域为： $[-6, -3] \cup [-1, +\infty)$

(2) 渐近线与实轴的交点： $-\sigma = -\frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n - m} = -\frac{1 + 3 + 6}{3 - 0} = -\frac{10}{3}$

$$\text{角度为： } \varphi = \frac{2k\pi}{n - m} = \begin{cases} 0^\circ & k = 0 \\ 120^\circ & k = 1 \\ -120^\circ & k = 2 \end{cases}$$

(3) 分离点： $N(s)=1, D(s)=(s+1)(s+3)(s+6)$

代入 $N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$ 得：

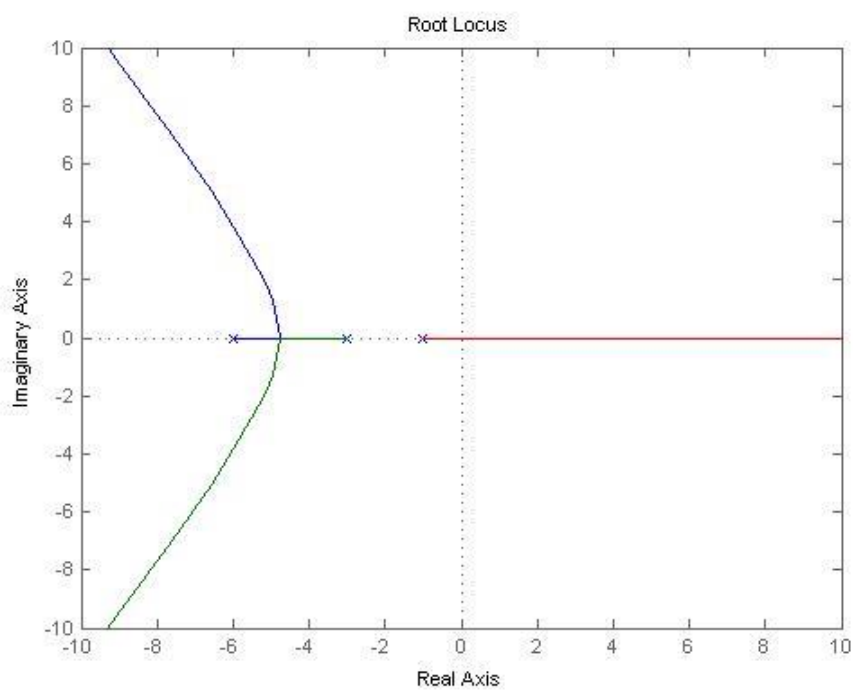
$$3s^2 + 20s + 27 = 0$$

$$s_1 \approx -1.88, s_2 \approx -4.79$$

因为：实轴上的根轨迹区域为： $[-6, -3] \cup [-1, +\infty)$

所以， $s_1 = -4.79$ 是分离点(舍去 $s = -1.88$)

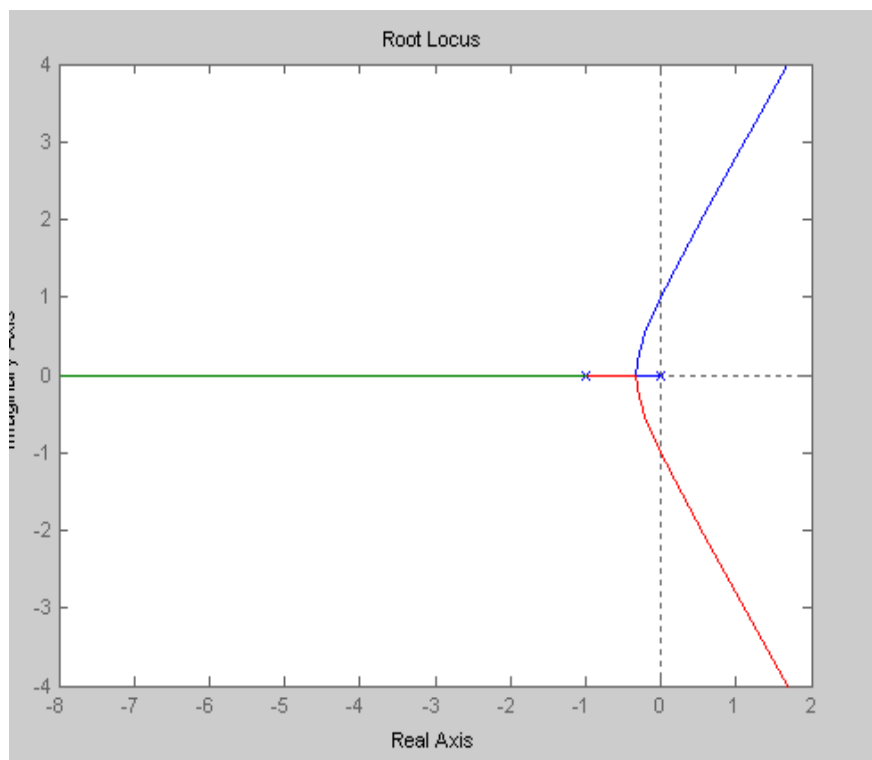
(4) 分离点处的根轨迹增益值为： $K_{gd} = -\frac{D(s)}{N(s)} \Big|_{s=-\sigma_d} = -8.21$



4.7 解:

$$1. G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+1)^2}$$

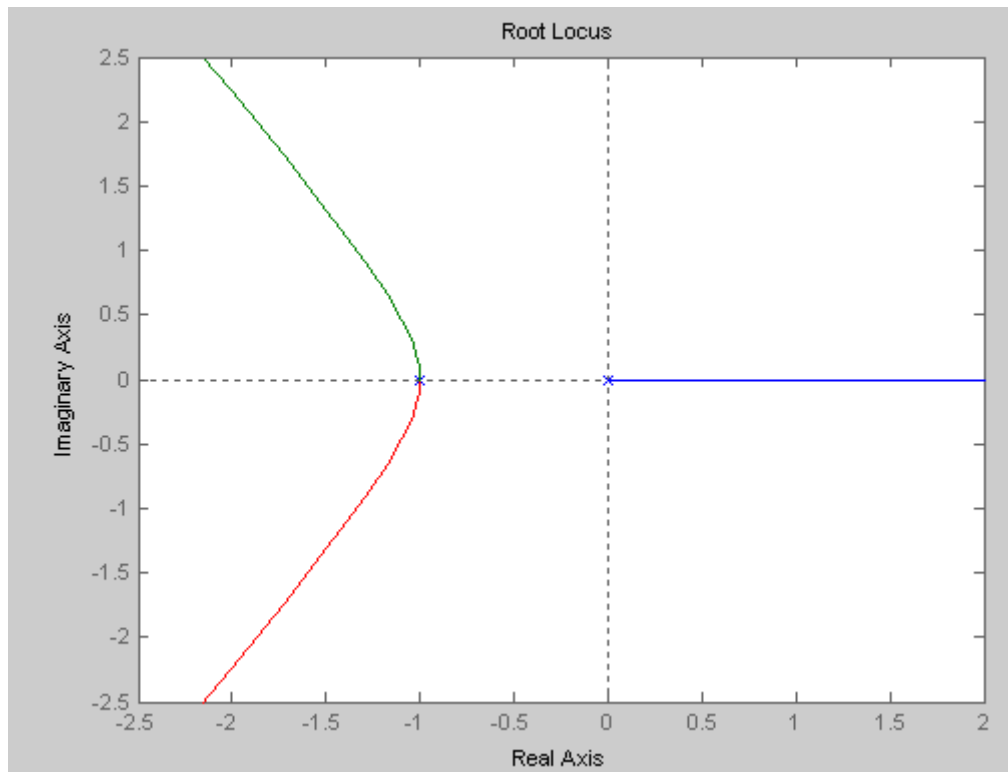
$$0 < k_g < \infty$$



(1) 开环极点为 $0, -1, -1$

- (2) 渐近线有三条，倾角 $60^\circ, 180^\circ, -60^\circ$ ，与实轴的交点 $-2/3$
- (3) 实轴上的分离点为 $-1/3$
- (4) 出射角 $180^\circ, 0^\circ, -180^\circ$
- (5) 与虚轴交点 $\pm j$

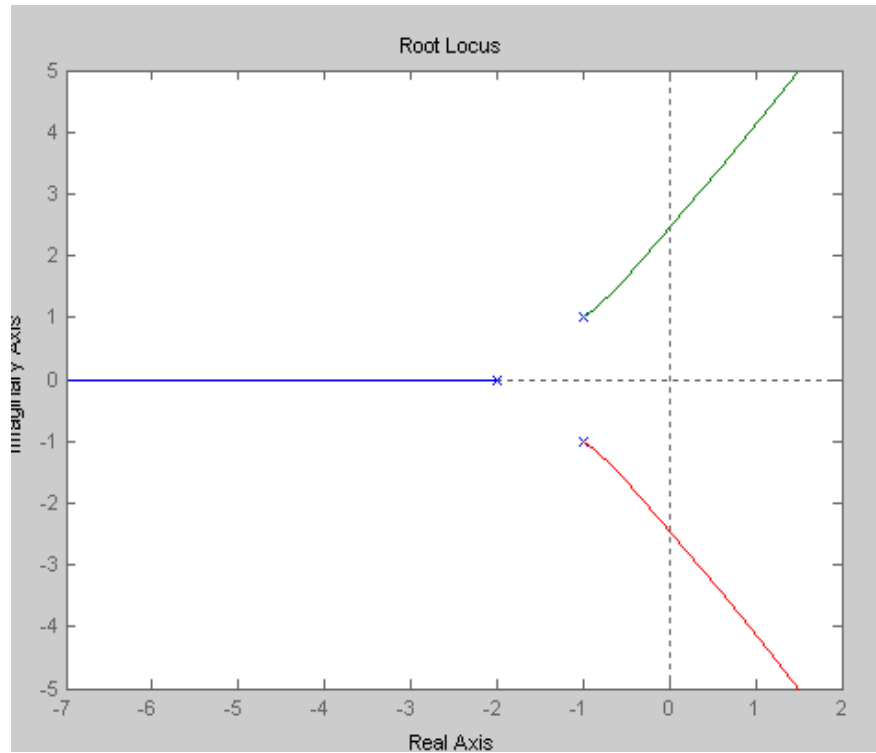
$$-\infty < k_g < 0$$



- (1) 实轴上的根轨迹为 $(-1, \infty)$
- (2) 渐近线倾角为 $120^\circ, -120^\circ, 0^\circ$ ，与实轴的交点 $-2/3$
- (3) 分离点为 $-1/3$
- (4) 出射角 $0^\circ, 0^\circ, 180^\circ$

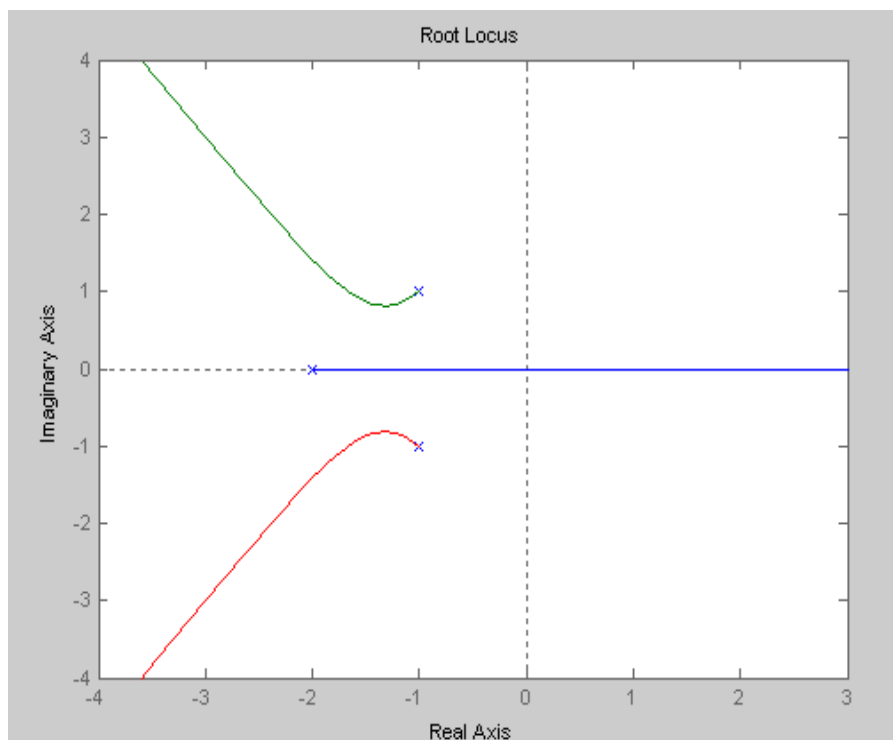
$$2. G_k(s) = \frac{k_g}{(s^2 + 2s + 2)(s + 2)}$$

$$0 < k_g < \infty$$



- (1) 极点: $-2, -1+j, -1-j$
- (2) 渐近线倾角: $60, 180, -60$; 与实轴的交点: $-4/3$
- (3) 根轨迹与虚轴的交点为: $\pm\sqrt{6}j$
- (4) 出射角: $45, 180, -45$

$$-\infty < k_g < 0$$



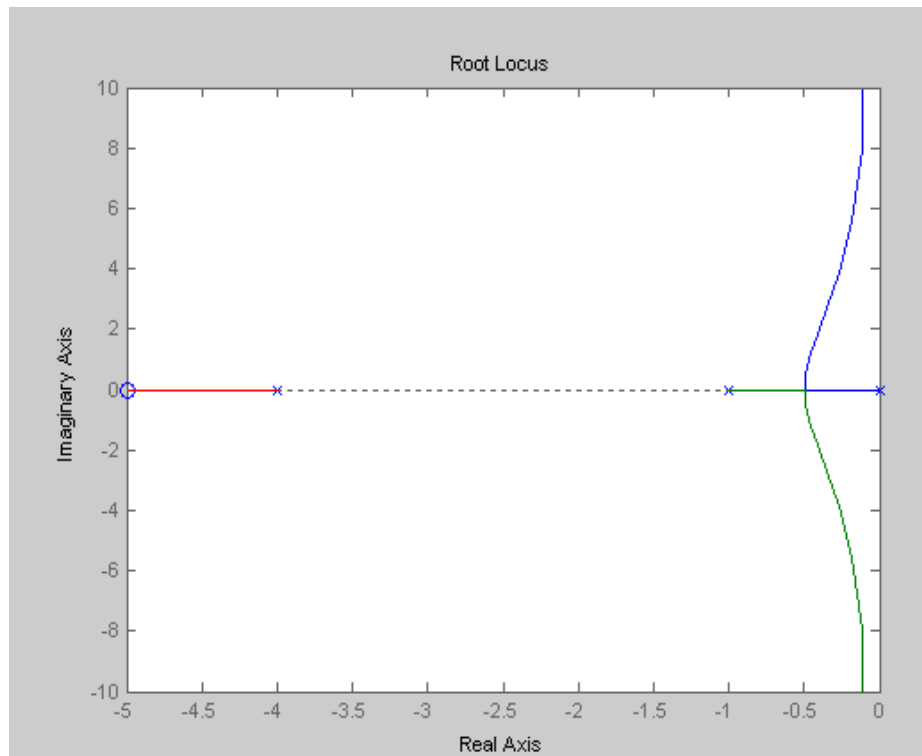
(1) 实轴上的根轨迹区为 $(-2, \infty)$

(2) 渐近线倾角为 $120^\circ, 0^\circ, -120^\circ$; 与实轴 的交点为: $-4/3$

(3) 出射角为 $135^\circ, 0^\circ, -135^\circ$

$$3. G_k(s) = \frac{k_g(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

$0 < k_g < \infty$ 时



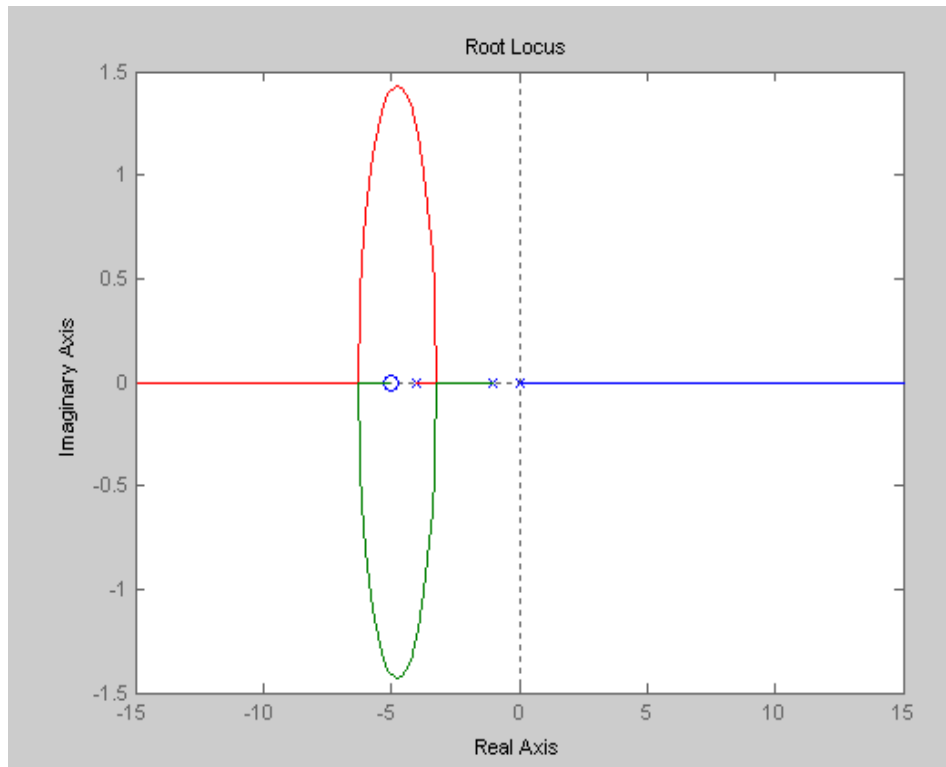
(1) 极点 $0, -1, -4$, 零点 -5 , 交点 0

(2) 渐近线倾角 $90^\circ, -90^\circ$

(3) 分离点 -0.5

(4) 出射角 $180^\circ, 0^\circ, 180^\circ$

$$-\infty < k_g < 0$$



(1) 实轴上的根轨迹为 $(-\infty, -5) \cup (-4, -1) \cup (0, \infty)$

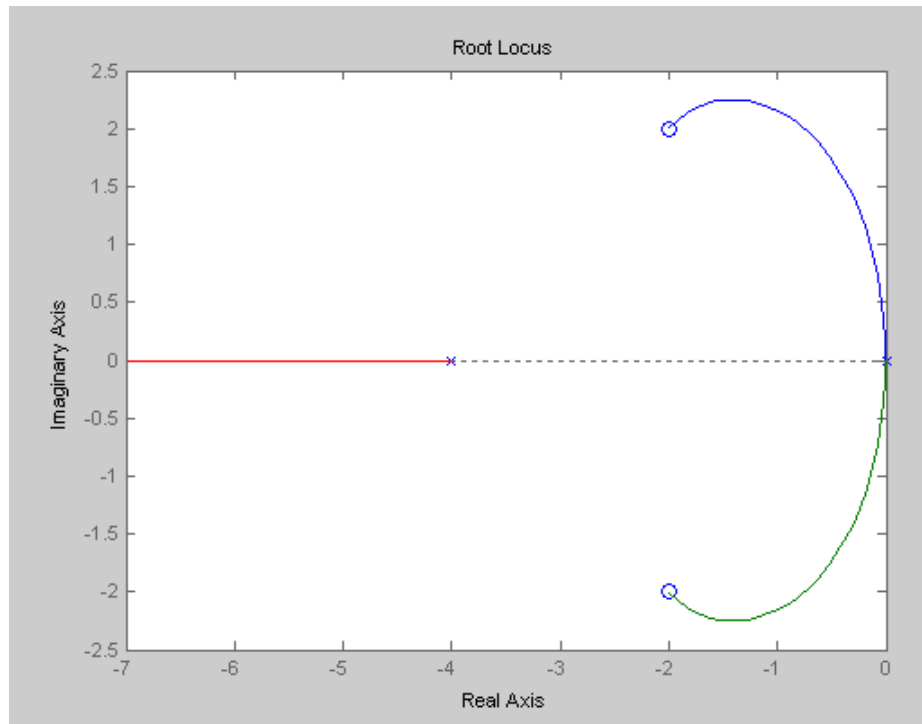
(2) 渐近线倾角 $0, \pi$ ，与实轴的交点为 0

(3) 出射角 $0, 180, 0$

(4) 分离会合点 $-3.26, -6.26$

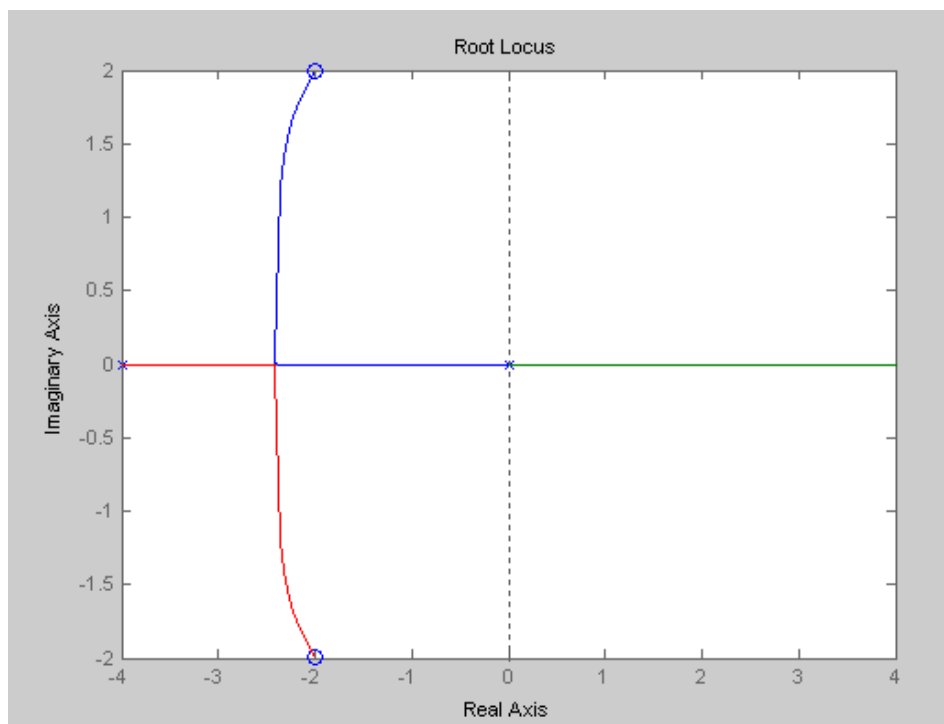
$$4. G_k(s) = \frac{k_g(s^2 + 4s + 8)}{s^2(s + 4)}$$

$$0 < k_g < \infty$$



- (1) 极点 0, 0, -4, 零点 -2-2j, -2+2j
- (2) 渐近线 1 条, 倾角 180°
- (3) 出射角 90° , -90° , 180° , 入射角 -45, 45

$$-\infty < k_g < 0$$

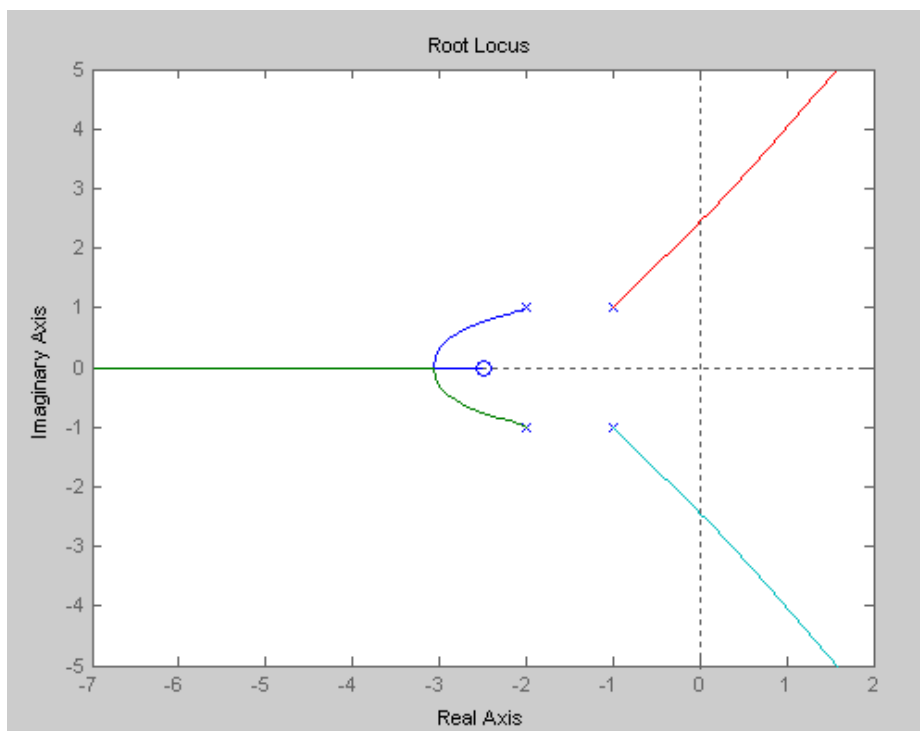


- (1) 实轴上的跟轨迹区域为 $(-4, \infty)$
- (2) 分离 (会合) 点: 0, -2.4163

(3) 出射角 $0, 180, 0$, 入射角 $\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$

$$5. G_k(s) = \frac{k_g(s+2.5)}{(s^2+2s+2)(s^2+4s+5)}$$

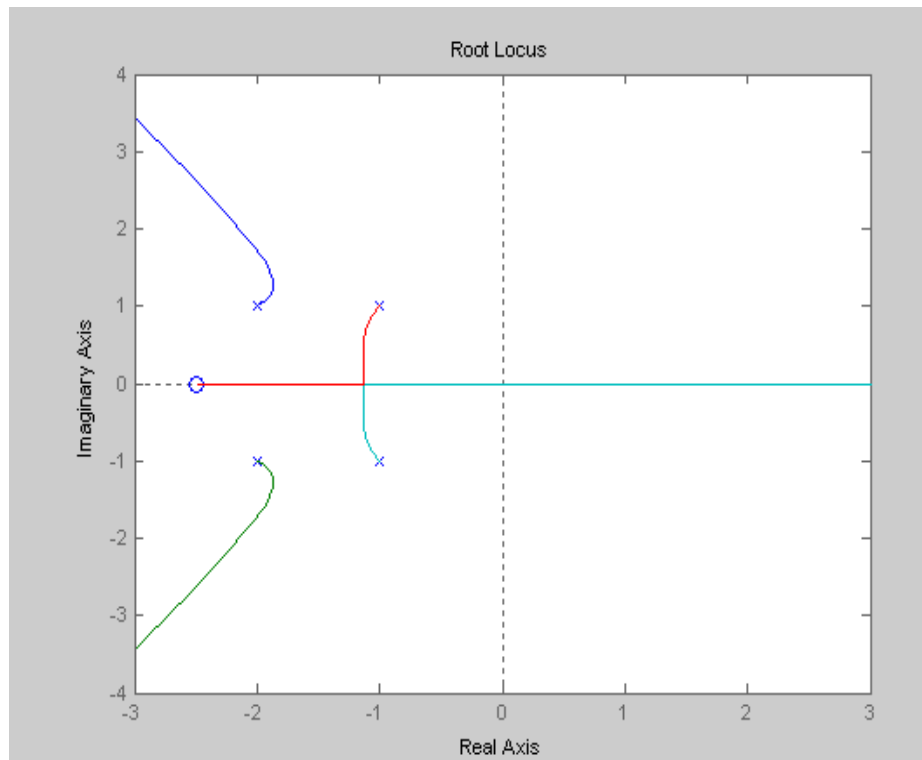
$$0 < k_g < \infty$$



$$0 < k_g < \infty$$

- (1) 极点 $-1 \pm j$, $-2 \pm j$, 零点 -2.5
- (2) 渐近线倾角 $60, 180, 60$, 交点 $-7/6$
- (3) 分离会合点 -3
- (4) 出射角 $60, -60, 143, -143$, 入射角 180

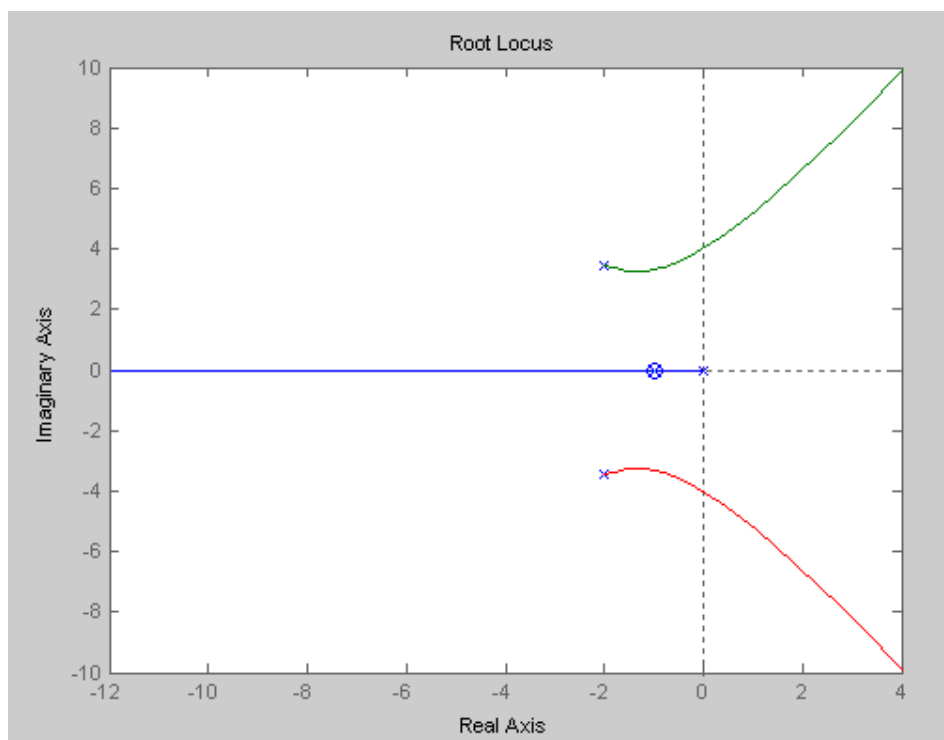
与虚轴的交点 $\pm 2.5j$



$$-\infty < k_g < 0$$

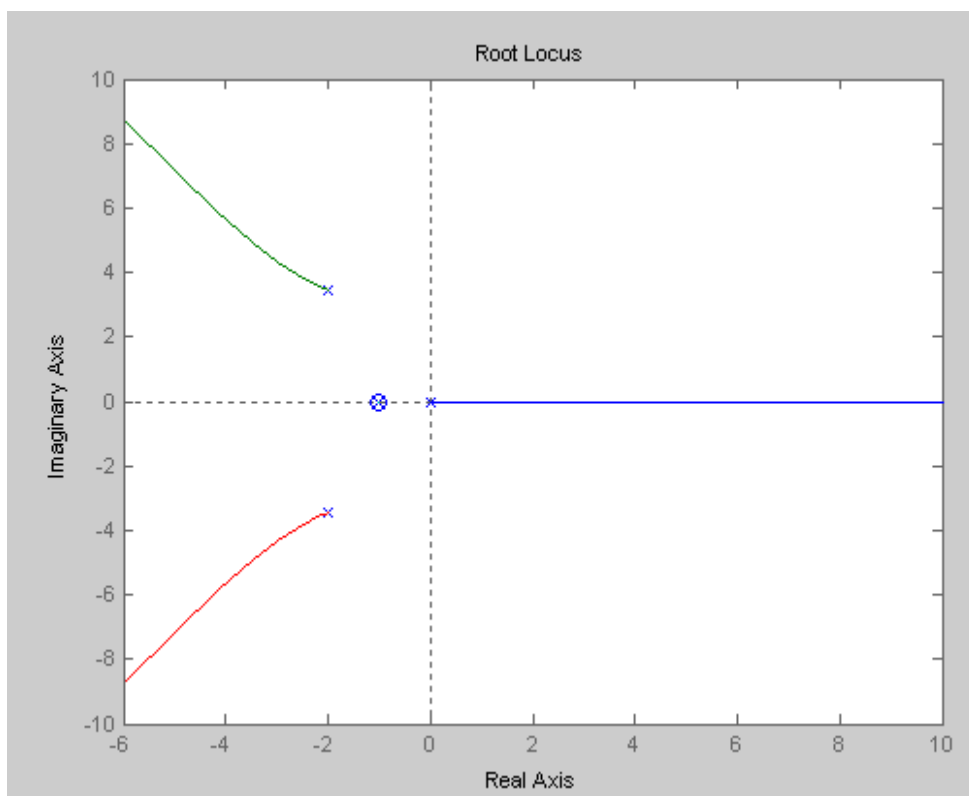
- (1) 实轴上的根轨迹为 $(-2.5, \infty)$
- (2) 渐近线为 $0^\circ, 120^\circ, -120^\circ$
- (3) 分离点为 -1.13
- (4) 出射角为 $120^\circ, -120^\circ, 36.87^\circ, -36.87^\circ$, 入射角 0°
- (5) 与虚轴交于 0 点

$$6. G_k(s) = \frac{k_g(s+1)}{s(s+1)(s^2+4s+16)}$$



$$0 < k_g < \infty$$

- (1) 极点 $0, -1, -2 \pm 2\sqrt{3}j$, 零点 -1
- (2) 渐近线 $60, 180, -60$, 交点 $-4/3$
- (3) 出射角 $30, -30, 180$
- (4) 与虚轴的交点 $\pm 4j, 0$



$$-\infty < k_g < 0$$

- (1) 实轴上的根轨迹区域为 $(0, \infty)$
- (2) 渐近线倾角为 $0, 120, -120$, 交点 $-4/3$
- (3) 出射角为 $0, 210, -210$ 入射角 0
- (4) 与虚轴交点为 0

4.9

$$\text{令 } \frac{s+a}{s(2s-a)} = -1$$

$$\text{则: } s(2s+1) = a(s-1)$$

$$\text{所以: } \frac{-a(s-1)}{s(2s+1)} = -1$$

$$\text{整理得: } \frac{-\frac{a}{2}(s-1)}{s(s+\frac{1}{2})} = -1 \quad (a \geq 0)$$

$$\text{令 } K'_g = -\frac{a}{2} \quad (K'_g \text{ 为等效根轨迹增益})$$

$$\text{所以, 等效开环传递函数为: } G'(s) = \frac{K'_g(s-1)}{s(s+\frac{1}{2})}, \quad -\infty < K'_g < 0$$

(1)等效开环零点: $-ze=1$

等效开环极点: $-pe_1=0$, $-pe_2=-\frac{1}{2}$

(2)实轴上的根轨迹区域为: $[-\frac{1}{2}, -0] \cup [1, +\infty)$

(3)渐近线:

$$-\sigma = -\frac{\sum P_i - \sum Z_i}{n-m} = -\frac{3}{2}$$

角度为: $\varphi=0^\circ$

(4)分离点和会合点:

$$N(s)=s-1, D(s)=s(s+\frac{1}{2})$$

代入 $N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=0$ 得:

$$s_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}, s_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$$

所以, $s_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$ 是会合点, $s_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$ 是分离点。

(5)与虚轴的交点及其增益:

将 $s=j\omega$ 代入:

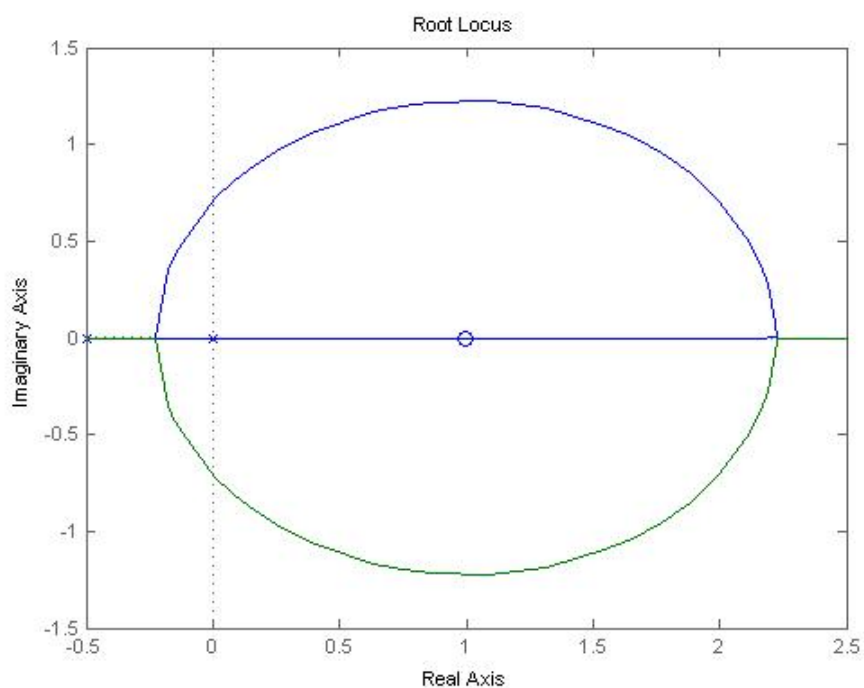
$$\frac{K'_g(j\omega-1)}{j\omega(j\omega+\frac{1}{2})} = -1$$

$$\text{得出: } \begin{cases} K'_g = -\frac{1}{2} \\ \omega_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

所以根轨迹与虚轴交于 $s = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}j$, 此时的等效根轨迹增益为 $K'_g = -\frac{1}{2}$, 即 $a=1$

又因为 $a \geq 0$, 根据根轨迹的定义及其与稳定性的关系, 可得:

使系统处于稳定的参数 a 的范围为: $0 \leq a \leq 1$



4.13

(1) 已知系统的开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{k_g s(s+4)}{s^2 + 2s + 2}$$

默认 $k_g \geq 0$

1. 该系统根轨迹有两条，起点分别是 $-1+j$ ， $-1-j$ ，终点分别为 -4 ， 0 。

2. 实轴上的根轨迹： $[-4, 0]$ 。

3. 分离会合点： $N(s) = s(s+4)$ $D(s) = s^2 + 2s + 2$

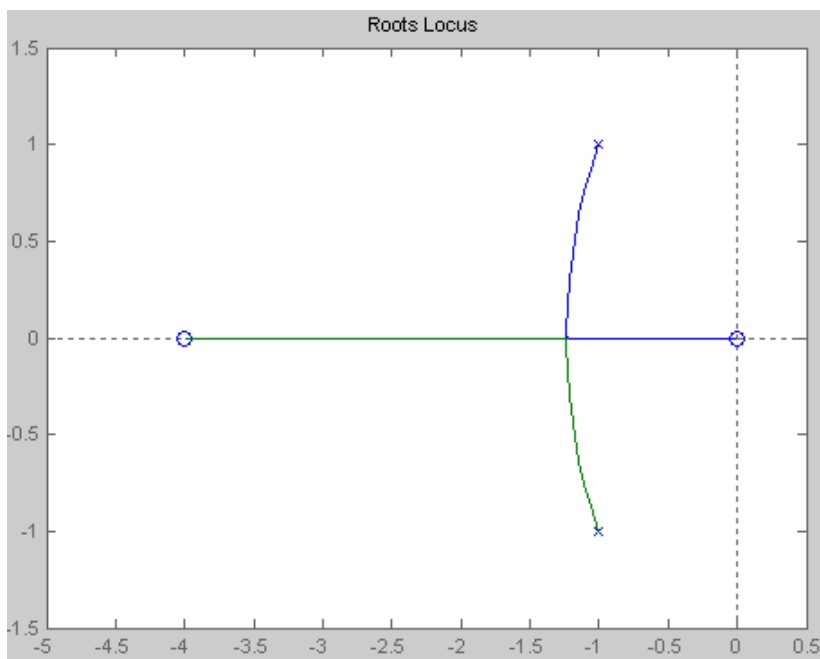
由 $N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$ 得 $s^2 - 2s - 4 = 0$

解得： $s_1 = 1 + \sqrt{5}$ (舍去) $s_2 = 1 - \sqrt{5}$ 为根轨迹的分离会合点。

4. 入射角 为 0° 和 180°

出射角 $\theta_{p1} \approx 243^\circ$ $\theta_{p2} \approx -243^\circ$

系统根轨迹如下所示：



(2) 方法一： 闭环特征方程式为： $(1+k_g)s^2 + (2+4k_g)s + 2 = 0$

由特征根相同得： $(2+4k_g)^2 - 8(1+k_g) = 0$

得： $k_{g1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ $k_{g1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ 满足要求。

方法二： 将 $s_2 = 1 - \sqrt{5}$ 代入 $(1+k_g)s^2 + (2+4k_g)s + 2 = 0$

可求得： $k_{g1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ 其中： $k_{g1} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = 0.31$ ， 满足要求

(3) 两个相同的特征根即为其分离会合点为， 可得其相同的特征根为：

$$s = 1 - \sqrt{5} = -1.24$$

(4) 当系统有两个相同的特征根时系统为临界阻尼系统， 其调整时间为：

$$t_s = \frac{3}{\sigma} = 2.42 \quad \Delta = 5$$

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 3.23 \quad \Delta = 2$$

4.14 解

$$\text{单位反馈系统得开环函数为 } G_k(s) = \frac{k_g(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \quad k_g \geq 0$$

故系统开环极点分别为 0, -1, -4， 开环零点为 -2。 设阻尼角为 60° 时， 该系统的超调

量

$$\delta\% = e^{-\pi \cot \beta} \times 100\% = e^{-\pi \cot 60^\circ} \times 100\% \approx 16.3\%$$

设阻尼角为 60° 时系统闭环极点为 $-\sigma \pm j\sqrt{3}\sigma$ ，由相角条件知：

$$\arctan \frac{\sqrt{3}\sigma}{2-\sigma} - (120^\circ + \arctan \frac{\sqrt{3}\sigma}{4-\sigma} + \arctan \frac{\sqrt{3}\sigma}{1-\sigma}) = 180^\circ$$

解得 $\sigma = 1$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{\sigma} = 3, \quad \Delta = 5$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma} = 4, \quad \Delta = 2$$

将 $s = -1 + j\sqrt{3}$ 代入幅值条件 $\left| \frac{k_g(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \right| = 1$

得 $k_g = 6$

从而可得 $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \frac{k_g}{2} = 3$

4.17

(1) 开环传递函数 $G_k(s) = \frac{k_g(s+2)}{s(s+1)}$

开环零点是 $-z_1 = -2$

则它在实轴上的根轨迹为 $(-\infty, -2]$ 和 $[-1, 0]$

令 $N(s) = s+2 \quad D(s) = s(s+1)$

由式 $N(s) \frac{dD(s)}{ds} - D(s) \frac{dN(s)}{ds} = 0$

即 $(s+2)(2s+1) - s(s+1) = s^2 + 4s + 2 = 0$

解得：

$$s_1 = -2 + \sqrt{2} = -0.5858$$

$$s_2 = -2 - \sqrt{2} = -3.4142$$

均为分离（会合）点

(2) 该闭环函数得特征方程为 $s(s+1) + k_g(s+2) = s^2 + (1+k_g)s + 2k_g = 0$

$$\text{解得 } s = \frac{-(1+k_g) \pm \sqrt{(1+k_g)^2 - 8k_g}}{2}$$

又 \because 有根其实部为-2 , 即 $-(1+k_g)/2 = -2$

$$\therefore k_g = 3$$

将 $k_g = 3$ 代入上式得 $s = -2 \pm \sqrt{2}j$

即该系统得根轨迹增益为 3, 两复根为 $-2 \pm \sqrt{2}j$

$$4.18 \quad G_k(s) = \frac{k_g(2-s)}{s(s+3)} = \frac{k_g'(s-2)}{s(s+3)} \quad k_g' = -k_g \leq 0$$

(1) 1. 系统根轨迹有 2 支, 起点分别为 0,-3; 终点分别为 2 和无穷远处。

2. 实轴上根轨迹为 $[-3, 0]$ 、 $[2, +\infty)$

3. 分离会合点:

$$N(s) = s - 2 \quad D(s) = s(s + 3)$$

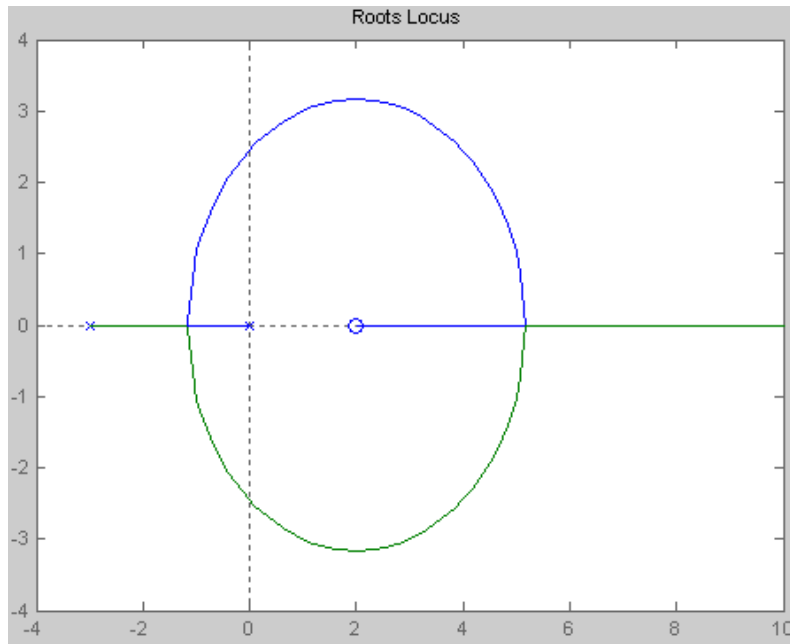
$$\text{由 } N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0 \text{ 得 } s^2 - 4s - 6 = 0$$

解得 $s = 2 \pm \sqrt{10}$ 均满足要求。

4. 与虚轴交点: 将 $s = j\omega$ 代入特征方程式: $s^2 + (3 - k_g)s + 2k_g = 0$ 得:

$$\begin{cases} -\omega^2 + 2k_g = 0 \\ (3 - k_g)\omega = 0 \end{cases} \quad \text{解得: } k_g = 3 \quad \omega = \pm\sqrt{6}$$

根轨迹如下所示:



(2) 由相角条件:

$$\pi - \arctan \frac{\sqrt{10}}{4} - (\pi - \arctan \frac{\sqrt{10}}{2} + \arctan \frac{\sqrt{10}}{1}) \neq 0^\circ$$

所以 $s = -2 \pm j\sqrt{10}$ 不在根轨迹上。

(3) 系统稳定时, 根轨迹在左半平面, 可知当 $0 < k_g < 3$ 时, 系统稳定。

4.19 解 $G(S) = \frac{K_g(S+1)}{S(S-1)(S+4)} \quad K_g > 0$

开环极点 $P_1 = 0, P_2 = 1, P_3 = -4$

开环零点 $Z_1 = -1$

实轴上的根轨迹 $[-4, -1] \cup [0, 1]$

渐近线倾角 $\theta = \frac{2k+1}{3-1}$

与实轴交点 $\delta = -1$

$$\theta_{p1} = \pi + 0 - \pi - 0 = 0$$

$$\theta_{p2} = \pi + 0 - \pi - \pi = -\pi$$

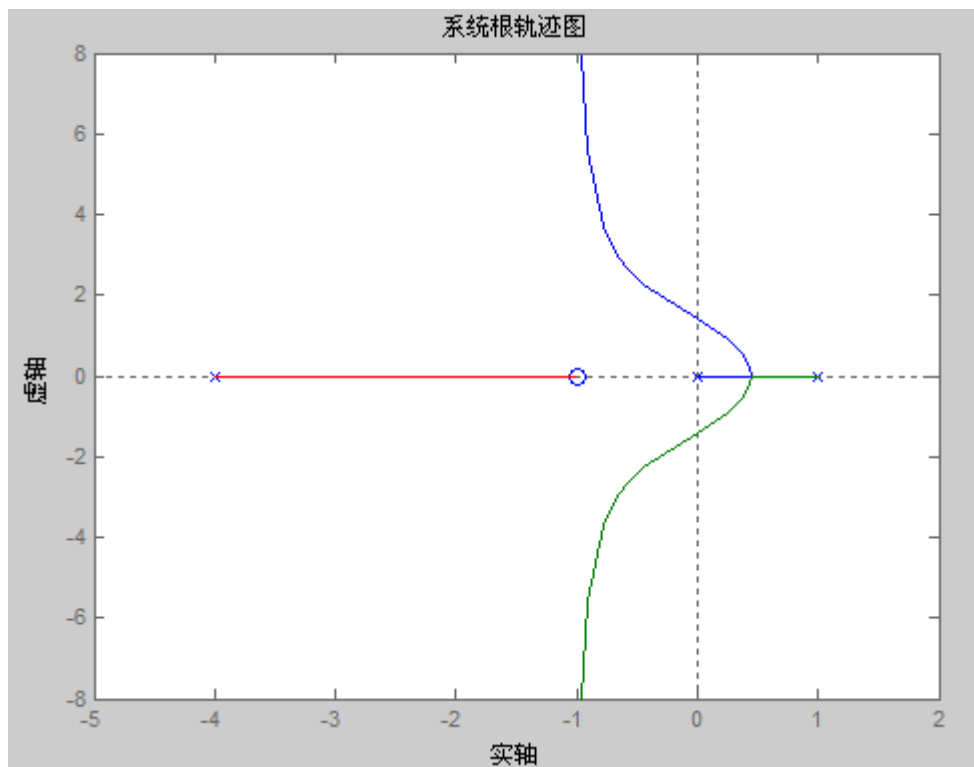
出射角 $\theta_{p3} = \pi + \pi - \pi - \pi = 0$

$$\theta_{p4} = \pi + 0 + \pi - \pi = \pi$$

求分离汇合点 $N^1(s)D(s) - N(s)D^1(s) = 0 \quad S=0.4$
 $S^3 + 3S^2 - 4S = 0$

与虚轴的交点 $S^3 + 3S^2 + 3S - 2 = 0$
 令 $S = jw$

求得 $K_g = 6$
 $S = \pm\sqrt{2}j$



在 $S = \pm\sqrt{2}j$ 利用幅值条件 $K = \left| \frac{S(S-1)(S+4)}{S+1} \right| \bigg|_{S = \pm\sqrt{2}j} = 6$

则 增益 K 的稳定范围为 $(6 - +\infty)$

(3) 方法(一)过原点且与根轨迹相切的直线 为 $w = k\sigma$

$$k = -\tan \beta$$

由 matlab 求得切点为 $-0.668 \pm j2.96$

$$\beta = 77.3^\circ$$

$$\xi = 0.22$$

方法(二)

设 根 轨 迹 上 一 点 $A (-\sigma, w)$ 满 足 相 角 条 件

$$\pi = \arctan \frac{w}{1-\sigma} - \arctan \frac{w}{4-\sigma} - (\pi - \arctan \frac{w}{1+\sigma}) - (\pi - \arctan \frac{w}{\sigma})$$

则 A 点的阻尼角为 β $\tan \beta = \frac{w}{\sigma}$ 代入上式 两边求导得

$$\tan \beta = \sqrt{\frac{\sigma - (1 - \sigma)^3}{\sigma^2(1 - \sigma)}} \quad \text{求导得} \quad 2\sigma^3 - 6\sigma^2 - 3\sigma + 4 = 0$$

$$\begin{array}{llll} \text{解得 } \sigma_1 = 0.658 & \sigma_2 = -0.929 (\text{舍去}) & \tan \beta = 4.47 & \\ & \sigma_3 = 3.27 (\text{舍去}) & \text{则 } \beta = 77.4 & \\ & & \text{最大阻尼小数 } \xi = \cos \beta = 0.218 & \end{array}$$

4.20 解

1. 系统根轨迹有 3 支，起点分别为 0, -1, -5；终止于无穷远处。

2. 实轴上根轨迹为 $(-\infty, -5]$ 、 $[-1, 0]$

3. 渐近线

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pi, \pm \frac{\pi}{3}$$

$$-\sigma = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = -2$$

4. 分离会合点：

$$N(s) = 1 \quad D(s) = s(s+1)(s+5)$$

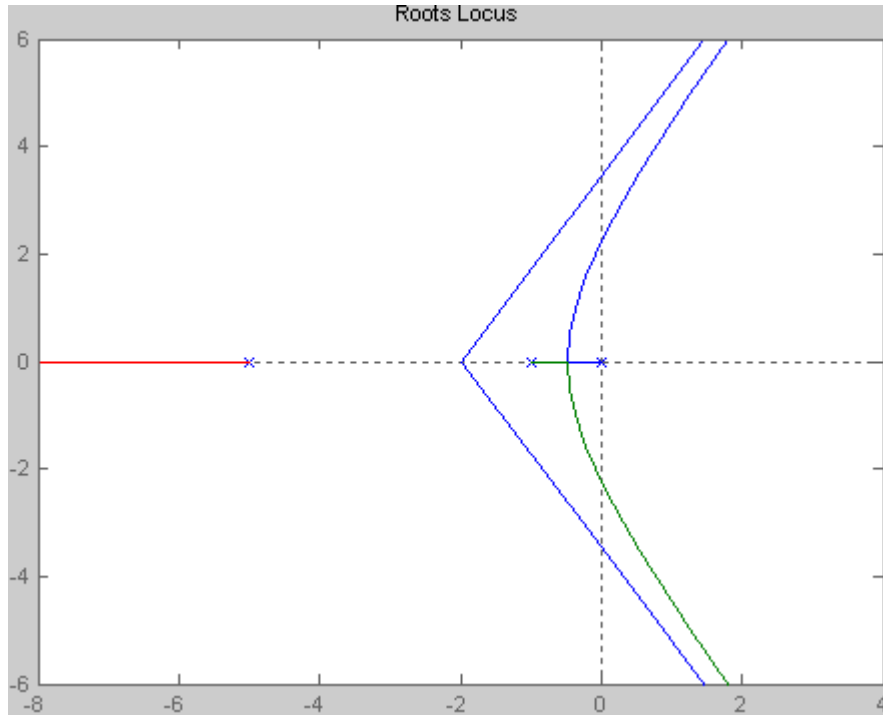
$$\text{由 } N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0 \text{ 得 } 3s^2 + 12s + 5 = 0$$

$$\text{解得 } s_1 = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3} \text{ 为分离会合点。} \quad s_2 = \frac{-6 - \sqrt{21}}{3} \text{ 舍去。}$$

5. 与虚轴交点：将 $s = j\omega$ 代入特征方程式： $s^3 + 6s^2 + 5s + k_g = 0$ 得：

$$\begin{cases} -\omega^3 + 5\omega = 0 \\ -6\omega^2 + k_g = 0 \end{cases} \quad \text{解得：} \quad k_g = 30 \quad \omega = \pm\sqrt{5}$$

根轨迹如下所示：



(1) 由 $\delta\% = e^{-\pi \cot \beta} \times 100\% = 5\%$ 得阻尼角 $\beta = 46.36^\circ$ ，当 $\beta \leq 46.36^\circ$ 时，

所以可以通过选择 K_g ，满足最大超调 $\delta\% \leq 5\%$ 的要求。

(2) $t_s = \frac{3}{\zeta \omega_n} = \frac{3}{\sigma}$ 由根轨迹可知 t_s 的最小值为 $t_{s_{\min}} = \frac{3}{0.472} \approx 6.35$ 。

所以怎样选择 k_g 都无法满足要求。

$$(3) k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \frac{k_g}{5}$$

由上面可知系统临界稳定增益为 $k_g = 30$ ，从而可得 k_v 最大值为 6。因此也不能

通过选择 k_g 使 $k_v = 10$

5.1 解：

系统的闭环传递函数为： $G(s) = \frac{1}{s+2}$ ，频率特性为： $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2}$

其中 $A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{\omega^2+4}}$ ， $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arctan(-\frac{\omega}{2})$

(1) 系统稳态输出为： $c_{ss} = A(\omega)X \sin[\omega t + \varphi(\omega)] = \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(2t - \frac{\pi}{4})$

系统稳态误差为： $e_{ss} = r(t) - c_{ss} = \sin 2t - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(2t - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4} \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t$

(2) 系统的输入为： $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ) = \sin(t + 30^\circ) - 2\sin(2t + 45^\circ)$

系统的稳态输出为： $c_{ss} = \frac{\sqrt{5}}{5} \sin(t + 3.44^\circ) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2t$

系统的稳态误差为：

$$e_{ss} = r(t) - c_{ss} = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ) - \frac{\sqrt{5}}{5} \sin(t + 3.44^\circ) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2t$$

5.2 解：

对系统单位阶跃响应 $h(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t}, t \geq 0$

在零初始状态下进行拉氏变换：

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9} = \frac{36}{s(s+4)(s+9)}$$

由于系统的输入信号为阶跃信号 $R(s) = \frac{1}{s}$

$$\text{故系统的传递函数为 } \Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

所以，系统的幅频特性为

$$A(\omega) = |\Phi(j\omega)| = \frac{36}{\sqrt{(16 + \omega^2)(81 + \omega^2)}}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = \angle \Phi(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{4} - \arctan \frac{\omega}{9}$$

5.3 解：

系统的闭环传递函数为： $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

系统的频率特性位： $G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + 2j\omega\xi\omega_n + \omega_n^2}$

其中 $A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2}}$ ， $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$

$$\text{则 } A(1) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - 1)^2 + 4\xi^2 \omega_n^2}} = 2, \varphi(1) = -\arctan \frac{2\xi \omega_n}{\omega_n^2 - 1} = -\frac{\pi}{4},$$

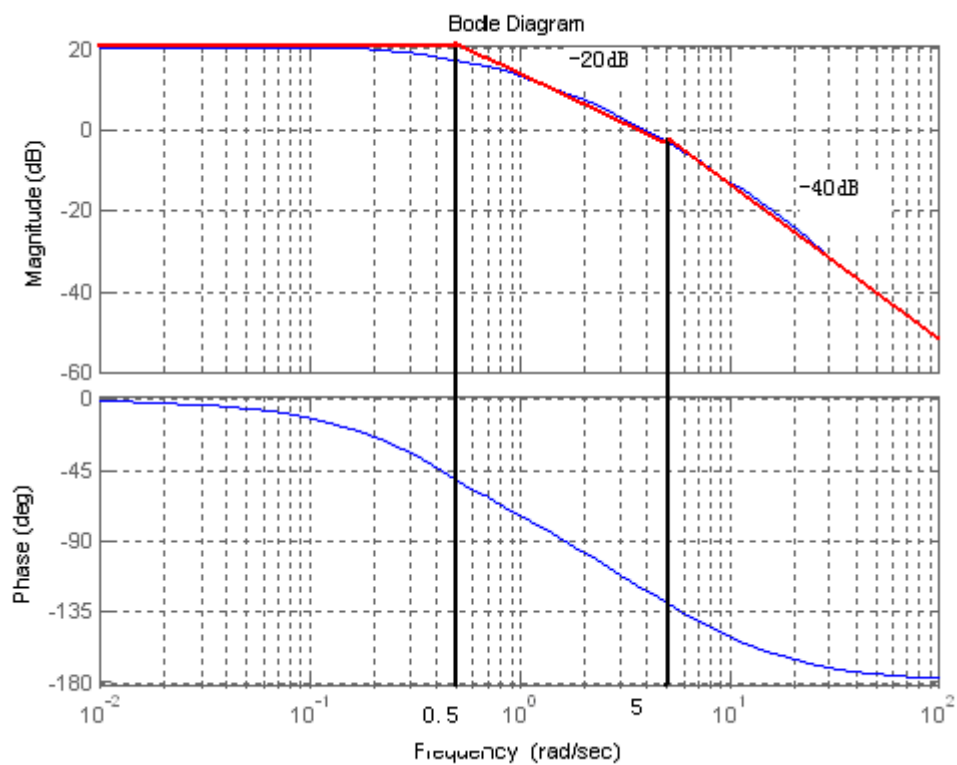
$$\text{解得 } \xi = 0.22, \omega_n = 1.24$$

$$5.4 \quad (1) \quad G_1(s) = \frac{50}{(2s+1)(s+5)} = \frac{10}{(2s+1)(\frac{1}{5}s+1)}$$

$$\text{典型环节为 } G_1(s) = 10, G_2(s) = \frac{1}{2s+1}, G_3(s) = \frac{1}{\frac{1}{5}s+1}$$

基准点: $K=10, 20\lg K = 20\text{dB}$

环节	转折频率	转折后斜率	累积斜率
10			
$\frac{1}{2s+1}$	0.5	-20	-20
$\frac{1}{\frac{1}{5}s+1}$	5	-20	-40



$$(3) \quad G_3(s) = \frac{40(s^2 + s + 1)}{s(2s+1)(0.2s+1)(0.05s+1)}$$

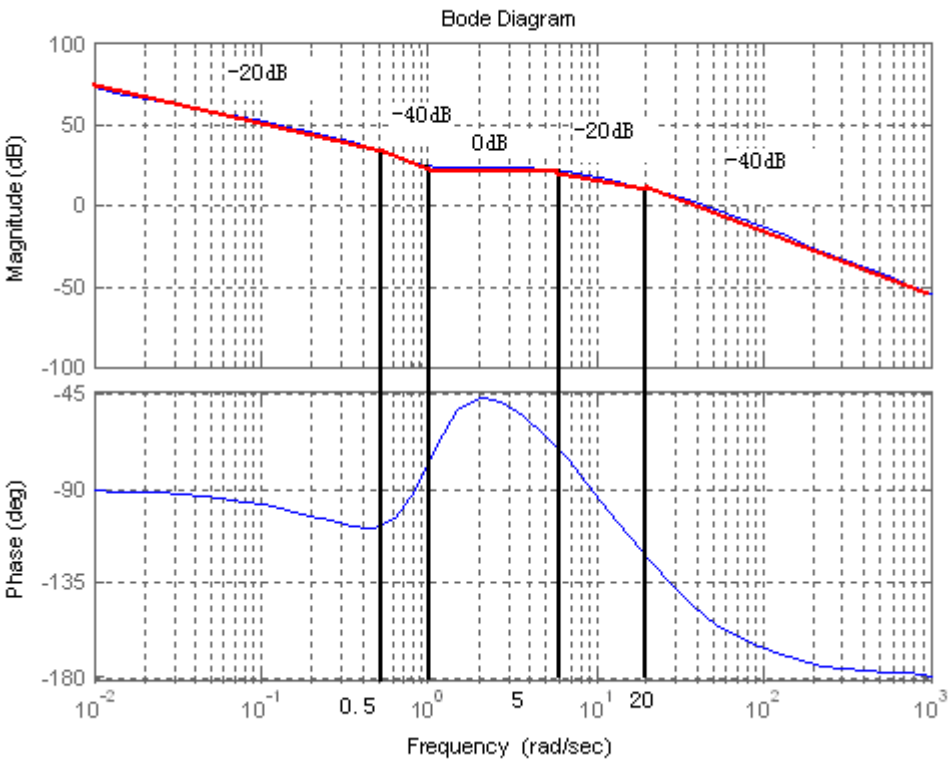
六个典型环节:

$$G_1(s)=40, G_2(s)=\frac{1}{s}, G_3(s)=\frac{1}{2s+1}$$

$$G_4(s)=s^2+s+1, G_5(s)=\frac{1}{0.2s+1}, G_6(s)=\frac{1}{0.05s+1}$$

$$k=40, 20\lg k=32dB$$

环节	转折频率	转折后斜率	累积斜率
K			
$\frac{1}{s}$		-20	-20
$\frac{1}{2s+1}$	0.5	-20	-40
s^2+s+1	1	40	0
$\frac{1}{0.2s+1}$	5	-20	-20
$\frac{1}{0.05s+1}$	20	-20	-40



$$(5) \ G_5(s)=\frac{2(0.4s+1)}{s^2(0.1s+1)(0.05s+1)}$$

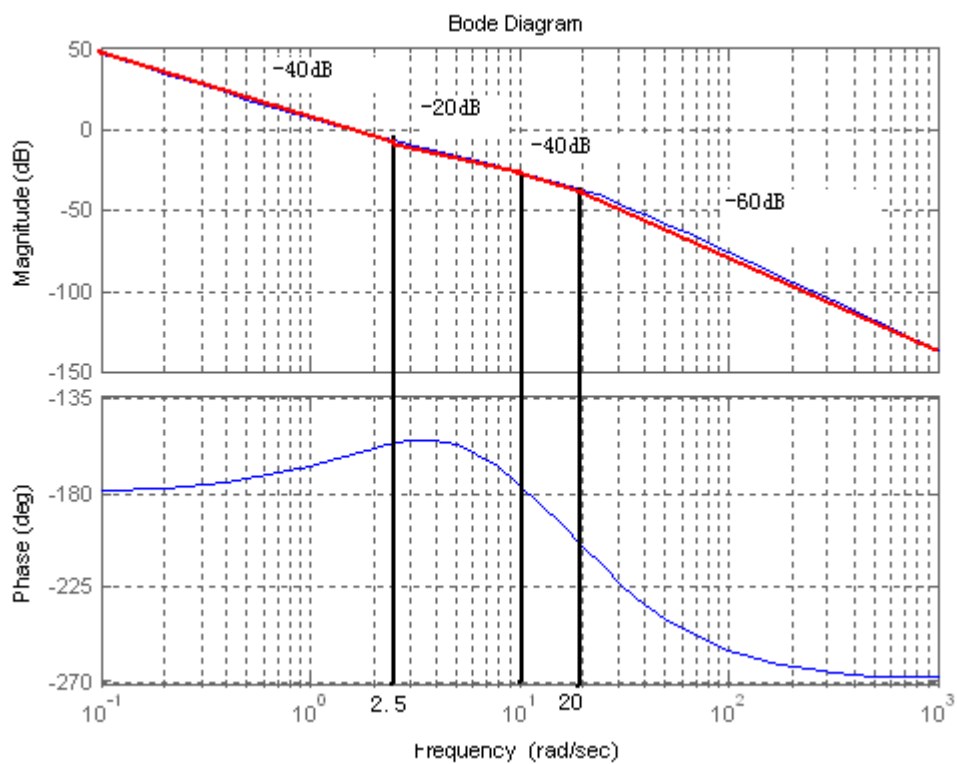
五个典型环节：

$$G_1(s) = 2, G_2(s) = \frac{1}{s^2}, G_3(s) = 0.4s + 1,$$

$$G_4(s) = \frac{1}{0.1s + 1}, G_5(s) = \frac{1}{0.05s + 1}$$

$$K = 2, 20 \lg k = 6 \text{ dB}$$

环节	转折频率	转折后斜率	累积斜率
K			
$\frac{1}{s^2}$		-40	-40
$0.4s + 1$	2.5	+20	-20
$\frac{1}{0.1s + 1}$	10	-20	-40
$\frac{1}{0.05s + 1}$	20	-20	-60



5.5(a)

(1) 由于低频段斜率为 0，故系统有一个比例环节 $G_1(s) = K$

(2) 在 $\omega = 4$ 处，渐近线变为 -20 dB/dec，所以系统有惯性环节 $G_2(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}s}$

(3) 当 $\omega=400$ 时, 斜率变为 -40dB/dec , 有惯性环节 $\frac{1}{1+\frac{1}{400}s}$

(4) $L(200)=0\text{dB}$, 则 $L(400)=-20(\lg 400-\lg 200)=-6\text{dB}$
 $L(4)=-6+2*20=34\text{dB}=20\lg k \quad K=50$

(5) 开环传递函数 $G(s) = \frac{50}{(1+\frac{1}{4}s)(1+\frac{1}{400}s)}$

(b)

(1) 由于低频段斜率为 -40dB/dec , 所以该系统含有两个积分环节;

(2) 由于在 $\omega=10$ 处, $L(\omega)=0\text{dB}$,

$$-40\lg 10 + 20\lg K = 0$$

可得 $20\lg K = 40, K = 100$

(3) 在 $L(\omega)=20\text{dB}$, $\frac{20}{\lg \omega_1 - \lg 10} = -40$, 解得 $\omega_1 = \sqrt{10}$

在 $L(\omega)=-20\text{dB}$, $\frac{20+20}{\lg \omega_1 - \lg \omega_2} = -20$, 解得转折频率 $\omega_2 = 100\sqrt{10}$

系统的转折函数为: $G(s) = \frac{100(\frac{1}{\sqrt{10}}s+1)}{s^2(\frac{1}{100\sqrt{10}}s+1)}$

(c)

(1) 低频段斜率为 20dB/dec , 有比例微分环节 $G_1(s) = Ks$

(1) $\omega = \omega_2$, 斜率变为 0 . 有惯性环节 $\frac{1}{1+\frac{1}{\omega_2}s}$

(2) $\omega = \omega_3$ 斜率变为 -20dB/dec , 有惯性环节 $\frac{1}{1+\frac{1}{\omega_3}s}$

(3) 低频段 $\omega = \omega_1$ 时, $L(\omega)=20\lg k \omega_1=0, k=\frac{1}{\omega_1}$

$$(4) \text{ 则 } G(s) = \frac{\frac{1}{w_1} s}{(1 + \frac{1}{w_2} s)(1 + \frac{1}{w_3} s)}$$

(d)

(1) 由于低频段斜率为 $-20\text{dB}/\text{dec}$ ，所以该系统含有一个积分环节；

(2) 由于在 $\omega = 0.1$ 处， $L(\omega) = 40\text{dB}$ ， $-20\lg 0.1 + 20\lg K = 40$

可得 $20\lg K = 20, K = 10$

(3)

$$\text{系统的转折函数为: } G(s) = \frac{10(2s+1)}{s(5s+1)(0.025s+1)}$$

5.6 (1) 系统在低频段斜率为 $-0\text{dB}/\text{dec}$ ，所以该系统不含积分环节；

(2) 由于在 $\omega = 0.1$ 处， $L(\omega) = 30\text{dB}$ ，1 可得 $20\lg K = 30, K = 31.6$

$$(3) \frac{40-30}{\lg \omega_1 - \lg 0.1} = 20, \text{ 解得转折频率 } \omega_1 = 0.3$$

$$\frac{5-0}{\lg \omega_4 - \lg 100} = -60, \text{ 解得转折频率 } \omega_4 = 82.54$$

$$\frac{20-5}{\lg \omega_3 - \lg \omega_4} = -40, \text{ 解得转折频率 } \omega_3 = 34.87$$

$$\frac{40-20}{\lg \omega_2 - \lg \omega_3} = -20, \text{ 解得转折频率 } \omega_2 = 3.49$$

$$\text{系统的传递函数为: } G(s) = \frac{31.6(10s+1)}{(\frac{10}{3}s+1)(\frac{1}{3.49}s+1)(\frac{1}{34.87}s+1)(\frac{1}{82.54}s+1)}$$

$$5.8 (1) \text{ 开环频率特性为: } G(j\omega) = \frac{10}{-\omega^2(1+0.2j\omega)(1+0.5j\omega)}$$

其实频和虚频分别为

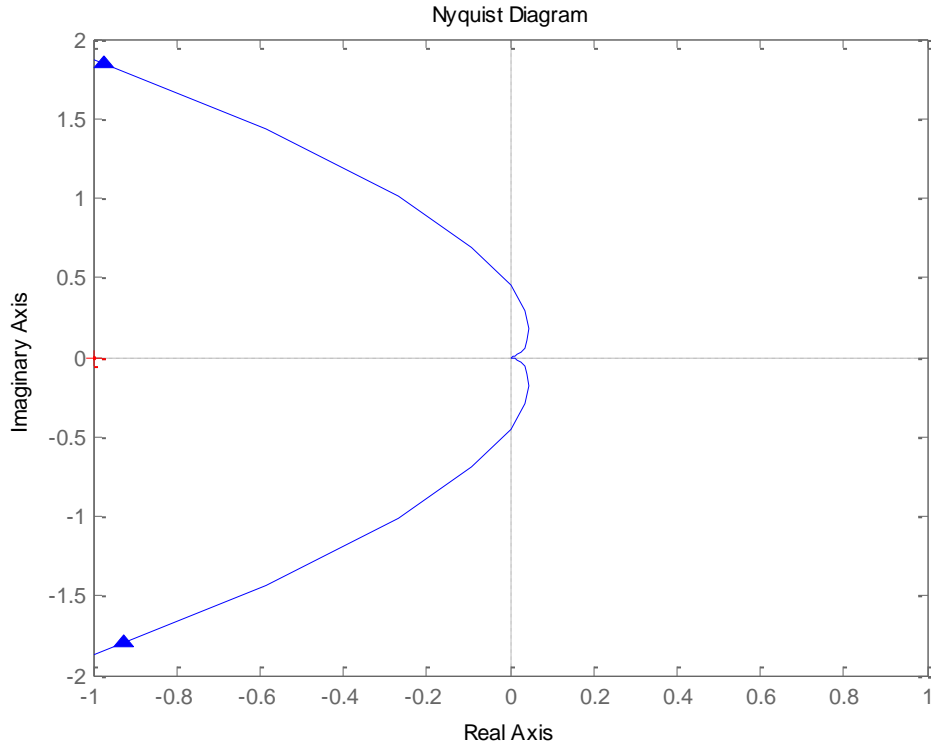
$$P(\omega) = \frac{\omega^2 - 10}{\omega^2[(1-0.1\omega^2)^2 + 0.49\omega^2]}, Q(\omega) = \frac{7}{\omega[(1-0.1\omega^2)^2 + 0.49\omega^2]}$$

$$A(\omega) = \frac{10}{\omega^2 \sqrt{(1-0.1\omega^2)^2 + 0.49\omega^2}}, \varphi(\omega) = -180^\circ - \arctan 0.2\omega - \arctan 0.5\omega$$

当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = \infty, \varphi(\omega) = -180^\circ, P(\omega) = \infty, Q(\omega) = \infty$;

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -360^\circ, P(\omega) = 0, Q(\omega) = 0$;

当 $P(\omega) = 0$ 时, $\omega = \sqrt{10}, Q(\omega) = 0.45$



$$G(s) = \frac{100(1+s)}{s(1+0.1s)(1+0.2s)(1+0.5s)}$$

(2) 开环频率特性为:

$$G(j\omega) = \frac{100(1+j\omega)}{s(1+0.1j\omega)(1+0.2j\omega)(1+0.5j\omega)}$$

$$A(\omega) = \frac{100\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{1+0.01\omega^2}\sqrt{1+0.04\omega^2}\sqrt{1+0.25\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctan \omega - \arctan 0.1\omega - \arctan 0.2\omega - \arctan 0.5\omega$$

$$P(\omega) = \frac{(20\omega - 16\omega^3)}{\omega(1+0.01\omega^2)(1+0.04\omega^2)(1+0.25\omega^2)}$$

$$Q(\omega) = \frac{(\omega^4 - 63\omega^2 - 100)}{\omega(1+0.01\omega^2)(1+0.04\omega^2)(1+0.25\omega^2)}$$

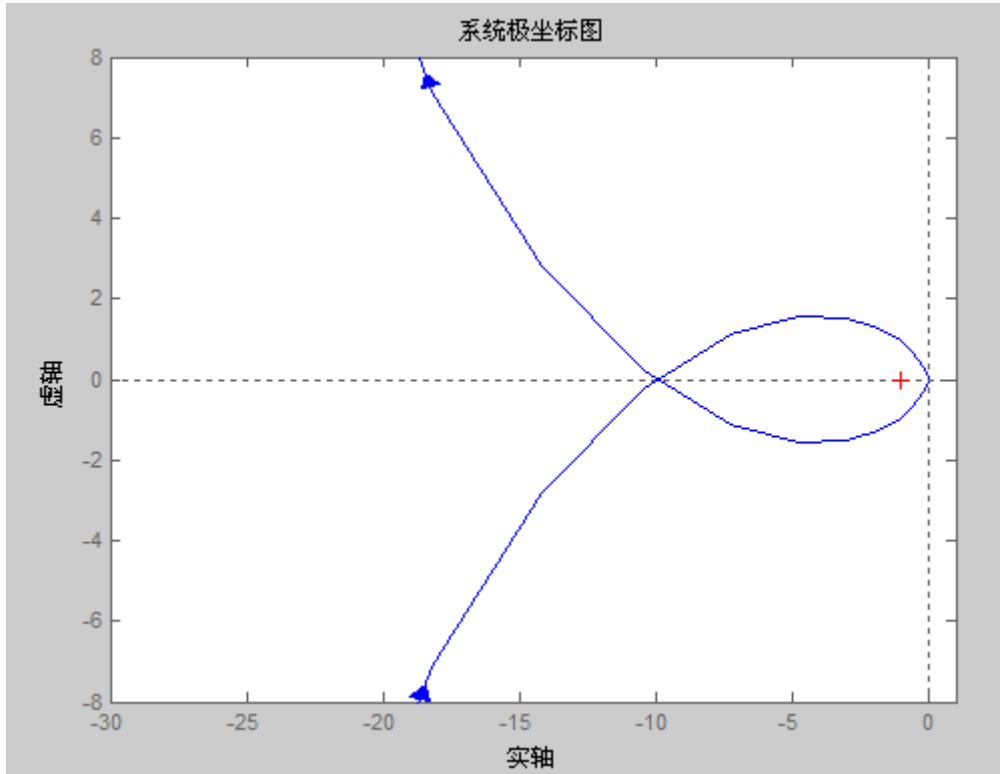
当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = \infty, \varphi(\omega) = -90^\circ, P(\omega) = 20, Q(\omega) = -\infty$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -270^\circ, P(\omega) = 0, Q(\omega) = 0$

当 $P(w)=0$ 时, $w=\frac{\sqrt{5}}{2}, Q(w)=-113.58$

当 $Q(w)=0$ 时, $w=8, P(w)=-10$

极坐标图如下:



(3) 开环频率特性为: $G(j\omega) = \frac{5(j\omega-2)}{j\omega(j\omega+1)(j\omega-1)}$

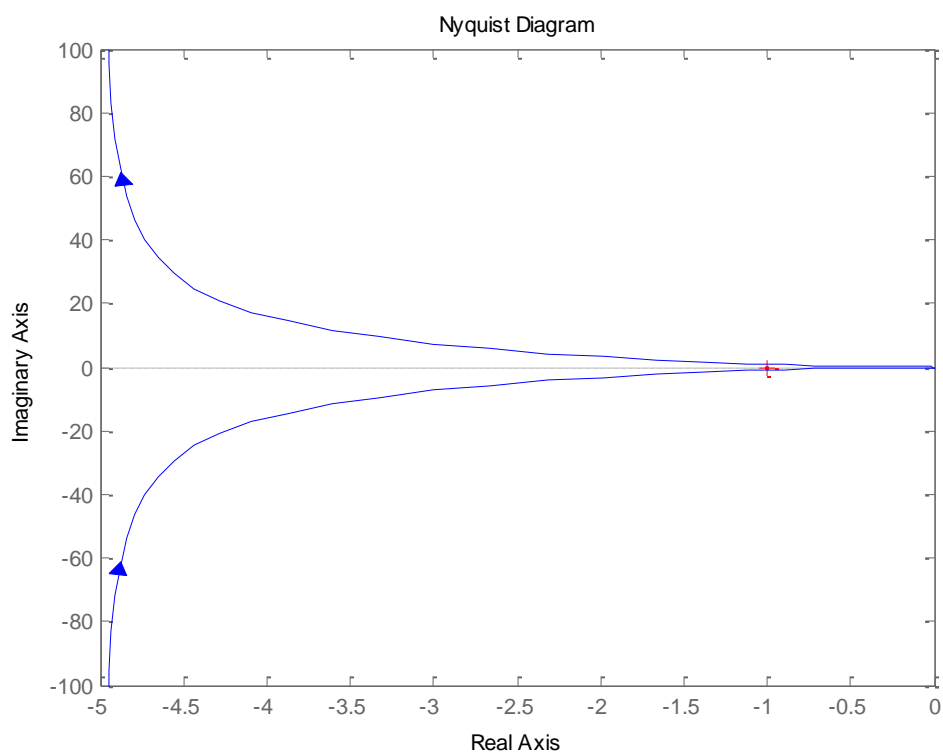
其实频和虚频分别为

$$P(\omega) = -\frac{5}{\omega^2 + 1}, Q(\omega) = -\frac{10}{\omega(\omega^2 + 1)}$$

$$A(\omega) = \frac{5\sqrt{\omega^2 + 4}}{\sqrt{\omega^2(\omega^2 + 1)^2}}, \varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.5\omega$$

当 $\omega=0$ 时, $A(\omega)=\infty, \varphi(\omega)=-90^\circ, P(\omega)=-5, Q(\omega)=\infty$

当 $\omega=\infty$ 时, $A(\omega)=0, \varphi(\omega)=-180^\circ, P(\omega)=0, Q(\omega)=0$



$$(4) \quad G(jw) = \frac{-10}{jw(1+0.2jw)(1-jw)}$$

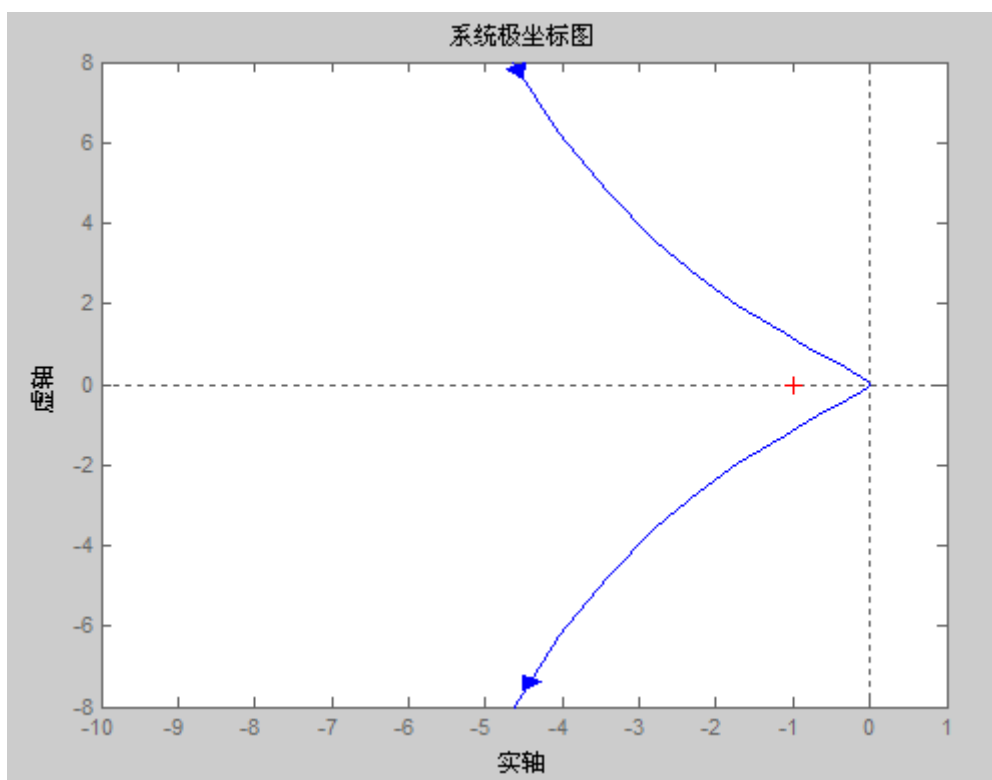
$$A(w) = \frac{100}{w\sqrt{1+0.04w^2}\sqrt{1+w^2}}, \varphi(w) = 90 - \arctan 0.2w - \arctan(-w)$$

$$P(w) = \frac{-8}{1+1.04w^2+0.04w^4}, Q(w) = \frac{10(1+0.2w^2)}{w(1+1.04w^2+0.04w^4)}$$

当 $w=0$ 时, $A(w) = \infty, \varphi(w) = -270, P(w) = -5, Q(w) = -\infty$

当 $w = \infty$ 时, $A(w) = 0, \varphi(w) = -270, P(w) = 0, Q(w) = 0$

极坐标图如下：



(5) 开环频率特性为: $G(j\omega) = \frac{1000(j\omega+1)}{j\omega(-\omega^2+8j\omega+100)}$

其实频和虚频分别为

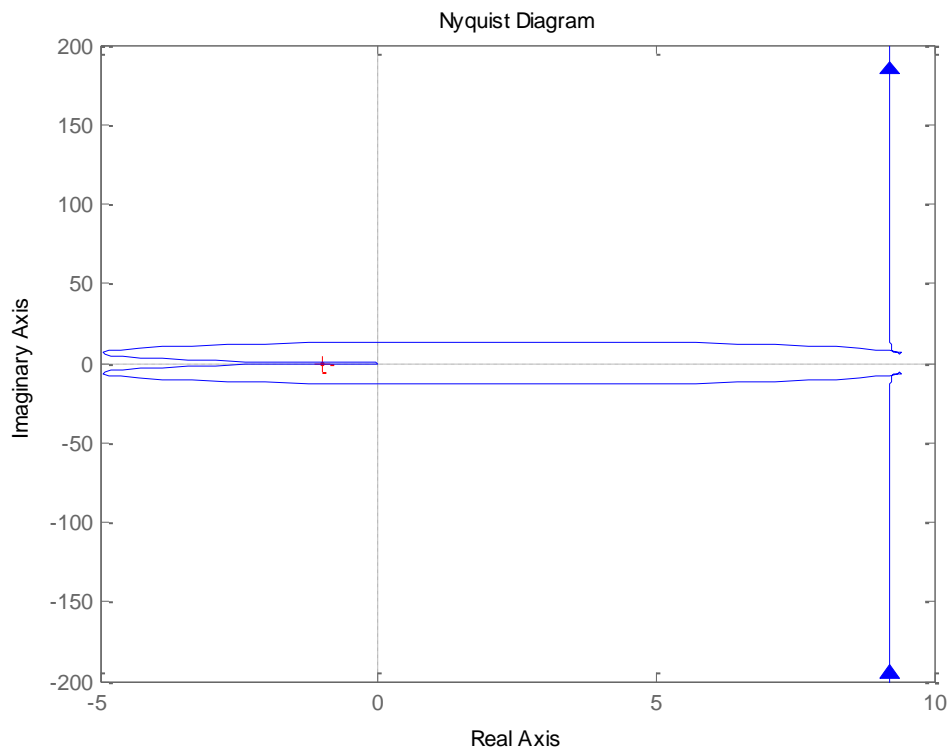
$$P(\omega) = \frac{1000(92-\omega^2)}{(100-\omega^2)^2+64\omega^2}, Q(\omega) = -\frac{1000(7\omega^2+100)}{\omega[(100-\omega^2)^2+64\omega^2]}$$

$$A(\omega) = \frac{1000\sqrt{(92-\omega^2)^2+(7\omega^2+100)^2}}{\omega[(100-\omega^2)^2+64\omega^2]}, \varphi(\omega) = -90^\circ + \arctan \omega - \arctan \frac{8\omega}{100-\omega^2}$$

$$A(\omega) = \infty, \varphi(\omega) = -90^\circ, P(\omega) = 9.2, Q(\omega) = \infty$$

$$\text{当 } \omega = \infty \text{ 时, } A(\omega) = 0, \varphi(\omega) = -180^\circ, P(\omega) = 0, Q(\omega) = 0$$

$$\text{当 } P(\omega) = 0 \text{ 时, } \omega = \sqrt{92}, Q(\omega) = -13.03$$



5.9 解:

(a) $P=1$, $N=-1$, $Z = N+P=0$

所以闭环系统稳定,

(b) $P=1$, $N=1$, $Z = N+P=2$

故闭环系统不稳定, 在右半平面有两个极点

(c) $P=2$, $N=0$, $Z = N+P=2$

故闭环系统不稳定, 在右半平面有两个极点

(d) $P=0$, $N=2$, $Z = N+P=2$

故闭环系统不稳定, 在右半平面有两个极点

(e) $P=1$, $N=-1$, $Z = N+P=0$

故闭环系统稳定

(f) $P=1$, $N=1$, $Z = N+P=2$

故闭环系统不稳定, 在右半平面有两个极点

(g) $P=2$, $N=-2$, $Z = N+P=0$

故闭环系统稳定

(h) $P=0$, $N=0$, $Z = N+P=0$

故闭环系统稳定

$$5.10 (1) \quad G_1(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

令 $s = j\omega$ ，代入 $G(s)$ 系统的频率响应 $G_1(j\omega) = \frac{K}{j\omega(0.1j\omega+1)(0.5j\omega+1)}$ ，

从而得其

$$\text{幅频: } A(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+0.01\omega^2}\sqrt{1+0.25\omega^2}}$$

$$\text{相频: } \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan 0.1\omega - \arctan 0.5\omega$$

$$\text{实频: } P(\omega) = -\frac{0.6K}{(1+0.01\omega^2)(1+0.25\omega^2)}$$

$$\text{虚频: } Q(\omega) = -\frac{1-0.05\omega^2}{(1+0.01\omega^2)(1+0.25\omega^2)} K$$

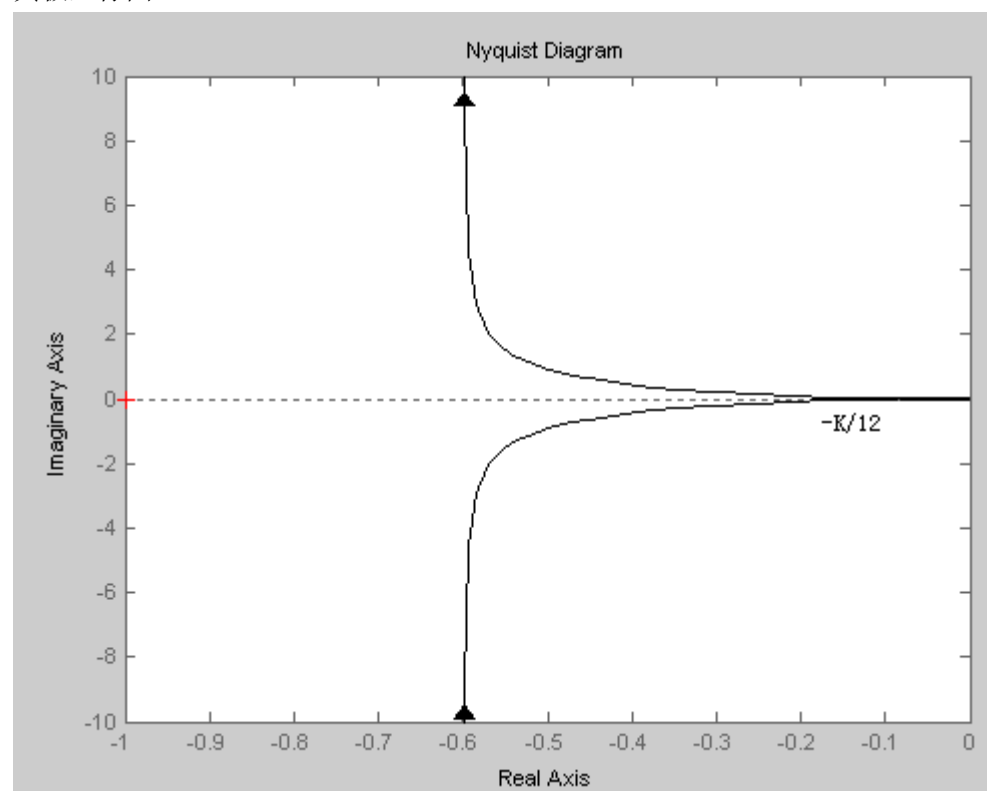
$$\text{当 } \omega=0 \text{ 时, } A(\omega)=\infty, \varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}, P(\omega)=-0.6K, Q(\omega)=\infty$$

$$\text{当 } \omega=\infty \text{ 时, } A(\omega)=0, \varphi(\omega)=-\frac{3\pi}{2}, P(\omega)=0, Q(\omega)=0$$

$$\text{令 } Q(\omega)=0, \text{ 解得 } \omega=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \quad P(\omega)=-\frac{K}{12}$$

$$\text{与实轴交点: } \left(-\frac{K}{12}, 0\right)$$

其极坐标图:



若要使系统稳定，则 $0 > -\frac{K}{12} > -1$ 。得 $0 < K < 12$

综上，当 $0 < K < 12$ 时系统稳定，
当 $K = 12$ 时 系统临界稳定

$$(2) \quad G_2(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

令 $s = j\omega$, 代入 $G(s)$ 系统的频率响应 $G_2(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)(j\omega+2)(j\omega+3)}$

从而得其

幅频: $A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2} \sqrt{4+\omega^2} \sqrt{9+\omega^2}}$

$$G_2(s) = \frac{200(s+3)}{(s+5)^2(s+1)(s+0.8)}$$

相频: $\varphi(\omega) = -\arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{2} - \arctan \frac{\omega}{3}$

$$P(\omega) = \frac{6(1-\omega^2)K}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

实频: $G_4(s) = \frac{64(s+2)}{s(s+0.5)(s^2+3.2s+64)}$

虚频: $Q(\omega) = \frac{(\omega^3 - 11\omega)K}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)(9+\omega^2)}$

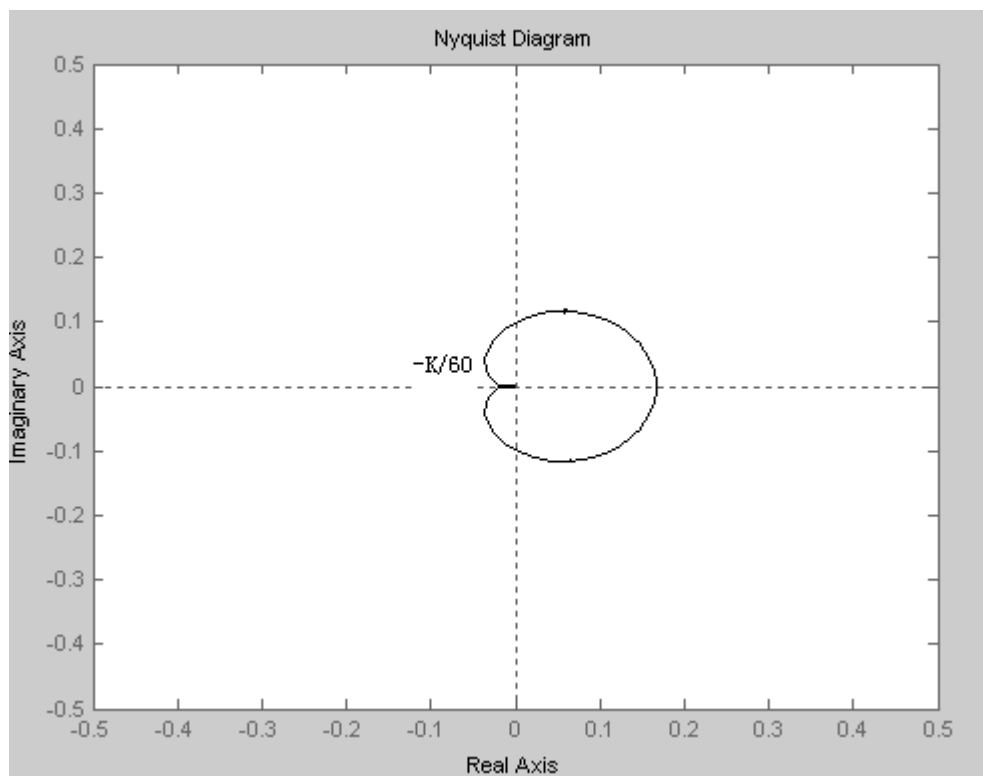
当 $\omega = 0$ 时, $A(\omega) = \frac{K}{6}$, $\varphi(\omega) = 0$, $P(\omega) = \frac{K}{6}$, $Q(\omega) = 0$

当 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) = 0$, $\varphi(\omega) = -\frac{3\pi}{2}$, $P(\omega) = 0$, $Q(\omega) = 0$

令 $Q(\omega) = 0$, 解得 $\omega = \sqrt{11}$ $P(\omega) = -\frac{K}{60}$

与实轴交点: $(-\frac{K}{60}, 0)$

其极坐标图:



若要使系统稳定，则 $0 > -\frac{K}{60} > -1$. 得 $0 < K < 60$

当 $K < 0$ 时, 则计算得 $-6 < K < 0$ 时 系统稳定

综上，当 $-6 < K < 60$ 时系统稳定，

当 $K = 60$ 时 系统临界稳定

$$(3) \quad G(s) = \frac{K(2s+1)}{s(s-1)}$$

$$\text{令 } s = j\omega, \text{ 代入 } G(s) \text{ 系统的频率响应 } G(j\omega) = \frac{K(2j\omega+1)}{j\omega(j\omega-1)}$$

$$\text{从而得: } A(\omega) = \frac{K\sqrt{1+4\omega^2}}{\sqrt{\omega^4+\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctan 2\omega + \arctan \omega - \frac{3\pi}{2}$$

$$P(\omega) = \frac{-3K}{\omega^2+1}, \quad Q(\omega) = \frac{-(2\omega^2-1)K}{\omega(\omega^2+1)}$$

所以, 得:

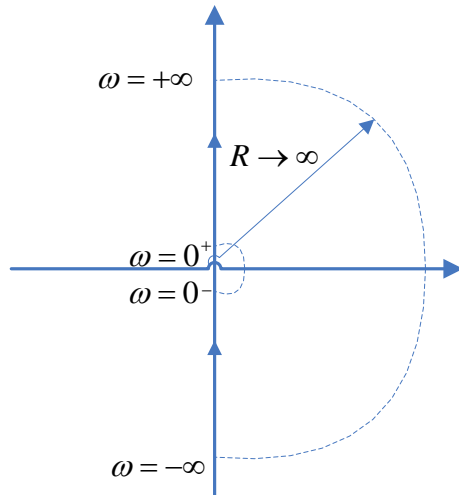
$$\text{当 } \omega = 0 \text{ 时, } A(\omega) = \infty, \quad \varphi(\omega) = -\frac{3\pi}{2}, \quad P(\omega) = -3K, \quad Q(\omega) = \infty$$

$$\text{当 } \omega = \infty \text{ 时, } A(\omega) = 0, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}, \quad P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = 0$$

$$\text{令 } Q(\omega) = 0, \text{ 解得: } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

与实轴的交点为： $P(\frac{\sqrt{2}}{2})=-2K$

取奈奎斯特路径如图：



于是，奈奎斯特路径由以下四段组成：

- (1) 正虚轴： $s = j\omega$ ，频率 ω 由 0^+ 变化到 $+\infty$
- (2) 半径为无穷大的右半圆： $s = Re^{j\theta}$ ， $R \rightarrow \infty$, θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 变化到 $-\frac{\pi}{2}$
- (3) 负实轴： $s = j\omega$ ，频率 ω 由 $-\infty$ 变化到 0^-
- (4) 半径为无穷小的右半圆： $s = R'e^{j\theta'}$ ， $R' \rightarrow 0$, θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变化到 $\frac{\pi}{2}$

注意：对于半径为无穷小的右半圆： $s = R'e^{j\theta'}$ 来说，其镜像为无穷大的圆，方向为

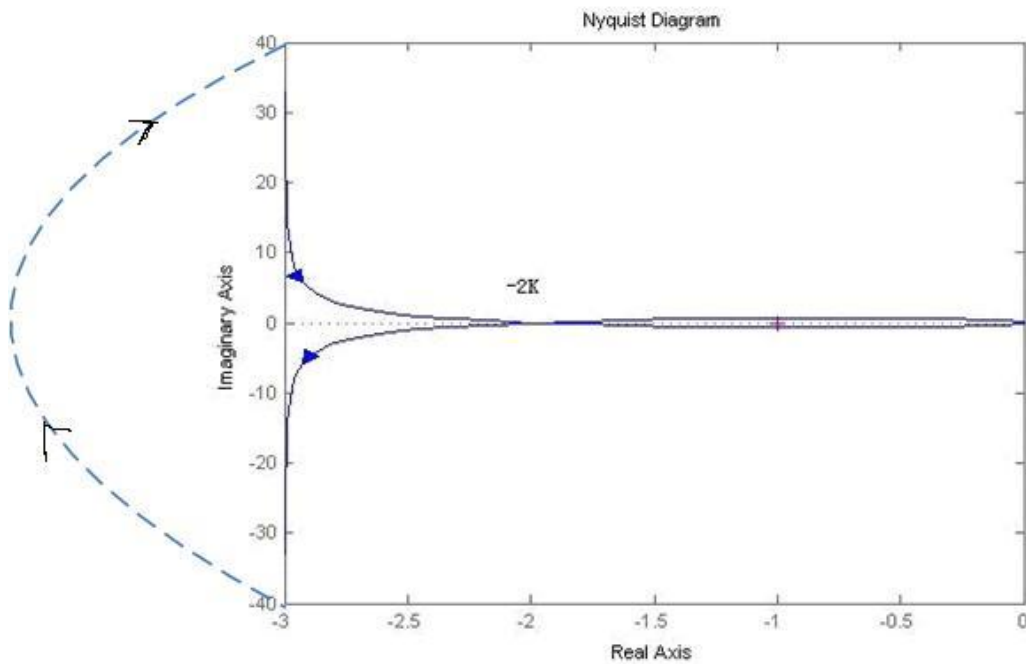
$$-\frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$$

$$\lim_{R' \rightarrow 0} G_k(s) \Big|_{s=R'e^{j\theta'}} = \lim_{R' \rightarrow 0} \frac{-K}{R'e^{j\theta'}} = \infty e^{j\theta_1}, \text{ 其中 } \theta_1 = -\pi - \theta$$

因为： θ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变化到 $\frac{\pi}{2}$

所以： θ_1 的变化方向是 $-\frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$

令 $K>0$, 得奈氏曲线为：



$G_k(s)$ 在右半平面有一个开环极点: $P=1$

要是系统稳定, 则 $-2K < -1$, 即: $k > \frac{1}{2}$.

当 $K < 0$ 时, 原极坐标图顺时针转过 180° , 系统不稳定。

综上得: 当 $K > \frac{1}{2}$ 时系统稳定。

5.12 解:

(1) 当 $G_1(s)$ 在 s 右半平面上没有极点, 即 $P=0$ 欲使 $Z=N+P=0$, 则有 $N=0$

$K_1 > 0$ 时, $-5K_1 > -1$ 或 $-3K_1 < -1 < -2K_1$, 得 $0 < K_1 < \frac{1}{5}$, 或 $\frac{1}{3} < K_1 < \frac{1}{2}$

$K_1 < 0$ 时, $16K_1 > -1$, 得 $-\frac{1}{16} < K_1 < 0$

综上, 当 $-\frac{1}{16} < K_1 < 0$, 或 $0 < K_1 < \frac{1}{5}$, 或 $\frac{1}{3} < K_1 < \frac{1}{2}$ 时系统稳定。

(2) 当 $G_1(s)$ 在 s 右半平面上有 1 个极点, 即 $P=1$ 欲使 $Z=N+P=0$, 则有 $N=-1$

$K_1 > 0$ 时, 无解

$K_1 < 0$ 时, $16K_1 < -1$, 得 $K_1 < -\frac{1}{16}$

综上, 当 $K_1 < -\frac{1}{16}$ 时系统稳定。

(3) 当 $G_1(s)$ 在 s 右半平面上有 2 个极点, 即 $P=2$ 欲使 $Z=N+P=0$, 则有 $N=-2$

$K_1 > 0$ 时, $-5K_1 < -1 < -3K_1$ 或 $-2K_1 < -1$, 得 $\frac{1}{5} < K_1 < \frac{1}{3}$, 或 $K_1 > \frac{1}{2}$

$K_1 < 0$ 时, 无解

综上, 当 $\frac{1}{5} < K_1 < \frac{1}{3}$, 或 $K_1 > \frac{1}{2}$ 时系统稳定。

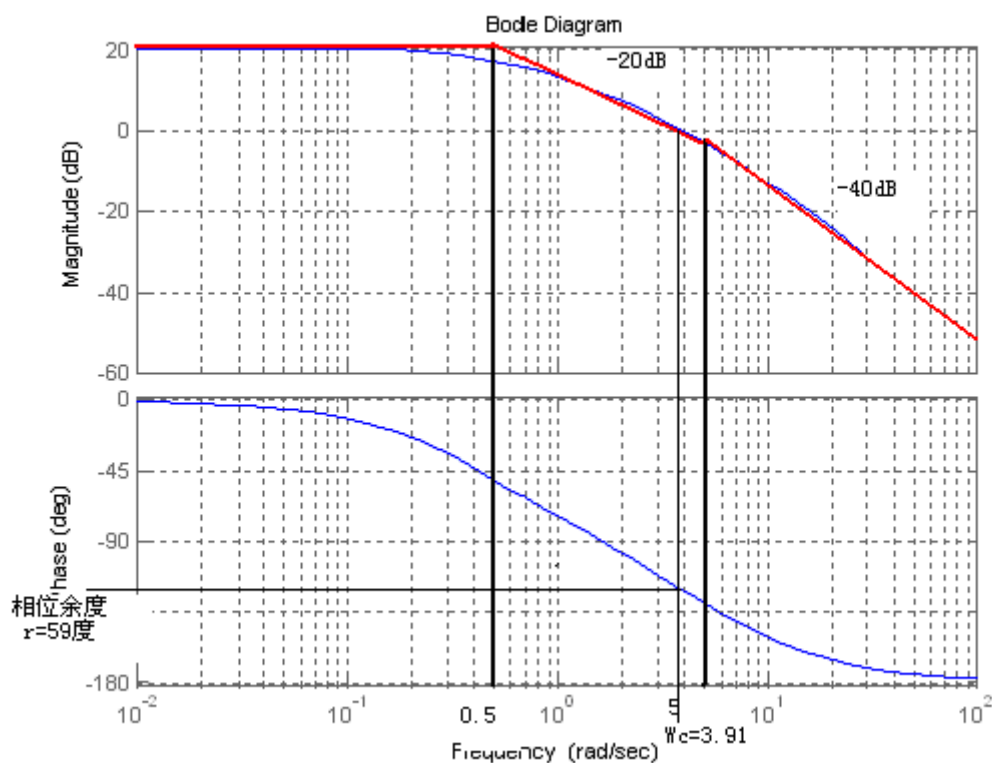
(4) 当 $G_1(s)$ 在 s 右半平面上有 3 个极点, 即 $P=3$ 欲使 $Z=N+P=0$, 则有 $N=-3$

此时无论 K_1 取何值, 系统都不稳定。

5.14 解:

$$(1) G_1(s) = \frac{50}{(2s+1)(s+5)}$$

波特图为:



由于开环传递函数在右半平面无极点, 并且正负穿越都为 0, 所以系统是稳定的

$$\varphi(\omega) = -\arctan 2\omega - \arctan 0.2\omega$$

$$A_1(\omega) = \frac{50}{\sqrt{4\omega^2 + 1}\sqrt{\omega^2 + 5}} \quad \text{当 } L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 0 \text{ 时, } \omega = 3.91 \text{ rad/s}$$

相位裕度为: $\gamma = 180^\circ + \varphi(3.91) = 59^\circ$

近似法求解: 系统的转折频率分别为 $\omega_1 = 0.5$
 $\omega_2 = 5$

$$20\lg K = 20\lg 10 = 20\text{dB}$$

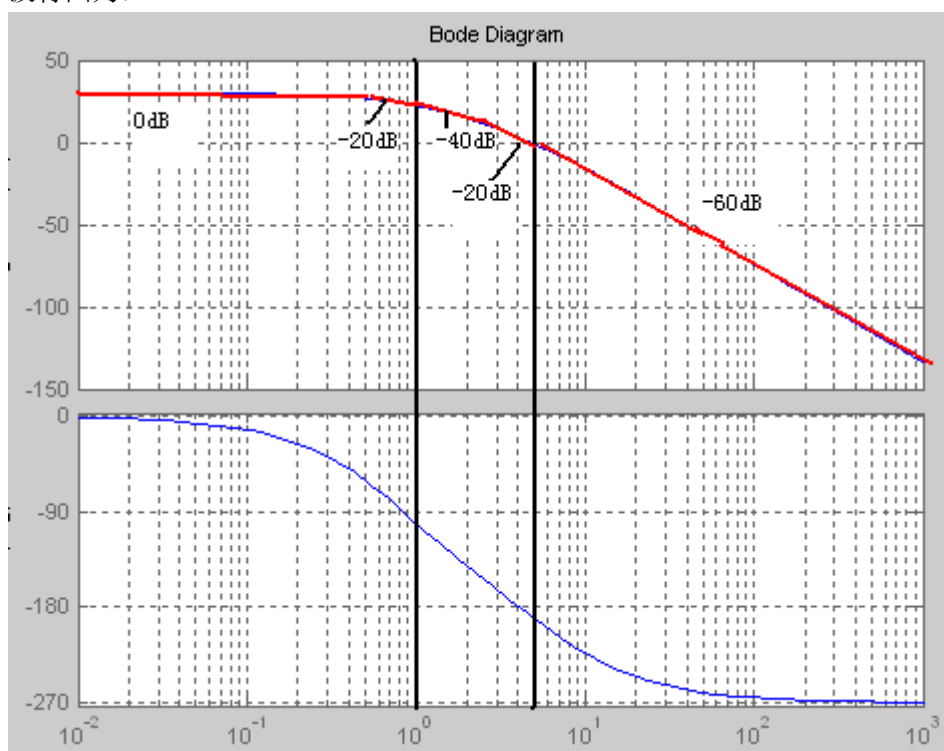
$$20(\lg \omega_c - \lg \omega_1) = 20\lg K = 20$$

解得 截止频率 $\omega_c = 5\text{rad/s}$

$$\text{相位裕度 } \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ - \arctan 2\omega_c - \arctan 0.2\omega_c = 50.711^\circ$$

$$(2) \quad G_2(s) = \frac{200(s+3)}{(s+5)^2(s+1)(s+0.8)}$$

波特图为:



由于右半平面 $P=0$, 有图可知, $N=2$, 所以系统 $z=2$ 故系统不稳定

$$G(s) = \frac{30(\frac{s}{3} + 1)}{(s+1)(\frac{5}{4}s+1)(1+(\frac{s}{5})^2 + \frac{2}{5}s)}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{3} - \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{0.8} - \arctan \frac{10\omega}{25 - \omega^2}$$

当 $L(\omega)=0$ 时, $\omega=4.77 \text{ rad/s}$

相位裕度为: $\gamma=8.13^\circ$

近似法求解: 频率特性 $G(j\omega)$ 的转折频率分别为

$$\omega_1 = 0.8 \quad \omega_2 = 1 \quad \omega_3 = 3 \quad \omega_4 = 5$$

$$20\lg K = 20\lg 30 = 29.5\text{dB}$$

$$\text{由 } 40(\lg \omega_3 - \lg 1) = 20\lg K - k_1 \quad \text{解得 } k_1 = 10.415\text{dB} > 0$$

$$\text{由 } 20(\lg \omega_4 - \lg \omega_3) = k_1 - k_2 \quad \text{解得 } k_2 = 5.978\text{dB} > 0$$

然后根据式

$$60(\lg \omega_c - \lg \omega_4) = k_2 - 0$$

解得截至频率约为 $\omega_c = 6.28 \text{ rad/s}$

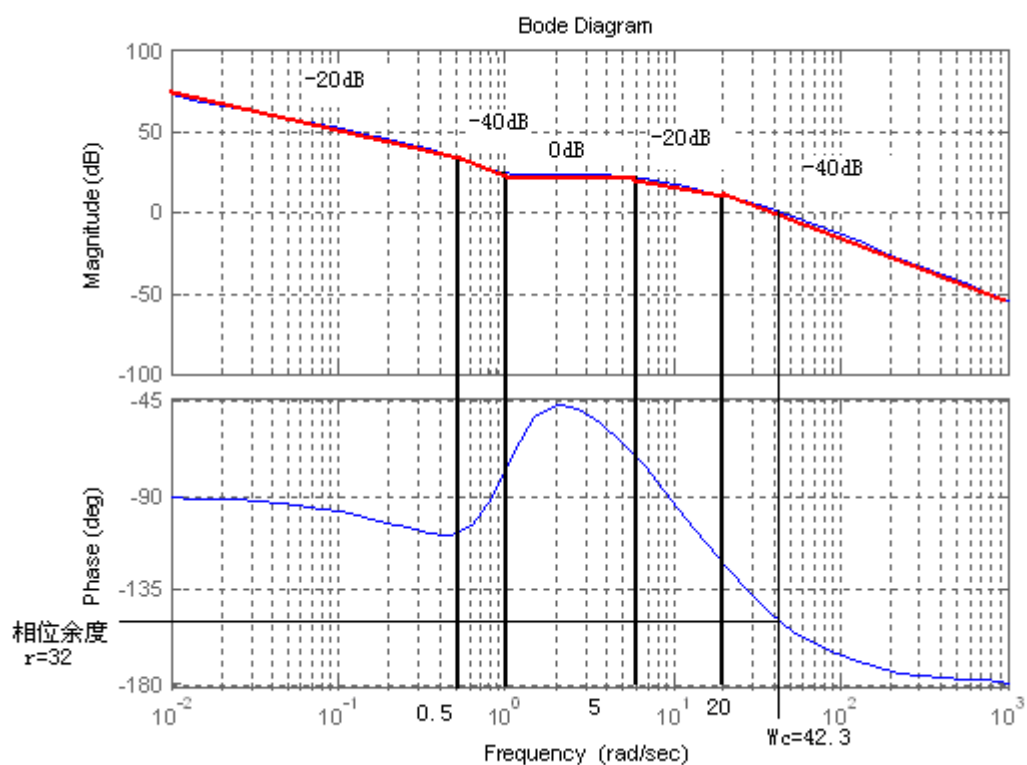
$$\text{相位裕度为: } \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

$$= 180^\circ + \arctan \frac{\omega_c}{3} - \arctan \omega_c - \arctan \frac{\omega_c}{0.8} - \arctan \frac{10\omega_c}{25 - \omega_c^2}$$

$$= 157.75^\circ$$

$$(3) \quad G_3(s) = \frac{40(s^2 + s + 1)}{s(2s + 1)(0.2s + 1)(0.05s + 1)}$$

波特图为:



系统稳定

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{1-\omega^2} - \frac{\pi}{2} - \arctan 2\omega - \arctan 0.2\omega - \arctan 0.05\omega$$

当 $L(\omega)=0$ 时, $\omega=42.3$ rad/s

相角余度为: $r=180^\circ + \varphi(42.3)=31.3^\circ$

近似法求解:

首先求频率特性 $G(j\omega)$ 的转折频率, 分别为

$$\omega_1 = 0.5 \quad \omega_2 = 1 \quad \omega_3 = 5 \quad \omega_4 = 20$$

$$20 \lg K = 20 \lg 40 = 32.04 \text{ dB}$$

列出以下方程

$$\text{由 } 20(\lg \omega_1 - \lg 1) = 20 \lg K - k_1 \quad \text{解得 } k_1 = 38.06 \text{ dB} > 0$$

$$\text{由 } 40(\lg 1 - \lg \omega_1) = k_1 - k_2 \quad \text{解得 } k_2 = 26.02 \text{ dB} > 0$$

$$\text{由 } 20(\lg \omega_4 - \lg \omega_3) = k_2 - k_3 \quad \text{得 } k_3 = 13.98 \text{ dB} > 0$$

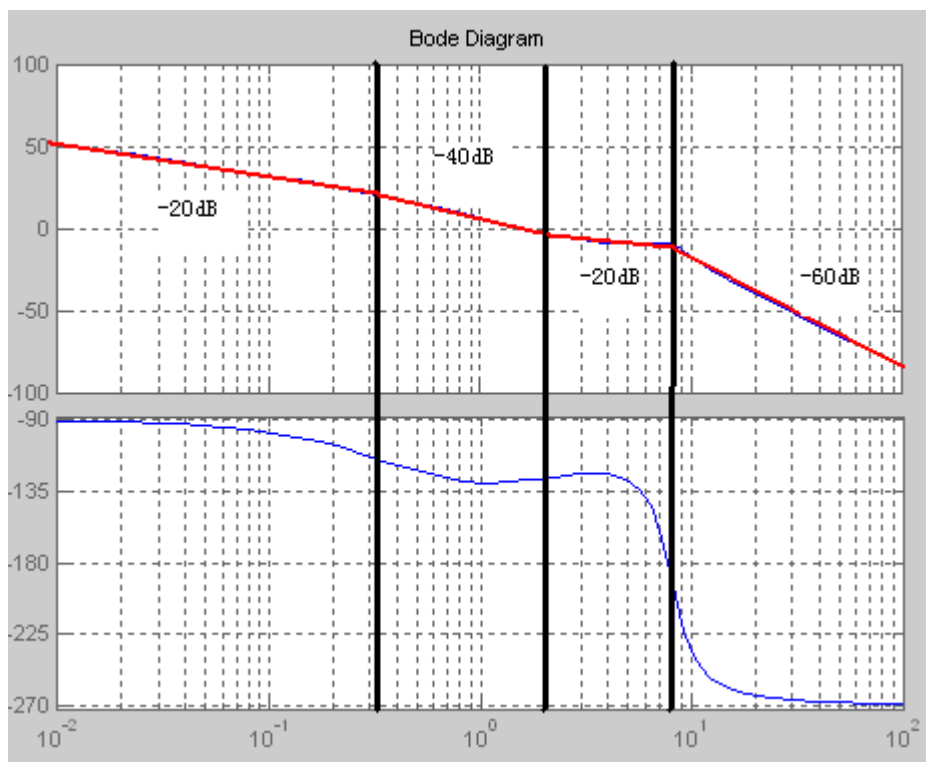
然后根据式

$$40(\lg \omega_c - \lg \omega_4) = k_3 \quad \text{解得截止频率 } \omega_c = 44.67 \text{ rad/s}$$

$$\text{相位裕度 } \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = -150.06^\circ$$

$$(4) \quad G_4(s) = \frac{64(s+2)}{s(s+0.5)(s^2+3.2s+64)}$$

波特图:



由图可知, $P=0, N=0$, 所以 $z=0$ 故系统稳定

当 $L(\omega)=0$ 时, $\omega=1.59 \text{ rad/s}$

相位余度为: $\gamma=51.2^\circ$

$$G(s) = \frac{4(0.5s+1)}{s(2s+1)\left(\left(\frac{s}{8}\right)^2 + \frac{3.2}{64}s+1\right)}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 2\omega - \arctan \frac{3.2\omega}{64-\omega^2} + \arctan 0.5\omega$$

近似法求解:

首先求频率特性 $G(j\omega)$ 的转折频率, 分别为

$$\omega_1 = 0.5 \quad \omega_2 = 2 \quad \omega_3 = 8$$

$$20\lg K = 20\lg 4 = 12.04\text{dB}$$

列出以下方程

$$\text{由 } 20(\lg 1 - \lg \omega_1) = k_1 - 20\lg K \quad \text{解得 } k_1 = 18.06\text{dB} > 0$$

$$\text{由 } 40(\lg \omega_2 - \lg \omega_1) = k_1 - k_2 \quad \text{解得 } k_2 < 0$$

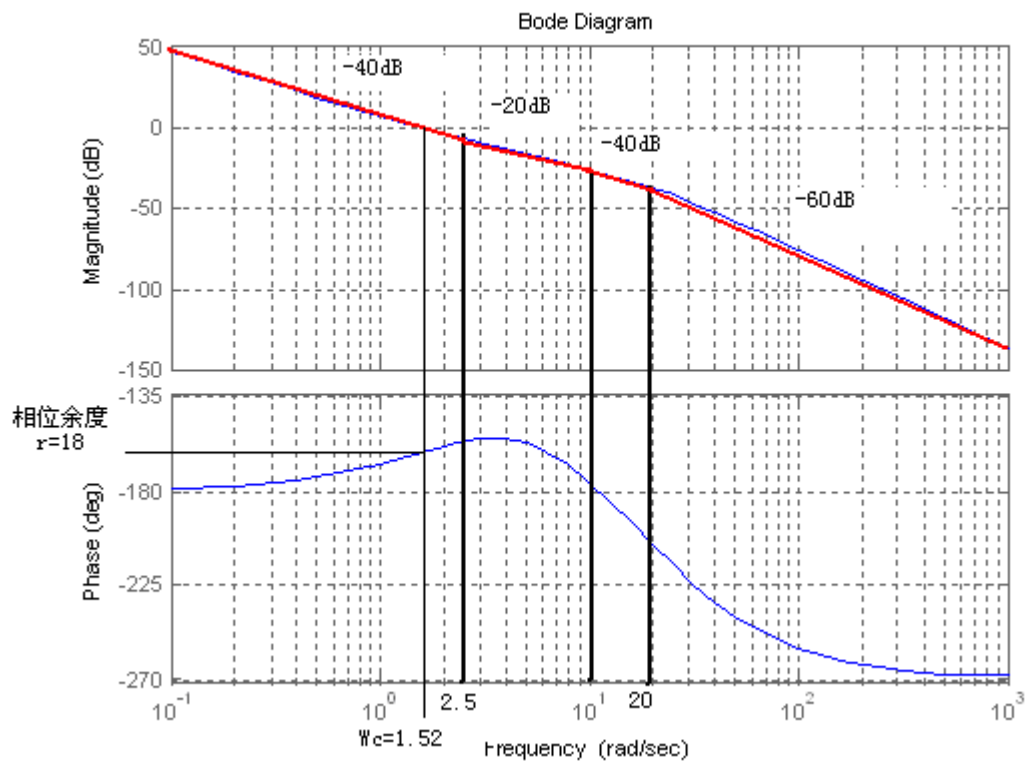
然后根据式

$$40(\lg \omega_c - \lg \omega_1) = k_1 \quad \text{解得截止频率 } \omega_c = 1.414 \text{ rad/s}$$

$$\text{相位裕度 } \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 50.5^\circ$$

$$(5) \quad G_5(s) = \frac{2(0.4s + 1)}{s^2(0.1s + 1)(0.05s + 1)}$$

波特图为：



系统稳定

$$\varphi(\omega) = \arctan 0.4\omega - \pi - \arctan 0.1\omega - \arctan 0.05\omega$$

当 $L(\omega)=0$ 时, $\omega=1.52$ rad/s

相位裕度为: $r=180^\circ + \varphi(1.52)=18^\circ$

近似法求解:

首先求频率特性 $G(j\omega)$ 的转折频率, 分别为

$$\omega_1 = 2.5 \quad \omega_2 = 10 \quad \omega_3 = 20$$

$$20\lg K = 20\lg 2 = 6.02dB$$

列出以下方程

$$\text{由 } 40(\lg 1 - \lg \omega_1) = k_1 - 20\lg K \quad \text{解得 } k_1 = -9.9dB < 0$$

然后根据式

$$40(\lg \omega_c - \lg 1) = 20\lg K \quad \text{解得截止频率 } \omega_c = 1.414rad/s$$

$$\text{相位裕度 } \gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 17.4^\circ$$

5.16 解:

$$(1) \text{ 开环传递函数为: } G(s) = \frac{90}{s(0.1s+1)} = \frac{900}{s(s+10)} \quad \text{这是一典型的二阶系统。}$$

$$\text{其中: } \omega_n^2 = 900 \quad 2\zeta\omega_n = 10 \quad \text{故 } \omega_n = 30 \quad \zeta = \frac{1}{6}$$

$$\because 0 < \zeta \leq 0.7 \quad \text{由近似关系得: } \zeta = 0.01r$$

$$\text{则 } \gamma = 100\zeta = \left(\frac{100}{6}\right)^\circ \approx 16.7^\circ$$

$$\text{令 } |G(j\omega)| = 1 \quad \text{得 } \omega_c = 29.2rad/s$$

(2) 系统闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{90}{s(0.1s+1)+90} = \frac{900}{s^2+10s+900}$$

$$M(\omega) = |\Phi(j\omega)| = \frac{900}{\sqrt{(900-\omega^2)^2+100\omega^2}} \quad \text{令 } \frac{dM(\omega)}{d\omega} = 0$$

$$\text{则 } \omega_p = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 30 \times \sqrt{1-2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2} = 29.2rad/s$$

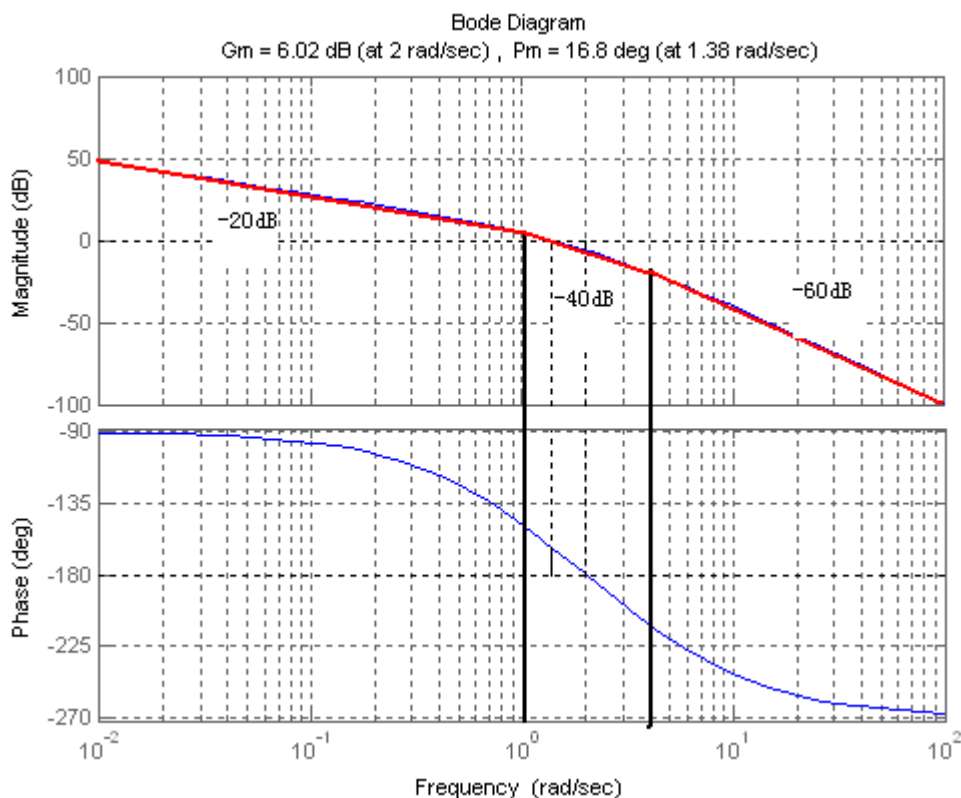
$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{6} \sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}} = 3.04$$

$$\because M(0) = 1 \quad \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} |M(0)| = \frac{\sqrt{2}}{2} = |M(j\omega_b)|$$

$$\text{解得: } \omega_b = 45.7rad/s$$

(3) (1) 确定反馈控制系统 $G(s) = \frac{2.5}{s(s+1)(0.25s+1)}$ 的相位滞后-超前校正装置

画出校正前系统的伯德图如下



易得校正前系统的幅值穿越频率 $\omega_c = 1.38 \text{ rad/s}$ ，相位裕度 $\gamma = 16.8^\circ$

利用近似法求解：

$$20 \lg K = 20 \lg 2.5 = 7.96 \text{ dB}$$

$$40(\lg \omega_c - \lg 1) = 20 \lg K = 7.96 \text{ dB}$$

易求得： $\omega_c = 1.58 \text{ rad/s}$

$$\varphi(\omega_c) = -90^\circ - \arctan \omega_c - \arctan 0.25\omega_c$$

$$\text{相位裕度 } \gamma = 180^\circ + \varphi(1.58) = 180^\circ - 169.2^\circ = 10.8^\circ$$

(2) 选择校正后系统的幅值穿越频率

从校正前的相频特性曲线可以求出，

$$\text{当 } \omega = 0.70 \text{ rad/s 时, } \angle G(j\omega) = -135^\circ$$

选择校正后系统的幅值穿越频率为 0.7 rad/s ，在 $\omega = 0.70 \text{ rad/s}$ 时相位超前量为 45°

(3) 确定滞后-超前校正网络的相位滞后部分的转折频率。

选择相位滞后部分的转折频率 $\frac{1}{T_2} = 0.07 \text{ rad/s}$

(4) 由 φ_m 确定参数 α

在超前网络中, 最大相位超前量 φ_m , $\sin \varphi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$

当 $\alpha = 7$ 时, $\varphi_m = 48.6^\circ$, 满足需要 45° 的相位裕度要求, 所以选择 $\alpha = 7$

相位滞后部分的另一转折频率 $\frac{1}{\alpha T_2} = \frac{1}{7T_2} = 0.01$

滞后-超前网络相位滞后部分的传递函数

$$\frac{1 + \frac{1}{0.7}s}{1 + \frac{1}{0.07}s} = \frac{7 + 10s}{7 + 100s}$$

(5) 确定滞后-超前网络相位超前部分的传递函数

$$\omega = 0.70 \text{ rad/s 时, } L(\omega) = -20 \lg \omega = 3.1 \text{ dB}$$

故需画一条斜率为 20 dB/dec , 且通过 $(0.7 \text{ rad/s}, -3.1 \text{ dB})$ 的直线, 该直线与 0 dB 线及 -20 dB 线的交点就是所要求的转折频率。

$$20(\lg \omega - \lg 0.7) = y + 3.1$$

令 $y=0$ 得 $\omega = 1 \text{ rad/s}$

令 $y=-20$ 得 $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$

因此滞后-超前校正网络相位超前部分的传递函数为

$$\frac{1 + \frac{1}{0.1}s}{1 + \frac{1}{1}s} = \frac{1 + 10s}{1 + s}$$

综上所述, 滞后-超前校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \left(\frac{1 + \frac{1}{0.7}s}{1 + \frac{1}{0.07}s} \right) \left(\frac{1 + \frac{1}{0.1}s}{1 + \frac{1}{1}s} \right) = \left(\frac{7 + 10s}{7 + 100s} \right) \left(\frac{1 + 10s}{1 + s} \right)$$

校正后系统的传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{2.5(1 + 10s)(1 + \frac{10}{7}s)}{s(s + 1)^2(0.25s + 1)(1 + \frac{100}{7}s)}$$

$$7.7 \quad G(s) = \frac{k_g}{s(s+1)(s+5)}$$

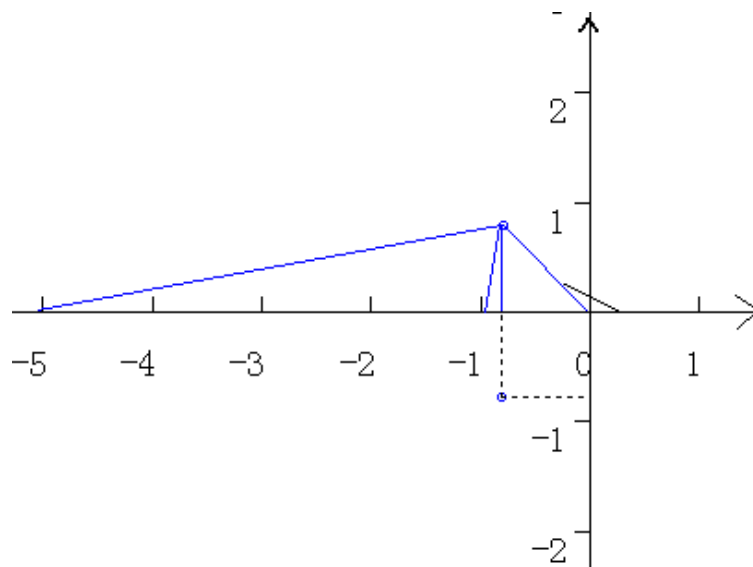
(1) 确定期望主导极点位置

由超调量 $\delta\% < 5\%$ 。可得到阻尼系数 $\zeta > 0.7$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} < 5s \quad \text{于是 } \zeta\omega_n > 0.8$$

选择期望主导极点为

$$\gamma_1, \hat{\gamma}_1 = -0.8 \pm 0.8j$$



确定相位超前网络的零点：为 $s = -z = -0.8$

相位超前网络的极点：

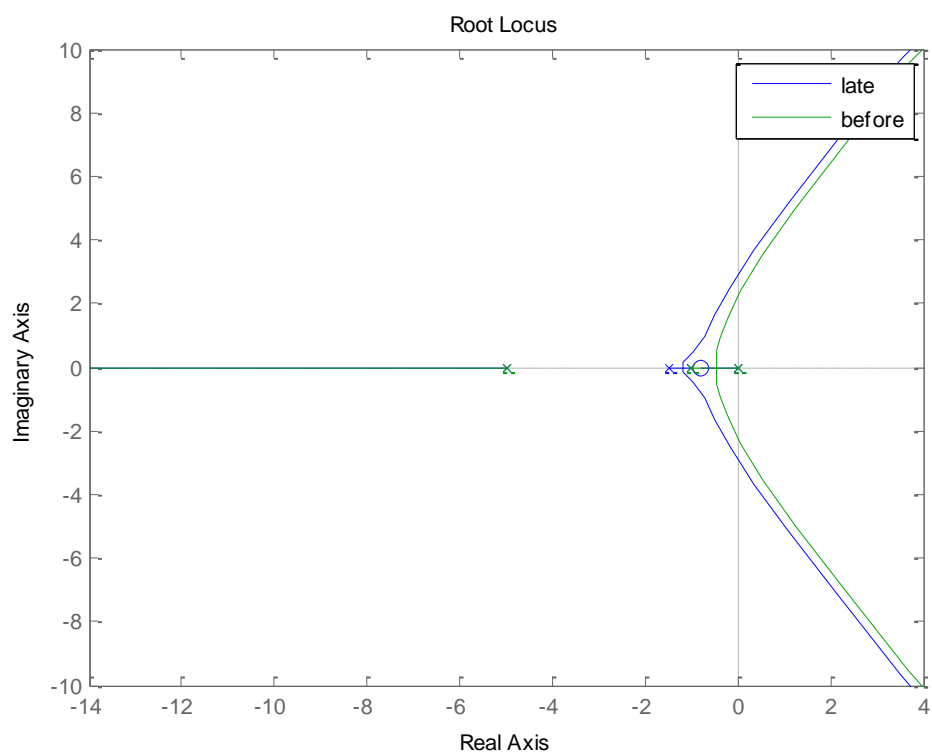
$$\text{由相角条件知： } 90^\circ - 135^\circ - 76^\circ - \theta_p - 10.78^\circ = -180^\circ$$

$$\text{得 } \theta_p = 48.22^\circ$$

故极点 $-p = -1.5$

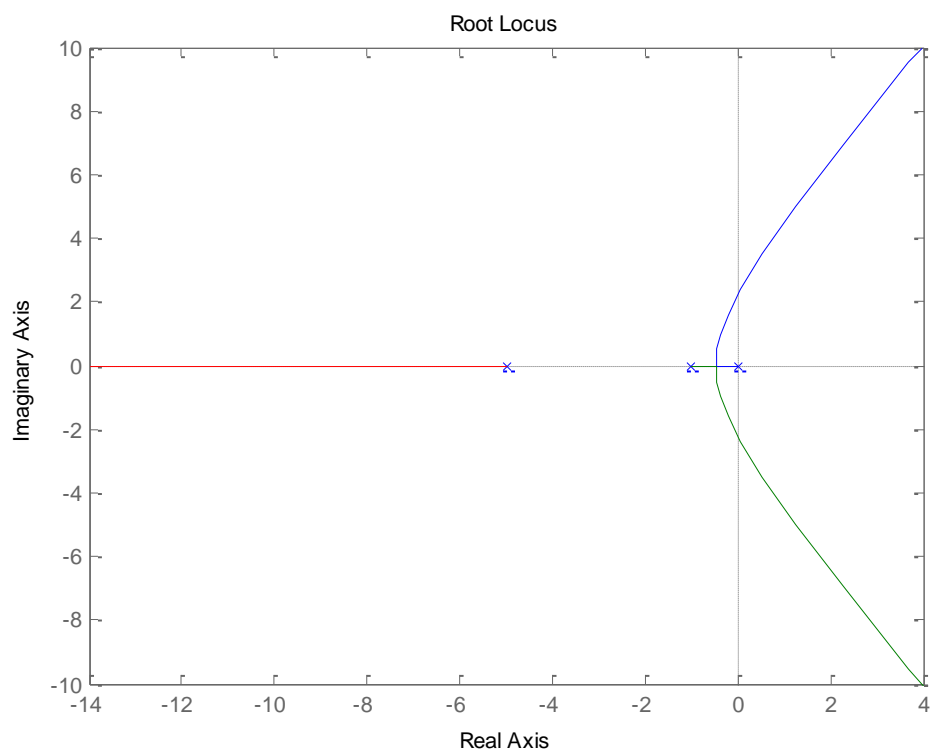
$$\text{超前网络的传递函数为： } G_c(s) = \frac{s+0.8}{s+1.5}$$

$$\text{校正后系统的传递函数为 } G_c(s)G(s) = \frac{k_g(s+0.8)}{s(s+1)(s+5)(s+1.5)}$$



$$7.9 \quad G(s) = \frac{4.19}{s(s+1)(s+5)}$$

解(1) 校正前的根轨迹图:



校正前系统的稳态速度误差系数为

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{4.19}{5} = 0.838$$

$$\text{偶极子的零点与极点的比值} \left| \frac{z_c}{p_c} \right| = \frac{8.6}{0.838} \approx 10$$

为使 z_c , p_c 到期望极点的向量的角度之差大约为 1 度,

$$\text{取 } z_c = 0.1, \quad p_c = 0.01$$

所以校正后系统的开环系统传递函数为

$$G_c(s)G(s) = \frac{4.19(s+0.1)}{s(s+1)(s+5)(s+0.01)}$$

$$7.12 \quad G(s) = \frac{10k_1}{s(0.5s+1)+10k_2s}$$

$$\text{由条件 (1) 静态速度误差系数 } K_v \geq 5s^{-1}, \text{ 知 } K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{10k_1}{1+10k_2} = 5$$

$$\text{系统闭环传递函数 } G'(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{10k_1}{0.5s^2 + (1+10k_2)s + 10k_1}$$

$$= \frac{20k_1}{s^2 + 2(1+10k_2)s + 20k_1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

根据条件 (2) (3),

$$\zeta = \frac{1+10k_2}{\sqrt{20k_1}} = 0.5$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{1+10k_2} = \frac{4}{2k_1} \leq 3s$$

$$\text{综上解得, } \begin{aligned} k_2 &\geq 0.15 \\ k_1 &\geq 1.25 \end{aligned}$$