1. 解: 1). A的各列线性无关 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ -2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times 2+r_3]{r_1\times(-2)+r_2} \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -3\\ 0 & 6\end{bmatrix} \xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{6})+r_1]{r_3\times(\frac{1}{2})+r_2} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

故 $C(A)$ 的基底为 $\vec{a}_1\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$ 和 $\vec{a}_2\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}$ 对其正交化

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \vec{a}_2 - (\vec{q}_1^T\cdot\vec{a}_2)\vec{q}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \qquad \vec{q}_2 = \frac{\vec{B}}{\|B\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$$

由于标准正交 故 $\vec{q}_1, \vec{q}_2 \perp \vec{q}_3$ 即 $\begin{bmatrix}\vec{q}_1^T & \vec{q}_2^T\end{bmatrix}\cdot\vec{q}_3 = \vec{0}$

解得 $\vec{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$ 综上 $\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$ $\vec{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ $\vec{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$

2) 由于 $\vec{q}_1$和$\vec{q}_2$为$C(A)$的标准正交基. $\vec{q}_3 \perp C(A)$ $N(A^T)$和$C(A)$正交

故 $\vec{q}_3 \in N(A^T)$

3) $A\vec{x} = \vec{b}$ 无解 利用最小二乘法 $\vec{x} = (A^TA)^{-1}A^T\vec{b}$

$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $\qquad \vec{x} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\7\end{bmatrix}$

故 $\vec{x} = \begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$

2. 解: $\vec{a} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\qquad \vec{q}_1 = \frac{\vec{a}}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$

$\vec{B} = \vec{b} - (\vec{q}_1^T\cdot\vec{b})\cdot\vec{q}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$ $\qquad \vec{q}_2 = \frac{\vec{B}}{\|B\|} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\\0\end{bmatrix}$

$\vec{C} = \vec{c} - (\vec{q}_1^T\cdot\vec{c})\vec{q}_1 - (\vec{q}_2^T\cdot\vec{c})\cdot\vec{q}_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -1\end{bmatrix}$ $\qquad \vec{q}_3 = \frac{\vec{C}}{\|C\|} = \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-3\end{bmatrix}$

综上：正交向量 $\vec{A}=\vec{a}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\vec{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\\0\end{bmatrix}$ $\vec{C}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-1\end{bmatrix}$

3.解：1）由于0为A的一个特征值且 $\vec{u}$ 为对应的特征向量　故 $A\vec{u}=0\cdot\vec{u}=\vec{0}$

故A的零空间基底为 $\vec{u}$.　且A必然不可逆　即A为奇异矩阵.

故 $r(A)\leq 2$.

又由于3和5分别为特征值　$A\vec{v}=3\vec{v}$　$A\vec{w}=5\vec{w}$

且 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 线性无关

故 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 可以作为列空间的一组基底.

综上：$C(A)$ 的基为 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$　$N(A)$ 的基为 $\vec{u}$

2）$A\vec{v}=3\vec{v}$　即 $A\cdot\frac{1}{3}\vec{v}=\vec{v}$　类似的 $A(\frac{1}{5}\vec{w})=\vec{w}$.

故特解为 $\frac{1}{3}\vec{v}+\frac{1}{5}\vec{w}$

而齐次解 $A\vec{x}=\vec{0}$ 为 $\vec{x}=c\vec{u}$.　因此通解为 $\vec{x}=c\cdot\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}+\frac{1}{5}\vec{w}$

3）$A\vec{x}=\vec{u}$.　$A\vec{x}$ 表示A的各列的线性组合　即A的列空间

$A\vec{x}=c_1\vec{v}+c_2\vec{w}$　而 $\vec{u}$、$\vec{v}$、$\vec{w}$ 线性无关.即 $\vec{u}$ 不能通过 $\vec{v}$、$\vec{w}$ 线性表示

因此 $A\vec{x}=\vec{u}$ 无解

4.证明：$A=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$　$\det|A-\lambda I|=(2-\lambda)^2-1=0$　$\lambda_1=1$　$\lambda_2=3$

$A-I=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$ $(A-I)\vec{x}=\vec{0}$ 的解为 $\vec{x}=c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$A-3I=\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $(A-3I)\vec{x}=\vec{0}$ 的解为 $\vec{x}=c\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

故A可以作特征值分解 $S=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ $S^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = S\cdot\Lambda\cdot S^{-1}$$

$$A^k=(S\cdot\Lambda\cdot S^{-1})^k = S\cdot\Lambda\cdot(S^{-1}S)\cdot\Lambda\cdot(S^{-1}\cdots S)\Lambda S^{-1} = S\cdot\Lambda^k\cdot S^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+3^k & 1-3^k\\ 1-3^k & 1+3^k\end{bmatrix}$$

5.解：由于收敛的位置由 λ 的特征值决定.

微分方程的解为 $\vec{u}=S\cdot\begin{bmatrix}c_1e^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ c_ne^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$ 若A可以对角化. 当 $t\to\infty$ 时 $\vec{u}\to\vec{0}$

故 $\lambda_1\cdots\lambda_n\le 0$

即A的所有特征值小于0.

$\|A-\lambda I\| = (a-\lambda)^2-1=0 \Rightarrow \lambda_1=a-1 \quad \lambda_2=a+1$

由上知：$a-1<0$ 且 $a+1<0$ 即 $a<-1$

B无法对角化 由于特征方程无实数解.

$v(t)=e^{Bt}\vec{v}(0)$ 为方程的解 故 $b<0$

6.解：1) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}0.2-\lambda & 0.4 & 0.3\\ 0.4 & 0.2-\lambda & 0.3\\ 0.4 & 0.4 & 0.4-\lambda\end{vmatrix}=0$ 解得 $\lambda_1=0$ $\lambda_2=1$ $\lambda_3=-0.2$

2). 由于$\lambda_2=1$ 故u_k收敛于$c\cdot\vec{x_2}$ $\vec{x_2}$为$\lambda_2=1$对应的特征向量

$(A-I)\vec{x}=0$ $A-I=\begin{bmatrix}-0.8 & 0.4 & 0.3\\ 0.4 & -0.8 & 0.3\\ 0.4 & 0.4 & -0.6\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}-8 & 4 & 3\\ 0 & -6 & \frac{9}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\vec{x_2}=c\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}\\ 1\end{bmatrix}$

取$\vec{x_2}=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$ $\vec{u_k}=A^k\vec{u_0}=c_1\lambda_1^k\vec{x_1}+c_2\lambda_2^k\vec{x_2}+c_3\lambda_3^k\vec{x_3}$

$\vec{u_0}=c_1\vec{x_1}+c_2\vec{x_2}+c_3\vec{x_3}$

由于$\vec{x_1}$、$\vec{x_2}$、$\vec{x_3}$正交 c_2为$\vec{u_0}$在$\vec{x_2}$上的投影

即$c_2=\dfrac{\vec{u_0}^T\cdot\vec{x_2}}{\vec{x_2}^T\cdot\vec{x_2}}=\dfrac{15}{17}$

故当$k\to+\infty$时 $u_k\longrightarrow\dfrac{15}{17}\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$

7. 解: $\lambda_1=0$ $\lambda_2=c$, $\lambda_3=2$

1). 当A有n个不同的特征值且有n个线性无关的特征向量时, A可以对角化.

由于$\vec{x_1}$、$\vec{x_2}$、$\vec{x_3}$已线性无关. 故只需$\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$即可. 故$c\neq0$且$c\neq2$.

2) A的各列元素和为1且非负时 A为Markov矩阵.

由于A的各列元素和为1 故$A-I$的各行之和为0 即A的各行线性相关

$\det(A-I)=0$ 即 A必然有特征值$\lambda=1$

故$c=1$

3). 投影矩阵 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$

按投影矩阵的物理意义. 投影矩阵必然有特征值0和1

故$c=0$或$c=1$.