一、（5 分）1.某大厦有四部电梯，已知某时刻 T, 每部电梯正在运行的概率为 0.7,求 T 时刻至少两部电梯运行的概率。

解： 设 X 为正在运行的电梯的个数，则 $X \sim$ b(4,0.7) 。------2 分

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.3^4 - 4 \times 0.3^3 \times 0.7 = 0.9163$ ------3 分

2.（5 分）随机变量 X 的分布列为

X	0	$\pi/2$	π
P	0.2	0.5	0.3

求 Var(sin X).

解：Y=sinX, P(Y=0)=0.5, P(Y=1)=0.5,---------2 分

E[Y]=0.5--------1 分； E[Y^2]=0.5-----------1 分， Var(Y)=0.25---------1 分。

3.（5 分）已知 $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.4$, $P(\overline{AB}) = 0.8$，求 $P(A \mid A \cup \overline{B})$.

解： $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - 1 + P(\overline{AB}) = 0.5$ -----------2 分

$P(A \mid A \cup \overline{B}) = \dfrac{P(A \cap (A \cup \overline{B}))}{P(A \cup \overline{B})} = \dfrac{P(A)}{P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B})} = \dfrac{0.7}{0.7 + 0.6 - 0.5} = \dfrac{7}{8}$ --------------3 分

4.（6 分）成箱出售的玻璃杯，每箱 20 只。设每箱含 0，1，2 只残次品的概率分别为 0.8，0.1，0.1。顾客购买时，售货员随意取一箱，而顾客随意取四只检查，若无残次品则买下，否则退回。现售货员随意取一箱玻璃杯，求顾客买下的概率（保留小数点后三位小数）。

解：设事件 A 为售货员随意取一箱玻璃杯，顾客买下；

事件 C_i 为箱中有 i 个残次品，i=0，1，2. -----------1 分， 由全概率公式，

$$P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(A \mid C_i) P(C_i) (2分) = 1 \times 0.8 + \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} \times 0.1 + \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} \times 0.1 (2分) \approx 0.943 (1分)$$

5.（7 分）随机变量 X,Y,满足 E[X]=1, E[Y]=2,Var[X]=1,Var[Y]=4, $\rho_{XY} = 0.6$，

设 $Z = (2X - Y + 1)^2$，求 E[Z].

解： $E[X^2] = Var(X) + (E[X])^2 = 2$（1 分）， $E[Y^2] = Var(Y) + (E[Y])^2 = 8$ （1 分）

$E[XY] = \mathrm{Cov}(X, Y) + E[X]E[Y] = \rho_{XY} \sqrt{Var(X)} \sqrt{Var(Y)} + 2 = 3.2$ --------2 分

$EZ = E(2X - Y + 1)^2 = 4E[X^2] + E[Y^2] + 1 + 4E[X] - 4E[XY] - 2E[Y] --- 1分$

$= 8 + 8 + 1 + 4 - 4 \times 3.2 - 4 = 4.2 -------- 2分$

6.（8 分）设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$,且 $x_1, \ldots, x_{10}$ 为样本观测值，样本方差 $s^2 = 2$ 。

分别求σ^2和$Var(\frac{X^2}{\sigma^3})$的置信水平为 0.95 的置信区间。

解：σ^2的置信水平为 0.95 的置信区间为

$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.025}(9)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{0.975}(9)}\right)=\left(\frac{18}{\chi^2_{0.025}(9)},\frac{18}{\chi^2_{0.975}(9)}\right)=(0.9462,6.6667)$---------------------4 分

由于$\frac{X^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，$Var(\frac{X^2}{\sigma^3})=\frac{1}{\sigma^2}Var(\frac{X^2}{\sigma^2})=\frac{2}{\sigma^2}$是$\sigma^2$的减函数，因此$Var(\frac{X^2}{\sigma^3})$的置信水平为

0.95 的置信区间为$\left(\frac{2}{6.6667},\frac{2}{0.9462}\right)=(0.3000,2.1137)$---------------------4 分

二、（10 分）二维随机变量（X,Y）的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(x+y),0\le x\le 2,0\le y\le 2;\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度.

解：　$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$----------4 分

当$z<0$或$z>4$，　$f_Z(z)=0$---------2 分

当$0\le z<2$，　$f_Z(z)=\int_0^z\frac{1}{8}zdx=\frac{1}{8}z^2$ ---------2 分

当$2\le z<4$，　$f_Z(z)=\int_{z-2}^2\frac{1}{8}zdx=\frac{1}{8}z(4-z)$---------2 分

三、（10 分）将 2 个球随机地放入 3 个盒子，设 X 为第一个盒子内放入的球数，Y 为有球的盒子的个数，（1）求（X,Y）的联合分布列；　（2）求 E[X], Var(Y).

解：（1）随机变量 X 可能的取值为 0，1，2；随机变量 Y 可能的取值为 1，2 .

$P(X=0,Y=1)=\frac{2}{9},P(X=0,Y=2)=\frac{2}{9},P(X=1,Y=1)=0,$--------6 分

$P(X=1,Y=2)=\frac{4}{9},P(X=2,Y=1)=\frac{1}{9},P(X=2,Y=2)=0$

（2）X 的分布列　$P(X=0)=\frac{4}{9},P(X=1)=\frac{4}{9},P(X=2)=\frac{1}{9},$----1 分，E[X]=2/3---1 分

Y 的分布列为　$P(Y=1)=\frac{1}{3},P(Y=2)=\frac{2}{3},$　-----------1 分

$Var(Y)=E[Y^2]-(E[Y])^2=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-(\frac{1}{3}+\frac{4}{3})^2=\frac{2}{9}$.--------------1 分

四、（10 分）二维随机变量（X,Y）的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, 0\le x\le y; \\ 0, 其他 \end{cases}$.

（1）求 $P(X+Y\le 1)$；　　　（2）X,Y 是否独立？

解：（1）

$$P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy(2分)=\int_0^{\frac{1}{2}}(e^{-x}-e^{x-1})\ dx=(1-e^{-\frac{1}{2}})^2\text{------}2分$$

（2）$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^{\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, x>0; \\ 0, 其他\end{cases}$ ---2 分，　$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y}, y>0; \\ 0, 其他\end{cases}$ ---2 分

$f_X(x)f_Y(y)\ne f(x,y)$ ，因此 X,Y 不独立。

五、（10 分）某种零件的尺寸标准为 $\sigma=5.2$，对一批这类零件检查 9 件得到平均尺寸数据（毫米）：$\bar{x}=26.56$。 设零件尺寸服从正态分布，问这批零件的平均尺寸能否认为是 26 毫米？ （$\alpha=0.05$）

解： 原假设 $H_0:\mu_0=26$ ----2 分， H_0成立时，样本均值 $\overline{X}\sim N(26,\frac{5.2^2}{9})$ ---2 分

H_0的拒绝域 $W=\{|\frac{\overline{x}-26}{5.2}\times 3|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}$ -----------3 分

已知 $u_{0.025}=1.96$, 而 $|\frac{0.56}{5.2}\times 3|<1.96$，因此接受原假设。-----------3 分

六、（10 分）一条生产线生产的产品合格率为 0.8，要使一批产品的合格率在 76%与 84%之间的概率不小于 90%，问至少要生产多少件产品？

解： 设随机变量 $X_i=\begin{cases}1, 第i个产品合格; \\ 0, 其他\end{cases}$ 则 X_i 服从伯努利分布 b(1，0.8).--- -1 分

$E[X_i]=0.8, Var(X_i)=0.16$----2 分。求 n 使得 $P(0.76\le\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\le 0.84)\ge 0.9$

而由中心极限定理，样本为独立同分布随机变量序列，

$$P(0.76\le\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\le 0.84)=P(\frac{0.76n-E[\sum_{i=1}^{n}X_i]}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)}}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-E[\sum_{i=1}^{n}X_i]}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)}}\le\frac{0.84n-E[\sum_{i=1}^{n}X_i]}{\sqrt{Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)}})\text{------}3分$$

$$=P(\frac{0.76n-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\le\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-0.8n}{0.4\sqrt{n}}\le\frac{0.84n-0.8n}{0.4\sqrt{n}})$$

$$\approx \Phi(0.1\sqrt{n})-\Phi(-0.1\sqrt{n})=2\Phi(0.1\sqrt{n})-1$$------------------2 分

$\Phi(0.1\sqrt{n})\ge 0.95,$ 则 $0.1\sqrt{n}\ge 1.645$， $n\ge 270.6$，故取 n=271.-------------2 分

七、（14 分)设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{k\theta},\theta<x<(k+1)\theta;\\ 0,其他\end{cases}$ 其中 k 为已知正数，$\theta>0$ 为一个待估参数。$X_1,\ldots X_n$ 为来自总体的样本。

（1）求 θ 的最大似然估计和矩估计；（2）θ 的最大似然估计是否无偏？

解：（1）极大似然函数 $L(\theta)=(\dfrac{1}{k\theta})^n$，----1 分，取对数 $\ln L(\theta)=-n(\ln k+\ln\theta)$，

$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta}<0$，$L(\theta)$ 为单调减函数---1 分，由于次序统计量 $\theta\le X_{(1)}\le\ldots\le X_{(n)}\le(k+1)\theta$，$\dfrac{X_{(n)}}{k+1}\le\theta\le X_{(1)}$，因此 θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{X_{(n)}}{k+1}$。--2 分

$E[X]=\int_\theta^{(k+1)\theta}\dfrac{x}{k\theta}dx=\dfrac{\theta(k+2)}{2}$-----1 分，因此 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}_1=\dfrac{2\overline{X}}{k+2}$------------2 分

（2）最大次序统计量的分布函数 $F_{\mathrm{n}}(x)=P(X_{(\mathrm{n})}\le x)=F(x)^n$----------1 分

最大次序统计量的密度函数

$$f_n(x)=nF(x)^{n-1}f(x)=\begin{cases}n(\dfrac{x-\theta}{k\theta})^{n-1}\dfrac{1}{k\theta}=n\dfrac{(x-\theta)^{n-1}}{(k\theta)^n},\theta\le x\le(k+1)\theta;\\ 0,其他\end{cases}$$ --------2 分

$$E[\hat{\theta}]=\int_\theta^{(k+1)\theta}\frac{nx(x-\theta)^{n-1}}{(k+1)(k\theta)^n}dx=\frac{n}{(k+1)(k\theta)^n}\int_\theta^{(k+1)\theta}x(x-\theta)^{n-1}dx=\theta-\frac{k\theta}{(k+1)(n+1)}$$ ------2 分

$E[\hat{\theta}]\ne\theta$,故不是 θ 的无偏估计。-------------2 分