第十讲 奇异值分解

贺丽君
信息与通信工程学院
Email: lijunhe@mail.xjtu.edu.cn
2023-04

内容提要

- 奇异值分解的引入
- 奇异值分解及其几何意义
- 奇异值分解与图像数据压缩
- 奇异值分解在多天线系统中的应用

内容提要

- 奇异值分解的引入
- 奇异值分解及其几何意义
- 奇异值分解与图像数据压缩
- 奇异值分解在多天线系统中的应用

奇异值分解的引入

对角化是实现解耦的关键

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

矩阵可对角化的条件：

- 矩阵A为方阵
- 矩阵A有n个线性无关的特征向量

对于任意的$m \times n$矩阵，如何将其“对角化”？

奇异值分解的引入

n维空间的标准正交基

假设A为$m\times n$矩阵，x为n维向量，则有：

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{A}\left(c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\ldots+c_n\mathbf{v}_n\right)$$

由于：

$$\mathbf{Av}_i=d_{1i}\mathbf{u}_1+d_{2i}\mathbf{u}_2+\ldots+d_{mi}\mathbf{u}_m$$

m维空间的标准正交基

所以有：

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn}\end{bmatrix}$$

奇异值分解的引入

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn}\end{bmatrix}$$

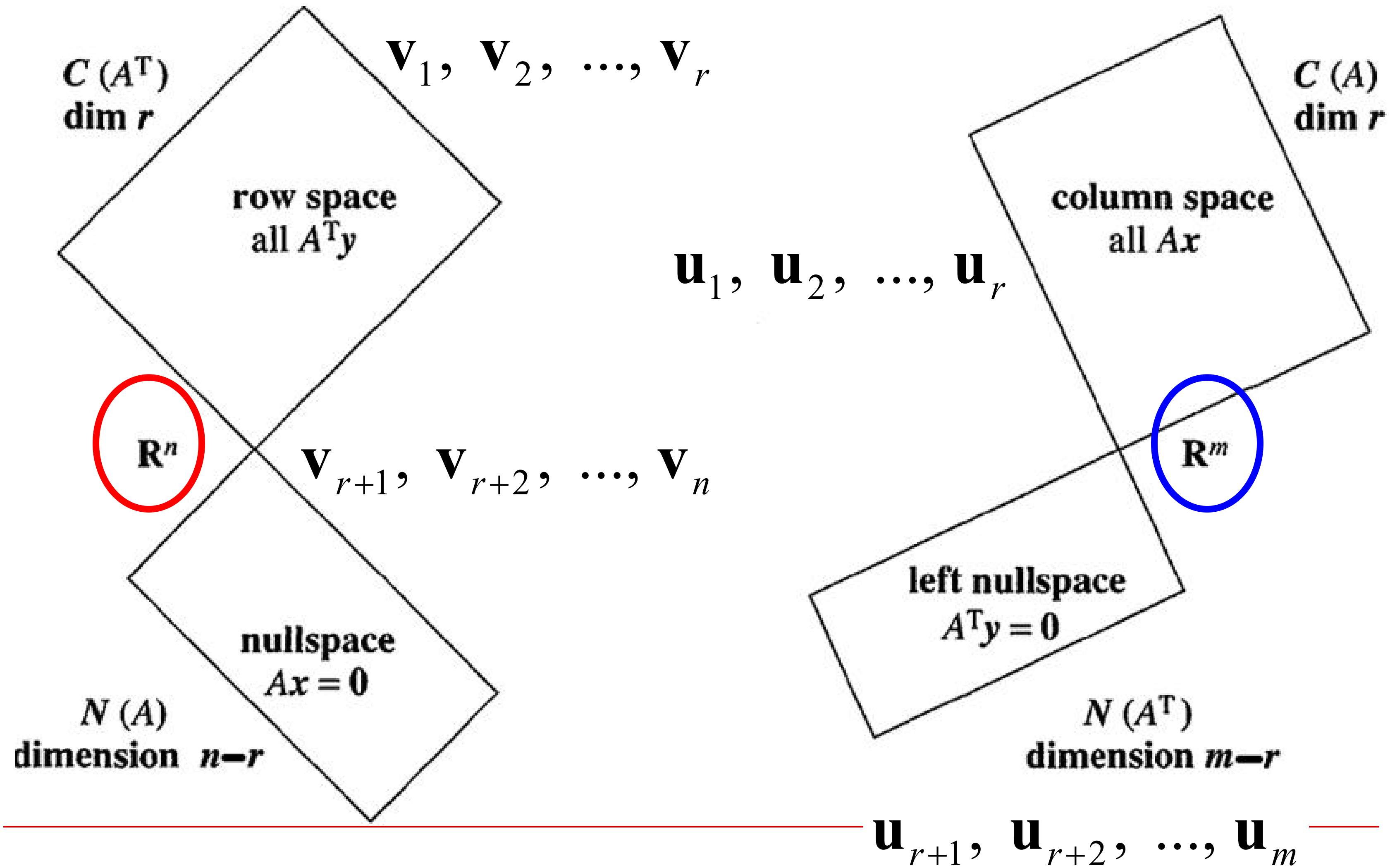
正交矩阵　　　　正交矩阵

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix}^T \mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn}\end{bmatrix}$$

“对角阵”？

奇异值分解的引入



$C(A^T)$
dim r
row space
all A^Ty
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$
$\mathbf{R}^n$
$\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$
nullspace
$Ax = 0$
$N(A)$
dimension $n-r$
$C(A)$
dim r
column space
all Ax
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$
$\mathbf{R}^m$
left nullspace
$A^Ty = 0$
$N(A^T)$
dimension $m-r$
$\mathbf{u}_{r+1}, \mathbf{u}_{r+2}, \ldots, \mathbf{u}_m$

奇异值分解的引入

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn}\end{bmatrix}$$

根据零空间的定义：

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le n$$

n-r个全零列

$$\mathbf{AV}=\mathbf{U\Sigma}$$

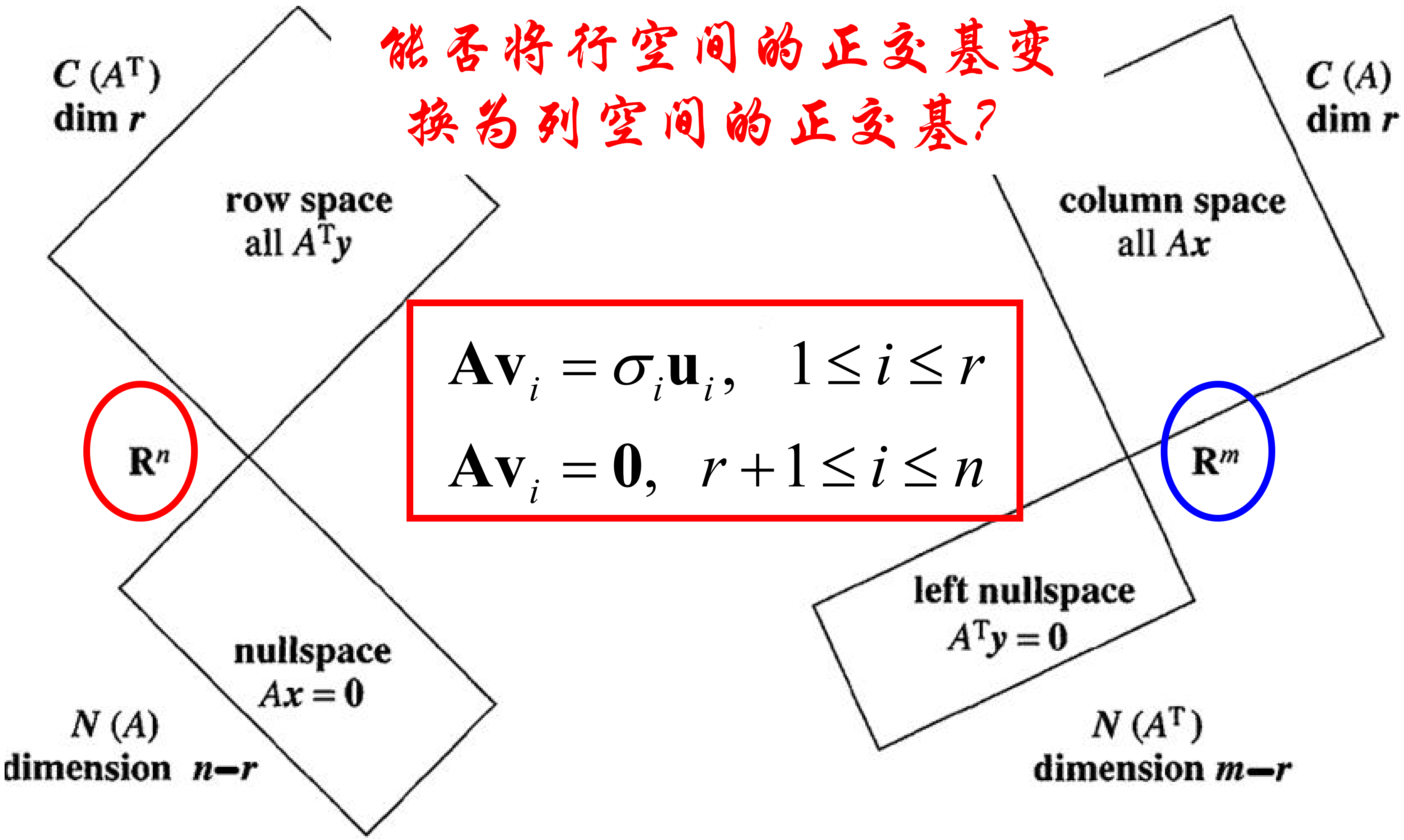
对角阵

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r\end{matrix}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

m-r个全零行

奇异值分解的引入

能否将行空间的正交基变换为列空间的正交基?



$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$$

内容提要

- 奇异值分解的引入
- 奇异值分解及其几何意义
- 奇异值分解与图像数据压缩
- 奇异值分解在多天线系统中的应用

奇异值分解

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{Av}_i &= \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r \\ \mathbf{Av}_i &= \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n \end{aligned}}$$

假设$\mathbf{w}_1 \sim \mathbf{w}_n$是$n$维空间的任意一组标准正交基：

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} \xrightarrow{\mathbf{A}} \{\mathbf{A}\mathbf{w}_1, \mathbf{A}\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{w}_n\}$$

如果要使各$\mathbf{A}\mathbf{w}_i$两两正交，应有：

$$(\mathbf{A}\mathbf{w}_i)^T \mathbf{A}\mathbf{w}_j = 0, \quad i \neq j$$

实对称矩阵

即：

$$(\mathbf{w}_i)^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j = 0, \quad i \neq j$$

1.特征值全是实数　2.n个标准正交的特征向量

奇异值分解

由于$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$是实对称矩阵，因此，$\mathbf{w}_1 \sim \mathbf{w}_n$可以选取为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的标准正交特征向量，此时有：

$$(\mathbf{w}_i)^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{w}_j = (\mathbf{w}_i)^T \lambda_j \mathbf{w}_j = 0$$

而$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的特征值具有如下两条性质：

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$的特征值均为非负实数

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \lambda \mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2 = \lambda \|\mathbf{x}\|^2$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \lambda \mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{A}^T\mathbf{x})^T \mathbf{A}^T\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{A}^T\mathbf{x}\|^2 = \lambda \|\mathbf{x}\|^2$$

奇异值分解

由于$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$是实对称矩阵，因此，$\mathbf{w}_1 \sim \mathbf{w}_n$可以选取为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的标准正交特征向量，此时有：

$$(\mathbf{w}_i)^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j = (\mathbf{w}_i)^T \lambda_j \mathbf{w}_j = 0$$

而$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的特征值具有如下两条性质：

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$的特征值均为非负实数
- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$均有r个非零特征值，且非零特征值相同

$$rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \overset{\text{转置不改变矩阵的秩}}{\Rightarrow} rank(\mathbf{A}^T) = rank(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$$

$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$实对称矩阵有n个线性无关的特征向量，则对角化特征值个数相同

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{x}$$

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\mathbf{Ax}\neq\mathbf{0}}{\Rightarrow} \lambda\text{是}\mathbf{A}\mathbf{A}^T\text{的特征值}$$

奇异值分解

由于$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$是实对称矩阵，因此，$\mathbf{w}_1 \sim \mathbf{w}_n$可以选取为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的标准正交特征向量，此时有：

$$(\mathbf{w}_i)^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{w}_j = (\mathbf{w}_i)^T \lambda_j \mathbf{w}_j = 0$$

而$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的特征值具有如下两条性质：

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$的特征值均为非负实数
- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$和$\mathbf{A}\mathbf{A}^T$均有r个非零特征值，且非零特征值相同

所以有：

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i, \quad 1 \le i \le r \quad (\lambda_i > 0)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$$

$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$实对称矩阵有n个特征值，其中r个非零，n-r个零

奇异值分解

$$\boxed{(\mathbf{Aw}_i)^T \mathbf{Aw}_j = 0, \quad i \neq j}$$

*orthogonal basis for C(**A**)*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Aw}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i, \quad 1 \leq i \leq r$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Aw}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \leq i \leq n$$

零向量

注意到：

$$\left\|\mathbf{Aw}_i\right\|^2 = \left(\mathbf{Aw}_i\right)^T \mathbf{Aw}_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{Aw}_i = \mathbf{w}_i^T \left(\lambda_i \mathbf{w}_i\right) = \lambda_i$$

将列空间的正交基归一化可得标准正交基：

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{Aw}_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad 1 \leq i \leq r$$

奇异值分解

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{A}\mathbf{w}_i}{\sqrt{\lambda_i}},\quad 1 \le i \le r \iff \mathbf{A}\mathbf{w}_i = \sqrt{\lambda_i}\,\mathbf{u}_i,\quad 1 \le i \le r$$

又因为：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i,\quad 1 \le i \le r$$

所以：

$$\mathbf{A}^T\sqrt{\lambda_i}\,\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i,\quad 1 \le i \le r$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{u}_i = \sqrt{\lambda_i}\,\mathbf{w}_i,\quad 1 \le i \le r$$

行向量的线性组合

$\mathbf{w}_i \in C\left(\mathbf{A}^T\right)$

$\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ 是 $C(\mathbf{A}^T)$ 的标准正交基

奇异值分解

另一方面：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le n$$

$$\mathbf{w}_i^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\left\|\mathbf{A}\mathbf{w}_i\right\|^2=0,\quad r+1\le i\le n$$

W=V

$$\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le n$$

$\mathbf{w}_{r+1},\ldots,\mathbf{w}_n$ 是$N(\mathbf{A})$的标准正交基

$$\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\sqrt{\lambda_i}\,\mathbf{u}_i,\quad 1\le i\le r$$

$$\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le n$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\sigma_i\mathbf{u}_i,\quad 1\le i\le r\\&\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le n\end{aligned}}$$

奇异值分解 (SVD)

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$$

r个奇异值

右奇异向量　左奇异向量

$$\mathbf{A}\left[\underline{\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_r} \cdots \mathbf{v}_n\right] = \left[\underline{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r} \cdots \mathbf{u}_m\right] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{U}_{m\times m} \mathbf{\Sigma}_{m\times n} \mathbf{V}_{n\times n}^{T}}$$

奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD)

奇异值分解与四个基本子空间

$$\mathbf{A}\left[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_r \cdots \mathbf{v}_n\right] = \left[\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r \cdots \mathbf{u}_m\right] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$$

- U的前r个列向量构成$C(\mathbf{A})$的标准正交基
- V的后n-r个列向量构成$N(\mathbf{A})$的标准正交基

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T \Longrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^T \Longrightarrow \begin{matrix} \mathbf{A}^T\mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i, \quad 1 \le i \le r \\ \mathbf{A}^T\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le m \end{matrix}$$

- V的前r个列向量构成$C(\mathbf{A}^T)$的标准正交基
- U的后m-r个列向量构成$N(\mathbf{A}^T)$的标准正交基

奇异值分解的计算

$$\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{U}_{m\times m}\mathbf{\Sigma}_{m\times n}\mathbf{V}_{n\times n}^{T}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)=(\lambda-3)(\lambda-1)$$

$$\sigma_1=\sqrt{3},\quad \sigma_2=1$$

$\mathbf{v}_i$为$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的标准正交特征向量

$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的属于特征值3和1的正交单位特征向量分别为：

$$\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}-3\mathbf{I}\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{v}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{v}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

奇异值分解的计算(续)

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

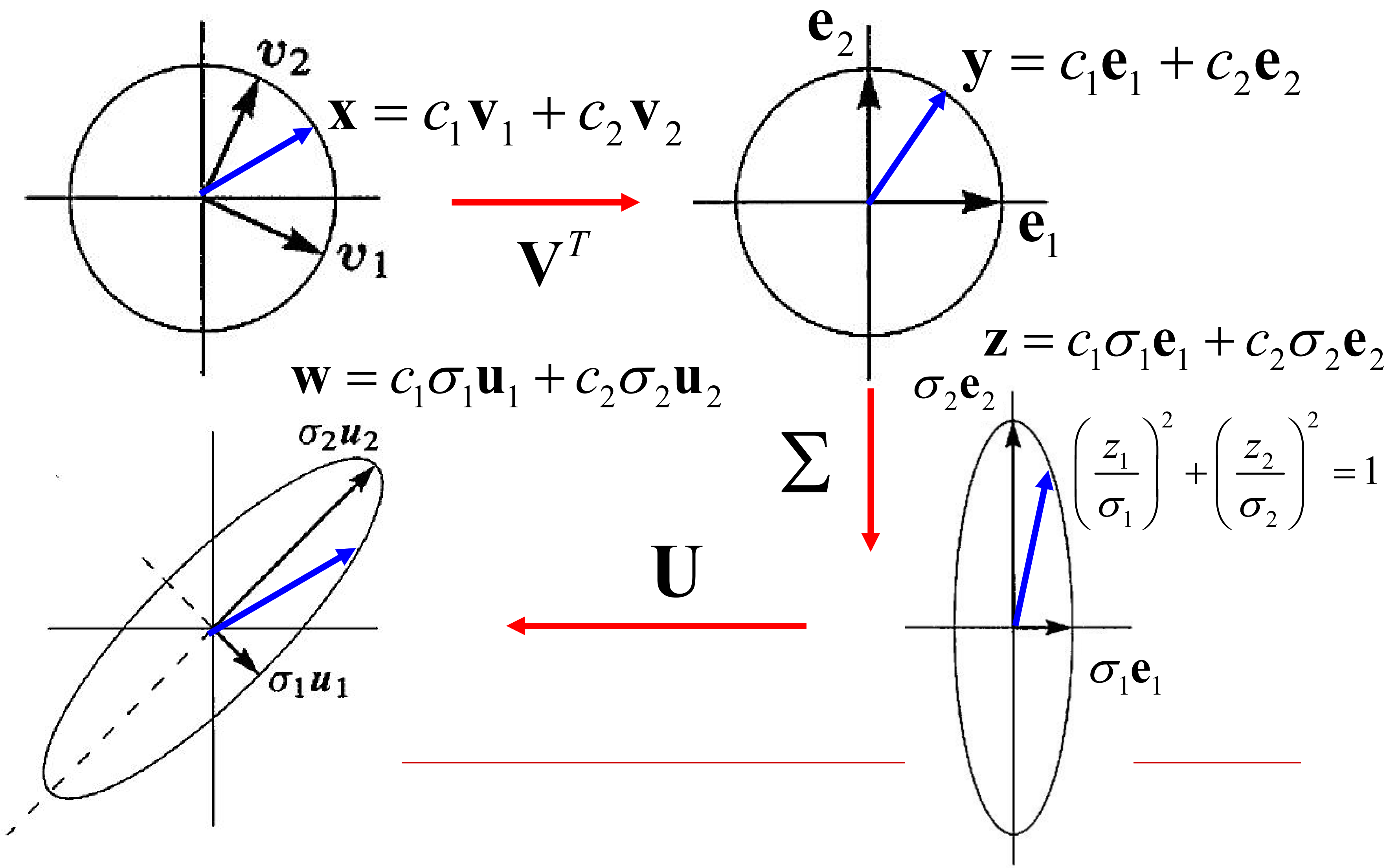
根据关系$\mathbf{Av}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$，$1 \le i \le r$，可得：

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}\mathbf{Av}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}\mathbf{Av}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

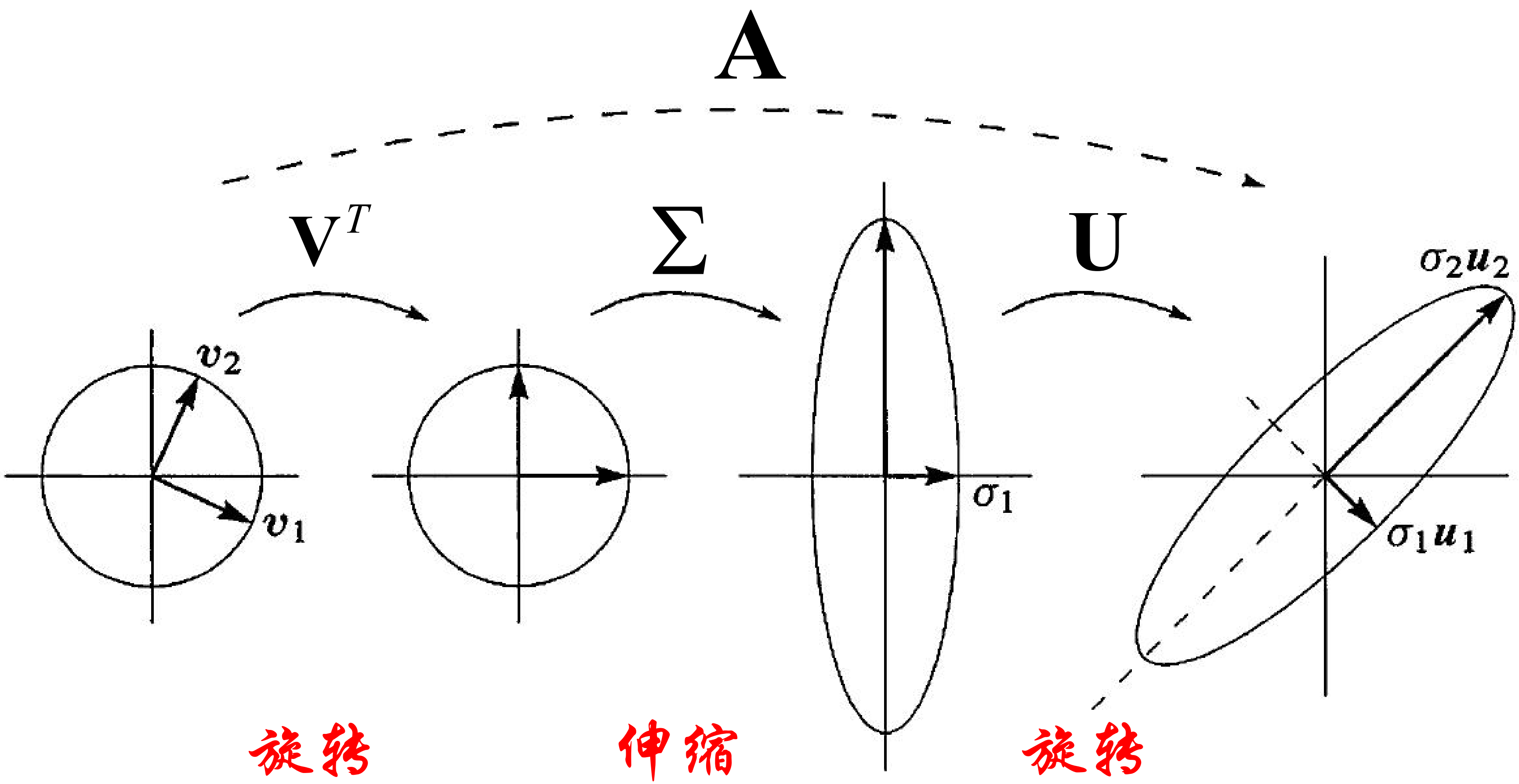
根据正交性，可得：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}^T{}_1\\ \mathbf{u}^T{}_2\end{bmatrix}\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = [\mathbf{u}_1 \ \ \mathbf{u}_2 \ \ \mathbf{u}_3]\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}[\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2]^T$$

奇异值分解的几何意义


v_2
v_1
$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$
$\mathbf{V}^T$
$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{y} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$
$\mathbf{z} = c_1\sigma_1\mathbf{e}_1 + c_2\sigma_2\mathbf{e}_2$
Σ
$\sigma_2\mathbf{e}_2$
$\sigma_1\mathbf{e}_1$
$\left(\frac{z_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{\sigma_2}\right)^2 = 1$
$\mathbf{U}$
$\mathbf{w} = c_1\sigma_1\mathbf{u}_1 + c_2\sigma_2\mathbf{u}_2$
$\sigma_2 u_2$
$\sigma_1 u_1$

奇异值分解的几何意义



(有些分量可能被置零)

奇异值分解的总结

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x} = \mathbf{U}_{m\times m}\boldsymbol{\Sigma}_{m\times n}\mathbf{V}_{n\times n}{}^{T}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{V}^T\mathbf{x}$$

1.信号分解（基底变换）

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \sigma_1 c_1 \\ \sigma_2 c_2 \\ \vdots \\ \sigma_r c_r \end{matrix}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.响应求解（能力受限）

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots \mathbf{u}_m]\begin{bmatrix} \sigma_1 c_1 \\ \sigma_2 c_2 \\ \vdots \\ \sigma_r c_r \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_1 c_1\mathbf{u}_1 + \sigma_2 c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \sigma_r c_r\mathbf{u}_r$$

3.基底变换

内容提要

- 奇异值分解的引入
- 奇异值分解及其几何意义
- 奇异值分解与图像数据压缩
- 奇异值分解在多天线系统中的应用

奇异值分解与图像数据压缩

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{U}_{m\times m}\boldsymbol{\Sigma}_{m\times n}\mathbf{V}_{n\times n}^{T}$$

$$\mathbf{A} = \underbrace{[\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r \cdots \mathbf{u}_m]}_{\boxed{r\times m}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \sigma_r & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\boxed{r}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_r^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix}}_{\boxed{r\times n}}$$

$$= \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^T$$

r个rank-1矩阵之和

存储量下降：

$$m\times n \Rightarrow r\times(m+n+1)$$

压缩比：

$$\frac{m\times n}{r\times(m+n+1)}$$

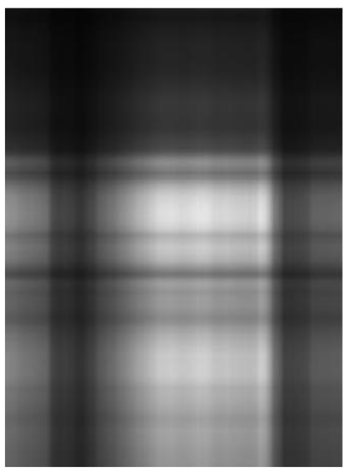
奇异值分解与图像数据压缩

仅保留k个最大奇异值所对应的项

$$\mathbf{A} = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T$$

$$\mathbf{A}_k = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \cdots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^T$$

$\mathbf{A}$



$\mathbf{A}_1$

$\mathbf{A}_5$

$\mathbf{A}_{20}$

$\mathbf{A}_{50}$

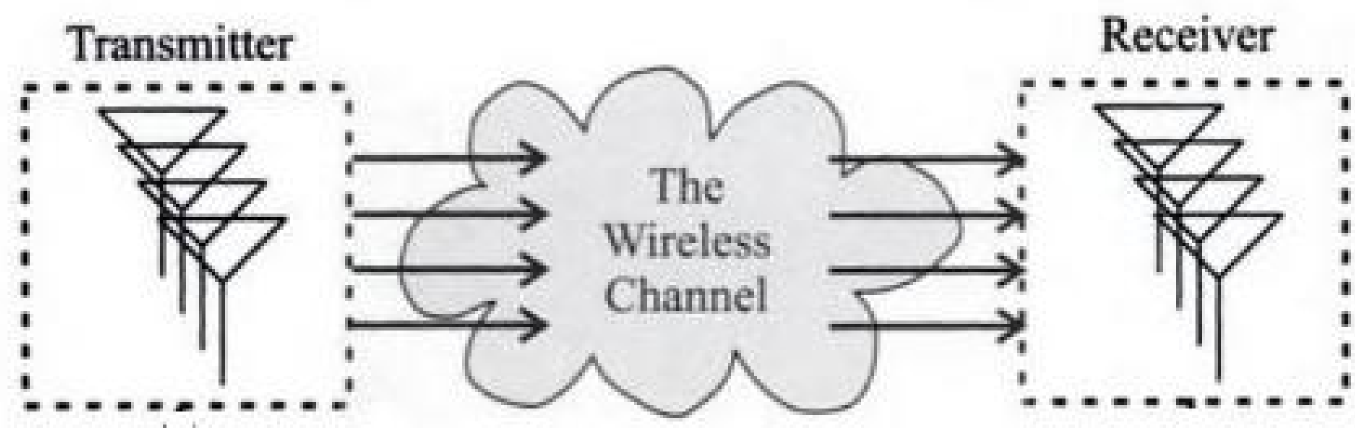
$450 \times 333 = 149850 \Rightarrow 50 \times (450 + 333 + 1) = 39200$

内容提要

- 奇异值分解的引入
- 奇异值分解及其几何意义
- 奇异值分解与图像数据压缩
- 奇异值分解在多天线系统中的应用

SVD与多天线通信系统

m 个发送天线



n 个接收天线

$\mathbf{x} \rightarrow$ 发射端处理 $\mathbf{V}$ $\rightarrow$ MIMO信道 $\mathbf{H}$ $\rightarrow$ 接收端处理 $\mathbf{U}^T$ $\rightarrow \mathbf{y}$

$\mathbf{y}=\mathbf{U}^T\mathbf{H}\mathbf{V}\mathbf{x}$ 解耦 ？ $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{H}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$

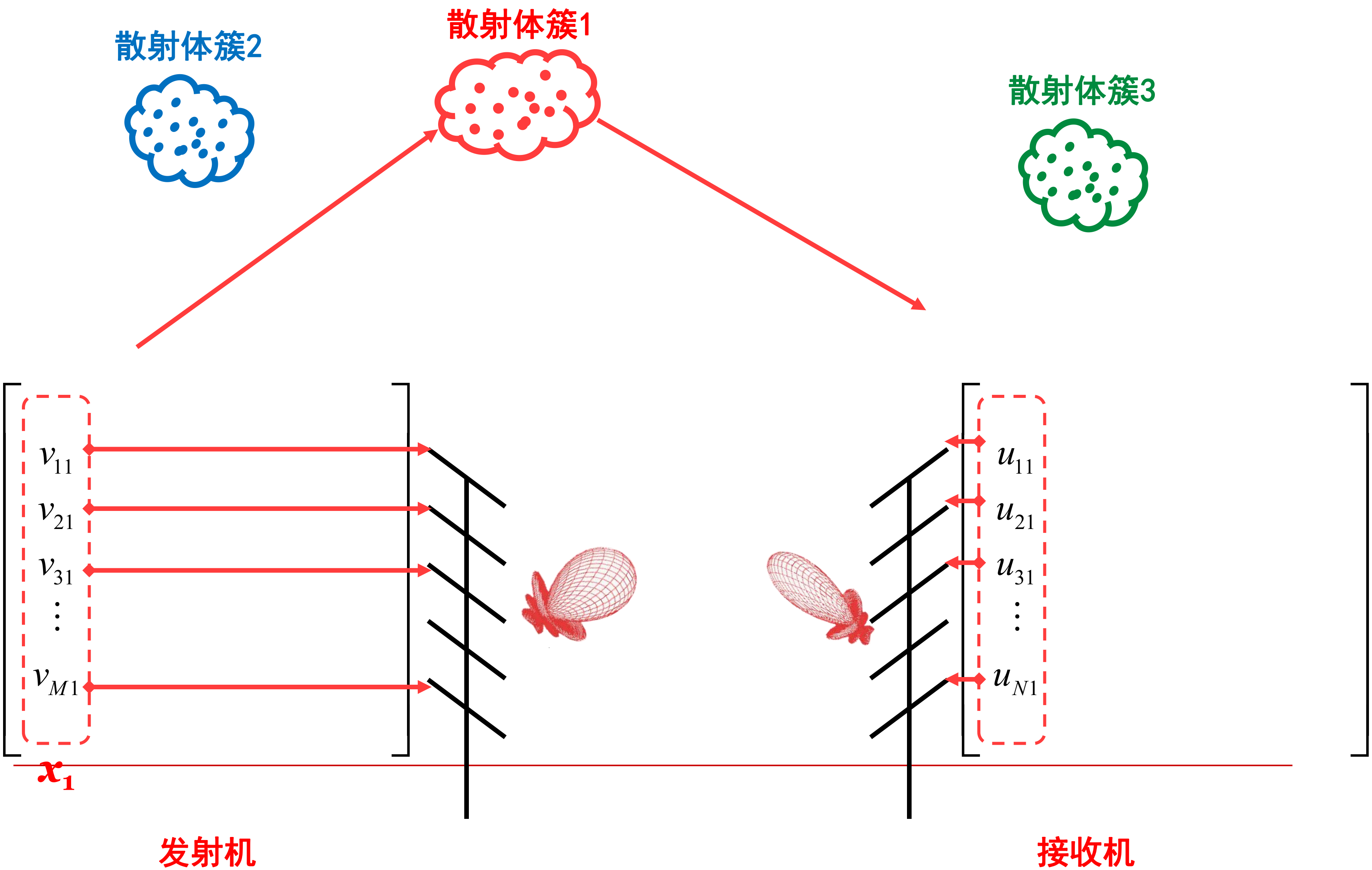
Σ

SVD

SVD与多天线通信系统

$$\mathbf{H}_{n\times m} = \mathbf{U}_{n\times n}\mathbf{\Sigma}_{n\times m}\mathbf{V}_{m\times m}^{T}$$

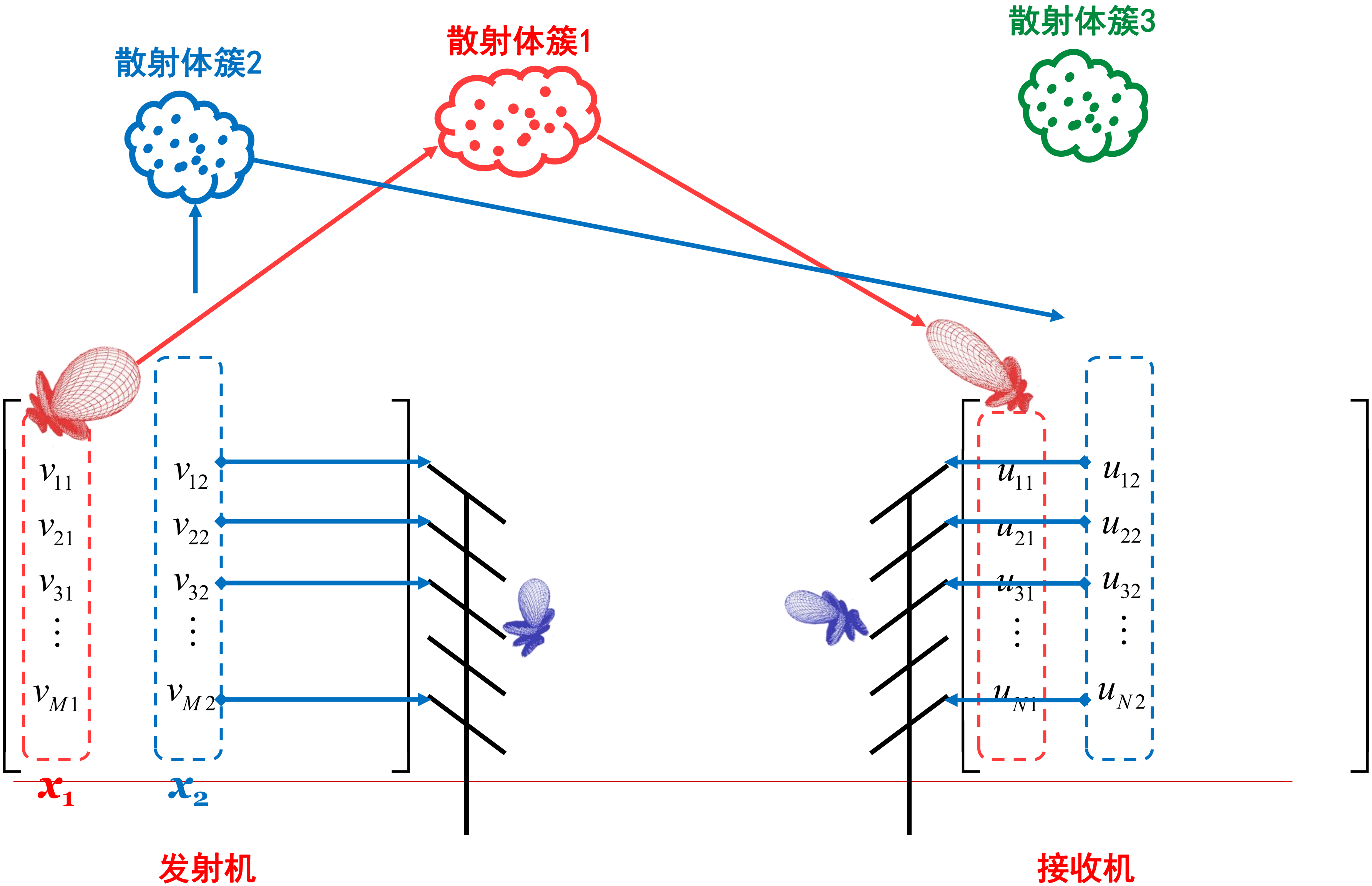
$$\mathbf{y}_{n\times 1} = \mathbf{U}^{T}_{n\times n}\mathbf{H}_{n\times m}\mathbf{V}_{m\times m}\mathbf{x}_{m\times 1}$$



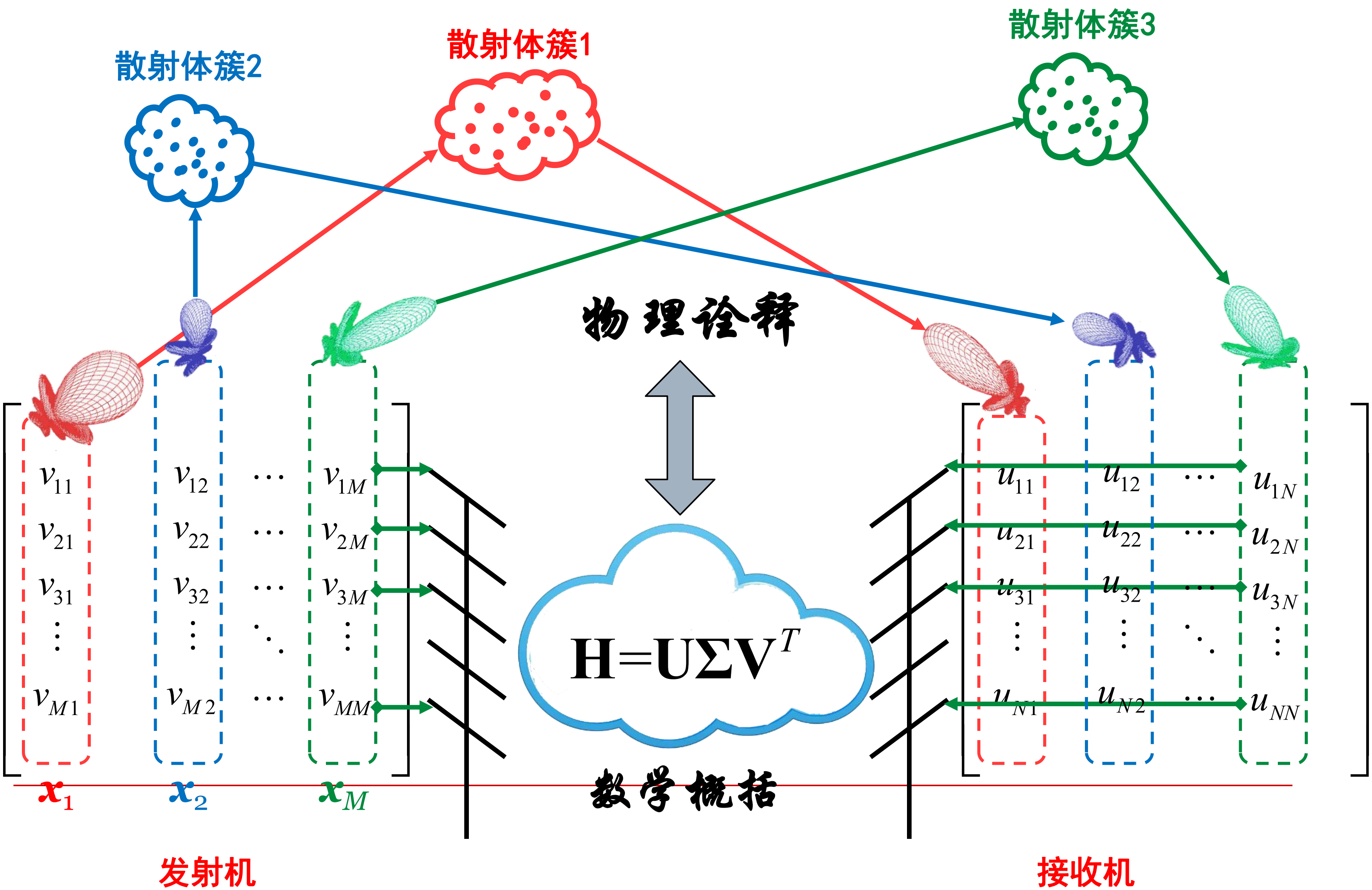
SVD与多天线通信系统

$$\mathbf{H}_{n\times m} = \mathbf{U}_{n\times n}\boldsymbol{\Sigma}_{n\times m}\mathbf{V}_{m\times m}^{T}$$

$$\mathbf{y}_{n\times 1} = \mathbf{U}^{T}_{n\times n}\mathbf{H}_{n\times m}\mathbf{V}_{m\times m}\mathbf{x}_{m\times 1}$$



SVD与多天线通信系统



谢谢大家！