第五章 线性系统的频域分析法

本章主要内容

- 频率特性的基本概念
- 频率特性的对数坐标图（伯德图）
- 频率特性的极坐标图
- 奈奎斯特稳定判据
- 稳定裕度
- 闭环系统的性能分析

第一节 频率特性的基本概念

考察一个系统性能的好坏，通常用阶跃信号输入下系统的阶跃响应来分析系统的动态性能和稳态性能。

有时也用正弦信号输入时系统的响应来分析，但这种响应并不是单看某一个频率的正弦信号输入时的瞬态响应，而是考察频率由低到高无数个正弦信号输入下所对应的每个输出的稳态响应。因此，这种响应也叫频率响应。

频率响应尽管不如阶跃响应那样直观，但同样能间接地表示系统的特性。频率响应法是分析和设计系统的一个既方便又有效的工具。

一、频率特性的概念：

系统的频率特性指系统在正弦信号作用下系统的稳态响应的振幅、相位与所输入正弦信号之间的依赖关系。

线性定常系统的传递函数为： $$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

式中， $-p_i, i=1,2,\ldots,n$ 为极点。

若： $$r(t)=R_m\sin\omega t,\text{则}R(s)=\frac{R_m\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{R_m\omega}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}$$

则： $$Y(s)=\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}\cdot\frac{R_m\omega}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{s+p_i}+\frac{k_{c1}}{s+\mathrm{j}\omega}+\frac{k_{c2}}{s-\mathrm{j}\omega}$$

输出的时域表达式为:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}k_i\mathrm{e}^{-p_it}+k_{c1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}+k_{c2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

若系统稳定，则极点-p_i都在s左半平面。当$t\to\infty$，即稳态时:

$$\mathrm{e}^{-p_1t}\to 0,\ \ \mathrm{e}^{-p_2t}\to 0,\cdots,\ \ \mathrm{e}^{-p_nt}\to 0$$

$$y_s(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=k_{c1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}+k_{c2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

式中，k_{c1},k_{c2} 分别为:

$$k_{c1}=Y(s)(s+\mathrm{j}\omega)\big|_{s=-\mathrm{j}\omega}=G(s)\frac{R_m\omega(s+\mathrm{j}\omega)}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}\bigg|_{s=-\mathrm{j}\omega}=-\frac{R_mG(-\mathrm{j}\omega)}{2\mathrm{j}}$$

$$k_{c2}=Y(s)(s-\mathrm{j}\omega)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=G(s)\frac{R_m\omega(s-\mathrm{j}\omega)}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}\bigg|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{R_mG(\mathrm{j}\omega)}{2\mathrm{j}}$$

其中：$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}=|G(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle G(\mathrm{j}\omega)}=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$

$$G(-\mathrm{j}\omega)=G(s)|_{s=-\mathrm{j}\omega}=|G(-\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\angle G(\mathrm{j}\omega)}=A(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$$\therefore k_{c1}=-\frac{R_m}{2\mathrm{j}}A(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\omega)},\quad k_{c2}=\frac{R_m}{2\mathrm{j}}A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$$\therefore y_s(t)=k_{c1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}+k_{c2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=A(\omega)R_m\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi(\omega))}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi(\omega))}}{2\mathrm{j}}$$

$$=R_mA(\omega)\sin(\omega t+\varphi(\omega))=Y_m\sin(\omega t+\varphi(\omega))$$

式中：R_m、Y_m分别为输入、输出信号的幅值。

$$Y_m=R_mA(\omega)=R_m|G(\mathrm{j}\omega)|$$

$$\varphi(\omega)=\angle G(\mathrm{j}\omega)$$

[表明]:对于稳定的线性定常系统，输入一个正弦信号，其输出的稳态响应是一个与输入同频率的正弦信号，稳态响应与输入不同之处仅在于幅值和相位。其幅值放大了 $A(\omega)=|G(\mathrm{j}\omega)|$ 倍，相位移动了 $\varphi(\omega)=\angle G(\mathrm{j}\omega)$ 。$A(\omega)$和$\varphi(\omega)$都是频率ω的函数。

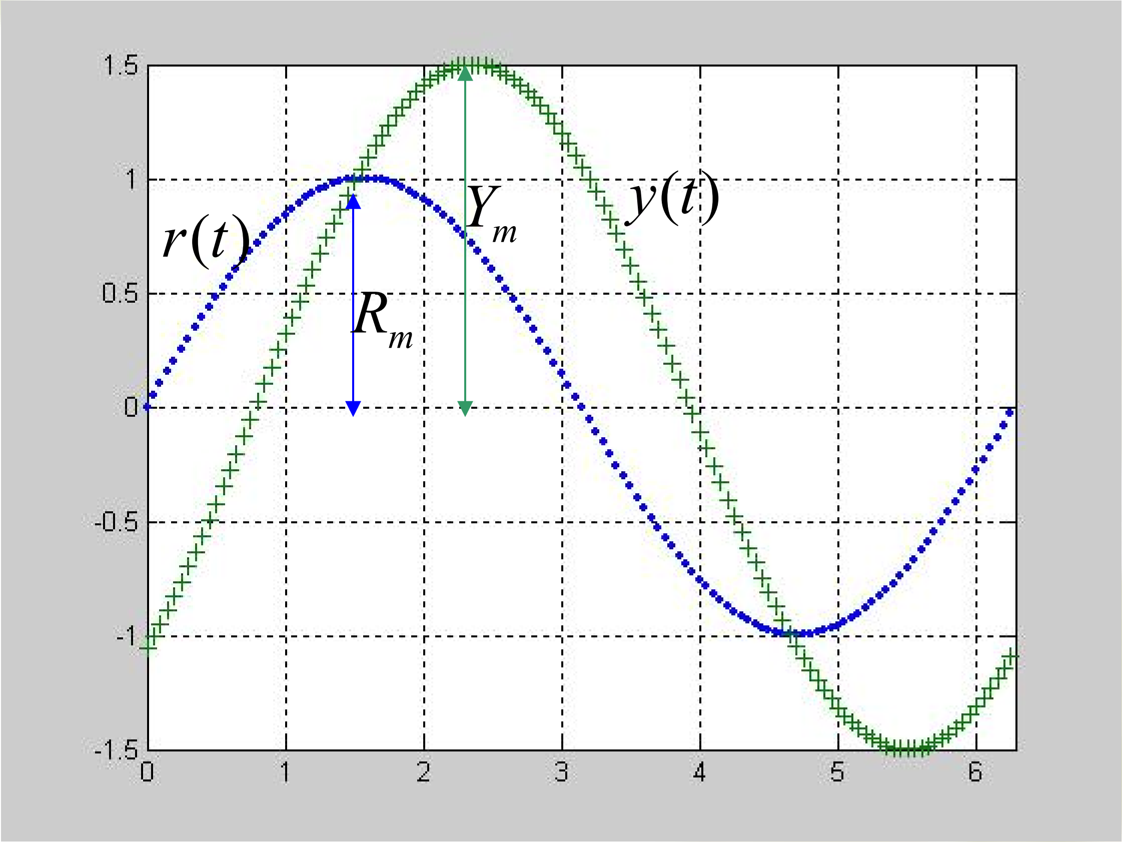
$$r(t)=R_m\sin\omega t$$

$$y_s(t)=R_m A(\omega)\sin(\omega t+\varphi(\omega))=Y_m\sin(\omega t+\varphi(\omega))$$

$$Y_m=R_m A(\omega)=R_m|G(\mathrm{j}\omega)|$$

$$\varphi(\omega)=\angle G(\mathrm{j}\omega)$$

$$r(t) = R_m \sin(\omega t + \varphi_r)$$
$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi_y)$$



[定义]稳态响应的幅值与输入信号的幅值之比 $\dfrac{Y_m}{R_m}=A(\omega)=|G(\mathrm{j}\omega)|$ 为系统的幅频特性，它描述系统对不同频率输入信号在稳态时的放大特性；

[定义]稳态响应与正弦输入信号的相位差 $\varphi(\omega)=\angle G(\mathrm{j}\omega)$ 为系统的相频特性，它描述系统的稳态响应对不同频率输入信号的相移特性；

幅频特性和相频特性可在复平面上构成一个完整的向量$G(\mathrm{j}\omega)$，$G(\mathrm{j}\omega)=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$，它也是$\omega$的函数。$G(\mathrm{j}\omega)$称为频率特性。

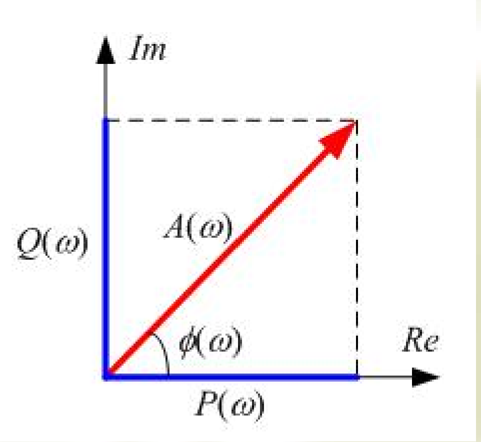
还可将$G(\mathrm{j}\omega)$写为复数的形式：$G(\mathrm{j}\omega)=P(\omega)+\mathrm{j}Q(\omega)$

$P(\omega)=R_e[G(\mathrm{j}\omega)]$和$Q(\omega)=I_m[G(\mathrm{j}\omega)]$分别称为系统的实频特性和虚频特性。

幅频特性、相频特性和实频特性、虚频特性之间具有下列关系：

$$P(\omega)=A(\omega)\cdot\cos\varphi(\omega)$$
$$Q(\omega)=A(\omega)\cdot\sin\varphi(\omega)$$
$$A(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}$$
$$\varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

由于这种关系的存在，频率响应法和利用传递函数的时域法在数学上是等价的。



系统的频率特性与传递函数的关系为：

$$\boxed{G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}}$$

从另一方面看，若线性系统在正弦信号输入作用下，在稳态时，输入和输出都是正弦函数，可用矢量表示：

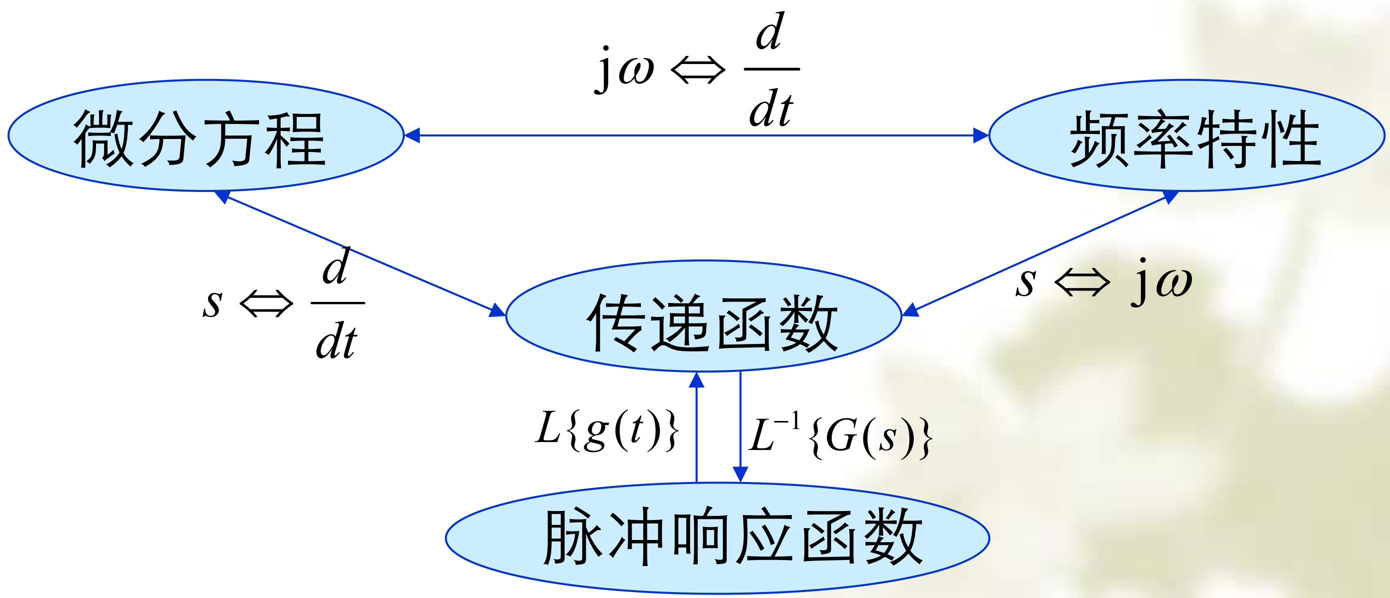
$$R(\mathrm{j}\omega)=R_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_r}，\quad Y(\mathrm{j}\omega)=Y_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_y}$$

$$\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{R(\mathrm{j}\omega)}=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{Y_m}{R_m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_y-\varphi_r)}=A(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

可见，频率特性就是输出、输入正弦函数用矢量表示时之比。表示线性系统在稳态情况下，输出、输入正弦信号之间的数学关系，是频率域中的数学模型。

[结论]：当传递函数中的复变量s用$j\omega$代替时，传递函数就转变为频率特性。反之亦然。

到目前为止，已接触到的线性系统数学模型有以下几种：微分方程、传递函数、脉冲响应函数和频率特性等。它们之间的关系如下：



[例子]：设传递函数为：$G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{1}{s^2+3s+4}$

传递函数→微分方程：$\dfrac{Y(s)}{X(s)}\Rightarrow\dfrac{1}{\dfrac{d^2}{dt^2}+3\dfrac{d}{dt}+4}$

$$\Rightarrow\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+4y(t)=x(t)$$

传递函数→频率特性：$G(\mathrm{j}\omega)=G(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\dfrac{1}{(\mathrm{j}\omega)^2+3(\mathrm{j}\omega)+4}$

其它转换类似（略）。

频率响应法的优势之一：它可以通过实验量测来获得，而不必推导系统的传递函数。

事实上，当传递函数的解析式难以用分析法求得时，常常利用对该系统频率特性测试曲线的拟合来得出传递函数模型。

此外，在验证推导出的传递函数的正确性时，也往往用它所对应的频率特性同测试结果相比较来判断。

频率响应法的优势之二：它可以用图形来表示，这在控制系统的分析和设计中有非常重要的作用。

[说明]

频率特性的推导是在线性定常系统稳定的假设条件下进行的。（如前述）

如果系统不稳定，则瞬态过程$y(t)$最终不可能趋于稳态值$y_s(t)$，当然也就无法由实际系统直接观察到这种稳态响应。

但从理论上，瞬态过程的稳态分量总是可以分离出来的，而且其规律性并不依赖于系统的稳定性。因此可以扩展频率特性的概念，将频率特性定义为：在正弦信号输入下，线性定常系统输出的稳态分量与输入的复数比。

所以对于不稳定系统，尽管无法用实验方法量测到其频率特性，但根据式 $G(\mathrm{j}\omega)=G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}$ ，由传递函数还是可以得到其频率特性。

小结

- 频率特性的定义；
- 频率特性与传递函数之间的关系；
- 各种数学模型之间的关系。

作业：5.1（1），5.2，5.3（选做）