



西安交通大学

网络教育资源建设工程



信号与系统

SIGNALS AND SYSTEMS

第5章 离散时间傅立叶变换

The Discrete-Time Fourier Transform

基 本 内 容

1. 离散时间傅里叶变换;
2. 常用信号的离散时间傅里叶变换对;
3. 离散时间周期信号的傅里叶变换;
4. 傅里叶变换的性质;
5. 系统的频率响应与系统的频域分析方法;

❖ 注释:

CFS (The Continuous-Time Fourier Series):

连续时间傅立叶级数

DFS (The Discrete-Time Fourier Series):

离散时间傅立叶级数

CTFT (The Continuous-Time Fourier Transform):

连续时间傅立叶变换

DTFT (The Discrete-Time Fourier Transform):

离散时间傅立叶变换

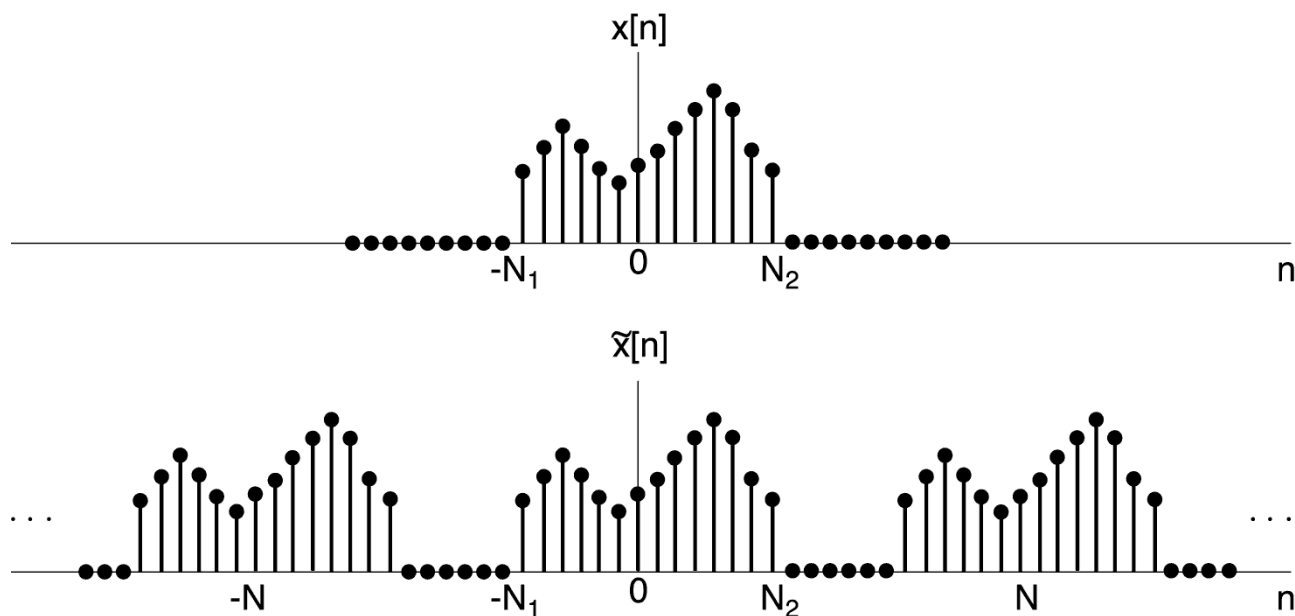
5.0 引言 Introduction

- ❖ 本章将采用与讨论CTFT完全相同的思想方法，来研究离散时间非周期信号的频域分解问题。
- ❖ DFS与CFS之间既有许多类似之处，也有一些重大差别：主要是DFS是一个有限项级数，其系数 a_k 具有周期性。

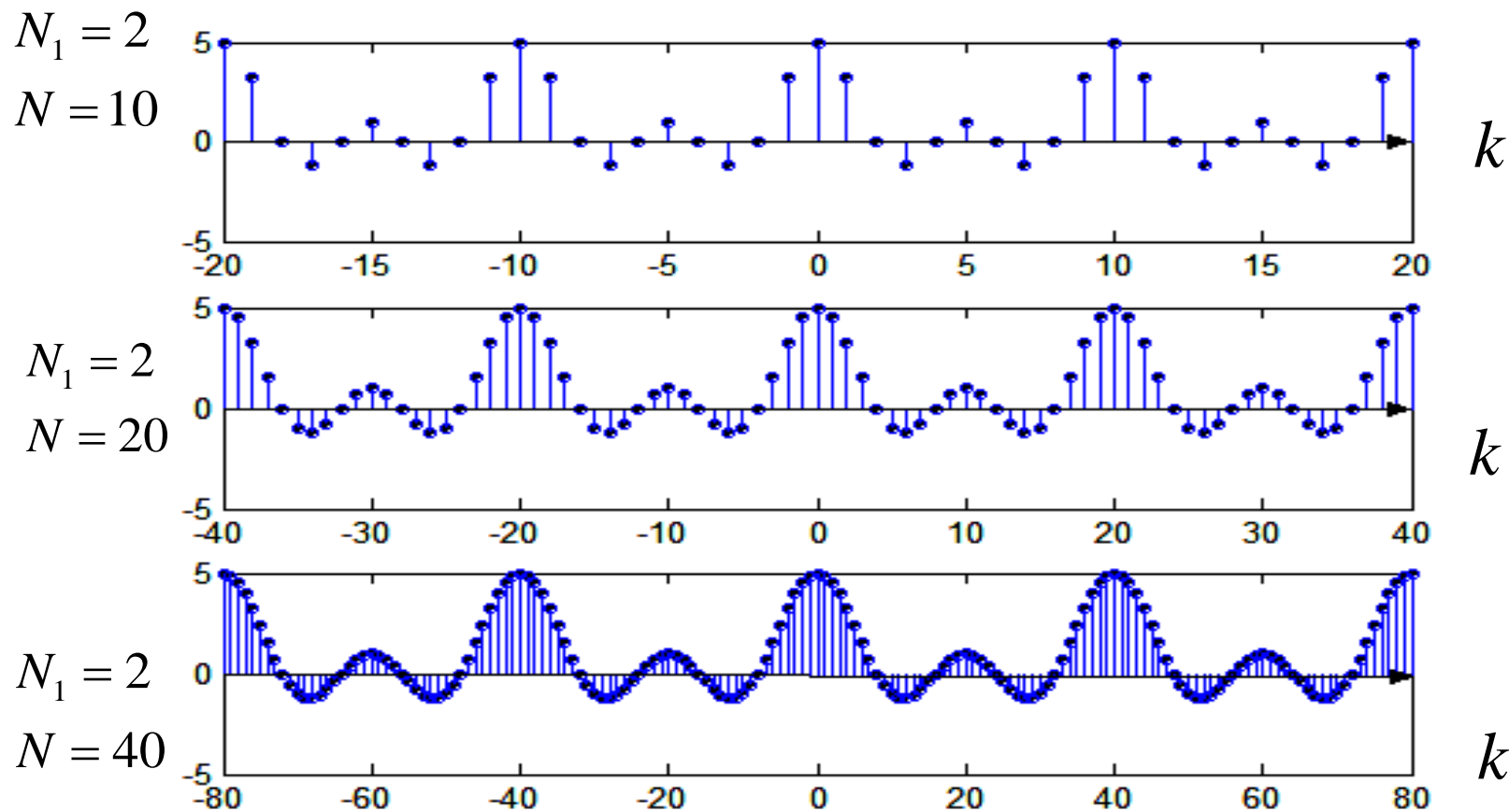
- ❖ 在采用相同方法研究如何从 DFS 引出离散时间非周期信号的频域描述时，可以看到，DTFT 与CTFT既有许多相类似的地方，也同时存在一些重要的区别。
- ❖ 抓住它们之间的相似之处并关注其差别，对掌握和加深对频域分析方法的理理解具有重要意义。

5.1 非周期信号的表示

Representation of Aperiodic Signals: The Discrete-time Fourier Transform



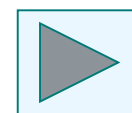
$$Na_k$$



一. 从DFS到DTFT:

在讨论离散时间周期性矩形脉冲信号的频谱时, 我们看到: 当信号周期 N 增大时, 频谱的包络形状不变, 幅度减小, 而频谱的谱线变密。

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 有 $\omega_0 = (2\pi/N) \rightarrow 0$, 而从时域看, 当周期信号的周期 $N \rightarrow \infty$ 时, 就变成了一个非周期的序列。可以预见, 对一个非周期序列, 它的频谱应该是一个连续的频谱。



对周期信号 $\tilde{x}(n)$ 由DFS有

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

即

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时 $\frac{2\pi}{N}k \rightarrow \omega$, 令 $\lim_{N \rightarrow \infty} Na_k \triangleq X(e^{j\omega})$

有: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ —— DTFT

说明: 显然 $X(e^{j\omega})$ 对 ω 是以 2π 为周期的。

将其与 a_k 表达式比较有

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

于是：

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n}, & \omega_0 &= \frac{2\pi}{N} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0\end{aligned}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{x}(n) \rightarrow x(n)$, $k\omega_0 \rightarrow \omega$, $\omega_0 \rightarrow d\omega$, $\sum \rightarrow \int$,

当 k 在一个周期范围内变化时, $k\omega_0$ 在 2π 范围变化, 所以积分区间是 2π 。

$$\therefore x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

表明：离散时间序列可以分解为频率在 2π 区间上分布的、幅度为 $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$ 的复指数分量的线性组合。

结论：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

DTFT
对

二. 常用信号的离散时间傅立叶变换

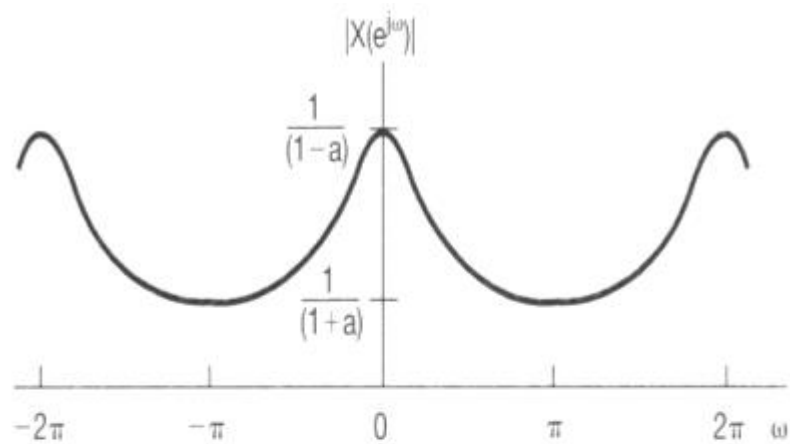
1. $x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

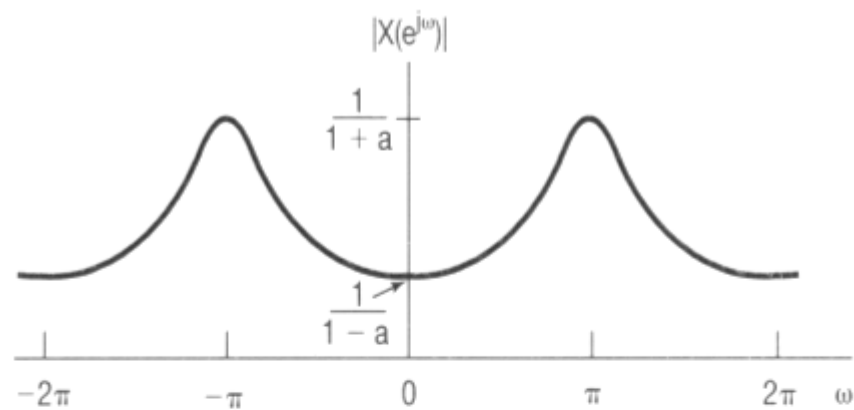
通常 $X(e^{j\omega})$ 是复函数，用它的模和相位表示：

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}$$

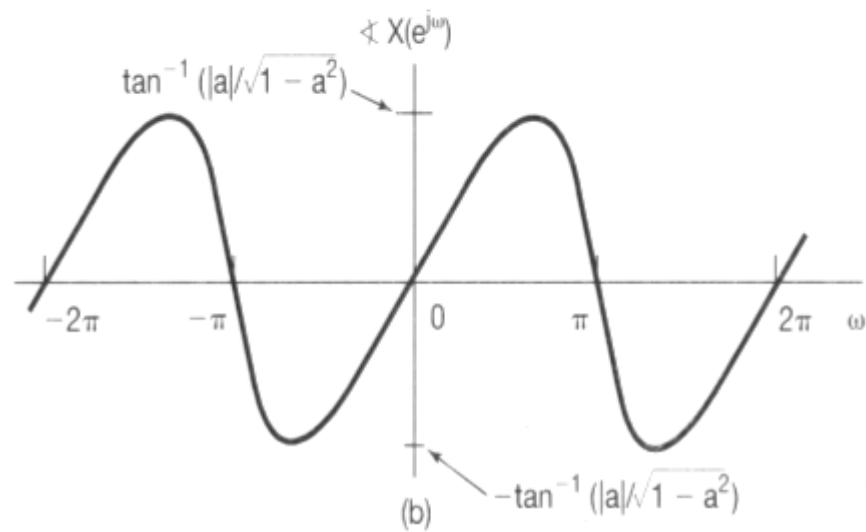
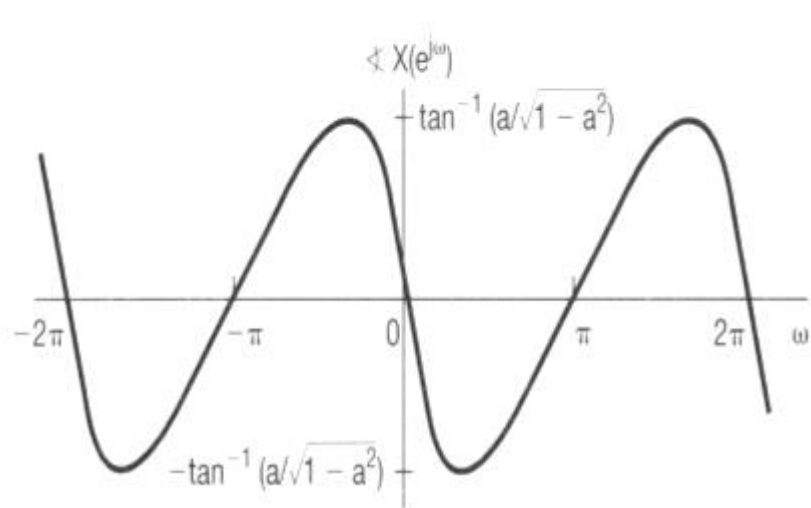
$$\angle X(e^{j\omega}) = -\operatorname{tg}^{-1} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}$$



(a)
 $0 < a < 1$



(b)
 $-1 < a < 0$



由图可以得到:

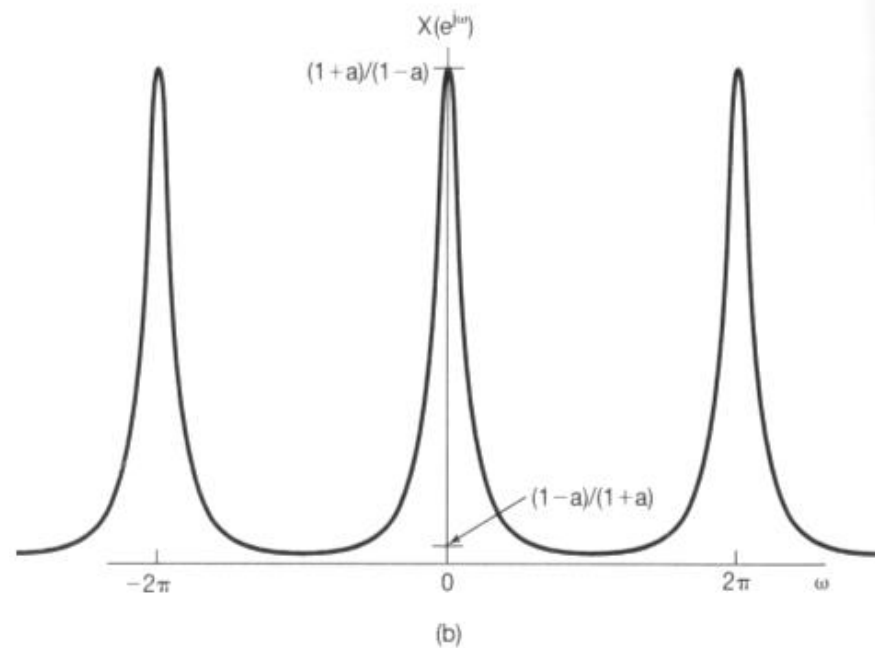
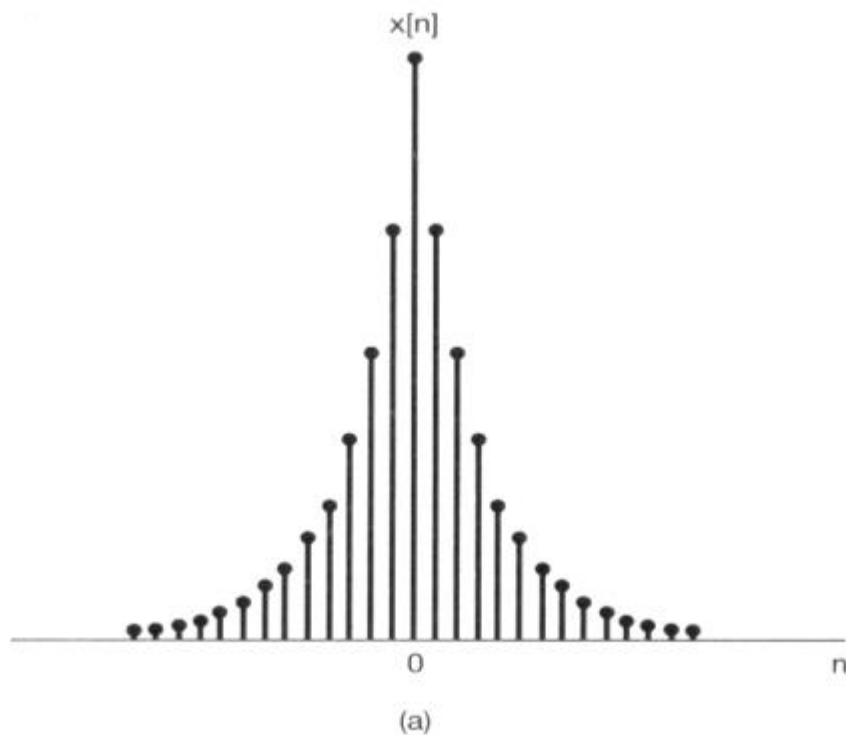
$0 < a < 1$ 时, 低通特性, $x(n)$ 单调指数衰减

$-1 < a < 0$ 时, 高通特性, $x(n)$ 摆动指数衰减

2. $x(n) = a^{|n|}, \quad |a| < 1$

$$x(n) = a^{-n}u(-n-1) + a^n u(n)$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos \omega} \end{aligned}$$



可以得出结论：实偶序列 \longleftrightarrow 实偶函数

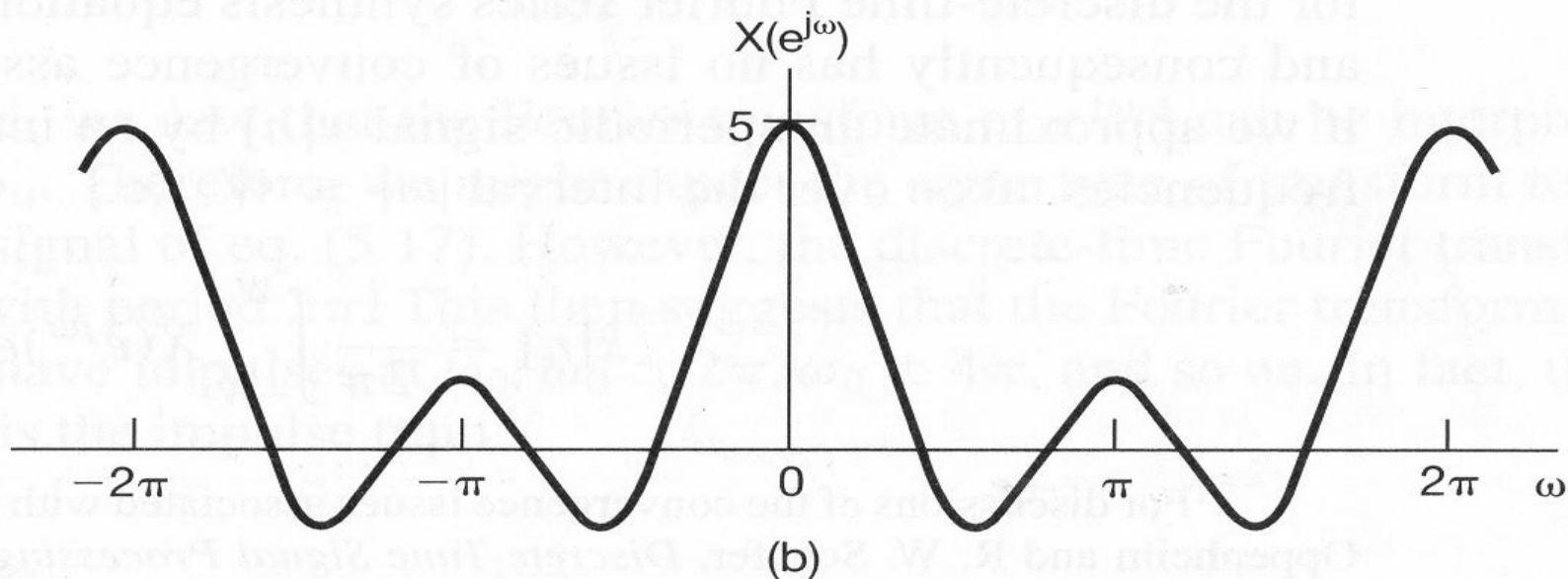
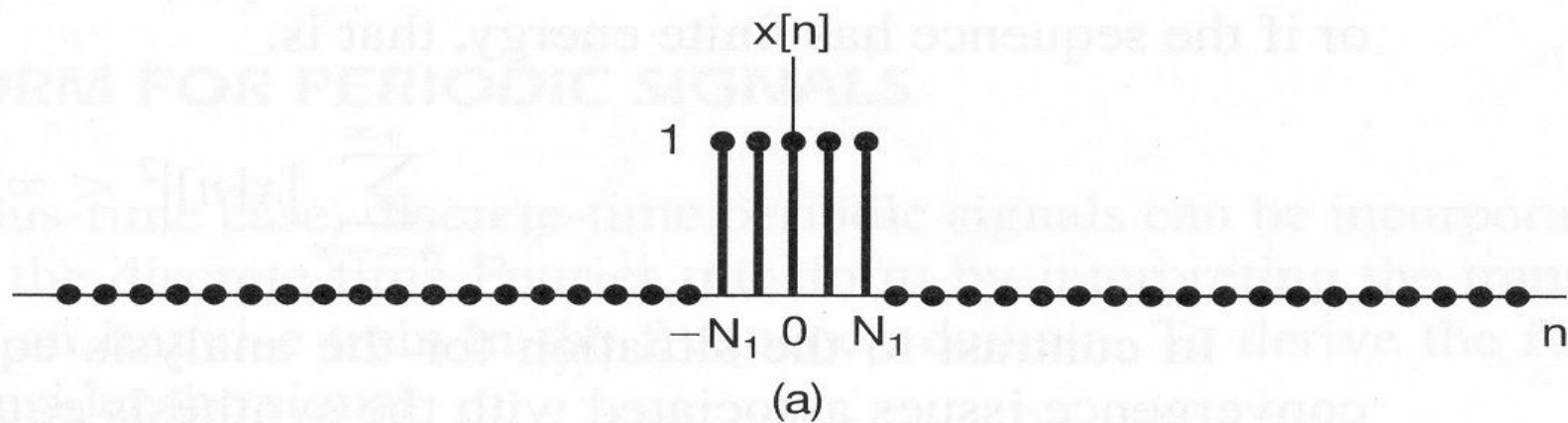
3. 矩形脉冲:

$$x(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin(2N_1 + 1)\frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

有同样的结论: 实偶信号 \longleftrightarrow 实偶函数

当 $N_1 = 2$ 时, 可得到:



两点比较:

1. 与对应的周期信号比较

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2N_1 + 1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1 + 1)}{\sin\frac{\pi}{N}k},$$

显然有

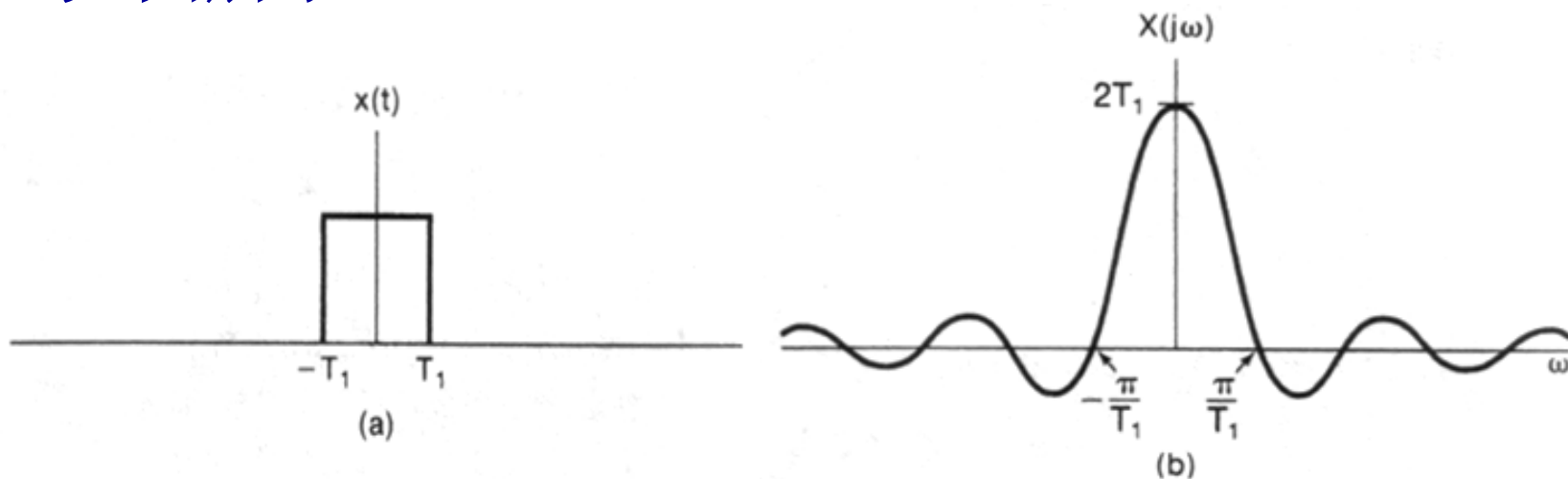
$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

关系成立

2. 与对应的连续时间信号比较

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad X(j\omega) = \frac{2T_1 \sin \omega T_1}{\omega T_1}$$

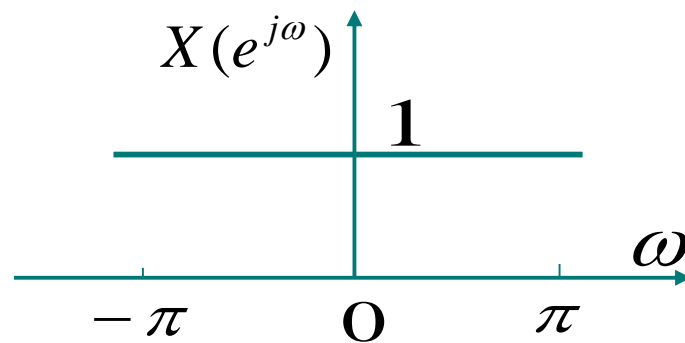
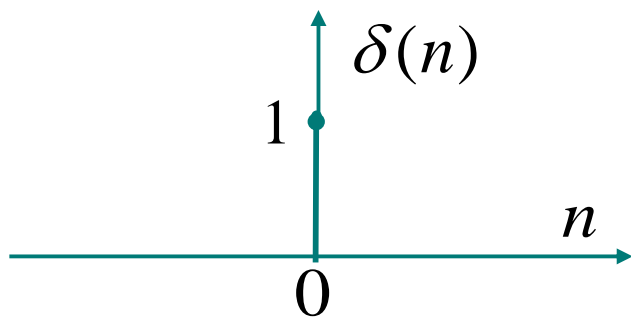
如图所示：



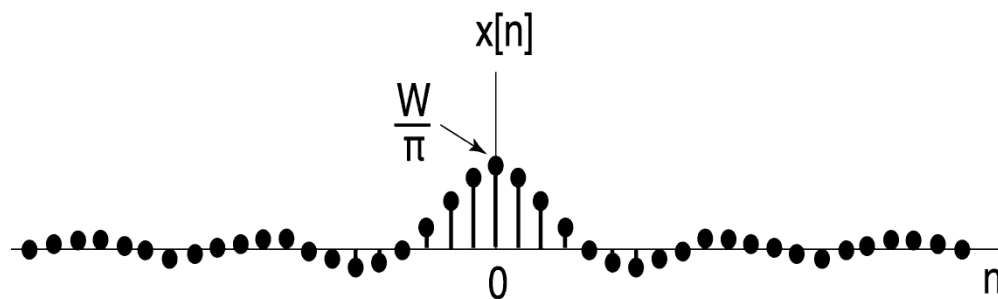
4. $x(n] = \delta(n)$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = 1$$

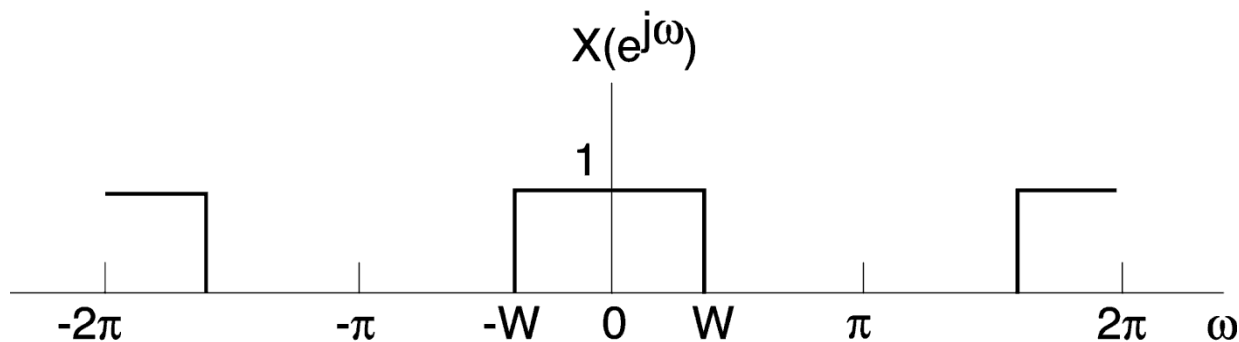
如图所示：



$$5. x(n) = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$



$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & W < |\omega| < \pi \end{cases}$$



6. $\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases}$ 实、奇

$$X(e^{j\omega}) = \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega} \quad \text{纯虚、奇}$$

7. 单位阶跃信号的频谱

$$u(n) = \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(n) + \delta(n)] \longleftrightarrow$$

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k) + \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-j \sin \omega}{1 - \cos \omega} \right) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{j\omega}}{1 - \cos \omega} \right) + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

三. DTFT的收敛问题

当 $x(n)$ 是无限长序列时, 由于 $X(e^{j\omega})$ 的表达式是无穷项级数, 当然会存在收敛问题。

收敛条件有两组:

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$, 则级数以均方误差最小的准则收敛于 $X(e^{j\omega})$ 。
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$, 则 $X(e^{j\omega})$ 存在, 且级数一致收敛于 $X(e^{j\omega})$ 。

考察 $\delta(n)$ 的收敛过程，如图所示：

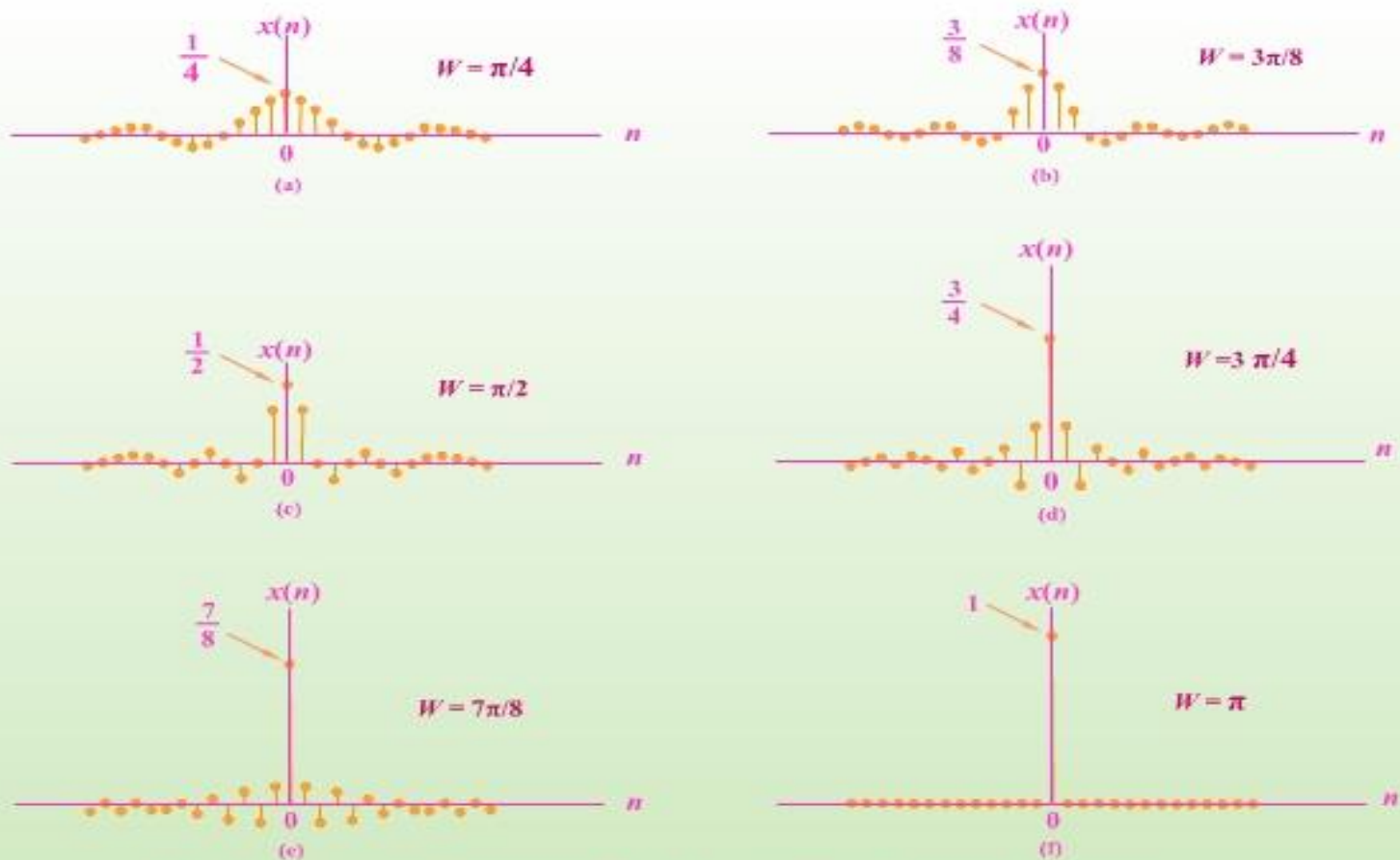


图5.7 利用 $|\omega| \leq W$ 范围内的复指数信号，按(5.16)式得到的一个近似单位脉冲序列：

(a) $W = \pi/4$; (b) $W = 3\pi/8$; (c) $W = \pi/2$; (d) $W = 3\pi/4$; (e) $W = 7\pi/8$;
 (f) $W = \pi$, 应该注意到：当 $W = \pi$ 时， $\hat{x}[n] = \delta[n]$

由图可以得到以下结论：

- ❖ 当以部分复指数分量之和近似信号时，也会出现起伏和振荡；
- ❖ 但随着 $W \uparrow$ ， $\tilde{x}(n)$ 的振荡频率变高，起伏的幅度趋小；
- ❖ 当 $W = \pi$ 时，振荡与起伏将完全消失，不会出现吉伯斯(Gibbs)现象，也不存在收敛问题。

5.2 周期信号的DTFT

The Fourier Transform for Periodic Signals

对连续时间信号，有 $2\pi\delta(\omega - \omega_0) \leftrightarrow e^{j\omega_0 t}$ ，由此推断，对离散时间信号或许有相似的情况。但由于DTFT一定是以 2π 为周期的，因此，频域的冲激应该是周期性的冲激串，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k)$$

对其作反变换有：

$$\begin{aligned}x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\&= \int_0^{2\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}\end{aligned}$$

可见, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \leftrightarrow e^{j\omega_0 n}$

由DFS有 $\tilde{x}(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

因此, 周期信号 $\tilde{x}(n)$ 可用DTFT表示为

$$\tilde{x}(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l)$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi l) \\ &= \Lambda + \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi) \\ &\quad + \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 4\pi) + \Lambda \\ &= \Lambda + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k + N)\right] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k + 2N)\right] + \Lambda \end{aligned}$$

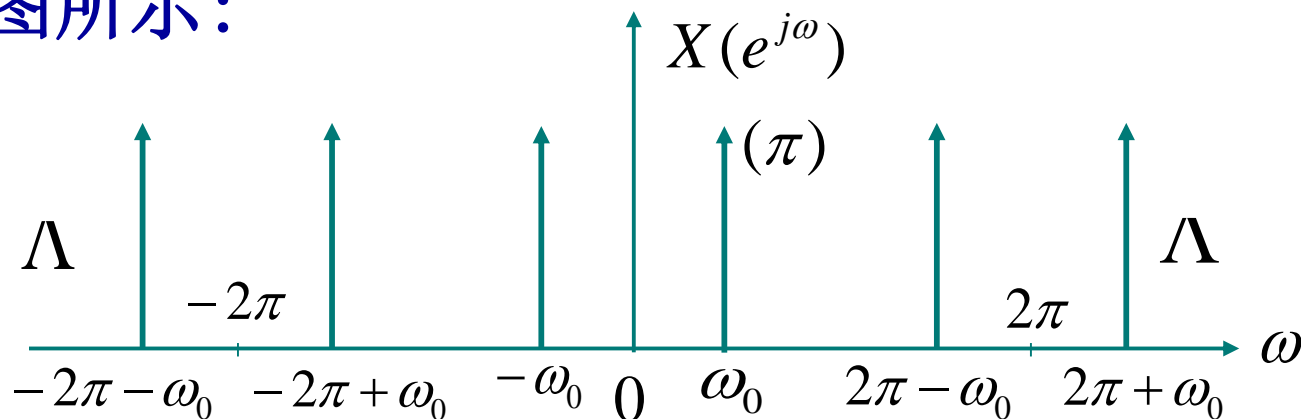
$$\begin{aligned} &= \Lambda + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=N}^{2N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \\ &+ \sum_{k=2N}^{3N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \Lambda \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \end{aligned}$$

比较：可以看出与连续时间傅立叶变换中相应的形式是完全一致的。

例1. $x(n) = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$, 它不一定是周期的。当 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}k$ 时才具有周期性。

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi k)]$$

如图所示：

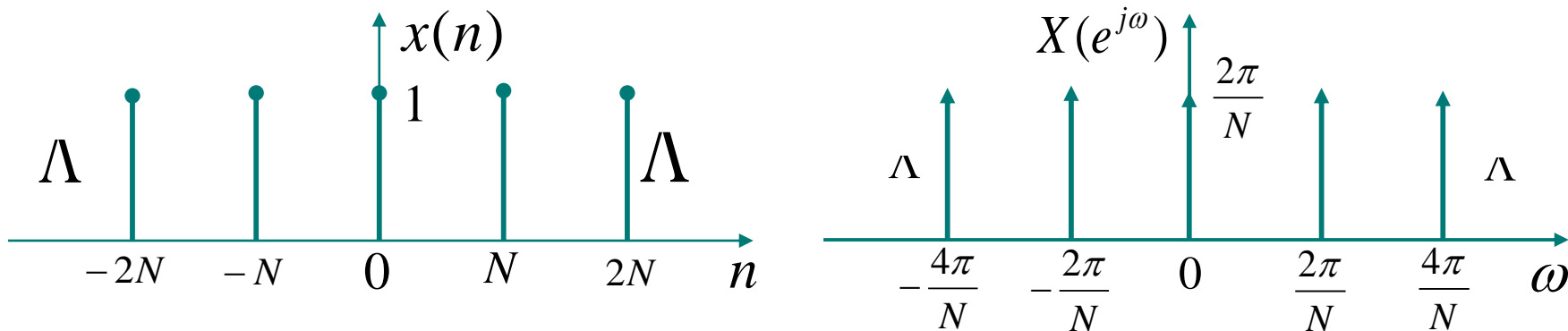


例2. $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$ —— 均匀脉冲串

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

比较: 与连续时间情况下对应的一致。



5.3 离散时间傅立叶变换的性质

Properties of the Discrete-Time Fourier Transform

DTFT也有很多与**CTFT**类似的性质，当然也有某些明显的差别。

通过对**DTFT**性质的讨论，目的在于揭示信号时域和频域特性之间的关系。

一、周期性 (periodic):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

比较：这是与**CTFT**不同的。

二. 线性 (linearity):

$$ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

三. 时移与频移 (shifting):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则

$$x(n - n_0) \leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \text{ —— 时移特性}$$

$$x(n)e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \text{ —— 频移特性}$$

四. 时间反转 (reflaction):

$$\text{若 } x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega}), \text{ 则 } x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

五. 共轭对称性 (symmetry properties):

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

由此可进一步得到以下结论:

1. 若 $x(n)$ 是实信号, 则 $x^*(n) = x(n)$

$$\therefore X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}), \quad \text{即 } X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})$$

$$\therefore \begin{cases} |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \\ \text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})] \\ \text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})] \end{cases}$$

2. 若 $x(n)$ 是实偶信号, 则 $x(n) = x(-n)$,

$$x^*(n) = x(n) \quad \text{Q} \quad x(-n) \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

于是有: $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$,

即 $X(e^{j\omega})$ 是实偶函数。

3. 若 $x(n)$ 是实奇信号, 则 $x(n) = -x(-n)$, $x^*(n) = x(n)$

于是有: $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = -X(e^{j\omega})$,

表明 $X(e^{j\omega})$ 是虚奇函数。

4. 若 $x(n) = x_e(n) + x_o(n)$, 则有:

$$x_e(n) \leftrightarrow \operatorname{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] \quad x_o(n) \leftrightarrow j \operatorname{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

说明: 这些结论与连续时间情况下完全一致。

六. 差分与求和 (Differencing and Accumulation):

$$x(n) - x(n-1) \leftrightarrow (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

说明: 在DTFT中 $(1 - e^{-j\omega})$ 对应于CTFT中的 $j\omega$ 。

$$\text{例: } Q u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad \delta(n) \leftrightarrow 1$$

$$\therefore u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

七. 时域内插 (Interpolation):

$$\text{定义 } x_k(n) = \begin{cases} x(n/k), & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他 } n \end{cases}$$

$$X_k(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n) e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_k(rk) e^{-j\omega rk}$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) e^{-j\omega rk} = X(e^{jk\omega}) \quad \therefore x_k(n) \leftrightarrow X(e^{jk\omega})$$

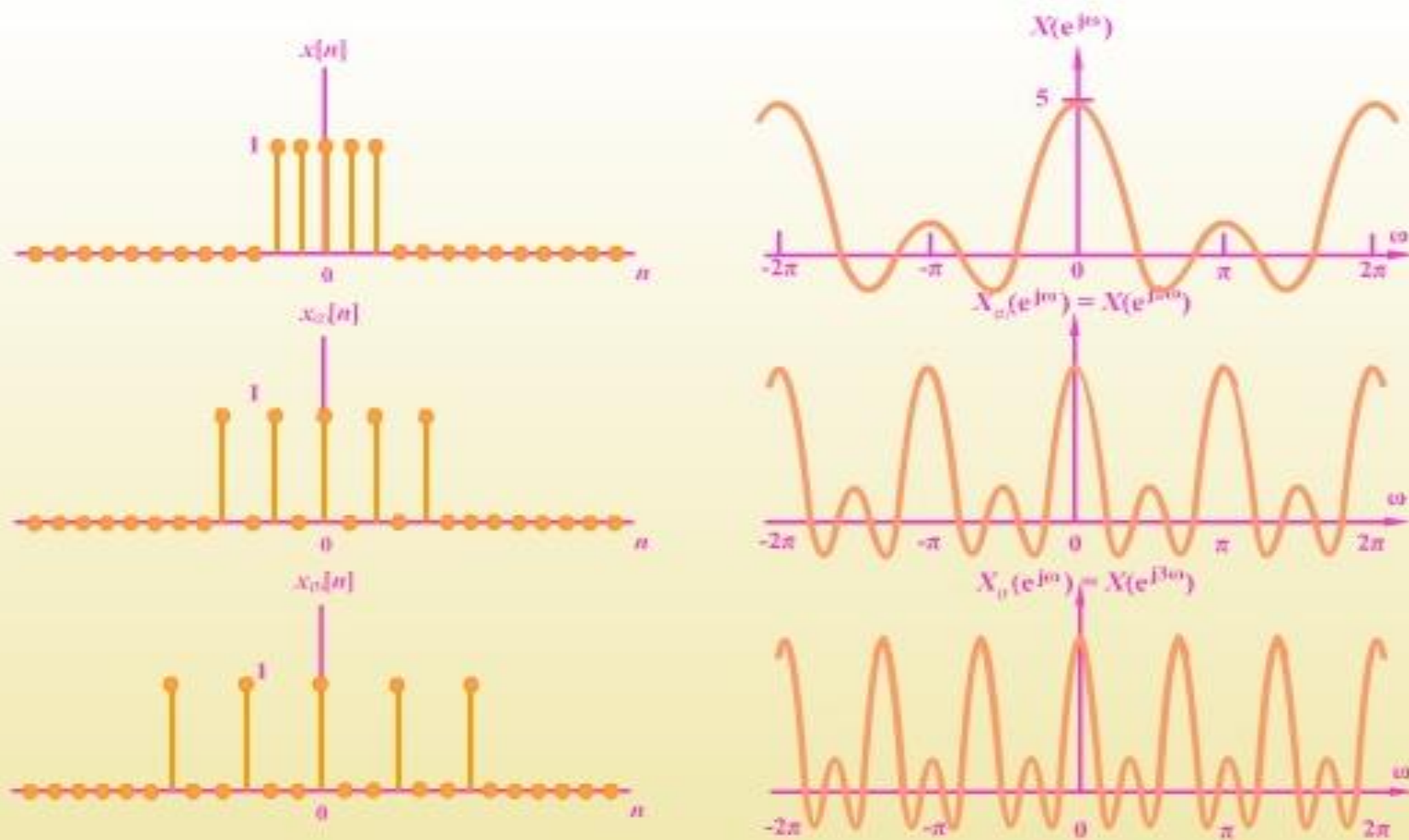


图5.14 时域和频域之间的相反关系:当 k 增加时, $x_c[n]$ 在时域上拉开, 而其变换则在频域上压缩

信号的时域与频域特性之间有一种相反的关系。

八. 频域微分(Differentiation in Frequency):

$$nx(n) \leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

九. Parseval定理:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$|X(e^{j\omega})|^2$ 称为 $x(n)$ 的能量谱密度函数。

比较: 在DFS中, 有 $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$

$|a_k|^2$ 称为周期信号的功率谱。

5.4 卷积特性(The Convolution Property)

若 $y(n) = x(n) * h(n),$

则 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}),$

$H(e^{j\omega})$ 即是系统的频率特性。

说明：该特性提供了对LTI系统进行频域分析的理论基础。

例:求和特性的证明

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) = x(n) * u(n)$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x(k) \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \cdot U(e^{j\omega})$$

$$= X(e^{j\omega}) \cdot \left[\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \right]$$

$$= \frac{X(e^{j\omega})}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

5.5 相乘性质 (The Multiplication Property)

如果 $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$,

$$\begin{aligned}\text{则 } Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})\end{aligned}$$

由于 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 都是以 2π 为周期的,

因此上述卷积称为周期卷积。

例: $c(n) = (-1)^n$, $x(n) \longrightarrow \otimes \longrightarrow y(n) = x(n) \cdot c(n)$

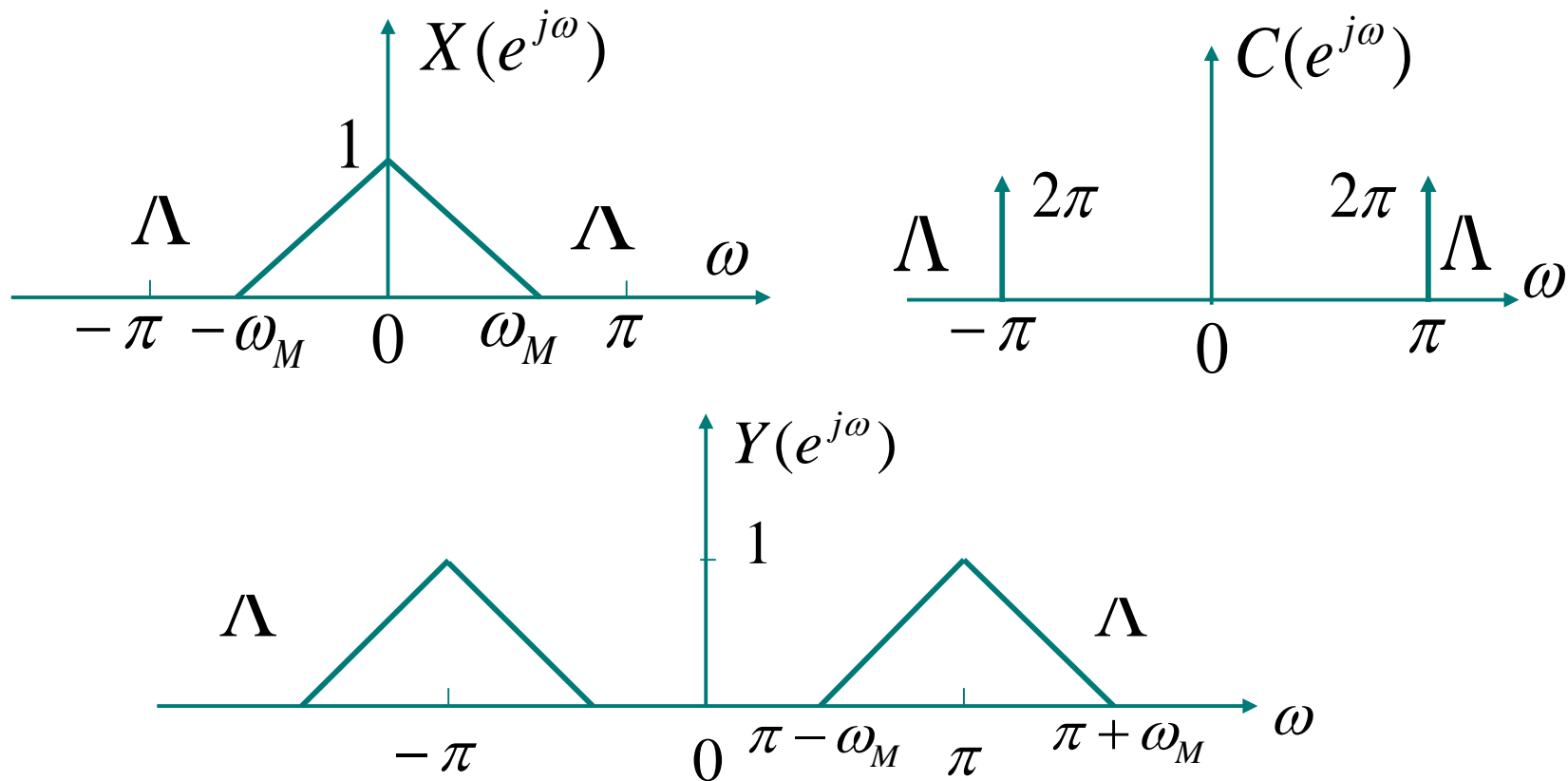
$$c(n) = (-1)^n = e^{j\pi n}$$

$$C(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi - 2k\pi)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes C(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta}) C(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} X(e^{j\omega}) \delta(\omega - \pi) d\omega = X(e^{j(\omega-\pi)})$$



5.6 傅立叶变换的性质及基本变换对列表

(自学)

5.7 对偶性 (Duality)

一. DFS的对偶

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

由于 a_k 本身也是以 N 为周期的序列，当然也可以将其展开成DFS形式。 即：

$$a_k = \sum_{n=\langle N \rangle} \frac{1}{N} x(-n) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{或} \quad a_n = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} x(-k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

这表明：序列 a_n 的DFS系数就是 $\frac{1}{N} x(-k)$,

即：

$$\begin{aligned} x(n) &\xleftrightarrow{DFS} a_k \\ a_n &\xleftrightarrow{DFS} \frac{1}{N} x(-k) \end{aligned}$$

利用对偶性可以很方便的将DFS在时域得到的性质，通过对偶得到频域相应的性质。

例1：从时移到频移

$$x(n) \leftrightarrow a_k \quad a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k)$$

利用时移性质有：

$$a_{n-n_0} \leftrightarrow \frac{1}{N} x(-k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn_0}$$

由对偶性有：

$$\frac{1}{N} x(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow \frac{1}{N} a_{-k-M}$$

$$\therefore x(-n) e^{-j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{-k-M}$$

Q $x(-n) \leftrightarrow a_{-k} \quad \therefore x(n) e^{j\frac{2\pi}{N}Mn} \leftrightarrow a_{k-M}$, 频移特性

例2: 由卷积特性到相乘特性

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow a_k \cdot b_k \cdot N$$

$$a_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \quad b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_2(-k)$$

由时域卷积性质:

$$a_n \otimes b_n \leftrightarrow \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot \frac{1}{N} x_2(-k) \cdot N = \frac{1}{N} x_1(-k) \cdot x_2(-k)$$

由对偶性: $\frac{1}{N} x_1(-n) x_2(-n) \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{m=\langle N \rangle} a_m b_{-k-m}$

$$\therefore x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \sum_{m=\langle N \rangle} a_m b_{k-m} = a_k \otimes b_k \quad \text{时域相乘性质}$$

二. DTFT与CFS间的对偶

由 $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ 知 $X(e^{j\omega})$ 是一个以 2π

为周期的连续函数, $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

若在时域构造一个以 2π 为周期的连续时间信号

$X(e^{jt})$, 则可将其表示为CFS:

$$X(e^{jt}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkt}, \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{jt}) e^{-jkt} dt$$

比较 $x(n)$ 和 a_k 的表达式可以看出 $a_k = x(-k)$

这表明：

$$\text{若 } x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

$$\text{则 } X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$$

利用这一对偶关系，可以将DTFT的若干特性对偶到CFS中去；或者反之。

例: 从CFS的时域微分到DTFT的频域微分

$$\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{CFS} j \frac{2\pi}{T} k a_k \quad \text{CFS的时域微分特性}$$

若 $x(n) \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$, 则 $X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} x(-k)$

$$\therefore \frac{d}{dt} X(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} j \frac{2\pi}{T} k x(-k) = j k x(-k), \quad (T = 2\pi)$$

$$-j n x(n) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) \quad \text{DTFT的频域微分特性}$$

例：从CFS的卷积特性到DTFT的相乘特性

$$\begin{aligned}x_1(n) &\xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) & x_2(n) &\xleftrightarrow{DTFT} X_2(e^{j\omega}) \\X_1(e^{jt}) &\xleftrightarrow{CFS} x_1(-k) & X_2(e^{jt}) &\xleftrightarrow{CFS} x_2(-k)\end{aligned}$$

由CFS的卷积特性 $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow T a_k b_k$

$$X_1(e^{jt}) \otimes X_2(e^{jt}) \xleftrightarrow{CFS} 2\pi x_1(-k)x_2(-k), (T = 2\pi)$$

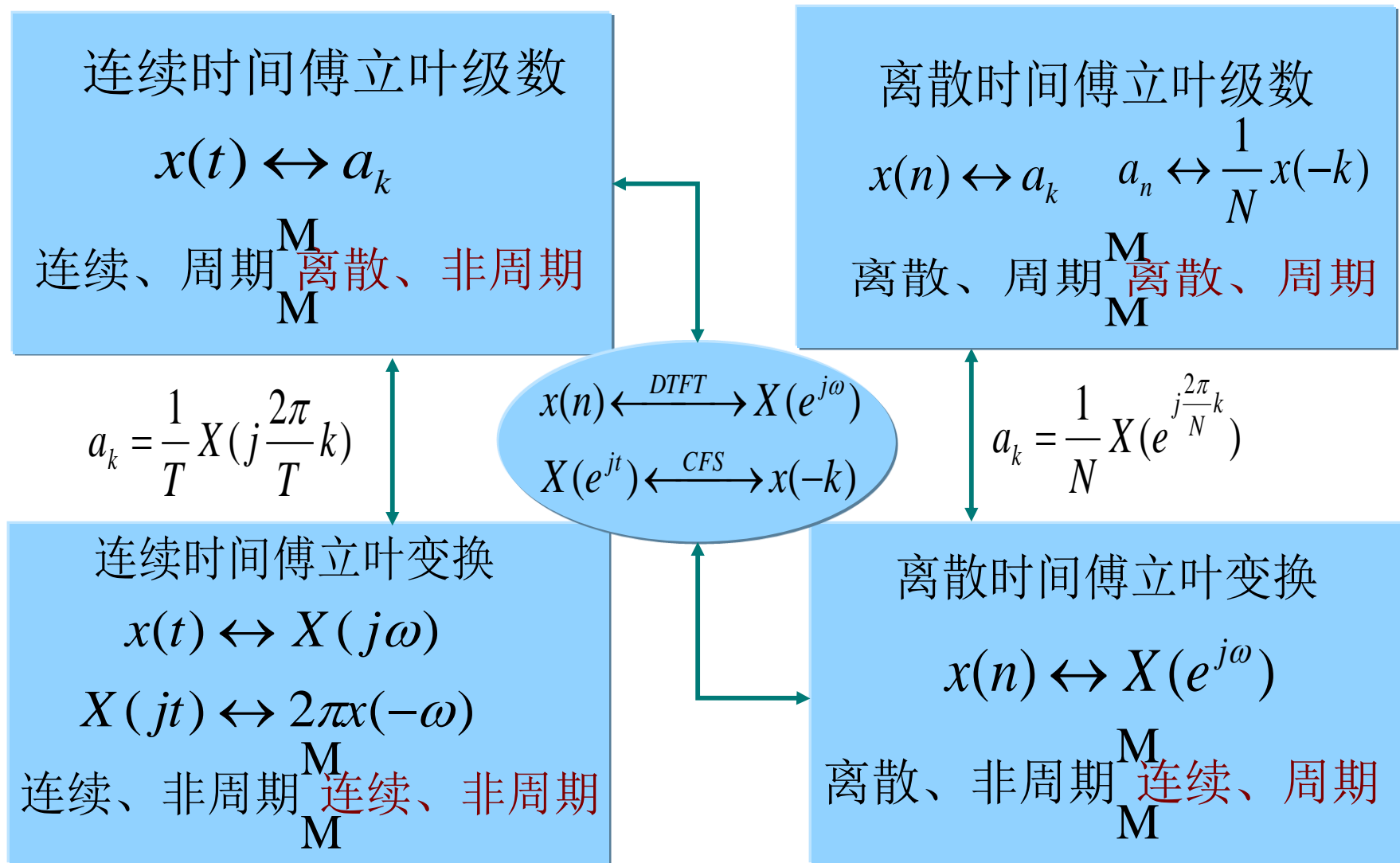
由对偶性：

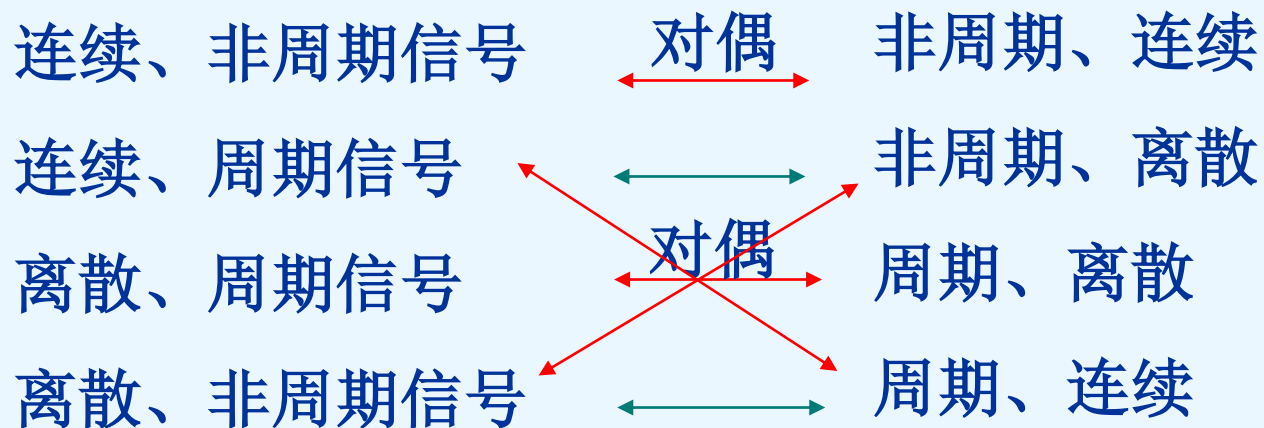
$$2\pi x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

$$x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

——DTFT的相乘特性

可以将对偶关系归纳为如下图表：





可以看出：信号在时域的特性和在频域的特性之间存在以下对应关系：

时域的周期性 \longleftrightarrow 频域的离散性

时域的离散性 \longleftrightarrow 频域的周期性

时域的非周期性 \longleftrightarrow 频域的连续性

时域的连续性 \longleftrightarrow 频域的非周期性

例：求 $x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \delta(n-2k)$ 的 $X(e^{j\omega})$

$$\ominus \delta(n) \leftrightarrow 1 \quad \delta(n-2k) \leftrightarrow e^{-j2k\omega}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2k} \delta(n-2k)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{2k} e^{-j2k\omega} = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2} e^{-j\omega})^2}$$

5.8 由LCCDE表征的系统

Systems Characterized by Linear Constant-Coefficient Difference Equations

相当广泛而有用的一类离散时间LTI系统可以由一个线性常系数差分方程LCCDE来表征：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k)$$

一. 由LCCDE描述的系统的频率响应：

方法一：可以从求解 $x(n) = \delta(n)$ 时的差分方程得到

$h(n)$ ，进而将 $h(n)$ 作变换而求得 $H(e^{j\omega})$ 。

方法二：可以通过求出 $x(n) = e^{j\omega n}$ 时方程的解而得到 $H(e^{j\omega})$ ，因为 $e^{j\omega n}$ 是LTI系统的特征函数，此时的 $y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$

方法三：对方程两边进行DTFT变换，可得到：

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}$$

可见 $H(e^{j\omega})$ 是一个有理函数。当需要得到 $h(n)$ 时，往往是先从方程得到 $H(e^{j\omega})$ ，进而通过反变换得到 $h(n)$ 。

例: $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$= \left[\frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right]$$

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

由差分方程所描述的系统通过求频率响应可直接求出其单位脉冲响应。

二. 系统的频率响应:

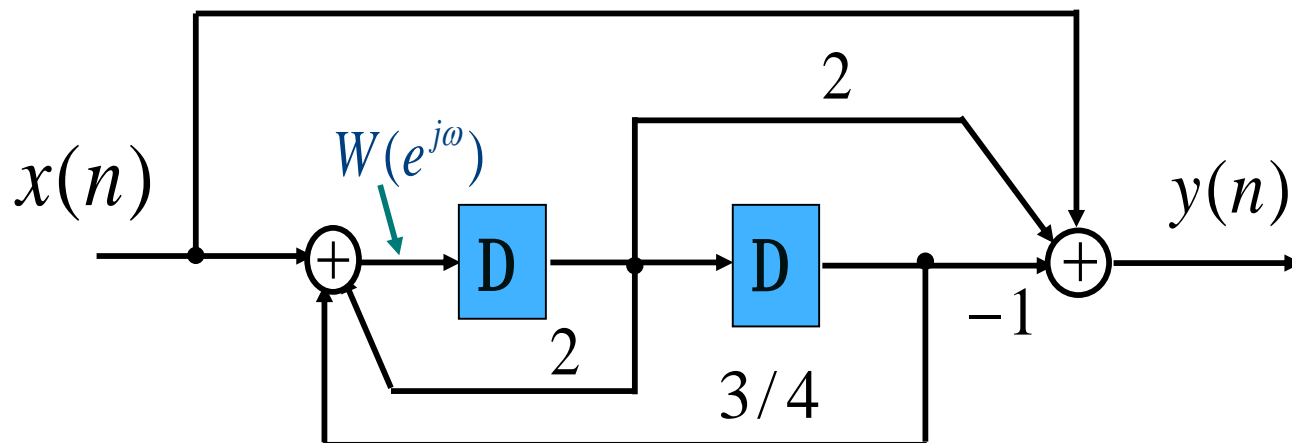
$H(e^{j\omega})$ 刻画了LTI系统的频域特征, 它是系统单位脉冲响应的傅立叶变换。

但并非所有的LTI系统都一定存在频率响应。如果 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ 则 $H(e^{j\omega})$ 存在。

这说明: 稳定系统可以由其频率响应来描述。

由 $H(e^{j\omega})$ 所表征的系统应该是稳定系统。

三. 由方框图描述的系统:



$$H(e^{j\omega}) = 1 + \frac{2e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}}{1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

通过对图中两个加法器的输出列方程可得到:

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{3}{4}W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2W(e^{j\omega})e^{-j\omega} - W(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$$

由上式可得:

$$X(e^{j\omega}) = (1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = (1 - \frac{7}{4}e^{-j2\omega})W(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 + \frac{2e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}}{1 - 2e^{-j\omega} - \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

四. LTI系统的频域分析方法:

1. 对输入信号做傅立叶变换, 求得 $X(e^{j\omega})$ 。
2. 根据系统的描述, 求得系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。
3. 根据卷积特性得到 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 。
4. 对 $Y(e^{j\omega})$ 做傅立叶反变换得到系统的响应 $y(n)$ 。

做傅立叶变换或反变换时, 主要的方法是利用傅立叶变换的性质、常用的变换对、部分分式展开等。

* 频域分析的方法

1、将信号与系统的时域表征转换为频域表征;

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega}) \quad h[n] \leftrightarrow H(e^{j\omega})$$

2、利用卷积性质: $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

3、将频域表征转换为时域表征; $y[n] = F^{-1}\{Y(e^{j\omega})\}$

利用频域分析方法, 对输入、输出与系统的表征, 若已知其中两个表征就可求出第三个, 从而不仅可以分析系统而且还可以设计系统。

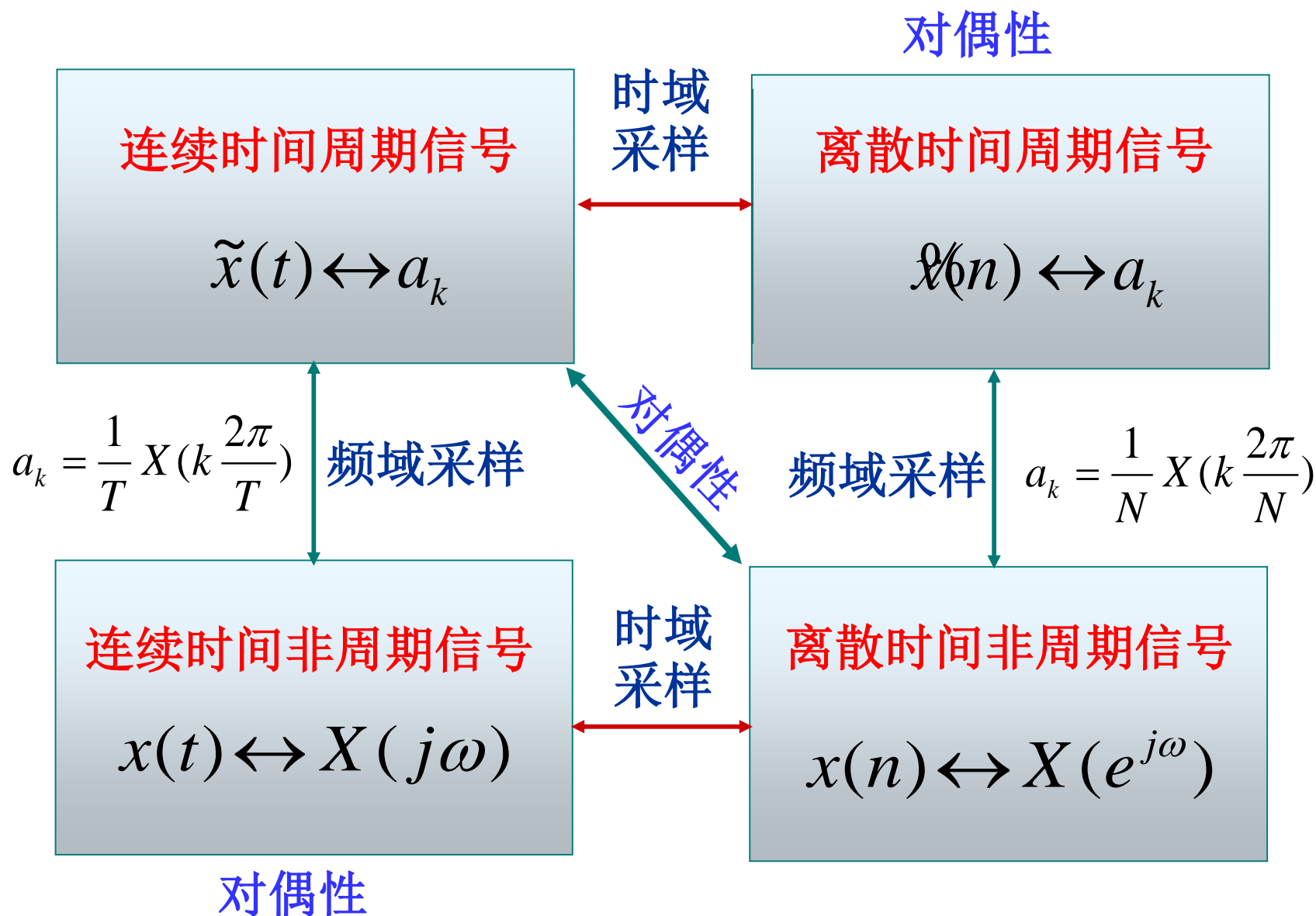
5.9 小结 Summary

- ❖ 本章与第4章平行地讨论了DTFT，讨论的基本思路和方法与第4章完全对应，得到的许多结论也很类似。
- ❖ 通过对DTFT性质的讨论，揭示了离散时间信号时域与频域特性的关系。不仅看到许多性质在CTFT中都有相对应的结论，而且它们也存在一些差别，例如DTFT总是以 2π 为周期的。

- ❖ 通过卷积特性的讨论，对LTI系统建立了频域分析的方法。同样地，相乘特性的存在则为离散时间信号的传输技术提供了理论基础。
- ❖ 对偶性的讨论为进一步认识连续时间信号、离散时间信号、周期信号与非周期信号频域描述的几种工具之间的内在联系，提供了重要的理论根据。深入理解并恰当运用对偶性，对深刻掌握CFS、DFS、CTFT、DTFT的本质关系有很大帮助。

- ❖ 与连续时间LTI系统一样，对由LCCDE或由方框图描述的LTI系统，可以很方便的由方程或方框图得到系统的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ ，进而实现系统的频域分析。其基本过程和涉及到的问题与连续时间LTI系统的情况也完全类似。

随着今后进一步的讨论，我们可以看到CFS、DFS、CTFT、DTFT之间是完全相通的。



作业

5.9 5.21 a, c, h 5.22 b, e, g

5.23 a,c,e 5.24 a,b,g,h

5.12 5.19 5.26 a,b,c 5.35 a 5.50

5.23 改错: (e) $\operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\}$, (f)(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$