第三节 控制系统根轨迹绘制示例

规则	180°等相角根轨迹	0°等相角根轨迹
连续性、对称性和分支数	根轨迹是连续且对称于实轴的曲线。其分支数等于开环有限零点和极点数目中的大者。	同左
起点和终点	起始于开环极点，终止于开环零点	同左
渐近线	条数：n-m	同左
	与实轴交点：$-\sigma = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$	同左
	与实轴夹角：$\varphi = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m},(k=0,1,2\cdots n-m-1)$	$\varphi = \dfrac{2k\pi}{n-m},(k=0,1,2,\cdots n-m-1)$
实轴上根轨迹	若实轴上某点右边的开环有限零点和有限极点数目之和为奇数，则该点是根轨迹上的点	若实轴上某点右边的开环有限零点和有限极点数目之和为偶数（包括0），则该点是根轨迹上的点

分离(会合)点	分离（会合）点为方程: $N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=0$ $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s+p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s+z_j}$ 的根	同左
	分离（会合）点处的根轨迹增益: $k_{gd}=-\frac{D'(s)}{N'(s)}\Big\|_{s=-\sigma_d}$ $k_{gd}=-\frac{D(s)}{N(s)}\Big\|_{s=-\sigma_d}$	同左
出射、入射角	出射角: $\theta_{pk}=\pi+\sum_{j=1}^{m}\angle(p_k+z_j)-\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\angle(p_k+p_i)$	出射角: $\theta_{pk}=\sum_{j=1}^{m}\angle(p_k+z_j)-\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\angle(p_k+p_i)$
	入射角: $\theta_{zk}=\pi-\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{m}\angle(z_k+z_j)+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_k+p_i)$	入射角: $\theta_{zk}=-\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{m}\angle(z_k+z_j)+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_k+p_i)$

与虚轴的交点	令s=jω，带入闭环特征方程求ω和k_g。或用劳斯判据求临界稳定时的闭环特征根。	同左
闭环特征根之和与之积	$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} p_i, (n-m \geq 2)$ $\prod_{i=1}^{n} s_i = \prod_{i=1}^{n} p_i + k_g \prod_{j=1}^{m} z_j$	同左

根据上述根轨迹绘制规则，可以画出控制系统完整的根轨迹图。应当指出的是，并不是每一个系统的根轨迹绘制都要全部使用上述基本规则。根据系统的不同，有时只使用部分规则就可以绘制出完整的根轨迹。

手工绘制控制系统根轨迹的步骤:

- 标注开环极点“×”和零点 “○”；
- 确定根轨迹的分支数;
- 确定实轴上的根轨迹区间;
- 确定n-m条渐近线;
- 计算分离(会合)点;
- 计算极点处的出射角和零点处的入射角;
- 计算根轨迹与虚轴的交点;
- 闭环特征根之和与之积;
- 利用上述信息绘制根轨迹。

例4.3.1 已知反馈控制系统的特征方程是

$$1+\frac{k_g s(s+4)}{s^2+2s+2}=0$$

试绘制当k_g从$0\to+\infty$变化时的根轨迹。

解： 根据要求，采用180°等相角根轨迹绘制规则进行绘制。

- 系统的根轨迹方程为：

$$\frac{k_g s(s+4)}{s^2+2s+2}=-1$$

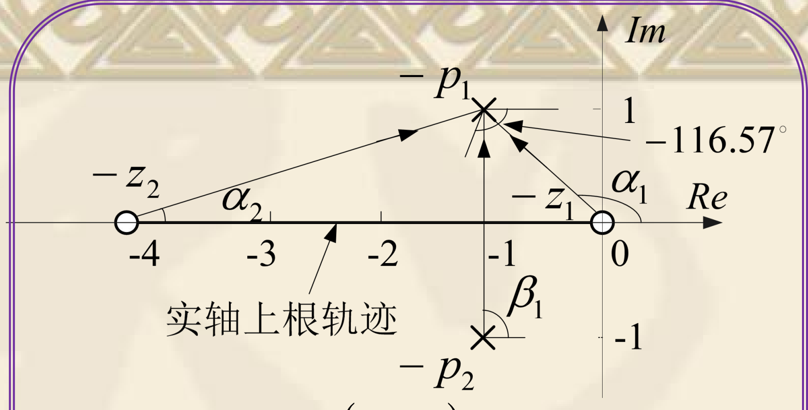
- 系统的开环极点和零点为：

$$-p_1=-1+\mathrm{j},-p_2=-1-\mathrm{j};-z_1=0,-z_2=-4$$

- 根轨迹的分支数：

根轨迹有两条分支，分别起始于开环极点$-p_1$，$-p_2$处，终止于开环零点$-z_1$，$-z_2$处。

- 实轴上的根轨迹区间为：[-4，0]
- 根轨迹的渐近线：开环极点与开环零点的数目相同，该根轨迹没有渐近线。



- 分离（会合）点：令

$$N(s)=s^2+4s \qquad N'(s)=2s+4$$

$$D(s)=s^2+2s+2 \qquad D'(s)=2s+2$$

代入方程 $N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=0$有：$s^2-2s-4=0$

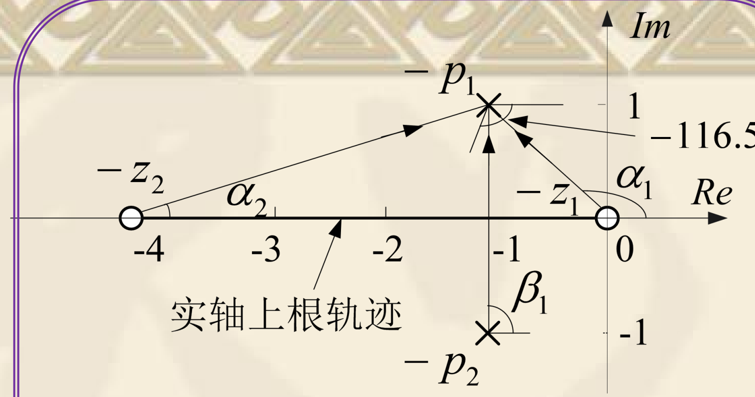
$$s_1\approx-1.24,\quad s_2\approx3.24$$

s_1=-1.24是根轨迹的会合点，s_2=3.24不是根轨迹上的点，应该舍去。会合点对应的根轨迹增益为：

$$k_{gd}=-\frac{D'(s)}{N'(s)}\Big|_{s1=-1.24}=-\frac{2s+2}{2s+4}\Big|_{s1=-1.24}\approx0.316$$

- 出射角:

先求开环极点$-p_1$处的出射角。画出各个开环零点和极点（除了$-p_1$）到$-p_1$的向量，并标出每个向量的相角，分别为α_1, α_2, β_1。



$$\frac{k_g s(s+4)}{s^2+2s+2}=-1$$

$$\alpha_1=135^\circ$$

$$\alpha_2=\mathrm{tg}^{-1}(1/3)\approx 18.43^\circ$$

$$\beta_1=90^\circ$$

出射角为:

$$\theta_{p1}=\pi+\sum_{j=1}^{2}\alpha_j-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{2}\beta_i\approx 180^\circ+135^\circ+18.43^\circ-90^\circ=243.43^\circ$$

或$\theta_{p1}\approx -116.57^\circ$ 根据对称性，可得：$\theta_{p2}\approx 116.57^\circ$

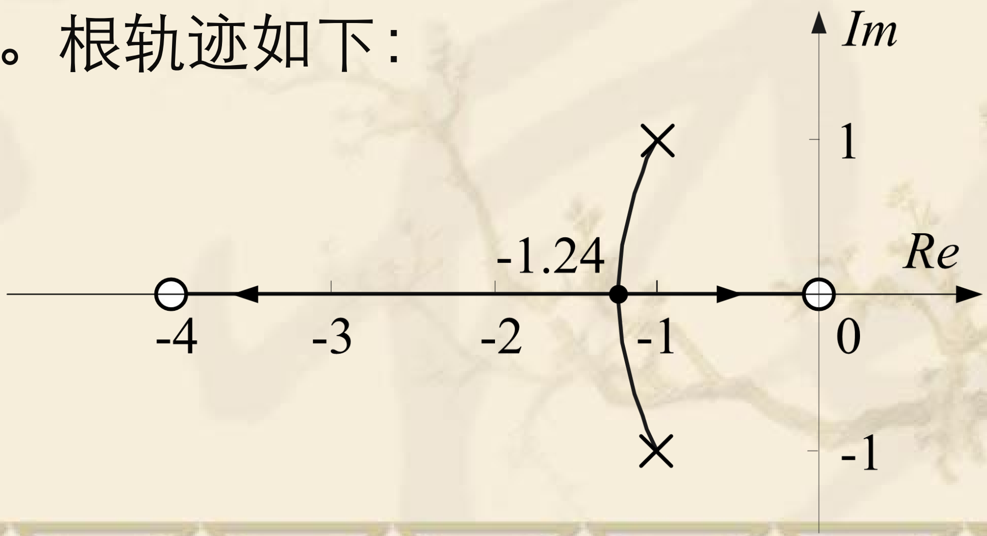
- 根轨迹与虚轴的交点:

系统的闭环特征方程为: $(1+k_g)s^2+(2+4k_g)s+2=0$

劳斯阵列如下:

$$
\begin{array}{c|cc}
s^2 & 1+k_g & 2 \\
s^1 & 2+4k_g & 0 \\
s^0 & 2 & 0
\end{array}
$$

由于$k_g>0$，劳斯阵列中没有全为零的行。所以，根轨迹与虚轴没有交点。根轨迹如下:



[例4.3.2]系统的开环传递函数为:

$$G_k(s)=\frac{k_g}{s(s+2)[(s+3)^2+16]}$$

试绘制系统的根轨迹。

解: 对于本例系统的根轨迹，题目中没有指明k_g的取值范围。暂且按180°根轨迹绘制规则进行绘制。

- 标出四个开环极点：0，-2，-3±j4。有四条根轨迹。
- 实轴上根轨迹区间是：[-2，0]。
- 渐近线倾角:$\varphi=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}=\pm\dfrac{\pi}{4},\pm\dfrac{3\pi}{4}$,与实轴的交点为:

$$-\sigma=-\frac{\sum p_j-\sum z_i}{n-m}=-\frac{0+2+6}{4}=-2$$

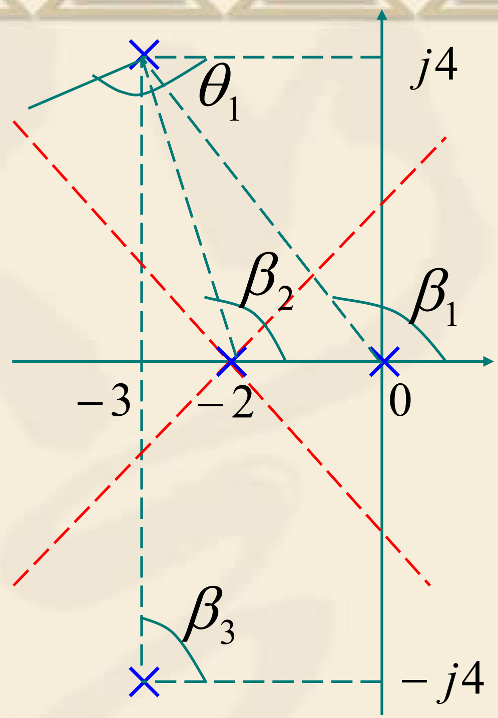
- -3+4j处的出射角θ_1：

$$\theta_1 = \pi - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$$

$$= \pi - (\pi - \mathrm{tg}^{-1}\frac{4}{3} + \pi - \mathrm{tg}^{-1}4 + 90^\circ) = -141.9^\circ$$

根据对称性，可知-3-j4处的出射角θ_2为:

$$\theta_2 = 141.9^\circ$$



- 与虚轴的交点：闭环特征方程为:

$s^4 + 8s^3 + 37s^2 + 50s + k_g = 0$ 劳斯阵为:

$$\begin{array}{l|ccc}
s^4 & 1 & 37 & k_g \\
s^3 & 8 & 50 & 0 \\
s^2 & 30.75 & k_g & 0 \\
s^1 & \dfrac{1537.5 - 8k_g}{30.75} & 0 & 0 \\
s^0 & k_g & 0 & 0
\end{array}$$

当劳斯阵某一行全为零时，有共轭虚根。这时，$k_g = 192.2$ 。

辅助方程为: $30.75s^2 + 192.2 = 0$，

解得共轭虚根为：$s_{1,2} = \pm \mathrm{j}2.5$

即为根轨迹与虚轴的交点。

■ 会合点与分离点（重根点）：分离角为$\theta_d = \frac{\pi}{2}$

由$N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$ 得: $4s^3 + 24s^2 + 74s + 50 = 0$

由上式可求出分离点。但高阶方程求解困难，可采用下述近似方法:

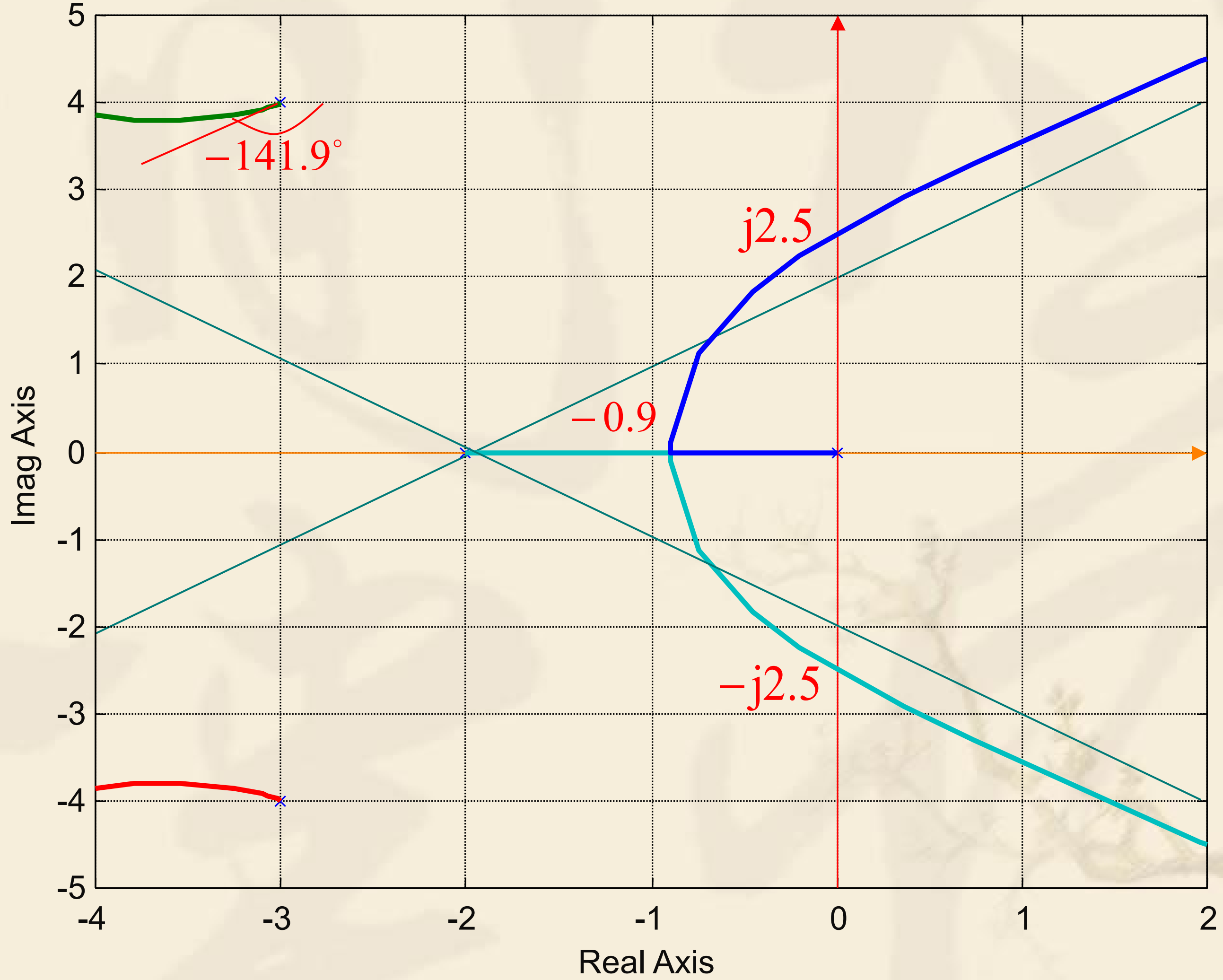
$$k_g = -(s^4 + 8s^3 + 37s^2 + 50s)$$

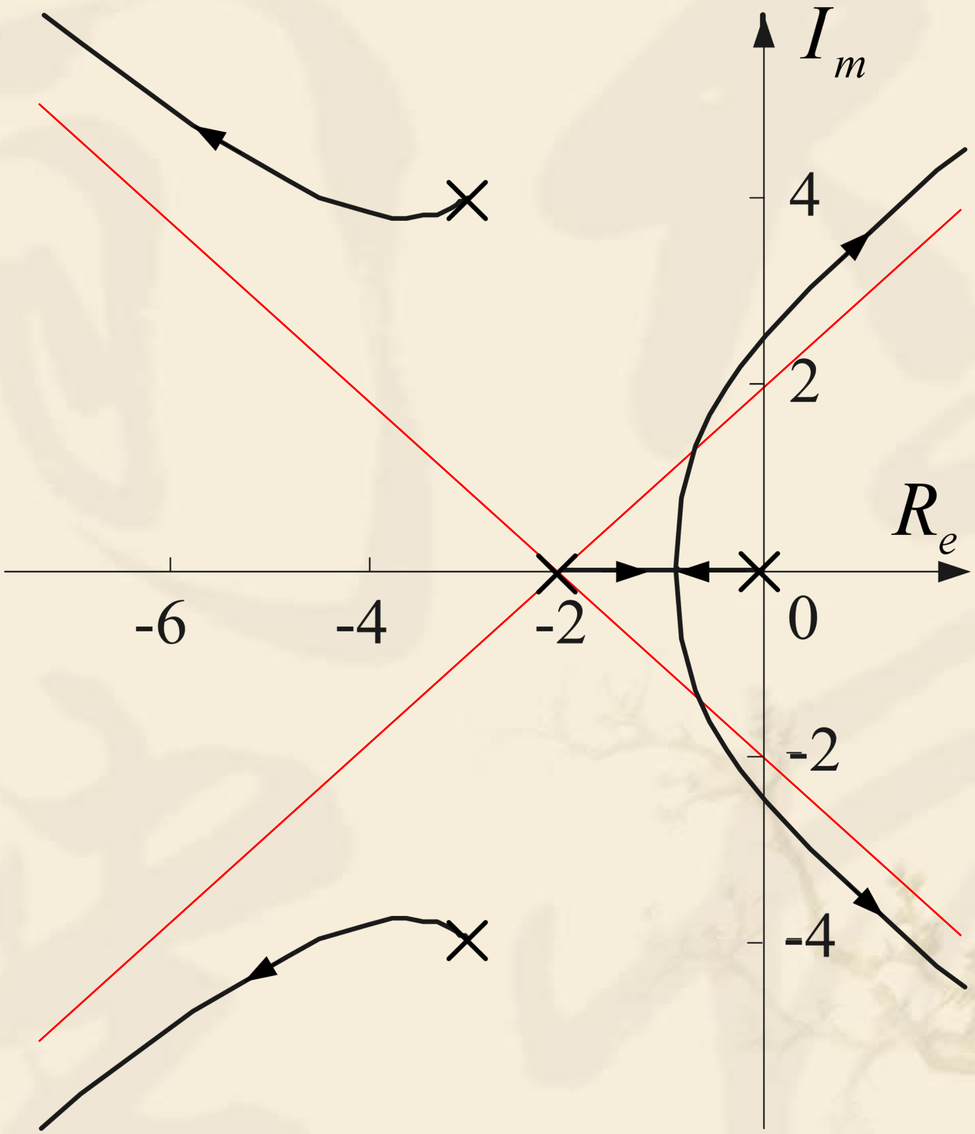
当分离点在负实轴上，s在实数范围内变化时，k_g存在极值。故k_g（当实数时）最大时为分离点。

s	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.2	-1.4	-1.6	-1.8	-2.0
k_{gd}	8.58	14.57	18.28	20.01	20.0	18.47	15.59	11.49	6.28	

可见分离点在-0.8~-1.0之间，近似取-0.9(精确值-0.8981)。

■ 绘制根轨迹，如下图所示。




I_m
4
2
R_e
-6
-4
-2
0
-2
-4

[例4.3.3]已知负反馈控制系统的开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{k_g(s+1)(s+3)}{s^3}$$

试画出当$-\infty<k_g<+\infty$时的根轨迹。

解： 1．当$0<k_g<+\infty$时，绘制180°等相角根轨迹。

- 系统的开环极点和零点分别为：

  $$-p_1 = -p_2 = -p_3 = 0 \qquad -z_1 = -1, -z_2 = -3$$

- 根轨迹的分支数：根轨迹有三条分支，分别起始于开环极点 $-p_1, -p_2, -p_3$ ，终止于开环零点 $-z_1, -z_2$和无穷远处。

- 实轴上的根轨迹区间为(-∞，-3]，[-1，0]

■ 渐近线：由于开环极点数-开环零点数=1，所以根轨迹有一条渐近线。

渐近线的倾角为：$\varphi = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m} = \pi$

与实轴的交点为：

$$-\sigma = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = -\frac{0-(1+3)}{1} = 4$$

■ 分离（会合）点：

由式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{s+p_i} = \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{s+z_j}$ 可求得：$s_1 = -6.65$，$s_2 = -1.35$

$s_1 = -6.65$ 在根轨迹上，是会合点。$s_2 = -1.35$ 不在根轨迹上，应舍去。

$$k_{gd} = -\frac{D'(s)}{N'(s)}\bigg|_{s_1=-6.65} = -\frac{3s^2}{2s+4}\bigg|_{s_1=-6.65} \approx 14.27$$

- 根轨迹与虚轴的交点：闭环系统的特征方程为：

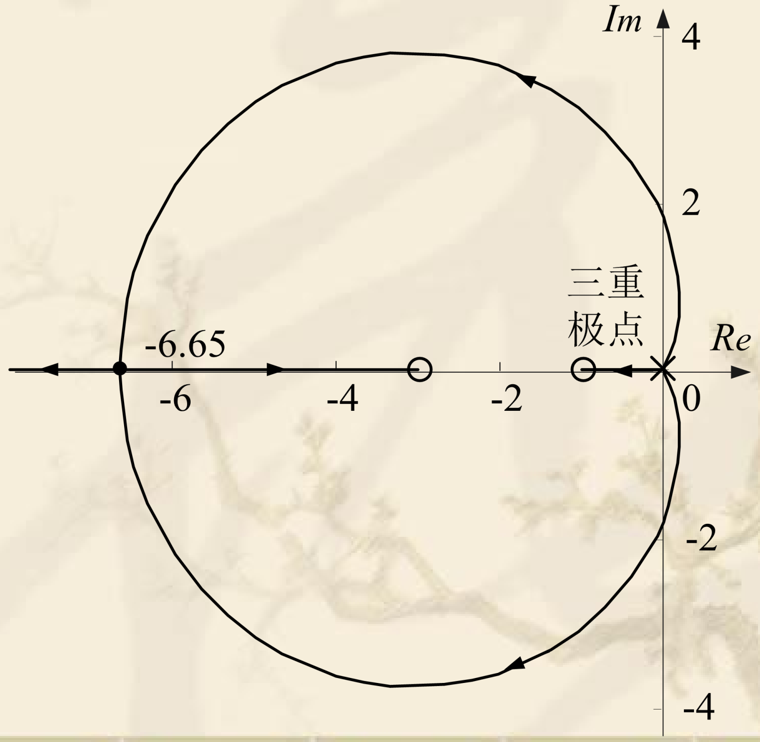
$$s^3 + k_g s^2 + 4k_g s + 3k_g = 0$$

将s=jω代入其中并整理得：$-k_g\omega^2 + 3k_g = 0$

$$-\omega^3 + 4k_g\omega = 0$$

解得：$k_g = 0, 3/4;\quad \omega = 0, \pm\sqrt{3}$

- 计算出射角？（与无重极点的出射角计算不同，大家可参考第二节讲义P34页内容）。
- 其实，通过已计算出的信息，可以粗略地分析根轨迹的走向。



2．当 $-\infty<k_g<0$ 时，绘制0°等相角根轨迹。

- 实轴上的根轨迹区间为：[-3，-1]和[0，+∞)
- 渐近线：开环极点数-开环零点数=1，则该根轨迹有一条渐近线。渐近线与实轴交点不变，如1。渐近线的倾角为：

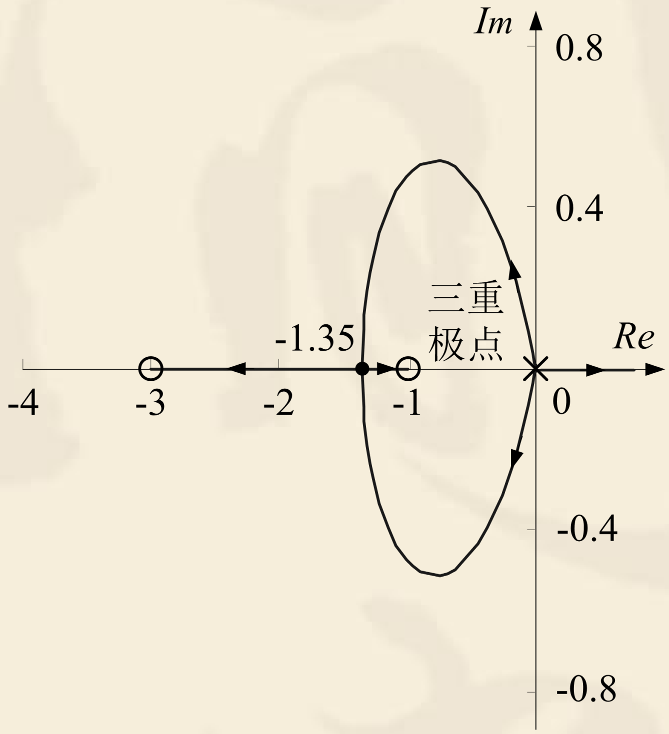
$$\varphi=\frac{2k\pi}{n-m}=0^{\circ}$$

- 分离（会合）点：计算方法如1。s=-6.65不在根轨迹上，应该舍去。s=-1.35是会合点。
- 根轨迹与虚轴的交点：闭环系统的特征方程:

$$s^3+k_g s^2+4k_g s+3k_g=0$$

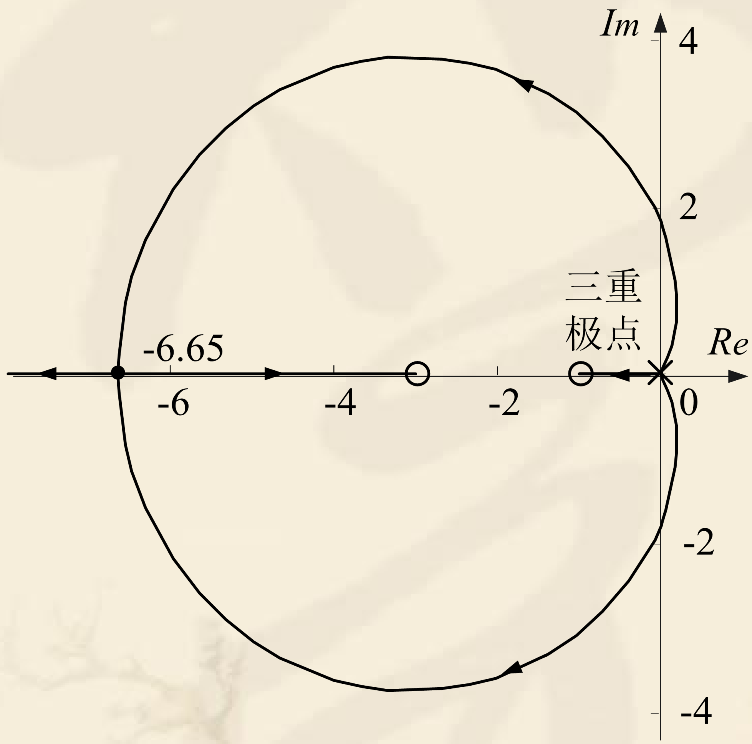
s^3	1	$4k_g$
s^2	k_g	$3k_g$
s^1	$4k_g-3$	0
s^0	$3k_g$	

劳斯阵列中没有全为零的行（$k_g<0$时）。故根轨迹与虚轴没有交点。



当 $-\infty<k_g<0$ 时

0°等相角根轨迹图

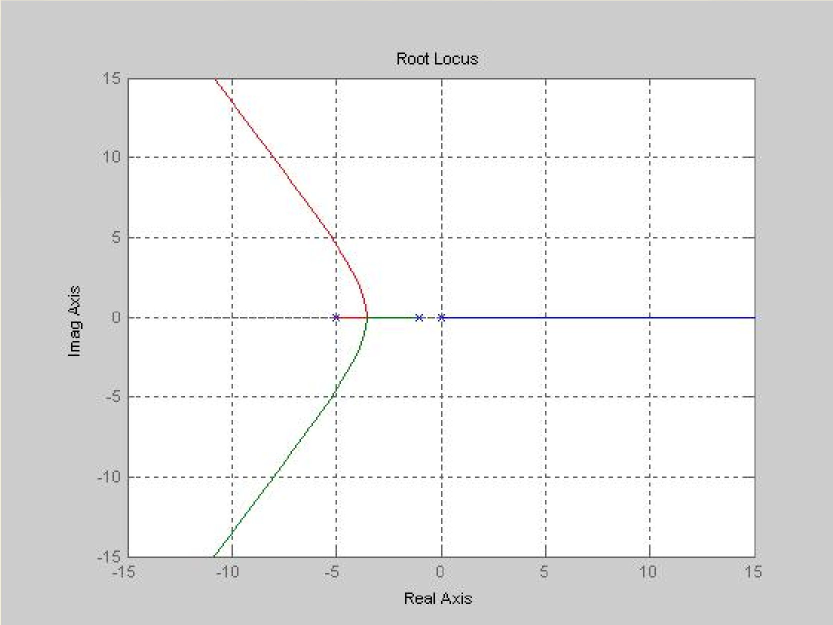


当 $0<k_g<+\infty$ 时

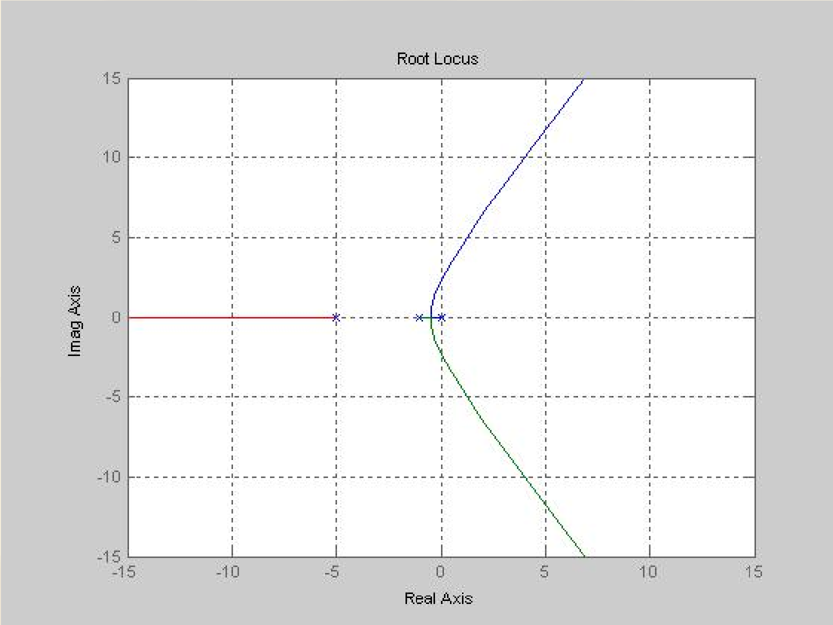
180°等相角根轨迹图

[补例1]根据如下系统的开环传递函数，分别绘制正、负反馈根轨迹图。

$$G_k(s)=\frac{k_g}{s(s+1)(s+5)}$$

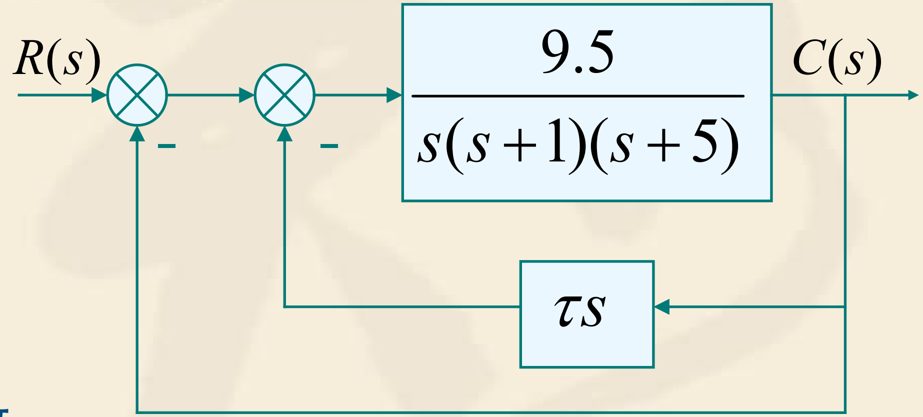


正反馈（0°）根轨迹图



负反馈（180°）根轨迹图

[补例2]：系统结构如图所示，绘制以τ为参变量的根轨迹，并讨论速度反馈对系统阶跃响应的影响。



解： 1. 先求等效开环传递函数。

此时系统特征方程为

$$1+GH=1+\frac{9.5(1+\tau s)}{s(s+1)(s+5)}=0$$

$$\Rightarrow s(s+1)(s+5)+9.5(1+\tau s)=0 \quad \Rightarrow \quad s^3+6s^2+5s+9.5+9.5\tau s=0$$

$$\Rightarrow 1+\frac{9.5\tau s}{s^3+6s^2+5s+9.5}=0$$

令 $\tau^*=9.5\tau$，等效开环传函为

$$G_k^*=\frac{\tau^* s}{s^3+6s^2+5s+9.5}=\frac{\tau^* s}{(s+5.4)(s+0.3-\mathrm{j}1.292)(s+0.3+\mathrm{j}1.292)}$$

2.画参量根轨迹

$$G_k^* = \frac{\tau^* s}{(s+5.4)(s+0.3-j1.292)(s+0.3+j1.292)}$$

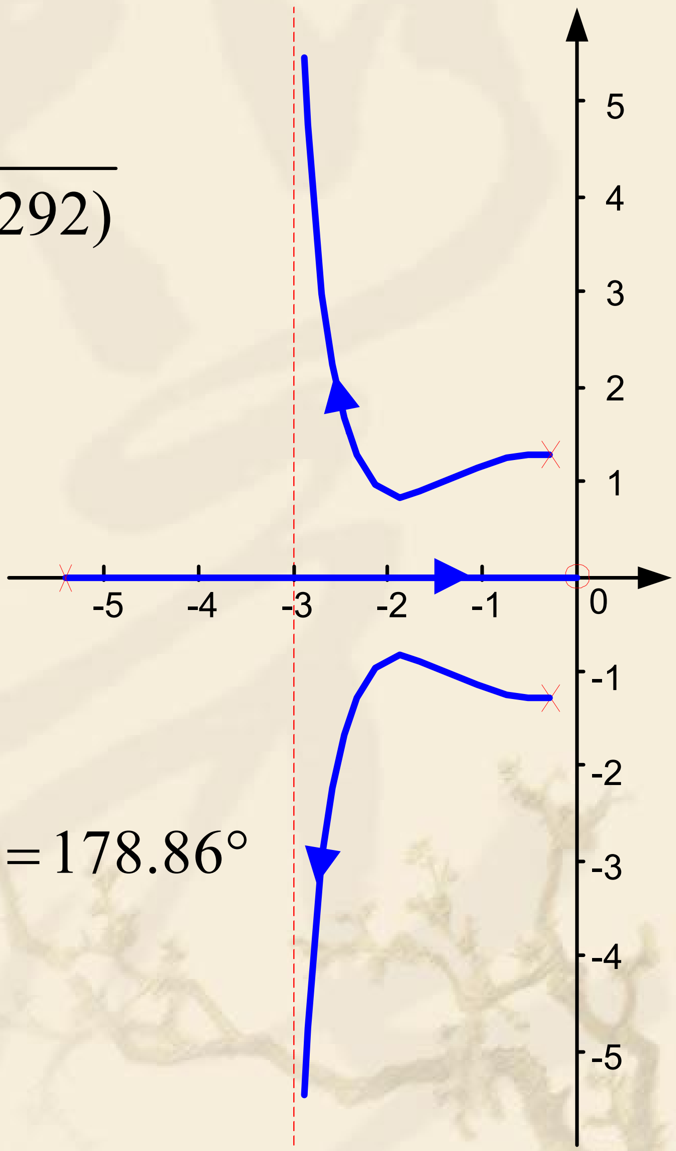
① 开环极点为 -5.4、 $-0.3 \pm j1.292$，
开环零点为0。

② 渐近线2条：
$\sigma = -3, \quad \theta = \pm 90°$

③ 出射角：

$$\theta_{2c} = \pi + (\pi - \mathrm{tg}^{-1}\frac{1.292}{0.3}) - \mathrm{tg}^{-1}\frac{1.292}{5.1} - 90° = 178.86°$$

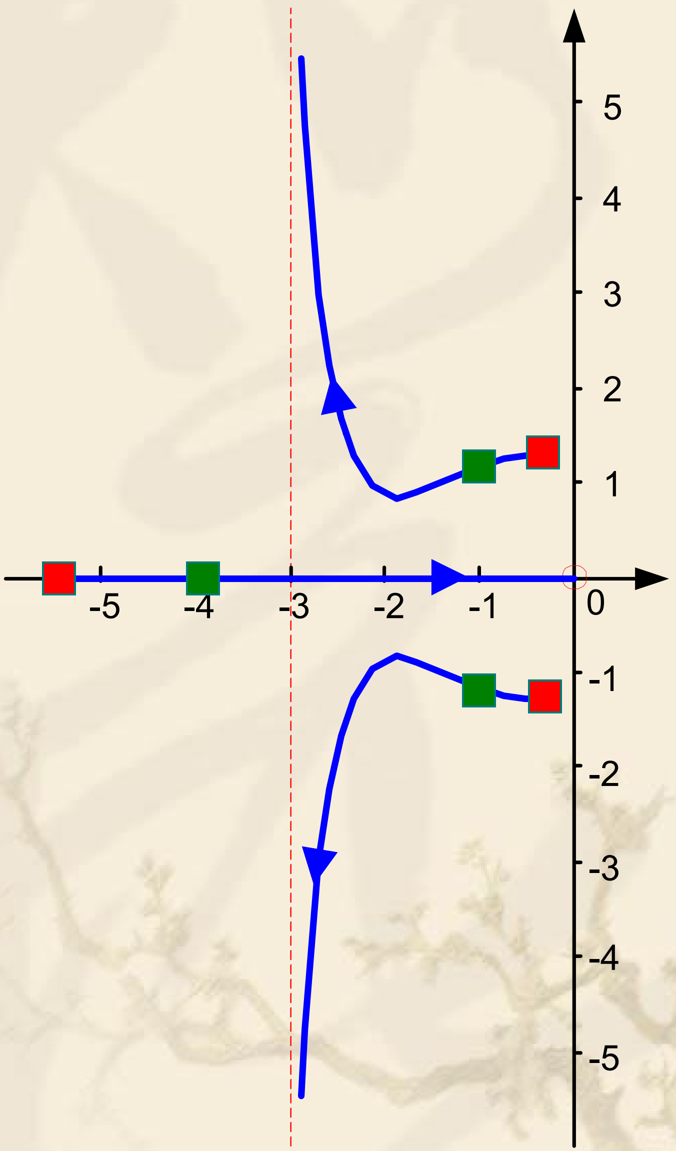
$$\theta_{3c} = -178.86°$$



3.讨论

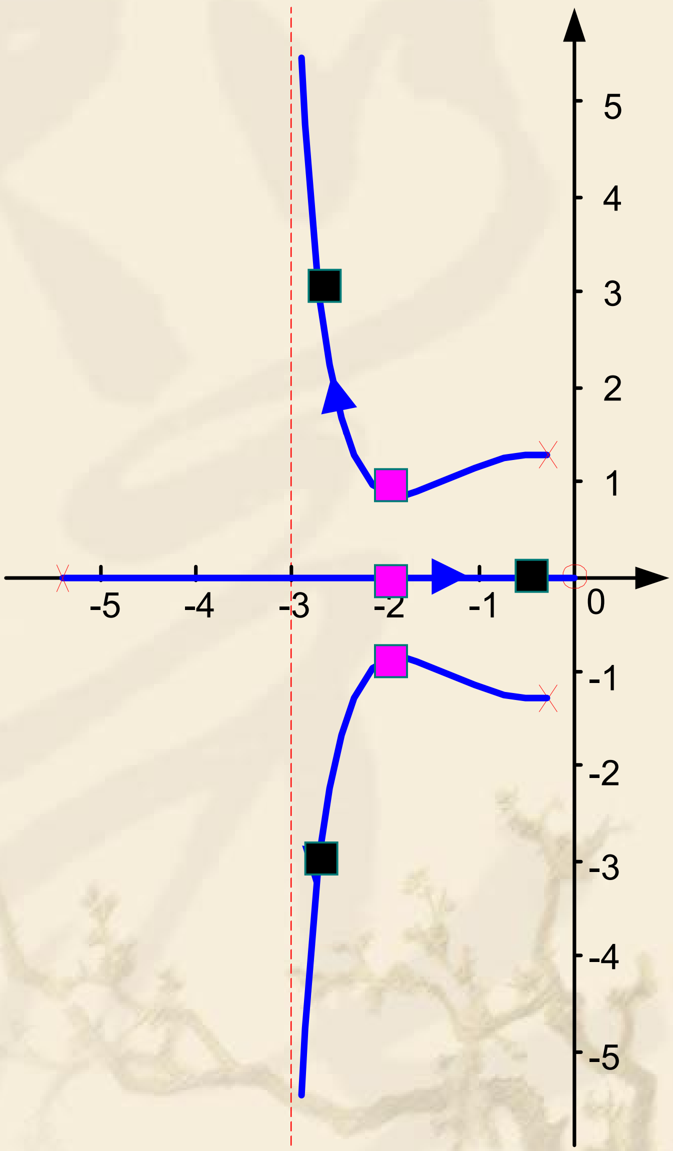
- $\tau^*=0$，此时闭环极点为等效开环极点，即－5.4、－0.3±j1.292，此时5.4/0.3=18，所以－0.3±j1.292就是主导极点，整个系统呈现二阶系统特性。此时：$\zeta=0.226$，$\delta\%=48.2\%$，$t_s=10s$（Δ=5时）

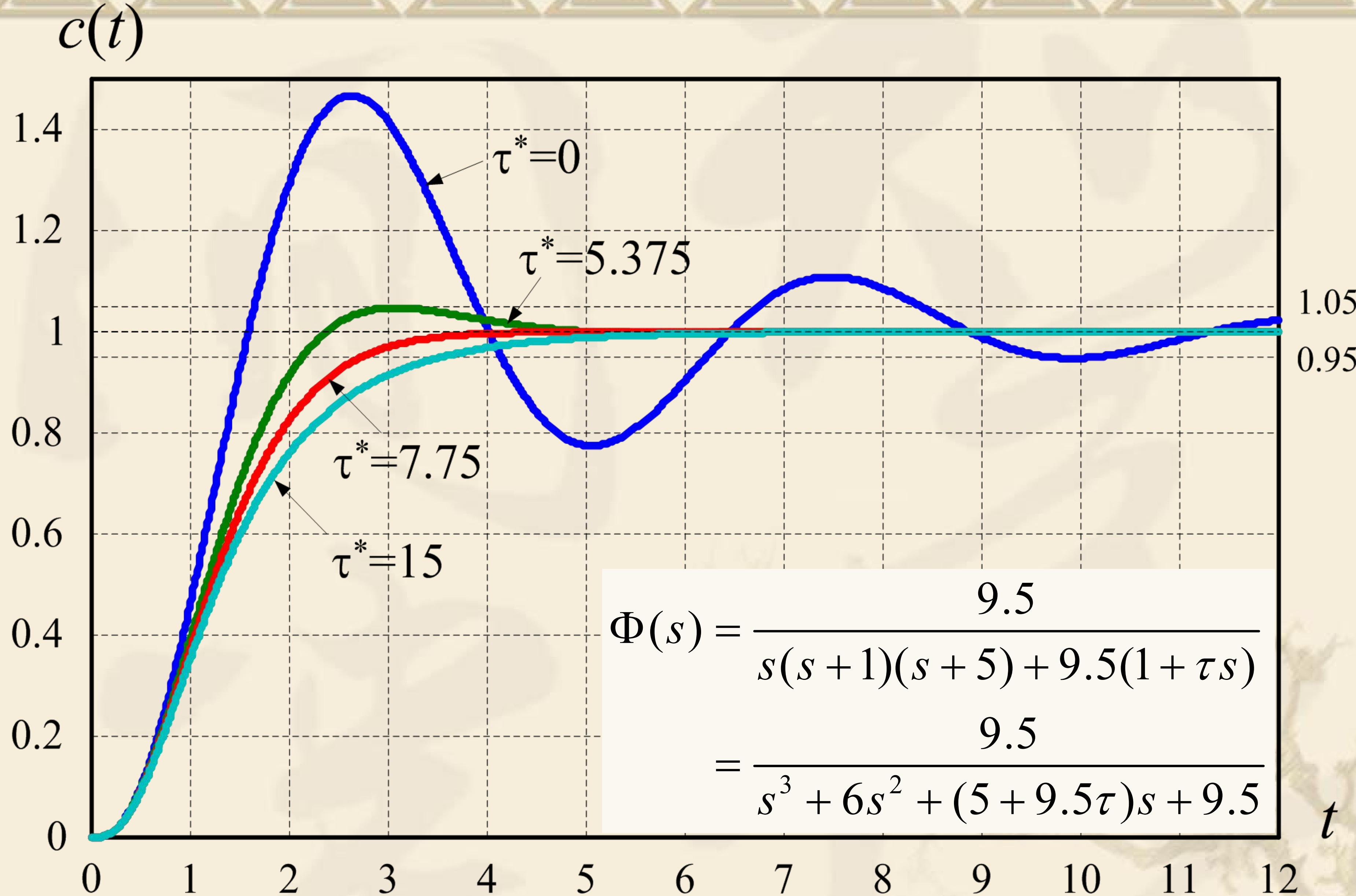
- $\tau^*=5.375$，此时闭环极点为－4、－1±j1.17，此时4/1=4，若近似为二阶系统，则：$\zeta=0.65$，$\delta\%=6.8\%$，$t_s=3s$ （Δ=5时）



- $\tau^*=7.75$，此时闭环极点为-2、$-2\pm j0.866$，此时2/2=1，已不能简化为低阶系统。

- $\tau^*=15$，此时闭环极点为-0.56 、-2.72±j3.1，此时2.72/0.56=4.9，系统近似呈现一阶系统特性。

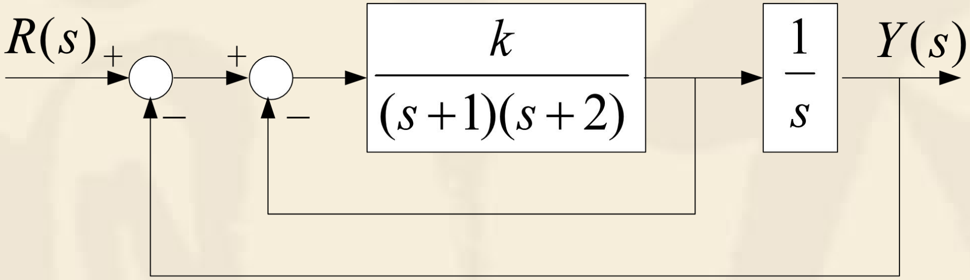




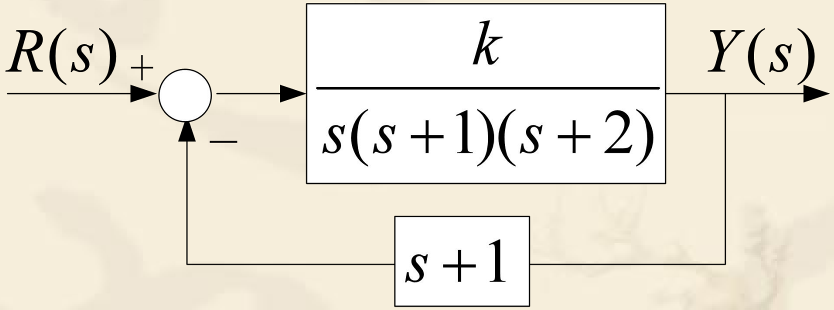
$$\Phi(s) = \frac{9.5}{s(s+1)(s+5)+9.5(1+\tau s)}$$

$$= \frac{9.5}{s^3+6s^2+(5+9.5\tau)s+9.5}$$

[例4.3.5] 控制系统的方块图如图所示，试绘制系统的根轨迹。



[解]将系统的方块图作等效变换，如下图所示。



其开环传递函数为:

$$G_{k1}(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

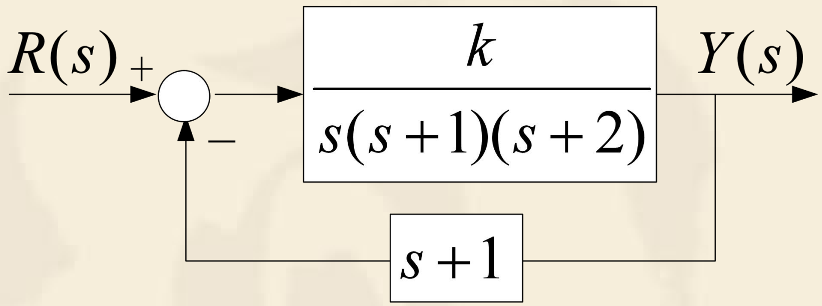
上式具有公因子$s+1$，可以互相抵消。抵消后的开环传递函数:

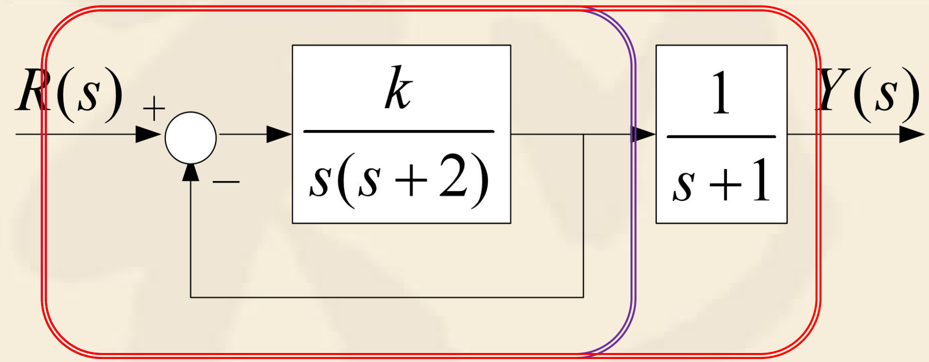
$$G_{k2}(s) = \frac{k}{s(s+2)}$$

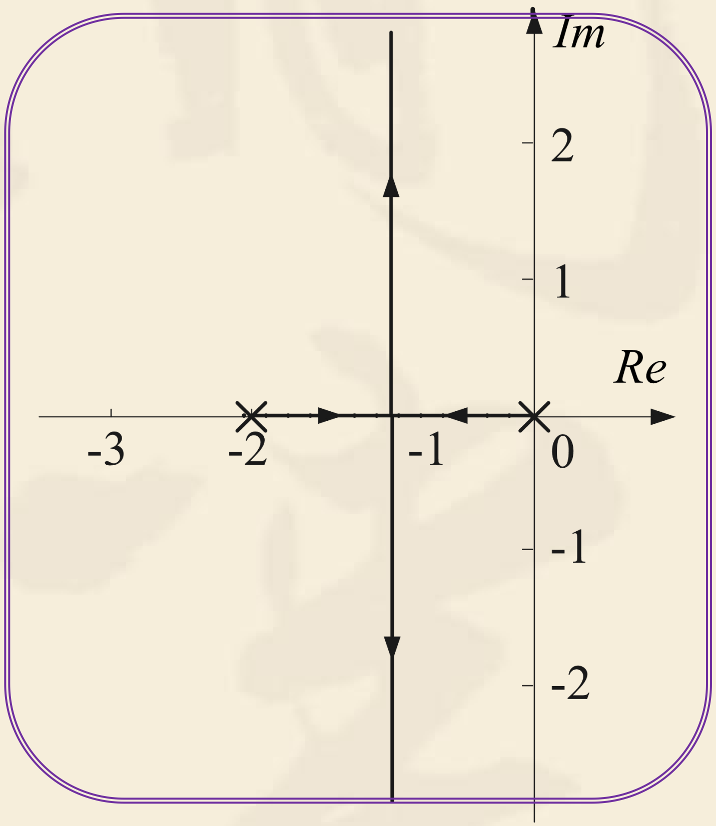
$$\boxed{G_{k1}(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+1)(s+2)}}$$

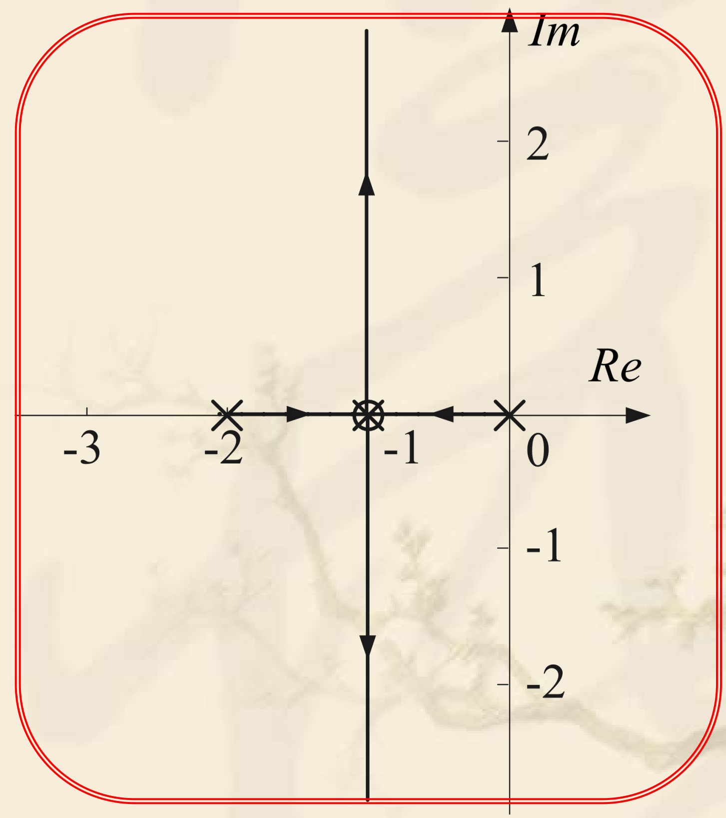
公因子$(s+1)$相消前后绘制的根轨迹与相消前是不同的，相消后系统的特征方程阶次减小一阶。这时的根轨迹图不能表示系统的全部闭环极点，只是表示了相消后剩余的闭环极点。从$G_{k1}(s)$中相消掉的开环极点-1就是系统的闭环极点。(可自行推演一下)

为了得到系统的全部闭环极点，必须将开环传递函数$G_{k1}(s)$中相消掉的开环极点-1（也是闭环极点），加到由$G_{k2}(s)$绘制出根轨迹图中得到的闭环极点中去。


$R(s)$
+
−
$\frac{k}{s(s+1)(s+2)}$
$Y(s)$
$s+1$


$R(s)$
+
−
$\frac{k}{s(s+2)}$
$\frac{1}{s+1}$
$Y(s)$


Im
Re
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
0


Im
Re
2
1
-1
-2
-3
-2
-1
0

有点不清楚？那就不做相消，直接绘制根轨迹：

$$\boxed{G_{k1}(s)=\frac{k(s+1)}{s(s+1)(s+2)}}$$

1、开环极点：0，-1，-2。开环零点：-1

2、实轴上的根轨迹：[-2，0]

3、渐近线：有两条

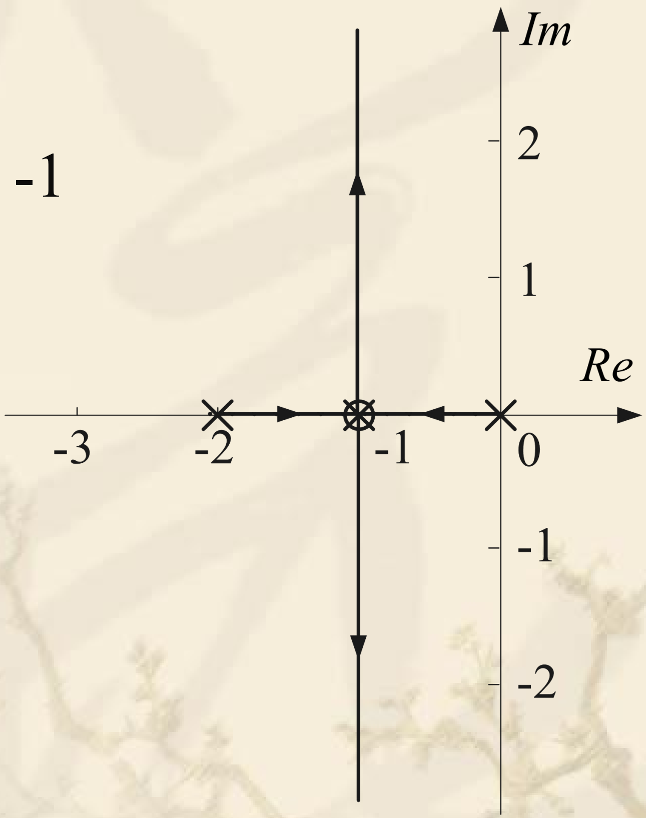
倾角：$\theta=\pm 90^{\circ}$

交点：$-\sigma=-1$

4、分离会合点：-1

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{s+p_i}=\sum_{j=1}^{1}\frac{1}{s+z_j}$$

5、与虚轴交点：无



小结

- 手工绘制180度根轨迹的规则与步骤;
- 手工绘制0度根轨迹的规则与步骤;
- 参量根轨迹的绘制步骤;
- 180度根轨迹和0度根轨迹的关系。

作业：4.6，4.8（只做 $G_k(s)=\dfrac{k_g(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$ ），4.9