第八讲 特征值分析

贺丽君
信息与通信工程学院
Email: lijunhe@mail.xjtu.edu.cn
2023-04

内容提要

- 为什么引入特征值分析
- 特征值与特征向量
- 对角化与Jordan标准形
- 特征值分析与差分/微分方程

内容提要

- 为什么引入特征值分析
- 特征值与特征向量
- 对角化与Jordan标准形
- 特征值分析与差分/微分方程

为什么引入特征值分析 (1)

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

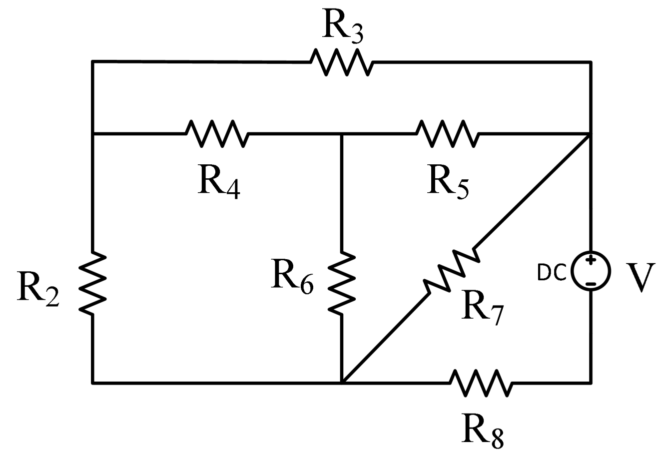
$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[2N-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h[N-1] & h[N-2] \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h[N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

y=Ax

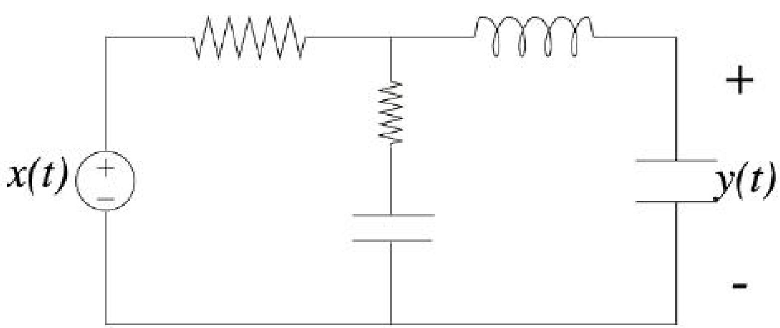
线性方程组		特征值分析
A$\mathbf{x}$=b	⟹	**Ax=$\mathbf{b}$**
信号检测或系统辨识问题		响应求解问题

为什么引入特征值分析 (2)

Ax=b ⇒ 描述系统的稳态特征



Ax=b无法揭示系统的动态行为



$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{bmatrix}\quad \mathbf{u}_0=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\quad \mathbf{u}_{100}=?$$

动态电路分析

人口迁移问题

特征值分析能够揭示系统的动态行为

内容提要

- 为什么引入特征值分析
- 特征值与特征向量
- 对角化与Jordan标准形
- 特征值分析与差分/微分方程

特征值与特征向量(Eigenvalue/vector)

- **定义**

设A是一个n阶方阵，如果存在一个复数λ和一个非零向量x，使得

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$$

则称λ为矩阵A的特征值，x为A的对应于(或称属于)λ的特征向量。

$$e^{st}\rightarrow y(t)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]e^{st}$$

$$e^{st}\rightarrow H(s)e^{st}$$

特征值与特征向量的物理含义？

特征值与特征向量的计算

- 特征值的计算

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x} \Rightarrow \left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\underline{\det\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)}=0$$

特征方程

特征多项式

解空间：特征子空间

- 特征向量的计算

求解齐次线性方程组$\left(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$，找出全部特解，即得对应于$\lambda$的线性无关的特征向量。

属于不同特征值的特征向量是线性无关的

关于特征值的几条性质

- 如果A是奇异矩阵，则$\lambda=0$是A的特征值

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\Rightarrow \text{存在非零解}\Rightarrow \mathbf{Ax}=\mathbf{0x}$$

关于特征值的几条性质

- 如果A是奇异矩阵，则λ=0是A的特征值
- 如果λ是A的特征值，则λ^k是A^k的特征值

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{AAx} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{A}^2\mathbf{x} = \lambda\mathbf{Ax} = \lambda\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$$

关于特征值的几条性质

- 如果A是奇异矩阵，则λ=0是A的特征值
- 如果λ是A的特征值，则λ^k是A^k的特征值
- 如果λ是可逆矩阵A的特征值，则λ非零且λ^{-1}是A^{-1}的特征值

$$\text{若}\lambda=0\text{，}\mathbf{A}\mathbf{x}=0\mathbf{x}\text{存在非零解}\Rightarrow\mathbf{A}\text{非可逆}$$

$$\text{与}\mathbf{A}\text{可逆矛盾}\Rightarrow\lambda\neq 0$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\lambda\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\Rightarrow\frac{1}{\lambda}\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

关于特征值的几条性质

- 如果A是奇异矩阵，则λ=0是A的特征值
- 如果λ是A的特征值，则λ^k是$\mathbf{A}^k$的特征值
- 如果λ是可逆矩阵A的特征值，则λ非零且λ^{-1}是$\mathbf{A}^{-1}$的特征值
- 三角矩阵的特征值等于其对角线元素，I的特征值是1

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots\cdots \\ 0\ a_{22}\cdots \\ \ldots\quad a_{nn} \end{bmatrix},\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0,\ \mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda\cdots\cdots \\ 0\ a_{22}-\lambda\cdots \\ \ldots\quad a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

关于特征值的几条性质

- 如果A是奇异矩阵，则$\lambda=0$是A的特征值
- 如果λ是A的特征值，则λ^k是A^k的特征值
- 如果λ是可逆矩阵A的特征值，则λ非零且λ^{-1}是A^{-1}的特征值
- 三角矩阵的特征值等于其对角线元素，I的特征值是1
- 矩阵A的全部特征值之积等于矩阵A的行列式，全部特征值之和等于矩阵A的对角线元素之和(A的迹，trace)
- 一般来说，A+B的特征值不等于A与B的特征值之和，AB的特征值不等于A与B的特征值之积

几个特殊矩阵的特征值

- 投影矩阵

$$\mathbf{P}=\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{Px}=\lambda\mathbf{x}\\&\mathbf{x}\in C(A),\mathbf{Px}=\mathbf{x},\lambda=1\\&\mathbf{x}\perp C(A),\mathbf{Px}=\mathbf{0},\lambda=0\end{aligned}}$$

特征值：1,0

- 反射矩阵

$$\mathbf{Q}=\mathbf{I}-2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{x}\parallel\mathbf{u},\mathbf{Qx}=-\mathbf{x},\lambda=-1\\&\mathbf{x}\perp\mathbf{u},\mathbf{Qx}=\mathbf{x},\lambda=1\end{aligned}}$$

特征值：-1,+1

- 90°旋转矩阵

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

特征值：i,-i

内容提要

- 为什么引入特征值分析
- 特征值与特征向量
- 对角化与Jordan标准形
- 特征值分析与差分/微分方程

问题的提出

$$\mathbf{Ax=y}$$

对于任意输入x，线性系统A的响应y是什么？

- 信号分解

假设n阶方阵A有n个线性无关的特征向量，则有：

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n$$

线性空间的特征基

用矩阵语言描述：

特征向量矩阵S

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \mathbf{c} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$$

输入信号在特征基上的投影

问题的提出

$$\mathbf{Ax=y}$$

对于任意输入x，线性系统A的响应y是什么？

- 系统对各特征向量分别响应

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$$

$$c_i\mathbf{x}_i \xrightarrow{\mathbf{A}} \lambda_i c_i \mathbf{x}_i$$

用矩阵语言描述：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda S^{-1} x}$$

问题的提出

$$\mathbf{Ax=y}$$

对于任意输入x，线性系统A的响应y是什么？

- 将各部分响应相加，得到y

$$\mathbf{y} = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\lambda_n\mathbf{x}_n$$

$$\mathbf{S^{-1}AS = \Lambda}$$

用矩阵语言描述：

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{S\Lambda S^{-1}x}$$

矩阵A

问题的提出

- 信号分解

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int X(jw)e^{jwt}dw$$

$$\mathbf{x} \qquad \sum \quad c_i \qquad x_i$$

- 系统对各特征向量分别响应

$$\frac{1}{2\pi}X(jw)e^{jwt} \rightarrow \frac{1}{2\pi}X(jw)H(jw)e^{jwt}$$

$$c_i x_i \qquad\qquad \lambda_i c_i x_i$$

- 将各部分响应相加，得到y

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int X(jw)H(jw)e^{jwt}dw \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{y}=\sum_i \lambda_i c_i \mathbf{x}_i$$

矩阵的对角化

充要条件：每个特征值的代数重数等于几何重数

➢ 矩阵对角化定理

假设n阶方阵A有n个线性无关的特征向量$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots\mathbf{x}_n$，将它们作为列向量构造特征向量矩阵S，则$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$是对角阵，且对角线元素等于A的特征值，将其称为特征值矩阵，即：

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}=\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Jordan标准形

假设n阶方阵A有s个线性无关的特征向量，则一定存在可逆矩阵P，使得

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_s \end{bmatrix}$$

Jordan标准形

其中，每一个分块$\mathbf{J}_i$称为一个若当块 (Jordan Block)

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Jordan标准形举例

假设n阶方阵A阶数为$n=6$，特征值 λ_1，λ_2，λ_3

λ_1	λ_2	λ_3
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
代数重数**2**	代数重数**1**	代数重数**3**
几何重数**1**	几何重数**1**	几何重数**2**

代数重数=若当块的阶数；几何重数=若当块的个数

代数重数>几何重数时，所有若当块的阶数之和等于代数重数

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\lambda_2} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_3 & 1 \\ 0 & \lambda_3 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\lambda_3} \end{bmatrix}$$

Jordan Block的性质

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

- 若$\mathbf{J}_i$是k阶若当块，则它只有一个k重特征值λ_i，与该特征值对应的唯一特征向量是$[1\ 0\ \ldots\ 0]^T$
- k阶若当块$\mathbf{J}_i$可以表示成如下形式：

$$\mathbf{J}_i = \lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{N}_i)^k = \mathbf{0}$：幂零矩阵

Jordan Block的性质

- 若$\mathbf{J}_i$是k阶若当块，则它只有一个k重特征值λ_i，与该特征值对应的唯一特征向量是$[1\ 0\ \ldots\ 0]^T$

$$\mathbf{J}_i\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x} \Rightarrow \left(\mathbf{J}_i - \lambda\mathbf{I}\right)_i \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{N}_i\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{N}_i = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{F} & \qquad\mathbf{I}\qquad \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{N}_i\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{N}_i$自由列的个数只有一个，特解是唯一的 $c[1\ 0\ \ldots\ 0]^T$

Jordan Block的性质

$$\mathbf{J}_i = \lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{I} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{N}_s \end{bmatrix}$$

对于任意方阵A，都可以通过可逆线性变换$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$将其化为**对角阵+幂零阵**的形式。

内容提要

- 为什么引入特征值分析
- 特征值与特征向量
- 对角化与Jordan标准形
- 特征值分析与差分/微分方程

由线性常系数差分方程描述的系统

- 斐波那契数列(Fibonacci Sequence)

$F_{100} = ?$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13….. $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$

$$\begin{aligned} F_{k+2} &= F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} &= F_{k+1} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}}^{\mathbf{u}_k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}_k$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \mathbf{A}\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{A}^2\mathbf{u}_{k-2} \cdots \mathbf{A}^k\mathbf{u}_0 \\ &= \left(\mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}\right)\cdots\left(\mathbf{S}\Lambda\mathbf{S}^{-1}\right)\mathbf{u}_0 = \mathbf{S}\Lambda^k \overbrace{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_0}^{\mathbf{c}} \\ &= c_1\left(\lambda_1\right)^k \mathbf{x}_1 + c_2\left(\lambda_2\right)^k \mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\left(\lambda_n\right)^k \mathbf{x}_n \end{aligned}$$

通过增加方程的个数来降低差分方程的阶数

由线性常系数差分方程描述的系统

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13….. $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$

$$\begin{bmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{u}_k = c_1(\lambda_1)^k \mathbf{x}_1 + c_2(\lambda_2)^k \mathbf{x}_2 + \ldots + c_n(\lambda_n)^k \mathbf{x}_n$$

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0} \qquad \boxed{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618,\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618 \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \Longrightarrow \mathbf{u}_{100} = \frac{(\lambda_1)^{100}\mathbf{x}_1 - (\lambda_2)^{100}\mathbf{x}_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

主导项

特征值分析与线性常系数微分方程

➢ 线性常系数微分方程

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{u} \iff \begin{bmatrix} \dfrac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

◻ u为标量函数的情况

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = au \\ u(0) = u_0 \end{cases} \Longrightarrow u(t) = e^{at}u_0$$

特征值分析与线性常系数微分方程

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u} \iff \begin{bmatrix} \dfrac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- **A为对角阵的情况**

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{\Lambda u} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{u} \xRightarrow{\frac{du_i}{dt} = \lambda_i u_i} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} c_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} c_n \end{bmatrix}$$

特征值分析与线性常系数微分方程

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- A可以对角化的情况

$$\mathbf{u}(t)=c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1+\cdots+c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}$$

特征值决定系统稳定性

$$\mathbf{u}(0)=c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n$$

$\Updownarrow$ 解耦

$$\frac{d\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}\right)}{dt}=\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}\right) \Longrightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}c_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}c_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbf{u}=\mathbf{S}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}c_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}c_n \end{bmatrix}$$

特征值分析与线性常系数微分方程

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- A不可对角化的情况——引入**矩阵的指数函数**

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3}{2!}t^2 + \cdots = \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!} + \cdots\right) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

$\mathbf{u}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}(0)$ 是微分方程的解

矩阵的指数函数的性质

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{(\mathbf{A}t)^2}{2!}+\cdots+\frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}+\cdots$$

- 性质1：

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{\Lambda}t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

- 性质2：若$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，则$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$；特别地，$(e^{\mathbf{A}})^{-1}=e^{-\mathbf{A}}$
- 性质3：若存在可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{A}=\mathbf{PBP}^{-1}$，则 $e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{P}e^{\mathbf{B}t}\mathbf{P}^{-1}$

特征值分析与线性常系数微分方程

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{u} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}(0)$ 是微分方程的解

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\left(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N}\right)\mathbf{P}^{-1}$$

性质3 $\Rightarrow$

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{P}e^{(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})t}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}e^{\mathbf{N}t}\mathbf{P}^{-1}$$

性质2

$$=\mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\left(\mathbf{I}+\mathbf{N}t+\frac{(\mathbf{N}t)^2}{2!}+\cdots\right)\mathbf{P}^{-1}$$

只有有限项：幂零阵的性质

特征值分析与线性常系数微分方程

- 举例

矩阵A不可对角化

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \qquad \frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{u}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=1 \quad \mathbf{x}=c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}(0)$ 是微分方程的解

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{u}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}(0)=e^{\mathbf{I}t+(\mathbf{A}-\mathbf{I})t}\mathbf{u}(0)=e^{\mathbf{I}t}e^{(\mathbf{A}-\mathbf{I})t}\mathbf{u}(0)$$

$$=e^{t}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -t & t \\ -t & t \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} y(t)&=y(0)e^{t} \\ &+\left(y'(0)-y(0)\right)te^{t} \end{aligned}$$

谢谢大家！