



西安交通大学

网络教育资源建设工程



信号与系统

SIGNALS AND SYSTEMS

第3章 周期信号的傅里叶级数表示

Fourier Series Representation of Periodic Signals

本章内容:

I. 周期信号的频域分析

II. LTI系统的频域分析

III. 傅立叶级数的性质

3.0 引言 Introduction

❖ 时域分析方法的基础：

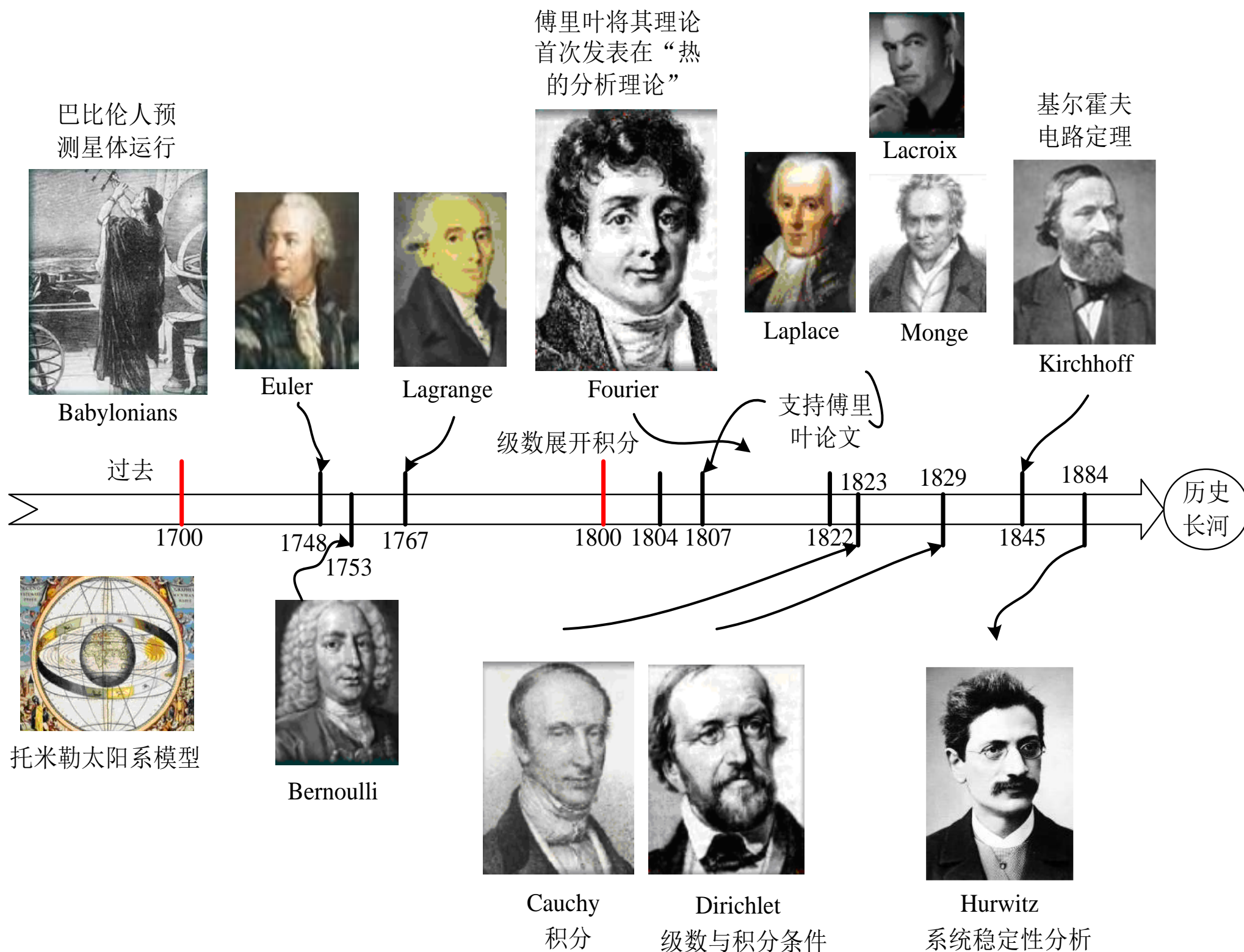
- 1) 信号在时域的分解。
- 2) LTI系统满足线性、时不变性。

❖ 从分解信号的角度出发，基本信号单元必须满足两个要求：

1. 本身简单，且LTI系统对它的响应能简便得到。
2. 具有普遍性，能够用以构成相当广泛的信号。

3.1历史的回顾 (A Historical Perspective)

任何科学理论，科学方法的建立都是经过许多人不懈的努力而来的，其中有争论，还有人人为之献出了生命。历史的经验告诉我们，要想在科学的领域有所建树，必须倾尽全力为之奋斗。今天我们将要学习的傅立叶分析法，也经历了曲折漫长的发展过程，刚刚发布这一理论时，有人反对，也有人认为不可思议。但在今天，这一分析方法在许多领域已发挥了巨大的作用。

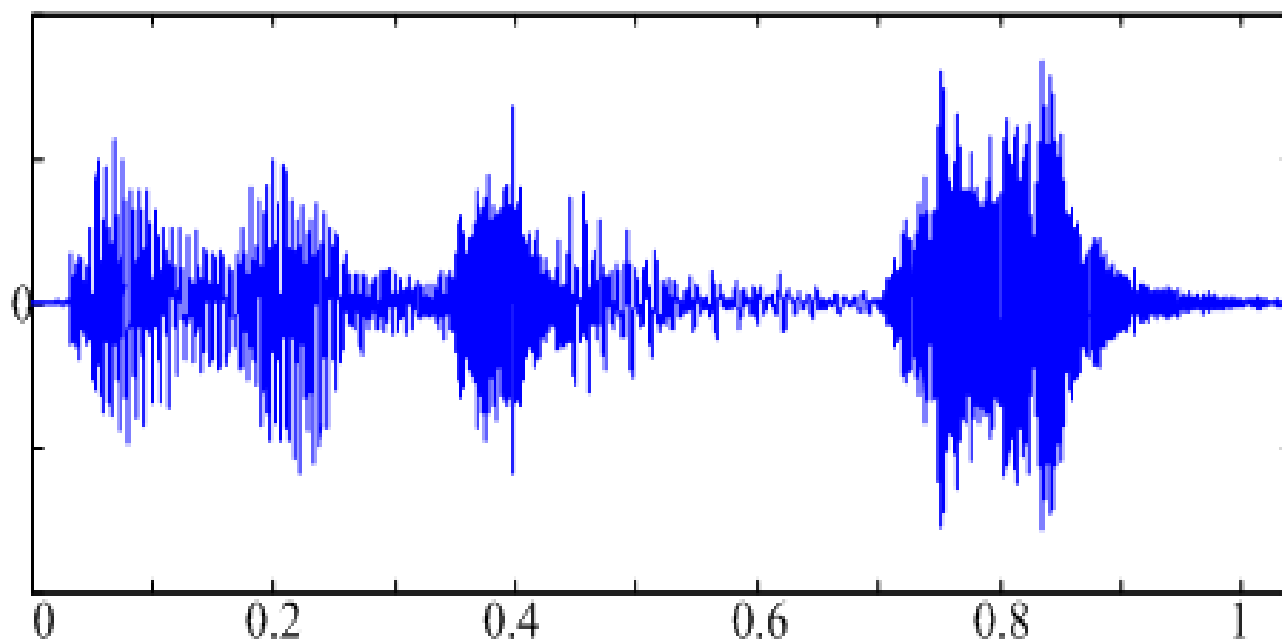




法国数学家、物理学家。主要贡献是在研究热的传播时创立了一套数学理论。**1807**年向巴黎科学院呈交《热的传播》论文，推导出著名的热传导方程，并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示，从而提出任一函数都可以展成三角函数的无穷级数。**1822**年在代表作《热的分析理论》中解决了热在非均匀加热的固体中分布传播问题，成为分析学在物理中应用的最早例证之一，对**19**世纪数学和理论物理学的发展产生深远影响。傅立叶级数（即三角级数）、傅立叶分析等理论由此创始。

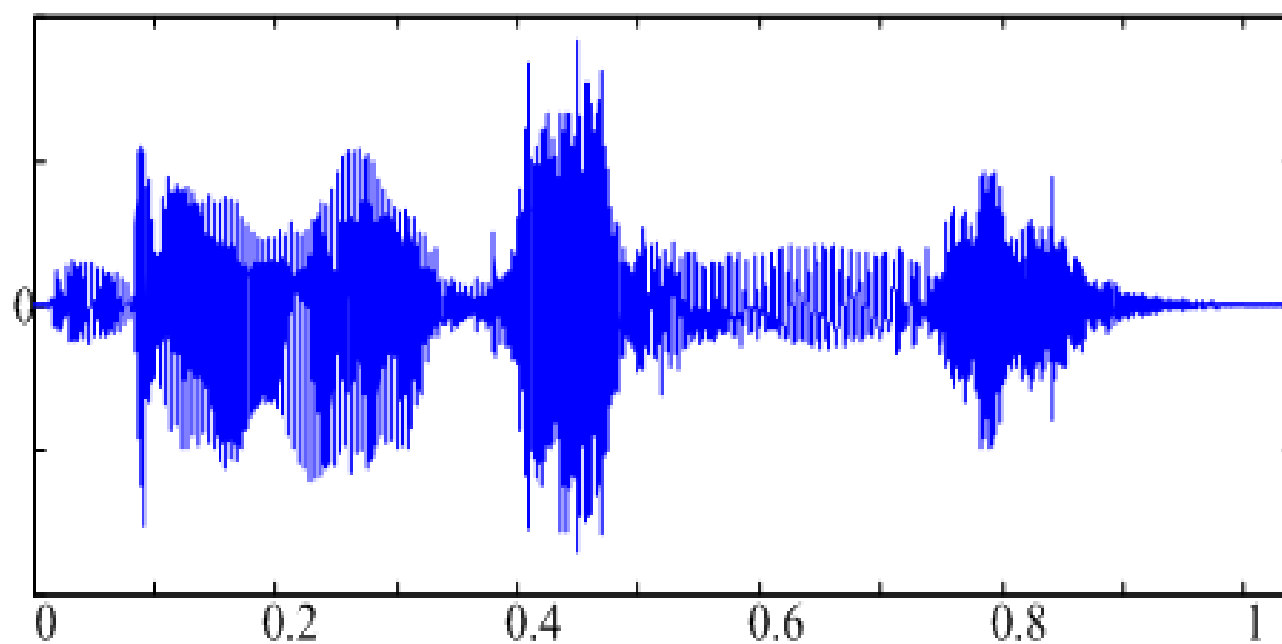
- ❖ 1807年提出“任何周期信号都可以用正弦函数的级数来表示”
- ❖ 1822年首次发表“热的分析理论”
- ❖ 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件

信号分析



时间/秒

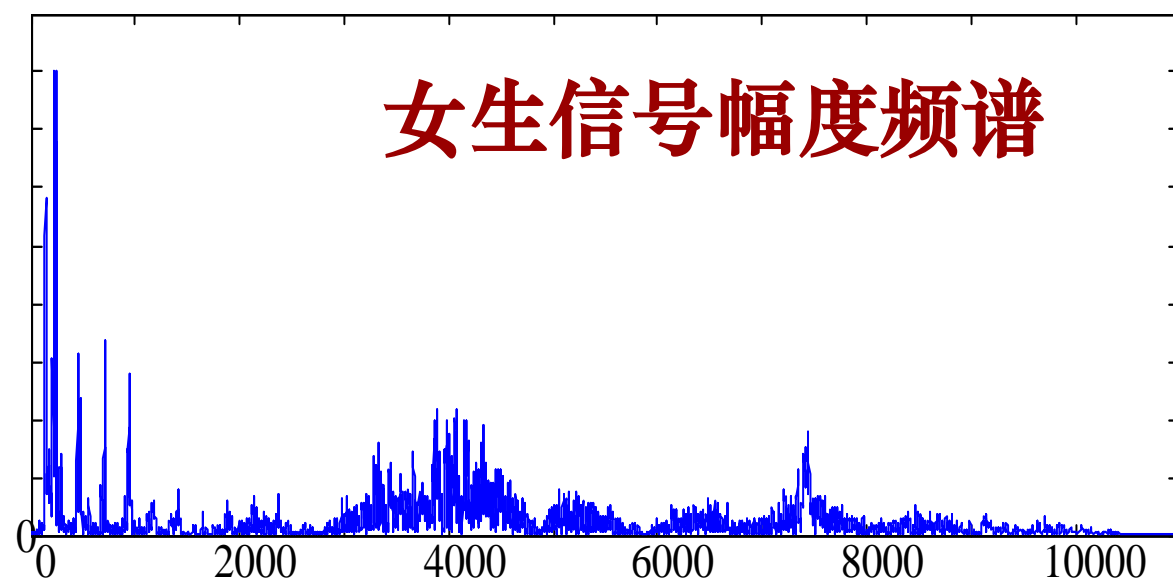
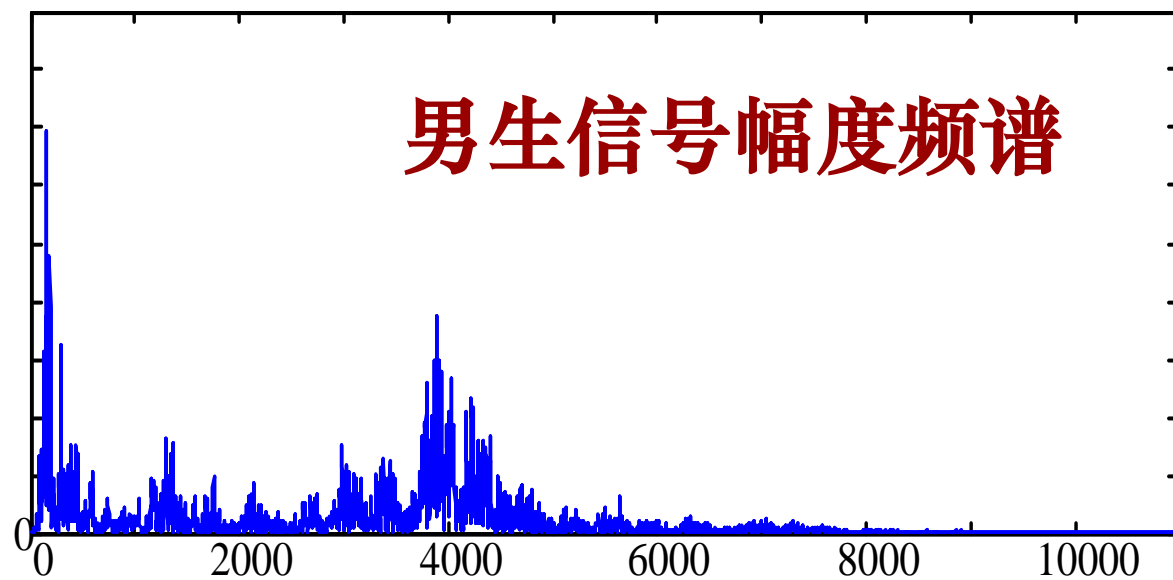
男生信号时域波形



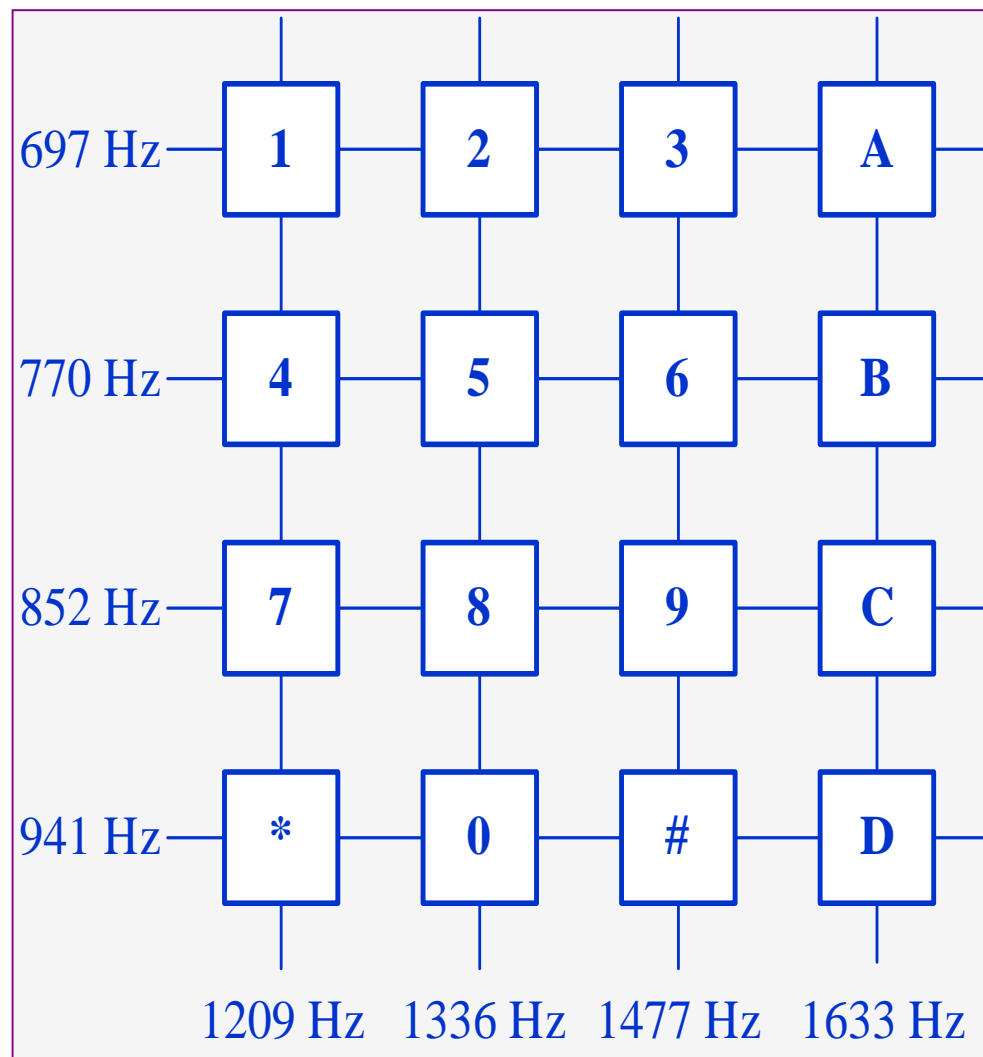
时间/秒

女生信号时域波形

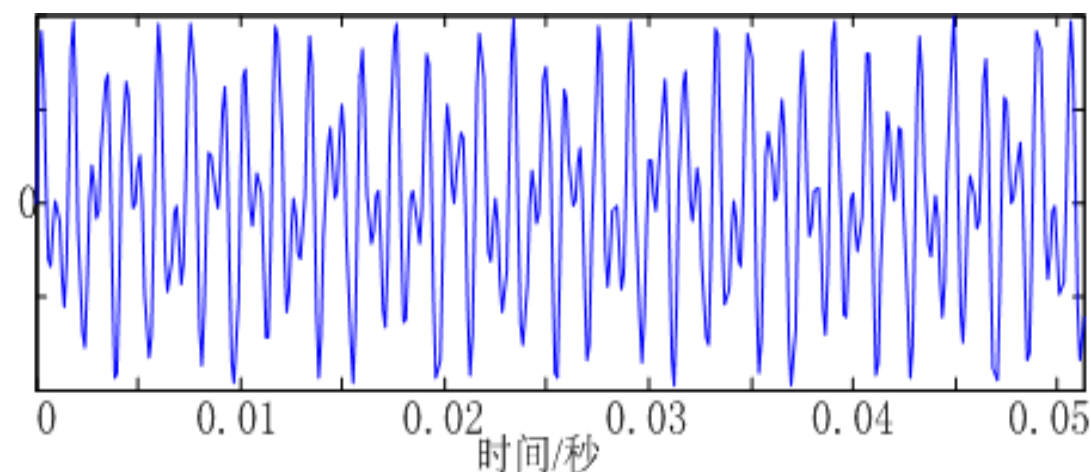




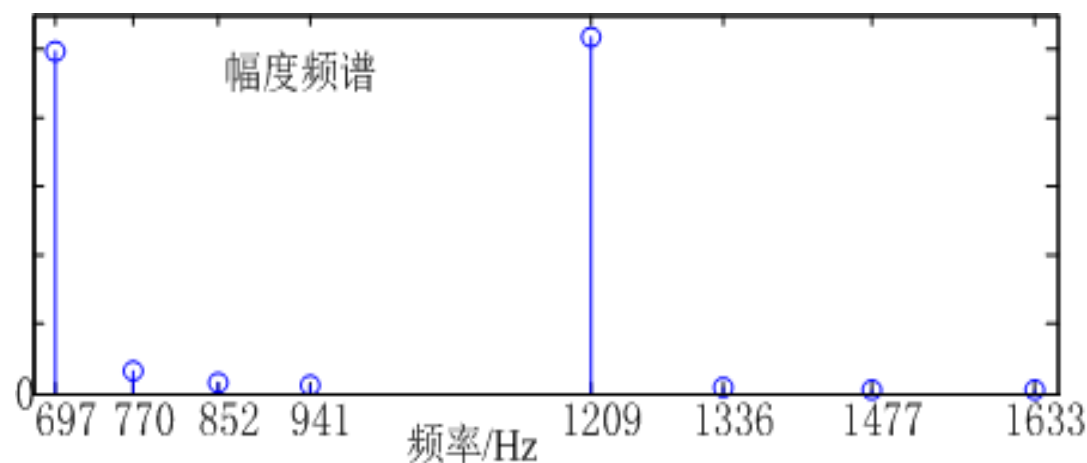
信号识别



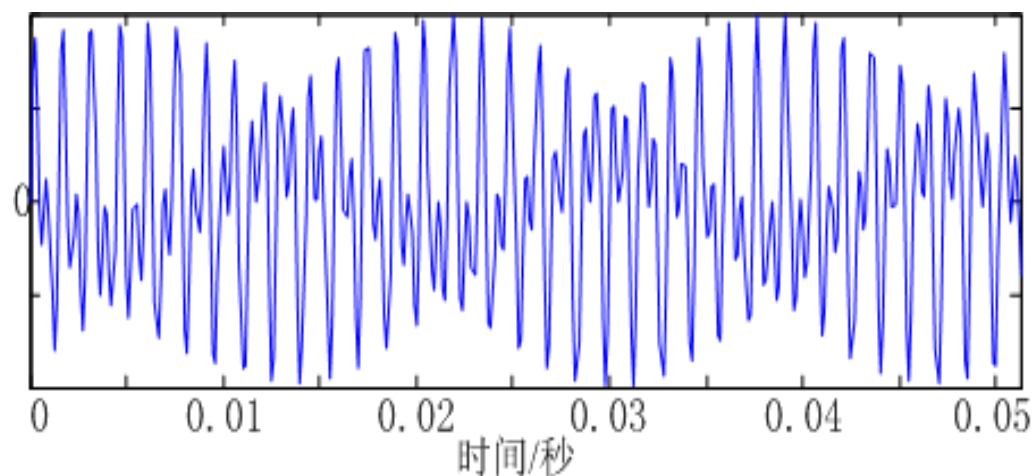
电话拨号中的双音多频信号(DTMF)



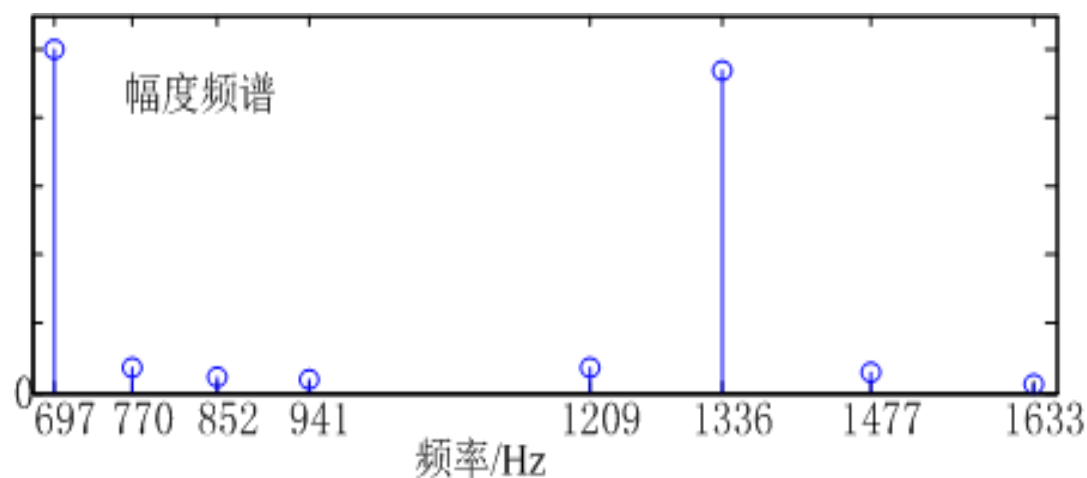
数字键 '1' 的波形



数字键 '1' 的频谱



数字键 '2' 的波形



数字键 '2' 的频谱

DTMF 信号的时域波形及其频谱

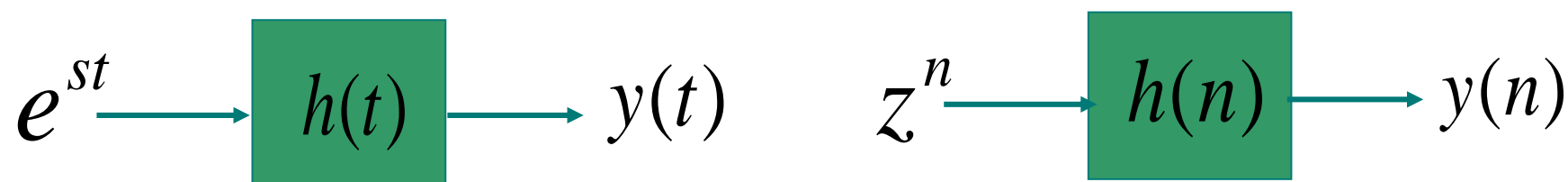
傅里叶的两个最重要的贡献——

- ❖ “任何周期信号都可以表示为成谐波关系的正弦信号的加权和”——傅里叶的第一个主要论点
- ❖ “非周期信号都可以用正弦信号的加权积分来表示”——傅里叶的第二个主要论点

3.2 LTI系统对复指数信号的响应

The Response of LTI Systems to Complex Exponentials

❖ 考查LTI系统对复指数信号 e^{st} 和 z^n 的响应



由时域分析方法有，

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) e^{st}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{(n-k)} h(k) = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} = H(z) z^n$$

可见LTI系统对复指数信号的响应是很容易求得的。这说明 e^{st} 和 z^n 符合对单元信号的第一项要求。

特征函数 (Eigenfunction)

- ❖ 如果系统对某一信号的响应只不过是该信号乘以一个常数，则称该信号是这个系统的特征函数。系统对该信号加权的常数称为系统与特征函数相对应的特征值。

结论:

- ❖ 复指数函数 e^{st} 、 z^n 是一切LTI系统的特征函数。
- ❖ $H(s)$ 、 $H(z)$ 分别是LTI系统与复指数信号相对应的特征值。

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

对时域的任何信号 $x(t)$ 或者 $x(n)$ ，若能将其表示为下列形式：

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

利用系统的齐次性与叠加性

$$\text{由于 } e^{s_1 t} \rightarrow H(s_1)e^{s_1 t} \quad e^{s_2 t} \rightarrow H(s_2)e^{s_2 t}$$

$$e^{s_3 t} \rightarrow H(s_3)e^{s_3 t} \quad \text{所以有}$$

$$x(t) \longrightarrow y(t) = a_1 H(s_1)e^{s_1 t} + a_2 H(s_2)e^{s_2 t} + a_3 H(s_3)e^{s_3 t}$$

$$\text{即: } x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

$$\text{同理: } x(n) = \sum_k a_k Z_k^n \longrightarrow y(n) = \sum_k a_k H(Z_k) Z_k^n$$

***问题：**究竟有多大范围的信号可以用复指数信号的线性组合来表示？

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

Fourier Series Representation of Continuous-Time Periodic Signals

一. 连续时间傅里叶级数

成谐波关系的复指数信号集: $\Phi_k(t) = \{e^{jk\omega_0 t}\}$

其中每个信号都是以 $\frac{2\pi}{|k\omega_0|}$ 为周期的, 它们的公共周期为 $\frac{2\pi}{|\omega_0|}$, 且该集合中所有的信号都是彼此独立的。

如果将该信号集中所有的信号线性组合起来, 有

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

显然 $x(t)$ 也是以 $\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ 为周期的。该级数就是傅里叶级数， a_k 为傅立叶级数的系数。

这表明用傅里叶级数可以表示连续时间周期信号，即：连续时间周期信号可以分解成无数多个复指数谐波分量。

例1:

$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

显然该信号中，有两个谐波分量， $a_{\pm 1} = \frac{1}{2}$ 为相应分量的加权因子。

例2:
$$x(t) = \cos \omega_0 t + 2 \cos 3\omega_0 t$$
$$= \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}$$

在该信号中，有四个谐波分量，即 $k = \pm 1, \pm 3$ ，时对应的谐波分量。

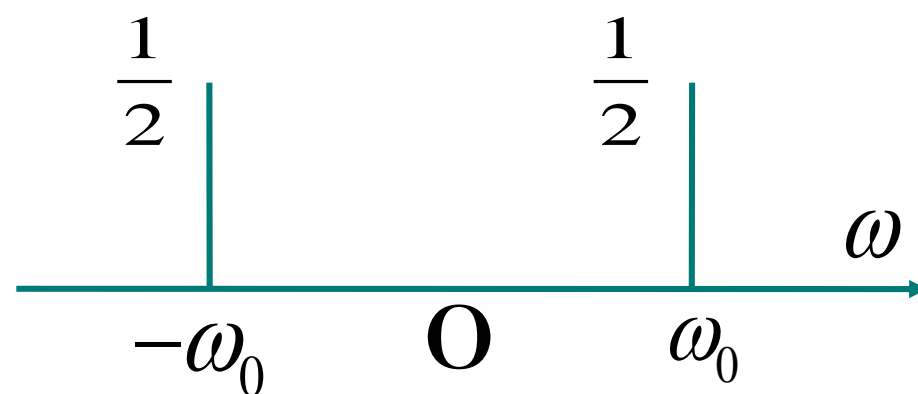
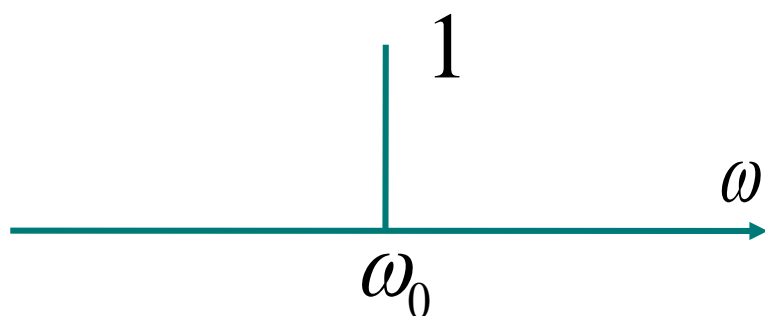
傅里叶级数表明：连续时间周期信号可以按傅立叶级数被分解成无数多个复指数谐波分量的线性组合。

二. 频谱 (Spectral) 的概念

信号集 $\Phi_k(t)$ 中的每一个信号，除了成谐波关系外，每个信号随时间 t 的变化规律都是一样的，差别仅仅是频率不同。

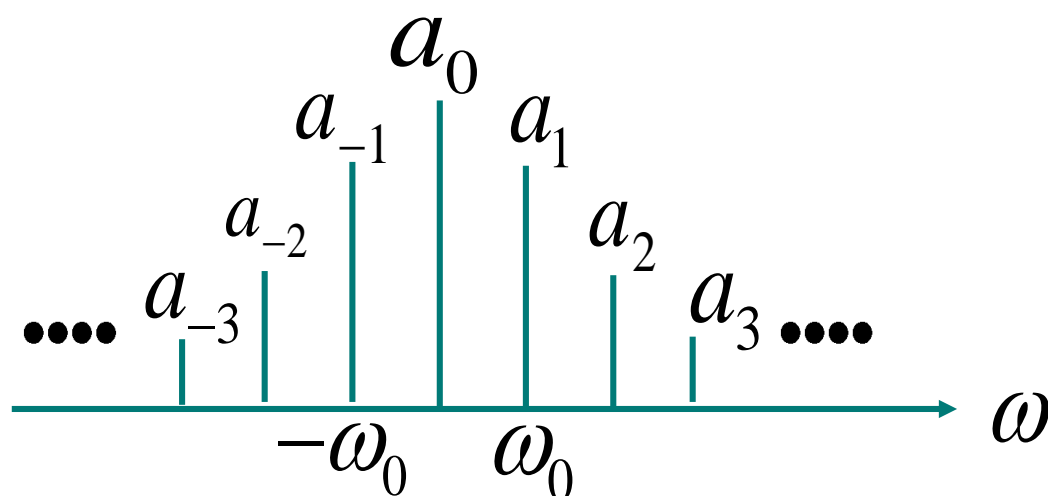
在傅里叶级数中，各个信号分量（谐波分量）间的区别也仅仅是幅度（可以是复数）和频率不同。因此，可以用一根线段来表示某个分量的幅度，用线段的位置表示相应的频率。

分量 $e^{j\omega_0 t}$ 可表示为 $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$



因此，当把周期信号 $x(t)$ 表示为傅里叶级数时，就可以将 $x(t)$ 表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$



这样绘出的图
称为**频谱图**

频谱图其实就是将 a_k 随频率的分布表示出来，即 $a_k \sim \omega$ 关系。由于信号的频谱完全代表了信号，研究它的频谱就等于研究信号本身。因此，这种表示信号的方法称为频域表示法。

三. 傅里叶级数的其它形式

若 $x(t)$ 是实信号, 则有 $x(t) = x^*(t)$, 于是

$$x^*(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right]^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\therefore a_k = a_{-k}^* \quad \text{或} \quad a_k^* = a_{-k}$$

若令 $a_k = A_k e^{j\theta_k}$ 则 a_0 为实数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j\theta_k} e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{-k} e^{-jk\omega_0 t} e^{j\theta_{-k}} + A_k e^{jk\omega_0 t} e^{j\theta_k}]$$

$$\because a_k^* = a_{-k} \quad \therefore A_k e^{-j\theta_k} = A_{-k} e^{j\theta_{-k}}$$

$$\text{即: } A_k = A_{-k} \quad \theta_k = -\theta_{-k}$$

表明 a_k 的模关于 k 偶对称，幅角关于 k 奇对称。

$$\begin{aligned}\therefore x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{-k} e^{-jk\omega_0 t} e^{j\theta_{-k}} + A_k e^{jk\omega_0 t} e^{j\theta_k}] \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)\end{aligned}$$

——傅里叶级数的三角函数表示式

若令 $a_k = B_k + jC_k$ 则

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} (B_k + jC_k) e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k + jC_k) e^{jk\omega_0 t} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(B_k + jC_k) e^{jk\omega_0 t} + (B_{-k} + jC_{-k}) e^{-jk\omega_0 t} \right]\end{aligned}$$

$$\because a_k^* = a_{-k} \quad \therefore B_k - jC_k = B_{-k} + jC_{-k}$$

$$\text{因此 } B_k = B_{-k} \quad C_k = -C_{-k}$$

即 a_k 的实部关于 k 偶对称，虚部关于 k 奇对称。

将此关系代入，可得到

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(B_k + jC_k) e^{jk\omega_0 t} + (B_k - jC_k) e^{-jk\omega_0 t} \right] \\ &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t \right] \end{aligned}$$

——傅里叶级数的另一种三角函数形式

已知周期信号 $x(t) = 1 + \sin \Omega_0 t + 2 \cos \Omega_0 t + \cos(2\Omega_0 t + \frac{\pi}{4})$ ，绘出该信号的频谱图。

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \frac{1}{2j} [e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t}] + [e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}] + \frac{1}{2} [e^{j(2\Omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\Omega_0 t + \pi/4)}] \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right) e^{j\Omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right) e^{-j\Omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{j\pi/4}\right) e^{j2\Omega_0 t} + \left(\frac{1}{2} e^{-j\pi/4}\right) e^{-j2\Omega_0 t} \end{aligned}$$

于是可得各系数为：

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j, \quad A_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j$$

$$A_2 = \frac{1}{2} e^{j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + j), \quad A_{-2} = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - j)$$

四. 连续时间傅里叶级数的系数确定

如果周期信号 $x(t)$ 可以表示为傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{则有}$$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}$$

对两边同时在一个周期内积分，有

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt &= \int_0^{T_0} \cos(k-n)\omega_0 t dt + j \int_0^{T_0} \sin(k-n)\omega_0 t dt \\ &= \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0, & k = n \end{cases}\end{aligned}$$

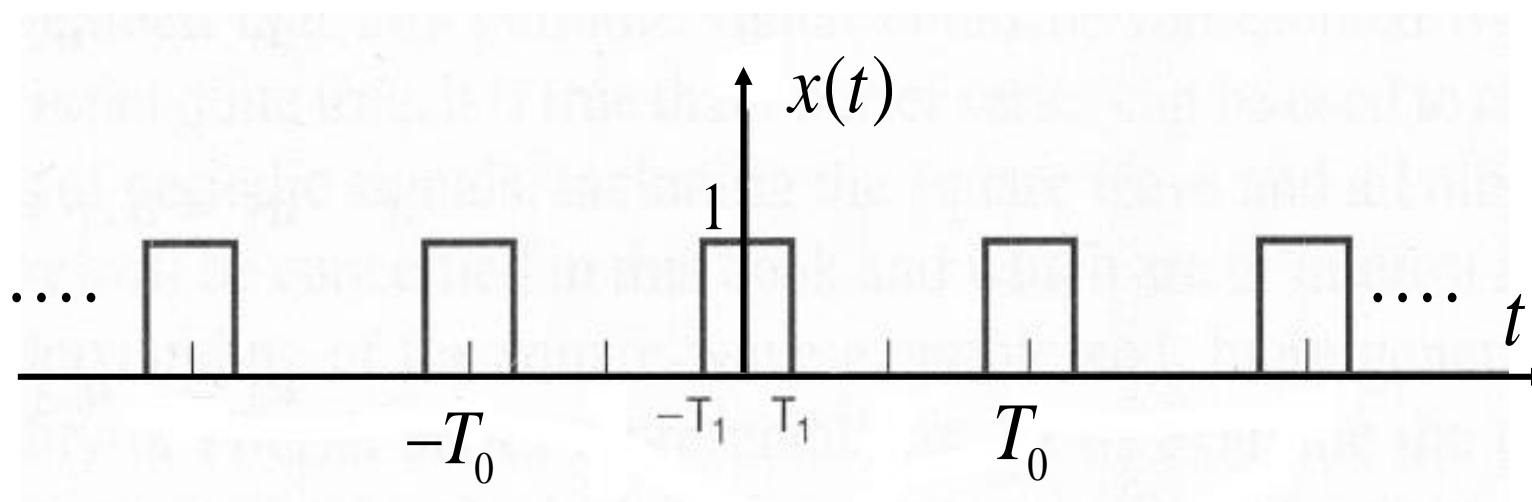
$$\therefore \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = a_n T_0 \quad \text{即} \quad a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

在确定此积分时，只要积分区间是一个周期即可，对积分区间的起止并无特别要求，因此可表示为

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

a_0 是信号在一个周期的平均值，通常称直流分量。

五. 周期性矩形脉冲信号的频谱

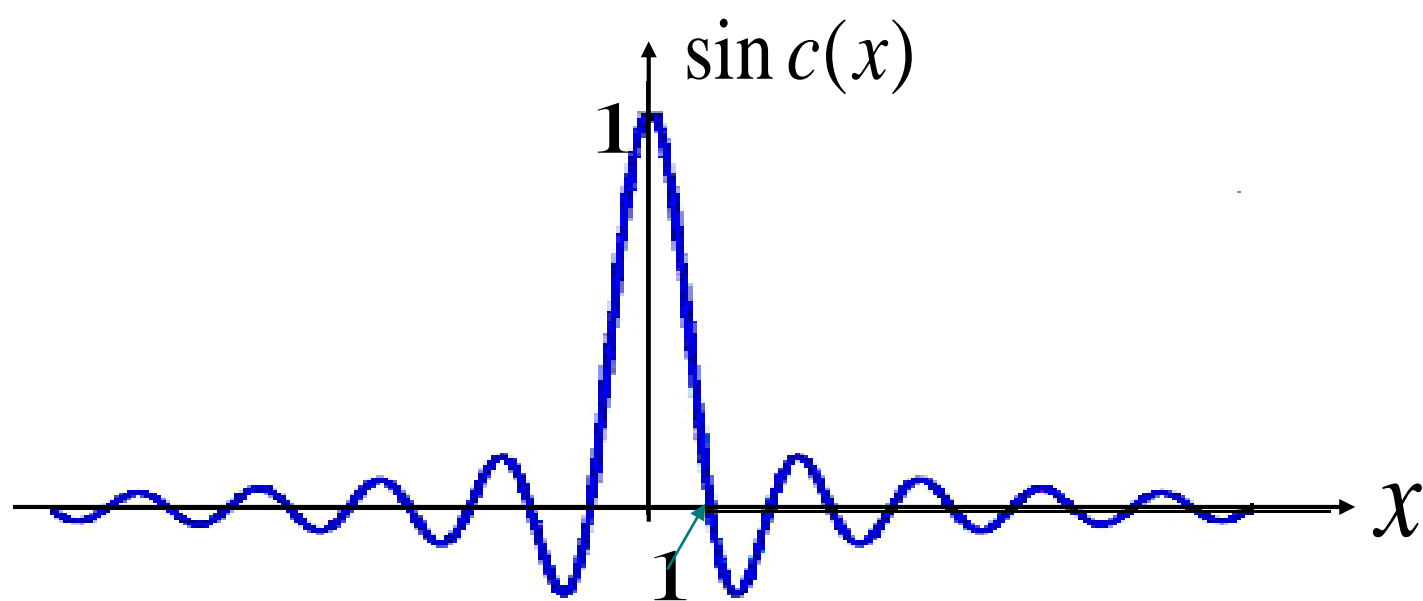
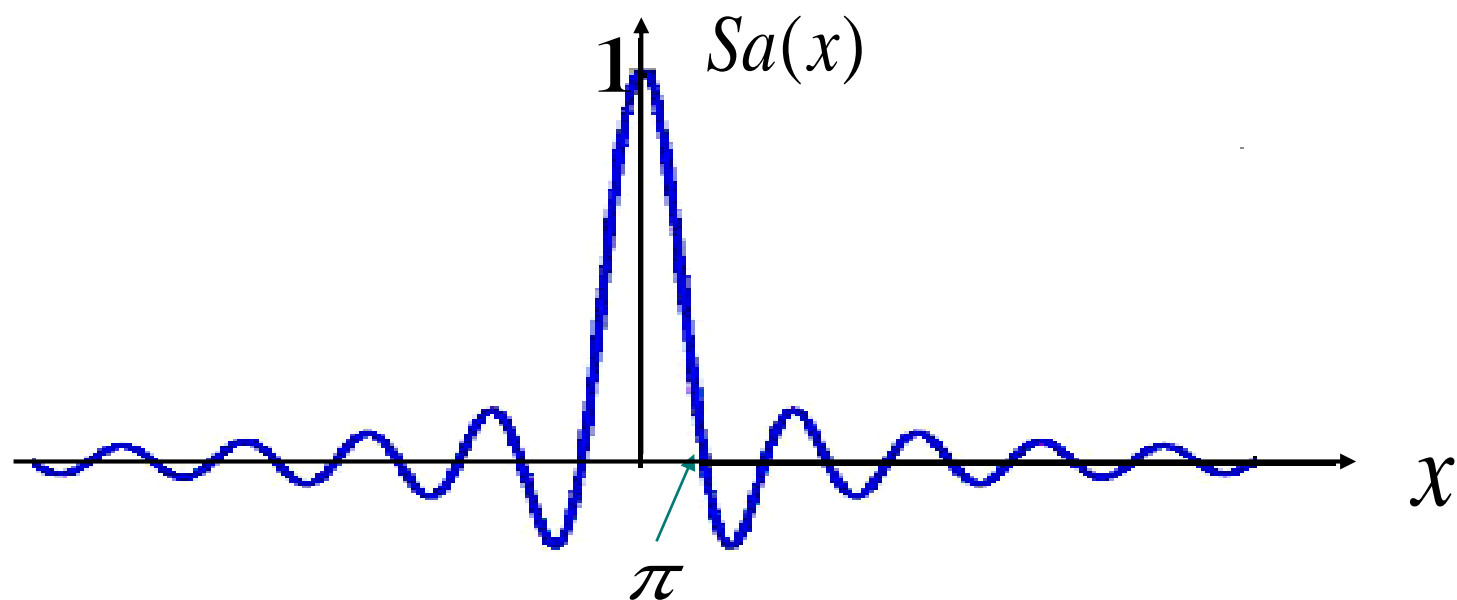


$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0}$$

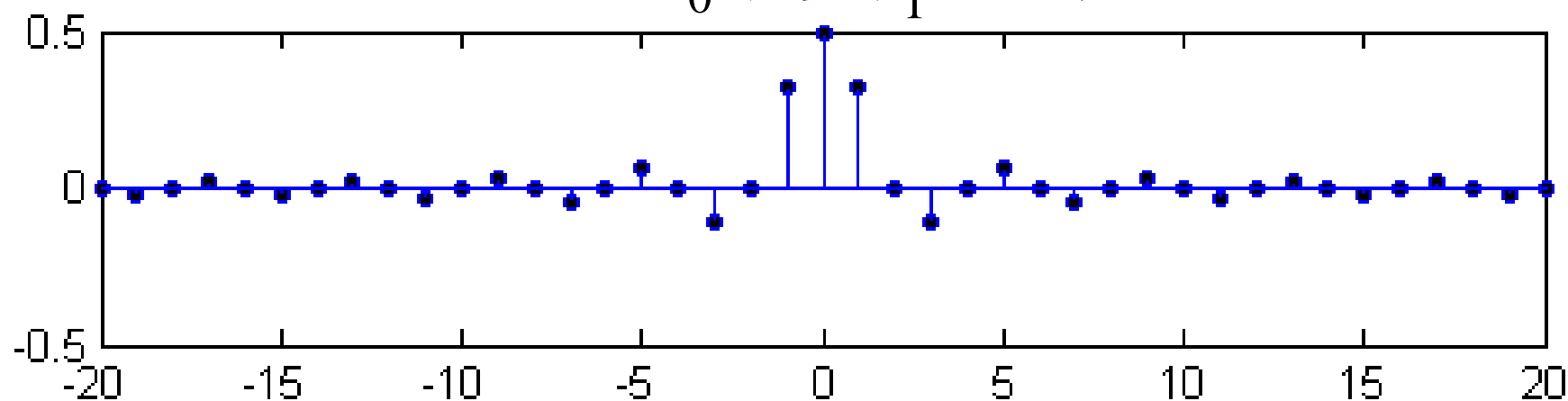
$$= \frac{2T_1}{T_0} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1} = \frac{2T_1}{T_0} \text{Sa}(k\omega_0 T_1) = \frac{2T_1}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{2T_1}{T_0} k\right)$$

其中

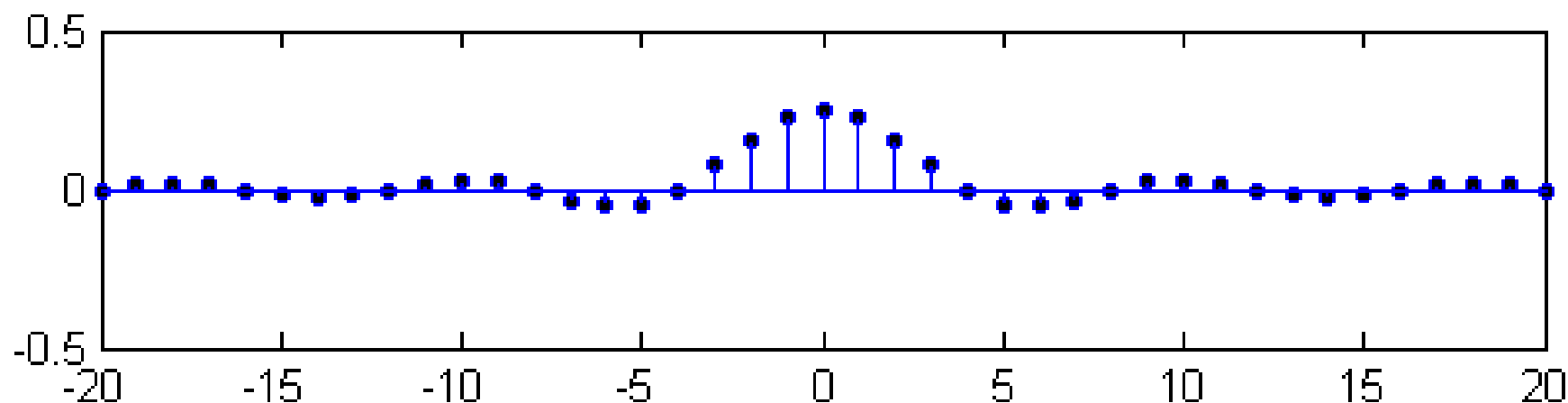
$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$



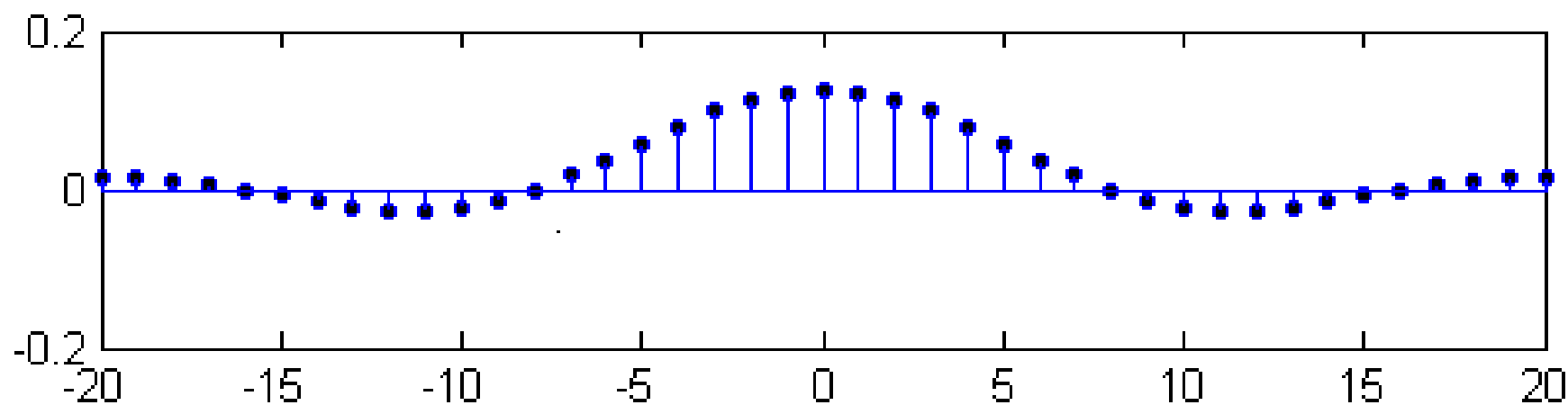
根据 a_k 可绘出 $x(t)$ 的频谱图。 $\frac{2T_1}{T_0}$ 称为占空比

T_0 不变 $T_1 \downarrow$ 时

$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{2}$$

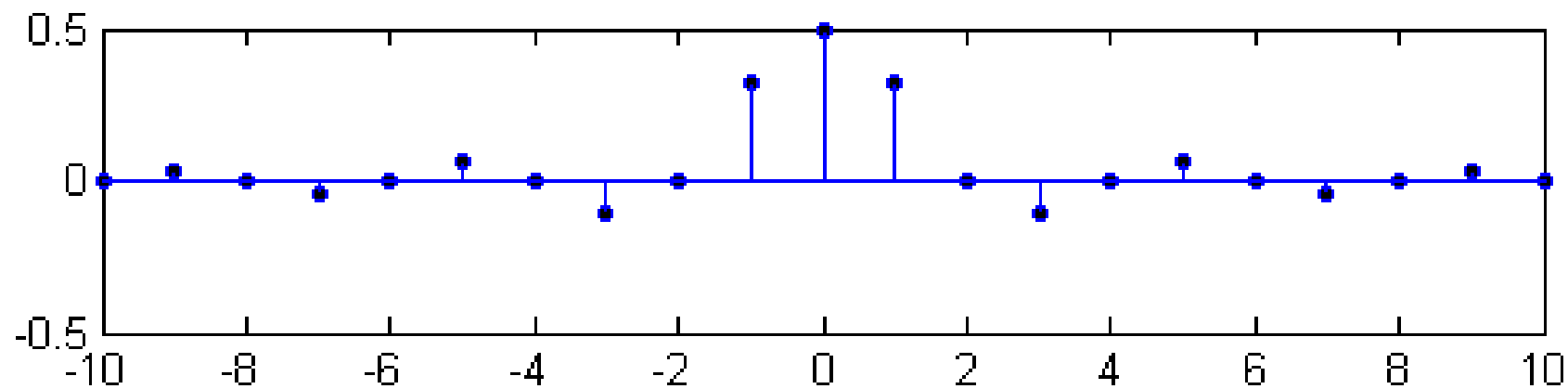


$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{4}$$

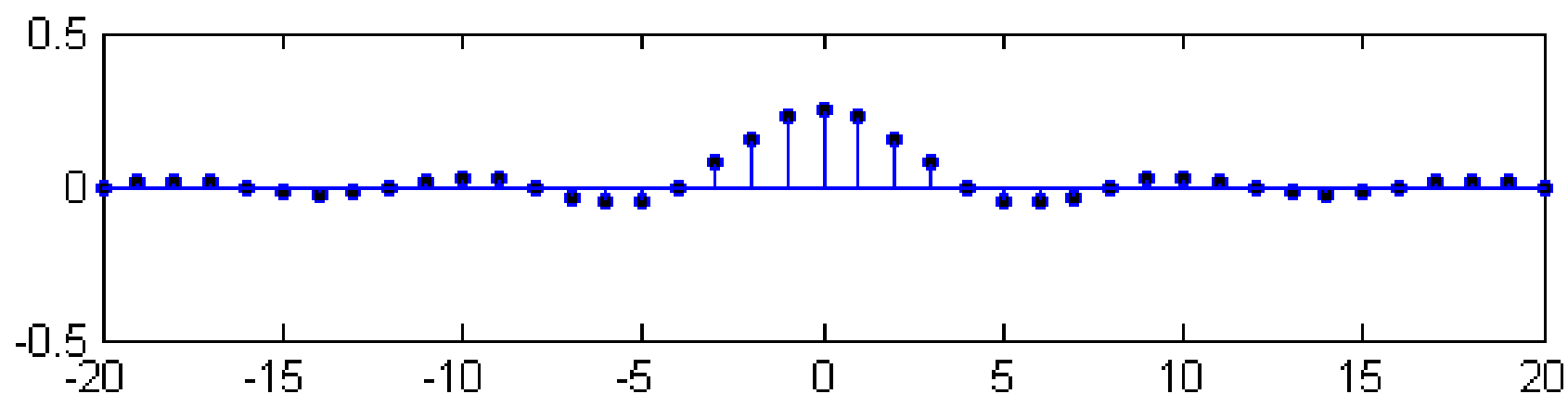


$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{8}$$

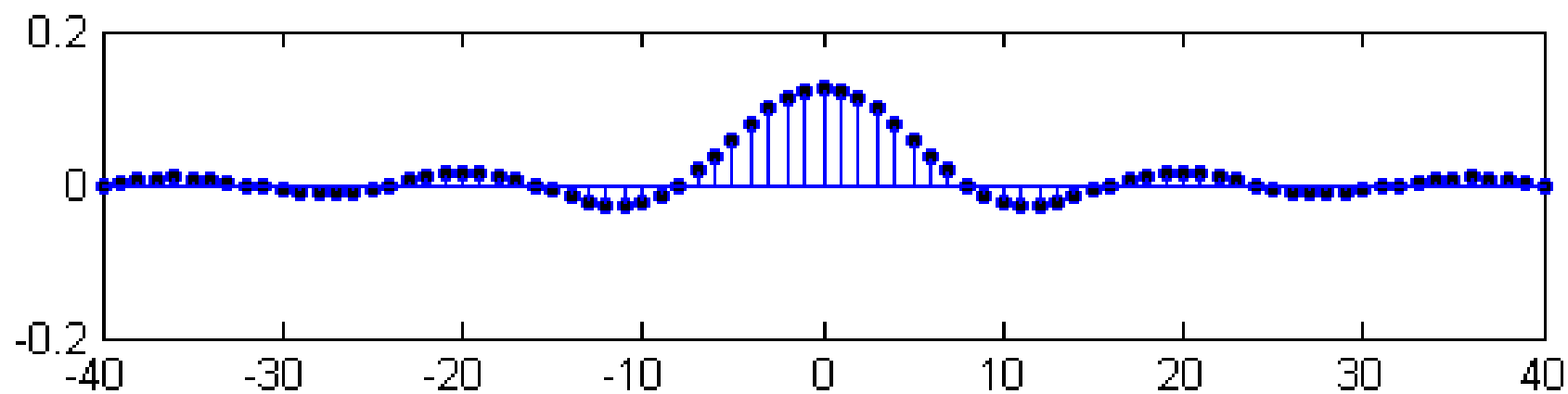
T_1 不变 $T_0 \uparrow$ 时



$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{2T_1}{T_0} = \frac{1}{8}$$

周期性矩形脉冲信号的频谱特征：

1. 离散性
2. 谐波性
3. 收敛性

考查周期 T_0 和脉冲宽度 $2T_1$ 改变时频谱的变化：

1. 当 T_1 不变，改变 T_0 时，随 $T_0 \uparrow$ 使占空比减小，谱线间隔变小，幅度下降。但频谱包络的形状不变，包络主瓣内包含的谐波分量数增加。
2. 当 T_1 改变， T_0 不变时，随 $T_1 \downarrow$ 使占空比减小，谱线间隔不变，幅度下降。频谱的包络改变，包络主瓣变宽。主瓣内包含的谐波数量也增加。

信号对称性与频谱的关系:

当 $x(t) = x(-t)$ 时, 有

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt$$

表明: 偶信号的 a_k 是关于 k 的偶函数、实函数。

当 $x(t) = -x(-t)$ 时, 有

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = -j \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt$$

表明: 奇信号的 a_k 是关于 k 的奇函数、虚函数。

3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

Convergence of the Fourier series

这一节来研究用傅氏级数表示周期信号的普遍性问题，即满足什么条件的周期信号可以表示为傅里叶级数。

一. 傅里叶级数是对信号的最佳近似

若 $x(t)$ 以 T_0 为周期 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

用有限个谐波分量近似 $x(t)$ 时，有

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

误差为 $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$

以均方误差作为衡量误差的准则，其均方误差为

$$\begin{aligned} E_N(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left[x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right] \left[x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right]^* dt \end{aligned}$$

于是：

$$E_N = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt + \sum_{k=-N}^N A_k^2 - \frac{2}{T_0} \sum_{k=-N}^N A_k B_k \cos(\varphi_k - \theta_k)$$

其中 $a_k = A_k e^{j\theta_k}$

$$\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = B_k e^{j\varphi_k}$$

在均方误差最小的准则下，可以证明， a_k

此时应满足：

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

—— 这就是傅氏级数的系数

结论：在均方误差最小的准则下，傅里叶级数是对周期信号的最佳近似。

二. 傅里叶级数的收敛

傅里叶级数收敛的两层含义:

- ① a_k 是否存在?
- ② 级数是否收敛于 $x(t)$?

两组条件:

1.平方可积条件:

如果 $\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$ 则 a_k 必存在。

$\because x(t)$ 能量有限 $\therefore a_k$ 一定存在。

2. Dirichlet条件:

① $\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$, 在任何周期内信号绝对可积。

$$|a_k| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

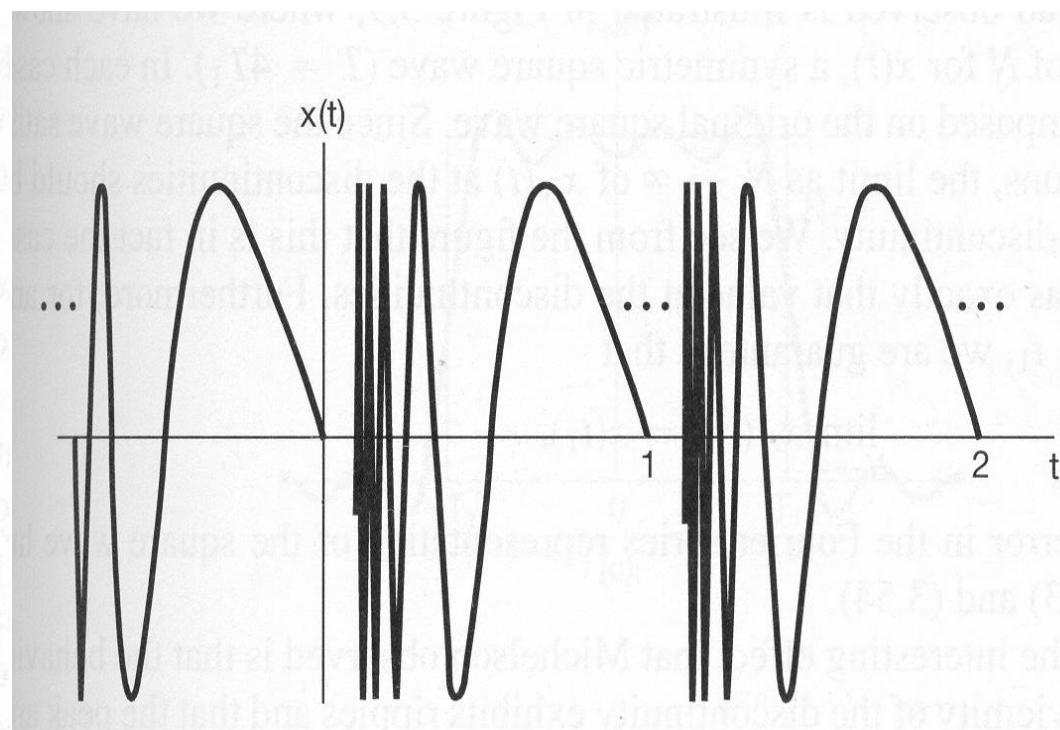
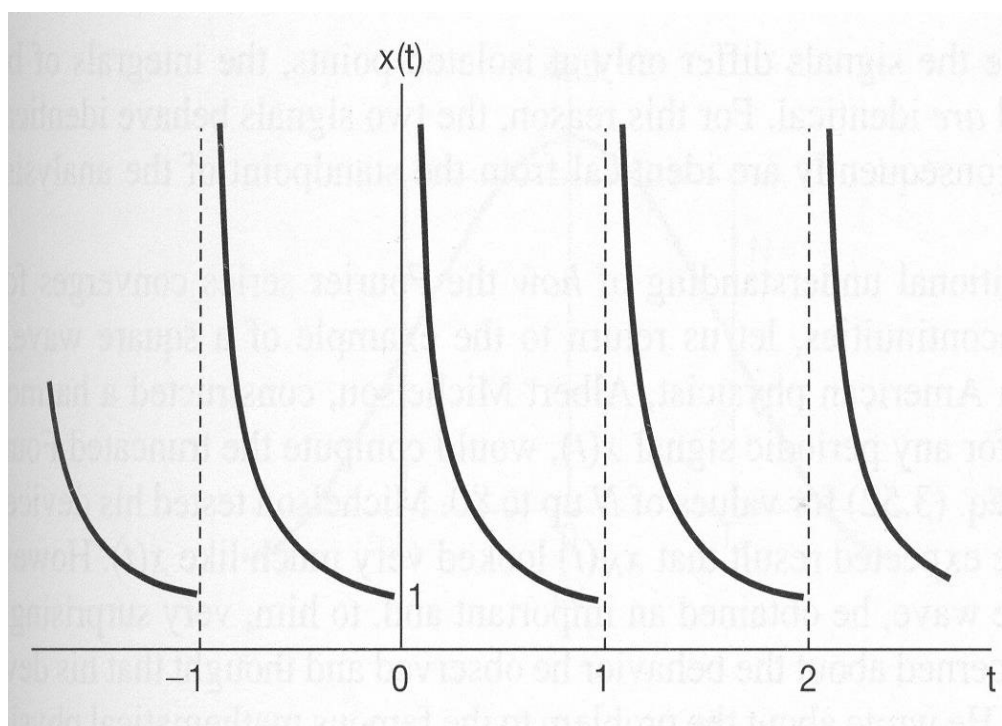
因此, 信号绝对可积就保证了 a_k 的存在。

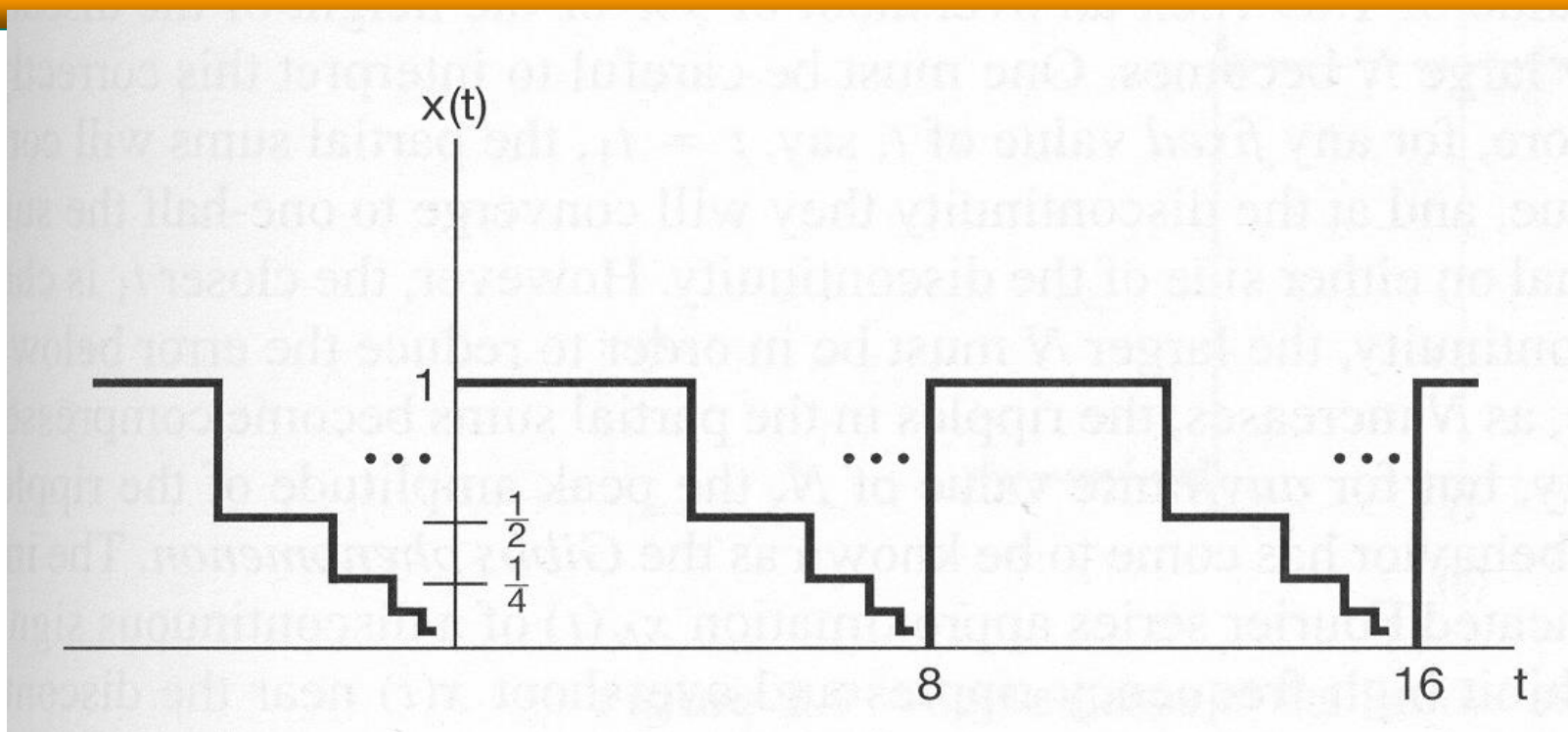
② 在任何有限区间内, 只有有限个极值点,
且极值为有限值。

③ 在任何有限区间内, 只有有限个第一类间断点。

这两组条件并不完全等价。它们都是傅里叶级数收敛的**充分条件**。相当广泛的信号都能满足这两组条件中的一组，因而用傅里叶级数表示周期信号具有相当的普遍适用性。

几个不满足Dirichlet条件的信号

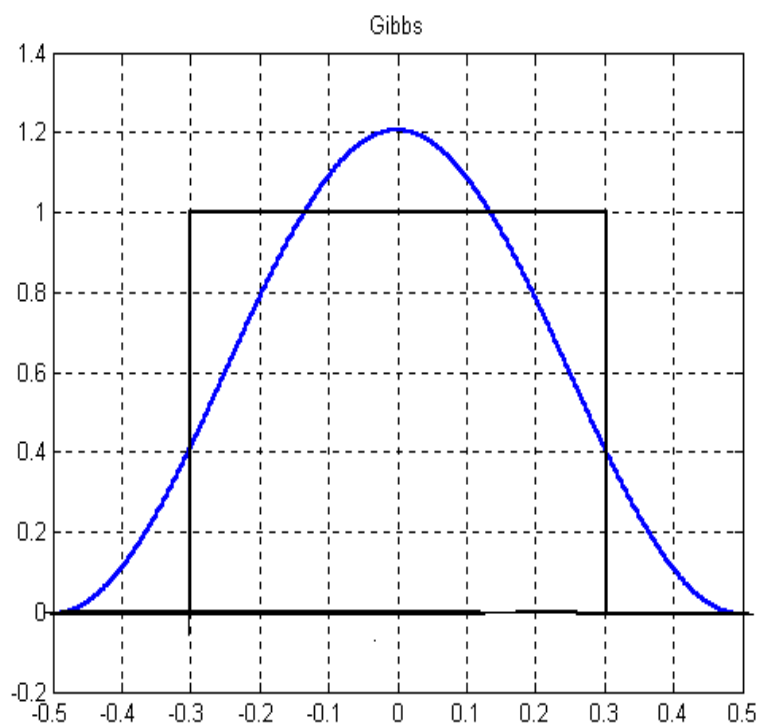




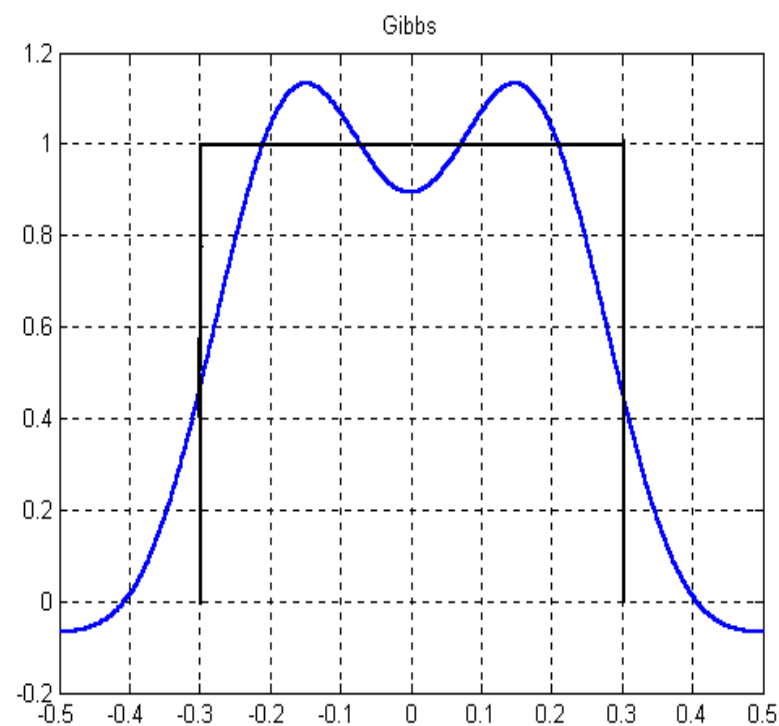
三. Gibbs现象

满足 **Dirichlet** 条件的信号，其傅里叶级数是如何收敛于 $x(t)$ 的。特别当 $x(t)$ 具有间断点时，在间断点附近，如何收敛于 $x(t)$ ？

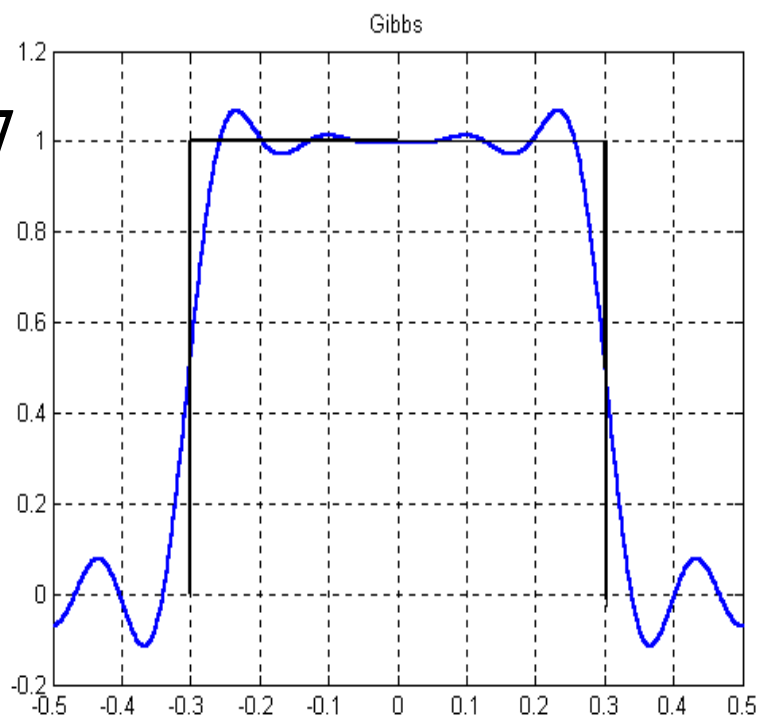
$N = 1$



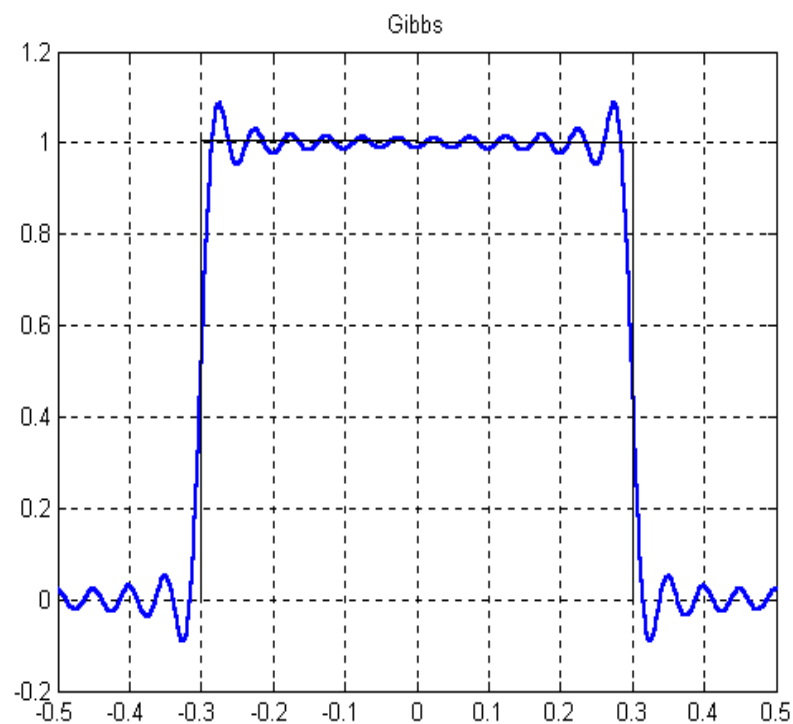
$N = 3$

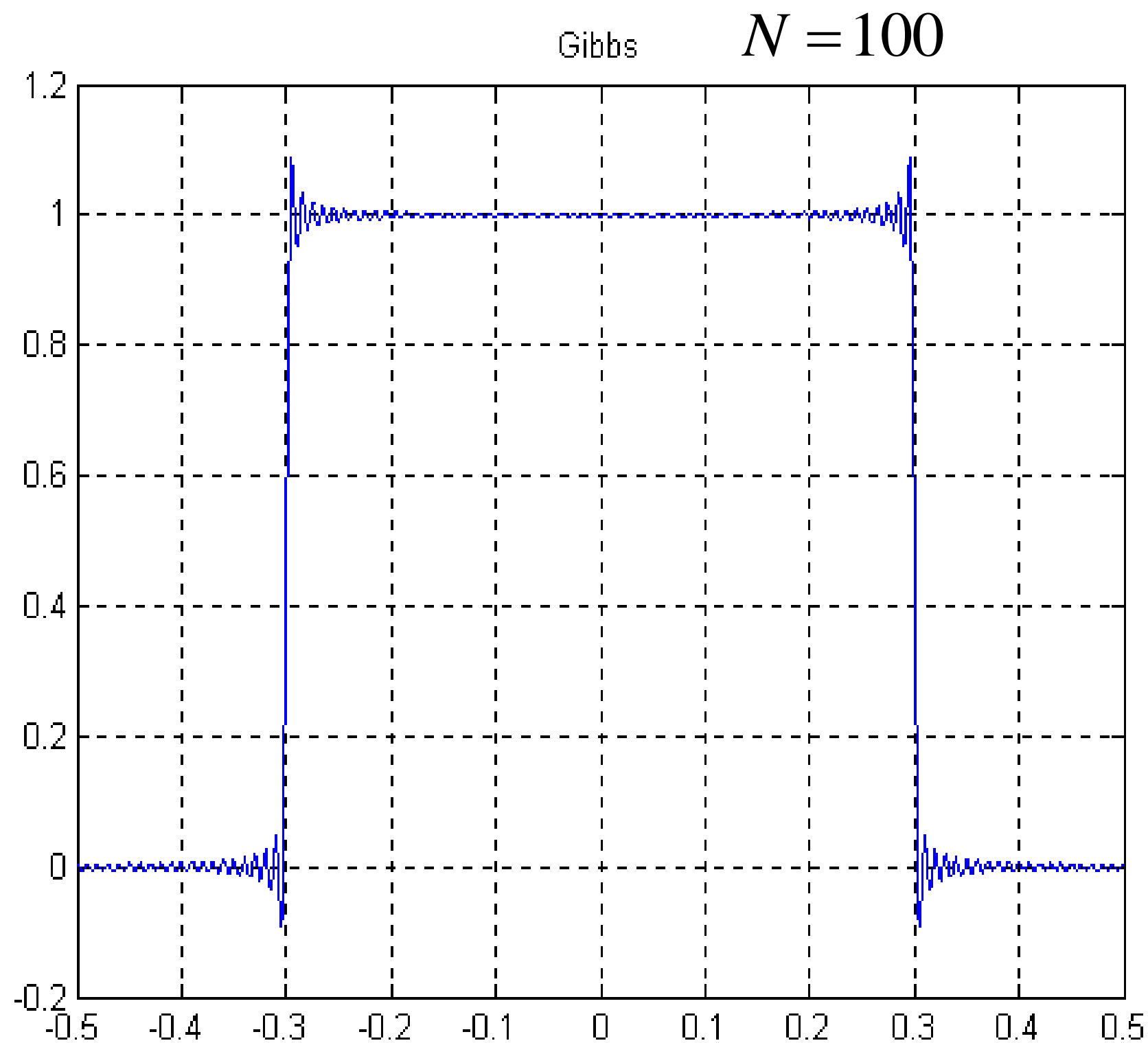


$N = 7$



$N = 19$





Gibbs现象表明:

用有限项傅里叶级数表示有间断点的信号时，在间断点附近会不可避免的会出现振荡和超量。超量的幅度不会随所取项数的增加而减小。只是随着项数的增多，振荡频率变高，并向间断点处压缩，从而使它所占有的能量减少。

3.5 连续时间傅里叶级数的性质

Properties of Continuous-Time Fourier Series

学习这些性质，有助于对概念的理解和对信号进行级数展开。

一. 线性:

若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是以 T 为周期的信号，且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \qquad y(t) \xleftrightarrow{F} b_k$$

则 $Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{F} Aa_k + Bb_k$

二. 时移: 若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, 且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \quad \text{则} \quad x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} a_k e^{-jk\omega_0 t_0}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

三. 反转: 若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, 且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \quad \text{则} \quad x(-t) \xleftrightarrow{F} a_{-k}$$

四. 尺度变换: 若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, 且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \quad \text{则} \quad x(at) \quad \text{以} \quad T/a \quad \text{为周期, 于是}$$

$$x(at) \xleftrightarrow{F} b_k = \frac{a}{T} \int_{T/a} x(at) e^{-jka\omega_0 t} dt$$

令 $at = \tau$ ，当 t 在 $0 \sim T/a$ 变化时， τ 从 $0 \sim T$ 变化，

$$\text{于是有: } b_k = \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau = a_k$$

$$\therefore x(at) \xleftrightarrow{F} b_k = a_k$$

五. 相乘: 若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是以 T 为周期的信号，且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \qquad y(t) \xleftrightarrow{F} b_k$$

$$\text{则 } x(t) \cdot y(t) \xleftrightarrow{F} C_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$\text{也即 } C_k = \frac{1}{T} \int_T \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{jl\omega_0 t} \cdot y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$C_k = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \int_T y(t) e^{-j(k-l)\omega_0 t} dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

$$\therefore x(t)y(t) \xleftrightarrow{F} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k \otimes b_k$$

六. 共轭对称性:

若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, $x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$

则 $x^*(t) \longleftrightarrow a_{-k}^*$

由此可推得, 对实信号有: $a_k = a_{-k}^*$ 或 $a_k^* = a_{-k}$

$a_k = A_k e^{j\theta_k}$ 时有: $A_k = A_{-k}$ $\theta_k = -\theta_{-k}$

$$a_k = B_k + jC_k \text{ 时有: } B_k = B_{-k} \quad C_k = -C_{-k}$$

对实信号，当 $x(t) = x(-t)$ 时， $a_k = a_{-k}$ （实偶函数）

当 $x(t) = -x(-t)$ 时， $a_k = -a_{-k}$ （虚奇函数）

七. Parseval 定理:

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

表明：一个周期信号的平均功率就等于它所有谐波分量的平均功率之和。

* 掌握表3.1

推 论—奇、偶、虚、实性

若 $x(t)$ 为偶函数, 即 $x(t) = x(-t)$ 则 $a_k = a_{-k}$.

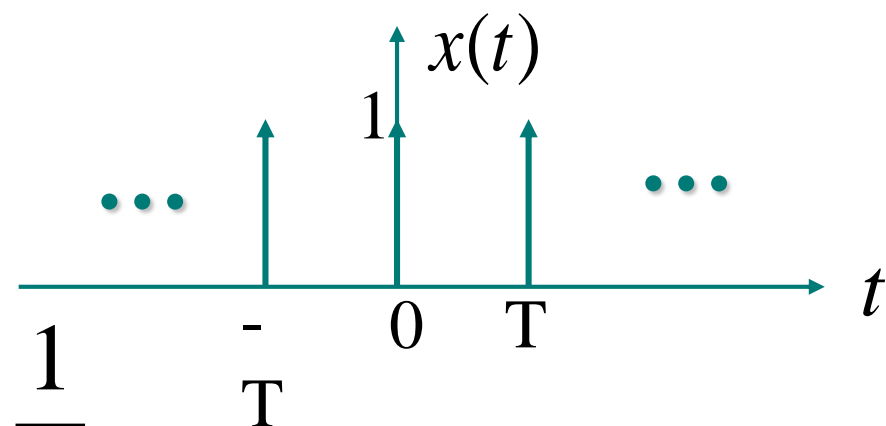
若 $x(t)$ 为奇函数, 则 $a_k = -a_{-k}$.

若 $x(t)$ 为实函数, 则 $a_k^* = a_{-k}$.

若 $x(t)$ 为实, 偶, 则 $a_k^* = a_{-k} = a_k$, a_k 为实, 偶.

若 $x(t)$ 为奇, 实. 则 $a_k^* = a_{-k} = -a_k$, a_k 为纯虚, 奇.

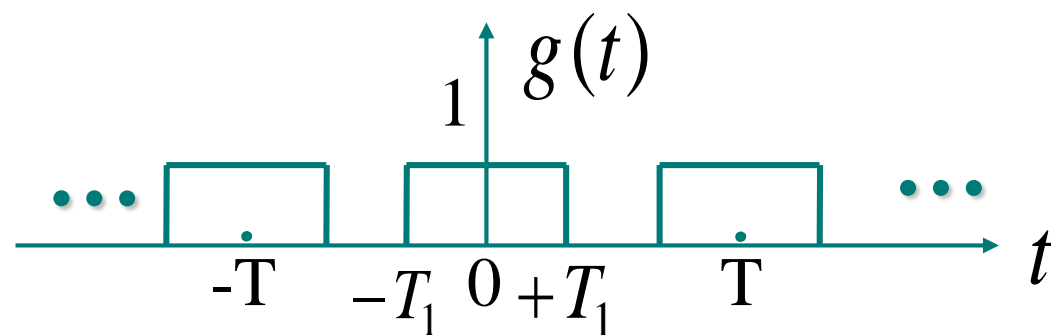
例1: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$



$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

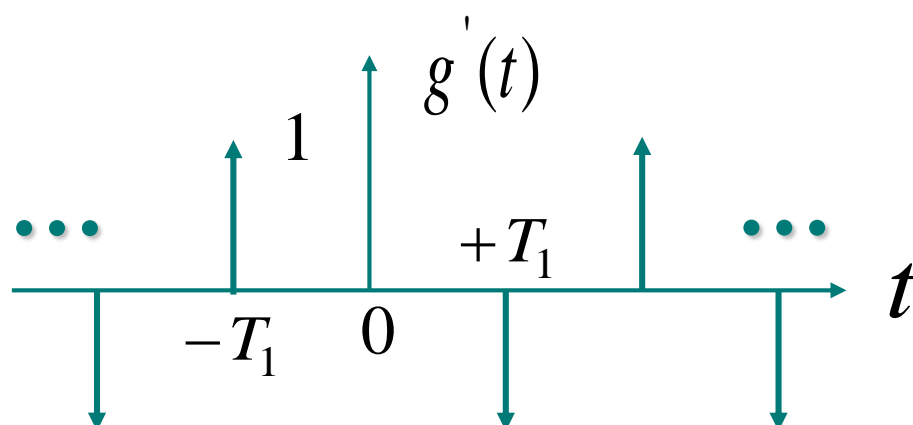
$$\therefore x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

例2: 周期性矩形脉冲



将其微分后可利用例1表示为

$$g'(t) = x(t + T_1) - x(t - T_1) \quad (\text{不记直流分量})$$



设 $g(t) \xleftrightarrow{F} c_k$ $g'(t) \xleftrightarrow{F} b_k$ 由时域微分性质有

$b_k = jk\omega_0 c_k$ 根据时移特性, 有

$$b_k = a_k \left[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1} \right] = 2ja_k \sin k\omega_0 T_1$$

由例1知 $a_k = 1/T$ $\omega_0 = 2\pi/T$

$$\therefore c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T} = \frac{2T_1}{T} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1} \quad k \neq 0$$

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

Fourier Series Representation of Discrete-Time Periodic Signals

一. 离散时间傅里叶级数 (DFS)

Discrete-Time Fourier Series

考察成谐波关系的复指数信号集： $\Phi_k(n) = \left\{ e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right\}$

该信号集中每一个信号都以 N 为周期，且该集合中只有 N 个信号是彼此独立的。

将这 N 个独立的信号线性组合起来，一定能表示一个以 N 为周期的序列。即：

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \text{ 其中 } k \text{ 为 } N \text{ 个相连的整数}$$

这个级数就称为离散时间傅里叶级数——
(DFS)，其中 a_k 也称为周期信号 $x(n)$ 的频谱。

二. 傅里叶级数系数的确定

$$\text{给 } x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{两边同乘以 } e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}, \text{ 得}$$

$$x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

显然 $x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$ 仍是以 N 为周期的

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

$$\text{而 } \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \frac{1 - e^{j(k-r) \cdot 2\pi}}{1 - e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}}} = \begin{cases} 0, & k \neq r \\ N, & k = r \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=\langle N \rangle} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = Na_r$$

即

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$\begin{aligned} a_{k+N} &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-j(k+N) \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \bullet e^{-jN \frac{2\pi}{N} n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = a_k \end{aligned}$$

a_k 也是以 N 为周期的，即 a_k 中只有 N 个是独立的。

对实信号同样有： $a_k^* = a_{-k}$

$$|a_k| = |a_{-k}|$$

$$\angle a_k = -\angle a_{-k}$$

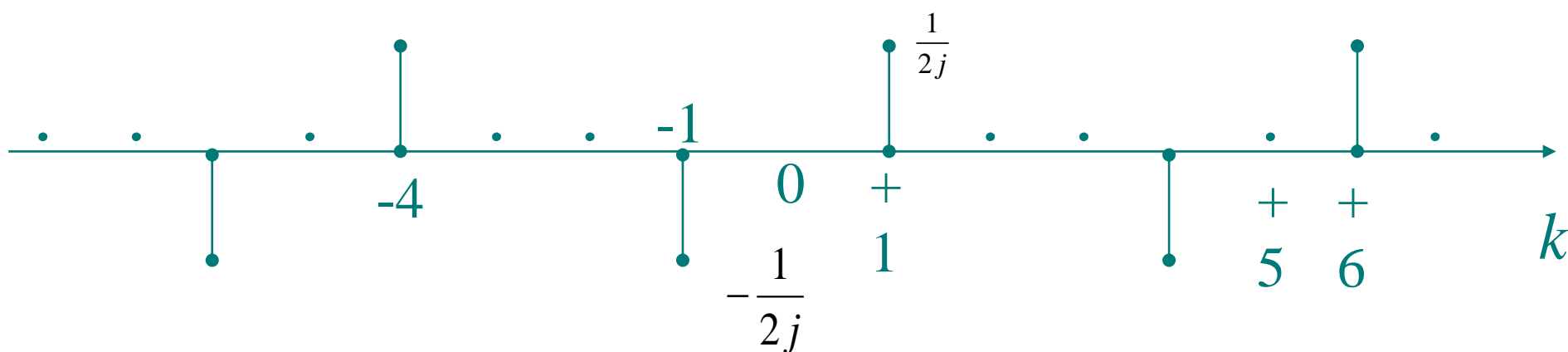
$$\operatorname{Re}[a_k] = \operatorname{Re}[a_{-k}]$$

$$\operatorname{Im}[a_k] = -\operatorname{Im}[a_{-k}]$$

例1: $x[n] = \sin w_0 n \quad N = 5$

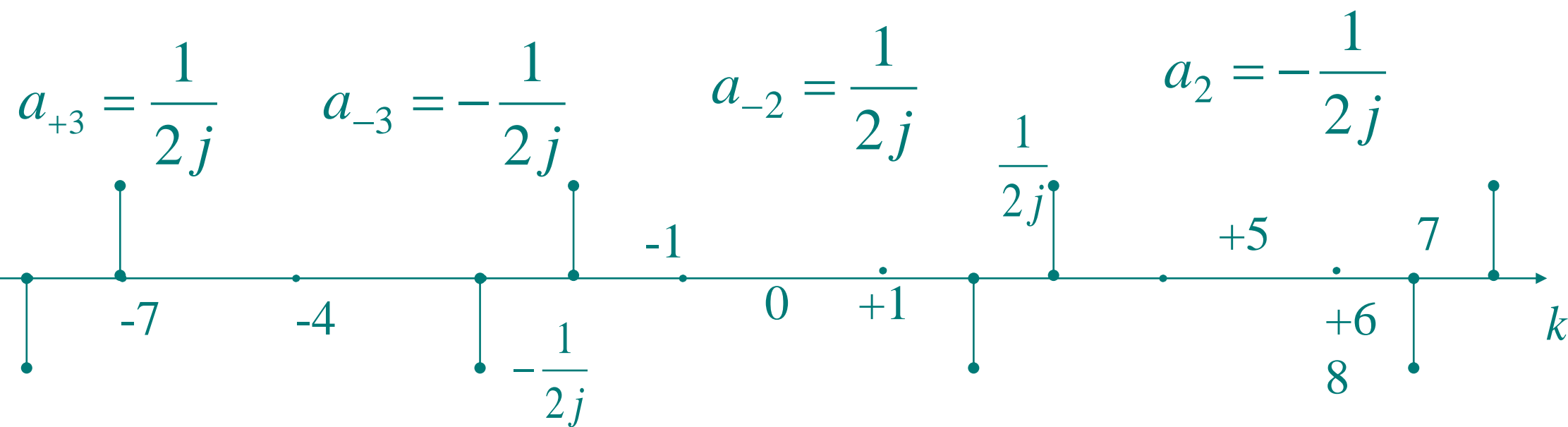
① $w_0 = \frac{2\pi}{N}$ $x[n] = \frac{1}{2j} [e^{jk\frac{2\pi}{N}n} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}]$

$a_1 = \frac{1}{2j}$ $a_{-1} = -\frac{1}{2j}$



$$\textcircled{2} \quad w_0 = \frac{2\pi}{N} m \quad m = 3$$

$$\text{则 } x[n] = \sin \frac{2\pi}{N} \cdot m \cdot n = \sin 3\left(\frac{2\pi}{N}\right) \cdot n$$



a_k 频谱图.

幅频特性
相频特性
实部
虚部

例2:

$$\begin{aligned}x(n) &= 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right) \\&= 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] + 3\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2n}\right] \\&= 1 + \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j\right]e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}j\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2n}\end{aligned}$$

$$a_0 = 1; a_1 = \frac{3-j}{2}; a_{-1} = \frac{3+j}{2}; a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2};$$

$$a_0 = 1; a_1 = \frac{3-j}{2}; a_{N-1} = \frac{3+j}{2}; a_2 = a_{N-2} = \frac{1}{2};$$

例3：离散时间信号 $x(n) = 1 + \cos(\frac{2\pi}{3}n) + 4\cos(\frac{2\pi}{5}n)$
求其傅里叶级数的系数。

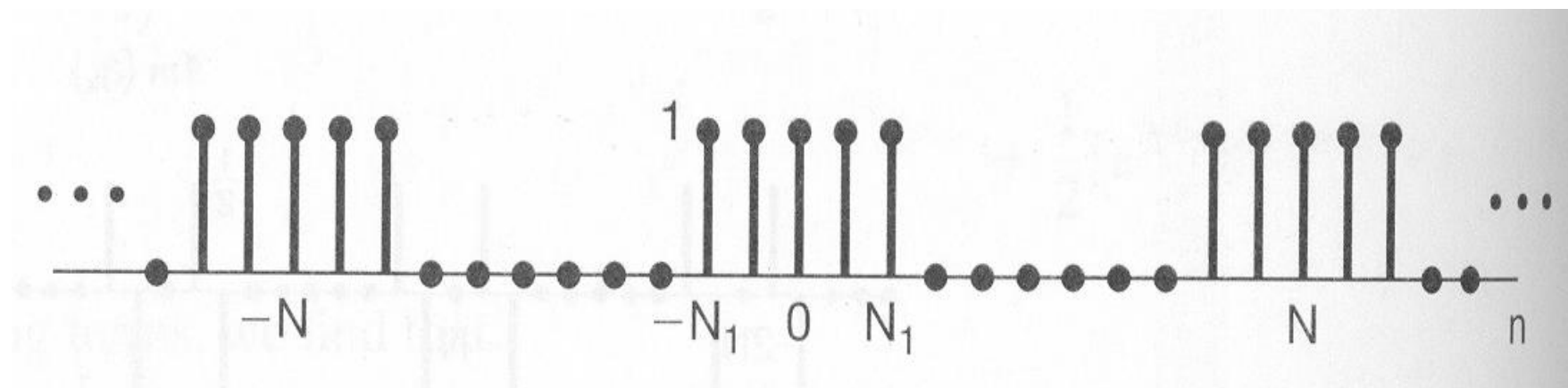
解：基波周期 $N=15$ ，基波频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{15}$ ，又根据欧拉公式

$$x(n) = 1 + \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{2\pi}{15} \times 5n} + e^{-j\frac{2\pi}{15} \times 5n} \right) + 2 \left(e^{j\frac{2\pi}{15} \times 3n} + e^{-j\frac{2\pi}{15} \times 3n} \right)$$

易得，

$$A_0 = 1, \quad A_3 = 2, \quad A_{-3} = 2 = A_{12}, \quad A_5 = \frac{1}{2}, \quad A_{-5} = -\frac{1}{2} = A_{10}$$

三. 周期性方波序列的频谱



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kN_1} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N_1+1)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

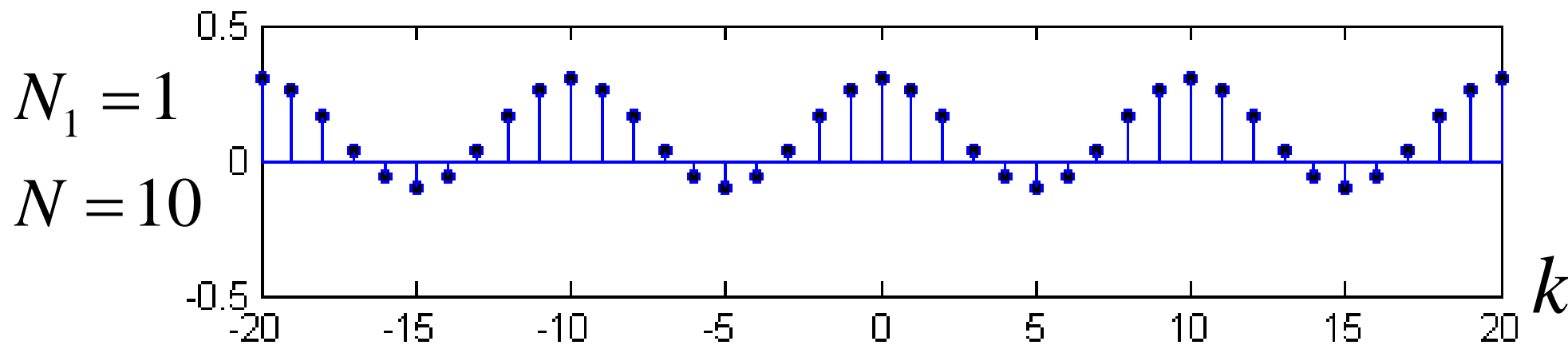
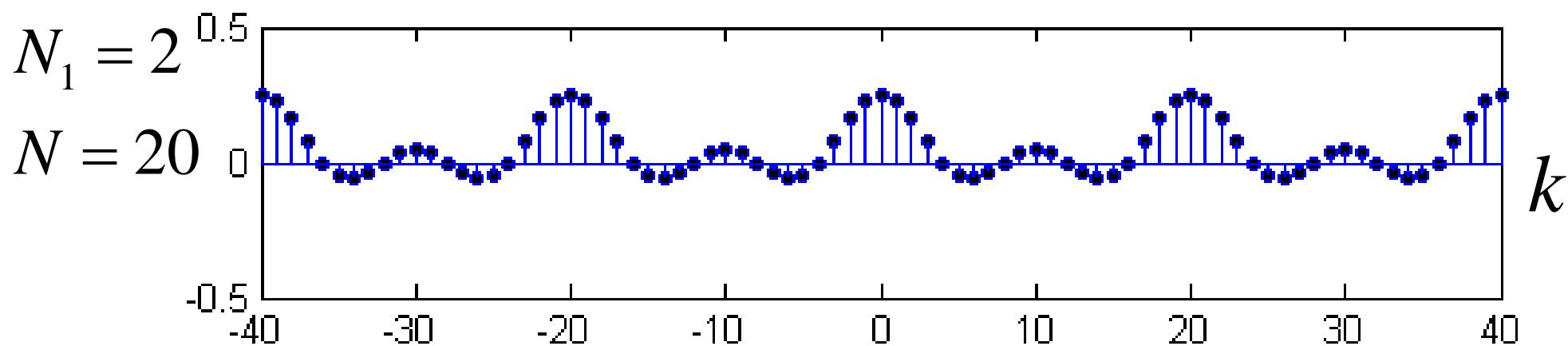
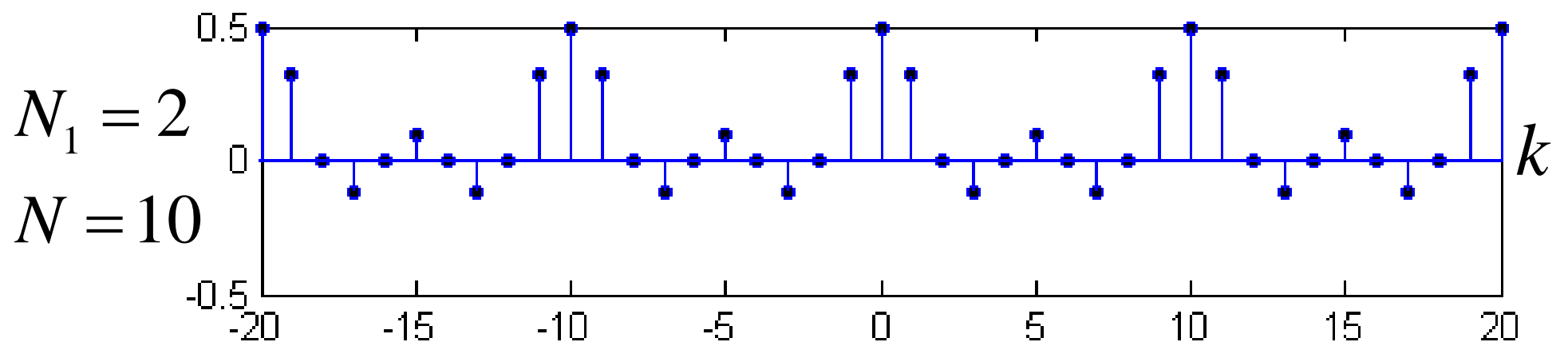
$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}k} \left[e^{j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})} \right]}{e^{-j\frac{\pi}{N}k} \left[e^{j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k} \right]}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\pi}{N} k (2N_1 + 1)}{\sin \frac{\pi}{N} k} \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N} \quad k = rN \text{时}$$

显然 a_k 的包络具有 $\frac{\sin \beta x}{\sin x}$ 的形状。

周期性方波序列的频谱



- ◆ 当 N_1 不变、 $N \uparrow$ 时，频谱的包络形状不变，只是幅度减小，谱线间隔变小。
- ◆ 当 N_1 改变、 N 不变时，由于 a_k 的包络具有 $\frac{\sin \beta x}{\sin x}$ 的形状，而 $\beta = 2N_1 + 1$ ，可知其包络形状一定发生变化。当 $N_1 \downarrow$ 时，包络的第一个零点会远离原点从而使频谱主瓣变宽。这一点也与连续时间周期矩形脉冲的情况类似。

周期序列的频谱也具有离散性、谐波性，当在区间 $-\pi \sim \pi$ 考查时，也具有收敛性。不同的是，总体上离散时间周期信号的频谱具有周期性。

三. DFS的收敛

DFS 是一个有限项的级数，确定 a_k 的关系式也是有限项的和式，因而不存在收敛问题，也不会产生Gibbs现象。

3.7 DFS的性质

Properties of Discrete-Time Fourier Series

DFS有许多性质，这里只选几个加以讨论。

1. 相乘 $x(n) \xleftrightarrow{DFS} a_k \quad y(n) \xleftrightarrow{DFS} b_k$

$$x(n)y(n) \xleftrightarrow{DFS} c_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} \quad \text{周期卷积}$$

2. 差分 $x(n) \xleftrightarrow{DFS} a_k$

$$x(n) - x(n - n_0) \xleftrightarrow{DFS} (1 - e^{-j\omega n_0}) a_k$$

3. 时域内插

$$x_m(n) = \begin{cases} x(n/m) & n = rm \\ 0 & n \neq rm \end{cases} \quad \text{若 } x(n) \text{ 以 } N \text{ 为周期,}$$

则 $x_m(n)$ 以 mN 为周期。令 $x_m(n) \xleftrightarrow{F} h_k$

$$h_k = \frac{1}{mN} \sum_{n=\langle mN \rangle} x_m(n) e^{-j\frac{2\pi}{mN}kn} \quad \text{令 } n = rm, \text{ 则有}$$

$$n \in 0 \sim mN \text{ 时 } r \in 0 \sim N$$

$$h_k = \frac{1}{mN} \sum_{r=\langle N \rangle} x(r) e^{-j\frac{2\pi}{mN}krm} = \frac{1}{mN} \sum_{r=\langle N \rangle} x(r) e^{-j\frac{2\pi}{N}kr} = \frac{1}{m} a_k$$

4. Parseval定理 $x(n) \xleftrightarrow{DFS} a_k$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x(n)|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

左边是信号在一个周期内的平均功率，右边是信号的各次谐波的总功率。

上式表明：一个周期信号的平均功率等于它的所有谐波分量的功率之和。也表明：周期信号的功率既可以由时域求得，也可以由频域求得。

例：关于某一序列给出如下的条件

① $x[n]$ 是周期的，周期 $N=6$.

②
$$\sum_{n=0}^5 x[n] = 2$$

③
$$\sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = 1$$

④ 在满足上述三个条件的所有信号中， $x[n]$ 具有每个周期内最小的功率.

$$\text{解: } \sum_{n=0}^5 x[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = N a_k \quad k=0 \text{ 时}$$

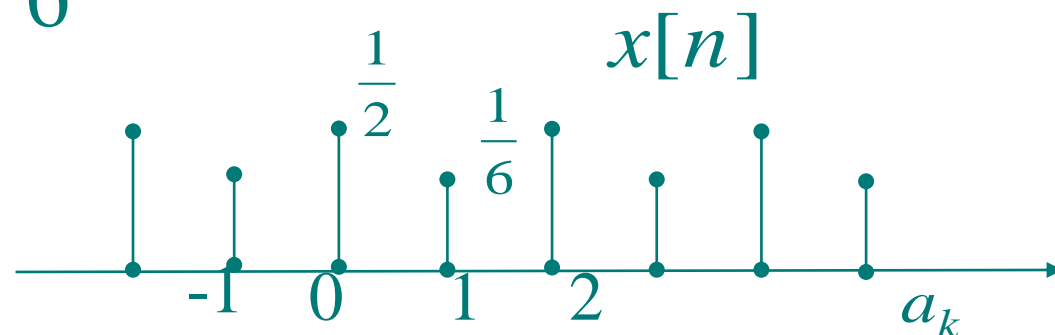
$$N a_0 = \sum_{n=0}^5 x[n] = 2 \quad \therefore a_0 = \frac{1}{3}$$

$$\text{又 } \sum_{n=2}^7 (-1)^n x[n] = \sum_{n=2}^7 e^{j\pi n} x[n] = \sum_{n=2}^7 e^{j \frac{2\pi \cdot 3}{6} n} x[n] = N a_3$$
$$\therefore a_3 = \frac{1}{6}$$

$$\text{又 } P = \sum_{n=0}^5 |a_k|^2 \text{ 要求 } P \text{ 最小, 则 } a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$$

$$\therefore x[n] = a_0 + a_3 e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (-1)^n$$

$x[n]$ 如右图所示:



3.8 傅里叶级数与LTI系统

Fourier Series and LTI Systems

LTI系统对复指数信号所起的作用只是给输入信号加权了一个相应的特征值。

对连续时间系统 $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$

对离散时间系统 $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$

称 $H(s)$ 、 $H(z)$ 为系统的系统函数。

如果 $s = j\omega$ 有 $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$

$H(j\omega)$ 被称为连续时间LTI系统的频率响应

如果 $s = e^{j\omega}$ 则 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$

$H(e^{j\omega})$ 称为离散时间LTI系统的频率响应

$H(e^{j\omega})$ 对 ω 而言, 以 2π 为周期

如果一个LTI系统输入周期性信号 $x(t)$ 或 $x(n)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

则 $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$

$$y(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

* 可见，LTI系统对周期信号的响应仍是一个周期信号，LTI系统的作用是对各个谐波频率的信号分量进行不同的加权处理。

某 LTI 系统的单位冲激响应 $h(t) = e^{-t}u(t)$ ，输入 $x(t)$ 是一个周期信号，它可以表示为

$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 A_k e^{j2\pi kt}$$

其中： $A_0 = 1, A_1 = A_{-1} = 1/2, A_2 = A_{-2} = 1/3, A_3 = A_{-3} = 1/4$ ，求该系统的输出响应 $y(t)$ 。

$$H(jk\Omega_0) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-jk\Omega_0\tau} d\tau = -\frac{1}{1+jk\Omega_0} e^{-(1+jk\Omega_0)\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+jk\Omega_0}$$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^3 B_k e^{j2\pi kt}$$

其中 $B_k = A_k H(jk2\pi)$ ，即：

$$B_0 = 1,$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j2\pi} \right); \quad B_{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j2\pi} \right)$$

$$B_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+j4\pi} \right); \quad B_{-2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-j4\pi} \right)$$

$$B_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+j6\pi} \right); \quad B_{-3} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-j6\pi} \right)$$

例：某离散时间LTI系统， $h(n) = \alpha^n u(n)$ ， $-1 < \alpha < 1$
输入为： $x(n) = \cos(\frac{2\pi}{N}n)$ ，求输出 $y(n)$ 。

$$x(n) = \frac{1}{2} [e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}] \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$\therefore H(e^{j\frac{2\pi}{N}}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \quad H(e^{-j\frac{2\pi}{N}}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}$$

由 $b_k = a_k H(e^{j\frac{2\pi}{N}k})$ 得 $b_1 = \frac{1/2}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}}} \quad b_{-1} = \frac{1/2}{1 - \alpha e^{j\frac{2\pi}{N}}}$

$$\therefore y(n) = \sum_{k=\pm 1} b_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

3.9 滤波 Filtering

本节移至第6章讲授。

3.10 用微分方程描述的连续时间滤波器举例

本节移至第6章讲授相关内容时由学生自学。

3.11 用差分方程描述的离散时间滤波器举例

本节移至第6章讲授相关内容时由学生自学。

3.12 小结 Summary

本章主要讨论了：

- ❖ 复指数函数是一切LTI系统的特征函数。
- ❖ 建立了用傅里叶级数表示周期信号的方法，实现了对周期信号的频域分解。
- ❖ 以周期性矩形脉冲信号为典型例子，研究了连续时间周期信号和离散时间周期信号的频谱特点及信号参量改变对频谱的影响。

- ❖ 通过对连续时间傅氏级数和离散时间傅氏级数的讨论，既看到它们的基本思想与讨论方法完全类似，又研究了它们之间的重大区别。
- ❖ 在对信号分析的基础上，研究了LTI系统的频率响应及LTI系统对周期信号的响应。

本章作业

3.3 3.22 (a) a,b,c

3.5 3.8 3.41 3.44

3.11 3.28 (a) b, c 3.30 3.48a,b,c,d

3.34 3.36

<http://gr.xjtu.edu.cn/web/jgzhang>