总复习

贺丽君
信息与通信工程学院
Email: lijunhe@mail.xjtu.edu.cn
2023-04

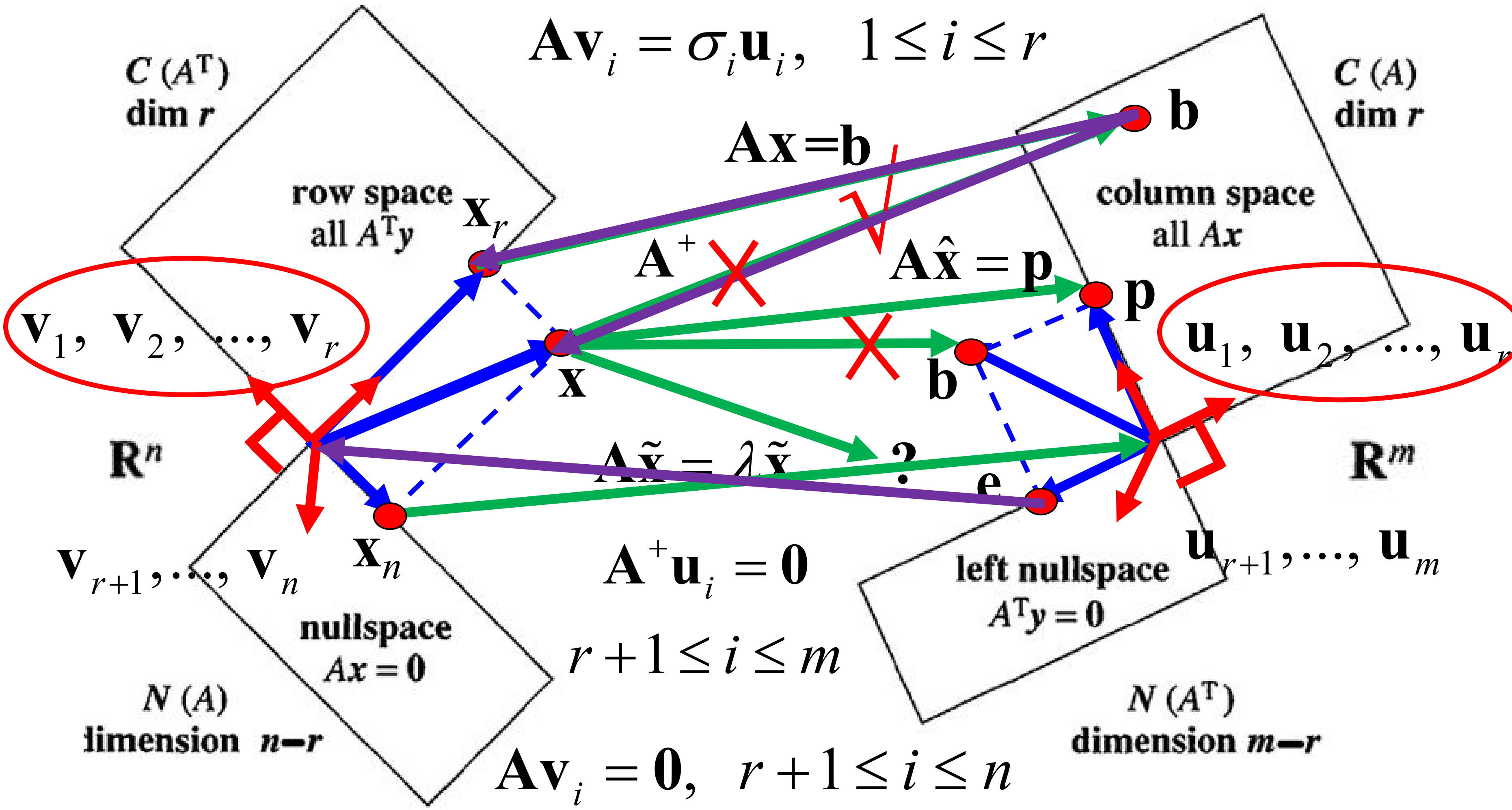
内容提要

- 内容总结
- 典型例题

内容提要

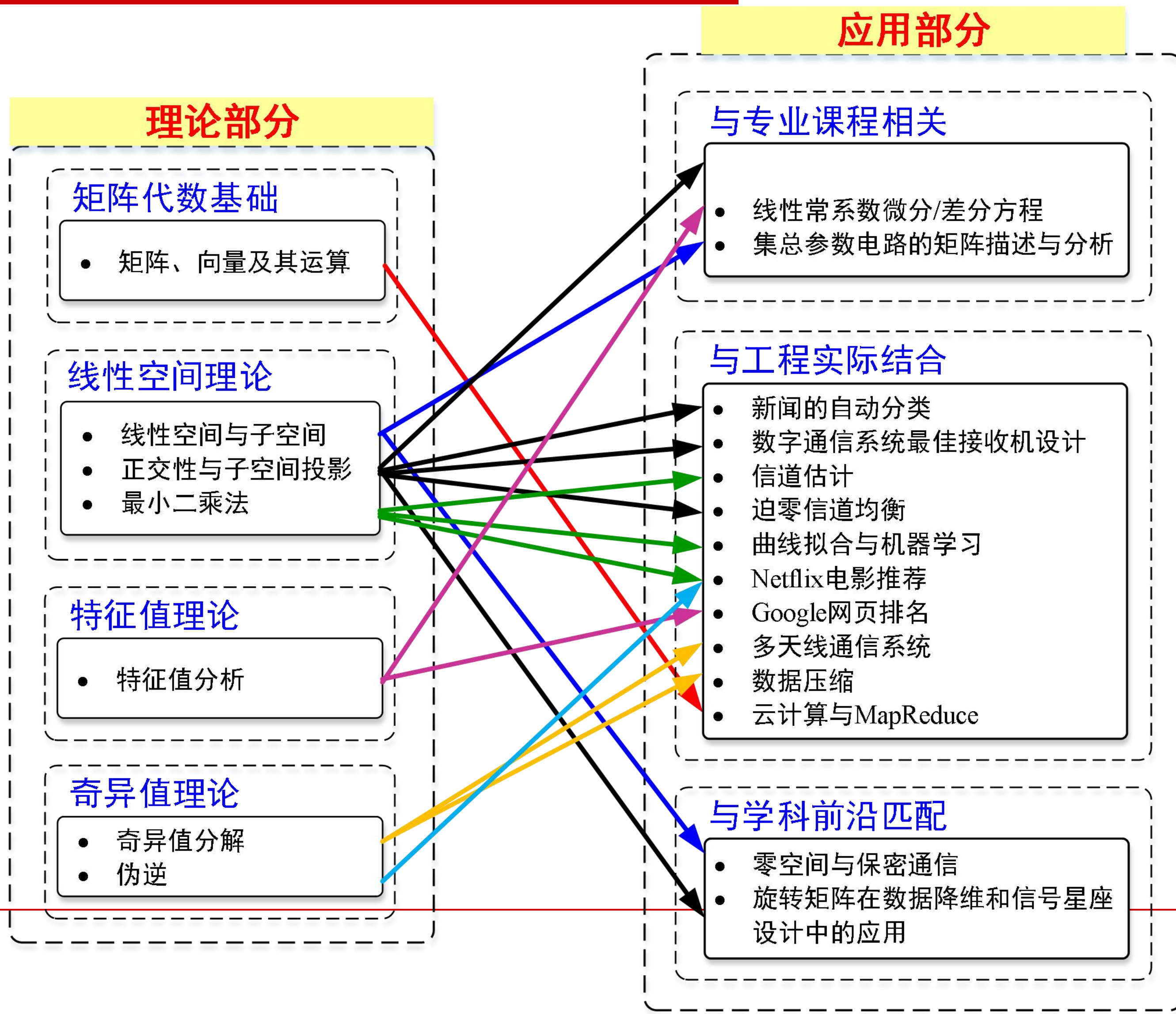
- 内容总结
- 典型例题

课程逻辑体系



$\mathbf{Av}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r$
$C(A^T)$
dim r
row space
all $A^T y$
$\mathbf{x}_r$
$\mathbf{Ax=b}$
$\mathbf{b}$
$C(A)$
dim r
column space
all Ax
$\mathbf{A}^+$
$\mathbf{A\hat{x}=p}$
$\mathbf{p}$
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$
$\mathbf{x}$
$\mathbf{b}$
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$
$\mathbf{R}^n$
$\mathbf{A\tilde{x}} = \lambda \mathbf{\tilde{x}}$
?
$\mathbf{e}$
$\mathbf{R}^m$
$\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$
$\mathbf{x}_n$
$\mathbf{A}^+ \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$
$\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$
left nullspace
$A^T y = 0$
nullspace
$Ax = 0$
$r+1 \le i \le m$
$N(A)$
dimension $n-r$
$N(A^T)$
dimension $m-r$
$\mathbf{Av}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$

课程内容体系



理论部分
矩阵代数基础
• 矩阵、向量及其运算
线性空间理论
• 线性空间与子空间
• 正交性与子空间投影
• 最小二乘法
特征值理论
• 特征值分析
奇异值理论
• 奇异值分解
• 伪逆
应用部分
与专业课程相关
• 线性常系数微分/差分方程
• 集总参数电路的矩阵描述与分析
与工程实际结合
• 新闻的自动分类
• 数字通信系统最佳接收机设计
• 信道估计
• 迫零信道均衡
• 曲线拟合与机器学习
• Netflix电影推荐
• Google网页排名
• 多天线通信系统
• 数据压缩
• 云计算与MapReduce
与学科前沿匹配
• 零空间与保密通信
• 旋转矩阵在数据降维和信号星座设计中的应用

知识点小结

➢ 矩阵、向量及其运算

1. 矩阵乘法(含分块乘法)的内涵与计算

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_1 & \cdots & \mathbf{Ab}_p \end{bmatrix}$$

A的各列向量的线性组合

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

B的各行向量的线性组合

知识点小结

➢ 矩阵、向量及其运算

1. 矩阵乘法(含分块乘法)的内涵与计算
2. 消去矩阵与置换矩阵(性质)

- 对n阶方阵，共有$n!$个置换矩阵
- 如果P是置换矩阵，则P^T也是置换矩阵
- 若干个置换矩阵的乘积仍然是置换矩阵
- 如果P是置换矩阵，则P^{-1}也是置换矩阵
- 对于置换矩阵P，$P^T = P^{-1}$

知识点小结

➢ 矩阵、向量及其运算

1. 矩阵乘法(含分块乘法)的内涵与计算
2. 消去矩阵与置换矩阵(性质)
3. 逆矩阵与Gauss-Jordan方法(二阶方阵求逆)

构造增广矩阵

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{A}\quad\quad \mathbf{I}} \rightarrow \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]}_{\mathbf{I}\quad\quad \mathbf{A}^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{A}\quad \mathbf{I}]$$

注意到

$$\mathbf{E}[\mathbf{A}\quad \mathbf{I}] = [\mathbf{EA}\quad \mathbf{EI}] = [\mathbf{I}\quad ?] \Rightarrow \mathbf{EA} = \mathbf{I}$$

$$\boxed{? = \mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1}}$$

知识点小结

➢ 矩阵、向量及其运算

1. 矩阵乘法(含分块乘法)的内涵与计算
2. 消去矩阵与置换矩阵 (性质)
3. 逆矩阵与Gauss-Jordan方法(二阶方阵求逆)
4. 矩阵的LU分解
5. 向量的内积与范数

知识点小结

- 矩阵、向量及其运算

下三角阵L：对角线元素是1，对角线下方是消元乘子

$$A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\quad U=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$$

$$A=LU,EA=U\Rightarrow L=E^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$$

$$u_1=a_1\Rightarrow a_1=u_1$$

$$u_2=a_2-l_{21}a_1\Rightarrow a_2=l_{21}u_1+u_2$$

$$u_3^{(1)}=a_3-l_{31}a_1\Rightarrow a_3=u_3^{(1)}+l_{31}u_1$$

$$u_3^{(2)}=u_3^{(1)}-l_{32}u_2\Rightarrow u_3^{(2)}=a_3-l_{31}u_1-l_{32}u_2$$

$$a_3=l_{31}u_1+l_{32}u_2+u_3^{(2)}$$

知识点小结

➢ 线性空间与子空间

1. 线性空间、子空间的概念

- 设V是若干向量的集合，V非空且对加法和数乘运算封闭，则集合V称为向量空间
- 向量空间也称为**线性空间**
- 任何向量空间必包含零向量

知识点小结

➢ 线性空间与子空间

1. 线性空间、子空间的概念
2. 空间的基底与维数、子空间正交、正交补
3. 矩阵的四个基本子空间及其相互关系

知识点小结

线性空间与子空间

列空间的定义

矩阵A的列空间(记作$C(\mathrm{A})$)由该矩阵各列的所有线性组合组成，即所有可能的向量Ax

列空间的基底与维数

- A的主列构成$C(\mathrm{A})$的基底
- 若A为$m\times n$矩阵，则$C(\mathrm{A})$是$\mathbf{R}^m$的子空间，且$C(\mathrm{A})$的维数为r

知识点小结

- 线性空间与子空间
  - 零空间的定义

    线性方程组Ax=0的全部解构成矩阵A的零空间，用$N(\mathrm{A})$表示。

  - 零空间的基底与维数
    - 齐次方程组Ax=0的特解构成$N(\mathrm{A})$的基底
    - 若A为$m \times n$矩阵，则$N(\mathrm{A})$是$\mathbf{R}^n$的子空间，其维数等于n-r

知识点小结

- 线性空间与子空间
  - 行空间的定义

    矩阵A的行空间表示由A的各行向量所张成的子空间，用$C(\mathbf{A}^T)$表示。

  - 几点说明
    - 矩阵A的行空间即为$\mathbf{A}^T$的列空间
    - 若A为$m\times n$矩阵，则$C(\mathbf{A}^T)$是$\mathbf{R}^n$的子空间

知识点小结

- 线性空间与子空间
  - 左零空间的定义

矩阵A的左零空间定义为矩阵A^T的零空间，用$N(A^T)$表示。

$$A^T y = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y^T A = 0^T$$

“左零”得名的原因

- 若A为$m \times n$矩阵，则$N(A^T)$是R^m的子空间
- 左零空间的维数是$m-r$

知识点小结

- 线性空间与子空间
  - 左零空间的基底

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{E}} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

r个主行，线性无关

m-r个全零行

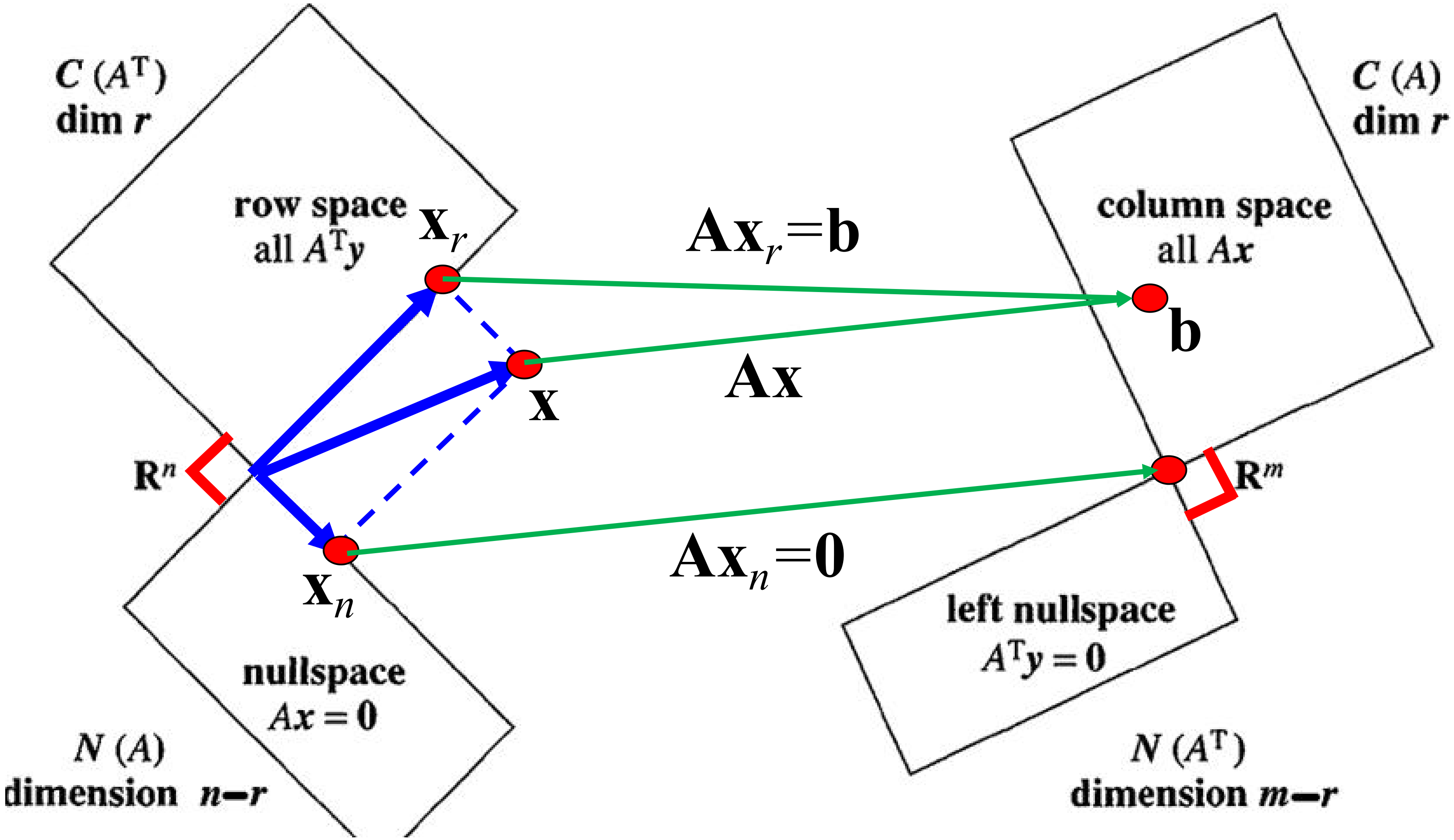
令

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{EA} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{A} \\ \mathbf{u}_2^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T\mathbf{A} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_k^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T, \quad k = r+1, \ldots, m$$

basis for $N(\mathbf{A}^T)$

A的左零空间的基底是初等行变换矩阵E的最后m-r行对应的向量

四个基本子空间的关系



1.线性变换从R^n映射到列空间；2.不是映射到R^m空间；3.并非所有线性变化均可逆

知识点小结

➢ 线性空间与子空间

1. 线性空间、子空间的概念
2. 空间的基底与维数、子空间正交、正交补
3. 矩阵的四个基本子空间及其相互关系
4. 线性方程组解的存在性与解的结构
5. 矩阵的简化行阶梯形式

知识点小结

➢ 线性空间与子空间

例2（续）

简化行阶梯形式(rref)

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow \mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

简化行阶梯矩阵的特点：

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{F}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

- 主元均为1，主元上下均为零
- 主行、主列相交处的元素构成单位阵

知识点小结

➢ 线性空间与子空间

$$\mathbf{R}=\begin{array}{cccc} & \mathrm{F} & & \mathrm{F} \\ \end{array}$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}=c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax=0} \Leftrightarrow \mathbf{Rx=0} \quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{N}=\begin{bmatrix} \mathbf{-F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

零空间矩阵，各列由特解组成

知识点小结

➢ 线性空间与子空间

Ax=b解的结构

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\1&3&1&6&7\end{bmatrix}\longrightarrow \begin{array}{ccccc}\color{red}{P}&\color{blue}{F}&\color{red}{P}&\color{blue}{F}&\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\end{array}\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=[\mathbf{R}\ \ \mathbf{d}]$$

➢ 第一步：求特解x_p

□ 令自由变量x_2、x_4为零 $\mathbf{R}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\text{pivot}}\\ \mathbf{x}_{\text{free}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{F}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\text{pivot}}\\ \mathbf{x}_{\text{free}}\end{bmatrix}=\mathbf{d}$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I}\mathbf{x}_{\text{pivot}}+\mathbf{F}\mathbf{x}_{\text{free}}=\mathbf{d}^r$$

$$\boxed{\mathbf{x}_{\text{pivot}}=\mathbf{d}^r} \xLeftarrow{\ \ } \mathbf{x}_{\text{free}}=\mathbf{0}$$

主元变量x_1、x_3即为d中非零元素

知识点小结

- 线性空间与子空间

Ax=b解的结构

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\1&3&1&6&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}P&F&P&F&\end{array}\\\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}=[\mathbf{R}\ \ \mathbf{d}]$$

- 第二步：求齐次方程的解x_n

$$\mathbf{Rx}=\mathbf{0}\Longrightarrow\mathbf{N}=\begin{bmatrix}-3&-2\\1&0\\0&-4\\0&1\end{bmatrix}\qquad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\6\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-2\\0\\-4\\1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{N}=\begin{bmatrix}-\mathbf{F}\\\mathbf{I}\end{bmatrix}}$$

完全解

知识点小结

➤ 线性空间与子空间

- $r<m, r<n$，简化行阶梯矩阵具有如下形式：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

若要方程组有解，则d的最后m-r个分量必为0

- $r<m, r<n$，方程组Ax=b没有解或有无穷多解

知识点小结

➢ 线性空间与子空间

- $r<m, r=n$：列满秩的情况，简化行阶梯矩阵具有如下形式：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow n\times n\text{单位阵} \\ \longleftarrow m\text{-}n\text{个全零行} \end{matrix}$$

- A的所有列都是主列，N(A)只包含零向量
- 线性方程组Ax=b无解或只有一个解

知识点小结

➢ 线性空间与子空间

- $r=m, r<n$：行满秩的情况，简化行阶梯矩阵具有如下形式：

$$\mathbf{R} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{F}]$$

m个线性无关的列

$m\times m$单位阵　　$n\text{-}m$个自由列(Ax=0的特解)

- A的所有行都是主行，$C(\mathbf{A})=\mathbf{R}^m$。

- 对任意b，线性方程组Ax=b有无穷多解

知识点小结

➢ 线性空间与子空间

- $r=m=n$：A为可逆方阵，简化行阶梯矩阵具有如下形式：

$$\mathbf{R}=[\mathbf{I}]$$

- 对任意b，线性方程组Ax=b有唯一解

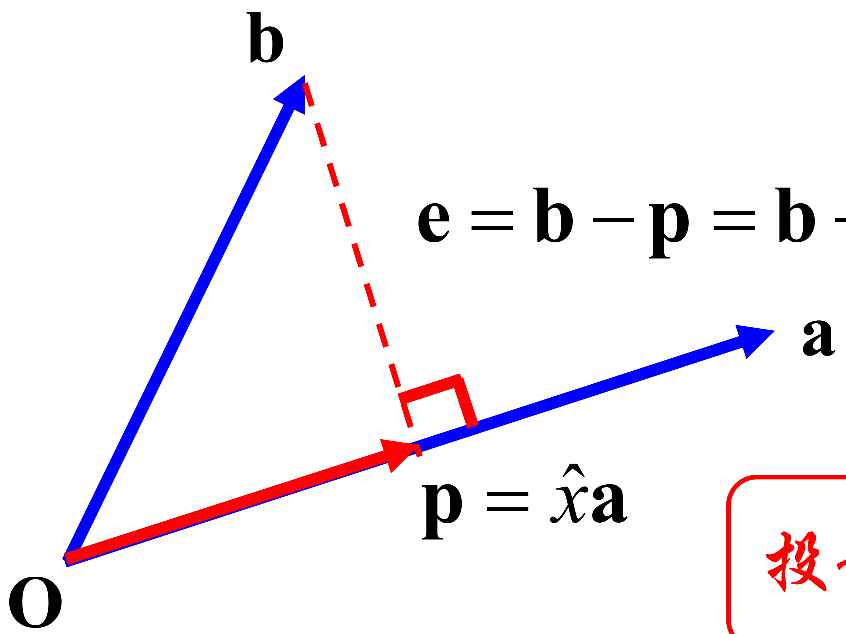
$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

知识点小结

- 正交性与子空间投影

1. 子空间投影的概念及计算
2. 投影矩阵及其性质

向直线投影



$$\mathbf{e}=\mathbf{b}-\mathbf{p}=\mathbf{b}-\hat{x}\mathbf{a}$$

正交性原理

$$\mathbf{a}\bullet\left(\mathbf{b}-\hat{x}\mathbf{a}\right)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{x}=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}$$

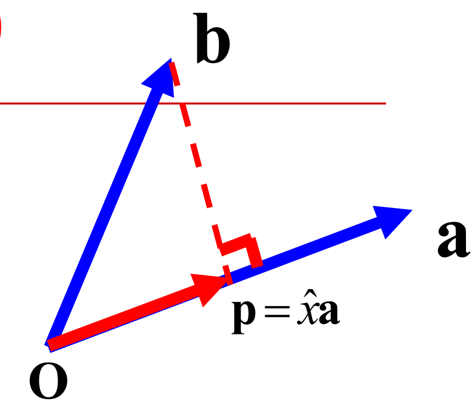
$$=\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

投影矩阵P

问题：在a上找一点，距离b最近？

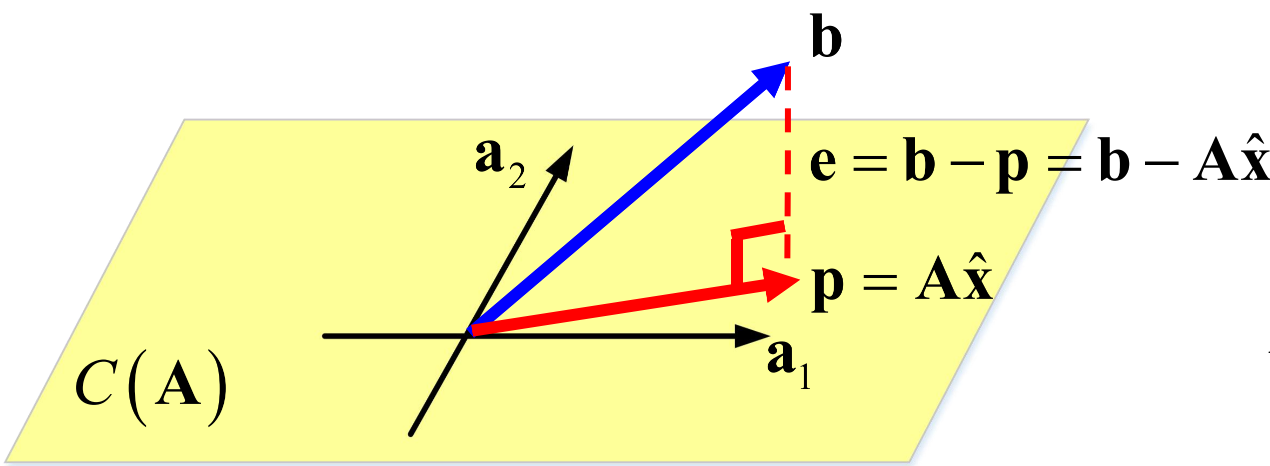
投影矩阵 (Projection Matrix)

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$



- P的列空间是通过a的一条直线
- P由列向量乘以行向量得到，它的秩等于1，称作秩1矩阵(rank-1 matrix)
- P是对称矩阵，即：$\mathbf{P}=\mathbf{P}^T$
- P是等幂矩阵，即：$\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$
- I-P也是投影矩阵，将b投影到与a垂直的平面

子空间投影



假设各列线性无关

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_n\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} — a_1^{\mathrm{T}} — \\ \vdots \\ — a_n^{\mathrm{T}} — \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^T}\begin{bmatrix} b-A\widehat{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{x}}=\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{p}=\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

$$\boxed{\mathbf{P}=\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T}$$

$$\boxed{\mathbf{P}^2=\mathbf{P},\ \mathbf{P}^T=\mathbf{P}}$$

子空间投影

知识点小结

- **正交性与子空间投影**

1. 子空间投影的概念及计算
2. 投影矩阵及其性质
3. 最小二乘法

最小二乘法的提出——直线拟合

$$\text{minimize } \left\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\right\|^2$$

向量b可以分解为两部分之和：

$$\mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{e}$$

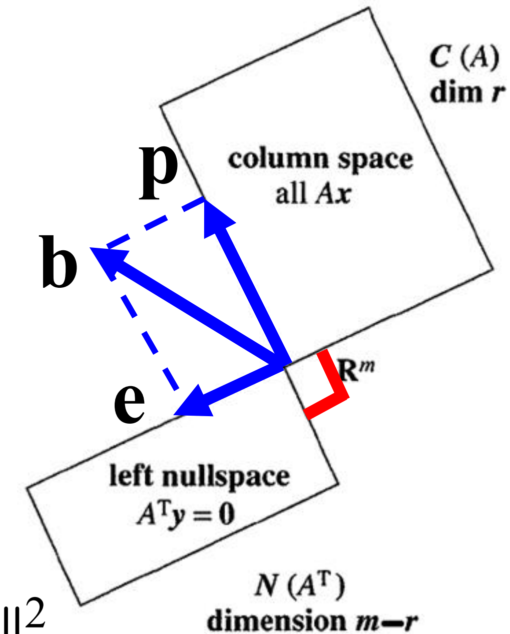
列空间分量

左零空间分量

$$\left\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\right\|^2=\left\|\mathbf{Ax}-\mathbf{p}-\mathbf{e}\right\|^2=\underline{\left\|\mathbf{Ax}-\mathbf{p}\right\|^2}+\left\|\mathbf{e}\right\|^2$$

该项等于零，则目标函数最小

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}=\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$ (最小二乘解, Least Squares)



知识点小结

- 正交性与子空间投影

1. 子空间投影的概念及计算
2. 投影矩阵及其性质
3. 最小二乘法
4. 标准正交向量组、正交矩阵、特殊的正交矩阵

标准正交向量组

定义

- 当向量$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$满足如下条件时，称这$n$个向量是标准正交的：

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

正交性

单位向量

- 若矩阵的各列由标准正交向量构成，则将该矩阵记作Q，它满足如下性质：

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

正交矩阵

定义

若矩阵Q的各列为标准正交向量且Q为方阵，则称Q为正交矩阵。正交矩阵满足如下性质：

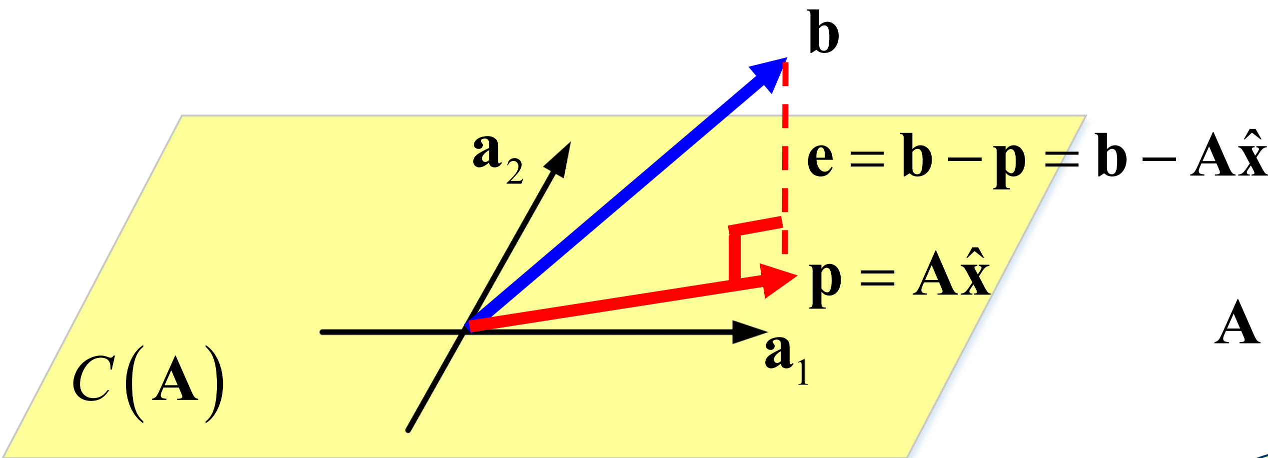
- Q的各行向量也是标准正交的向量

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T=\mathbf{I}$$

- Q的逆等于其转置

$$\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}^{-1}$$

正交矩阵与子空间投影



标准正交基

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1\cdots\mathbf{q}_n]$$

解释了正交矩阵的性质

$$\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{p}=\mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{b} \xRightarrow{m=n} C(\mathbf{A})=\mathbf{R}^m \xRightarrow[\mathbf{Pb}=\mathbf{b}]{\mathbf{b}\text{在列空间内}} \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T=\mathbf{I}$$

$$\mathbf{P}=\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$$

$$\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{Q}^T\mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{b}$$

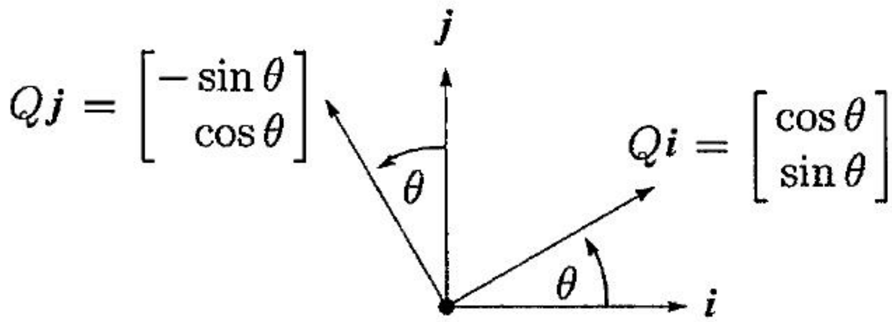
$$\mathbf{b}=\mathbf{q}_1(\mathbf{q}_1^T\mathbf{b})+\mathbf{q}_2(\mathbf{q}_2^T\mathbf{b})+\cdots+\mathbf{q}_n(\mathbf{q}_n^T\mathbf{b})$$

正交基的分量之和

几个典型的正交矩阵

- 旋转

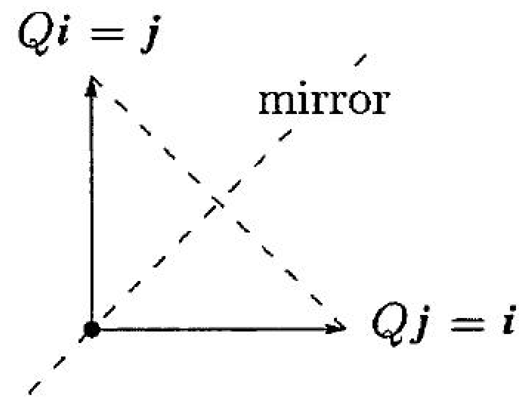
$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



- 置换

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 反射



$$Q = I - 2uu^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{Qx} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{uu}^T - \mathbf{uu}^T\right)\mathbf{x}$$

$$= \left(\mathbf{I} - \mathbf{uu}^T\right)\mathbf{x} - \mathbf{uu}^T\mathbf{x}$$

知识点小结

➢ 正交性与子空间投影

1. 子空间投影的概念及计算
2. 投影矩阵及其性质
3. 最小二乘法
4. 标准正交向量组、正交矩阵、特殊的正交矩阵
5. Gram-Schmidt正交化与矩阵的QR分解

Gram-Schmidt正交化

问题：如何由一组给定的向量$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、$\mathbf{a}_3$，构造一组标准正交向量$\mathbf{q}_1$、$\mathbf{q}_2$、$\mathbf{q}_3$?

假定$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、$\mathbf{a}_3$线性无关：

线性相关的情况?

$$\mathbf{a}_1 \Rightarrow \mathbf{q}_1 = \mathbf{a}_1 / \|\mathbf{a}_1\|$$

$$\mathbf{a}_2 \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{a}_2 - \left(\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2\right)\mathbf{q}_1 \Rightarrow \mathbf{q}_2 = \mathbf{B} / \|\mathbf{B}\|$$

$$\mathbf{a}_3 \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{a}_3 - \left(\mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_3\right)\mathbf{q}_1 - \left(\mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_3\right)\mathbf{q}_2$$

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{C} / \|\mathbf{C}\|$$

矩阵的QR分解

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_3 \\ & \mathbf{q}_2^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{q}_2^T\mathbf{a}_3 \\ & & \mathbf{q}_3^T\mathbf{a}_3\end{bmatrix}$$

A **Q** **R**

- 任意列满秩矩阵A都可以分解成一个列向量标准正交的矩阵Q和一个上三角矩阵R的乘积
- 上三角矩阵R的主对角线元素大于零，其数值等于正交化过程中产生的正交向量的范数

知识点小结

- 特征值分析

1. 特征值与特征向量、特殊矩阵的特征值

特征值与特征向量(Eigenvalue/vector)

➢ 定义

设A是一个n阶方阵，如果存在一个复数λ和一个非零向量x，使得

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$$

则称λ为矩阵A的特征值，x为A的对应于(或称属于)λ的特征向量。

$$e^{st}\rightarrow y(t)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]e^{st}$$

$$e^{st}\rightarrow H(s)e^{st}$$

特征值与特征向量的物理含义?

特征值与特征向量的计算

特征值的计算

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\underbrace{\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})}_{\text{特征多项式}}=0$$

特征方程

特征向量的计算

解空间：特征子空间

求解齐次线性方程组$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$，找出全部特解，即得对应于λ的线性无关的特征向量。

属于不同特征值的特征向量是线性无关的

关于特征值的几条性质

- 如果A是奇异矩阵，则$\lambda=0$是A的特征值
- 如果λ是A的特征值，则λ^k是A^k的特征值
- 如果λ是可逆矩阵A的特征值，则λ非零且λ^{-1}是A^{-1}的特征值
- 三角矩阵的特征值等于其对角线元素，I的特征值是1
- 矩阵A的全部特征值之积等于矩阵A的行列式，全部特征值之和等于矩阵A的对角线元素之和(A的迹，trace)
- 一般来说，A+B的特征值不等于A与B的特征值之和，AB的特征值不等于A与B的特征值之积

几个特殊矩阵的特征值

- 投影矩阵

$$\mathbf{P}=\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{Px}=\lambda\mathbf{x}\\ \mathbf{x}\in C(A),\mathbf{Px}=\mathbf{x},\lambda=1\\ \mathbf{x}\perp C(A),\mathbf{Px}=\mathbf{0},\lambda=0\end{array}}$$

特征值：1,0

- 反射矩阵

$$\mathbf{Q}=\mathbf{I}-2\mathbf{u}\mathbf{u}^{T}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{x}\parallel\mathbf{u},\mathbf{Qx}=-\mathbf{x},\lambda=-1\\ \mathbf{x}\perp\mathbf{u},\mathbf{Qx}=\mathbf{x},\lambda=1\end{array}}$$

特征值：-1,+1

- 90°旋转矩阵

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

特征值：i,-i

知识点小结

- 特征值分析

1. 特征值与特征向量、特殊矩阵的特征值
2. 矩阵的对角化与特征分解

矩阵的对角化

矩阵对角化定理

假设 n 阶方阵A有 n 个线性无关的特征向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n$，将它们作为列向量构造特征向量矩阵S，则 $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ 是对角阵，且对角线元素等于A的特征值，将其称为特征值矩阵，即：

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

知识点小结

➢ 特征值分析

1. 特征值与特征向量、特殊矩阵的特征值
2. 矩阵的对角化与特征分解
3. 矩阵指数函数集特征值分解在差分/微分方程中的应用(矩阵可以对角化的情况)

特征值分析与线性常系数微分方程

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{u} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{du_1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

- **A可以对角化的情况**

$$\mathbf{u}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{u}=\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}$$

$$(0)=c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n$$

特征值决定
系统稳定性

$\Updownarrow$ 解耦

$$\frac{d\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}\right)}{dt}=\mathbf{\Lambda}\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}\right) \Rightarrow \mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}c_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}c_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}=\mathbf{S}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}c_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}c_n \end{bmatrix}$$

知识点小结

➢ 特征值分析

1. 特征值与特征向量、特殊矩阵的特征值

2. 矩阵的对角化与特征分解

3. 在差分/微分方程中的应用(矩阵可以对角化的情况)

4. Markov矩阵及其性质

Markov矩阵的性质

- 若**A**为Markov矩阵，且$\mathbf{u}_0$为一非负向量，则$\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{u}_0$为非负向量
- 若**A**为Markov矩阵且非负向量$\mathbf{u}_0$的各元素之和等于1，则$\mathbf{u}_1=\mathbf{A}\mathbf{u}_0$，$\mathbf{u}_2=\mathbf{A}^2\mathbf{u}_0$，…，$\mathbf{u}_k= \mathbf{A}^k\mathbf{u}_0$的各元素之和都等于1
- 如果**A**是正的Markov矩阵(各元素大于0，且每一列元素之和等于1)，则$\lambda=1$是唯一的模为1的特征值，其代数重数和几何重数均为1，与该特征值对应的特征向量各分量均大于0；其余所有特征值的模均小于1

$\mathbf{A}-\mathbf{I}$各行向量相加为零$\Rightarrow$行向量线性相关

$\det(\mathbf{A}-\mathbf{I})=0 \Rightarrow (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$在$\lambda=1$时，有非零解

正Markov矩阵

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{u}_0$$

$$= c_1(\lambda_1)^k \mathbf{x}_1 + c_2(\lambda_2)^k \mathbf{x}_2 + \ldots + c_n(\lambda_n)^k \mathbf{x}_n$$

假设上式中的各项满足：

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

如果A是正Markov矩阵，则：

$$\mathbf{u}_k \to c_1 \mathbf{x}_1,\quad k \to \infty$$

最大特征值所对应的特征向量决定稳态，稳态与初值无关；第二大的特征值控制收敛速度

知识点小结

- 奇异值分解与伪逆

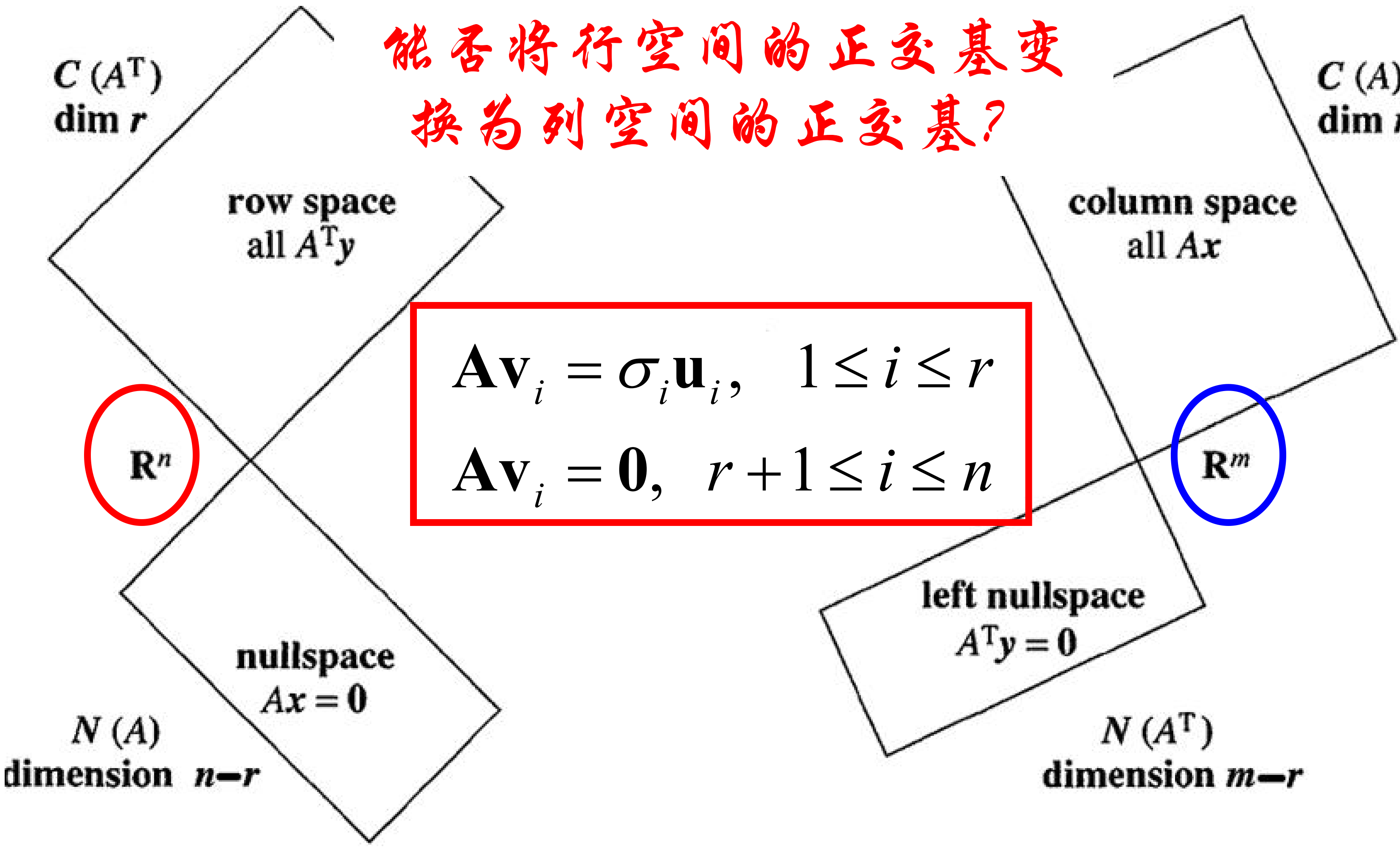
1. 奇异值分解的概念及计算

奇异值分解的引入

能否将行空间的正交基变
换为列空间的正交基?

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$$



奇异值分解

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r \\ \mathbf{A}\mathbf{v}_i &= \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n \end{aligned}}$$

假设$\mathbf{w}_1 \sim \mathbf{w}_n$是$n$维空间的任意一组标准正交基：

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} \xrightarrow{\mathbf{A}} \{\mathbf{A}\mathbf{w}_1, \mathbf{A}\mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{A}\mathbf{w}_n\}$$

如果要使各$\mathbf{A}\mathbf{w}_i$两两正交，应有：

$$(\mathbf{A}\mathbf{w}_i)^T \mathbf{A}\mathbf{w}_j = 0, \quad i \ne j$$

实对称矩阵

即：

$$(\mathbf{w}_i)^T \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_j = 0, \quad i \ne j$$

1. 特征值全是实数　2. n个标准正交的特征向量

奇异值分解

由于A^TA是实对称矩阵，因此，$w_1 \sim w_n$可以选取为A^TA的标准正交特征向量，此时有：

$$\left(\mathbf{w}_i\right)^T \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_j = \left(\mathbf{w}_i\right)^T \lambda_j \mathbf{w}_j = 0$$

而A^TA的特征值具有如下两条性质：

- A^TA和AA^T的特征值均为非负实数
- A^TA和AA^T均有r个非零特征值，且非零特征值相同

所以有：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i, \quad 1 \le i \le r \quad (\lambda_i > 0)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$$

A^TA实对称矩阵有n个特征值，其中r个非零，n-r个零

奇异值分解

$$\boxed{(\mathbf{Aw}_i)^T \mathbf{Aw}_j = 0, \quad i \neq j}$$

*orthogonal basis for C(**A**)*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Aw}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i, \quad 1 \le i \le r$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Aw}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$$

零向量

注意到：

$$\|\mathbf{Aw}_i\|^2 = (\mathbf{Aw}_i)^T \mathbf{Aw}_i = \mathbf{w}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{Aw}_i = \mathbf{w}_i^T (\lambda_i \mathbf{w}_i) = \lambda_i$$

将列空间的正交基归一化可得标准正交基：

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{Aw}_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad 1 \le i \le r$$

奇异值分解

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{A}\mathbf{w}_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \quad 1 \le i \le r \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{w}_i = \sqrt{\lambda_i}\,\mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r$$

又因为：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i, \quad 1 \le i \le r$$

所以：

$$\mathbf{A}^T\sqrt{\lambda_i}\,\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i, \quad 1 \le i \le r$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{u}_i = \sqrt{\lambda_i}\,\mathbf{w}_i, \quad 1 \le i \le r$$

行向量的线性组合

$$\mathbf{w}_i \in C\left(\mathbf{A}^T\right)$$

$\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ 是 $C(\mathbf{A}^T)$ 的标准正交基

奇异值分解

另一方面：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le n$$

$$\mathbf{w}_i^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\left\|\mathbf{A}\mathbf{w}_i\right\|^2=0,\quad r+1\le i\le n$$

W=V

$$\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le n$$

$\mathbf{w}_{r+1},\ldots,\mathbf{w}_n$ 是 $N(\mathbf{A})$ 的标准正交基

$$\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\sqrt{\lambda_i}\,\mathbf{u}_i,\quad 1\le i\le r$$

$$\mathbf{A}\mathbf{w}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le n$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\sigma_i\mathbf{u}_i,\quad 1\le i\le r\\&\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le n\end{aligned}}$$

奇异值分解 (SVD)

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$$

r个奇异值

右奇异向量　左奇异向量

$$\mathbf{A}\left[\underline{\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_r} \cdots \mathbf{v}_n\right] = \left[\underline{\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r} \cdots \mathbf{u}_m\right] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{U}_{m\times m}\mathbf{\Sigma}_{m\times n}\mathbf{V}_{n\times n}^{T}}$$

奇异值分解 (Singular Value Decomposition, SVD)

知识点小结

- **奇异值分解与伪逆**

1. 奇异值分解的概念及计算
2. 奇异值分解与四个基本子空间

奇异值分解与四个基本子空间

$$\mathbf{A}\left[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_r \cdots \mathbf{v}_n\right] = \left[\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_r \cdots \mathbf{u}_m\right] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \sigma_r & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r \\ &\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n \end{aligned}$$

- **U**的前r个列向量构成$C(\mathbf{A})$的标准正交基
- **V**的后n-r个列向量构成$N(\mathbf{A})$的标准正交基

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^T \Rightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{U} = \mathbf{V\Sigma}^T \Rightarrow \begin{aligned} &\mathbf{A}^T\mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i, \quad 1 \le i \le r \\ &\mathbf{A}^T\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le m \end{aligned}$$

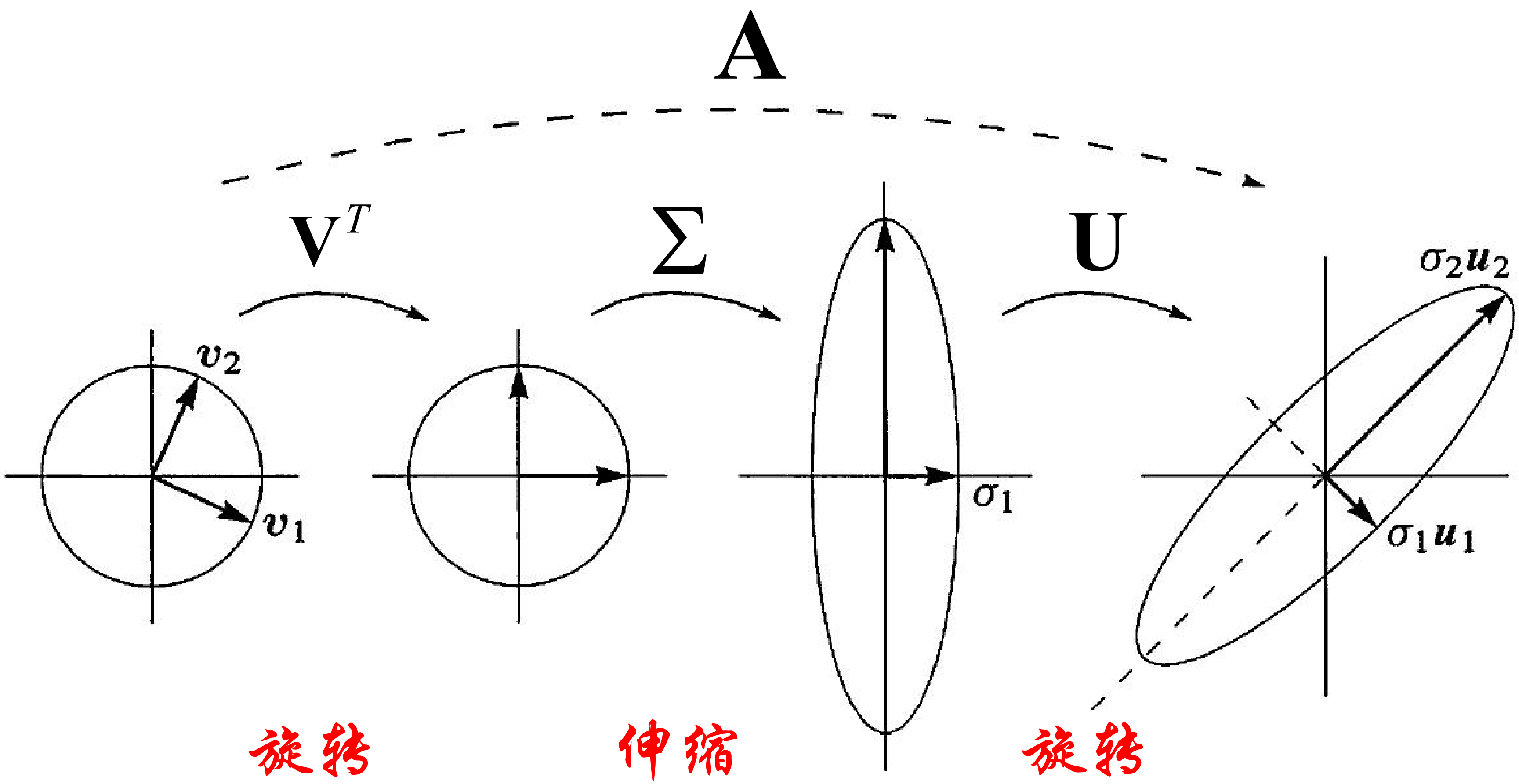
- **V**的前r个列向量构成$C(\mathbf{A}^T)$的标准正交基
- **U**的后m-r个列向量构成$N(\mathbf{A}^T)$的标准正交基

知识点小结

奇异值分解与伪逆

1. 奇异值分解的概念及计算
2. 奇异值分解与四个基本子空间
3. 奇异值分解的几何意义

奇异值分解的几何意义



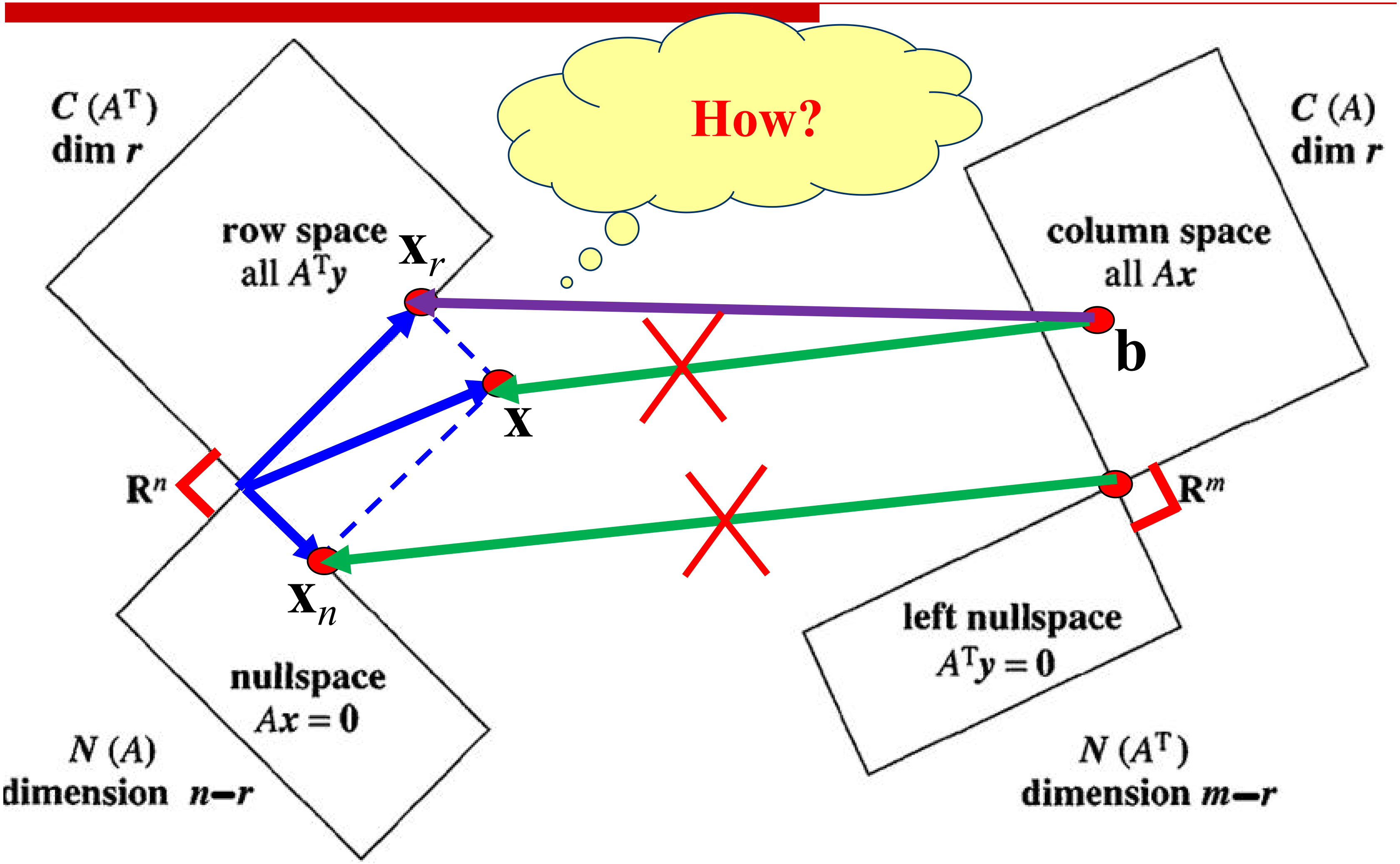
(有些分量可能被置零)

知识点小结

奇异值分解与伪逆

1. 奇异值分解的概念及计算
2. 奇异值分解与四个基本子空间
3. 奇异值分解的几何意义
4. 伪逆的概念与计算

伪逆的提出


How?
$C(A^T)$
dim r
row space
all A^Ty
$\mathbf{x}_r$
$C(A)$
dim r
column space
all Ax
$\mathbf{b}$
$\mathbf{x}$
$\mathbf{R}^n$
$\mathbf{R}^m$
$\mathbf{x}_n$
nullspace
$Ax = 0$
$N(A)$
dimension $n-r$
left nullspace
$A^Ty = 0$
$N(A^T)$
dimension $m-r$

伪逆的定义

能够实现从列空间到行空间映射的线性变换

$$\mathbf{x}_r \in C(\mathbf{A}^T) \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}_r \in C(\mathbf{A})$$

把满足下列关系的矩阵$\mathbf{A}^+$定义为$\mathbf{A}$的伪逆：

$$\mathbf{A}^+\left(\mathbf{A}\mathbf{x}_r\right)=\mathbf{x}_r$$

注意到：

$$\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{U}_{m\times m}\mathbf{\Sigma}_{m\times n}\mathbf{V}^T{}_{n\times n}$$

所以：

$$\mathbf{A}^+{}_{n\times m}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\sigma_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \sigma_r^{-1} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{U}^T=\mathbf{V}_{n\times n}\mathbf{\Sigma}^+{}_{n\times m}\mathbf{U}^T{}_{m\times m}$$

伪逆的定义

$$\mathbf{A}^{+}{}_{n\times m}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\sigma_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & \sigma_r^{-1} & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{U}^T=\mathbf{V}_{n\times n}\mathbf{\Sigma}^{+}{}_{n\times m}\mathbf{U}^T{}_{m\times m}$$

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{u}_i=\sigma_i^{-1}\mathbf{v}_i,\quad 1\le i\le r$$

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{u}_i=\mathbf{0},\quad r+1\le i\le m$$

伪逆可以将列空间的正交基转化为行空间的正交基

伪逆可以将左零空间的向量映射为零向量

伪逆的性质

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{A}^{+}{}_{n\times m}=\mathbf{U\Sigma V}^{T}\mathbf{V\Sigma}^{+}\mathbf{U}^{T}=\mathbf{U\Sigma\Sigma}^{+}\mathbf{U}^{T}=\mathbf{U}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{m\times m}\mathbf{U}^{T}$$

1. $\left(\mathbf{AA}^{+}\right)^{T}=\mathbf{AA}^{+}$

2. $\mathbf{AA}^{+}=\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^{T}+\cdots+\mathbf{u}_r\mathbf{u}_r^{T}$

3. $\mathbf{AA}^{+}$是$\mathbf{R}^{m}$到$C(\mathbf{A})$的投影矩阵

$$\mathbf{b}\in\mathbf{R}^{m}\Rightarrow\mathbf{b}=\mathbf{p}+\mathbf{e}\Rightarrow\begin{matrix}\mathbf{AA}^{+}\mathbf{p}=\mathbf{p}\\ \mathbf{AA}^{+}\mathbf{e}=\mathbf{0}\end{matrix}$$

伪逆的性质

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}=\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{+}\mathbf{U}^{T}\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{T}=\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{+}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{T}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{n\times n}\mathbf{V}^{T}$$

1. $\left(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)^{T}=\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$

2. $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}=\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^{T}+\cdots+\mathbf{v}_r\mathbf{v}_r^{T}$

3. $\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$是$\mathbf{R}^{n}$到$C(\mathbf{A}^{T})$的投影矩阵

$\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n} \Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{x}_r+\mathbf{x}_n \Rightarrow$

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{x}_r=\mathbf{x}_r$$

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{x}_n=\mathbf{0}$$

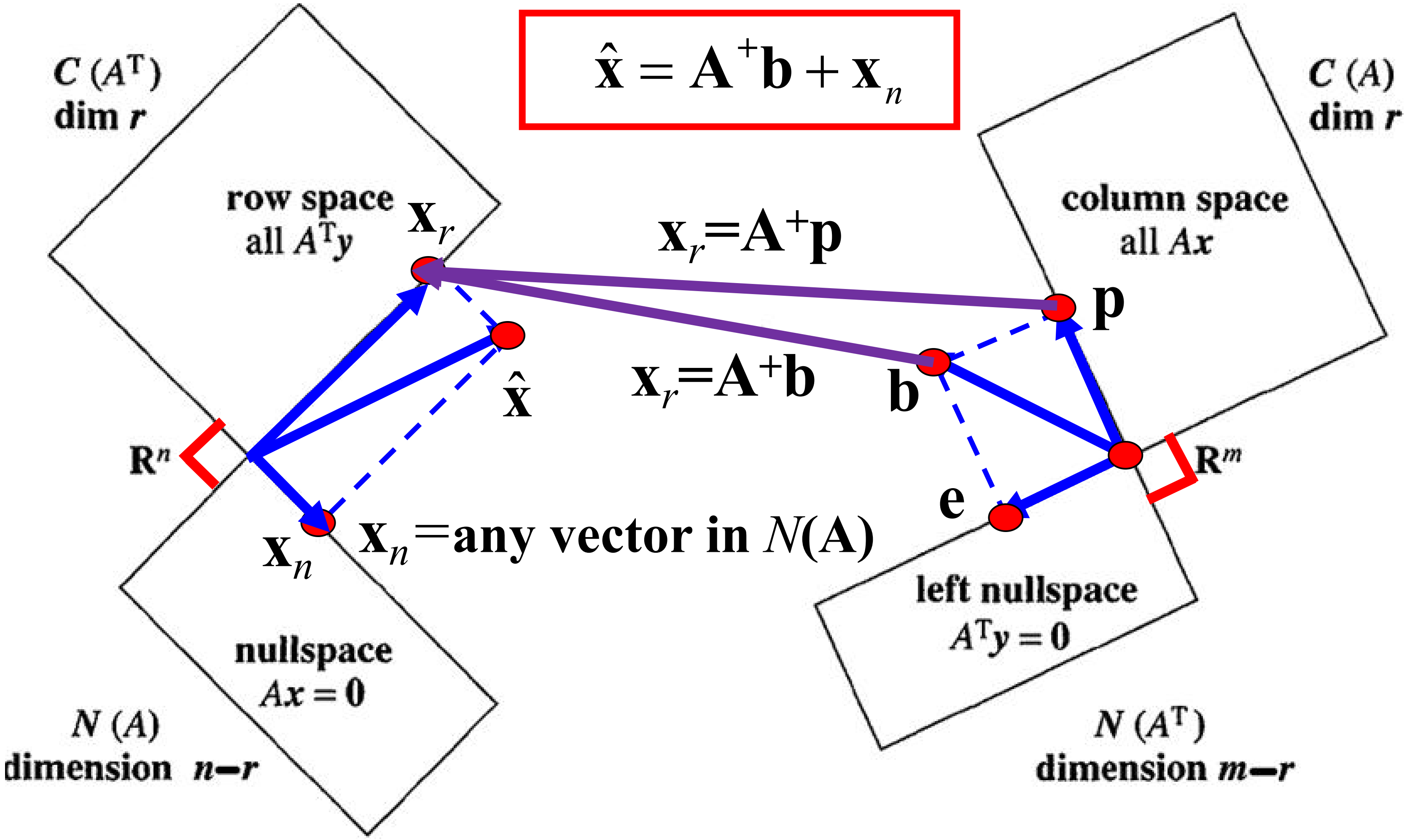
知识点小结

- 奇异值分解与伪逆

1. 奇异值分解的概念及计算
2. 奇异值分解与四个基本子空间
3. 奇异值分解的几何意义
4. 伪逆的概念与计算
5. 伪逆与最小二乘法

伪逆与最小二乘解

$$\boxed{\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} + \mathbf{x}_n}$$



考试安排

- 考试时间地点

  5月14日，晚7：00-9：30

- 考试题型

  五道大题，每题20分

- 考前答疑

  时间：待定

  地点：彭康楼132

内容提要

- 内容总结
- 典型例题

典型例题

已知A是3×5矩阵，且Ax=b对任意三维向量b均有解。

(1) 求A的列空间；

(2) 求A的零空间的维数；

(3) 设矩阵$B=\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$，求矩阵B的秩。

例1:

(1). $C(A)=R^3$

(2) $r=3$, $\therefore n-r=5-3=2$. $\dim N(A)=2$

(3) $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ $\text{rank}=3$ $(=\text{rank}(A))$

典型例题

已知4×4矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{3I}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$，其中的分块均为2×2矩阵

(1) 给出A的列空间的一个基底；

(2) 给出$C(\mathbf{A})$的所有可能基底应具有的形式；

(3) 给出A的零空间的一个基底；

(4) 求线性方程组 $\mathbf{Ax}=[5\ 4\ 0\ 0]^T$ 的通解。

例2：(1) basis: $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$

典型例题

(2) A的列空间中任一向量应具有的形式为：$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，又 $\because \dim(C(A))=2$

$\therefore C(A)$ 的任一基底应具有如下形式：

$\vec{x_1}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\vec{x_2}=\begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$， 由 $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ 线性无关可得：$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ 无关.

$\therefore \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 为满秩矩阵 即：$\det\left(\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\right) = ad-bc \neq 0$

$\therefore C(A)$ 所有可能的基底应满足的形式为：$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，满足 $ad-bc\neq 0$.

典型例题

(3) $A=\begin{bmatrix} I & \boxed{3I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore$ basis: $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(4) 因为A已是简化行阶梯形式R，所以特解为 $x_p = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

故通解为: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

典型例题

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(1) 给出$\mathbf{B}$的零空间的一个基底；

(2) 求线性方程组 $\mathbf{Bx}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ 的通解。

典型例题

例3:

(1) $B = C \cdot D$, 这里C是满秩矩阵, D是简化行阶梯形式 $\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore N(CD) = N(D)$

证明如下: 假设 $\vec{x} \in N(D)$, 则 $D\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow CD\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in N(CD)$

另一方面, 若 $\vec{x} \in N(CD)$, 则 $CD\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow C^{-1}CD\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow D\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} \in N(D)$

从而说明 $N(D) = N(CD)$.

对于D矩阵, 它具有rref形式, $\therefore \dim(N(D)) = 2$. basis for $N(D)$: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\therefore$ B的零空间的一个基底是 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

典型例题

(2) 令 D 的各列向量组为 $\vec{d_1}, \vec{d_2}, \vec{d_3}, \vec{d_4}$,

B的第一列

则 $B = CD = \begin{bmatrix} C\vec{d_1} & C\vec{d_2} & C\vec{d_3} & C\vec{d_4} \end{bmatrix}$

其中 $C\vec{d_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (B的第一列)。易依 $B\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 可取 $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $B\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的一个特解为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 通解为 $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

典型例题

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\7\\1\\7\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}-1\\7\\1\\-7\end{bmatrix}$$

(1) 将向量$\mathbf{b}$投影到由$\mathbf{a}_1$和$\mathbf{a}_2$所张成的子空间，求投影向量$\mathbf{p}$;

(2) 求实现上述投影的投影矩阵$\mathbf{P}$;

(3) 求$\mathbf{P}$的与特征值1对应的所有特征向量。

典型例题

例4：

(1) ∵ $\vec{a}_1$和$\vec{a}_2$正交，

$$\therefore \vec{p} = \frac{\vec{a}_1^T\vec{b}}{\vec{a}_1^T\vec{a}_1}\vec{a}_1 + \frac{\vec{a}_2^T\vec{b}}{\vec{a}_2^T\vec{a}_2}\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 4/25 \\ 0 \\ 0 \\ 28/25 \end{bmatrix}$$

(2) $P = A(A^TA)^{-1}A^T$

$A^TA = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$（这里利用正交性）. $\therefore P = \frac{1}{100}AA^T = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 98 & 14 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & 98 \end{bmatrix}$

5 1所对应的特征向量满足 $P\vec{x} = \vec{x}$, $\therefore \vec{x} \in C(A)$. 即: $\vec{x} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2$.

典型例题

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 6\\ 4 & 8 & 8\end{bmatrix}$$

(1) 求出将任一向量投影到矩阵A的列空间的投影矩阵$\mathbf{P}_C$;

(2) 求出将任一向量投影到矩阵A的行空间的投影矩阵$\mathbf{P}_R$;

(3) 计算$\mathbf{B}=\mathbf{P}_C\mathbf{A}\,\mathbf{P}_R$，并解释所得到的结果。

典型例题

(1) $C(A)$: $\dim=1$, basis: $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \triangleq \vec{a}$. 向A的列空间投影即为向$\vec{a}$投影.

$$\therefore P_C = \frac{\vec{a}\vec{a}^T}{\vec{a}^T\vec{a}} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}9 & 12\\12 & 16\end{bmatrix}$$

(2). $C(A^T)$: $\dim=1$, basis: $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$

$$\therefore P_R = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 4 & 4\\2 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

典型例题

$$P_C A = P_C[\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \vec{a}_3] = [P_C\vec{a}_1\ \ P_C\vec{a}_2\ \ P_C\vec{a}_3]$$

$\because$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in C(A)$, 而 P_C 表示向 $C(A)$ 投影的投影矩阵

$\therefore$ $P_C A = [\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \vec{a}_3] = A$.

同理: $P_R^T A^T = P_R A^T = P_R[\underset{\uparrow\ \text{A的第一列}}{\vec{col}_1}\ \ \underset{\uparrow\ \text{A的第二列}}{\vec{col}_2}] = [P_R\vec{col}_1\ \ P_R\vec{col}_2] = [\vec{col}_1\ \ \vec{col}_2]$

(∵投影矩阵是对称的)

$= A^T$.

即: $P_R^T A^T = A^T$

$\therefore$ $A P_R = A$.

故 $B = P_C A P_R = A P_R = A$

典型例题

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{c}\\\hat{d}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}\mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix}\hat{c}\\\hat{d}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{3}\\-1\end{bmatrix}$$

(1) 求出将向量**b**投影到**A**的列空间的投影矩阵**P**； (1) $P=A(A^TA)^{-1}A^T$.

(2) 画出由上述最小二乘法所拟合出的直线；

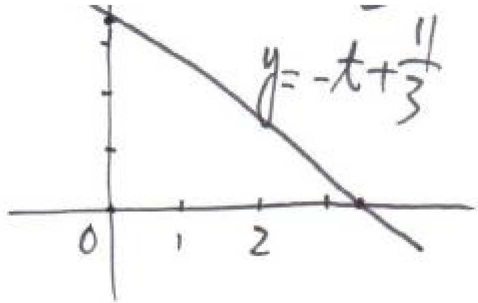
(3) 找到另外一个右侧向量**b**，使得

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{c}\\\hat{d}\end{bmatrix}=\mathbf{b} \qquad \begin{bmatrix}\hat{c}\\\hat{d}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

典型例题

(2) $y=\hat{C}+\hat{D}t$

$=-t+\frac{11}{3}$



(3) $A\vec{x}=\vec{b}$ 的LS解即 $A\vec{x}=\vec{p}$ 的解.

最小二乘解为 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\vec{p}=\vec{0}$，即 $\vec{b}$ 向A的列空间投影得到的是零向量，

$\Rightarrow\vec{b}\perp C(A)\Leftrightarrow\vec{b}\in N(A^T)$.

因此，$\vec{b}$ 应满足：$\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\end{bmatrix}}_{A^T}\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\vec{b}=c\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$. c为任意常数

典型例题

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(1) 求矩阵**A**的特征值；

(2) 已知$\mathbf{u}_0=\begin{bmatrix}0 & 10 & 0\end{bmatrix}^T$，且$\mathbf{u}_k=\mathbf{A}^k\mathbf{u}_0$，则当$k\to\infty$时，$\mathbf{u}_k\to ?$

典型例题

(1) ∵ A是Markov矩阵，∴ $\lambda_1=1$

∵ A是奇异矩阵（$\vec{col1}+\vec{col2}=2\vec{col3}$）∴ $\lambda_2=0$

又∵ $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(A)=0.2+0.2+0.4=0.8$，∴ $\lambda_3=-0.2$

(2) ∵ A有3个相异的特征值，∴ A可以对角化.

故 $A^k\vec{u_0}=C_1\lambda_1^k\vec{x_1}+C_2\lambda_2^k\vec{x_2}+C_3\lambda_3^k\vec{x_3}$

当 $k\to\infty$ 时，$\vec{u_k}\to C_1\vec{x_1}$

容易求得：与 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $\vec{x_1}=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$

典型例题

又∵ 在转移过程中 $\vec{u}_k$ 的各分量之和保持不变，

$$[1,1,\cdots]\mathbf{A}=[1,1,\cdots]\Rightarrow[1,1,\cdots]\mathbf{A}\mathbf{u}_0=[1,1,\cdots]\mathbf{u}_0=1$$

$$[1,1,\cdots]\mathbf{u}_1=1$$

$\therefore\ 0+10+6=c_1(3+3+4)\Rightarrow c_1=1$

故：$\vec{u}_k\to\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}\quad(k\to\infty)$

典型例题

假设A是一个2×2的实对称矩阵，它具有两个单位特征向量u_1和u_2。如果该矩阵的特征值为$\lambda_1=3$，$\lambda_2=-2$，求矩阵A的奇异值分解。

$\underset{2\times2}{A} = \underset{2\times2}{U}\,\underset{2\times2}{\Sigma}\,\underset{2\times2}{V^T}$ 记：$U=[\tilde{u}_1\ \ \tilde{u}_2]$，$V=[\vec{v}_1\ \ \vec{v}_2]$

∵ A为实对称矩阵，∴ $A^T=A$，故 $A^TA=A^2$，它的特征值为 $\lambda_1^2=3^2=9$，$\lambda_2^2=(-2)^2=4$.

∴ A的奇异值为：$\sigma_1=3$，$\sigma_2=2$. $\Rightarrow \Sigma=\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$

需要说明：A^TA的特征向量与A的特征向量相同，

（设 $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$，则 $\underline{A^TA\vec{x}}=\lambda A^T\vec{x}=\lambda A\vec{x}=\underline{\lambda^2\vec{x}}$）

典型例题

故：$\vec{u}_1$、$\vec{u}_2$是A^TA的单位特征向量

又∵A是实对称矩阵，∴相应于不同特征值的特征向量$\vec{u}_1$和$\vec{u}_2$正交 $\Big\} \Rightarrow V=[\vec{u}_1 \;\; \vec{u}_2]$

根据 $A\vec{v}_1=\sigma_1\tilde{\vec{u}}_1 \Rightarrow \tilde{\vec{u}}_1=\dfrac{A\vec{v}_1}{\sigma_1}=\dfrac{A\vec{u}_1}{\sigma_1}=\dfrac{\lambda_1\vec{u}_1}{\sigma_1}=\dfrac{3\vec{u}_1}{3}=\vec{u}_1$.

同理：$\tilde{\vec{u}}_2=-\vec{u}_2$

∴ $U=[\vec{u}_1 \;\; -\vec{u}_2]$, $\Rightarrow A=[\vec{u}_1 \;\; -\vec{u}_2]\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}[\vec{u}_1 \;\; \vec{u}_2]^T$.

典型例题

7、对于一个 3 阶方阵 **A**，已知它的三个特征值是 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = c$，$\lambda_3 = 2$，且该矩阵有 3 个特征向量：

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(1) 当 c 满足什么条件时，**A** 可以对角化？

(2) 当 c 满足什么条件时，**A** 是 Markov 矩阵？

(3) 当 c 满足什么条件时，$\dfrac{\mathbf{A}}{2}$ 是投影矩阵？

典型例题

7. (1) $\because \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ 相互正交（线性无关）

$\therefore$ c 取任何值时，A 都可以对角化

(2) $\lambda_3 = 2 > 1$. $\therefore$ c 取任何值，A 都不是 Markov 矩阵

(3) 投影矩阵的特征值为 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$

$\therefore \frac{A}{2}$ 只有特征值 $1, 0$

而 $\frac{A}{2}$ 的特征值为 $0, \frac{c}{2}, 1$. $\Rightarrow c = 0$ 或 2

典型例题

9、求如下三个矩阵的零空间矩阵 **N**:

$$\mathbf{A}=[\mathbf{I}\quad \mathbf{I}],\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{I}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=[\mathbf{I}\quad \mathbf{I}\quad \mathbf{I}]$$

不失一般性，假设 I 为 n 阶单位阵

$$A=[I\ \ I]\triangleq[I\ \ F],\quad \therefore N=\begin{bmatrix}-I\\ I\end{bmatrix}\quad (2n\times n)$$

$$B=\begin{bmatrix}I & I\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \therefore N=\begin{bmatrix}-I\\ I\end{bmatrix}\quad (2n\times n)$$

$$C=[I\ \ \underbrace{I\ I}_{F}]\triangleq[I\ \ F]\quad \therefore N=\begin{bmatrix}-(I\ \ I)\\ I_{2n\times 2n}\end{bmatrix}\quad (3n\times 2n)$$

典型例题

10、方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ 的完全解是 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}$。

10.

由题意知：$A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，$\therefore A=\begin{bmatrix}1 & *\\3 & *\end{bmatrix}$

$A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\therefore$ A的第二列为 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}$.

典型例题

5、已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b & -1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$，其中 a 和 b 均为实数。求出 a 和 b 应满足的条件，使得 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{Au}$ 和 $\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{Bv}$ 的解在 $t\to\infty$ 时收敛至 $\mathbf{0}$。

$\det(A-\lambda I)=(a-\lambda)^2-1=0 \Rightarrow \lambda_1=a-1,\ \lambda_2=a+1$

$\therefore$ A一定可以对角化（二阶方阵有两个相异的特征值）

故 $\frac{d\vec{u}}{dt}=A\vec{u}$ 的解是 $c_1e^{\lambda_1 t}\vec{x}_1+c_2e^{\lambda_2 t}\vec{x}_2 \triangleq \vec{u}(t)$

当 $t\to\infty$ 时，$\vec{u}(t)\to\vec{0} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a-1<0 \\ a+1<0 \end{array}\right\} \Rightarrow a<-1$

典型例题

同理：$\det(B-\lambda I)=0 \Rightarrow \lambda_1=b-i,\ \lambda_2=b+i$

$\dfrac{d\vec{v}}{dt}=B\vec{v}$ 的解为 $\vec{v}(t)=d_1 e^{\lambda_1 t}\vec{y}_1+d_2 e^{\lambda_2 t}\vec{y}_2$

$\vec{v}(t)\longrightarrow\vec{0}\ (t\to\infty) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\{\lambda_i\}<0 \Rightarrow b<0.$

感谢选修本课程！
祝大家考试顺利！