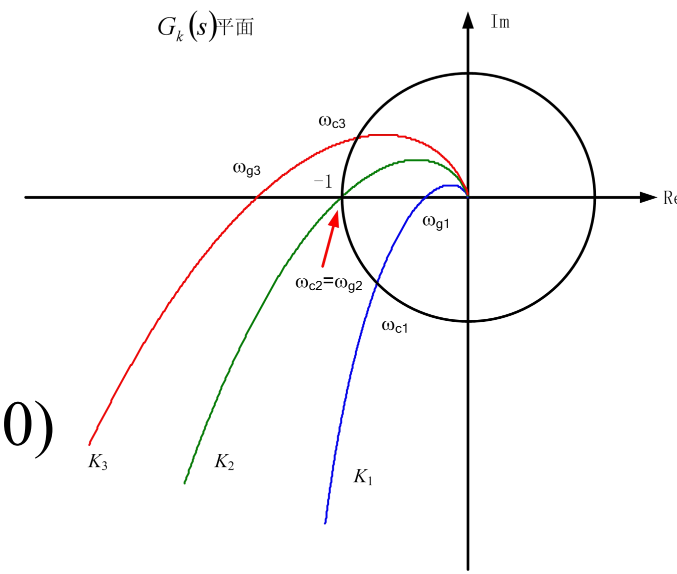
第六节　稳定裕度

奈奎斯特判据判断系统绝对稳定性的问题，即系统是稳定还是不稳定的。当然控制系统只有稳定才是可用的。但除此之外还有两个问题需要考虑。首先，由于赖以分析和设计的系统数学模型不可能十分准确，尽管对模型的分析结果是稳定的，而实际系统却可能并不稳定；其次，一个稳定的系统还必须有良好的性能。

从这两方面考虑，则要求系统不仅是稳定的，还应具有一定的安全系数。换句话讲，就是不仅需要关注系统是否稳定，还应关注系统稳定的程度，这就是所谓的相对稳定性。相对稳定性也称为稳定裕度。

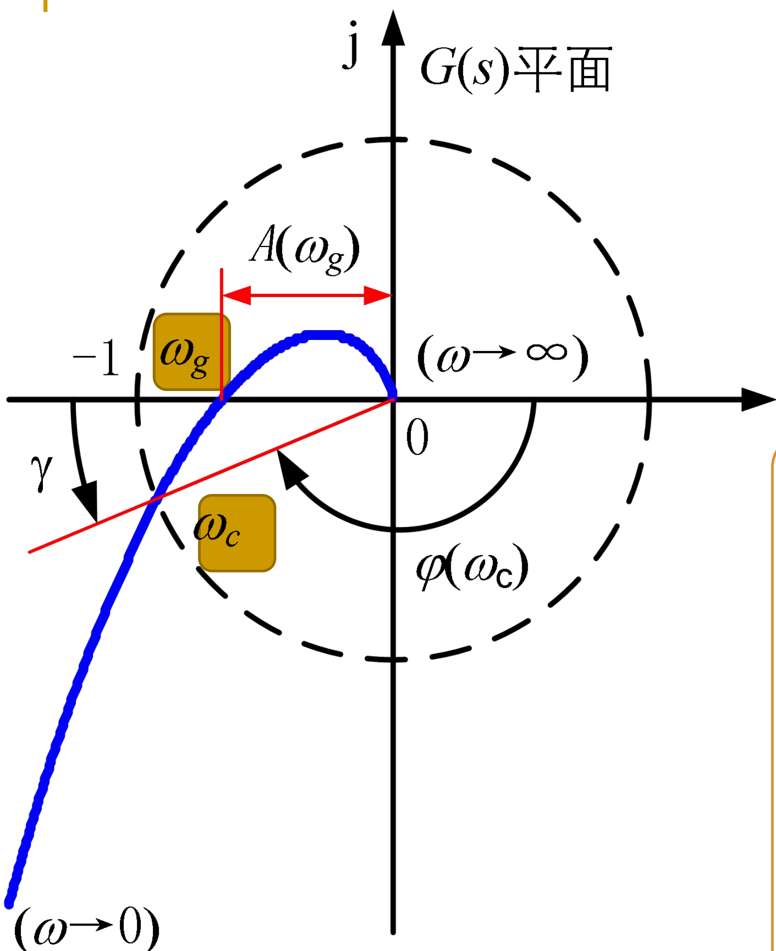
- 时域分析中曾经在s平面上讨论过分析系统相对稳定性的方法。其一是用实部最大的闭环极点和虚轴的距离来衡量系统的相对稳定性；其二是用闭环主导共轭复极点对负实轴的最大张角β来衡量系统的振荡性稳定裕度。
- 本节将利用频率响应特性来研究系统的相对稳定性，从中可以看出，奈奎斯特稳定判据不仅可以用来判断闭环系统的绝对稳定性，也可以用来估计系统的相对稳定性。
- 对于最小相位系统，根据奈奎斯特稳定判据知，如果极坐标图不包围(-1，j0)点，系统是稳定的；如果包围(-1，j0)点，系统就是不稳定的。因此，可以利用极坐标图与(-1，j0)点的接近程度来衡量系统的相对稳定性。

右图为一个最小相位系统在几个不同开环增益K值时的极坐标图。可知，当$K=K_3$时，极坐标图顺时针包围了(-1，j0)点，因此，闭环系统不稳定。



当K减小到K_2时，极坐标图通过(-1，j0)点，闭环系统处于临界状态，此时闭环系统在s平面的虚轴上有极点。

当K小于临界值后，系统变成稳定系统。而且，随着K的进一步减小，系统的稳定性将越来越高，也就是说系统的相对稳定性越来越好。



【定义】极坐标图穿过负实轴(此时$\varphi(\omega)=-180°$)对应的频率为相角穿越频率，用ω_g表示；

【定义】幅值$A(\omega)=1$对应的频率为幅值穿越频率，用ω_c表示。

频率特性曲线穿过(-1，j0)点时，系统处于临界稳定状态。这时：$A(\omega_g)=1$，$\varphi(\omega_c)=-180°$，$\omega_g=\omega_c$。

最小相位系统稳定的条件为：

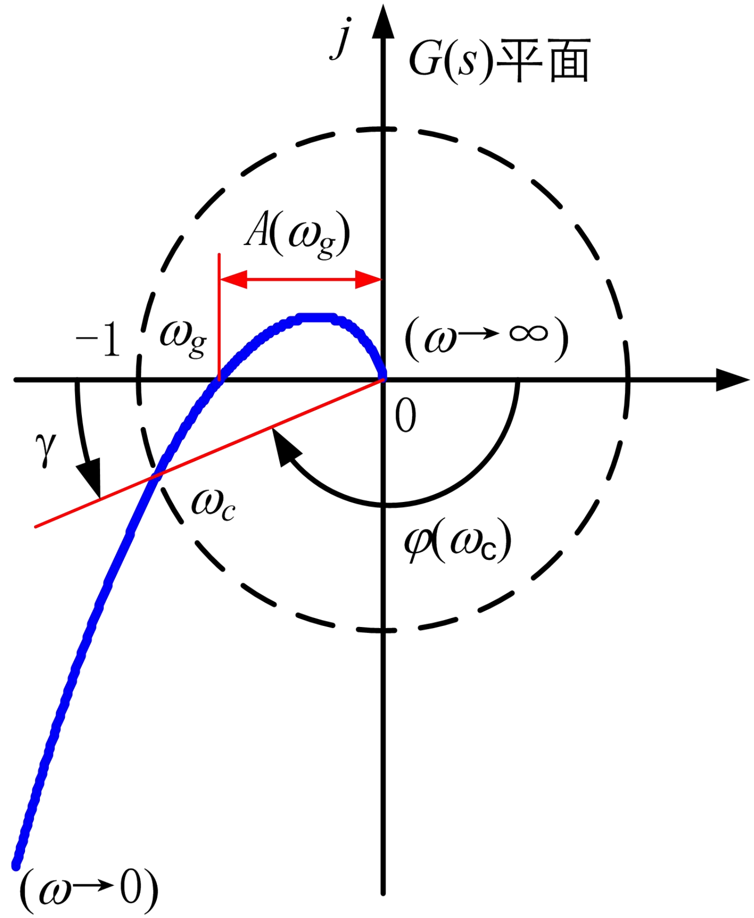
当$A(\omega_c)=1$时，$\varphi(\omega_c)>-180°$，同时

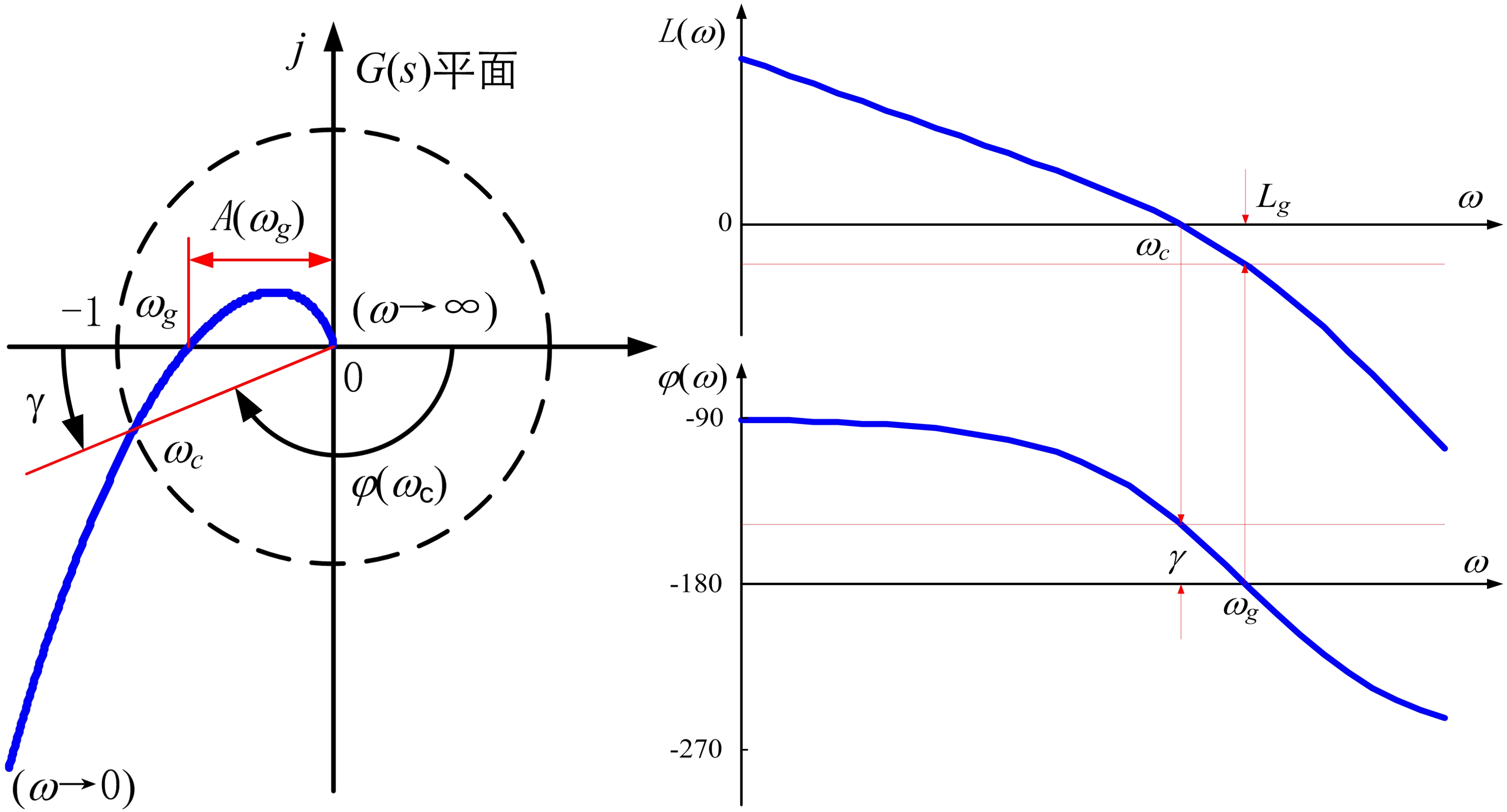
当$\varphi(\omega_g)=-180°$时，$A(\omega_g)<1$

【定义】相角穿越频率时的幅频特性的倒数为幅值稳定裕度，即 $K_g = \dfrac{1}{A(\omega_g)}$

【定义】幅值穿越频率时的相频特性与 − 180° 之差为相位稳定裕度。即

$$\gamma = \varphi(\omega_c) - (-180°) = 180° + \varphi(\omega_c)$$





在对数坐标图上，幅值稳定裕度为：$L_g = 20\lg K_g = -20\lg A(\omega_g)$

L_g称为对数幅值稳定裕度或增益稳定裕度，或直接称为幅值稳定裕度。

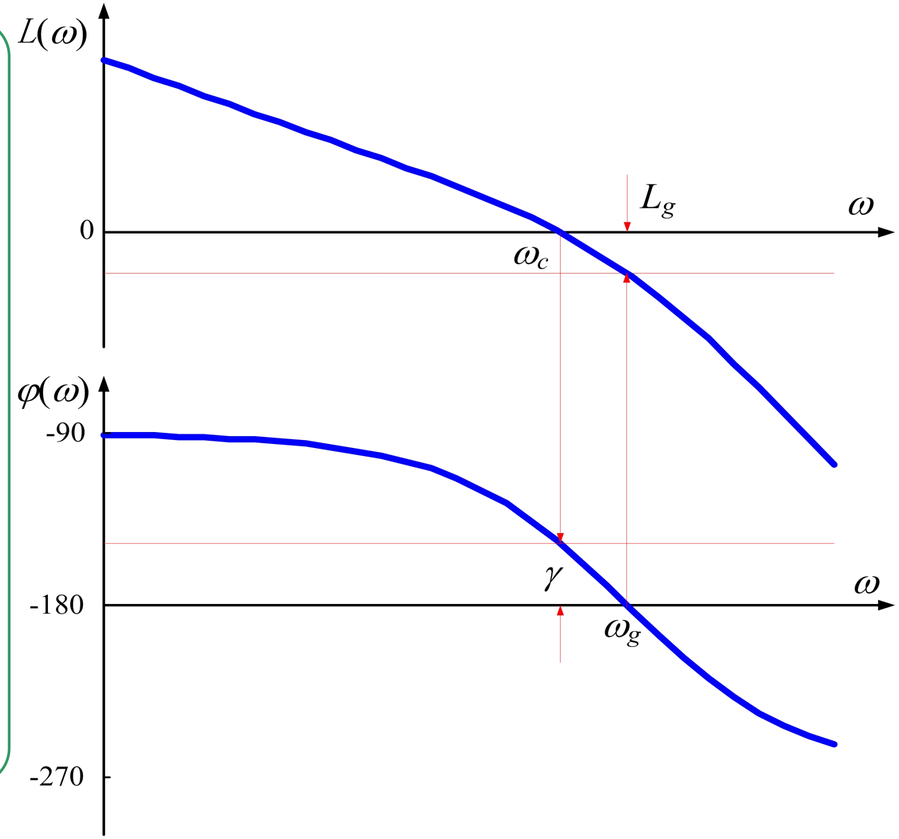
【幅值稳定裕度的物理意义】

稳定的系统在相角穿越频率处将幅值增加K_g倍(奈氏图)或增加L_g分贝(伯德图)，则系统处于临界状态。若增加的倍数大于K_g倍(或L_g分贝)，则系统变为不稳定。幅值稳定裕度是闭环系统达到不稳定前允许开环增益增加的分贝数。

【相位稳定裕度的物理意义】

稳定的系统在幅值穿越频率ω_c处将相角减小γ度，则系统变为临界稳定；再减小，就会变为不稳定。相位稳定裕度是闭环系统达到不稳定前系统开环频率特性在ω_c点所允许增加的最大相位滞后。

当$L_g>0$（即$A(\omega_g)<1$）和$\gamma>0$时，闭环系统是稳定的；否则是不稳定的。对于最小相位系统，$L_g>0$和$\gamma>0$是同时发生或同时不发生的，所以经常只用一种稳定裕度来表示系统的稳定裕度。常用相位裕度。



γ越大，L_g越大，则系统的相对稳定性越好。但对实际系统而言不可能选得非常大。一般可取γ在30°~60°，$L_g>6dB$时相对稳定性较好。

[例1]单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K_g}{s(s+1)(s+10)}$

试分别确定K_g=3、K_g=30和K_g=300时的相位裕度。

[解]传递函数以零、极点的形式给出，应先将其化成时间常数的形式：

$$G(s)=\frac{K_g/10}{s(s+1)(0.1s+1)}=\frac{K}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

$K=K_g/10$，为系统的开环增益。按题意是求K=0.3、K=3和K=30时的γ值。

当$L(\omega)=0$、$\varphi(\omega)=-\pi$时对应的ω分别称为幅值、相角穿越频率。

当K=0.3，ω_c=0.288，$\gamma=72.3°$ (折线近似值ω_c= 0.3，$\gamma=71.6°$)

当K=3，ω_c=1.583，$\gamma=23.3°$ (折线近似值ω_c= 1.73，$\gamma=20.2°$)

当K=30，ω_c=5.120，$\gamma=-16°$ (折线近似值ω_c= 5.48，$\gamma=-18.4°$)

幅值穿越频率

令：$\varphi(\omega_g)=-90°-\mathrm{tg}^{-1}\omega_g-\mathrm{tg}^{-1}0.1\omega_g=-180°$

即：$\mathrm{tg}^{-1}\omega_g+\mathrm{tg}^{-1}0.1\omega_g=\mathrm{tg}^{-1}\left\{1.1\omega_g/(1-0.1\omega_g{}^2)\right\}=90°$

所以：$1-0.1\omega_g{}^2=0$，解得：$\omega_g=\sqrt{10}=3.16$

相角穿越频率

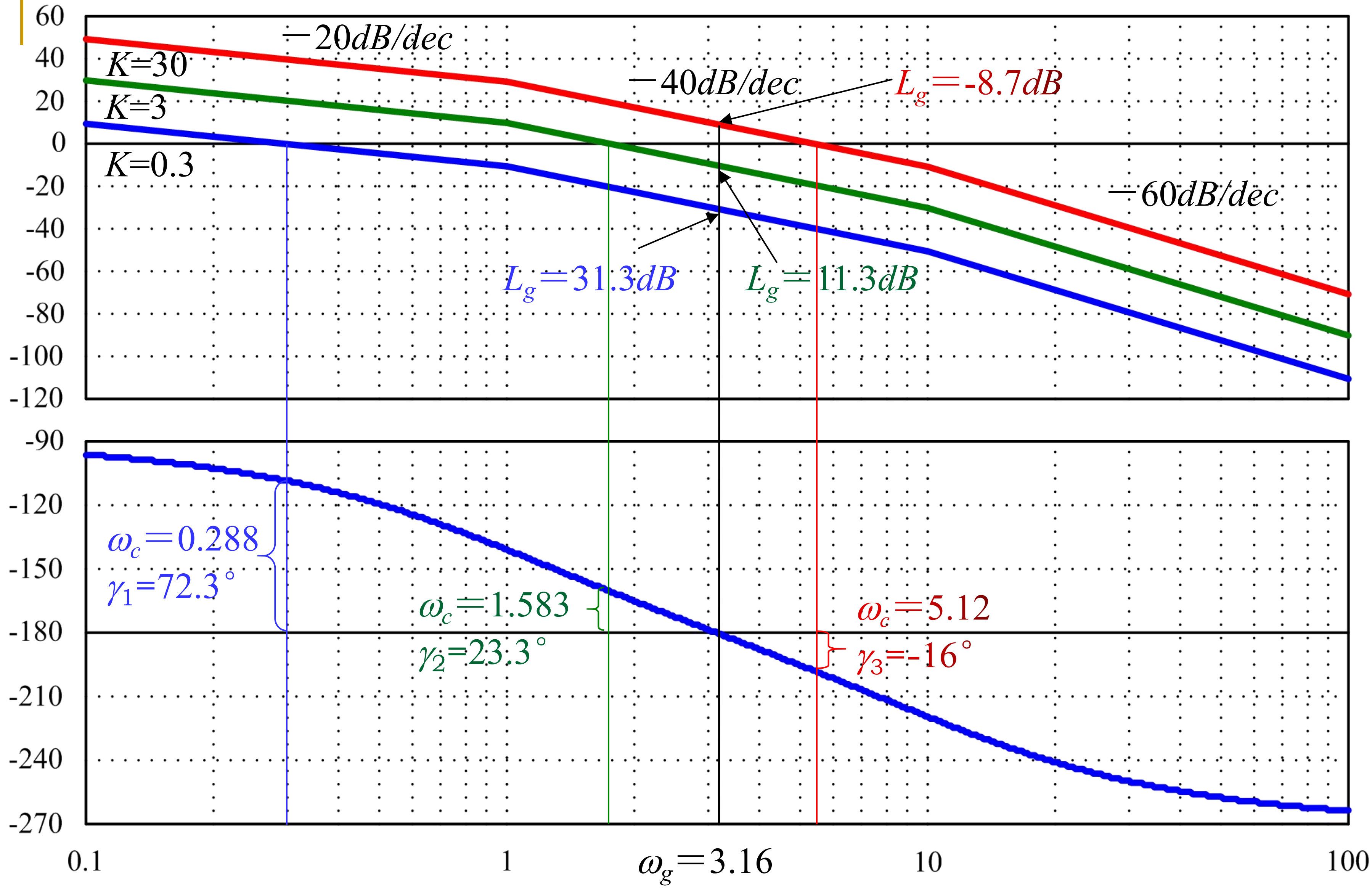
$$A(\omega_g)=\left.\frac{K}{\omega_g\sqrt{\omega_g{}^2+1}\sqrt{(0.1\omega_g)^2+1}}\right|_{\omega_g=\sqrt{10}}=\frac{K}{11}$$

$$L_g=20\lg\frac{1}{A(\omega_g)}=20\lg\frac{11}{K}$$

$K=0.3$时，$L_g=20\lg\dfrac{11}{0.3}=31.3(dB)$

$K=3.0$时，$L_g=20\lg\dfrac{11}{3.0}=11.3(dB)$

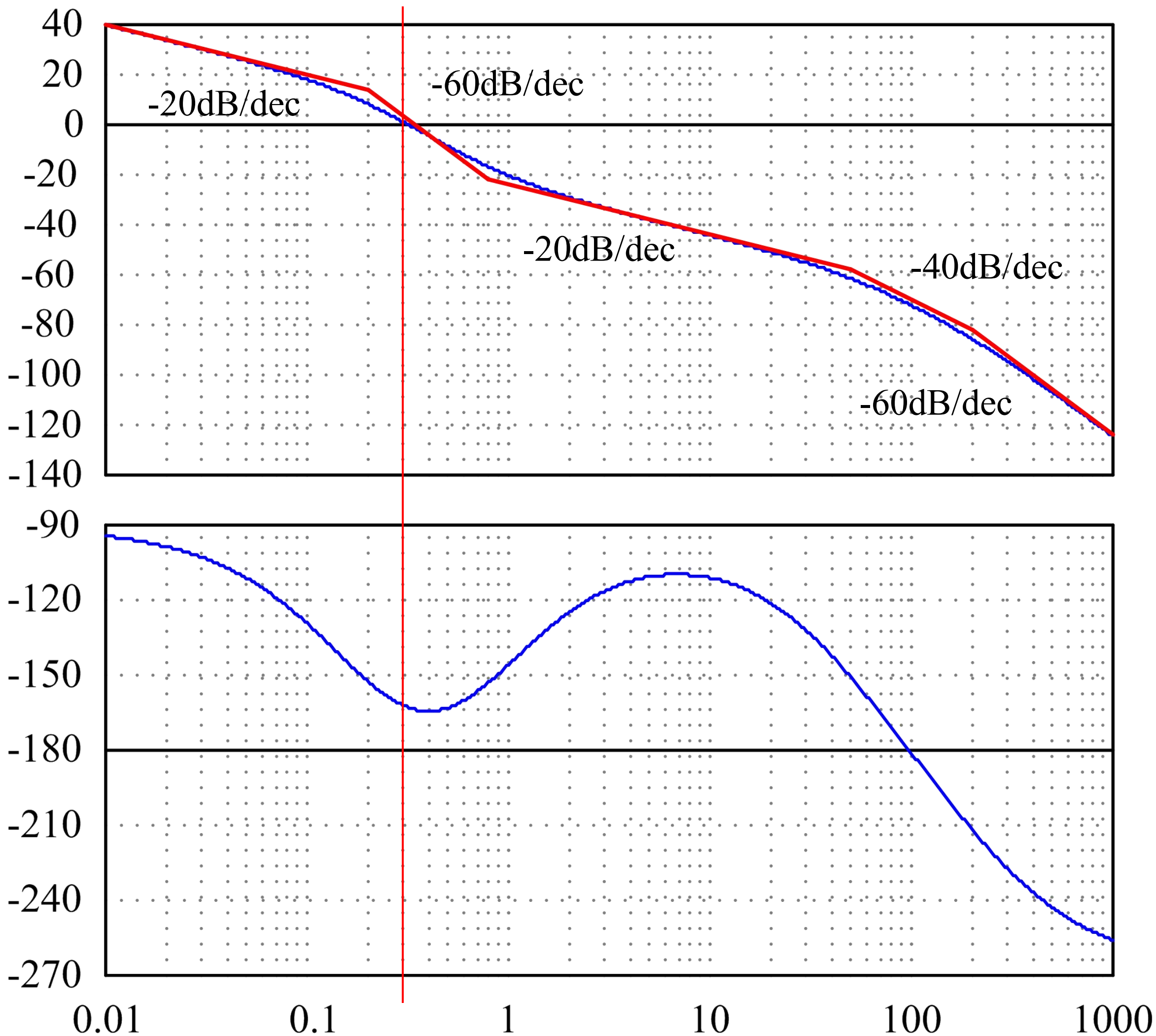
$K=30$时，$L_g=20\lg\dfrac{11}{30}=-8.7(dB)$


60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
−20dB/dec
K=30
K=3
K=0.3
−40dB/dec
Lg=-8.7dB
−60dB/dec
Lg=31.3dB
Lg=11.3dB
-90
-120
-150
-180
-210
-240
-270
ωc=0.288
γ1=72.3°
ωc=1.583
γ2=23.3°
ωc=5.12
γ3=-16°
0.1
1
ωg=3.16
10
100

【通常】

- 当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于$-20dB/dec$段时，系统稳定（例1中K=0.3时，$\gamma=72.3°$）；
- 当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于$-40dB/dec$段时，系统可能稳定（例1中K=3时，$\gamma=23.3°$），也可能不稳定（例1中K=30时，$\gamma=-16°$），即使稳定，相位裕度γ也是较小的;
- 当$L(\omega)$在ω_c处的斜率处于$-60dB/dec$段时，系统一般是不稳定的，除非$-60dB/dec$段非常短，且该段两端所接折线的斜率大于$-40dB/dec$，此时即使稳定，相位裕度γ也是非常小的。（见下例）

[例2] 系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{(1.25s+1)^2}{s(5s+1)^2(0.02s+1)(0.005s+1)}$



转折频率：

$\omega_{01}=0.2$；

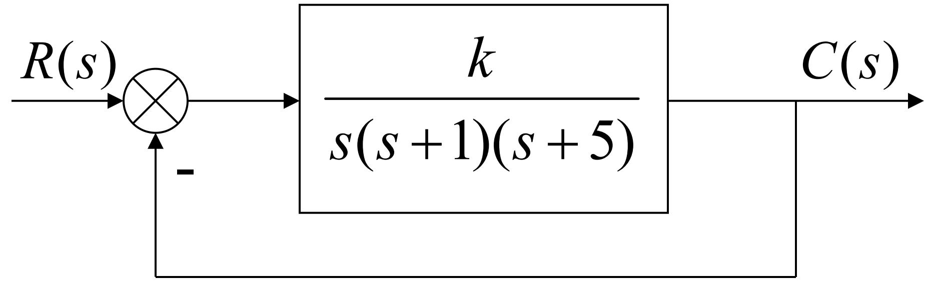
$\omega_{02}=0.8$；

$\omega_{03}=50$；

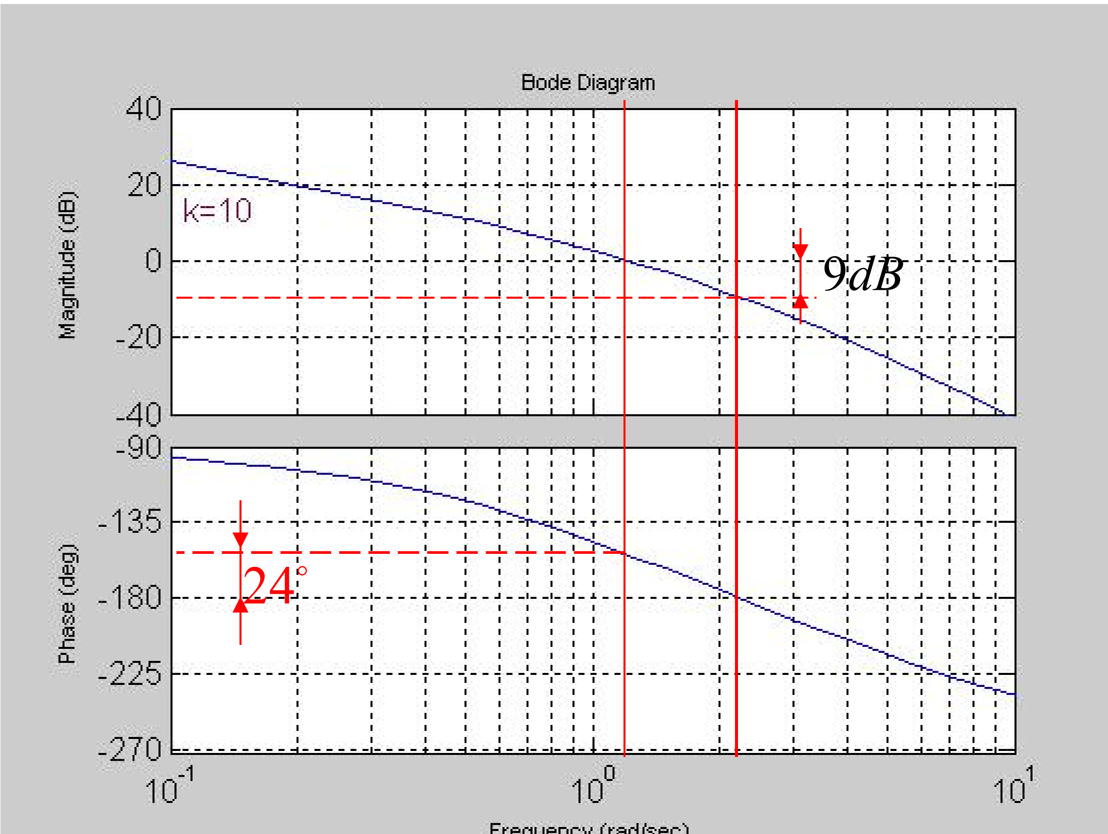
$\omega_{04}=200$；

由图可见ω_c约为0.3，对应 $\gamma=18°$

[例3]控制系统如右图所示。k=10和k=100时，试求系统的相位裕度和幅值裕度。



[解]相位稳定裕度和幅值裕度可以从伯德图中求得。



当k=10时，开环系统伯德图如左所示。这时系统的幅值裕度和相位裕度大约是9dB和24度。因此系统在不稳定之前，开环增益可以增加9dB。

相位裕度和幅值裕度的计算:

$$A(\omega)=\frac{0.2k}{|s|\times|s+1|\times|0.2s+1|}=\frac{0.2k}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.04\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}\omega-\mathrm{tg}^{-1}0.2\omega$$

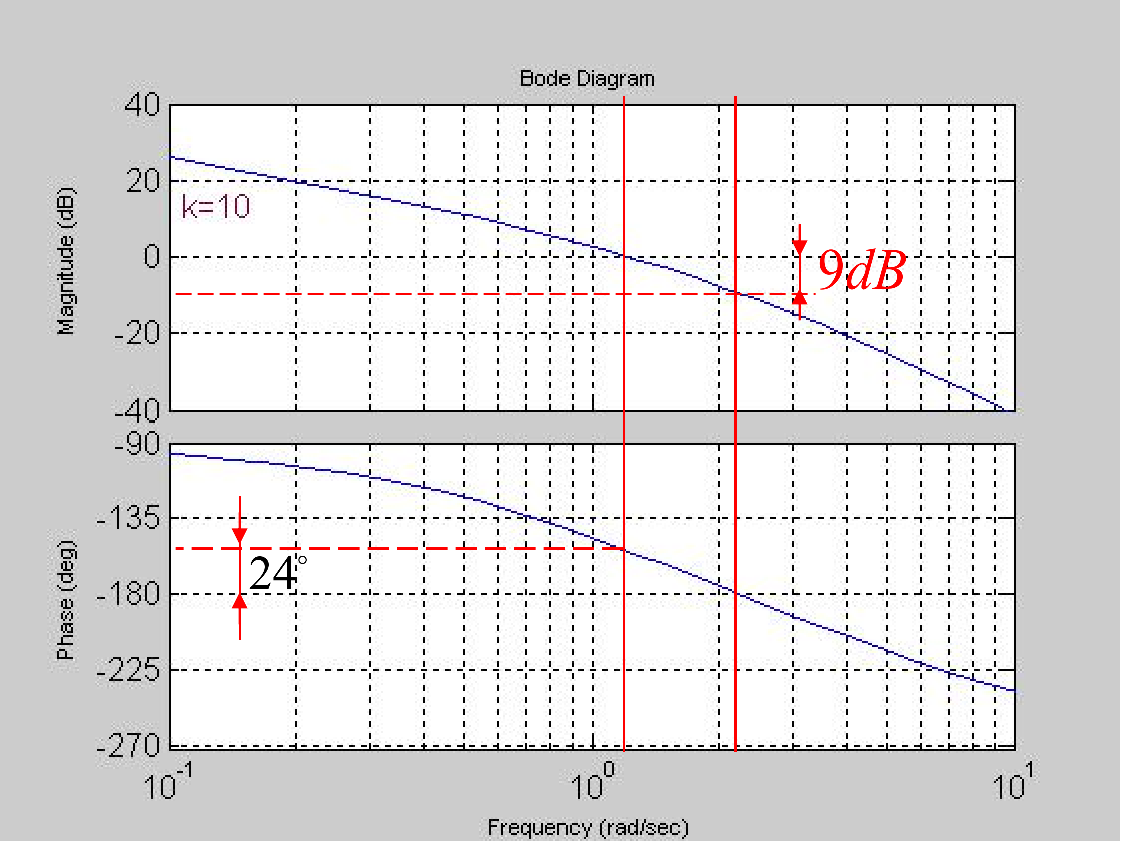
- 相位裕度: 先求幅值穿越频率ω_c

$$A(\omega)=\frac{0.2k}{|s|\times|s+1|\times|0.2s+1|}=\frac{2}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+0.04\omega^2}}(当k=10时)$$

在穿越频率处，$A(\omega)=1$，所以$\omega^2(1+\omega^2)(1+0.04\omega^2)=4$，解此方程较困难，可用近似解法。由于$\omega_c$较小（小于2），所以:

$$A(\omega)\approx\frac{2}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}=1,\quad 解得:\ \omega_c\approx 1.25$$

精确值: ω_c=1.227



幅值穿越频率ω_c处的相角为：　（$\omega_c \approx 1.25$ 时）

$$\varphi(\omega_c) = -90^{\circ} - \mathrm{tg}^{-1}\omega_c - \mathrm{tg}^{-1}0.2\omega_c = -155.38^{\circ}$$

相位裕度为：$\gamma = 180^{\circ} + \varphi(\omega_c) = 180^{\circ} - 155.38^{\circ} = 24.6^{\circ}$

精确值：　$\gamma = 25.389^{\circ}$　（$\omega_c = 1.227$ 时）

- 幅值裕度：先求相角穿越频率ω_g

相角穿越频率处ω_g的相角为：

$$\varphi(\omega_g) = -90^{\circ} - \mathrm{tg}^{-1}\omega_g - \mathrm{tg}^{-1}0.2\omega_g = -180^{\circ}$$

即：$\mathrm{tg}^{-1}\omega_g + \mathrm{tg}^{-1}0.2\omega_g = 90^{\circ}$

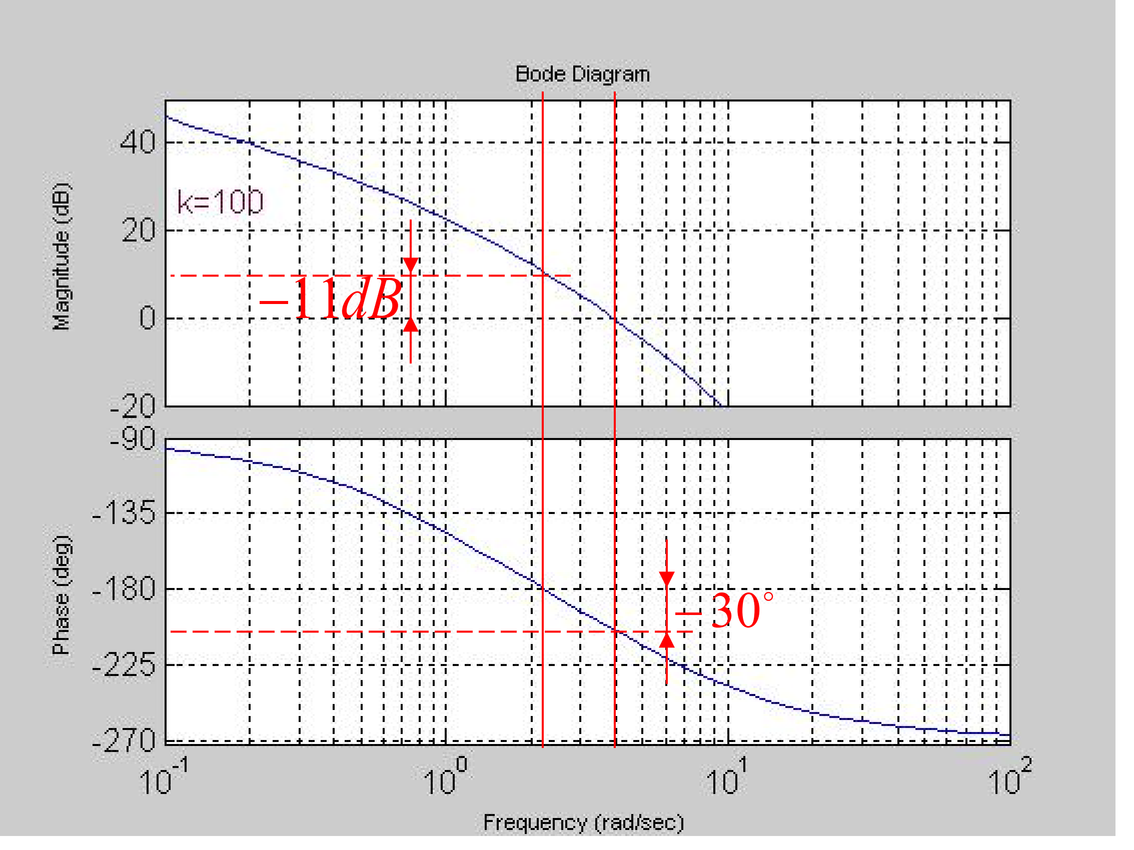
$$\mathrm{tg}^{-1}\frac{1.2\omega_g}{1-0.2\omega_g^2} = 90^{\circ}$$

得：$1-0.2\omega_g{}^2 = 0$，解得：$\omega_g = 2.24$

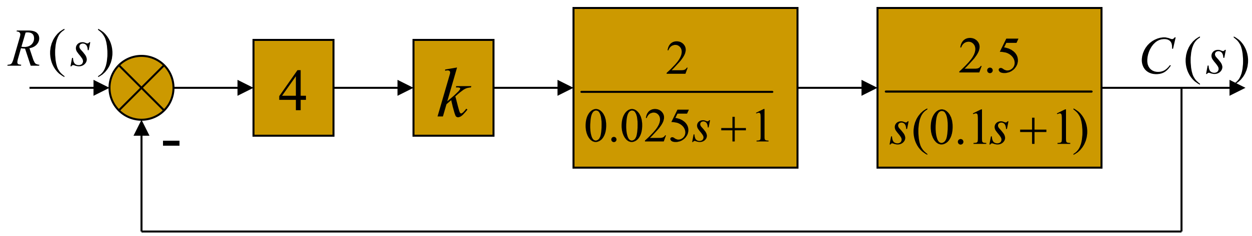
$$A(\omega_g) = \frac{2}{\omega_g\sqrt{1+\omega_g{}^2}\sqrt{1+0.04\omega_g{}^2}} \approx 0.33$$

所以，幅值裕度为：$L_g = -20\lg A(\omega_g) = 9.6(dB)$

当开环增益从k=10增大到k=100时，幅值特性曲线上移20dB，相位特性曲线不变。这时系统的幅值裕度和相位裕度分别是-11dB和-30度。因此系统在k=10时是稳定的，在k=100时是不稳定的。



[例5-11]某系统结构图如下所示。试确定当k=10时闭环系统的稳定性和相位稳定裕度为30度时的系数k。



[解]：当k=10时，开环传递函数为：

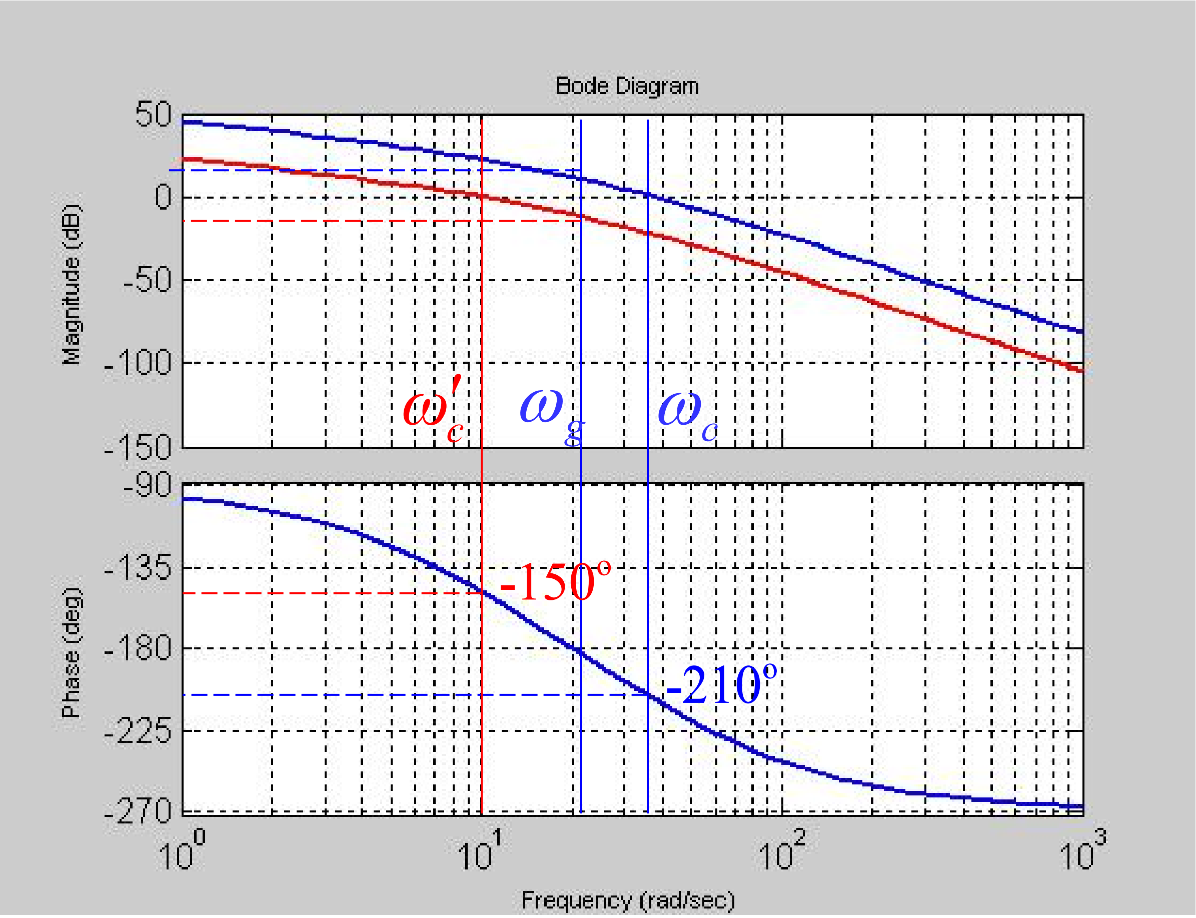
$$G_k(s)=\frac{20k}{s(0.025s+1)(0.1s+1)}=\frac{200}{s(0.025s+1)(0.1s+1)}$$

手工绘制伯德图步骤：

1、确定转折频率：10、40，在(1，20lg200)点画斜率为-20的斜线至$\omega=10$；

2、在$\omega=10\sim40$之间画斜率为-40的斜线；

3、$\omega=40$后画斜率为-60的斜线。

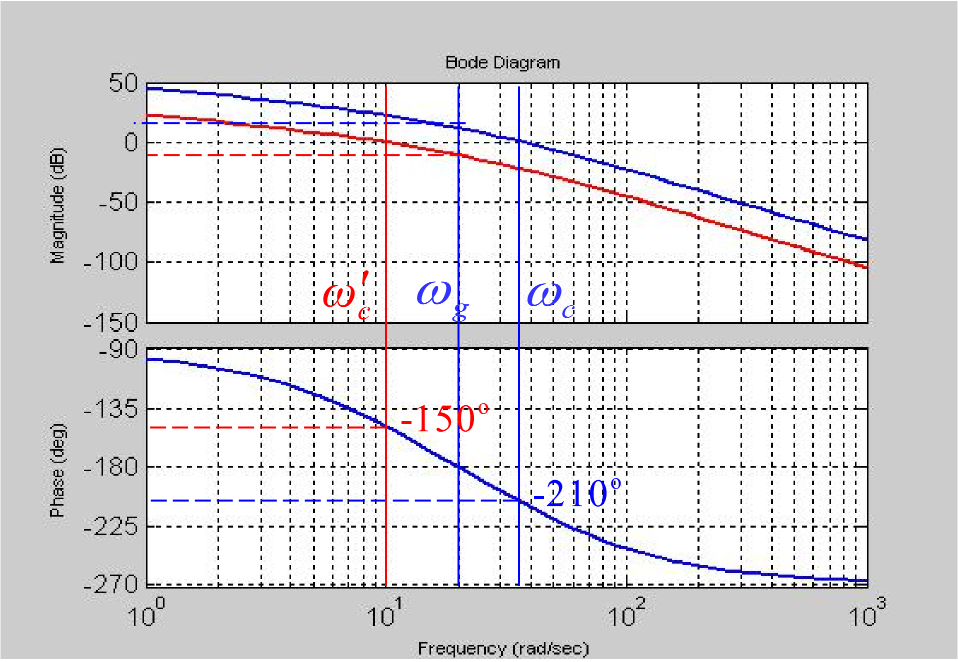


上图蓝线为k=10时的伯德图。$\varphi(\omega_c) \approx -210^\circ < -180^\circ, \omega_c \approx 38$，显然闭环系统是不稳定的。为了使相位稳定裕度达到30度，可将幅频曲线向下平移。即将开环放大系数减小，这时相频特性不变。截止频率左移至 ω_c'，移到哪里？

由于 $\varphi(\omega_c')=-180^\circ+30^\circ=-150^\circ$，从图中知: $\omega_c'\approx 10$ 。所以原始幅频曲线向下移动的分贝数为: $20\lg A(\omega_c')=20\lg A(10)\approx 22dB$ 。

新开环放大系数为K_1，原始开环放大系数为K=200，则有22=20lg$K$-20lgK_1（ω=1时，过点(1,20lgk)），得K_1=15。

故当开环放大系数下降到15，即 $k=K_1/20\approx 0.75$，闭环系统的相位稳定裕度是30度，此时由图知 $\omega_g\approx 20$，即 $Lg=-20\lg A(\omega_g)|_{K=15}=-20\lg A(20)|_{K=15}=10(dB)$



小结

- 幅值稳定裕度及其物理意义。
- 相位稳定裕度及其物理意义。
- 幅值稳定裕度和相位稳定裕度的计算。

作业：5.15