日期:　　/

4.6 解: $k_g \geq 0$　180°根轨迹绘制规则

闭环特征方程　$\frac{k_g s(s+4)}{s^2+2s+2} = -1$　开环零极点: $-p_1=-1+j$　$-p_2=-1-j$　$-z_1=0$　$-z_2=-4$

① 闭环特征方程: $k_g s^2+4k_g s=-s^2-2s-2$　即 $(k_g+1)s^2+(4k_g+2)s+2=0$

∵两个根相同 故 $(4k_g+2)^2-4(k_g+1)\cdot 2=0$　　$(2k_g+1)^2-2(k_g+1)=0$

解得 $k_g=\sqrt{5}-1$ 或 $-\sqrt{5}-1$ (舍)　∴ $k_g=\sqrt{5}-1$

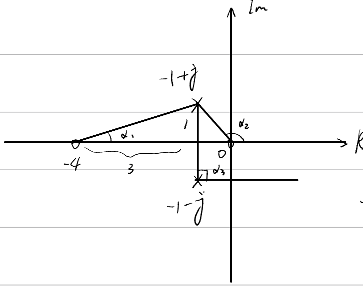
② 根轨迹共两个分支 分别起始于 $-1+j$、$-1-j$　终止于 0、-4处

无渐近线、实轴上的根轨迹区间为 $[-4,0]$

分离会合点: $N(s)D'(s)-N'(s)D(s)=0$　即 $s^2-2s-4=0$

解得 $s_1=-1.24$　$S_2=3.24$ (舍)　$k_g=-\frac{D'(s)}{N'(s)}\Big|_{s=-s_1}=0.316$

出射入射角:



$\alpha_2=180°-45°=135°$

$\alpha_3=90°$

$\alpha_1=\arctan\frac{1}{3}=18.43°$

∴ $\theta_{p_1}=\pi+\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=243.43°$

$\theta_{p_2}=-\theta_{p_1}=-243.43°$

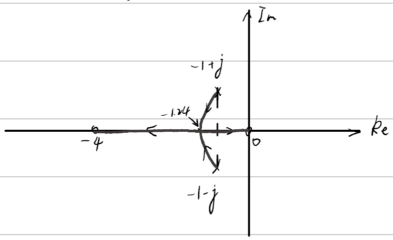
和虚轴的交点: 列出闭环方程及对应的劳斯阵列.

$(k_g+1)s^2+(2+4k_g)s+2=0$

s^2	k_g+1	2
s^1	$2+4k_g$	0
s^0	2	0

∵ $k_g \geq 0$　故无全零行、和虚轴无交点.

综上: 根轨迹如图

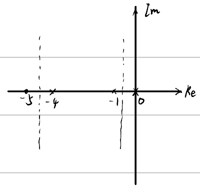


日期: /

s^2+5s+4

4.8 解: $G_k(s) = \dfrac{k_g(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$ $-\infty < k_g + \infty$、开环零极点: $-p_1=0$ $-p_2=-1$ $-p_3=-4$ $-z_1=-5$

I: $k_g>0$、180° 根轨迹增益、实轴上的根轨迹范围 $[-5,-4]$, $[-1,0]$



$n=3$ $m=1$ 起点位于 $-p_1$、$-p_2$、$-p_3$、终点位于 $-z_1$ 两条渐近线 ±90°

分离会合点: $D'(s)N(s)-D(s)N'(s)=0$ $s=-0.5$

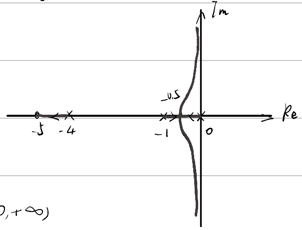
入射出射角: 均位于实轴上 $\theta=180°、0°、180°$

和虚轴交点: $s^3+5s^2+(4+k_g)s+5k_g=0$

s^3	1	$4+k_g$
s^2	5	$5k_g$
s^1	4	0
s^0	$5k_g$	0

不存在全零行 和虚轴无交点。

绘制:



II. $k_g<0$ 0° 绘制规则

实轴上的根轨迹范围为 $(-\infty,-5)$, $(-4,-1)$, $(0,+\infty)$

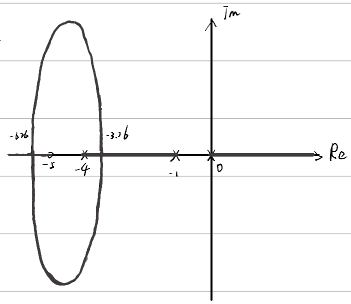
渐近线倾角: 有两条渐近线分别为 0. 180° 和实轴交点: $-\sigma = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = 0$

出射角: 0°、180°、0°

分离会合点: $N(s)D(s)-N(s)D'(s)=0$、 $s_1=-3.26$ $s_2=-6.26$

当 $k_g<0$ 时 劳斯阵列没有全0行、故和虚轴无交点

绘制如下:



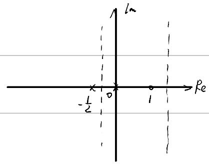
日期: /

4.9 解: $G_K(s)=\frac{s+a}{s(2s-a)}$ 特征方程 $1+G_K(s)=0$ 即 $G_K(s)=-1$

故 $-(s+a)=s(2s-a) \Rightarrow 2s^2-(a-1)s+a=0$ 故 $\frac{a(s-1)}{s(2s+1)}=1$

∴参量a的特征方程为 $1+\frac{-a(s-1)}{s(2s+1)}=0$ 等效开环传递函数 $G_{K1}(s)=\frac{-\frac{a}{2}(s-1)}{s(s+\frac{1}{2})}$

令 $k_g'=-\frac{a}{2}$ 由于 $a\geq 0$ 则 $k_g\leq 0$. 遵循0°根轨迹绘制方法 $G_{K1}(s)=\frac{k_g(s-1)}{s(s+\frac{1}{2})}$



等效开环零极点: $p_1=0$ $p_2=-\frac{1}{2}$ $z_1=1$

∴实轴上的根轨迹范围 $(-\frac{1}{2},0)(1,+\infty)$

渐近线: 一条 $\varphi=0°$ 和实轴的交点: $-\sigma=\frac{-\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-\frac{3}{2}$

分离会合点: $N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=0$ 即 $s^2-2s-\frac{1}{2}=0$

$k_g(s-1)=-s^2-\frac{1}{2}s$

解得 $s_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$ $s_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

出射入射角: 0°

和虚轴的交点: 闭环特征方程为 $s^2+(\frac{1}{2}+k_g')s-k_g'=0$

劳斯阵列:

s^2	1	$-k_g'$
s^1	$\frac{1}{2}+k_g'$	0
s^0	$-k_g'$	0

当 $k_g'=-\frac{1}{2}$ 时 出现全0行

此时 $s^2=-\frac{1}{2}$ $s=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}j$

即 $a=1$ ∴当 $0<a<1$ 时 系统稳定

绘制如下: