1. 解: $A=\begin{bmatrix}0&3&3&3\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\longleftrightarrow r_3]{r_3+(-\frac{1}{3})\times r_1}\begin{array}{cccc}f&p&p&f\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\end{array}\begin{bmatrix}0&3&3&3\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R}\begin{array}{cccc}f&p&p&f\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\end{array}\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$EA=R\Rightarrow\begin{bmatrix}0&0&1\\\frac{1}{3}&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&3&3&3\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

主列数为2 故矩阵的秩为2. 由于$A_{3\times4}$, $m-r=1$ $n-r=2$.

子空间	维数	基底
$C(A)$	2	$[3\ 0\ 0]^T,[3\ 0\ 1]^T$
$N(A)$	2	$[1\ 0\ 0\ 0]^T,[0\ -1\ 0\ 1]^T$
$C(A^T)$	2	$[0\ 1\ 1\ 1],[0\ 1\ 0\ 1]$
$N(A^T)$	1	$[0\ 1\ 0]$

$B=\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+(-5)\times r_1]{r_2+(-4)\times r_1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $B_{3\times1}$ $r=1$

$m-r=2$ $n-r=0$

$EB=R\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

子空间	维数	基底
$C(A)$	1	$[1\ 4\ 5]^T$
$N(A)$	0	$[0\ 0\ 0]^T$
$C(A^T)$	1	$[1]$
$N(A^T)$	2	$[-4\ 1\ 0],[-5\ 0\ 1]$

2. 解: a) 主元的个数等于矩阵的秩. 由于A的行秩和列秩相同

而 A^T 的列即为A的行. 故 A^T 和A的秩相同

因此. A和 A^T 主元数目相同

b) $N(A^T)$ 为 A^T 的零空间 若 $A=A^T$ 则 $N[(A^T)^T]=N(A)$

$N(A)\neq N(A^T)$ 首先维数就可能不同

c) $A^T=-A$ 首先A必为方阵. 设 $A_{n\times n}$

$\forall i,j$ $A_{(i,j)}=-A^T_{(i,j)}=-A_{(j,i)}$ 即A的第i列和A的第j行 $\times -1$ 相同

因此. A的行空间和列空间相同. 由于(-1)相乘不改变相关性.

因此 A的行、列空间的维数和基底均相同.

3. 解: 1). 由于S是 R^3 的子空间且只包含0向量 故S的维数是0

$S^\perp$ 由所有和S垂直的向量构成. $(0\ 0\ 0)^T\cdot\vec{v}=0$. $\forall\vec{v}\in R^3$

故 $S^\perp=R^3$

2). 由于S是由 $[1\ 1\ 1]^T$ 张成的子空间 $\forall\vec{s}\in S$. $\vec{s}=k\cdot[1\ 1\ 1]^T$

$\forall\vec{a}\in S^\perp$ 有: $\vec{a}\cdot[1\,1\,1]^T=0$. 设 $\vec{a}=(x,y,z)$ 有

$x+y+z=0$ 即. $[1\ 1\ 1]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$ $r=1$. $n=3$. $n-r=2$.

$[1\ 1\ 1]$ 的零空间为 $c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ 故

$S^\perp=c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

3). S 由 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 张成. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$ 对 $\forall \vec{v}\in S^{\perp}$, 有

$A\vec{v}=\vec{0}$ $\quad A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2+r_1}$

$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[R]{-\frac{1}{2}\times r_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\quad r=2 \quad n=3$

$n-r=1$

故 A 的零空间为 $C\cdot\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ $\qquad$ 故 $S^{\perp}$ 的基为 $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

思路Ⅱ: 对2). S 可以看作 $A=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的列空间 而 $C(A)^{\perp}=N(A^T)$

$A\xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\quad E=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$ 故 $S^{\perp}=C_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

对3) 同理 $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\1&-1\end{bmatrix}$ $\quad S^{\perp}=N(A^T)$

$A\xrightarrow[-r_1+r_3]{-r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2+r_1]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\\0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$

$E=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\end{bmatrix}$ $\qquad S^{\perp}$ 的基为 $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$

4. 解: 投影矩阵 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

5. 解: 1) 列空间的投影矩阵 $P_C = A(A^TA)^{-1}A^T$ 但A的各列线性相关 $C(A)=c\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

$$P_C = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}9 & 12\\12 & 16\end{bmatrix}$$

2) 行空间投影矩阵 $P_R = A^T(AA^T)^{-1}A$ A的各行线性相关 $C(A^T)=k\begin{bmatrix}3 & 6 & 6\end{bmatrix}$

$$P_b = \begin{bmatrix}3\\6\\6\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & 6 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\6\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}3 & 6 & 6\end{bmatrix} = \frac{1}{81}\begin{bmatrix}9 & 18 & 18\\18 & 36 & 36\\18 & 36 & 36\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 4 & 4\\2 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

3) $B = P_C\cdot A\cdot P_R = A$

P_CA 为将A的各列投影到A的列空间中 故 $P_C\cdot A = A$

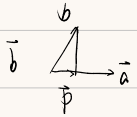
AP_b 为将A的各行投影到A的行空间中 故 $AP_b = A$

综上 $P_CAP_b = AP_b = A$

6. 解: 1) $\hat{x} = \dfrac{\vec{a}^T\cdot\vec{b}}{\vec{a}^T\cdot\vec{a}} = \dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_m}{m} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} b_i}{m}$

2) $$\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}\hat{x} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix} - \frac{\sum_{i=1}^{m} b_i}{m}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix}(m-1)b_1 - \sum_{i\neq 1} b_i\\(m-1)b_2 - \sum_{i\neq 2} b_i\\\vdots\\(m-1)b_m - \sum_{i\neq m} b_i\end{bmatrix}$$

$$\|\vec{e}\|^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left[(m-1)b_j - \sum_{i\neq j}^{m} b_i\right]^2$$



3) $\vec{p} = P\cdot\vec{b}$ 即 $\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}1\\2\\6\end{bmatrix}$ 而 $\vec{p} = \vec{a}\cdot\hat{x}$ 故 $\vec{a}$ 可以表示为 $c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

因此 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影和在 $\vec{x}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 上的投影含义相同

$$P = \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}^T}{\vec{x}^T\cdot\vec{x}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

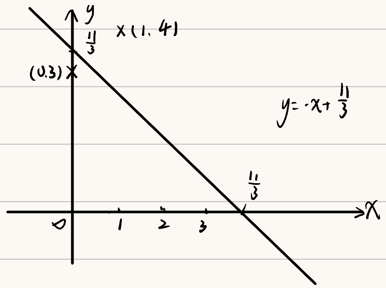
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. 解: 1) $P = A(A^TA)^{-1} \cdot A^T$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2) $A\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \vec{b}$ 的最小二乘解. (0,3) (1,4) (2,1) 到直线距离最近



3). $\hat{c} + \hat{d} \cdot 0 = b_1$

$\hat{c} + \hat{d} \cdot 1 = b_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix} = \vec{b}$; $\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix}$ 最小二乘解 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\hat{c} + \hat{d} \cdot 2 = b_3$

$P\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 即 $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \vec{0}$

$\vec{b}$ 为 P 的零空间 故 $\vec{b} = c\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$