第三讲 线性方程组

贺丽君
信息与通信工程学院
Email: lijunhe@mail.xjtu.edu.cn
2023-03

内容提要

- 齐次线性方程组Ax=0
- Ax=b：解的存在性与解的结构

内容提要

- 齐次线性方程组$Ax=0$
- $Ax=b$：解的存在性与解的结构

齐次线性方程组的求解

例1 求解Ax=0

消元过程不会改变列向量之间的相关性

主元

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

主列 自由列

发现：A中线性无关的列，消元后也线性无关

$$\mathbf{EA}=\mathbf{u},\quad \mathbf{E}\left[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\cdots\mathbf{a}_n\right]=\mathbf{u}$$

$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$线性独立，$c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$只有零解

$c_1\mathbf{Ea}_1+c_2\mathbf{Ea}_2=\mathbf{0}$相关，则有非零解

齐次线性方程组的求解

例1 求解Ax=0

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\0 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

主元

消元过程不会改变列向量之间的相关性

主列　　自由列

"自由"意味着什么？

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}=c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{a}_1x_1+\mathbf{a}_2x_2+\mathbf{a}_3x_3+\mathbf{a}_4x_4$$

满足$\mathbf{a}_1y_1+\mathbf{a}_2y_2=\mathbf{0}$即可，$\mathbf{a}_3$、$\mathbf{a}_4$系数$x_3$、$x_4$无约束

齐次线性方程组的求解

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 3 & 8 & 6 & 16\end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

主列　　自由列　？

- 主元的个数称为矩阵A的秩，记作r
- U可以继续化简以得到如下的简化行阶梯形式

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}}_{\mathbf{I}} \quad \underbrace{\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}}_{\mathbf{F}}$$

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}0\\ -2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$-\mathbf{F}$（上两行），$\mathbf{I}$（下两行）

齐次线性方程组的求解

例2 求解Ax=0

主元不能为零!

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 8 & 10\\ 3 & 3 & 10 & 13\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

行阶梯形

$$\longrightarrow \mathbf{U}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}=c_1\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \mathrm{P} & \mathrm{F} & \mathrm{P} & \mathrm{F}\end{array}$$

阶梯矩阵 (Echelon Matrices)

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix} p & x & x & x & x & x & x \\ 0 & p & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 如何确定该矩阵的列空间和零空间？
- 对齐次线性方程组**Ax=0**，假设未知数的个数多于方程个数，该方程组有多少个非零解？

通解与简化行阶梯矩阵的关系

例2（续）

简化行阶梯形式(rref)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

简化行阶梯矩阵的特点：

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- 主元均为1，主元上下均为零
- 主行、主列相交处的元素构成单位阵

通解与简化行阶梯矩阵的关系

$$\mathbf{R} = \begin{array}{cccc} & \mathrm{F} & & \mathrm{F} \\ & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax=0} \Longleftrightarrow \mathbf{Rx=0} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p^{(1)} \\ \mathbf{x}_f^{(1)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p^{(2)} \\ \mathbf{x}_f^{(2)} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \beta \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_p^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_3^{(1)})$$

$$\mathbf{x}_f^{(1)} = (x_2^{(1)}, x_4^{(1)})$$

$$R\begin{bmatrix} \beta \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{I}\beta + \mathbf{F}\mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \beta = -\mathbf{F}$$

通解与简化行阶梯矩阵的关系

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & F & & F \end{array} \\ R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax=0} \Leftrightarrow \mathbf{Rx=0} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{-F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

零空间矩阵，各列由特解组成

内容提要

- 齐次线性方程组$Ax=0$
- $Ax=b$：解的存在性与解的结构

Ax=b解的存在性

增广矩阵
(Augmented Matrix)

$$
\begin{aligned}
x+3y+0z+2u&=b_1\\
0x+0y+1z+4u&=b_2\\
1x+3y+1z+6u&=b_3
\end{aligned}
\qquad
[\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&3&0&2&b_1\\0&0&1&4&b_2\\1&3&1&6&b_3\end{bmatrix}
$$

$$
[\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}]\longrightarrow\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&3&0&2\\0&0&1&4\\0&0&0&0\end{matrix}}&\begin{matrix}b_1\\b_2\\b_3-b_1-b_2\end{matrix}\end{bmatrix}=[\mathbf{R}\ \ \mathbf{d}]
$$

$b_3-b_1-b_2 \rightarrow 0$

- b在矩阵A的列空间内
- 如果A的各行向量的线性组合为零向量，则b的各分量的同一线性组合必为0

Ax=b解的存在性

- 如果A的各行向量的线性组合为零向量，则b的各分量的同一线性组合必为0

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc} c_1 b_1 & c_1 a_{11} & c_1 a_{12} & c_1 a_{13} \\ c_2 b_2 & c_2 a_{21} & c_2 a_{22} & c_2 a_{23} \\ c_3 b_3 & c_3 a_{31} & c_3 a_{32} & c_3 a_{33} \end{array}$$

Ax=b解的结构

$$[A\ \ b]=\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\1&3&1&6&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{array}{c}\begin{matrix}P&F&P&F&\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}=[R\ \ d]$$

- 如何求解非齐次线性方程组

$Ax=b \Longleftrightarrow Rx=d$　　令x是任意解，x_p是线性方程组的某一个特解

$Ax-Ax_p=0 \Longleftrightarrow A(x-x_p)=0 \Longleftrightarrow$ $\boxed{x=x_p+\text{齐次线性方程组的解}}$

Ax=b解的结构

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\1&3&1&6&7\end{bmatrix}\longrightarrow \begin{array}{ccccc} \mathrm{P} & \mathrm{F} & \mathrm{P} & \mathrm{F} & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=[\mathbf{R}\ \ \mathbf{d}]$$

- 第一步：求特解x_p

□ 令自由变量x_2、x_4为零 $\mathbf{R}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\text{pivot}}\\ \mathbf{x}_{\text{free}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{F}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_{\text{pivot}}\\ \mathbf{x}_{\text{free}}\end{bmatrix}=\mathbf{d}$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{I}\mathbf{x}_{\text{pivot}}+\mathbf{F}\mathbf{x}_{\text{free}}=\mathbf{d}^r$$

主元变量x_1、x_3即为d中非零元素

$$\boxed{\mathbf{x}_{\text{pivot}}=\mathbf{d}^r} \Longleftarrow \mathbf{x}_{\text{free}}=\mathbf{0}$$

Ax=b解的结构

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathrm{P} & \mathrm{F} & \mathrm{P} & \mathrm{F} & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= [\mathbf{R}\ \ \mathbf{d}]$$

- 第二步：求齐次方程的解x_n

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}$$

完全解

Ax=b解的结构

$$[\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\1&3&1&6&7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{array}{ccccc}\mathrm{P}&\mathrm{F}&\mathrm{P}&\mathrm{F}&\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\end{array}\begin{bmatrix}1&3&0&2&1\\0&0&1&4&6\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=[\mathbf{R}\ \ \mathbf{d}]$$

➢ 小结

- $r<m, r<n$，简化行阶梯矩阵具有如下形式：

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{F}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$$

若要方程组有解，则d的最后m-r个分量必为0

- $r<m, r<n$，方程组Ax=b没有解或有无穷多解

Ax=b解的结构

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

方程组有解条件：

$b_3+b_1+b_2=0$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & b_1\\ 1 & 2 & b_2\\ -2 & -3 & b_3\end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c}\boxed{\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}} & & \begin{matrix}2b_1-b_2\\ b_2-b_1\\ b_3+b_1+b_2\end{matrix}\end{array}\right]$$

n-r=0：

无自由变量

$\boldsymbol{x}_n=\mathbf{0}$

方程组只有唯一解(如果有解)：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{x}_n=\begin{bmatrix}2b_1-b_2\\ b_2-b_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Ax=b解的结构

- 小结

  - $r<m, r=n$：列满秩的情况，简化行阶梯矩阵具有如下形式：

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow n\times n\text{单位阵}\\ \leftarrow m\text{-}n\text{个全零行}\end{matrix}$$

  - A的所有列都是主列，$N(\mathbf{A})$只包含零向量
  - 线性方程组Ax=b无解或只有一个解

Ax=b解的结构

此时不存在解
的存在性问题

$$\begin{aligned} x &+ y &+ z &= 3 \\ x &+ 2y &- z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

$$x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}_{\text{pivot}} = \mathbf{d}^r}$$

$$\boxed{\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}}$$

Ax=b解的结构

➢ **小结**

- $r=m, r<n$：行满秩的情况，简化行阶梯矩阵具有如下形式：

$$\mathbf{R} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{F}]$$

m个线性无关的列

$m \times m$单位阵　　$n\text{-}m$个自由列(Ax=0的特解)

- A的所有行都是主行，$C(\mathbf{A})=\mathbf{R}^m$。

- 对任意b，线性方程组Ax=b有无穷多解

Ax=b解的结构

- *r=m=n*的情况
  - *r=m=n*：A为可逆方阵，简化行阶梯矩阵具有如下形式：

$$\mathbf{R}=\left[\mathbf{I}\right]$$

  - 对任意b，线性方程组Ax=b有唯一解

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

谢谢大家！