第五节 线性控制系统的
稳定性和代数稳定判据

线性控制系统稳定性概念

稳定是控制系统的重要性能，也是系统能够正常运行的首要条件。控制系统在实际运行过程中，总会受到外界和内部一些因素的扰动，例如负载和能源的波动、系统参数的变化、环境条件的改变等。如果系统不稳定，就会在任何微小的扰动作用下偏离原来的平衡状态，并随时间的推移而发散。因此，如何分析系统的稳定性并提出确保系统稳定的措施，是自动控制理论的基本任务之一。

在经典控制理论中，采用的是输入输出模型。所以系统的稳定性问题，从输入输出的关系加以讨论，属于外部稳定性范畴。

线性控制系统稳定性的定义

[定义一] 如果线性系统受到扰动的作用而使被控量产生偏差，当扰动消失后，随着时间的推移，该偏差逐渐减小并趋向于零，即被控量趋向于原来的工作状态，则称该系统为渐近稳定，简称稳定。反之，称系统不稳定。

[定义二]若线性系统在有界的输入量或干扰量的作用下，其输出量的幅值也是有界的，则称系统是稳定的，否则如果系统在有界输入作用下，产生无界输出，则称系统是不稳定的。

- 在描述稳定性定义时提到了输入作用和扰动作用，但对线性定常系统来说，不论是渐近稳定性定义，还是在有界输入－有界输出意义下的定义，系统稳定与否完全取决于系统本身的结构和参数。稳定性是系统本身的一种属性。与输入作用无关；与初始条件无关；与零点无关；只与闭环极点有关。

- 上述稳定性指的是系统的绝对稳定性，具有绝对稳定性的系统称为稳定的系统。对于稳定的系统，还可以用相对稳定性来进一步衡量系统的稳定程度。相对稳定性越低，系统的灵敏性和快速性越高，系统的振荡越激烈。

- 绝对稳定性：稳定或不稳定
- 相对稳定性：稳定的程度

线性定常控制系统稳定的充要条件

由于系统的稳定性与外界条件无关，因此，可设线性系统的初始条件为零，输入作用为单位脉冲信号$\delta(t)$，这时系统的输出便是单位脉冲响应$y_\delta(t)$。这相当于在扰动信号作用下，输出信号偏离原来工作状态的情形。根据渐近稳定性定义，当时间趋于无穷大时，若脉冲响应收敛于原来的工作状态，即：$\lim\limits_{t\to\infty} y_\delta(t)=0$，则线性控制系统是稳定的。

讨论系统稳定性与系统极点之间的关系：

系统的输入为单位脉冲信号$R(s)=1$，系统的输出为

$$Y_\delta(s)=\frac{k_g\prod\limits_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod\limits_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod\limits_{l=1}^{n_2}(s^2+2\zeta_l\omega_{nl}s+\omega_{nl}{}^2)}$$

部分分式展开得：

$$Y_\delta(s)=\sum_{j=1}^{n_1}\frac{A_j}{s+p_j}+\sum_{l=1}^{n_2}\frac{B_l(s+\zeta_l\omega_{nl})+C_l\omega_{nl}\sqrt{1-\zeta_l^{\ 2}}}{s^2+2\zeta_l\omega_{nl}s+\omega_{nl}^{\ 2}}$$

单位脉冲响应为：

$$y_\delta(t)=\sum_{j=1}^{n_1}A_je^{-p_jt}$$

$$+\sum_{l=1}^{n_2}B_le^{-\zeta_l\omega_{nl}t}\cos\omega_{nl}\sqrt{1-\zeta_l^{\ 2}}\,t+\sum_{l=1}^{n_2}C_le^{-\zeta_l\omega_{nl}t}\sin\omega_{nl}\sqrt{1-\zeta_l^{\ 2}}\,t,\quad t\geq 0$$

若 $\lim_{t\to\infty}y_\delta(t)=0$，则式中$-p_j$和$-\zeta_l\omega_{nl}$应为负数。而$-p_j$和$-\zeta_l\omega_{nl}$分别为系统的实极点和共轭复极点的实部，表明若要使单位脉冲响应收敛于零，系统的极点均应有负的实部。则线性系统稳定的充要条件可描述为：系统的所有极点必须位于s左半平面。

充要条件说明

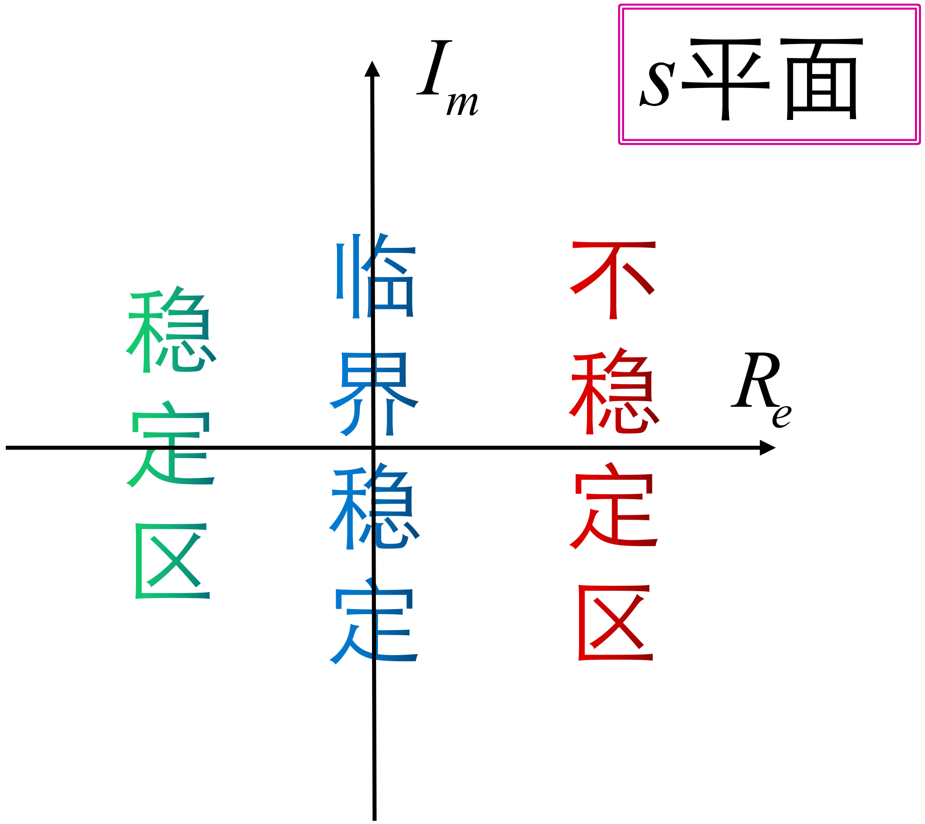
[分析]

- 如果特征方程中有一个正实根，它所对应的瞬态响应项将按指数形式随时间单调增长；
- 如果特征方程中有一对实部为正的共轭复根，它的对应瞬态响应项是发散的周期振荡。

上述两种情况，系统是不稳定的。

- 如果特征方程中有一个零根，它所对应的瞬态响应项是常数项，系统可在任何状态下平衡，称为随遇平衡状态；
- 如果特征方程中有一对共轭虚根，它所对应的瞬态响应项是等幅的周期振荡，称为临界稳定状态。

工程上，临界稳定状态和随遇平衡状态属于不稳定。


I_m
s平面
临界稳定
稳定区
不稳定区
R_e

利用有界输入－有界输出意义下定义来讨论稳定充要条件

假设系统的单位脉冲响应为$y_\delta(t)$，则系统在任意输入信号$r(t)$的作用下，输出响应$y(t)$可表示为$y_\delta(t)$与$r(t)$的卷积：

$$y(t)=\int_0^\infty y_\delta(\tau)r(t-\tau)d\tau$$

如果$r(t)$有界，即存在常数M_r使得：

$$|r(t-\tau)|\le M_r<\infty$$

由于：$$|y(t)|=\left|\int_0^\infty y_\delta(\tau)r(t-\tau)d\tau\right|\le\int_0^\infty\left|y_\delta(\tau)r(t-\tau)\right|d\tau$$

$$\le\int_0^\infty\left|y_\delta(\tau)\right|\cdot\left|r(t-\tau)\right|d\tau\le M_r\int_0^\infty\left|y_\delta(\tau)\right|d\tau$$

可见，若 $\int_0^{\infty}|y_\delta(t)|dt$ 绝对可积，即$y_\delta(t)$有界或存在常数M_δ，使得:

$$\int_0^{\infty}|y_\delta(t)|dt \le M_\delta < \infty$$

则输出响应$y(t)$必定是有界的。

$$|y(t)| \le M_r M_\delta$$

若 $\int_0^{\infty}|y_\delta(t)|dt$无界，则不能保证输出响应$y(t)$有界。

[结论]：若系统的单位脉冲响应函数为$y_\delta(t)$，则当且仅当积分：$\int_0^{\infty}|y_\delta(t)|dt < \infty$ 时，即该积分有界时，系统在有界输入－有界输出意义下是稳定的。

$$y_\delta(t)=\sum_{j=1}^{n_1}A_j e^{-p_j t}$$
$$+\sum_{l=1}^{n_2}B_l e^{-\zeta_l\omega_{nl}t}\cos\omega_{nl}\sqrt{1-\zeta_l^{\ 2}}\,t+\sum_{l=1}^{n_2}C_l e^{-\zeta_l\omega_{nl}t}\sin\omega_{nl}\sqrt{1-\zeta_l^{\ 2}}\,t,\quad t\geq 0$$

由上式，可知有界输入－有界输出意义下稳定的充分必要条件是系统的全部极点均位于s左半平面。

为什么？不同的极点，$\int_0^{\infty}\left|y_\delta(t)\right|dt\Rightarrow ?$

显然，在有界输入－有界输出稳定性意义下得出的稳定的充要条件，与在渐近稳定性意义下得出的充要条件是一致的。可将对系统稳定性的判别转化为对系统特征根大小的判别或计算。

[例子]

$$\Phi(s)=\frac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)}$$

极点为： s_1=-1， s_2=-2，都在s左半平面。 系统是稳定的

$$\Phi(s)=\frac{10(s+2)}{(s+1)(s-3)(s+4)}$$

有正实极点s=+3，位于s 右半平面，系统是不稳定的。与此极点相对应的瞬态响应分量按e^{3t}的规律随时间无限增大。

$$\Phi(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

有一对虚轴上的闭环极点$s_{1,2}=\pm j$，系统是临界稳定的，与此极点相对应的瞬态响应分量为频率ω=1的等幅振荡。

[稳定性要点]

稳定性是<u>线性定常系统</u>的一个属性，只与系统本身的结构参数有关，只与极点位置有关。

与线性定常系统的初始条件无关、与输入信号无关、与零点无关。

代数稳定性判据:

由于线性系统稳定的充要条件是其特征根（极点）为负实根或具有负实部的共轭复根，因而对系统稳定性的判别就可转化为求解系统特征方程的根，并检验所求的根是否都具有负实部的问题。

[问题?] 能否不用直接求解特征根，而根据系统特征方程的系数与其特征根之间的关系来判别特征根实部的符号呢?

（为什么要提出这个问题？）

线性控制系统的特征方程为：

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$a_n \prod_{i=1}^{n} (s - r_i) = 0 \quad r_i (i=1\sim n)\text{为特征根。} a_n>0$$

$$
\begin{aligned}
& a_n[s^n-(r_1+r_2+\cdots+r_n)s^{n-1} && a_n[s^n-(\text{所有根之和})s^{n-1} \\
& +(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3\cdots)s^{n-2} && +(\text{所有根两两相乘之和})s^{n-2} \\
& -(r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+\cdots)s^{n-3}+\cdots && -(\text{所有根每三个根乘积之和})s^{n-3}+\cdots \\
& +(-1)^n r_1r_2r_3\cdots r_n]=0 && +(-1)^n(\text{所有根的乘积})]=0
\end{aligned}
$$

■如果系统的特征根都是负实根，或具有负实部的共轭复根，则其特征方程的各个系数均为正值，且特征方程无缺项。

■若特征方程如有一个实部为正的根，则特征方程中各项系数不会全为正值，即特征方程一定会有负系数或缺项出现。

■“系数全为正”是稳定的必要条件而非充分条件，换句话说，当这个条件不满足时，可立即判断出系统是不稳定的。而当这个条件满足时，也不能保证系统是稳定的，还需要进一步的判断。（系数全为正不能表示特征根都在s左半平面）

- 对于一阶系统：$a_1 s + a_0 = 0$，$s = -a_0 / a_1$，若a_0、a_1均大于零，系统是稳定的。

- 对于二阶系统：$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$，$s_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$

只有 a_0, a_1, a_2 都大于零，系统才稳定。（负实根或实部为负）

- 某三阶系统的特征方程为：

$$s^3 + s^2 + 2s + 8 = 0$$

其系数都大于零。该系统稳定吗?

$$s^3 + s^2 + 2s + 8 = (s+2)(s^2 - s + 4) = 0$$

该系统是不稳定的，因为特征方程具有一对位于s右半平面的共轭复根。

劳斯—赫尔维茨（E. J. Routh-A. Hurwitz稳定性判据）

（一）、劳斯判据

设线性系统的特征方程为 $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$

列写劳斯阵列：

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \\
s^2 & d_1 & d_2 & d_3 & \\
s^1 & e_1 & e_2 & & \\
s^0 & f_1 & & &
\end{array}
$$

- 特征方程按s降幂排列，且$a_n>0$；
- 劳斯阵列的前两行元素由特征方程的系数组成，第一行由特征方程的奇数项系数组成，第二行由特征方程的偶数项系数组成。若特征方程有缺项，则该项系数以零计。

第三行及以后行的计算式为：

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \\
s^1 & f_1 & & & \\
s^0 & g_1 & & &
\end{array}
$$

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$
\begin{array}{l|llll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \\
s^1 & f_1 & & & \\
s^0 & g_1 & & &
\end{array}
$$

$$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \qquad d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1}$$

依次类推。可求得 $e_i, f_i, g_i, \ldots (i = 1,2,\ldots)$

[劳斯判据]系统特征方程具有正实部根的数目与劳斯阵列第一列元素中符号变化的次数相等。

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \\
s^1 & f_1 & & & \\
s^0 & g_1 & & &
\end{array}
$$

根据劳斯判据可以得出:

■若劳斯阵列第一列元素的符号有变化，表明相应的线性系统不稳定。符号变化的次数等于该特征方程的根在s右半平面的个数。

■由系统特征方程系数组成的劳斯阵列的第一列元素没有符号变化（或均为正，$a_n>0$）时，系统稳定，或临界稳定（当有共轭虚根时）。

[例3.5.4]：特征方程为：$a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$，试判断稳定性。

[解]：劳斯阵为：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & \dfrac{a_2a_1-a_3a_0}{a_2} & 0 \\ s^0 & a_0 & 0 \end{array}$$

a_1a_2-a_3a_0=0时，如何?

稳定的必要条件为：

- a_3,a_2,a_1,a_0均大于零（系数同号）

稳定的充要条件为：

- a_3,a_2,a_1,a_0均大于零（系数同号）
- 且$a_1a_2-a_3a_0>0$。

各种情况下劳斯阵列的列写及结论:

- 劳斯阵第一列所有元素均不为零，但也不全为正数，则系统不稳定。表示s右半平面上有极点，右极点个数等于劳斯阵列第一列系数符号改变的次数。

[技巧]用一个正数去乘或除某整行，不改变系统的稳定性结论(可简化计算)。

[例]：系统的特征方程为：$s^5+2s^4+s^3+3s^2+4s+5=0$

$$
\begin{array}{l|lll}
s^5 & 1 & 1 & 4 \\
s^4 & 2 & 3 & 5 \\
s^3 & -1 & 3 & \Rightarrow\ -1\quad 3\quad (\times 2) \\
s^2 & 9 & 5 & \\
s^1 & 1 & & \Rightarrow\ 1\quad (\times \frac{9}{32}) \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

劳斯阵第一列有负数，系统是不稳定的。其符号变化两次，表示有两个极点在s的右半平面。

- 劳斯阵某一行第一项系数为零，而其余系数不全为零。导致劳斯阵下一列无法计算。

[处理办法]：用很小的正数ε代替零的那一项，然后据此计算出劳斯阵列中的其他项。若第一次零（即ε）与其上项或下项的符号相反，计作一次符号变化。(必不稳定)

[例]: $s^4+2s^3+s^2+2s+1=0$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 1 & 1 \\
s^3 & 2 & 2 & \\
s^2 & \varepsilon & 1 & \\
s^1 & \dfrac{2\varepsilon-2}{\varepsilon} & & \\
s^0 & 1 & &
\end{array}
$$

令$\varepsilon \to 0^+$，则 $2-\dfrac{2}{\varepsilon} \to -\infty$

故第一列不全为正，系统不稳定，s右半平面有两个极点。

$$\overset{+}{\varepsilon} \to \overset{-}{2-\frac{2}{\varepsilon}},\overset{-}{2-\frac{2}{\varepsilon}} \to \overset{+}{1}$$

- 劳斯阵某行系数全为零的情况。表明特征方程具有大小相等而位置径向相反的根。至少有下述几种情况之一出现，如：大小相等、符号相反的一对实根，或一对共轭虚根，或对称于虚轴的两对共轭复根。(稳定性怎样？)

[例如] $\Delta_1 = s^3 + 2s^2 - s - 2 = (s^2 - 1)(s + 2)$

$$\Delta_2 = s^3 + 2s^2 + s + 2 = (s - j)(s + j)(s + 2)$$

$$\Delta_3 = s^4 + 4 = (s - 1 + j)(s - 1 - j)(s + 1 + j)(s + 1 - j)$$

[处理办法]当劳斯阵列中出现元素全为零的行时，可利用该全零行的上一行元素构造一个辅助方程，并将该辅助方程对复变量s求导，用求导以后方程的系数取代全零行元素，继续劳斯阵列的排列。辅助方程的阶次通常为偶数，它的根即为那些大小相等而径向位置相反的根。

[例]: $s^6+2s^5+8s^4+12s^3+20s^2+16s+16=0$

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	0
s^4	2	12	16	0
s^3				
s^2				
s^1				
s^0				

s^6	1	8	20	16
s^5	1	6	8	0
s^4	1	6	8	0
s^3	1	3	0	
s^2	3	8	0	0
s^1	1	0	0	0
s^0	1	0	0	0

辅助方程为：$s^4+6s^2+8=0$，

求导得：$4s^3+12s=0$ ，

或 $s^3+3s=0$，用1，3，0代替全零行即可。

从第一列都大于零可见，表明该系统在右半平面没有特征根，但是具有共轭虚根。由辅助方程求得：

$$(s^2+2)(s^2+4)=0 \quad , \qquad s_{1,2}=\pm j\sqrt{2}, \qquad s_{3,4}=\pm j2$$

该系统处于临界稳定状态。工程上是不稳定的系统。

（二）、胡尔维茨判据

设系统的特征方程式为：$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$

则系统稳定的充要条件是：$a_n > 0$，且由特征方程系数构成的胡尔维茨行列式的主子行列式全部为正。

胡尔维茨行列式：
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

胡尔维茨行列式的构造：主对角线上的各项为特征方程的第二项系数a_{n-1}至最后一项系数a_0，在主对角线以下各行中各项系数下标逐次增加，在主对角线以上各行中各项系数下标逐次减小。当下标大于n或小于0时，行列式中的项取0。

以4阶系统为例使用胡尔维茨判据：$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$

胡尔维茨行列式为：
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

稳定的充要条件是：

1、$a_4 > 0$

2、$\Delta_1 = a_3 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \Delta_4 = \Delta > 0$$

胡尔维茨判据的另一种形式:

系统稳定的充要条件（林纳特-戚伯特Lienard-Chipard定理）：

若1、$a_i > 0(i = n \sim 0)$, 2、$\Delta_j > 0(j = 1,3,5,\ldots)$, 或$\Delta_j > 0(j = 2,4,6,\ldots)$, 则系统稳定。

式中，Δ_j 为胡尔维茨主子行列式。采用这种形式的判据可减少一半的计算工作量。

（三）劳斯稳定性判据的应用

❑ 判定控制系统的稳定性

[例] 系统的特征方程为：$s^4+2s^3+3s^2+4s+5=0$，判断系统的稳定性。

[解]：劳斯阵如下：

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
s^2 & 1 & 5 & 0 \\
s^1 & -6 & 0 & 0 \\
s^0 & 5 & 0 & 0
\end{array}
$$

因为，$a_i>0,(i=0\sim4)$，且劳斯阵第一列不全为正，所以，系统不稳定。

由于劳斯阵第一列有两次符号变化，所以系统在s右半平面有两个极点。

[例]：系统的特征方程为：$0.001s^4+0.05s^3+0.2s^2+0.4s+1=0$ 试用胡尔维茨定理判稳。

[解]：系统的特征方程为：$s^4+50s^3+200s^2+400s+1000=0$

列胡尔维茨行列式如下：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 50 & 400 & 0 & 0 \\ 1 & 200 & 1000 & 0 \\ 0 & 50 & 400 & 0 \\ 0 & 1 & 200 & 1000 \end{vmatrix}$$

$$\because \Delta_1=50>0, \Delta_2=\begin{vmatrix} 50 & 400 \\ 1 & 200 \end{vmatrix}>0, \Delta_3=\begin{vmatrix} 50 & 400 & 0 \\ 1 & 200 & 1000 \\ 0 & 50 & 400 \end{vmatrix}>0$$

$$\Delta_4=1000\Delta_3>0, \text{且} a_4=1>0$$

所以，系统是稳定的。

注意：由于 $a_i>0$，所以根据Lienard-Chipard定理，只要计算 Δ_1、Δ_3或Δ_2、Δ_4即可。这样可以减小一半的计算量。

[例3]系统的特征方程为：$s^5+2s^4+24s^3+48s^2+23s+46=0$，该系统稳定吗？求出每一个极点并画出极点分布图。

[解]：劳斯阵如下

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & 23 \\ s^4 & 2 & 48 & 46 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

s^3 行全为零。由前一行系数构成辅助方程得：$2s^4+48s^2+46=0$或$s^4+24s^2+23=0$

其导数为：$s^3+12s=0$，将1，12代替s^3 行，可继续排列劳斯阵。

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 24 & 23 \\ s^4 & 1 & 24 & 23 \\ s^3 & 1 & 12 & 0 \\ s^2 & 12 & 23 & 0 \\ s^1 & 10 & 0 & 0 \\ s^0 & 23 & 0 & 0 \end{array}$$

- $a_i > 0, (i = 0 \sim 5)$
- 劳斯阵第一列系数全为正。但因为s_3行全为零，所以特征方程有特殊的根。求解如下：令$Q(s)=0$,有$(s^2+23)(s^2+1)=0$,

  $$\therefore s_{1,2} = \pm j\sqrt{23}, s_{3,4} = \pm j1$$

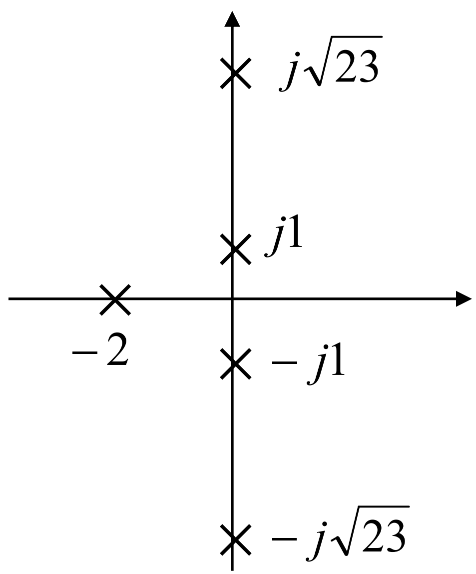
- 特征根存在共轭虚根，属临界稳定系统。

设剩余的一个根为$-p$。则：$(s+p)(s^4+24s^2+23)=0$，整理得：

$$s^5+ps^4+24s^3+24ps^2+23s+23p=0$$

比较系数得：$-p=-2$

极点分布如下：



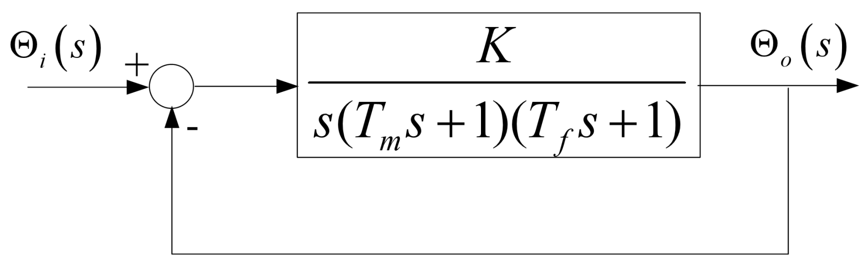
【注意】

- 劳斯判据实际上只能判断代数方程的根是在s平面左半闭平面还是在右半开平面。对于虚轴上的根要用辅助方程求出。并以此判断系统的稳定属性。
- 若特征方程有对称于虚轴的实根或共轭复根，则在劳斯阵列的第一列一定有变号，并可由辅助方程求出这些根。

❑ 分析系统参数变化对稳定性的影响

利用劳斯稳定性判据可以分析系统参数对稳定性的影响，从而求得这些参数的取值范围。若讨论的参数为开环放大系数K，则使系统稳定的最大K称为临界放大系数K_p。

[例3.5.10] 考虑如下图所示的导弹航向控制系统。图中，$T_m>0, T_f>0$，试确定系统稳定时放大系数K的取值范围。



[解]：闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{\Theta_o}{\Theta_i}=\frac{K}{T_m T_f s^3+(T_m+T_f)s^2+s+K}$$

特征方程为：$$T_m T_f s^3+(T_m+T_f)s^2+s+K=0$$

特征方程为：$T_m T_f s^3 + (T_m + T_f)s^2 + s + K = 0$

列出对应的劳斯阵列如下：

劳斯阵：
$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & T_m T_f & 1 \\
s^2 & T_m + T_f & K \\
s^1 & \dfrac{T_m + T_f - T_m T_f K}{T_m + T_f} & 0 \\
s^0 & K & 0
\end{array}
$$

开环放大系数K影响系统的稳定性

要使系统稳定，必须：

$$\frac{T_m + T_f - T_m T_f K}{T_m + T_f} > 0 \text{ 及 } K > 0$$

整理后可得开环放大系数K的取值范围是：

$$0 < K < \frac{1}{T_m} + \frac{1}{T_f}$$

分析系统的相对稳定性（稳定裕度的概念）

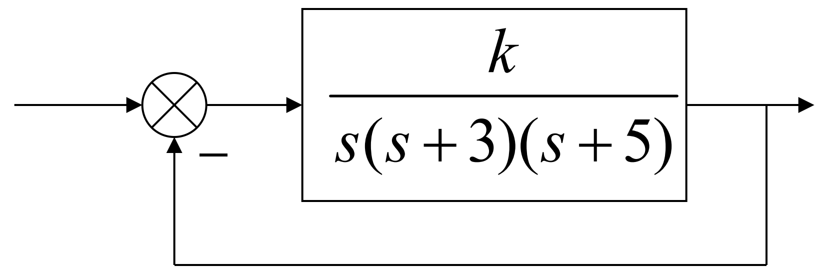
使用劳斯判据只能判断控制系统是否稳定，不能指出系统的稳定程度，以及是否具备满意的瞬态性能，即劳斯判据不能表明特征根在s平面上相对于虚轴的距离。在实际系统中，往往需要知道系统离临界稳定有多少裕量，这就是相对稳定性或稳定裕量问题。

利用实部最大的特征根 p（离虚轴最近）与虚轴的距离 σ 来表示系统的稳定裕量。

若p处于虚轴上，则$\sigma=0$，表示稳定裕量为0。

[如何判断稳定裕量？]作$s=-\sigma$的垂线，若系统的极点都在该线的左边，则称该系统具有σ的稳定裕量。σ越大，稳定程度越高。可用$s=x-\sigma$代入特征方程，得以x为变量的新的特征方程，用劳斯判据进行判稳。若稳定，则称原系统具有σ的稳定裕量。

[例]已知系统的方块图，为使系统特征根都位于s=-1的左边，试确定k值的取值范围。



[解]：闭环特征方程为：

$$s^3+8s^2+15s+k=0$$

以s=x-1代入上式，得

$$x^3+5x^2+2x+k-8=0$$

劳斯阵：

$$\begin{array}{c|cc} x^3 & 1 & 2 \\ x^2 & 5 & k-8 \\ x^1 & \frac{18-k}{5} & 0 \\ x^0 & k-8 & \end{array}$$

要使系统稳定，必须

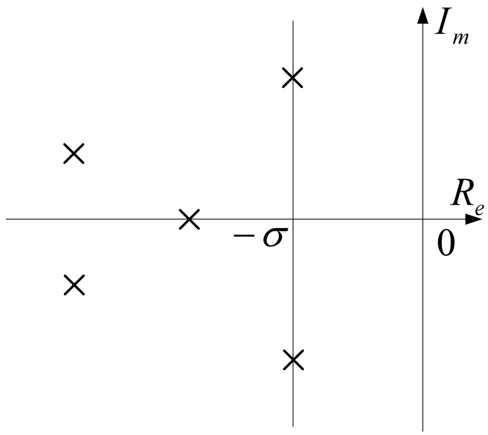
①系数皆大于0，$\therefore k>8$

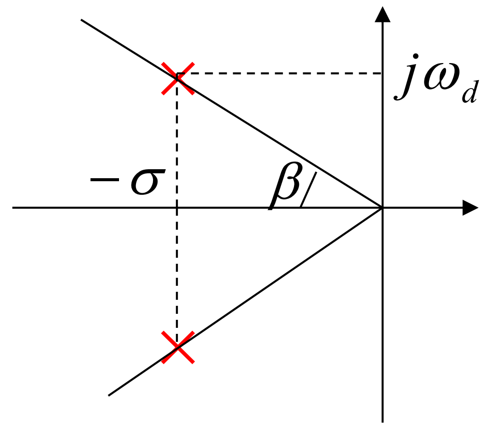
②劳斯阵第一列皆大于0

$$有\begin{cases} \dfrac{18-k}{5}>0 \Rightarrow k<18 \\ k>8 \end{cases} \Rightarrow 8<k<18$$

此时k的取值范围为 $8<k<18$

原系统稳定时，k的范围为(0~120)。说明了什么？

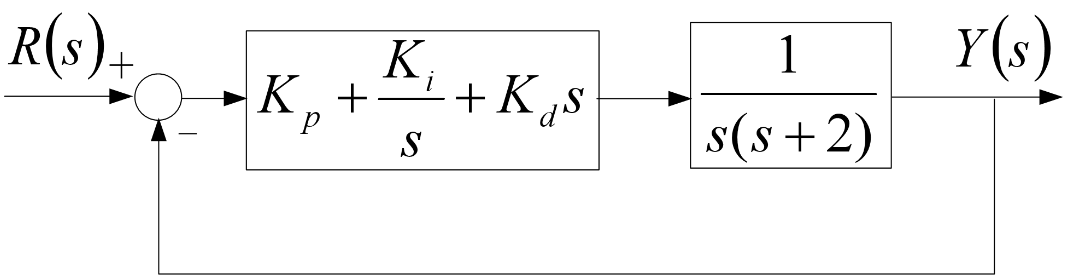




讨论相对稳定性除了考虑极点离虚轴远近外，还要考虑共轭极点的振荡情况。对于共轭极点，其实部反映响应的衰减快慢，虚部反映响应的振荡情况。对于极点 $-\sigma \pm j\omega_d$，对应的时域响应为 $e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t+\varphi)$。所以，$\sigma$越小，衰减越慢，$\omega_d$越大，振荡越激烈。

可用共轭极点阻尼角β来表示系统的相对稳定性。当 $\beta = 90^\circ$ 时，表示极点在虚轴上，系统为临界稳定。β越小，稳定性越高。相对稳定性越好。

[例3.5.11] 控制系统的方块图如下图所示，图中，前向通道中的环节：$K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$ 为比例积分微分控制器，简称PID控制器，K_p、K_i和K_d分别为比例、积分和微分系数。(1)当K_d=0时，试确定K_p和K_i的值，使系统稳定。(2) 当K_i=0时，试确定K_p和K_d的值，使系统的闭环极点均位于垂线s=-1的左边。



解：(1)当K_d=0时，为比例－积分控制器。系统的闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + 2s^2 + K_p s + K_i}$$

$$\Phi(s)=\frac{K_p s+K_i}{s^3+2s^2+K_p s+K_i}$$

闭环特征方程为

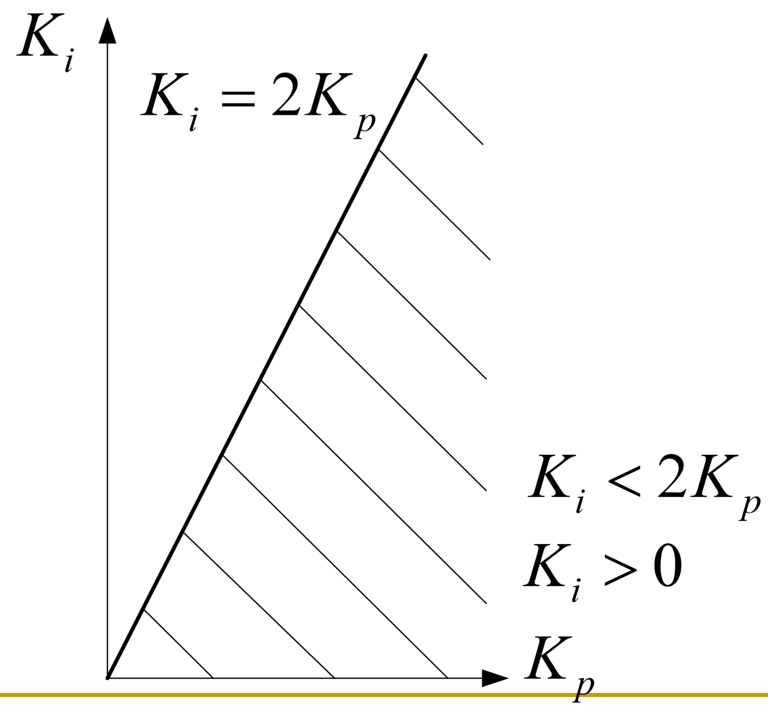
$$s^3+2s^2+K_p s+K_i=0$$

劳斯阵列如下

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & K_p \\
s^2 & 2 & K_i \\
s^1 & \dfrac{2K_p-K_i}{2} & 0 \\
s^0 & K_i & 0
\end{array}$$

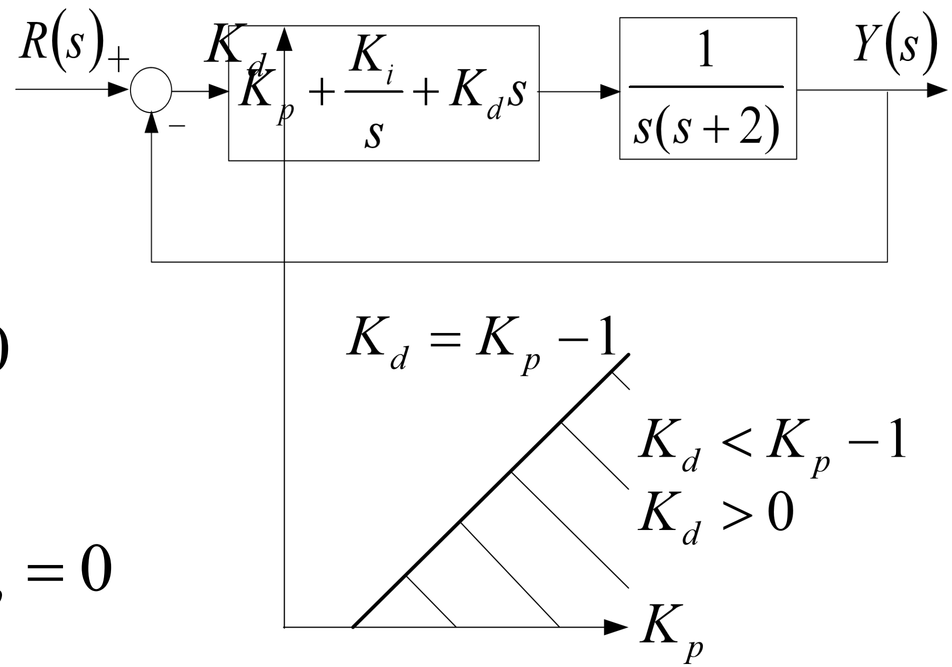
当系统稳定时，劳斯阵列第一列元素应无符号变化，于是有

$$K_i>0,\quad K_p>\frac{K_i}{2}$$



(2) 当K_i=0时，为比例－微分控制器。系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{K_p+K_d s}{s^2+(2+K_d)s+K_p}$$



闭环特征方程为

$$s^2+(2+K_d)s+K_p=0$$

令$s=$z-1，代入上式得：

$$z^2+K_d z-1-K_d+K_p=0$$

劳斯阵列如下

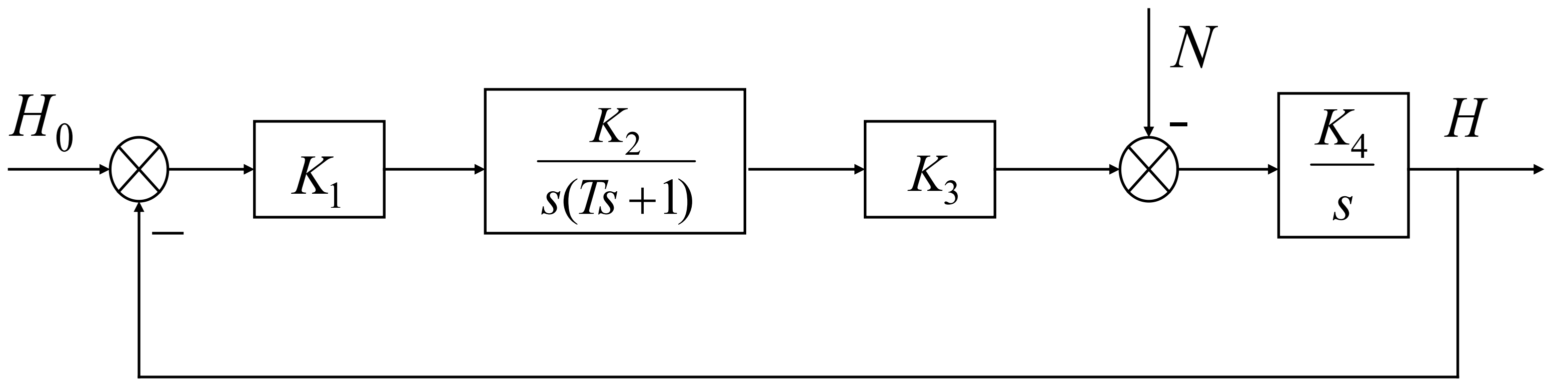
z^2	1	$-1-K_d+K_p$
z^1	K_d	0
z^0	$-1-K_d+K_p$	0

根据劳斯稳定性判据，可得

$K_d>0,\ \ K_p>1+K_d$

结构不稳定系统及其改进措施

仅仅调节参数无法稳定的系统称为结构不稳定系统。



闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{K_1K_2K_3K_4}{s^2(Ts+1)+K_1K_2K_3K_4}$$

令：$K=K_1K_2K_3K_4$

闭环特征方程为：$s^2(Ts+1)+K=0 \qquad Ts^3+s^2+K=0$

$$Ts^3 + s^2 + K = 0$$

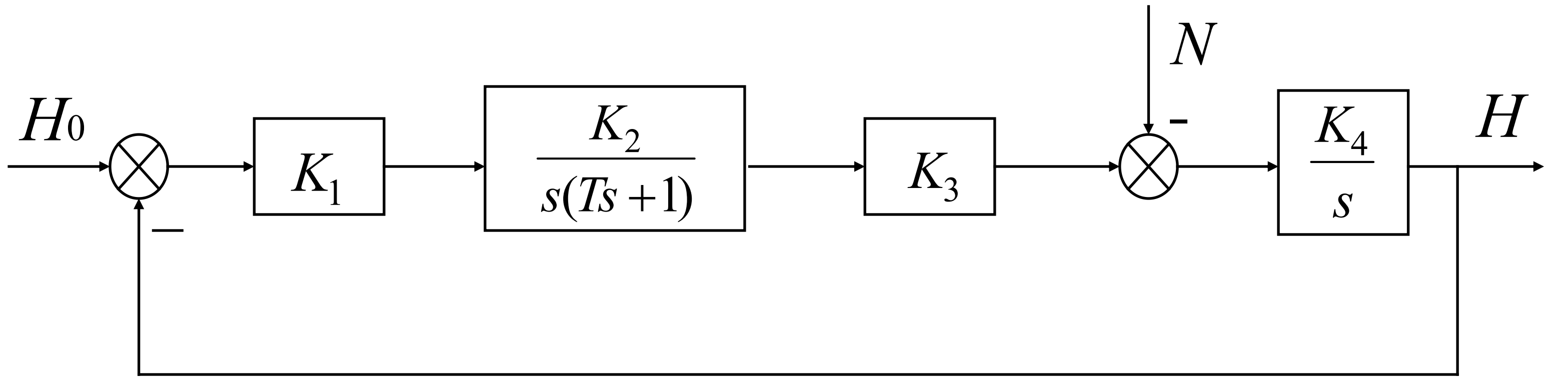
劳斯阵：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T & 0 \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & -KT & \\ s^0 & K & \end{array}$$

特征方程缺项，不满足系统稳定的必要条件，系统不稳定。这也可从劳斯阵列中看出。

由于无论怎样调节参数K和T都不能使系统稳定，所以是一个结构不稳定的系统。

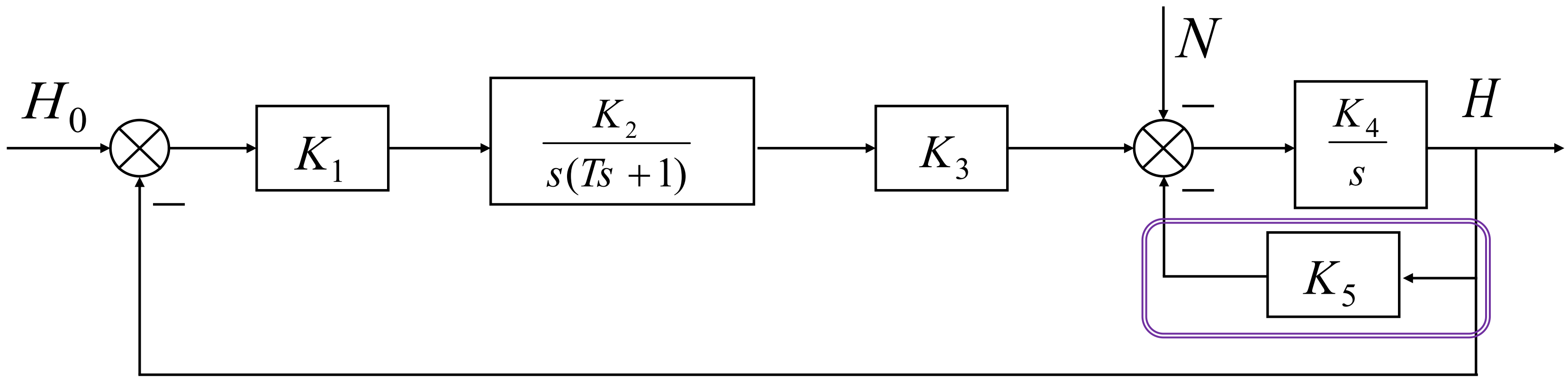
欲使系统稳定，必须改变原系统的结构。怎么改?

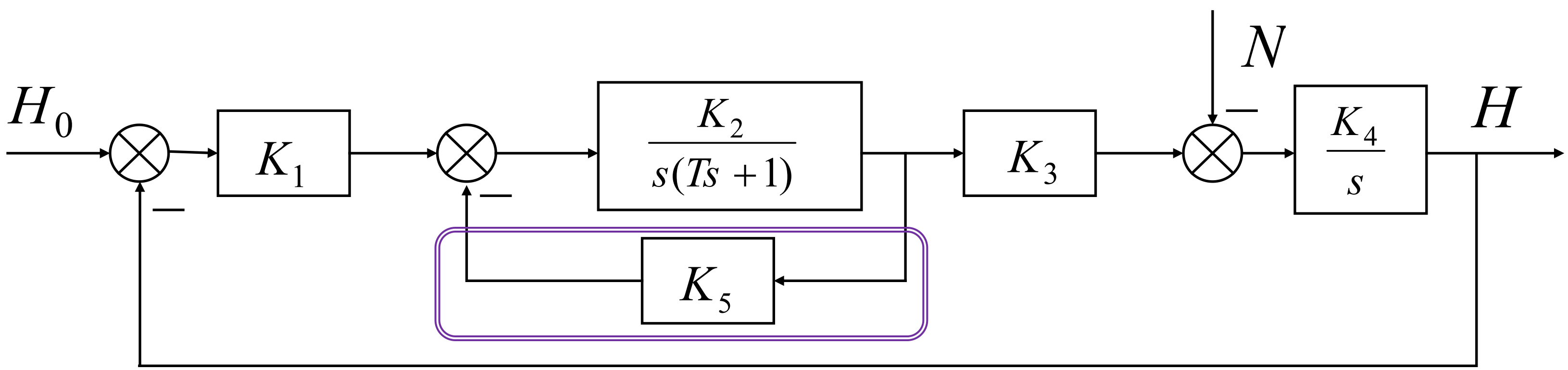


由图可看出，造成系统结构不稳定的原因是前向通路中有两个积分环节（积分环节过多），而传递函数的分子只有增益K（常数）。这样，造成系统闭环特征方程缺项，即s一次项系数为零。

因此，消除结构不稳定的措施可以有两种：一是改变积分性质；二是引入开环零点，补上特征方程中的缺项。

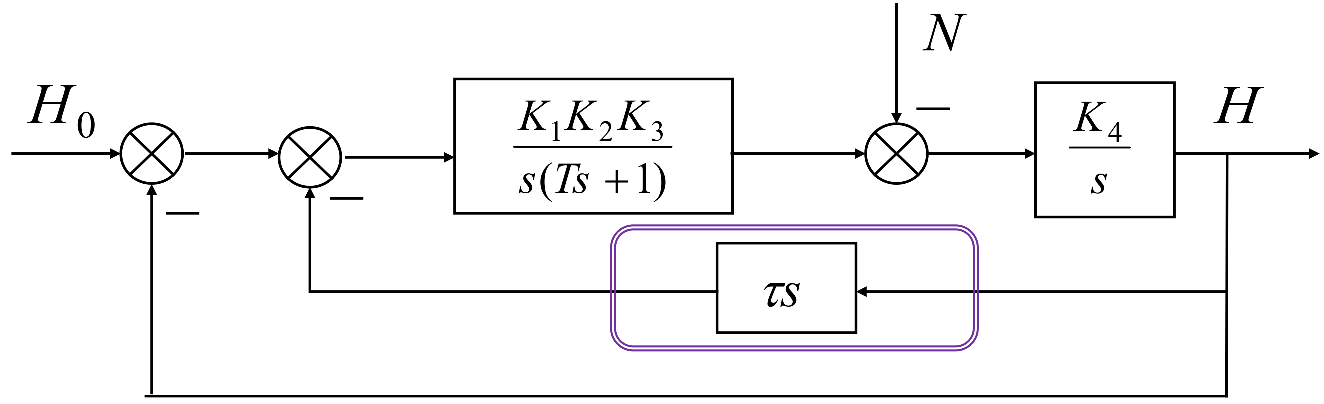
- 改变积分性质：用反馈包围积分环节，破坏其积分性质。



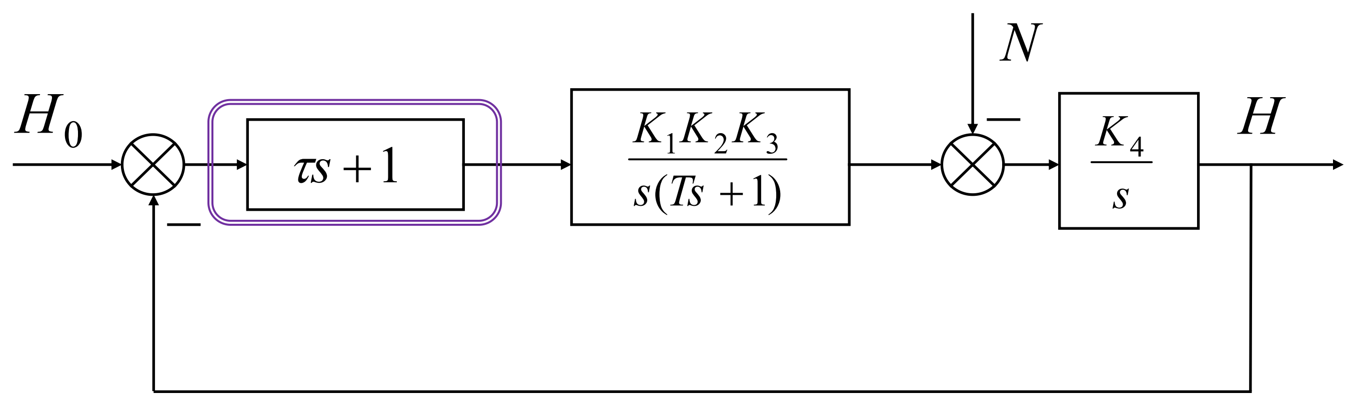


积分性质的破坏将改善系统的稳定性，但会使系统的稳态精度下降（针对有差系统，解释见稳态误差分析一节）。

- 速度反馈



- 引入开环零点：比例+微分



引入比例+微分后，闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)+K(\tau s+1)}$$

闭环特征方程为：$Ts^3+s^2+K\tau s+K=0$

特征方程不缺项。

劳斯阵：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & T & K\tau \\ s^2 & 1 & K \\ s^1 & K(\tau-T) & \\ s^0 & K & \end{array}$$

稳定的充要条件为：

① $T>0,\quad K>0,\quad \tau>0$

② $K(\tau-T)>0$ 即 $\tau>T$

引入比例+微分控制后，补上了特征方程中s一次项系数。故只要适当匹配参数，满足上述条件，系统就可稳定。

小结

- 线性系统稳定性定义和稳定的充要条件
- 劳斯代数稳定性判据（劳斯阵，各种情况下劳斯阵的排列和判稳方法）
- 胡尔维茨代数稳定性判据（参考）
- 劳斯稳定性判据的应用

  --判稳

  --系统参数变化对稳定性的影响

  --系统的相对稳定性

  --结构不稳定系统及其改进措施（参考）

作业：3.13，3.27

补充题

设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{4}{2s^3+10s^2+13s+1}$$

试用代数稳定判据确定系统是否稳定及是否具有σ=1的稳定裕度。