第五讲 正交性与子空间投影

贺丽君
信息与通信工程学院
Email: lijunhe@mail.xjtu.edu.cn
2023-03

内容提要

- 向量内积与正交性
- 子空间正交
- 投影与傅里叶级数
- 子空间投影与信道均衡

内容提要

- 向量内积与正交性
- 子空间正交
- 投影与傅里叶级数
- 子空间投影与信道均衡

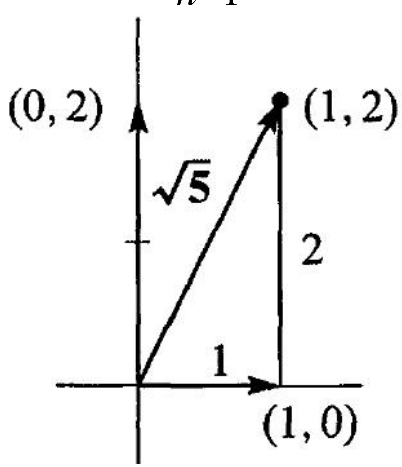
向量的内积与范数

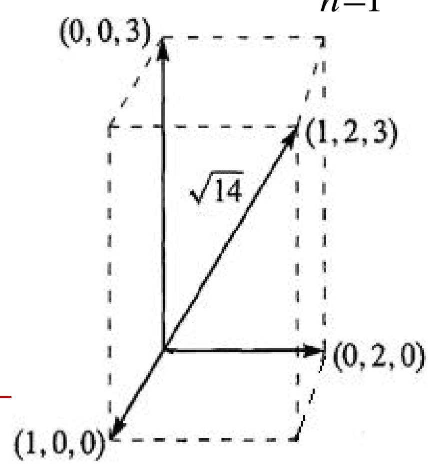
➢ 内积的定义

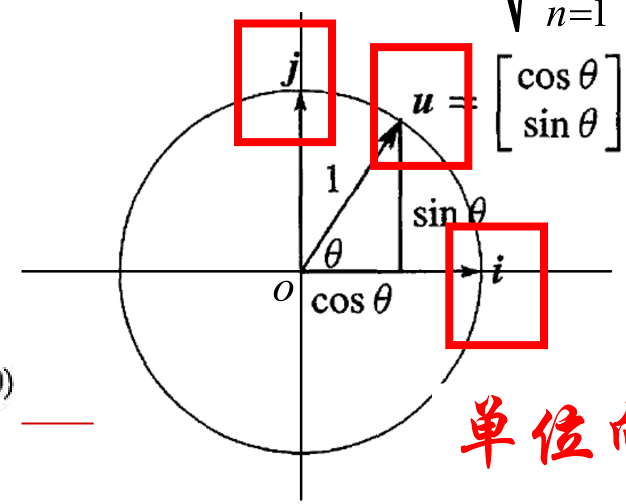
$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$$

➢ 范数的定义——描述向量的长度

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n \xRightarrow{\mathbf{x} = \mathbf{y}} \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{N} x_n^2 \xRightarrow{\sqrt{\ }} \|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} x_n^2}$$





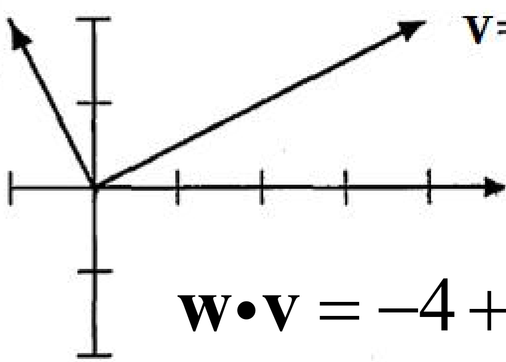


单位向量

向量间的位置关系

➢ 向量正交

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{v}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

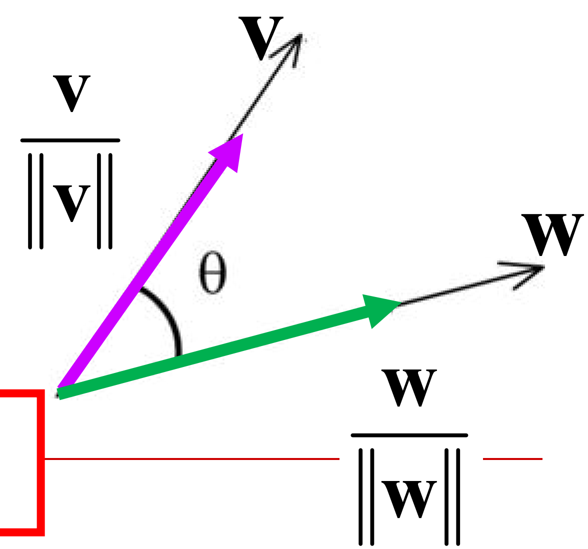


$$\mathbf{w}\bullet\mathbf{v}=-4+4=0$$

若向量w和向量v的内积为零，则这两个向量正交(即：垂直)。

➢ 向量间的夹角与内积

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|}=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\bullet\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$$



$$\boxed{\theta<90^{\circ}\Leftrightarrow\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}>0\quad \theta>90^{\circ}\Leftrightarrow\mathbf{v}\bullet\mathbf{w}<0}$$

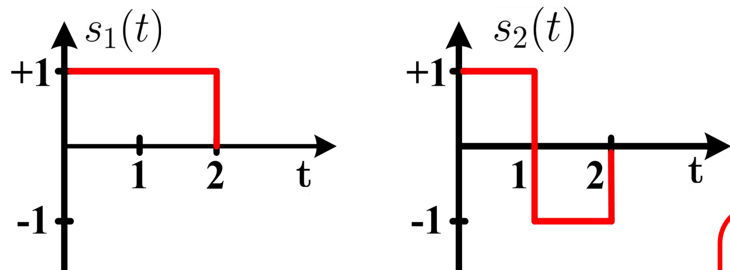
信号的内积与范数

描述两个信号波形之间的相似程度

➢ 信号内积

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt$$

若信号$x(t)$和$y(t)$的内积为零，则称这两个信号**正交**。



➢ 信号范数

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt}$$

信号范数的平方等于信号能量

复向量和复信号的情况

- 复向量的内积与范数

共轭转置

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^H \mathbf{y} = \sum_{n=1}^{N} x_n^* y_n$$

$$\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2}$$

复信号（向量）、实信号的范数的平方都是能量

- 复信号的内积与范数

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t) dt \qquad \|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

新闻的自动分类

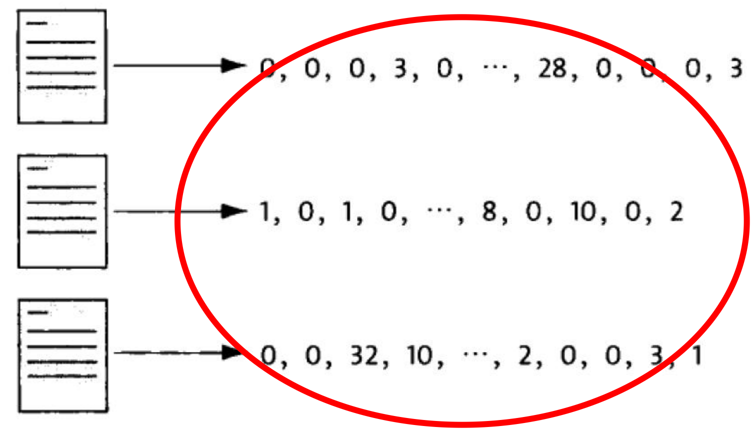
$$TF \times \log \frac{D}{D_w}$$

建立词汇表　对每篇新闻，计算各单词的TF-IDF值

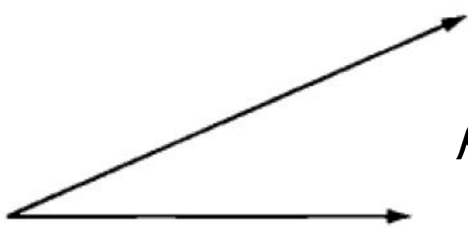
单词编号	汉字词
1	阿
2	啊
3	阿斗
4	阿姨
…	…
789	服装
…	…
64000	做作

单词编号	TF-IDF 值
1	0
2	0.0034
3	0
4	0.00052
…	…
789	0.034
…	…
64000	0.075

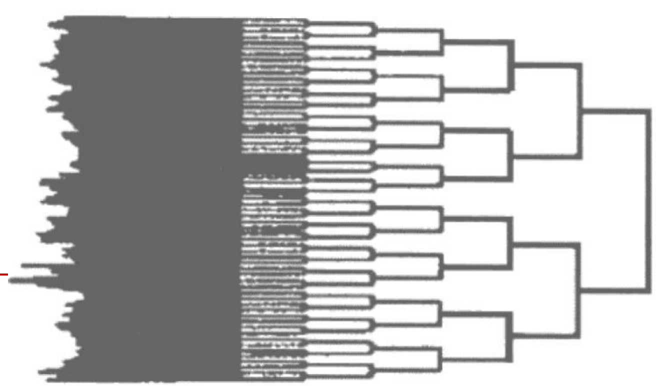
特征向量



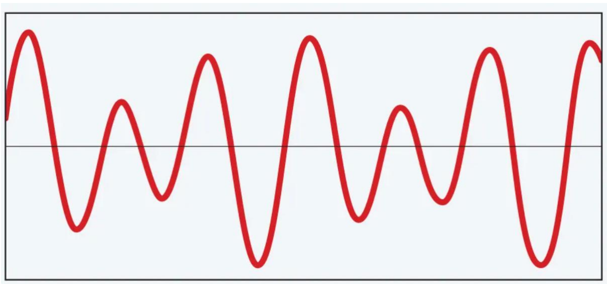
度量相似性——内积　　聚类



$$\rho_{s1,s2} = \frac{\mathbf{s}_1 \bullet \mathbf{s}_2}{\|\mathbf{s}_1\| \times \|\mathbf{s}_2\|}$$

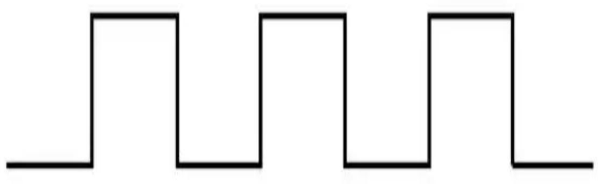


数字通信系统接收机设计



电磁波传输连续变化的波形

模拟通信系统：声音-电信号-连续变化波形



数字通信系统：

0010101011110000

不同的数字或者数字的组合用不同的波形来表示

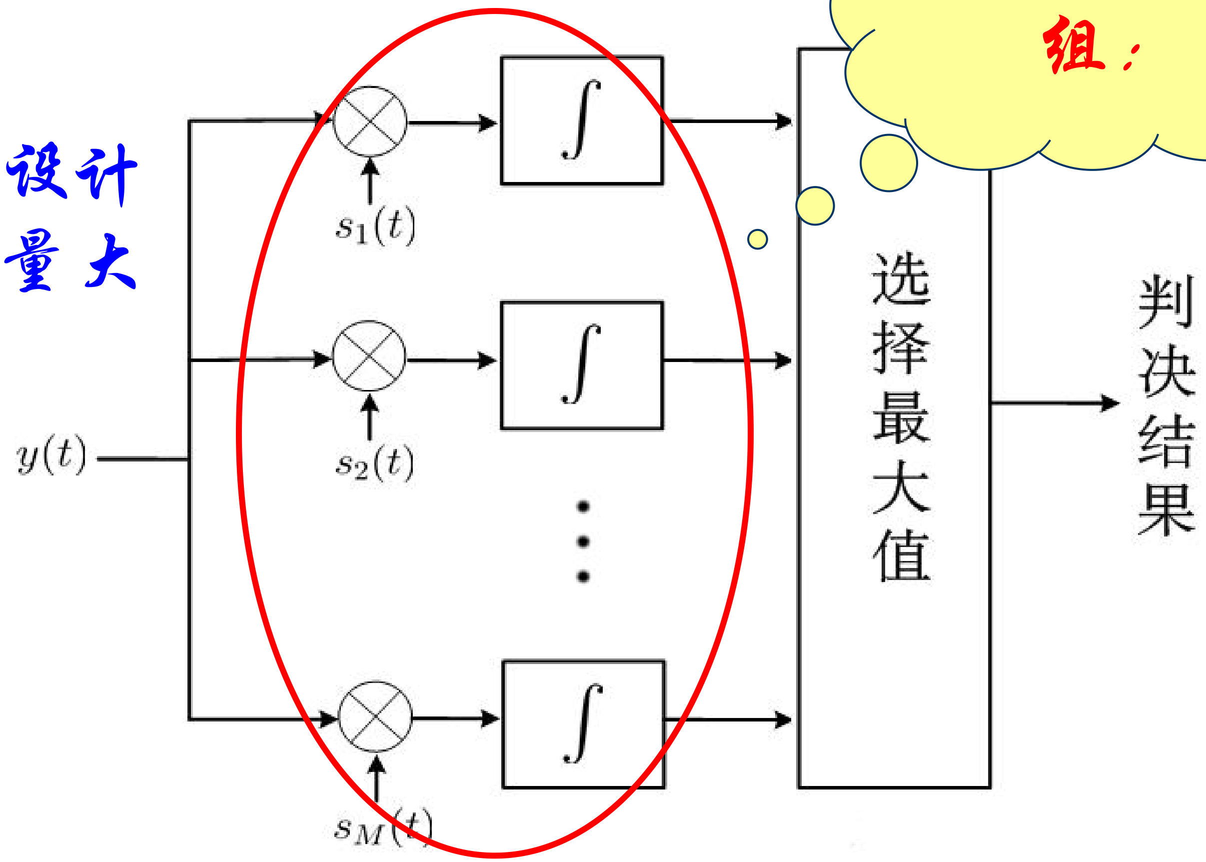
模拟通信系统：发送的信号波形是无限集合

数字通信系统：发送的信号波形一定是有限集合

数字通信系统接收机设计

相关接收机
组：内积

注：波形设计
时差异尽量大



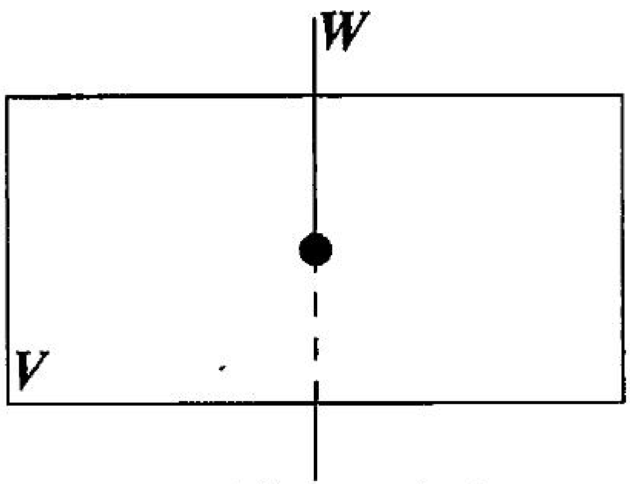
注：先验概率相等，波形能量相同

内容提要

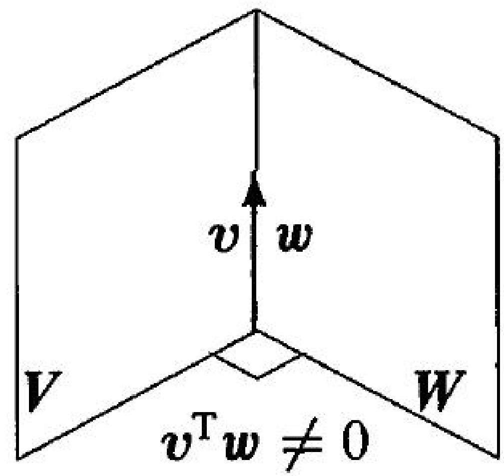
- 向量内积与正交性
- 子空间正交
- 投影与傅里叶级数
- 子空间投影与信道均衡

子空间正交的概念

假设V和W是同一向量空间的两个子空间，如果V中的任一向量v和W中的任一向量w都是正交的，则称**子空间V和W正交**



orthogonal line and plane



non-orthogonal planes

行空间和零空间的正交性

$$\mathbf{x} \in N(\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (\text{row } 1) \\ \vdots \\ (\text{row } m) \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\text{row } 1)^T \bullet \mathbf{x} = 0, \cdots, (\text{row } m)^T \bullet \mathbf{x} = 0$$

A的行空间和零空间是$\mathbf{R}^n$的正交子空间

列空间和左零空间的正交性

$$\mathbf{y} \in N\left(\mathbf{A}^T\right) \Longrightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} (\mathrm{col}\ 1)^T \\ \vdots \\ (\mathrm{col}\ n)^T \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad (\mathrm{col}\ 1) \bullet \mathbf{y} = 0, \cdots, (\mathrm{col}\ n) \bullet \mathbf{y} = 0$$

A的列空间和左零空间是$\mathbf{R}^m$的正交子空间

正交补 (Orthogonal Complements)

定义： 子空间V的正交补空间是指由所有垂直于子空间V的向量所构成的子空间，记作$V^{\perp}$

1. N(A)是C(A^T) 的正交补？ √

$$\forall\, v \perp C(A^T) \Rightarrow Av = 0 \Rightarrow v \in N(A)$$

2. C(A^T) 是N(A)的正交补？ √

$\forall\, v \perp N(A)$,假设$v \notin C(A^T)$

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ v \end{bmatrix}, \dim(C(A'^T)) = r+1 \qquad \dim(N(A')) = n - r$$

$$\forall x \in N(A) \Rightarrow A'x = \begin{bmatrix} A \\ v \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A'\text{和}A\text{零空间相同}$$

正交补 (Orthogonal Complements)

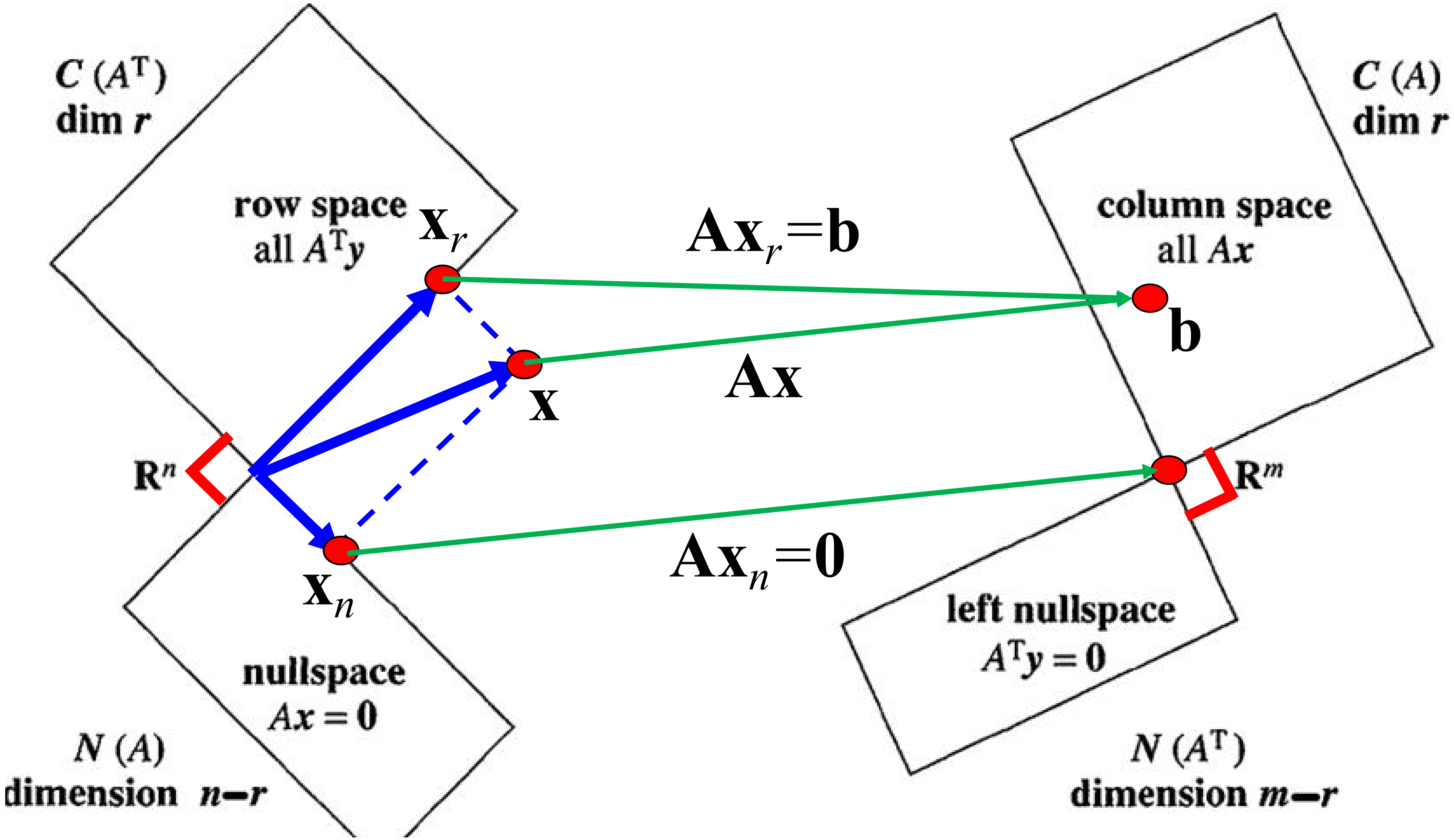
- 定义

子空间V的正交补空间是指由所有垂直于子空间V的向量所构成的子空间，记作$V^{\perp}$

$C(\mathbf{A}^T)$ 和$N(\mathbf{A})$是$\mathbf{R}^n$中的正交补，维数满足$r+(n-r)=n$

$C(\mathbf{A})$ 和$N(\mathbf{A}^T)$是$\mathbf{R}^m$中的正交补，维数满足$r+(m-r)=m$

四个基本子空间的关系



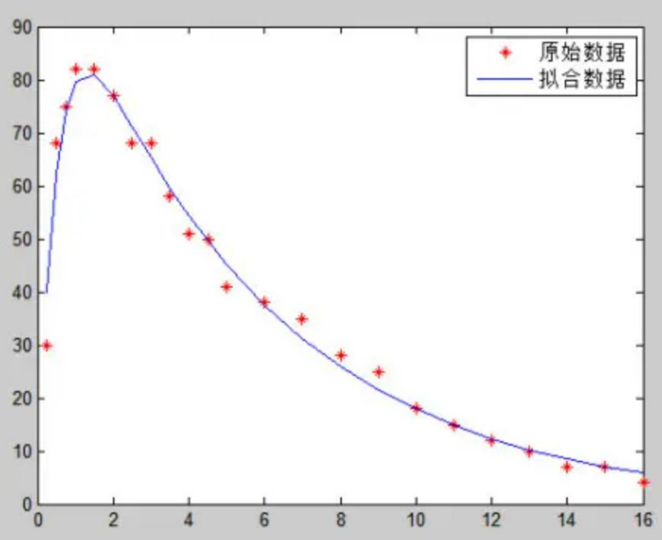
1.线性变换从R^n映射到列空间；2.不是映射到R^m空间；3.并非所有线性变化均可逆

内容提要

- 向量内积与正交性
- 子空间正交
- 投影与傅里叶级数
- 子空间投影与信道均衡

为什么要引入投影

- 在实际应用中，往往需要通过多次测量确定某些参数，方程个数远多于未知数个数



$$y = C + Dt + Et^2$$

$$y_1 = C + Dt_1 + Et_1{}^2$$

$$y_2 = C + Dt_2 + Et_2{}^2$$

$$\vdots$$

$$y_m = C + Dt_m + Et_m{}^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$有解 $\Rightarrow$ $\mathbf{b}$在A的列空间内。

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$无解 $\Rightarrow$ 找到A的列空间中与b最近似的向量，然后求解。

为什么要引入投影

- 在实际应用中，往往需要通过多次测量确定某些参数，方程个数远多于未知数个数

- 在线性方程组Ax=b没有解的情况下，如何找到最“合理”的近似解？

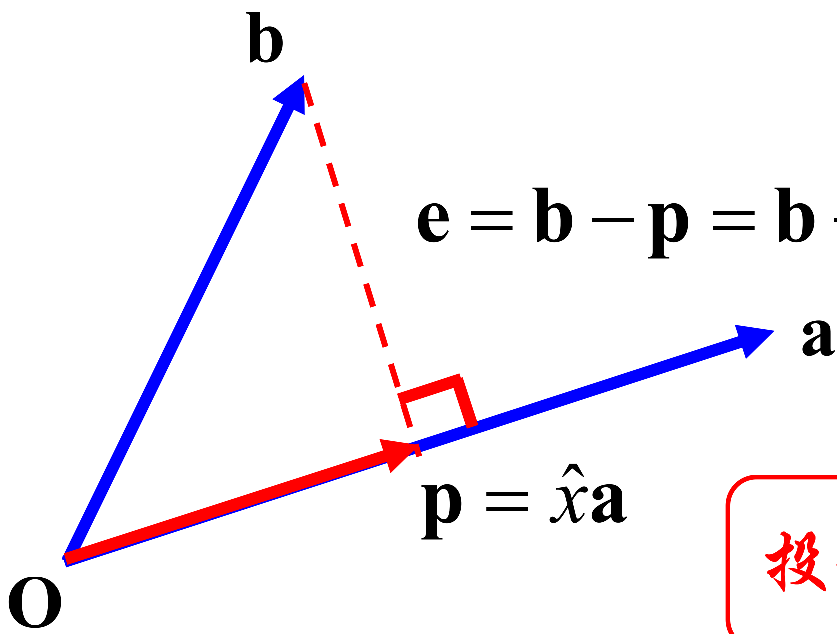
- 从空间的角度讲，就是要找到A的列空间中距离b最近的向量——几何投影问题

向直线投影

正交性原理

$$\mathbf{a}\bullet\left(\mathbf{b}-\hat{x}\mathbf{a}\right)=0$$

$$\hat{x}=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$



$$\mathbf{e}=\mathbf{b}-\mathbf{p}=\mathbf{b}-\hat{x}\mathbf{a}$$

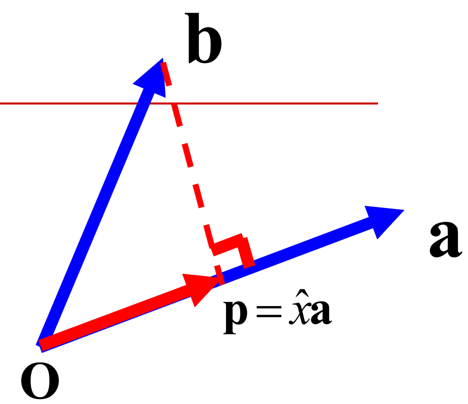
$$\mathbf{p}=\hat{x}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

投影矩阵P

问题：在a上找一点，距离b最近？

投影矩阵 (Projection Matrix)



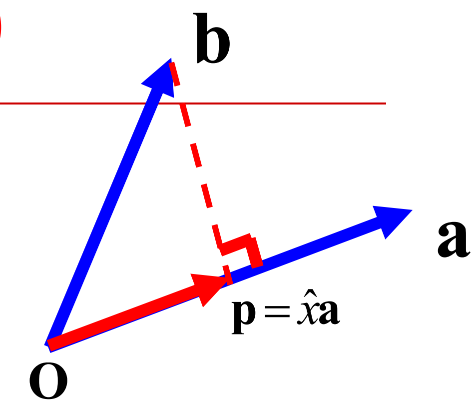
$$\mathrm{P}=\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$

- P的列空间是通过a的一条直线
- P由列向量乘以行向量得到，它的秩等于1，称作秩1矩阵(rank-1 matrix)

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots a_n\end{bmatrix}\\a_2\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots a_n\end{bmatrix}\\\cdots\\a_n\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots a_n\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} & a_2\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} & \cdots a_n\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

投影矩阵 (Projection Matrix)

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$



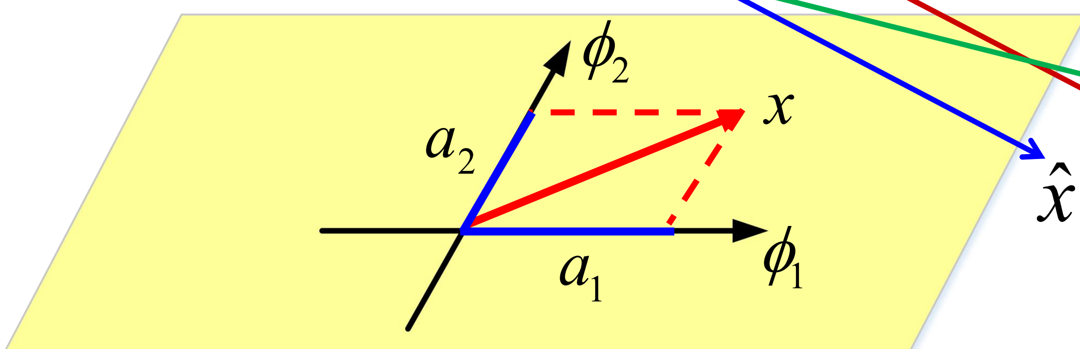
- P的列空间是通过a的一条直线
- P由列向量乘以行向量得到，它的秩等于1，称作秩1矩阵(rank-1 matrix)
- P是对称矩阵，即：$\mathbf{P}=\mathbf{P}^T$
- P是等幂矩阵，即：$\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$
- I-P也是投影矩阵，将b投影到与a垂直的平面

傅里叶级数

内积的几何意义：投影

$$\{\phi_k(t)\} = \{e^{jk\omega_0 t}\} \qquad k = 0, \pm 1, \cdots$$

$$\boxed{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{a_k} \boxed{e^{jk\omega_0 t}} \quad \Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



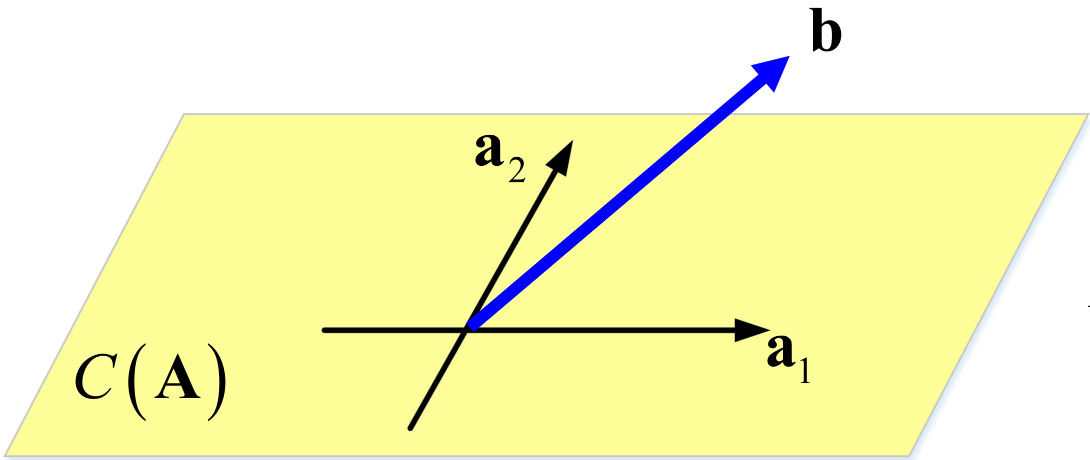
$$\hat{x} = \frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}}{\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{b}}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$$

$$\boxed{\int_T e^{jkw_0 t} e^{-jmw_0 t} dt = \begin{cases} 0, k \neq m \\ T, k = m \end{cases}}$$

内容提要

- 向量内积与正交性
- 子空间正交
- 投影与傅里叶级数
- 子空间投影与信道均衡

子空间投影



$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$

在A的列空间内找一点，距离b最近?

$\Updownarrow$

求A的列向量的线性组合 $\mathbf{p} = \hat{x}_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \hat{x}_n\mathbf{a}_n$，使p与b最近?

预备知识

定理：A^TA可逆当且仅当A的各列线性无关

证明：

设A为任意矩阵，如果x在A的零空间中，则有Ax=0，从而有：

$$A^TAx=0$$

即：x也在A^TA的零空间中。

另一方面，如果x在A^TA的零空间中，则有：

$$A^TAx=0$$

预备知识

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

左乘$\mathbf{x}^T$可得：

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x}=0$$

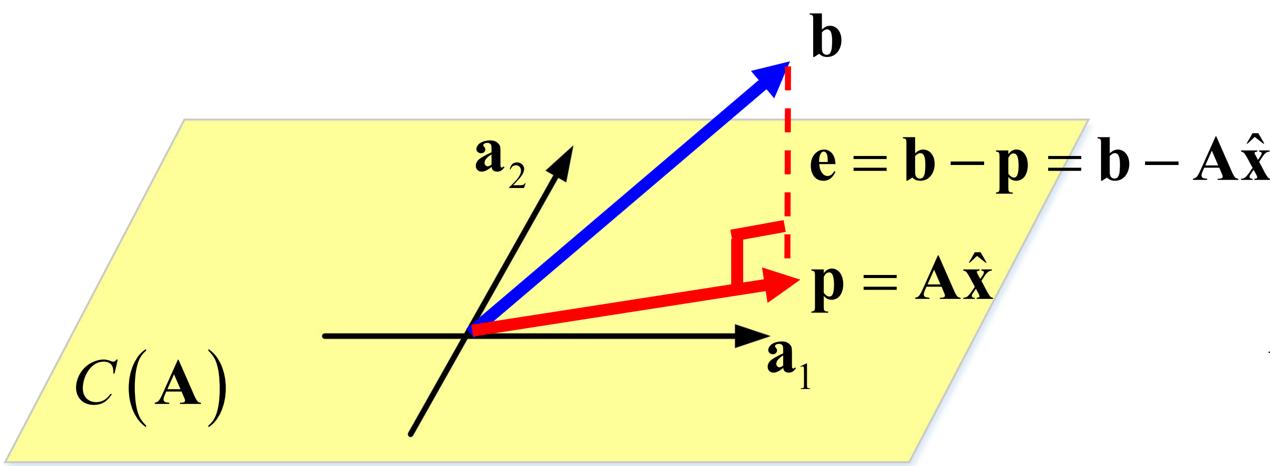
即：

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|^2=0 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

这说明，$\mathbf{x}$也在$\mathbf{A}$的零空间中。结合前面所得到的结果，我们有：$\mathbf{A}$和$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$具有相同的零空间。

因此，当$\mathbf{A}$的各列线性无关时，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$的各列也线性无关，$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$可逆。反之亦然。

子空间投影



假设各列线性无关

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} - & a_1^{\mathrm{T}} & - \\ & \vdots & \\ - & a_n^{\mathrm{T}} & - \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^T} \begin{bmatrix} \\ b - A\hat{x} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T}$$

$$\boxed{\mathbf{P}^2 = \mathbf{P},\ \mathbf{P}^T = \mathbf{P}}$$

子空间投影

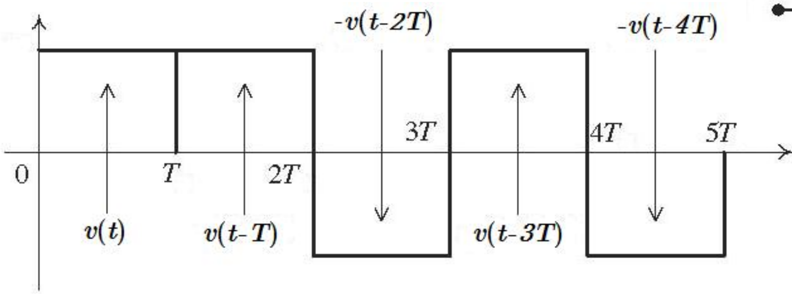
子空间投影的应用——迫零信道均衡

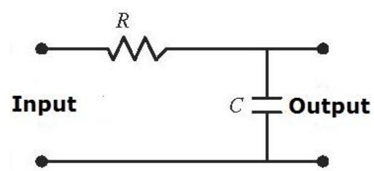
- 数字通信系统发射端的处理流程

$$\ldots 01101 \ldots \Rightarrow \{b_n\} \Rightarrow s(t)=\sum_{n=0}^{N} b_n v(t-nT)$$

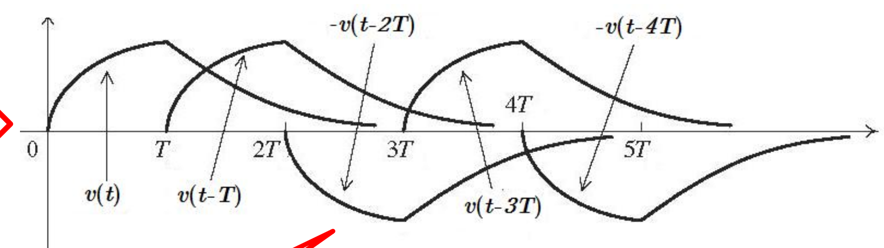
- 脉冲的设计

矩形脉冲





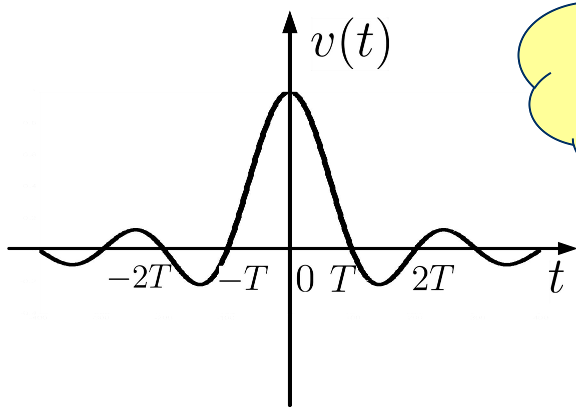
交叠的脉冲



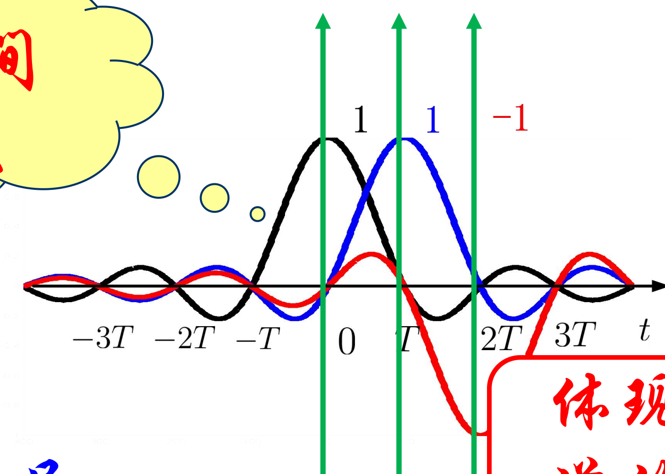
码间串扰

子空间投影的应用——迫零信道均衡

$$\ldots 01101 \ldots \Rightarrow \{b_n\} \Rightarrow s(t)=\sum_{n=0}^{N} b_n v(t-nT)$$



无码间串扰



体现了信道的作用

通过信道传输之后的接收信号：

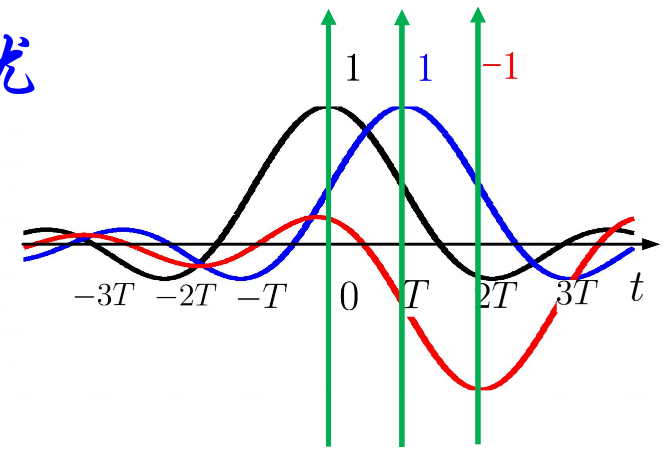
$$y(t)=h(t)*\sum_{n=0}^{N} b_n v(t-nT)+n(t)=\sum_{n=0}^{N} b_n p(t-nT)+n(t)$$

在实际的多径信道下，码间串扰不可避免！

子空间投影的应用——迫零信道均衡

➤ 迫零均衡——消除码间干扰

$$y(t)=\sum_{n=0}^{N} b_n p\left(t-nT\right)+n(t)$$



对接收信号采样：

$$y_1=1\times b_0+0.5\times b_1+0.2\times b_2+n_1$$

$$y_2=0.5\times b_0+1\times b_1+(-0.5)\times b_2+n_2$$

$$y_3=(-0.2)\times b_0+0.5\times b_1+(-1)\times b_2+n_3$$

$$\mathbf{y}=b_0\mathbf{u}_{-1}+b_1\mathbf{u}_0+b_2\mathbf{u}_1+\mathbf{n}$$

子空间投影的应用——迫零信道均衡

对于一般的情况：

码间串扰

$$\mathbf{y} = b_n \mathbf{u}_0 + \sum_{k \neq 0} b_{n+k} \mathbf{u}_k + \mathbf{n}$$

目标信号

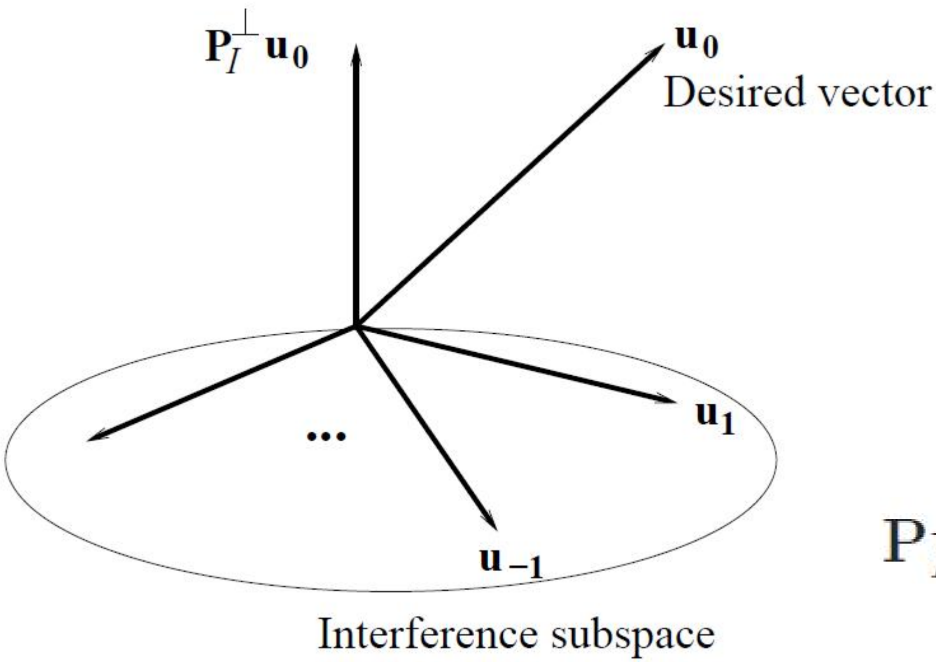
迫零均衡器 (Zero-forcing Equalization) —— 满足如下条件的线性系统：

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{c}^T \mathbf{u}_0 \neq 0 \\ &\mathbf{c}^T \mathbf{u}_k = 0, \quad k \neq 0 \end{aligned}}$$

子空间投影的应用——迫零信道均衡

$$\mathbf{c}^T\mathbf{u}_0 \neq 0$$
$$\mathbf{c}^T\mathbf{u}_k = 0,\quad k \neq 0$$

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{P}_I^{\perp}\mathbf{u}_0$$



干扰子空间投影

$$\mathbf{P}_I\mathbf{u}_0 = \mathbf{U}_I\mathbf{a}_I$$

正交子空间分量

$$\mathbf{P}_I^{\perp}\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 - \mathbf{P}_I\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 - \mathbf{U}_I\mathbf{a}_I$$

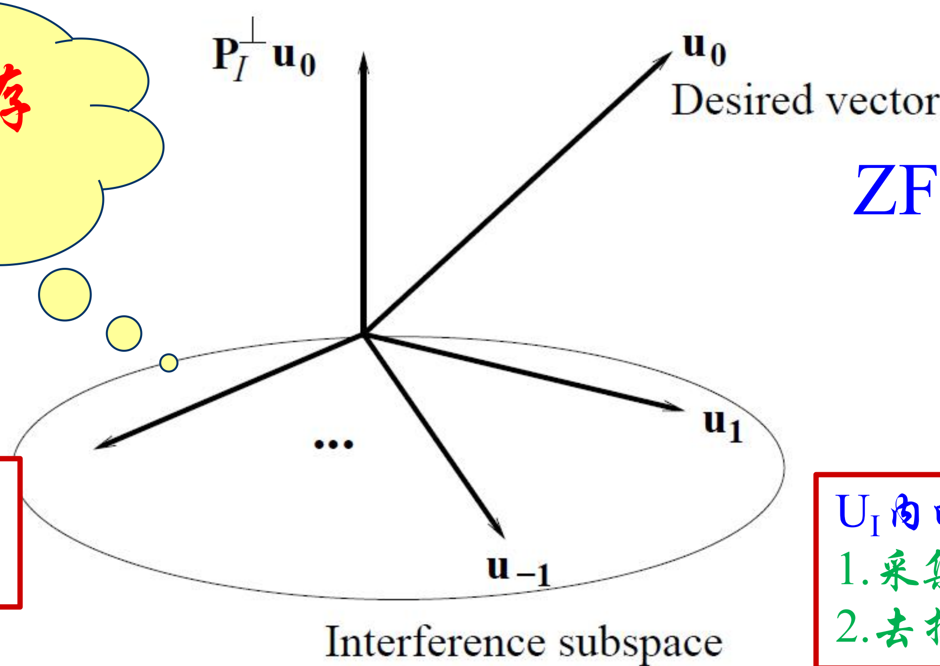
$$\mathbf{U}_I^T\mathbf{P}_I^{\perp}\mathbf{u}_0 = 0$$ 正交性

$$\mathbf{a}_I = \left(\mathbf{U}_I^T\mathbf{U}_I\right)^{-1}\mathbf{U}_I^T\mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{P}_I^{\perp}\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 - \mathbf{U}_I\left(\mathbf{U}_I^T\mathbf{U}_I\right)^{-1}\mathbf{U}_I^T\mathbf{u}_0$$

子空间投影的应用——迫零信道均衡

ZF均衡器存在的条件？



ZF均衡的缺点是什么？

u_0不在干扰子空间内
判断$U_I x=u_0$是否有解

U_I内向量线性无关：
1.采集样本增加
2.去掉线性相关的向量

$$\mathbf{P}_I^{\perp}\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 - \mathbf{U}_I\boxed{\left(\mathbf{U}_I^{\mathsf{T}}\mathbf{U}_I\right)}^{-1}\mathbf{U}_I^{\mathsf{T}}\mathbf{u}_0$$

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{P}_I^{\perp}\mathbf{u}_0$$

谢谢大家！