数字信号处理 I

Digital Signal Processing

第二章 —— 离散傅立叶变换

序列可以分为有限长和无限长两种，而我们常见到的无限长序列又往往是衰减性的，当无限长衰减序列随着n的增大衰减到一定小的值后，我们在实用中又可以近似将其后的值“看作”为0，即

$$\hat{x}(n)=\begin{cases}x(n) & n<N\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad 当\ |x(m)|<\varepsilon\ 时,(m\ge N)$$

这样无限长序列在一定条件下，又可以用一个有限长序列近似，加之我们在下一章将会看到：对于有限长序列有快速算法（FFT），所以有限长序列在数字信号处理中占有很重要的地位。

本章主要内容

- 2.1 离散傅立叶级数（DFS）
- 2.2 离散傅立叶变换（DFT）
- 2.3 频域采样理论

2.1 离散傅立叶级数 DFS

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\Omega_0 t}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

我们用 $\tilde{x}(n)$ 来表达一个周期为N的周期序列，即

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+KN)\qquad K为任意整数$$

正如连续时间周期信号可以用傅氏级数表达一样，离散时间周期序列也可以用离散的傅氏级数来表达，也即用周期为N的复正弦序列来表达。

周期为N的复正弦序列其基频分量为：

$$e_1(n)=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

其k次谐波序列为 $e_k(n)=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$

$$\boxed{\begin{aligned}x[n]&=\sum_{k=\langle N\rangle}A_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\\ A_k&=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\end{aligned}}$$

而离散傅氏级数与连续傅氏级数的差别在于：离散级数所有谐波分量中只有N个是独立的，因为

$$e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k+N)n}=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}\qquad 所以\ e_{k+N}(n)=e_k(n)$$

为了不出现二义性，在离散傅里叶级数展开中，我们只能取k=0到（N-1）为止的N个独立的谐波分量。离散傅里叶级数：

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} \qquad (2-1)$$

是离散傅里叶级数反变换式，它表示周期为N的周期序列可以用复正弦以及其各次谐波分量的加权求和来表达；而其中各次谐波分量加权系数可以通过周期序列与各次谐波复正弦函数的内积求得，即

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} \qquad (2-3)$$

$$\tilde{X}(k)=\left\langle \tilde{x}(n), e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}\right\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

这里 $\{e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}\}$ 为离散傅里叶级数展开的基本函数集。正变换中的负号是内积运算的要求。两个信号或两个函数的内积运算实际上其概念是求两者的互相关，互相关实际上是两个信号或两个函数“像”与“不像”的一种度量。对两个实信号序列求互相关（内积），就是将两序列逐点相乘并求和。而如果是对两个复信号序列求互相关（内积），则是将第一个序列与第二个序列的复共扼逐点相乘并求和。

例如：我们来考察 $x(n)=e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ 和 $y(n)=e^{j\frac{2\pi}{N}nl}$ 的互相关。

$$\langle x(n), y(n)\rangle=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*(n)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}nk}e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)n}$$

$$=\left[1+e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)}+\cdots+e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)(N-1)}\right]=\left[\frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-l)}}\right]=\begin{cases}N, & k-l=rN\\ 0, & k-l\neq rN\end{cases}$$

可见，只有当k-l=rN时，也就是说，只有当两个复正弦序列同频时，才相关。不同频率的复正弦序列是不相关的。

一般我们用DFS[.]表示离散傅里叶级数变换，而用IDFS[.]表示离散傅里叶级数反变换，习惯上也常采用符号W_N

$$W_N=e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$$

所以，离散傅立叶级数变换可以表示为

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn} \qquad (2-7)$$

$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn} \qquad (2-8)$$

DFS的几个主要特性

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

- **线性**

$$DFS[a\tilde{x}(n)+b\tilde{y}(n)]=a\tilde{X}(k)+b\tilde{Y}(k) \qquad (2-9)$$

其中a、b为任意常数。

- **序列移位**

$$DFS[\tilde{x}(n+m)]=W_N^{-mk}\tilde{X}(k) \qquad (2-10)$$

$$IDFS[\tilde{X}(k+l)]=W_N^{nl}\tilde{x}(n) \qquad (2-11)$$

- **周期卷积**

若 $\tilde{F}(k)=\tilde{X}(k)\tilde{Y}(k)$

则 $\tilde{f}(n)=IDFS[\tilde{F}(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\tilde{y}(n-m)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{y}(m)\tilde{x}(n-m) \qquad (2-12)$

同理，对于周期序列的乘积，也有频域的周期卷积公式

若 $\tilde{f}(n)=\tilde{x}(n)\tilde{y}(n)$

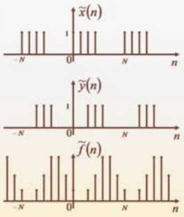
则 $\tilde{F}(k)=DFS[\tilde{f}(n)]=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)\tilde{Y}(k-l)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{Y}(l)\tilde{X}(k-l) \qquad (2-13)$

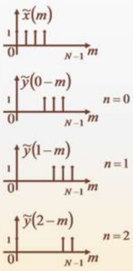
证：$\tilde{F}(k)=DFS\left[\tilde{f}(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\tilde{y}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)W_N^{-nl}\tilde{y}(n)W_N^{nk}$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{y}(n)W_N^{n(k-l)}=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)\tilde{Y}(k-l)$$

$$\tilde{F}(k)=DFS\left[\tilde{f}(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\tilde{y}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{Y}(l)W_N^{-nl}W_N^{nk}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{Y}(l)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{n(k-l)}=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{Y}(l)\tilde{X}(k-l)$$





这里的卷积过程只限于一个周期内，即从0到N-1，所以称为周期卷积。

$$\tilde{f}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}(m)\tilde{y}(n-m)$$

2.2 离散傅立叶变换 DFT

对于一个非周期有限长序列 $x(n)=\begin{cases}x(n), & 0\le n\le N-1\\ 0, & 其余\ n\end{cases}$

可以通过周期延拓得到一个周期序列

$$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)\qquad(2-14)$$

两者之间的关系为：

$\tilde{x}(n)$是$x(n)$的周期延拓 $\Rightarrow$ $\tilde{x}(n)=x((n))_N$

$x(n)$是$\tilde{x}(n)$的主值序列 $\Rightarrow$ $x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$

其中：$((n))_N$表示n对N求余数；而$R_N(n)$为矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & 其余\ n\end{cases}$$

从上一节离散傅里叶级数的讨论中，不难证明：周期序列的离散傅里叶级数也是一个周期序列，即

$$\tilde{X}(k+mN)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(k+mN)n}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}=\tilde{X}(k)$$

因而也给它定义一个主值区间0≤k≤N-1，以及主值序列X(k) $\begin{cases}X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)\\ \tilde{X}(k)=X((k))_N\end{cases}$

离散傅里叶级数的变换公式中的求和都只限于主值区间，因而完全适用于主值序列x(n)与X(k)，由此我们得到了有限长序列的DFT定义：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\qquad 0\le k\le N-1\qquad(2-21)$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn},\quad 0\le n\le N-1\qquad(2-22)$$

$x(n)$与X(k)是一个有限长序列离散傅里叶变换对，已知x(n)就能唯一的确定X(k)。同样已知X(k)也就唯一的确定了x(n)。实际上x(n)与X(k)都是长度为N的序列（都可以是复序列），都有N个独立（复）值，因而具有的信息当然是等量的。

DFT的一些主要特性

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$
$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

- 线性

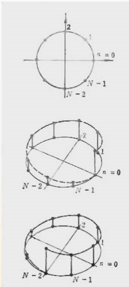
$$DFT[ax(n)+by(n)]=aX(k)+bY(k) \qquad (2-23)$$

其中a、b为任意常数。

- 圆周移位

$$f(n)=x((n+m))_N R_N(n) \qquad (2-24)$$

实际上这里的移位是先周期延拓，再移位后取主值。所以它完全有着周期序列的特性。又因为这种移位好象是将序列排序在一个N等分的圆周上，然后再顺时针作m位的旋转一样，而得名：圆周移位。



$$DFT[x((n+m))_N R_N(n)]=W_N^{-mk}X(k) \qquad (2-25)$$
$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)]=W_N^{nl}x(n) \qquad (2-26)$$

圆周卷积

若 $F(k)=X(k)Y(k)$

则 $f(n)=IDFT[F(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)y((n-m))_N R_N(n)$

$=\sum_{m=0}^{N-1}y(m)x((n-m))_N R_N(n)$

$=x(n)\otimes y(n)$

所谓“频域的乘积对应于时域的圆周卷积”。

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$
$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

同理，也有“时域的乘积对应于频域的周期卷积”，即

若 $f(n)=x(n)y(n)$

则 $F(k)=DFT[f(n)]=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}X(l)Y((k-l))_N R_N(k)$

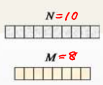
$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}Y(l)X((k-l))_N R_N(k)=X(k)\otimes Y(k)$

所谓圆周卷积就是将原序列先进行周期延拓，得到周期序列，从而使我们可以运用周期序列的性质进行操作，然后再考虑主值，就是我们要求的序列。但这里必须注意圆周卷积与一般线性卷积之间的关系。

有限长序列的线性卷积和圆周卷积

如果：x(n)是点长度为N的有限长序列

y(n)是点长度为M的有限长序列



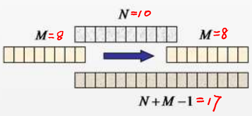
它们的线性卷积 f(n)=x(n)*y(n) 也是有限长序列

$$f(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n-m)$$

$x(m)$: $0\le m\le N-1$

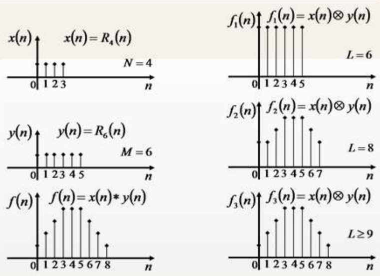
$y(n-m)$: $0\le n-m\le M-1$

两式相加：$0\le n\le N+M-2$



因此，我们清楚的看到f(n)是一个点长度为N+M-1的有限长序列。

下图中x(n)为N=4的矩形序列，y(n)是一个M=6的矩形序列，两者的线性卷积f(n)具有N+M-1=9个非零序列值，如下图所示。而如果对两者进行不同长度的圆周卷积，其结果如下图所示。



因此可以看到，如果周期卷积的周期L<N+M-1，那么f(n)的周期延拓就必然有一部分非零序列值要交叠起来，出现混淆现象。只有在L≥N+M-1时，才没有交叠现象。

使圆周卷积等于线性卷积而不产生混淆的必要条件

$$L \geq N+M-1$$

其中L为圆周卷积的周期。满足这个条件后，则有

$$x(n)\otimes y(n)=x(n)*y(n)$$

2.2 离散傅立叶变换 9/13/2022 13

■ 共轭对称性

$$DFT[x^*(n)] = X^*(N-k)$$

证：$DFT[x^*(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{nk}=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{-nk}\right]^* \quad \Leftarrow \quad W_N^{nN}=e^{-j\frac{2\pi}{N}nN}=1$

$$=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(N-k)n}\right]^*=X^*((N-k))_N=X^*(N-k) \quad \#$$

序列实部与虚部的DFT变换

$$x(n)=x_r(n)+jx_i(n) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_r(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)] \\ jx_i(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(n)] \end{cases}$$

以$X_e(k)$及$X_o(k)$分别表示实部及虚部序列的DFT，则

$$X_e(k)=DFT[x_r(n)]=\frac{1}{2}DFT[x(n)+x^*(n)]=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$X_o(k)=DFT[jx_i(n)]=\frac{1}{2}DFT[x(n)-x^*(n)]=\frac{1}{2}[X(k)-X^*(N-k)]$$

则有 $\boxed{X_e(k)+X_o(k)=X(k) \qquad (2-40)}$

2.2 离散傅立叶变换 9/13/2022 14

$X_e(k)$及$X_o(k)$的对称特性

$$\because \quad X_e(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$\therefore \quad X_e^*(N-k)=\frac{1}{2}[X(N-k)+X^*(N-N+k)]^*=\frac{1}{2}[X^*(N-k)+X(k)]$$

即共轭偶部 $\longrightarrow$ $\boxed{X_e(k)=X_e^*(N-k) \qquad (2-41)}$

共轭对称：模相等而幅角相反。

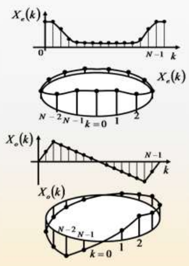
$$\begin{cases} |X_e(k)|=|X_e(N-k)| \\ \arg[X_e(k)]=-\arg[X_e(N-k)] \end{cases}$$

同理，对于共轭奇部，有

$$\boxed{X_o(k)=-X_o^*(N-k) \qquad (2-43)}$$

共轭反对称：实部相反而虚部相等

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[X_o(k)]=-\mathrm{Re}[X_o(N-k)] \\ \mathrm{Im}[X_o(k)]=\mathrm{Im}[X_o(N-k)] \end{cases}$$



2.2 离散傅立叶变换 9/13/2022 15

这些性质在今后的学习中会常遇到，如：有两个实序列，$x_1(n)$和$x_2(n)$，我们可以构成一个复序列：

$$x(n)=x_1(n)+jx_2(n) \xrightarrow{\text{用一次}FFT} X(k)=X_1(k)+jX_2(k)$$

$$x_1(n) \quad \Rightarrow \quad X_1(k)=X_e(k)=\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(N-k)\right]$$

$$x_2(n) \quad \Rightarrow \quad X_2(k)=-jX_o(k)=-j\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(N-k)\right]$$

这样做一次DFT就可以完成两个实序列的变换。

X(k)的实部、虚部与x(n)的圆周共轭偶部与圆周共轭奇部的关系：

$$\begin{cases} x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(N-n)\right] \\ x_o(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(N-n)\right] \end{cases} \qquad \begin{cases} DFT\left[x_e(n)\right]=\mathrm{Re}\left[X(k)\right] \\ DFT\left[x_o(n)\right]=j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right] \end{cases}$$

表2-1 DFT特性表 （序列点长皆为N）

	序列	DFT
1、	$ax(n)+by(n)$	$aX(k)+bY(k)$
2、	$x((n+m))_N R_N(n)$	$W_N^{-mk}X(k)$
3、	$W_N^{nl}x(n)$	$X((k+l))_N R_N(k)$
4、	$x(n)\otimes y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)y((n-m))_N R_N(n)$	$X(k)Y(k)$
5、	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}X(l)Y((k-l))_N R_N(k)$
6、	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
7、	$\mathrm{Re}\left[x(n)\right]$	$X_e(k)=\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(N-k)\right]$
8、	$j\,\mathrm{Im}\left[x(n)\right]$	$X_o(k)=\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(N-k)\right]$
9、	$x_e(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)+x^*(N-n)\right]$	$\mathrm{Re}\left[X(k)\right]$
10、	$x_o(n)=\frac{1}{2}\left[x(n)-x^*(N-n)\right]$	$j\,\mathrm{Im}\left[X(k)\right]$
11、	$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^*(k)$	
12、	$\sum_{n=0}^{N-1}\lvert x(n)\rvert^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\lvert X(k)\rvert^2$	

DFT与z变换

有限长序列可以进行z变换：

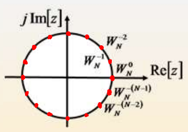
$$X(z)=Z\left[x(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n} \qquad \text{令}\quad z=W_N^{-k}\ \text{则}$$

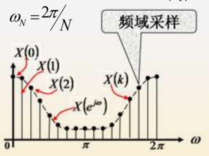
$$X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=DFT\left[x(n)\right]$$

$$\therefore \qquad X(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}} \qquad (2-47)$$

$z=W_N^{-k}=e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$ 表明 W_N^{-k} 是 z 平面单位圆上幅角为 $\omega=\frac{2\pi}{N}k$ 的点，也即将 z 平面单位圆 N 等分后的第 k 点，所以 X(k) 也就是 z 变换单位圆上等距离采样值。也可以说 X(k) 是序列傅氏变换 $X(e^{j\omega})$ 的采样，其采样间隔为 $\omega_N=2\pi/N$

$$X(k)=X\left(e^{jk\omega_N}\right) \qquad \omega_N=2\pi/N$$



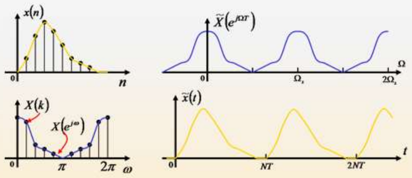


时域采样与频域采样：

频域带限	时域采样，不失信息	时域离散，频域周期
时域时限	频域采样，不失信息	频域离散，时域周期

这也很好地反映了时域和频域的对称性，采样间隔与重复周期的关系也很好地反映了这种对称性：

时域采样间隔T	频谱周期 $f_s=1/T$，$\Omega_s=2\pi/T$
频域采样间隔 Ω_s/N或者f_s/N	时域周期 $N/f_s=NT$



时域抽样定理的三个关键点：

- ✓ 对于带限信号可以进行时域采样；
- ✓ 信号的时域采样导致其频谱的周期延拓；
- ✓ 只要采样后的频谱不发生混叠，便可无失真恢复其时域信号。

相应的对于频域采样定理有：

- ✓ 对于时限信号可以进行频域采样；
- ✓ 信号的频域采样导致其时域波形的周期延拓；
- ✓ 只要采样后的时域波形不发生混叠，便可无失真恢复其频谱。

2.3 频域采样理论

在上一节中，我们看到采用DFT后实现了频域的采样。这样很自然就会使我们想到，是否对于任意一个频率特性（例如滤波器中最常遇到的理想低通特性）都能用频率采样的办法去逼近呢？这确实是一个很吸引人的问题，因为这样可以使逼近问题大大简化。但是要想利用这种技术，首先应该弄清它的限制。

考虑一个任意的绝对可积的序列x(n)，它的z变换为 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

在单位圆上进行等距采样

$$X(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{nk}$$

现在要问，这样采样以后，信息有没有损失？即频率采样后所获得的有限长序列$x_N(n)$能不能代表原序列x(n)。

$$x_N(n)=IDFT\left[X(k)\right]$$

我们首先从周期序列 $\tilde{x}(n)$ 开始

$$\tilde{x}(n)=IDFS\left[\tilde{X}(k)\right]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)W_N^{mk}\right]W_N^{-nk}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}\right]$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}=\frac{1}{N}\left[1+W_N^{(m-n)}+W_N^{2(m-n)}+\cdots+W_N^{(N-1)(m-n)}\right]$$

$$=\frac{1}{N}\left[\frac{1-W_N^{N(m-n)}}{1-W_N^{(m-n)}}\right]=\begin{cases}1 & m-n=rN\\ 0 & m-n\neq rN\end{cases}\quad r\text{为任意整数}$$

$$\boxed{\therefore\quad \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}=\begin{cases}1 & m-n=rN\\ 0 & m-n\neq rN\end{cases}\quad r\text{为任意整数} \\ =\delta(m-n-rN)\qquad r=0,\pm1,\pm2,\cdots}$$

$$\tilde{x}(n)=IDFS\left[\tilde{X}(k)\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(m-n-rN)$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$$

也即 $\tilde{x}_N(n)$ 是原序列x(n)的周期延拓序列。如果序列x(n)是有限长的，其长度为M。那么当我们在频域的采样间隔不够密，即N<M时， x(n) 的周期重复就会出现某些序列值交叠在一起，产生混淆现象。这样从 $\tilde{x}_N(n)$ 中就不可能不失真的恢复出原序列来。因此对于有限长序列x(n)

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & 0\le n\le M-1\\ 0, & \text{其余 } n\end{cases}$$

频率采样不失真的条件是N≥M，即

$$x_N(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)R_N(n)=x(n)\qquad N\ge M$$

X(z)的内插表达式

讨论如何用N个采样值X(k)完全地表达X(z)函数及其频响X(e^{jω}).

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\qquad x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$$

Z变换 $X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]z^{-n}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk}z^{-n}\right]$

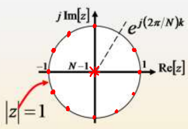
$$X(z)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$\boxed{X(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}$$

这就是X(z)用单位圆上采样点X(k)来表示的内插公式，公式中的内插函数是$\Phi_k(z)$

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)\qquad \text{其中}\quad \Phi_k(z)=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

这个内插函数在单位圆的N等分点上有N-1个零点，只有其本身采样点 $W_N^{-k}=e^{j(2\pi/N)k}$ 上的零点与分母上的极点抵消，同时在原点处有N-1阶极点，如图所示。



对于单位圆上的频响：$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1}{N}\cdot\frac{1-e^{-jN\omega}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\omega}}$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{e^{-j\frac{N\omega}{2}}\left[e^{j\frac{N\omega}{2}}-e^{-j\frac{N\omega}{2}}\right]}{e^{-j\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)}\left[e^{j\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)}-e^{-j\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)}\right]}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{\sin\left(N\omega/2\right)}{\sin\left((\omega-2\pi k/N)/2\right)}e^{-j\frac{1}{2}\left(N\omega-\omega+\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{\sin\left(\frac{N(\omega-2\pi k/N)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\omega-2\pi k/N)}{2}\right)}e^{-j\frac{1}{2}\left((N-1)\omega-\frac{2\pi N}{N}k+\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

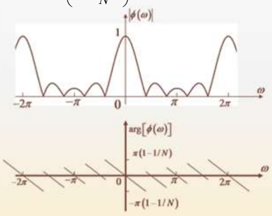
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{\sin\left(\frac{N(\omega-2\pi k/N)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\omega-2\pi k/N)}{2}\right)}e^{-j\frac{N-1}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{\sin\left(\frac{N(\omega-2\pi k/N)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\omega-2\pi k/N)}{2}\right)}e^{-j\frac{N-1}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

令 $\phi(\omega)=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(N\omega/2\right)}{\sin\left(\omega/2\right)}\cdot e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$

则 $\Phi_k(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\omega-2\pi k/N)}{2}\right)}e^{-j\frac{N-1}{2}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)}=\phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$

所以有 $X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$



内插函数 $\phi(\omega)$ 的幅度与相位特性如图所示。可以看到，内插函数在ω=0 （本样本点）函数值为1，其余采样点上函数值为0。

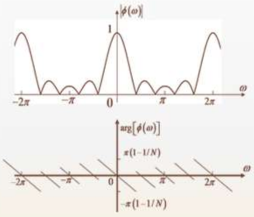
$$\phi\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=\begin{cases}1, & k=0\\0, & k=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

整个$X(e^{j\omega})$正是由N个 $\phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$ 函数，并乘上加权值X(k)以后之和。很明显，在每个采样点上$X(e^{j\omega})$就等于X(k)，因为其余采样点的内插函数在这里都为零值，而采样点之间的$X(e^{j\omega})$值，则由各采样值的内插函数延伸叠加所形成。

内插函数的另一重要特点是具有线性相移的特性，这个特点在图中看得十分清楚。

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\phi\left(\frac{2\pi}{N}k\right)=\begin{cases}1, & k=0\\0, & k=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$



对于有限长序列，在用X(z)的时域序列x(n)和频域序列X(k)的表达时的两套对应表达式如下：$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)$

即对于时域序列，$X(z)$是按z的负幂级数（即罗朗级数）展开，$x(n)$正是其罗朗级数的系数；而对于频域序列，$X(z)$是按函数集$\Phi_k(z)$展开，$X(k)$正是其展开的系数。

对于频响而言：有限长序列的$X(e^{j\omega})$的时域序列$x(n)$表达和频域序列$X(k)$表达如右式：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

对于时域序列，频响$X(e^{j\omega})$是展成复正弦级数（也即傅里叶级数），$X(e^{j\omega})$正是其复正弦级数的谐波系数；而对于频域序列，频响$X(e^{j\omega})$则是展成内插函数ϕ的级数，$X(k)$正是其展开系数。这些也反映了用不同正交完备集展开时的不同含义和表达方式。

在以后的章节中，我们将看到，频域采样理论为FIR滤波器的结构设计，以及FIR滤波器传递函数的逼近提供了又一个有力的工具。

2.3　频域采样理论　　9/13/2022　　28