二阶系统的系统分析及幅频响应测试

系统辨识及系统分析在实际中应用非常广泛。比如我们使用手机通信时，手机需要估计基站和手机之间的无线信道，这就是系统辨识。我们经常需要对一个已知系统进行分析来确定系统的特性，如一个滤波器是低通、带通、高通还是带阻滤波器。系统分析是信号与系统的重要内容，学习信号与系统的主要目的之一就是掌握基本的系统分析方法。

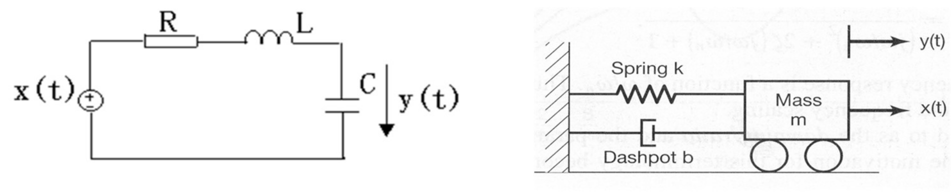
实际中的复杂系统都可以分解为一阶与二阶系统的级联或者并联形式；反过来，通过一阶与二阶系统的级联或者并联可以实现复杂的系统。因此，一阶和二阶系统的分析是系统分析的基础。

在本实验中，我们将对二阶系统进行理论分析；用 MATLAB 绘制系统的幅频响应；搭建实际的二阶系统并测试其幅频响应，将测试结果与理论曲线进行对比。通过本实验可以掌握基本的系统分析方法。

1、实验简介

根据课程内容，我们知道：对图 1(a)的 RLC 串联系统以及图 1(b)的弹簧阻尼器系统，均可以用式(1)的微分方程表示系统的输入输出关系：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy(t)}{dt}+\omega_n^2y(t)=\omega_n^2x(t) \tag{1}$$



(a) (b)

图 1 实际的二阶系统

对图 1(a)的 RLC 系统，有：

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}},\qquad \zeta=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

由变换域分析（或称复频域分析、s 域分析），对式(1)两边做拉普拉斯变换，可

得系统的传输函数（系统函数）为

$$H(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{2}$$

当$\zeta>1$时，系统有两个负实根$c_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$，此时系统处于过阻尼状态（单位冲激响应不存在震荡），系统的单位冲激响如式(3)所示。

$$h(t)=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(e^{c_1 t}-e^{c_2 t}\right)u(t) \tag{3}$$

当$0<\zeta<1$时，系统有一对共轭复根$c_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$，此时系统处于欠阻尼状态（单位冲激响应存在震荡），系统的单位冲激响应式(4)所示。

$$h(t)=\frac{\omega_n}{j2\sqrt{1-\zeta^2}}\left(e^{c_1 t}-e^{c_2 t}\right)u(t) \tag{4}$$

当$\zeta=1$时，系统有一个二阶负实根$c_1=c_2=-\omega_n$，此时系统处于临界阻尼状态，系统的单位冲激响应式(5)所示。

$$h(t)=\omega_n^2 te^{-\omega_n t}u(t) \tag{5}$$

系统的频率响应如式(6)所示。

$$H(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2} \tag{6}$$

式(6)可以变为式(7)的形式。

$$H(j\omega)=\frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)+1} \tag{7}$$

式(7)中的$\omega/\omega_n=f/f_n$是角频率或者频率对无阻尼频率的归一化。

接下来，简要介绍一下用信号源和示波器测量系统幅频响应的原理。根据课程内容，我们知道正弦信号$\cos(\omega_0 t)$通过 LTI 系统的响应为$A\cos(\omega_0 t+\phi)$。输出信号与输入信号的频率相同，A为幅度响应（对输入信号的幅度改变量），ϕ为相移。因此，我们可以通过给系统输入$\cos(\omega_0 t)$测得系统对频率为ω_0的信号的响应$Ae^{j\phi}$。实际上，$\cos(\omega_0 t)$是一个从时间上的$-\infty$持续到$+\infty$的信号，显然我们

无法产生这样的信号用于实验。可以证明：系统对输入信号$\cos(\omega_0 t)u(t)$的响应当系统稳定时（将这种信号作为被测系统的输入，必然会产生过渡过程）具有$A\cos(\omega_0 t+\phi)u(t)$的形式，且$A,\phi$与系统对输入$\cos(\omega_0 t)$的响应中的$A,\phi$相等。所以我们可以用该方法测量系统的频率响应。

2、实验内容

（1）对特定的元件值，从理论上分析该电路的阻尼特性及滤波特性。

（2）用 MATLAB 绘制该系统理论上的幅频响应曲线。

（3）用信号源和示波器实测该系统的幅频响应曲线。

（4）将实测的幅频响应曲线和理论曲线画在同一幅图上。

（5）比较理论上的幅频响应曲线和实测的幅频响应曲线。

（6）有兴趣的同学可以证明一项该频率响应测量方法的正确性。

3、实验步骤

（1）选取组成 RLC 电路的电感、电容和电阻。根据所选取的元件值计算系统的无阻尼自然角频率ω_n和阻尼系数ζ。根据ζ可以判断系统的阻尼特性。计算滤波器的无阻尼自然频率f_n（单位 Hz）。

（2）画出系统的零极点图，根据零极点图可以判断系统的通带特性（低通、高通、带通、带阻等）。

（3）电路参数同（1），用 MATLAB 编程绘制出系统的幅频响应曲线。建议采取如下步骤：

(a) 给各元件的变量赋值。

(b) 计算ω_n、ζ、f_n。

(c) 设定归一化频率（用 f_fn 表示）的取值范围（即横坐标取哪些值）

```
f_fn = [0.01:0.01:0.09    0.1:0.1:0.9    1:9    10:10:100];
```

(d) 用式(7)计算频率响应 H。

(e) 取对数模 20*log10(abs(H)).

(f) 以 f_fn 为横轴，对数模为纵轴，用 semilogx 函数绘制系统的幅频响应。

(g) 用 grid on 命令在图中显示网格。

（4）在面包板上搭出该 RLC 串联电路。并按以下步骤实际测量该电路的幅频响应。将测量数据记录在实验指导书后的表一中。

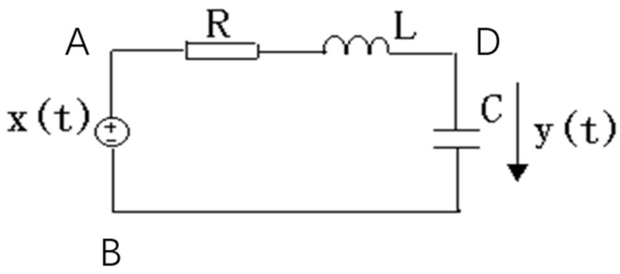


图 2 实测频率响应

(a) 连接信号源和示波器。信号源的红色鳄鱼夹连接电路的 A 点，黑色鳄鱼夹连接 B 点；双踪示波器的通道 1 探头连接 A 点，黑色鳄鱼夹连接 B 点，通道 2 的探头连接 D 点。

(b) 设置信号源输出正弦波，按照表中的测试频点设置信号源的输出频率，输出幅度设置为 5V（峰峰值）。

(c) 在示波器上读出两个通道信号的峰峰值，记录在表一中。

(d) 用 MATLAB 将表一记录数据和第（3）步的理论曲线绘制在同一幅图上。比较实测幅频响应曲线和理论曲线。将该图保存为*.png 格式，作为实验报告的附图。

（5）将图 2 的电路换为图 3 所示的电路。通过系统函数对其进行理论分析，并通过实测验证你的分析是否正确。

(a) 列出电路的微分方程，写出系统函数；

(b) 求该电路的无阻尼自然角频率 ω_n 和阻尼系数 ζ；

(c) 画出系统的零极点图，根据零极点图可以判断系统的通带特性；

(d) 用 MATLAB 绘制该电路的幅频响应；

(e) 按前述步骤 4 的方法，实测该电路的幅频响应。

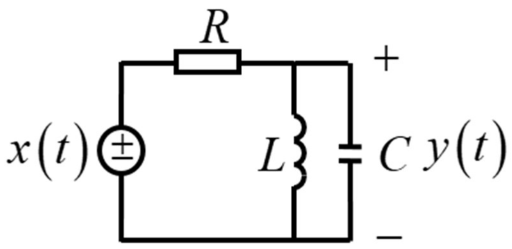


图 3 R 串联 LC 并联回路的二阶电路系统

4、思考题

（1）通过一单频正弦信号对系统进行测试，是否能得到系统的传输特性？

（2）实测的幅频响应曲线和理论上的曲线是否有差异，有的话，分析引起差异的原因。

（3）如何测该电路的相频响应？

（4）图 3 的电路是否可以用于低通滤波？

（5）你在实验中发现了什么问题，试用掌握的理论知识对其做出分析和讨论。

（6）通过实验你有哪些收获，对进一步改进实验有什么建议。

附件：实测数据记录表

表一 实测数据记录表

测量时间：
测量地点：
实验人员：
测量对象：RLC 串联电路
RLC 的元件值：

无阻尼自然频率：$f_n =$

归一化频率	信号源设置频率 归一化频率* f_n	CH1 Vpp X （伏）	CH2 Vpp Y （伏）
0.02			
0.05			
0.08			
0.1			
0.2			
0.3			
0.4			
0.5			
0.6			
0.7			
0.8			
0.9			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
20			
50			