

第二节 控制系统的传递函数

传递函数是经典控制理论中最重要的数学模型之一。利用传递函数，在系统的分析和设计中可解决如下问题：

- 不必求解微分方程就可以研究初始条件为零的系统在输入信号作用下的瞬、稳态过程。（将微分方程转换为代数方程）
- 可以研究系统参数或结构变化时对系统瞬态过程的影响，因而使分析系统的问题大为简化。
- 可以把对系统性能的要求转化为对系统传递函数的要求，使设计问题易于实现。

一、传递函数的基本概念

设线性定常系统或环节的微分方程为：

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 x(t)$$

式中： $x(t)$ --输入， $y(t)$ --输出

$a_i, b_j (i = 0 \sim n, j = 0 \sim m)$ 为常系数。

上式求拉氏变化，得(令初始值为零)：

$$Y(s)[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0] = X(s)[b_m s^m + \cdots + b_0]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$G(s) = Y(s)/X(s)$ 称为系统或环节的传递函数。即：在零初始条件下，系统输出量的拉氏变换与输入量拉氏变换之比。也可写成： $Y(s) = G(s) X(s)$ 。通过拉氏反变换可求出时域表达式 $y(t)$ 。

[总结]

- 传递函数是由线性微分方程（线性定常系统）当初始值为零时进行拉氏变化得到的。
- 已知传递函数 $G(s)$ 和输入量 $X(s)$ ，可得出输出量 $Y(s)$ 。
通过拉氏反变换可求出输出的时域表达式 $y(t)$ 。
- 可以由系统或环节的微分方程直接得出传递函数，只要将各阶导数用各阶 s 代替即可。即：

$$\frac{d}{dt} \rightarrow s, \dots, \frac{d^n}{dt^n} \rightarrow s^n$$

[关于传递函数的几点说明]

- ◆ 传递函数的概念适用于线性定常系统，它与线性常系数微分方程一一对应。且与系统的特性一一对应。
- ◆ 传递函数是在零初始条件下定义的。控制系统的零初始条件有两个含义：一是指输入量是在时间 $t=0^-$ 以后才作用于系统的。因此，系统输入量及其各阶导数在 $t=0^-$ 时的值均为零；二是指输入量作用于系统之前，系统是相对静止的。因此，系统输出量及其各阶导数在 $t=0^-$ 时的值也为零。
- ◆ 传递函数不能反映系统或环节的学科属性和物理性质。物理性质和学科类别截然不同的系统可能具有完全相同的传递函数。而研究某传递函数所得结论可适用于具有这种传递函数的各种系统。

[关于传递函数的几点说明（续）]

- ◆ 传递函数仅与系统的结构和参数有关，与系统（或元件）的输入量和输出量的形式和大小无关。只反映了输入和输出之间的关系，不反映中间变量的关系。
- ◆ 传递函数的概念主要适用于单输入单输出线性定常系统。若系统有多个输入信号，在求传递函数时，除了一个有关的输入外，其它的输入量可暂视为零。
- ◆ 传递函数是 s 的有理分式，其分子和分母多项式的系数均为实数，都是由系统的物理参数决定的。分母的阶次 n 大于等于分子的阶次 m （由于系统具有惯性的缘故），此时称为 n 阶系统。

[传递函数的拉氏反变换是系统的脉冲响应 $g(t)$]

- 系统的脉冲响应是在零初始条件下，线性系统对理想单位脉冲输入信号的输出响应。此时，输入量 $R(s)=L[\delta(t)]=1$ ，所以有

$$g(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s) \cdot R(s)] = L^{-1}[G(s)]$$

- 系统在任意信号输入时，其输出（响应）为：

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s) \cdot R(s)] \\ &= \int_0^t r(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t r(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

式中， $g(t)$ 是系统的脉冲响应。

什么是响应？

[传递函数的三种表示形式]

■ 有理分式形式:
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

式中: a_i 、 b_j --为实常数, 一般 $n \geq m$ 。

上式称为 n 阶传递函数, 对应的系统称为 n 阶系统。

■ 零点、极点形式: (根轨迹中应用)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m}{a_n} \times \frac{Q(s)}{P(s)} = k_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

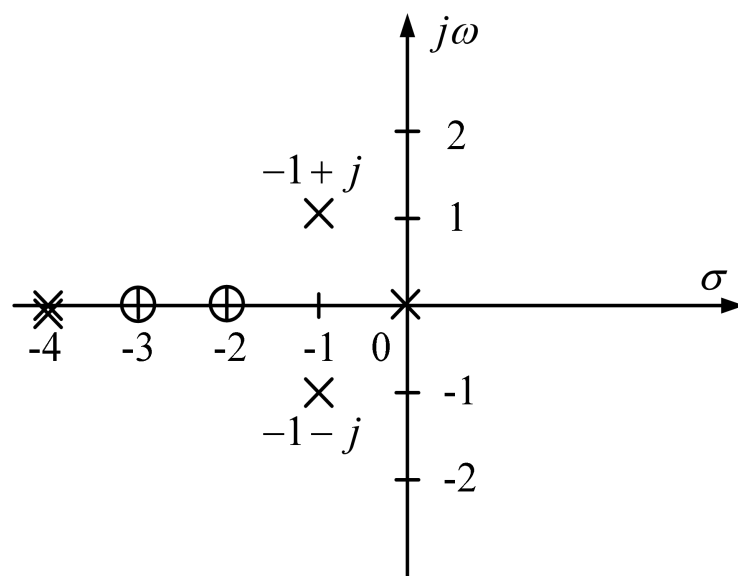
[注] $-z_i$ 和 $-p_j$ 分别为传函的零、极点, $k_g = \frac{b_m}{a_n}$ 称为根轨迹增益

[在复平面上传递函数零点和极点的表示]

在复平面上，通常用“o”表示传递函数的零点，用“×”表示传递函数的极点。假设传递函数为：

$$G(s) = \frac{k_g (s+2)(s+3)}{s(s+4)^2(s^2+2s+2)}$$

其零点和极点分布如下图所示。



若零点或极点为共轭复数，则一般用2阶项来表示。

若 $-p_1$ 、 $-p_2$ 为一对共轭复极点，则：

$$\frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)} \rightarrow \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

同样，共轭复零点表示为：

$$(s + z_1)(s + z_2) \rightarrow s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

■ 时间常数形式：（频域分析法中应用较多）

$$G(s) = \frac{b_0}{a_0} \times \frac{Q(s)}{P(s)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{\prod_{j=1}^n (T_j s + 1)}$$

其中： $\tau_i = \frac{1}{z_i}$ 和 $T_j = \frac{1}{p_j}$ 称为时间常数， K 称为放大系数。

放大系数与根轨迹增益的关系：

$$K = k_g \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j}$$

$$G(s) = k_g \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

若再考虑有 ν 个零值极点，则传递函数的普遍式可以写成：

$$G(s) = \frac{k_g \times \prod_{i=1}^{m_1} (s + z_i) \prod_{k=1}^{m_2} (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)}{s^\nu \times \prod_{j=1}^{n_1} (s + p_j) \prod_{l=1}^{n_2} (s^2 + 2\zeta_l \omega_l s + \omega_l^2)}$$

比例环节 一阶微分 二阶微分

积分环节 惯性环节 振荡环节

或：

$$G(s) = \frac{K \times \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{s^\nu \times \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}$$

式中： $m_1 + 2m_2 = m$, $\nu + n_1 + 2n_2 = n$

从上式可以看出：传递函数是若干基本因子的乘积。这些基本因子就是**典型环节**所对应的传递函数，是一些最简单、最基本的一些形式。

二、典型环节的传递函数：

典型环节有比例、积分、惯性、振荡、微分、延迟环节等。

典型环节名称	微分方程	传递函数
比例环节	$y(t) = kx(t)$	$G(s) = k$
积分环节	$y(t) = \int_0^t x(t)dt$	$G(s) = \frac{1}{s}$
惯性环节	$Ty'(t) + y(t) = x(t)$	$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$
振荡环节	$T^2 y''(t) + 2\zeta Ty'(t) + y(t) = x(t)$	$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$
微分环节	$y(t) = x'(t)$	$G(s) = s$
延迟环节	$y(t) = r(t - \tau)$	$G(s) = e^{-\tau s}$

以下分别讨论典型环节的时域特征和复域（ s 域）特征。时域特征包括微分方程和单位阶跃响应。 s 域特性研究系统的零、极点分布。

（一）比例环节：

时域方程： $y(t) = kx(t), t \geq 0$

传递函数： $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k$

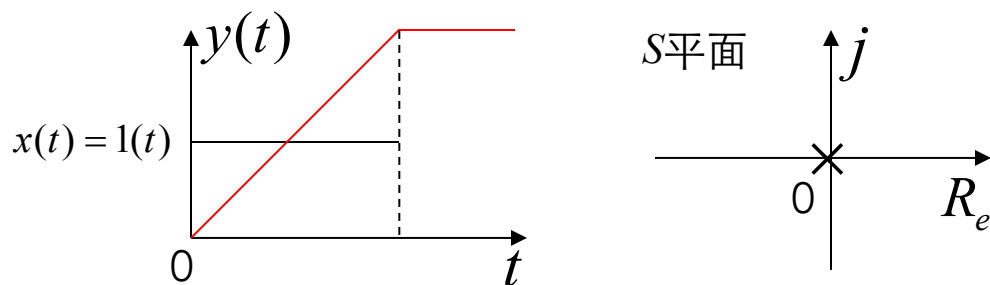
比例环节（又称为放大环节）的输出量与输入量成比例关系。 k 为放大系数。实例：分压器，理想运放，无间隙无变形齿轮传动等。

(二) 积分环节:

时域方程: $y(t) = \int_0^t x(t) dt, t \geq 0$

传递函数: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s}$

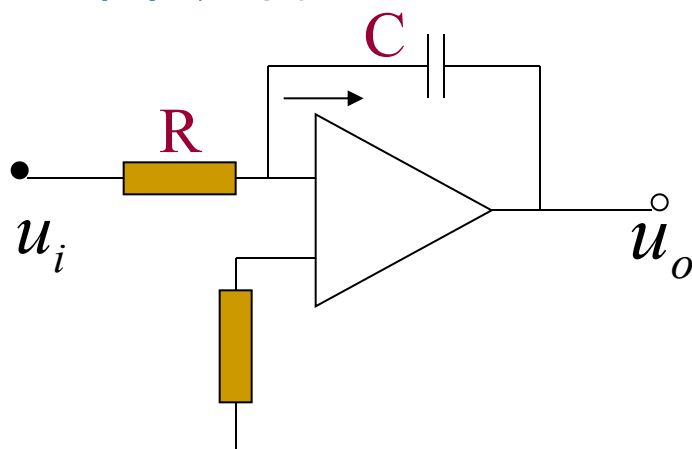
■ 当输入为单位阶跃函数时, 有 $y(t) = \int_0^t 1(t) dt = t$ 。时域响应曲线和零极点分布图如下:



积分环节有一个零值极点, 在 s 平面上极点用“ \times ”表示。积分环节的单位阶跃响应随时间线性增长, 当输入突然移去后, 输出维持不变, **积分具有记忆功能。**

积分环节实例

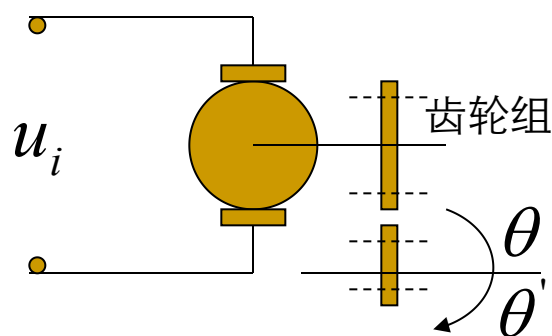
①



$$\therefore \frac{u_i(s)}{R} = -\frac{u_o(s)}{1/Cs}$$

$$\therefore \frac{u_o(s)}{u_i(s)} = -\frac{1}{RCs}$$

② 电动机（忽略惯性和摩擦）



图中， θ 为转角， θ' 为角速度。

$$\theta' = ku_i \quad \theta = \int_0^t ku_i(t) dt$$

可见， $\theta' \sim u_i$ 为比例环节，

$\theta \sim u_i$ 为积分环节。

(三) 惯性环节

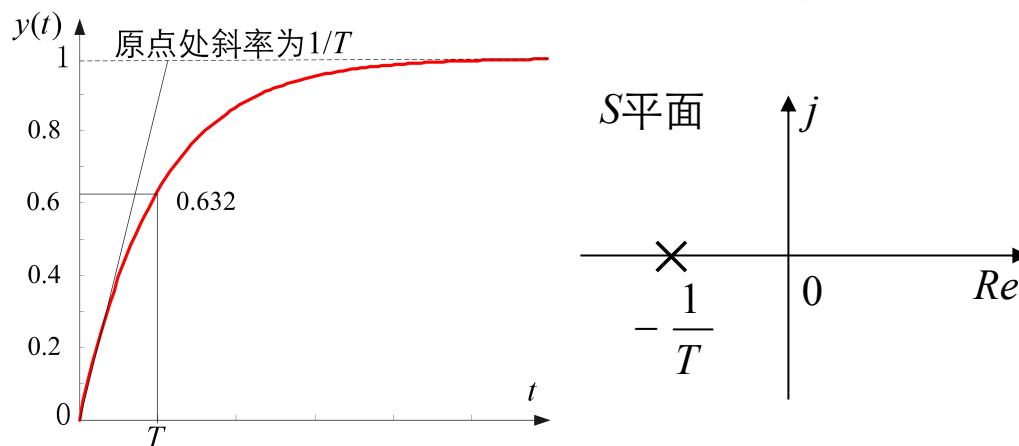
时域方程: $Ty'(t) + y(t) = x(t), t \geq 0$

传递函数: $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{Ts+1}$

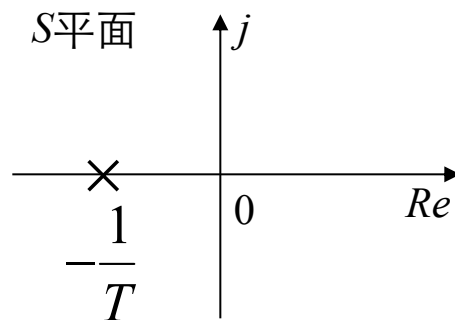
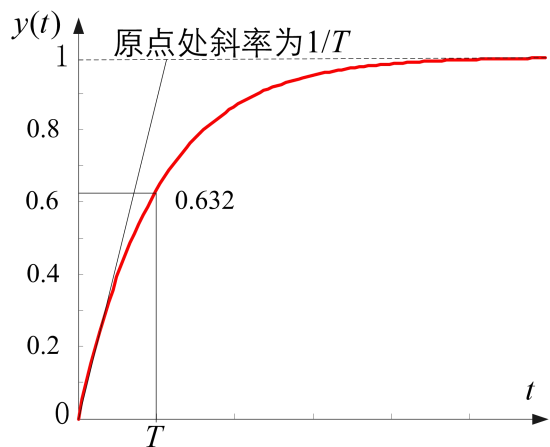
■ 当输入为单位阶跃函数时, 有 $Ty'(t) + y(t) = 1$, 可解得:

$y(t) = 1 - e^{-t/T}$, 式中: T 为时间常数。

■ 输入为单位阶跃函数, 时域响应曲线和零极点分布图如下:



当输入信号由0突变到1时, 输出信号是逐渐增大的。这是因为惯性环节中含有储能元件的缘故。



通过原点的斜率为 $1/T$ 。只有一个极点 ($-1/T$) 。

✓ 求惯性环节单位阶跃响应的方法：

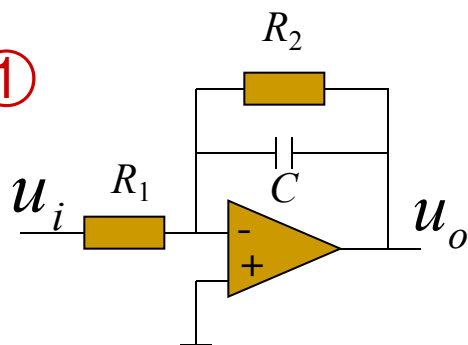
$$\therefore \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}, R(s) = \frac{1}{s}, \quad \therefore Y(s) = \frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$\therefore y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

✓ 可见： $y(t)$ 是非周期单调上升的，按指数规律变化的曲线。
所以惯性环节又叫作非周期环节。

几个实例：

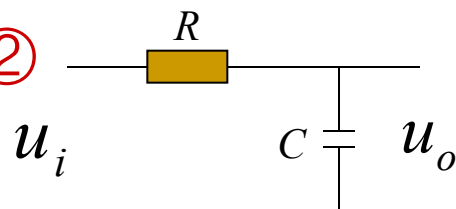
①



$$\because Z_1 = R_1, \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + Cs = \frac{1 + R_2Cs}{R_2}, \therefore Z_2 = \frac{R_2}{1 + R_2Cs}$$

$$\text{而 } \frac{U_i(s)}{Z_1} = -\frac{U_o(s)}{Z_2}, \therefore \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2 / R_1}{1 + R_2Cs}$$

②



$$\therefore \frac{U_i(s)}{R + 1/Cs} = \frac{U_o(s)}{1/Cs}, \therefore \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

③ 例2.2.5中的电枢控制直流电动机，当忽略电枢回路的电感时，可作为惯性环节。

$$T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = K_1 u_a(t) - K_2 M_c(t)$$

(四) 振荡环节:

时域方程: $T^2 y''(t) + 2\zeta T y'(t) + y(t) = x(t)$

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

式中: ζ 为阻尼比, $\omega_n=1/T$ 为无阻尼振荡频率, T 为时间常数。

振荡环节根据阻尼比不同, 其单位阶跃响应有不同的形式:

◆ 当 $\zeta \geq 1$ 时, 传递函数有两个互异(等值)实极点, 单位阶跃响应为单调上升形式。

$$p_{1,2} = \frac{1}{T(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

◆ 若 $0 < \zeta < 1$ ，传递函数有一对共轭复数极点。传函可写成：

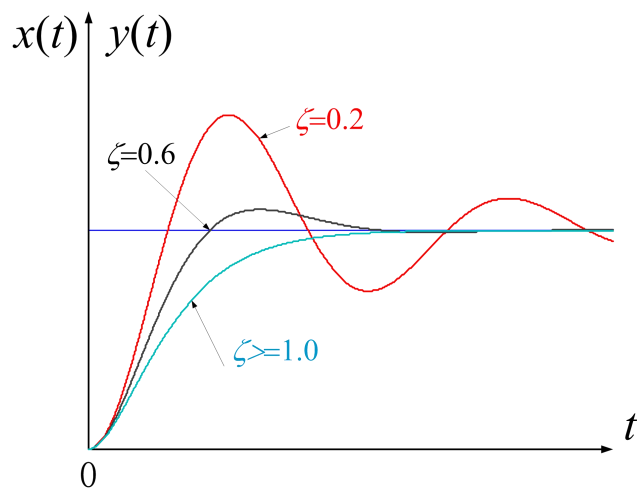
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

对单位阶跃输入 ($R(s)=1/s$)，有：

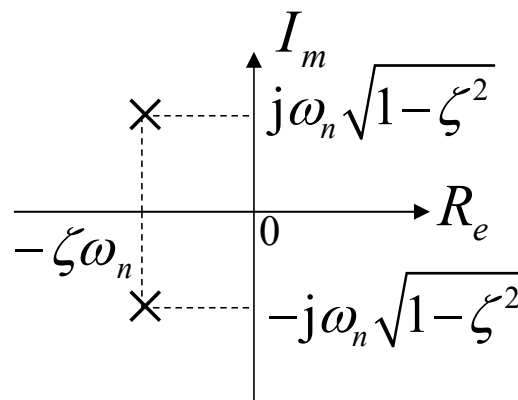
$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

单位阶跃响应为 ($0 < \zeta < 1$)：

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}), \quad t \geq 0$$



单位阶跃响应曲线

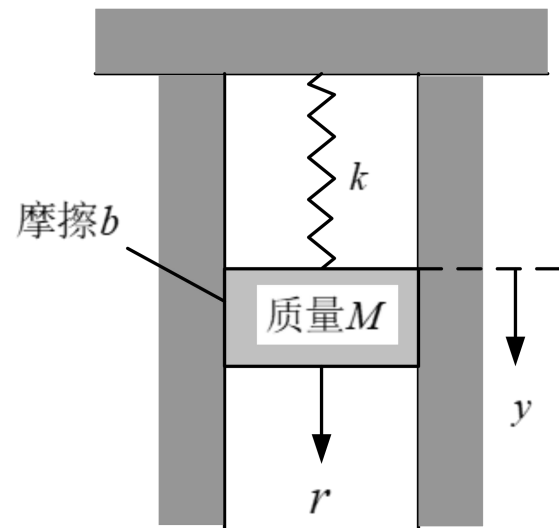
 $0 < \zeta < 1$ 时极点分布图

[分析]: 系统的单位阶跃响应过程与 ζ 、 ω_n 有关， ζ 反映了系统的阻尼程度。当 $0 < \zeta < 1$ 时，单位阶跃响应的形式是：幅值按指数规律衰减，频率与 ζ 、 ω_n 有关的正弦运动。 ζ 越小，振荡越激烈。当 $\zeta \geq 1$ 时，单位阶跃响应曲线单调上升无振荡。

① 例2.2.1中的质量、弹簧、阻尼器系统。

$$\text{时域方程: } M \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = r$$

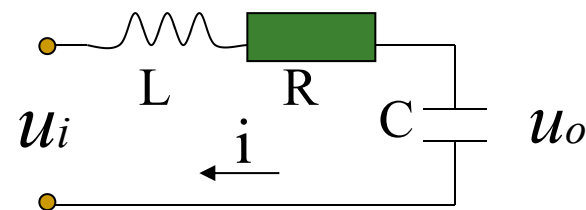
$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$



② 例2.2.3中的RLC无源网络也属于振荡环节。

$$\text{时域方程: } LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$$

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



u_i — 输入

u_o — 输出

它们的共同特点是都具有两个独立储能元件。

(五)微分环节:

微分环节的时域表达有三种: 相应的传递函数为:

$$\textcircled{1} \quad y(t) = x'(t)$$

$$\textcircled{1} \quad G(s) = s$$

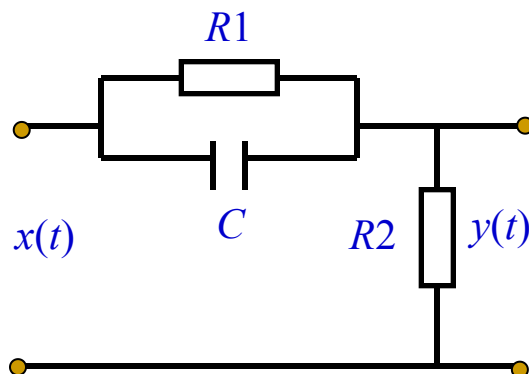
$$\textcircled{2} \quad y(t) = \tau x'(t) + x(t)$$

$$\textcircled{2} \quad G(s) = \tau s + 1$$

$$\textcircled{3} \quad y(t) = \tau^2 x''(t) + 2\zeta\tau x'(t) + x(t) \quad \textcircled{3} \quad G(s) = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$$

分别称为: 纯微分、一阶微分和二阶微分环节。微分环节没有极点, 只有零点, 分别是零、实数和一对共轭零点 ($0 < \zeta < 1$)。在工程实现中, 由于存在惯性, 单纯的微分环节是不存在的, 一般都是微分环节加其它环节。式中 τ 称为微分时间常数。

[实例]



$$\therefore \frac{X(s)}{Z_1(s)} = \frac{Y(s)}{Z_2(s)}, \quad Z_2 = R_2, \quad Z_1 = R_2 + \frac{R_1}{1 + R_1 C s}$$

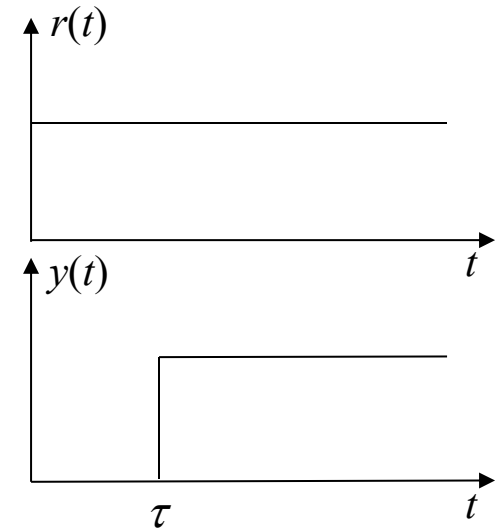
$$\therefore G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R_2 (1 + R_1 C s)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s} = \frac{k(\tau_1 s + 1)}{\tau_2 s + 1}$$

$$\text{式中: } k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \tau_1 = R_1 C, \tau_2 = \frac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2}$$

当 $\tau_2 \ll 1$ 时, 则有: $G(s) \approx k(\tau_1 s + 1)$

(六) **延迟环节**：又称时滞、时延环节。它的输出是经过一个延迟时间 τ 后，完全复现输入信号。 $y(t) = r(t - \tau)$ 。如右图所示。

其传递函数为： $G(s) = e^{-\tau s}$



具有延迟环节的系统是很难控制的。当 τ 较小时，工程上对 $e^{-\tau s}$ 可做如下处理：

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{1 + \tau s + \dots} \approx \frac{1}{1 + \tau s} \quad \text{或} \quad e^{-\tau s} \approx 1 - \tau s \quad \text{或}$$

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-\tau s/2}}{e^{\tau s/2}} \approx \frac{1 - \tau_1 s}{1 + \tau_1 s}, \quad \text{其中} \tau_1 = \tau/2$$

(七) 其它环节:

还有一些环节如:

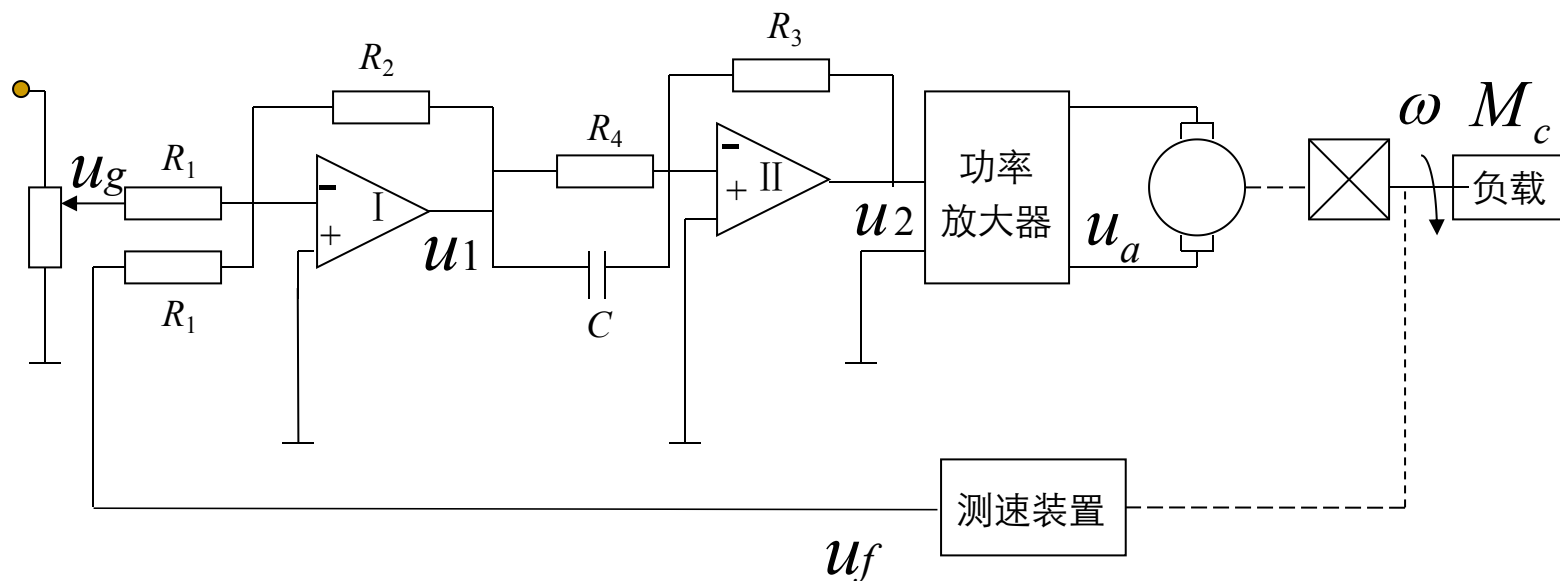
$$\frac{1}{Ts - 1}$$

$$\frac{1}{T^2s^2 - 2T\zeta s + 1}$$

它们的极点在 s 右半平面，以后会看到，这种环节是不稳定的。称为不稳定环节。

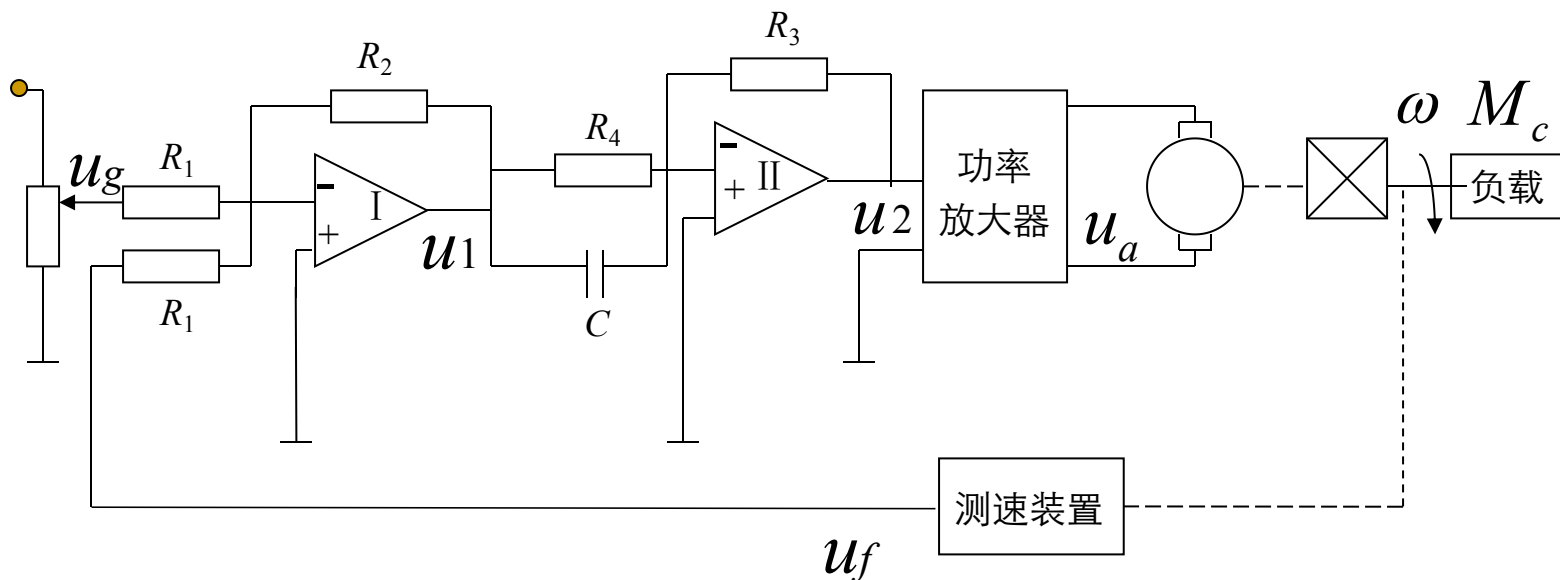
三、建立控制系统传递函数的例子：

[例2.3.1] 写出[例2.2.7] 速度控制系统的传递函数。



[解]： 各环节的微分方程及其拉氏变换为：

✚ 运放 I : $u_1(t) = k_1(u_g(t) - u_f(t))$, $U_1(s) = k_1(U_g(s) - U_f(s))$



✚运放 II : $u_2(t) = k_2[\tau \dot{u}_1(t) + u_1(t)]$, $U_2(s) = k_2(\tau s + 1)U_1(s)$

✚功放: $u_a(t) = k_3 u_2(t)$, $U_a(s) = k_3 U_2(s)$

✚直流电动机: $T_2 \ddot{\omega} + T_1 \dot{\omega} + \omega = k_u u_a - k_m (T_c \dot{M}_c + M_c)$,

$$(T_2 s^2 + T_1 s + 1)\Omega(s) = k_u U_a(s) - k_m (T_c s + 1)M_c(s)$$

✚ 反馈环节: $u_f(t) = k_f \omega(t)$, $U_f(s) = k_f \Omega(s)$

消去上述各式中的中间变量，就可得到在输入 u_g 和负载干扰 M_c 作用下的转速 ω 的表达式：

$$\left(\frac{T_2}{1+K_0} s^2 + \frac{T_1 + K_0 \tau}{1+K_0} s + 1 \right) \Omega(s) = \frac{K}{1+K_0} (\tau s + 1) U_g(s) - \frac{k_m}{1+K_0} (T_c s + 1) M_c(s)$$

上式有两个输入量（输入 u_g 和负载干扰 M_c ），而传递函数只能处理单输入-单输出系统。对于线性多输入系统，可以分别求出输出对每个输入的传递函数，然后叠加起来。下面分别讨论两个输入单独作用时的传递函数。

■ 令 $M_c(s) = 0$, 可得转速 ω 对输入 u_g 的传递函数:

$$G_u(s) = \frac{\Omega(s)}{U_g(s)} = K(\tau s + 1) / (T_2 s^2 + (T_1 + K_0 \tau) s + (1 + K_0))$$

■ 令 $U_g(s) = 0$, 可得转速 ω 对负载干扰 M_c 的传递函数:

$$G_M(s) = \frac{\Omega(s)}{M_c(s)} = -k_m (T_c s + 1) / (T_2 s^2 + (T_1 + K_0 \tau) s + (1 + K_0))$$

利用叠加原理得总转速表示为:

$$\Omega(s) = G_u(s)U_g(s) + G_M(s)M_c(s) = \begin{bmatrix} G_u(s) & G_M(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_g(s) \\ M_c(s) \end{bmatrix}$$

[例2.3.3]求例2.2.2倒立摆系统的传递函数(u 为输入, θ 为输出)。

解：在例2.2.2中已得到描述倒立摆系统运动的微分方程为：

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} = mg\ell\theta$$

$$(M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u$$

令所有初始条件为零, 对上述两个方程作拉氏变换, 可得:

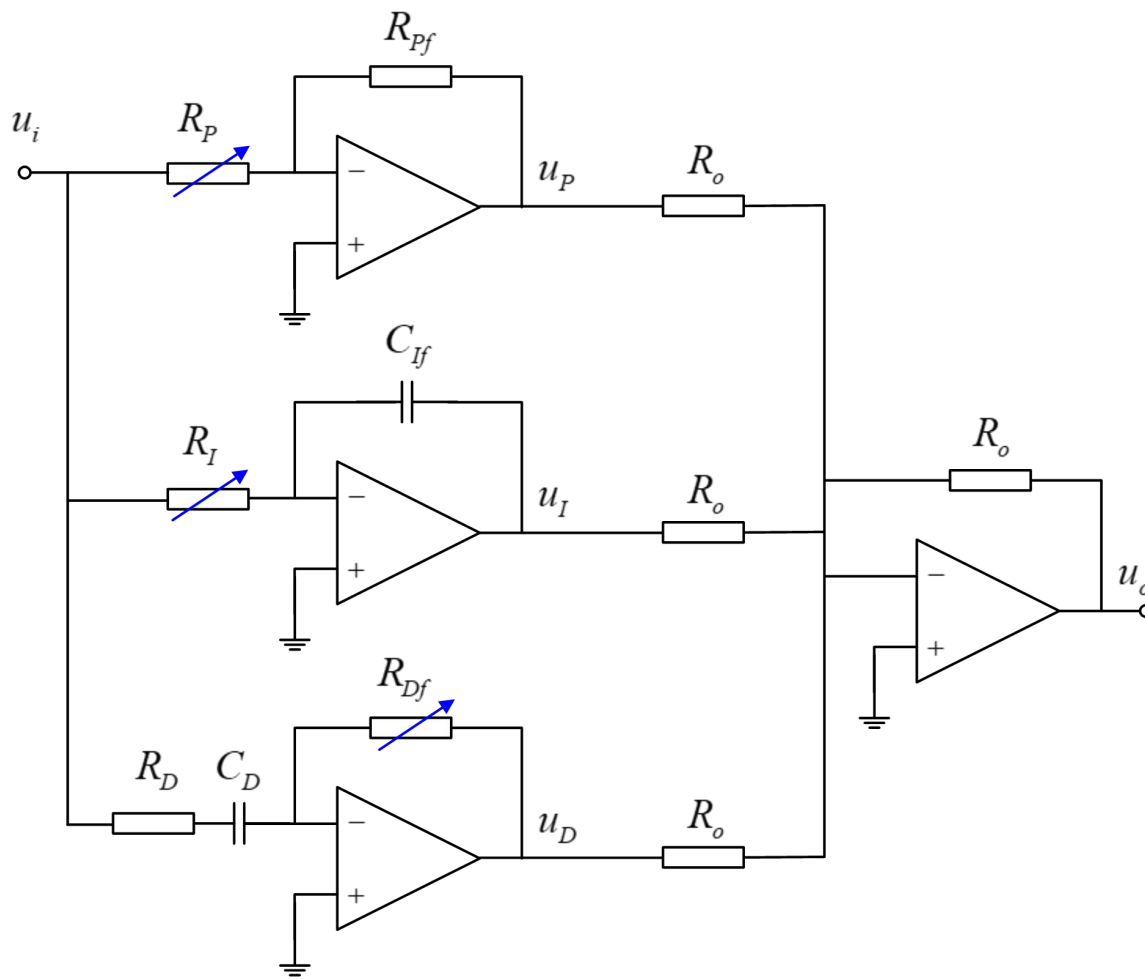
$$(I + m\ell^2)s^2\theta(s) + m\ell s^2 X(s) = mg\ell\theta(s)$$

$$(M + m)s^2 X(s) + m\ell s^2\theta(s) = U(s)$$

消去中间变量 $X(s)$, 可得倒立摆系统 u 和 θ 间的传递函数为：

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{-\frac{m\ell}{M + m}}{\left[\left(I + m\ell^2 \right) - \frac{m^2\ell^2}{M + m} \right] s^2 - mg\ell}$$

[例2.3.5] 比例、积分、微分（即PID）控制器如下图所示，试求其传递函数。



解：假设运算放大器为理想放大器，于是有

$$\frac{U_P(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_{Pf}}{R_P} \quad \text{比例P}$$

$$\frac{U_I(s)}{U_i(s)} = -\frac{1/C_{If}s}{R_I} = -\frac{1}{R_I C_{If}s} \quad \text{积分I}$$

$$\frac{U_D(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_{Df}}{R_D + \frac{1}{C_D s}} = -\frac{R_{Df} C_D s}{R_D C_D s + 1}$$

当 $R_D C_D \ll 1$ 时，上式简化为： $\frac{U_D(s)}{U_i(s)} \approx -R_{Df} C_D s$ 微分D

则： $U_o(s) = -(U_P(s) + U_I(s) + U_D(s))$

由此可得PID控制器的传递函数为：

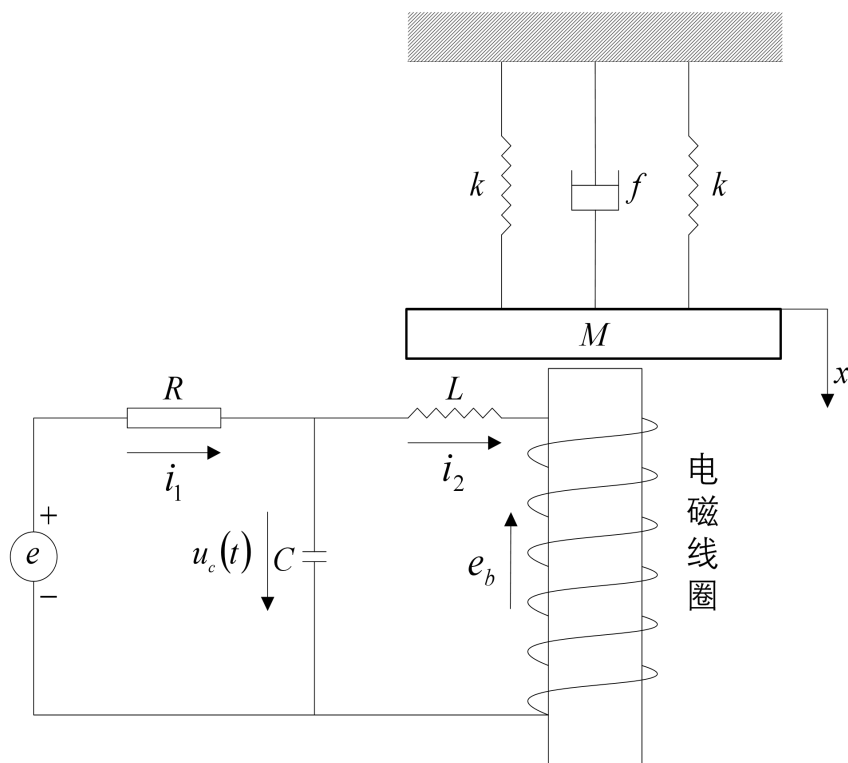
$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{R_{Pf}}{R_P} + \frac{1}{R_I C_{If} s} + R_{Df} C_D s \\ &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \end{aligned}$$

其中：

① K_p 为比例系数； T_i 和 K_i 分别称为积分时间常数、积分系数； T_d 和 K_d 分别称为微分时间常数、微分系数。

② $K_p = \frac{R_{Pf}}{R_P}$ ， $K_i = \frac{1}{R_I C_{If}}$ ， $K_d = R_{Df} C_D$ 。可通过调整相应可变电阻值，来分别调节比例、积分和微分系数。

[补例] 已知机电系统如图所示，试求该系统的传递函数。假定电磁线圈的反电势， $e_b = k_1 \frac{dx}{dt}$ ，线圈电流 i_2 对衔铁M产生的力是 $F_0 = k_2 i_2$ ，衔铁M产生的位移 x 为系统输出， e 为输入。



$$e(t) - u_c(t) = R i_1(t)$$

$$i_1(t) - i_2(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

$$u_c(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} + e_b(t)$$

$$e_b(t) = k_1 \frac{dx}{dt}$$

$$F_0 = k_2 i_2(t)$$

$$F_0 - 2kx(t) - f \frac{dx(t)}{dt} = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

上述各式求拉氏变换，并消去中间变量，可得以 $e(t)$ 为输入， $x(t)$ 为输出的传递函数：

$$\frac{X(s)}{E(s)} = \frac{k_2}{K_1 s^4 + K_2 s^3 + K_3 s^2 + K_4 s + K_5}$$

其中： $K_1 = RCLM$

$$K_2 = RCLf + LM$$

$$K_3 = 2RCLk + Lf + RM + RCk_1 k_2$$

$$K_4 = 2Lk + Rf + k_1 k_2$$

$$K_5 = 2Rk$$

小结

- ✦ 传递函数的基本概念
- ✦ 传递函数的列写（由微分方程和系统原理图出发）
- ✦ 传递函数的适用范围和局限性
- ✦ 典型环节及其传递函数（单位阶跃响应及其零极点分布）
- ✦ 作业：2.3，2.7