# 第四讲 线性空间与子空间

贺丽君
信息与通信工程学院
Email: lijunhe@mail.xjtu.edu.cn
2023-03

# 内容提要

- 线性无关性
- 空间的基底与维数
- 四个基本子空间
- 应用举例：关联矩阵与电路

# 内容提要

- 线性无关性
- 空间的基底与维数
- 四个基本子空间
- 应用举例：关联矩阵与电路

# 线性无关性

- **定义1**

$n$个向量$\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$是线性无关的等价于如下命题成立：

若：

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

则：

$$x_1 = x_2 \ldots = x_n = 0$$

- **定义2**

$n$个向量$\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$是线性无关的等价于$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$只有零解，其中：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

# 线性无关性

- ## 几点说明

  - 零向量与任意向量线性相关
  - 若A的各列向量线性无关，则A为列满秩矩阵，即：$r=n$
  - $\mathbf{R}^m$中任意$n$个向量线性相关，这里$n>m$

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{F}\end{bmatrix}$$

  - 线性无关也称为线性独立 (Linear Independence)

# 内容提要

- 线性无关性
- 空间的基底与维数
- 四个基本子空间
- 应用举例：关联矩阵与电路

# 线性空间的基底

> 定义

满足如下性质的一组向量组成线性空间的基底：

(1) 这些向量是线性无关的；

(2) 这些向量能够张成该线性空间。

$$\mathbf{v} = x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + x_n \mathbf{v}_n$$

可能的基底有无穷多种

对于给定的一组基，系数是唯一的

# 线性空间的基底

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

- $n$阶方阵**A**的各列线性无关
- **Ax=0**只有零解
- **A**是可逆的
- 对于任意的向量**b**，**Ax=b**有唯一解$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$
- **A**矩阵的各列向量构成$n$维空间的基底

这些结论是等价的

# 线性空间的基底

➢ 以线性空间的观点理解信号分析

- 信号的时域表示

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\underline{\delta(t-\tau)}d\tau$$

- 信号的频域表示

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

复指数基

- 由样本恢复带限信号

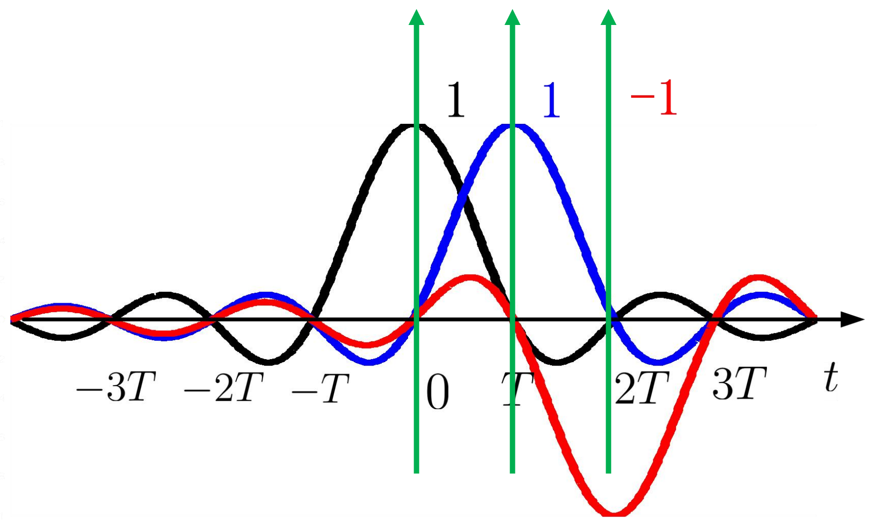
$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{T\sin[\omega_c(t-nT)]}{\pi(t-nT)}$$

?

# 线性空间的基底

➢ 以线性空间的观点理解信号分析

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{T\sin[\omega_c(t-nT)]}{\pi(t-nT)}$$

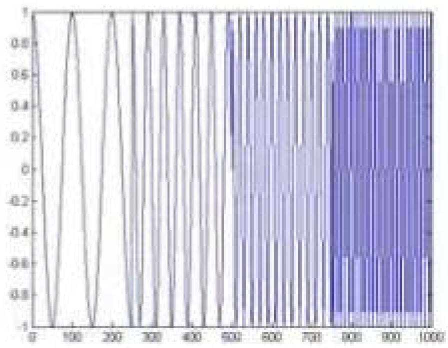


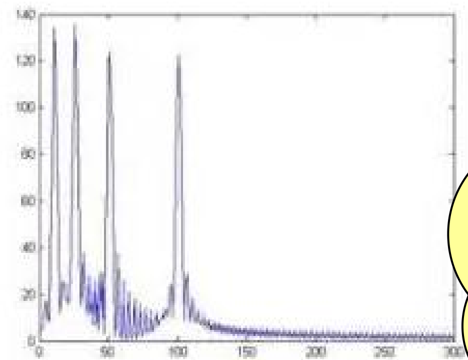

由样本恢复信号的过程就是用sinc基构造带限信号的过程

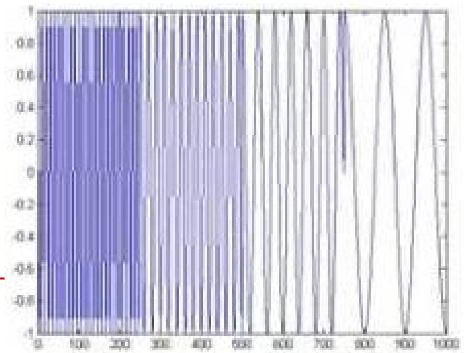
# 线性空间的基底

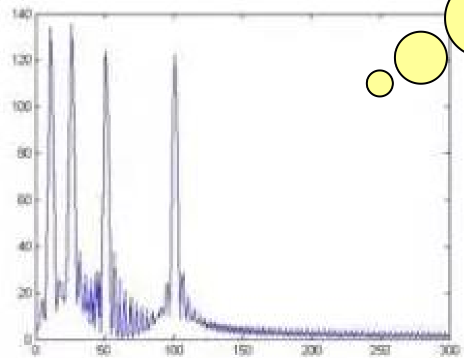
- 傅里叶分析——复指数基

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$





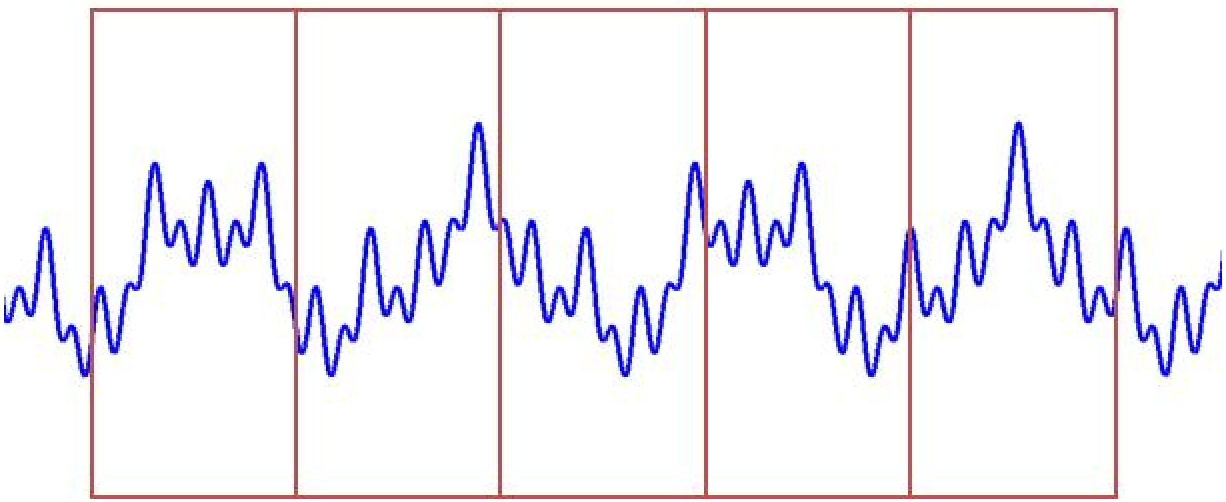




傅里叶分析
对非平稳信
号不适用

# 线性空间的基底

- 傅里叶分析的改进——短时傅里叶变换

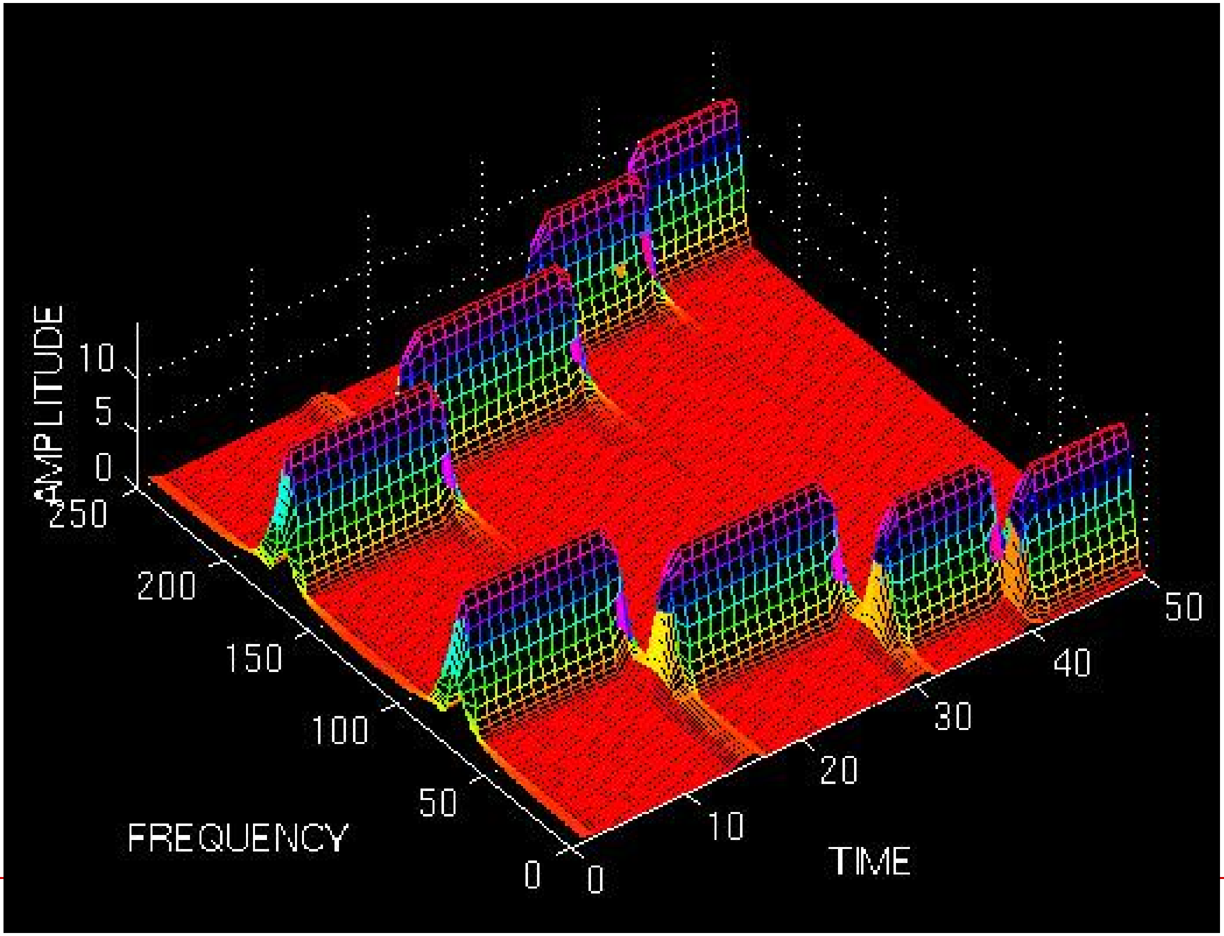


$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(j\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\underline{g^{*}(t-\tau)e^{-j\omega t}}dt$$

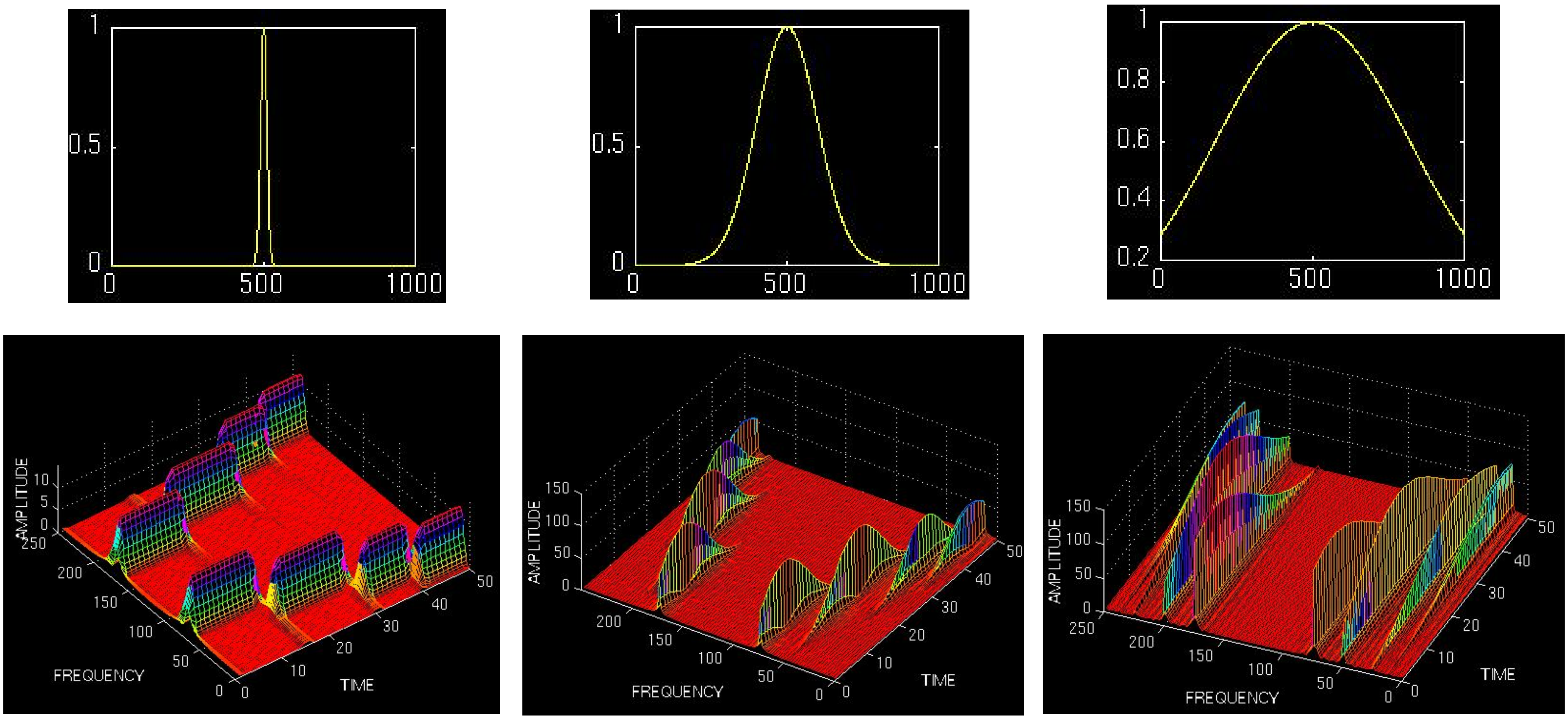
基底：$\left\{g(t-\tau)e^{j\omega t}\right\}$

# 线性空间的基底

➢ 傅里叶分析的改进——短时傅里叶变换



# 线性空间的基底

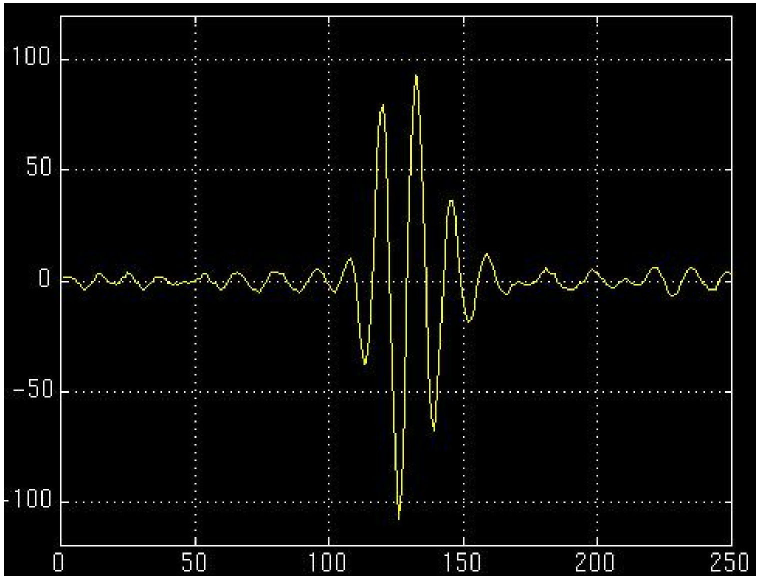


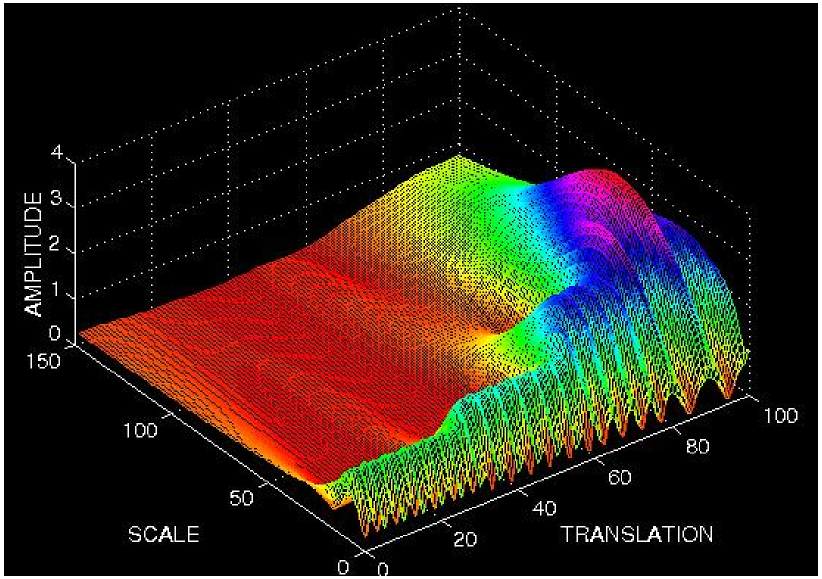

时间分辨率 vs. 频率分辨率

# 线性空间的基底

- 小波分析———基底变换

$$CWT_x^{\psi}(\tau,s)=\Psi_x^{\psi}(\tau,s)=\frac{1}{\sqrt{|s|}}\int x(t)\psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right)dt$$



# 线性空间的维数

- 如果$\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_m$和$\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n$是同一线性空间的两组基，则$m=n$

$$W_1 = a_{11}V_1 + a_{21}V_2 + \cdots + a_{m1}V_m$$
$$W_n = a_{1n}V_1 + a_{2n}V_2 + \cdots + a_{mn}V_m$$

$$\Downarrow$$

$$[W_1,\cdots,W_n] = [V_1,\cdots,V_m]\begin{bmatrix} a_{11},\cdots,a_{1n} \\ a_{21},\cdots,a_{2n} \\ a_{m1},\cdots,a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$W = VA,\quad n > m,\quad VAx = 0 \quad \Longrightarrow \quad Wx = 0$$

线性相关不能成为基底

# 线性空间的维数

- 如果$\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_m$和$\mathbf{w}_1,...,\mathbf{w}_n$是同一线性空间的两组基，则$m=n$
- 定义线性空间的维数为任意一组基所包含的向量的个数
- 假设$\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n$是$\mathbf{R}^n$的一组基且$n\times n$的方阵$\mathbf{A}$可逆，则$\mathbf{A}\mathbf{v}_1,...,\mathbf{A}\mathbf{v}_n$也是$\mathbf{R}^n$的一组基

1. 线性无关
2. 张成空间

# 线性无关性、基底、维数小结

- Independent vectors:

  no extra vectors

- Spanning a space:

  enough vectors to produce the rest

- Basis for a space:

  not too many or too few

- Dimension of a space:

  the number of vectors in a basis

# 内容提要

- 线性无关性
- 空间的基底与维数
- 四个基本子空间
- 应用举例：关联矩阵与电路

# 列空间

## ➢ 列空间的定义

矩阵A的列空间(记作$C(\mathbf{A})$)由该矩阵各列的所有线性组合组成，即所有可能的向量Ax

## ➢ 列空间的基底与维数

- A的主列构成$C(\mathbf{A})$的基底
- 若A为$m\times n$矩阵，则$C(\mathbf{A})$是$\mathbf{R}^m$的子空间，且$C(\mathbf{A})$的维数为$r$

# 零空间

- 零空间的定义

  线性方程组Ax=0的全部解构成矩阵A的零空间，用$N(\mathrm{A})$表示。

- 零空间的基底与维数

  - 齐次方程组Ax=0的特解构成$N(\mathrm{A})$的基底
  - 若A为$m\times n$矩阵，则$N(\mathrm{A})$是$\mathbf{R}^n$的子空间，其维数等于$n$-$r$

# 行空间 (Row Space)

- **行空间的定义**

  矩阵A的行空间表示由A的各行向量所张成的子空间，用 $C(\mathrm{A}^T)$ 表示。

- **几点说明**

  - □ 矩阵A的行空间即为 $\mathrm{A}^T$ 的列空间
  - □ 若A为 $m \times n$ 矩阵，则 $C(\mathrm{A}^T)$ 是
  - □ A与R的行空间一致，维数
    的前 $r$ 行(即主行)构成。

A与R的零空间和列空间一致吗?

# 行空间 (Row Space)

- A与R的零空间一致性

$Ax=0 \Longleftrightarrow Rx=0$ A与R的零空间一致

- A与R的列空间一致性

  - 矩阵R的列空间的特性？

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A与R的列空间不一致

# 左零空间 (Left Nullspace)

- **左零空间的定义**

  矩阵**A**的左零空间定义为矩阵$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$的零空间，用$N(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$表示。

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$$

“左零”得名的原因

- 若**A**为$m\times n$矩阵，则$N(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$是$\mathbf{R}^m$的子空间
- 左零空间的维数是$m-r$

# 左零空间

E可逆，则每一行向量之间线性无关

- 左零空间的基底

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{E}} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$r$个主行，线性无关

$m\text{-}r$个全零行

令

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{EA} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{A} \\ \mathbf{u}_2^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T\mathbf{A} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_k^T\mathbf{A} = \mathbf{0}^T, \quad k = r+1, \ldots, m$$

basis for $N(\mathbf{A}^\mathrm{T})$

A的左零空间的基底是初等行变换矩阵E的最后$m\text{-}r$行对应的向量

# 左零空间

## ➢ $N(\mathbf{R}^{\mathrm{T}})$的维数和基底

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{E}} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$r$个主行，线性无关

$m$-$r$个全零行

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}=\mathbf{0}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \mathbf{y}^{T} = [0,\ldots,0, y_{r+1},\ldots y_m]$$

$$\mathbf{y}^{T} = [y_1,\cdots, y_r, y_{r+1},\ldots y_m]$$

$$\mathbf{y}^{T}\mathbf{R} = y_1 Row_1 + \cdots + y_r Row_r + y_{r+1}\boxed{Row_{r+1}} + \cdots + y_m \boxed{Row_m} = \mathbf{0}^{T}$$

$N(\mathbf{A}^{T}) \neq N(\mathbf{R}^{T})$

$\dim N(\mathbf{R}^{\mathrm{T}}) = m$-$r$

*basis:* $m$阶单位阵的最后$m$-$r$列

# 左零空间

- $N(\mathbf{R}^T)$的维数和基底

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**A** **R**

$(0,0,y_3)$

$$\begin{array}{r} y_1[1,\ 3,\ 5,\ 0,\ 7] \\ +y_2[0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2] \\ +y_3[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \\ \hline [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \end{array}$$

dim=$m$-$r$=3-2

$$basis = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 四个基本子空间

$C(\mathbf{A}) \neq C(\mathbf{R})$

$N(\mathbf{A}) = N(\mathbf{R})$

$C(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = C(\mathbf{R}^{\mathrm{T}})$

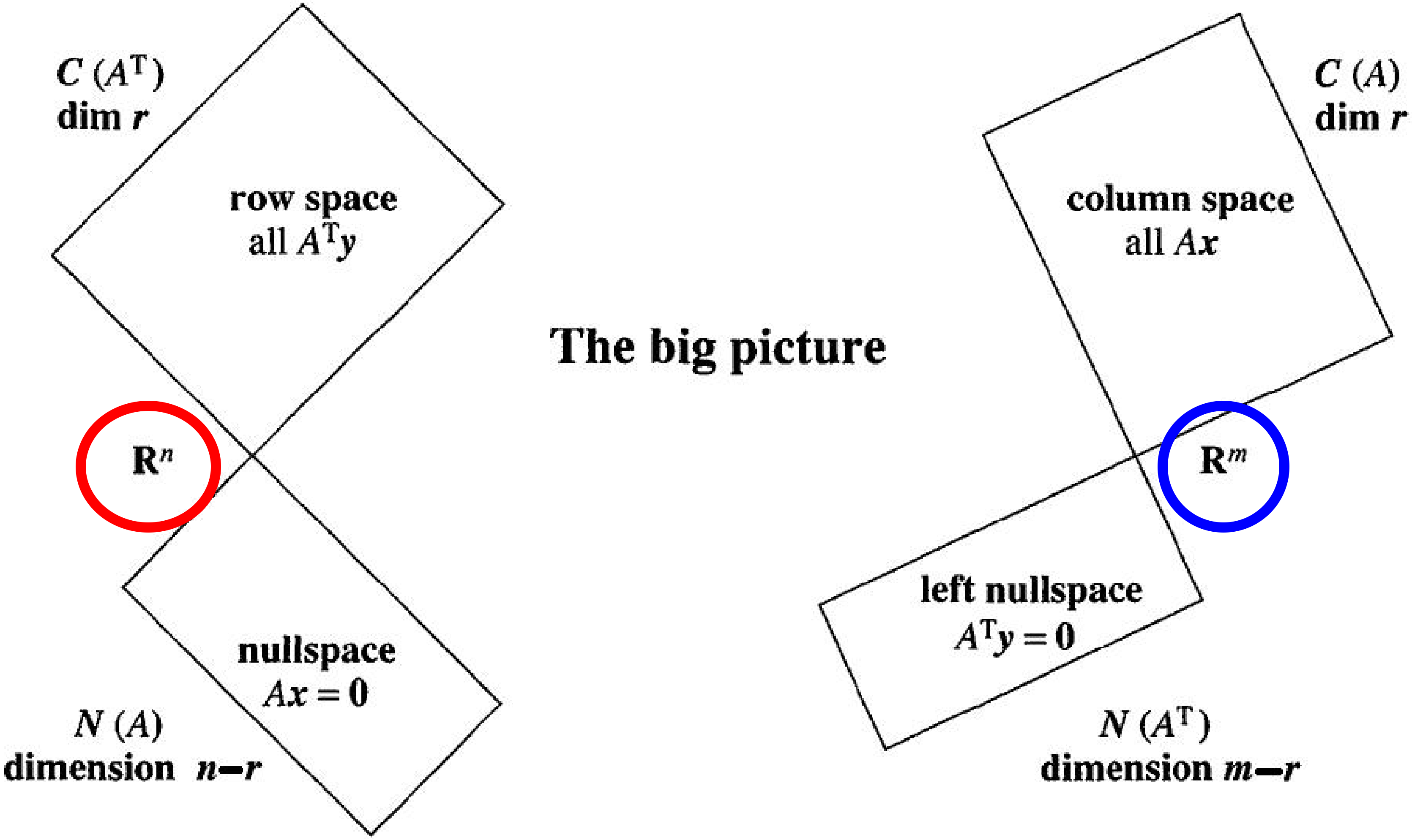
$N(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \neq N(\mathbf{R}^{\mathrm{T}})$

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$N(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})$ *basis*:初等行变换矩阵E的最后$m$-$r$行对应的向量

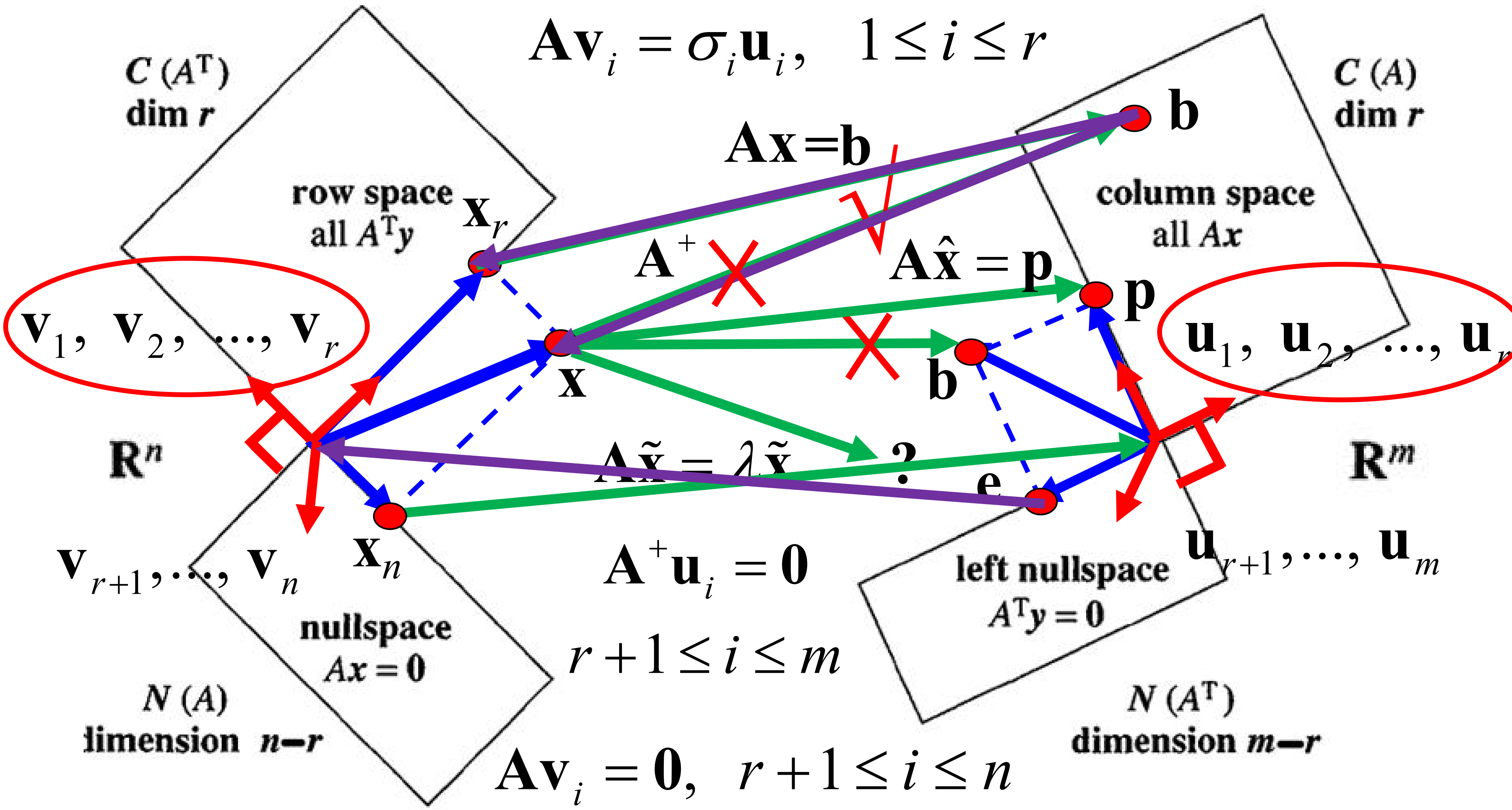
$N(\mathbf{R}^{\mathrm{T}})$ *basis*: $m$阶单位阵的最后$m$-$r$列

# 四个基本子空间



$C(A^T)$
dim $r$
row space
all $A^Ty$
$\mathbf{R}^n$
nullspace
$Ax = 0$
$N(A)$
dimension $n-r$
The big picture
$C(A)$
dim $r$
column space
all $Ax$
$\mathbf{R}^m$
left nullspace
$A^Ty = 0$
$N(A^T)$
dimension $m-r$

# 四个基本子空间——终结版



$\mathbf{Av}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, \quad 1 \le i \le r$
$C(A^T)$
dim $r$
row space
all $A^T y$
$\mathbf{x}_r$
$\mathbf{Ax=b}$
$\mathbf{b}$
$C(A)$
dim $r$
column space
all $Ax$
$\mathbf{A}^+$
$\mathbf{A\hat{x}=p}$
$\mathbf{p}$
$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$
$\mathbf{x}$
$\mathbf{b}$
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$
$\mathbf{R}^n$
$\mathbf{A\tilde{x}} = \lambda \mathbf{\tilde{x}}$
?
$\mathbf{e}$
$\mathbf{R}^m$
$\mathbf{x}_n$
$\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$
$\mathbf{A}^+ \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$
$\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$
left nullspace
$A^T y = 0$
nullspace
$Ax = 0$
$r+1 \le i \le m$
$N(A)$
dimension $n-r$
$N(A^T)$
dimension $m-r$
$\mathbf{Av}_i = \mathbf{0}, \quad r+1 \le i \le n$

# 四个基本子空间

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

主行的线性组合： $C(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=c[1\ 2\ \ 3]$ 维数为$r$

特解的线性组合 $N(\mathbf{A})=c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$ 维数为$n$-$r$

主列的线性组合： $C(\mathbf{A})=\mathrm{c}*1$ 维数为$r$

行向量$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ $\Longleftrightarrow$ $N(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=0$ 维数为$m$-$r$

# 四个基本子空间

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

主行的线性组合：$C(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=c[1\ 2\ \ 3]$ 维数为$r$

特解的线性组合 $N(\mathbf{A})=c_1\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ 维数为$n$-$r$

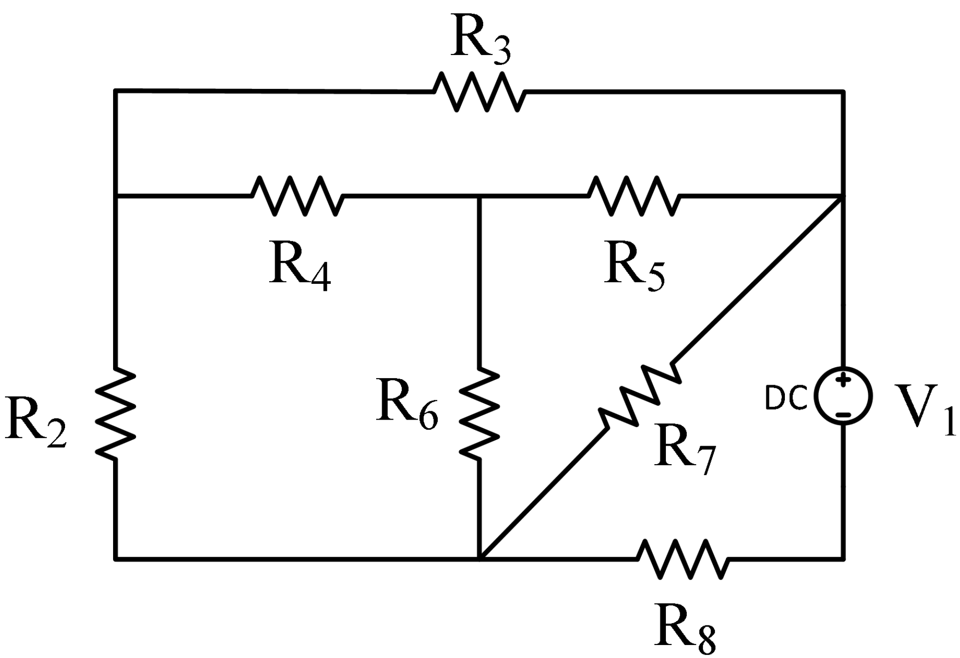
主列的线性组合：$C(\mathbf{A})=c\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ 维数为$r$

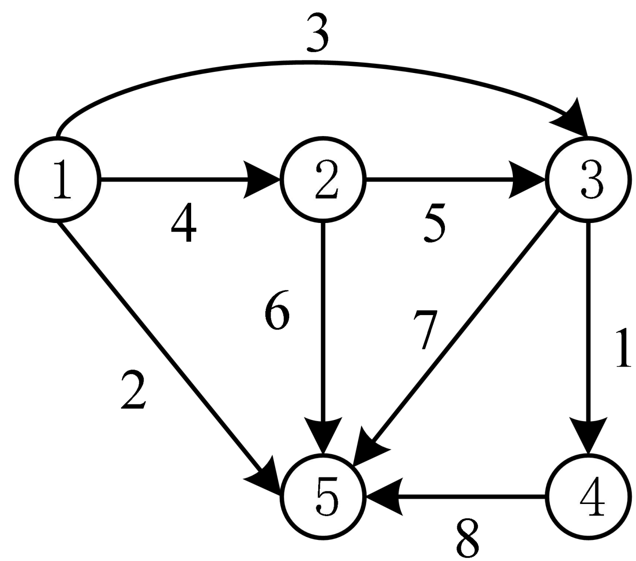
行向量$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ $\Longleftrightarrow$ $N(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=c[-2,1]^{\mathrm{T}}$ 维数为$m$-$r$

# 内容提要

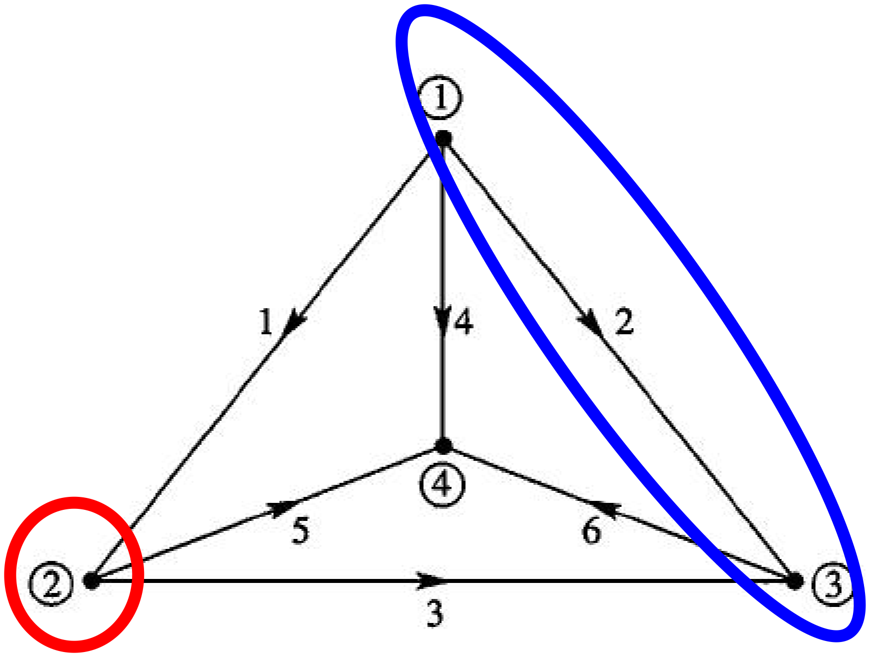
- 线性无关性
- 空间的基底与维数
- 四个基本子空间
- 应用举例：关联矩阵与电路

# 电路与图 (Graph)



# 关联矩阵 (Incidence Matrix)




$$
\begin{array}{c c c}
 & \text{node} & \\
 & \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} & \\
A= & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \text{edge}
\end{array}
$$

- 关联矩阵的行数和列数分别等于边数和节点数
- 关联矩阵的每一行只有两个非零元1和-1

# 关联矩阵的零空间

物理意义：节点间的电势差

$$
\begin{array}{c@{\quad}c}
\begin{array}{cccc} \text{node} & & & \\ ① & ② & ③ & ④ \end{array} & \\
A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \text{edge}
\end{array}
$$

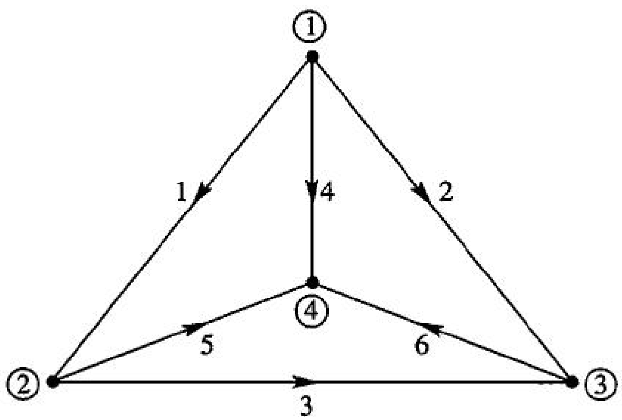
$$
\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow
$$

$$\dim N(\mathbf{A}) = n\text{-}r = 1$$

$$basis = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

# 关联矩阵的行空间




$$A=\begin{array}{c} \text{node} \\ \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \text{edge}$$

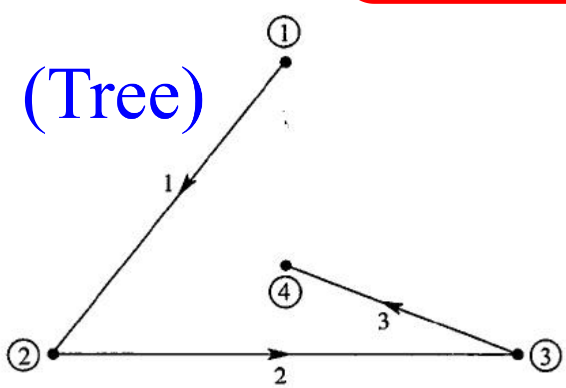
物理解释？

$$\dim C(\mathbf{A}^T) = r = 3$$

消除回路

三行是独立的

树 (Tree)




$$B=\begin{array}{c} \text{node} \\ \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \quad \text{edge}$$

关联矩阵共有$n$-1个独立的行；回路的存在意味着行之间的相关性

# 关联矩阵的列空间

$$A=\begin{array}{c} \text{node} \\ \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \quad \text{edge}$$

$$\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix} x_2-x_1 \\ x_3-x_1 \\ x_3-x_2 \\ x_4-x_1 \\ x_4-x_2 \\ x_4-x_3 \end{bmatrix}$$

$\dim C(\mathbf{A})$
$=r=n\text{-}1=3$

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\mathbf{0}$$

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

矛盾！

$$\boxed{\mathbf{Ax}=\mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x}=c\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}$$

# 关联矩阵的列空间

Ax沿任意回路的各分量之和为零（注意符号）

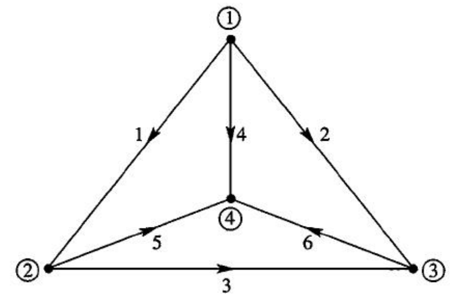
$$
\begin{array}{cc}
 & \text{node} \\
 & \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} \\
A= & \left[\begin{array}{cccc}
-1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
\quad \text{edge} \quad
\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}
$$

dim $C(\mathbf{A})$

$= r = n - 1 = 3$

- 关联矩阵的任意$n$-1列线性无关，从而构成$C(\mathbf{A})$的基
- 给定任意向量**b**，如何判断其是否在列空间内？

**b满足基尔霍夫电压定律 (KVL)**



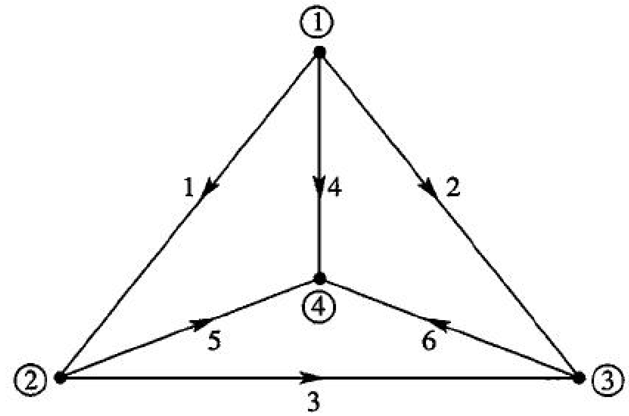
# 关联矩阵的左零空间

物理意义：流入任一节点的净电流为零 (KCL)

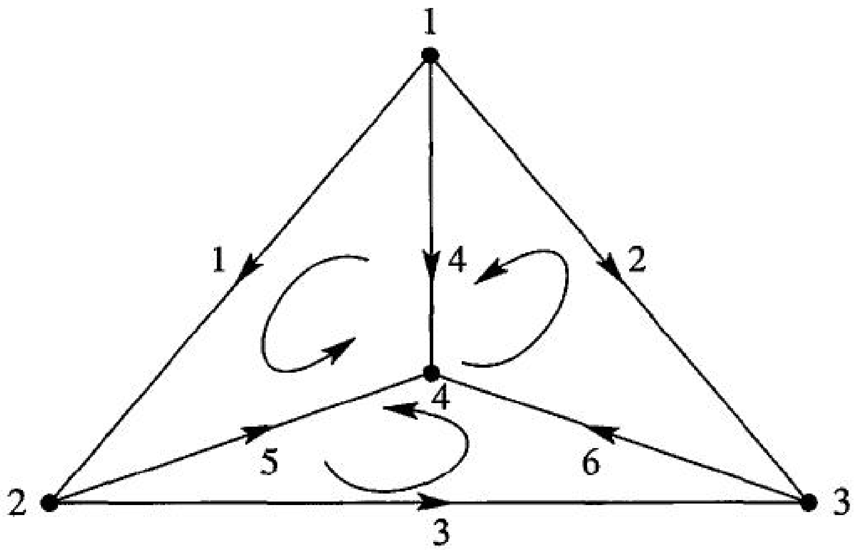
$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\mathbf{0} \qquad \dim N(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = m-r=6-3=3$$

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{\mathrm{T}}y=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 求A的左零空间即求满足KCL的支路电流
- 如何求出A的左零空间？——利用回路电流



# 关联矩阵的左零空间




$$\mathbf{y}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\quad \mathbf{y}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\quad \mathbf{y}_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

- 假设只有一个回路有电流，其他为0（符合KCL）
- 逆时针

# 无源电路的基本方程

节点电势

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

KCL

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y}=\mathbf{0}$$

电导矩阵

$$\mathbf{C}=diag\{c_1,c_2,\ldots,c_6\}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y}$$

$$\mathbf{e}=\mathbf{A}\mathbf{x}$$

欧姆定律

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{e}$$

$$x_2-x_1,\ x_3-x_2,\ldots \longrightarrow \mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_6\end{bmatrix}$$

任意两节点间的电势差

支路电流

谢谢大家！