概率论与数理统计期末考试答案(2018.1.12)

一、填空题(共 6 道小题，每小题 2 分，满分 12 分，把答案填在题中横线上)

1．设 A,B 为两个随机事件，且有 $P(\bar{A})=0.4, P(B)=0.4, P(\bar{B}|A)=0.5$，则 $P\left(\bar{B}|(A\cup B)\right)=$ $\frac{3}{7}$.

2．设某车间有三台机床，在一小时内三台机床不要求工人维修的概率分别为 0.9、0.8、0.85，假设三台机床是否需要维修是相互独立的，则一小时内三台车床至少有一台不需要维护的概率为 0.997 .

3．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布（$\lambda>0$），且已知 $E[(X-2)(X-3)]=2$，则 $\lambda=$ 2 .

4．设 $D(X)=25$，$D(Y)=36$，$\rho_{XY}=0.4$，则 $D(X+Y)=$ 85 .

5．设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，X 在 $(0,2\theta)$ 服从均匀分布，其中 $\theta>0$，则 $D(\bar{X})=$ $\frac{\theta^2}{3n}$.

6．设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则由切比雪夫不等式可知 $P\{|X-\mu|\geq 2\sigma\}\leq$ 0.25 .

二、选择题（共 6 道小题，每小题 2 分，满分 12 分，把所选项前的字母填在题后的括号内）

1．对任意事件 A、B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是（ D ）．

（A） $A\subset B$ （B） $\overline{B}\subset\overline{A}$ （C） $A\overline{B}=\Phi$ （D） $\overline{A}B=\Phi$

2．设随机变量 $X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，且 X 与 Y 相互独立，设 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$（ A ）.

（A） $N(0,5)$ （B） $N(0,-3)$ （C） $N(0,46)$ （D） $N(0,54)$

3．已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，令 $Y=-2X$，则 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 为（ D ）．

（A） $2f_X(-2y)$ （B） $f_X(-\frac{y}{2})$ （C） $-\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$ （D） $\frac{1}{2}f_X(-\frac{y}{2})$

4．设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x)$、$f_Y(y)$ 分别为 X、Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为（ A ）．

（A） $f_X(x)$ （B） $f_Y(y)$ （C） $f_X(x)f_Y(y)$ （D） $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

5．设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 X 的一个样本，则下列总体均值的估计量中，最有效的为（ C ）．

（A） $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{6}X_3+\frac{1}{3}X_4$ （B） $\frac{1}{9}X_1+\frac{1}{9}X_2+\frac{3}{9}X_3+\frac{4}{9}X_4$

（C） $\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{4}X_3+\frac{1}{4}X_4$ （D） $\frac{1}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{1}{5}X_3+\frac{2}{5}X_4$

6．在假设检验中，设 H_1 为备择假设，则（ C ）为犯第一类错误.

（A） H_1 正确，接受 H_1 （B） H_1 正确，拒绝 H_1

（C） H_1 不正确，接受 H_1 （D） H_1 不正确，拒绝 H_1

三 、解答下列各题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 仪器中有三个元件，它们损坏的概率都是 0.2，并且损坏与否相互独立. 当一个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.25，当两个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.6，当三个元件损坏时，仪器发生故障的概率为 0.95，当三个元件都不损坏时，仪器不发生故障. 求：（1）仪器发生故障的概率；（2）仪器发生故障时恰有二个元件损坏的概率.

参考解答：A表示“仪器出现故障”，B_i表示“有i个元件出现故障”，i=1, 2, 3.

（1） 由全概率公式知：$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$

$P(B_1)=3\times0.2\times0.8^2=0.384$ $P(B_2)=3\times0.2^2\times0.8=0.096$ $P(B_3)=0.2^3=0.008$

$P(A)=0.384\times0.25+0.096\times0.6+0.008\times0.95=0.1612$

（2） 由贝叶斯公式知：

$$P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{0.096\times0.6}{0.1612}=0.3573$$

2．一口袋中有 6 个球，在这 6 个球上分别标有数字-3，-3，1，1，1，2，从这袋中任取一球，设各个球被取到的可能性相同，以 X 表示取出的球上标有的数字，求 X 的分布律与分布函数.

参考解答: X可能取的值为-3，1，2，X的分布律为 $P(X=-3)=\frac{1}{3}$，$P(X=1)=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{1}{6}$.

分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-3;\\ \frac{1}{3}, & -3\le x<1;\\ \frac{5}{6}, & 1\le x<2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$

3．设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & 其它\end{cases}$，令 $Y=\begin{cases}2, X\le 1\\ X, 1<X<2\\ 1, X\ge 2\end{cases}$.

(1) 求 Y 的分布函数，(2) 求 $P\{X\le Y\}$

参考解答: (1)当 $y<1$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$；　（1 分）

当 $y\ge 2$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1$；　（2 分）

$1\le y<2$　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y\frac{1}{9}x^2dx=\frac{18+y^3}{27}$

因此Y的分布函数为:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \frac{18+y^3}{27}, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

(2) $P\{X\le Y\}=1-P\{X>Y\}$

$=1-P\{X\ge 2\}$

$=1-\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx$

$=\frac{8}{27}$

4．为了测定一台机床的质量，把它分解成 75 个部件来称量．假定每个部件的称量误差（单位：kg）服从区间（-1, 1）上的均匀分布，且每个部件称量误差相互独立，试求机床重量的总误差的绝对值不超过 10kg 的概率．（$\Phi(2)=0.9772$）

参考解答：设第 i 个部件称量误差为 X_i（i=1,2,⋯,75），则 $E(X_i)=0$，$D(X_i)=\dfrac{1}{3}$（2 分）

由中心极限定理知 $\sum_{i=1}^{75} X_i \sim N(0,25)$ (近似)，（4 分）

于是有 $P\left(\left|\sum_{i=1}^{75} X_i\right| \le 10\right) \approx \Phi\left(\dfrac{10-0}{5}\right)-\Phi\left(\dfrac{-10-0}{5}\right)=0.9544$．（8 分）

5．已知一批零件的长度 X(cm) 服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40cm，求μ的置信水平为 0. 95 的置信区间．

（$u_{0.025}=1.96, u_{0.05}=1.645, t_{0.025}(15)=2.1315, t_{0.05}(15)=1.7531$）

参考解答：由 $\bar{x}=40$，$n=16$，$\alpha=0.05$，$1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975$，$\sigma=1$，（2 分）

因为 $U=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$，令 $P\{|U|<u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$

因此 μ 的置信区间为 $\left(\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，（6 分） 代入数据得 μ 的置信区间为（39.51, 40.49）．（8 分）

四、解答下列各题（共 3 小题，每小题 12 分，共 36 分）

1．设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1,\\ 0, & 其\quad 他.\end{cases}$$

（1）求 (X,Y) 关于 X, 关于 Y 的边缘密度函数；（2） 判断 X 与 Y 是否相互独立；

(3) 求 $P\{X+Y\le 1\}$.

参考解答：（1）当 $0<x<1$ 时, $f_X(x)=\int_x^1 6xdy=6x(1-x)$，

故
$$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$
（3 分）

当 $0<y<1$ 时， $f_Y(y)=\int_0^y 6xdx=3y^2$，

故
$$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$
（6 分）

(2) 由 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, X与Y不相互独立．（8 分）

(3) $P(X+Y\le 1)=\int_0^{1/2}6xdx\int_x^{1-x}dy=\int_0^{1/2}6x(1-2x)dx=\dfrac{1}{4}$．（12 分）

2．已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\beta\alpha^{\beta}x^{-\beta-1}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$$

其中 $\alpha>0,\beta>1$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本.

（1）当 $\alpha=1$ 时，求 β 的矩估计量；

（2）当 $\beta=2$ 时，求 α 的极大似然估计量.

参考解答:

（1）当 $\alpha=1$ 时，总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\beta)=\begin{cases}\beta x^{-\beta-1}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$$ （2 分）

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}$$，（4 分）

令 $\frac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，

解得参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$；（6 分）

（2）当 $\beta=2$ 时，总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\alpha)=\begin{cases}2\alpha^{2}x^{-3}, & x>\alpha\\ 0, & x\le\alpha\end{cases}$$ （8 分）

极大似然函数为

$$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}2^{n}\alpha^{2n}(x_1x_2\cdots x_n)^{-3}, & x_i>\alpha\\ 0, & x_i\le\alpha\end{cases}$$ （10 分）

为使 $L(\alpha)$ 取最大值，只需在 $x_i\ge\alpha$ 时，

使 $2^{n}\alpha^{2n}(x_1x_2\cdots x_n)^{-3}$ 取最大值，即 α 取最大值，

$\hat{\alpha}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，因此 $\hat{\alpha}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$。（12 分）

3. 某纯净水生产厂用自动灌装机灌装纯净水，该自动灌装机正常灌装量 $X \sim N(18, 0.4^2)$，现测量该厂 9 个灌装样品的灌装量（单位：L）如下：

18. 0， 17. 6， 17. 3， 18. 2， 18. 1， 18. 5， 17. 9， 18. 1， 18. 3.

在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下，试问（1）该天灌装是否合格？（2）灌装量精度是否在标准范围内？

参考解答：(1) 检验：$H_0: \mu = 18 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 18$.(1 分)

检验统计量为 $T = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - 18)}{S}$，（2 分）

当 H_0 成立时，$T = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - 18)}{S} \sim t(n-1)$.

拒绝域为 $|t| = \left|\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - 18)}{s}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ （4 分）

$n = 9$，$\bar{x} = 18$，$s^2 = 0.1325$，$t = 0$，$t_{0.025}(8) = 2.3060$.

故接受 H_0，即认为该天灌装合格. （6 分）

（2）检验：$H_0: \sigma^2 \leq 0.4^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 > 0.4^2$.

检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{0.4^2}$，（8 分）

当 $\sigma^2 = 0.4^2$ 时 $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$.

故拒绝域为：$\dfrac{(n-1)s^2}{0.4^2} \geq \chi^2_\alpha(n-1)$. （10 分）

$n = 9$，$s^2 = 0.1325$，$\chi^2 = 6.625$，$\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$，

故接受 H_0，即认为灌装精度在标准范围内. （12 分）