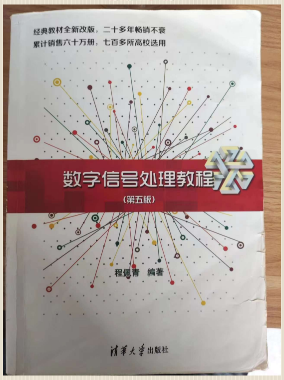
数字信号处理 I

Digital Signal Processing

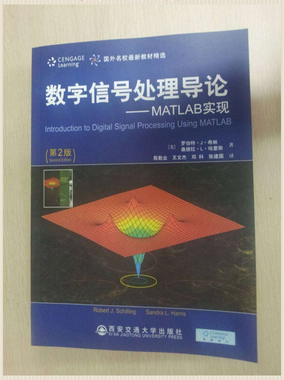
主讲教师:　王文杰
wjwang@xjtu.edu.cn
西一楼615房间

西安交通大学

教材



参考书



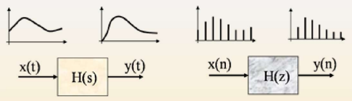
绪论

1. 数字信号处理的概念；
2. 数字信号处理的特点和应用；
3. 本课程介绍

数字信号处理的概念

- 信号处理（模拟，数字）

对信号进行加工/运算处理，以实现某种功能的需要。



这里的处理可以是：滤波、预测、估值、变换……

4

- 数字信号处理

数字信号处理——对时间上离散，幅值上量化的信号的加工运算处理，以实现某种需要的功能。

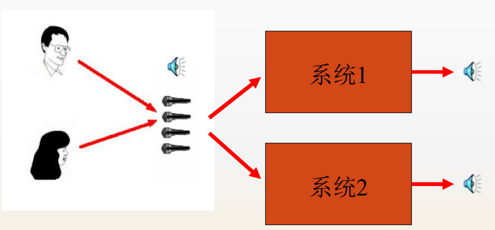
模拟信号处理和数字信号处理

早期的信号处理都是指**模拟信号的处理**，例如：由于多路通信中的频分系统的需要，很早就出现了的低通、带通滤波器，这些都是由电阻、电容和电感构成的模拟滤波器。而随着技术的发展，模拟处理的手段就不能满足需要了；另一方面，计算机的出现、发展以及高速元器件的问世，使得数字信号处理成为可能，并且迅速地发展起来。显然，数字信号处理是基于模拟信号处理的基础上发展起来的。因此，两者间有着密切的联系。

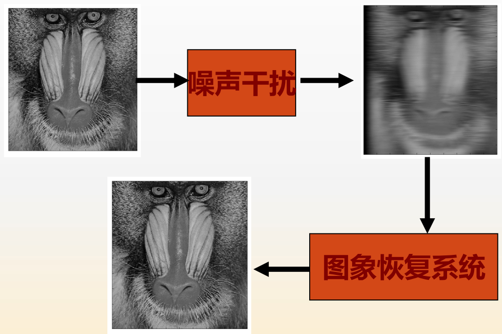
举例：一种数字信号处理的基本应用，可将虚线框内整体上看成一个模拟信号处理器。（输入输出均为模拟信号）

5

语音信号处理的示例



图象恢复系统示例



软件无线电平台

8

软件无线电平台产品

9

数字信号处理的特点和应用

特点

- **精度高**
  模拟： 达到 10^{-3} 就很不容易
  数字： 实现 10^{-5} 很平常，应用于高精度系统，测量系统。
- **可靠性高，稳定性好**
  模拟电路受温度和环境影响大；而数字系统基本不受环境影响。
- **灵活性好**
  可以同时处理多路信号；也可以在处理间隔中进行一些其他的处理。
  变更参数方便。
- **便于大规模集成，可以用计算机实现，软件定义系统。**

其它特点:

- 有限长的单位脉冲响应（Finite Impulse Response, FIR)。
- 可以用于甚低频滤波处理。
- 多维滤波用于二维图象处理。

应用

地震勘探、地震预报、雷达、水声、通信、语音信号处理、空间探测技术、遥感、生物医学电子等方面。随着超大规模集成电路技术的进一步发展，它的运用还将与日俱增，越来越广泛，越来越普及。

10

本课程介绍

本课程称为数字信号处理I，它是数字信号处理的基础篇，过去叫做数字滤波器，可见这里主要内容是数字滤波器。数字滤波器是对数字信号的滤波，这一学科方向近年来发展十分迅猛，应用非常广泛，是数字信号处理的基本内容之一。教材内容一共有七章：

第一二章　离散时间系统与z变换
第三章　离散傅立叶变换
第四章　快速傅立叶变换
第五章　数字滤波器结构
第六章　无限长单位脉冲响应滤波器
第七章　有限长单位脉冲响应滤波器
第八章　多抽样速率数字信号处理技术基础
第九章　数字滤波器实现中的有限字长效应

11

本课程的主要教学内容

因为我们在前序课程中已经学过一些离散系统、z变换和离散傅立叶变换的内容，这里仅用少量学时复习回顾，而从第三章至第九章将为本课程的主要教学内容。

绪论	(1学时)
第一章 采样与变换	(5学时)
第二章 离散傅里叶变换	(5学时)
第三章 快速傅里叶变换	(6学时)
第四章 数字滤波器结构	(3学时)
第五章 无限长单位脉冲响应滤波器	(5学时)
第六章 有限长单位脉冲响应滤波器	(7学时)
第七章 有限字长、采样量化与量化噪声	(4学时)

数字信号处理课程的理论性和实践性都很强，希望同学们能认真地学习掌握课程内容，努力做好有关计算机实验，并且认真对待完成课后习题作业。

12

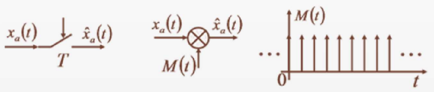
第一章　采样与变换　　主要内容:

本门课程内容主要涉及数字滤波器和其它一些数字信号处理的基本方法，而这些内容又都是建立在拉氏变换、傅氏变换、z 变换、DFT等基础之上的，这些内容是我们专业的基础知识，必须熟练牢固的掌握。为了今后的学习方便，我们有必要花费一定的课时将这部分内容回顾和复习。

13

1.1　采样

采样是由连续时间信号到离散时间信号的过渡桥梁，也是信号数字化处理的第一个环节。理想的采样模型如下图所示，它实际上是通过乘法器和周期冲激脉冲函数来实现的。



首先我们来研究周期冲激脉冲函数M(t)

$$M(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \qquad (1-1)$$

这样的周期脉冲信号可以用傅立叶级数展开，

$$a_m=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}M(t)e^{-jm\Omega_s t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-jm\Omega_s t}dt$$

14

$$a_m=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jm\Omega_s t}dt=\frac{1}{T} \quad\Rightarrow\quad M(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{jm\Omega_s t}$$

不同频率分量的组合表达式

$$M(t)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\Omega_s t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

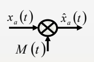
不同延时时域单位脉冲的组合表达式

采样输出信号是输入连续时间信号与周期冲激脉冲的乘积结果。

在讨论了周期冲激脉冲信号后，我们再来分析一下输入连续时间信号。对输入连续时间信号进行傅立叶变换

$$\begin{cases} X_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j\Omega t}dt \\ x_a(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \end{cases}$$

输出的离散时间信号：$\hat{x}_a(t)=x_a(t)\bullet M(t)$



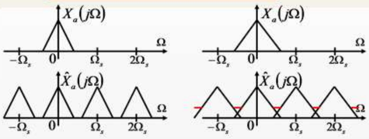
$$\therefore\quad \hat{X}_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(t)e^{-j\Omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)M(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\Omega_s t}e^{-j\Omega t}dt=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jm\Omega_s)$$

15

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jm\Omega_s)$$



由此，我们可以看到：一个连续信号经过采样后，它的频谱将会以采样频率Ω_s为间隔周期重复，即频谱产生周期延拓。

如果信号是实的、带限的，并且最高频谱不超过$\Omega_s/2$，也就是说，实信号的最高频率分量不超过采样频率的一半，那么采样后的信号频谱就不会产生掺混，就可以不失真还原恢复原来的连续信号。

$$X_a(j\Omega)=\begin{cases}X_a(j\Omega), & |\Omega|<\frac{\Omega_s}{2}\\ 0\quad, & |\Omega|\ge\frac{\Omega_s}{2}\end{cases}$$

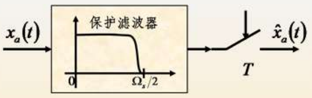
如果采样前的模拟信号最高频谱超过$\Omega_s/2$，那么采样后的频谱就会（就有可能）相互交叠，这就是频谱“混淆”现象。

16

因此，采样频率的一半$\Omega_s/2$也称为折叠频率，因为它好象一面镜子，信号频谱超过它时，就会被折叠回来，（就有可能）造成频谱的混淆。

奈奎斯特采样定理（Nyquist Rate）:要使实低通信号采样后能够不失真还原，采样频率必须大于两倍信号最高频率。

在实际工作中，为了避免频谱混淆发生，采样频率总是选得比两倍信号最高频谱更大一些，比如选到三倍或者更高。同时为了避免高于折叠频率的杂散频谱进入采样器造成频谱混淆，在采样器以前常常加一个保护性的前置低通滤波器（保护滤波器），阻止一切高于$\Omega_s/2$的频率分量进入，如图所示。



17

1.2 采样的恢复与内插公式

如果采样满足奈奎斯特采样定理，即信号最高频谱不超过折叠频率

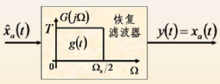
$$X_a(j\Omega)=\begin{cases}X_a(j\Omega), & |\Omega|<\frac{\Omega_s}{2}\\ 0\quad, & |\Omega|\ge\frac{\Omega_s}{2}\end{cases}$$

那么采样后的频谱就不会产生混叠，即 $\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jm\Omega_s)$

则有 $\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}X_a(j\Omega),\qquad |\Omega|<\Omega_s/2$

所以，我们可以将采样信号通过一个理想低通滤波器，只让基带频谱通过，滤除高于采样频率一半以上的高频分量。这样的理想低通滤波器的特性如图所示：

$$G(j\Omega)=\begin{cases}T, & |\Omega|<\Omega_s/2\\ 0, & |\Omega|\ge\Omega_s/2\end{cases}$$



18

采样信号通过这个滤波器后，

$$Y(j\Omega)=\hat{X}_a(j\Omega)G(j\Omega)=X_a(j\Omega)$$

由此可以在输出端得到恢复的原模拟信号 $y(t)=x_a(t)$

显然，这其中恢复滤波器G(jΩ)的特性非常重要，

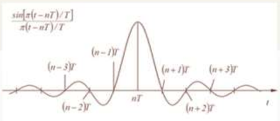
$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{T}{2\pi}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2}e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{\sin\frac{\Omega_s}{2}t}{\frac{\Omega_s}{2}t}=\frac{\sin\frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t}$$

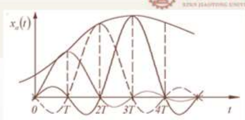
根据卷积公式，恢复低通滤波器的输出为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(\tau)\delta(\tau-nT)\right]g(t-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(\tau)g(t-\tau)\delta(\tau-nT)d\tau=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)g(t-nT)$$

而 $g(t-nT)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$ 则 $x_a(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$





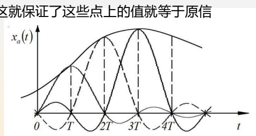
内插公式

所有时间点上的函数值均可以通过该内插公式求得。

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\frac{\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}\qquad(1-17)$$

如图所示，在每一个采样点上，由于只有该采样值所对应的内插函数不为零（内插函数的正交性），这就保证了这些点上的值就等于原信号在该采样点的值；

而其它时间点上的信号值则是由各采样值内插函数的波形伸延叠加而成。这也正是恢复滤波器的响应输出过程。



1.3 拉氏变换、傅氏变换与z变换

Z变换的定义：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz\qquad c\in(R_{x-},R_{x+})$$

为了研究拉氏变换和z变换之间的关系，我们也可以仿照第一节的做法，对采样信号进行双边拉氏变换：

$$\hat{X}_a(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)e^{-snT}$$

实际上，序列x(n)的值就等于采样点的值，即 $x(n)=x_a(nT)$ ，而

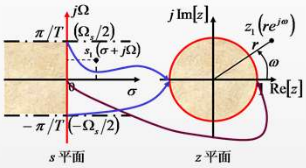
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\qquad(令\ z=e^{sT},则有)\qquad X(e^{sT})=\hat{X}_a(s)$$

$X\left(e^{sT}\right)=\hat{X}_a(s)$ → 这是由复变量s平面到复变量z平面的映射

映射关系 $z=e^{sT} \Rightarrow z=re^{j\omega} \quad re^{j\omega}=e^{(\sigma+j\Omega)T}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\Omega T} \quad s=\sigma+j\Omega$

所以有 $\begin{cases} r=e^{\sigma T} \\ \omega=\Omega T \end{cases}$

$\begin{cases} \sigma=0 \leftrightarrow r=1 \\ \sigma<0 \leftrightarrow r<1 \\ \sigma>0 \leftrightarrow r>1 \end{cases}$



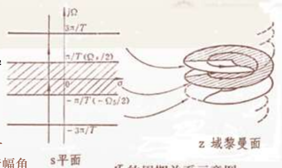
T：采样周期； Ω：s平面的频率； ω：z平面上的频率。

s 平面的虚轴 ⟺ z平面的单位圆

s 平面上沿虚轴每增加一个 $\frac{2\pi}{T}$ ⟺ z平面上沿单位圆旋转一周

22

这相当于将s平面"裁"成一条条宽为 $\frac{2\pi}{T}$ 的横带，重叠地映射到 z平面，如图所示。可以把z平面想象为以原点为中心的无穷重叠在一起的螺旋面，即无穷黎曼平面。



$z=e^{sT}$ 的周期关系示意图

当我们沿着s平面虚轴jΩ"移动"时，这一"移动"映射到z域的黎曼面上，则是随着幅角ω的增加，由一层螺旋面旋转到另一层螺旋面。

再回来对采样信号进行双边拉氏变换：

$$\hat{X}_a(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{jm\Omega_s t}e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-(s-jm\Omega_s)t}dt=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a(s-jm\Omega_s)$$

又因为 $X(z)\big|_{z=e^{sT}}=X\left(e^{sT}\right)=\hat{X}_a(s)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a(s-jm\Omega_s)$

23

$$s=j\Omega \Rightarrow X\left(e^{j\Omega T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega-jm\Omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a\left(j\Omega-jm\frac{2\pi}{T}\right)$$

采样序列在单位圆上的z变换就等于其理想采样信号的傅氏变换（即其频谱）。 考虑到数字域频率ω与模拟域频率Ω的关系 ω= ΩT，则

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X_a\left(j\frac{\omega-2\pi m}{T}\right)$$

可见单位圆上的z变换有其重要的意义，正如傅氏变换给出了信号的谱一样，单位圆上的z变换也给出了采样序列的频响。

这里定义单位圆上的z变换为"序列的傅氏变换"

$$\mathrm{F}[x(n)]=X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}$$

$$\mathrm{F}^{-1}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{jn\omega}d\omega$$

24

最后，我们总结一下拉氏变换、傅氏变换、z变换和序列的傅氏变换之间的关系:

- 序列的傅氏变换是单位圆上的z变换，所以是z变换的特殊形式;
- z变换可以看作是序列傅氏变换(DTFT)的推广。（$z=e^{j\omega}$）
- 采样序列的傅氏变换(DTFT)是原信号傅氏变换(FT)谱的周期延拓，在满足奈奎斯特定理时，两者相同。
- 采样序列的z变换是采样信号的拉氏变换从s平面到z平面的映射:

$$\hat{X}_a(s)=X\left(e^{sT}\right) \qquad z=e^{sT}$$

DTFT

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

FT

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

25

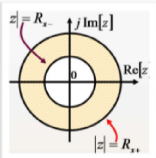
1.4 z变换的收敛域

序列的z变换 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$ 并不一定对任何z值都收敛。

z平面上满足级数收敛的区域就称为“收敛域”。级数一致收敛的条件是绝对可积。因此，z平面上的收敛域应满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|<\infty$$

$$\because \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)z^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|\left|z\right|^{-n}<\infty$$



所以，这显然对|z|的取值范围有了限制，只有在这一范围的|z|值才能满足绝对可积条件。

$$R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

26

讨论四种序列的情况

- 有限长序列 $x(n)=\begin{cases}x(n), & n_1\le n\le n_2\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n} \qquad 0<|z|<\infty$$

如果对n_1和n_2有一定限制的话，收敛域可以扩大

$n_1\ge 0, \quad 0<|z|\le\infty$

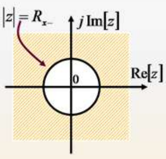
$n_2\le 0, \quad 0\le|z|<\infty$

- 右边序列 $x(n)=\begin{cases}x(n), & n\ge n_1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad R_{x-}<|z|<\infty$$

对于“因果序列”而言，因其$n_1=0$，在z变换级数中无z的正幂项，收敛域可包括闭域∞，即

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad R_{x-}<|z|\le\infty$$



例如：指数序列 $x(n)=a^nu(n)$ 就是一个因果序列

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a|$$

27

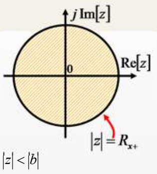
- 左边序列 $x(n)=\begin{cases}x(n), & n\le n_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x(n)z^{-n}\qquad |z|<R_{x+}$$

例如：左边指数序列 x(n)=b^nu(-n)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}b^nz^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{0}(b^{-1}z)^{-n}=\sum_{m=0}^{\infty}(b^{-1}z)^{m}=\frac{1}{1-b^{-1}z}\qquad |z|<|b|$$



- 双边序列

一个双边序列可以看作一个左边序列和一个右边序列之和，因此双边z变换的收敛域就是这两个序列z变换的公共收敛区间。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=X_1(z)+X_2(z)$$

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_1}x(n)z^{-n}\qquad |z|<R_{x+}$$

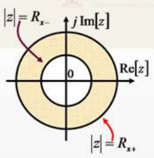
$$X_2(z)=\sum_{n=n_1+1}^{\infty}x(n)z^{-n}\qquad |z|>R_{x-}$$

28

如果$R_{x+}>R_{x-}$，则存在公共收敛区间，X(z)有收敛域

$$X(z)=X_1(z)+X_2(z)\qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

如果$R_{x+}<R_{x-}$，则无公共收敛区间，X(z)无收敛域，X(z)不存在。

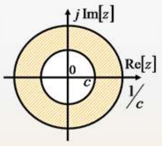


例如：x(n)=$c^{|n|}$，c为实数，这是一个双边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}c^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}c^nz^{-n}$$

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}c^{-n}z^{-n}=\frac{cz}{1-cz},\qquad |z|<1/|c|$$

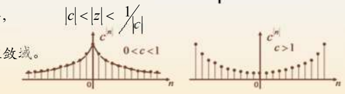
$$X_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c^nz^{-n}=\frac{1}{1-cz^{-1}},\qquad |z|>|c|$$



若|c|<1，则存在公共收敛域

$$X(z)=\frac{cz}{1-cz}+\frac{1}{1-cz^{-1}},\qquad |c|<|z|<1/|c|$$

若|c|≥1，则无公共收敛域。z变换不收敛。



29

1.5 系统函数

一个线性时不变离散系统可以用它的单位脉冲响应h(n)来表示，即

$$y(n)=x(n)*h(n)\quad\Leftrightarrow\quad Y(z)=X(z)H(z)\qquad H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

这个H(z)就定义为系统函数，它是单位脉冲响应的z变换

$$\begin{cases}H(z)=Z[h(n)]\\ h(n)=Z^{-1}[H(z)]\end{cases}$$

- 因果系统

因果系统的充要条件是：$h(n)\equiv 0\qquad n<0$

所以，因果系统的系统函数H(z)具有包括∞点的收敛域

$$R_-<|z|\le\infty$$

30

稳定系统

稳定系统的单位脉冲响应h(n)必须满足绝对可积条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

而 $H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$，当$|z|=1$时，有 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)||z^{-n}|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

所以稳定系统的系统函数H(z)必须在单位圆上收敛，也即 $H(e^{j\omega})$收敛。

因果稳定系统

因果稳定系统是最普遍、最重要的一种系统，它的系统函数必须在从单位圆到∞的整个领域收敛，即

$$1\le|z|\le\infty$$

也即，系统函数的全部极点必须在单位圆以内。

差分方程与系统函数

一个线性时不变的离散系统也可以用差分方程来表示，N阶差分方程的一般形式为

$$y(n)+\sum_{i=1}^{N}b_i y(n-i)=\sum_{i=0}^{N}a_i x(n-i)$$

考虑零状态情况，对式子两端取z变换

$$Y(z)+\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}Y(z)=\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}X(z)\ \Rightarrow\ Y(z)\left[1+\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}\right]=X(z)\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}$$

所以，系统函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{N}a_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N}b_i z^{-i}}=A\frac{\prod_{i=1}^{N}(1-c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1-d_i z^{-1})}$$

用系统函数H(z)表达一个系统时，H(z)的收敛域对确定系统的性质是很重要的。

例1：已知系统函数为 $H(z)=\frac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)}$ $\quad 10<|z|\le\infty$

求系统的单位脉冲响应及系统性质。

$$H(z)=\frac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)}=\frac{-9.5z}{(z-0.5)(z-10)}=\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-10}$$

收敛域包括∞点，所以是因果系统。但是单位圆不在收敛域内，因此系统是不稳定的。

$$h(n)=Z^{-1}[H(z)]=\begin{cases}\mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-0.5},0.5\right]-\mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-10},10\right], & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$$h(n)=0.5^n u(n)-10^n u(n)$$

可见$10^n u(n)$是发散的。

例2：系统函数不变，但收敛域不同

$$H(z)=\frac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)} \qquad 0.5<|z|<10$$

收敛域是包括单位圆而不包括∞的有限环域，因此可以判断系统虽然符合稳定要求，但是非因果的。

$$H(z)=\frac{0.95}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z)}=\frac{-9.5z}{(z-0.5)(z-10)}=\frac{z}{z-0.5}-\frac{z}{z-10}$$

$$H(z)z^{n-1}=\frac{-9.5z^n}{(z-0.5)(z-10)}=\frac{z^n}{z-0.5}-\frac{z^n}{z-10}$$

注意到极点z=10在积分围线以外，但要考虑n<0时出现在z=0处的n阶极点，因此

$$h(n)=\begin{cases}\mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-0.5},0.5\right], & n\ge 0\\ \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-0.5},0.5\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-0.5}-\frac{z^n}{z-10},0\right], & n<0\end{cases}$$

34

$$h(n)=\left.\begin{cases}0.5^n & n\ge 0\\ 0.5^n-0.5^n+10^n & n<0\end{cases}\right\}=0.5^n u(n)+10^n u(-n-1)$$

其中 $\mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-0.5}-\frac{z^n}{z-10},0\right]=\frac{1}{(-n-1)!}\cdot\frac{d^{-n-1}}{dz^{-n-1}}\left[\frac{1}{z-0.5}-\frac{1}{z-10}\right]\Big|_{z=0}$

$$=(-1)^{-n-1}(z-0.5)^{-[(-n-1)+1]}\Big|_{z=0}-(-1)^{-n-1}(z-10)^{-[(-n-1)+1]}\Big|_{z=0}$$

$$=-0.5^n+10^n \qquad n<0$$

由于存在u(-n-1)项，因此系统是非因果的。这里不难证明h(n)是绝对可积的，所以仍然符合稳定条件。以上两例可以看到，**同一个系统函数，由于收敛域不同，它们所代表的系统就完全不同。**

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_k \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1},z_k\right]$$

$$\mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1},z_k\right]=(z-z_k)\cdot X(z)z^{n-1}\Big|_{z=z_k}$$

$$\mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1},z_k\right]=\frac{1}{(N-1)!}\cdot\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\left[(z-z_k)^N X(z)z^{n-1}\right]_{z=z_k}$$

35