

第九讲 特征值分析方法的应用

贺丽君

信息与通信工程学院

Email: lijunhe@mail.xjtu.edu.cn

2023-04

内容提要

- Markov矩阵及其性质
 - 应用举例：Google 网页排名算法
-

内容提要

- Markov 矩阵及其性质
 - 应用举例: Google 网页排名算法
-

Markov矩阵

稳态与收敛
速度

➤ 人口迁移问题

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_\infty = ?$$

$$\mathbf{A}^k \mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_\infty, \quad k > ?$$

Markov矩阵:

- \mathbf{A} 的每一个元素均为非负实数
- \mathbf{A} 的每一列元素之和等于1



每个列向量
称为概率
向量

Markov矩阵的性质

- 若 A 为 Markov 矩阵, 且 u_0 为一非负向量, 则 $u_1 = Au_0$ 为非负向量
- 若 A 为 Markov 矩阵且非负向量 u_0 的各元素之和等于 1, 则 $u_1 = Au_0$, $u_2 = A^2u_0$, \dots , $u_k = A^k u_0$ 的各元素之和都等于 1

$$[1, 1, \dots] A = [1, 1, \dots] \Rightarrow [1, 1, \dots] Au_0 = [1, 1, \dots] u_0 = 1$$
$$[1, 1, \dots] u_1 = 1$$

Markov矩阵的性质

- 若 A 为 Markov 矩阵, 且 u_0 为一非负向量, 则 $u_1 = Au_0$ 为非负向量
- 若 A 为 Markov 矩阵且非负向量 u_0 的各元素之和等于 1, 则 $u_1 = Au_0$, $u_2 = A^2u_0$, ..., $u_k = A^ku_0$ 的各元素之和都等于 1
- 如果 A 是正的 Markov 矩阵 (各元素大于 0, 且每一列元素之和等于 1), 则 $\lambda=1$ 是唯一的模为 1 的特征值, 其代数重数和几何重数均为 1, 与该特征值对应的特征向量各分量均大于 0; 其余所有特征值的模均小于 1

$A - I$ 各行向量相加为零 \Rightarrow 行向量线性相关

—— $\det(A - I) = 0 \Rightarrow (A - \lambda I) x = 0$ 在 $\lambda=1$ 时, 有非零解 ——

正Markov矩阵

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_k &= \mathbf{A}^k \mathbf{u}_0 \\ &= c_1 (\lambda_1)^k \mathbf{x}_1 + c_2 (\lambda_2)^k \mathbf{x}_2 + \dots + c_n (\lambda_n)^k \mathbf{x}_n\end{aligned}$$

假设上式中的各项满足：

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

如果 \mathbf{A} 是正Markov矩阵，则：

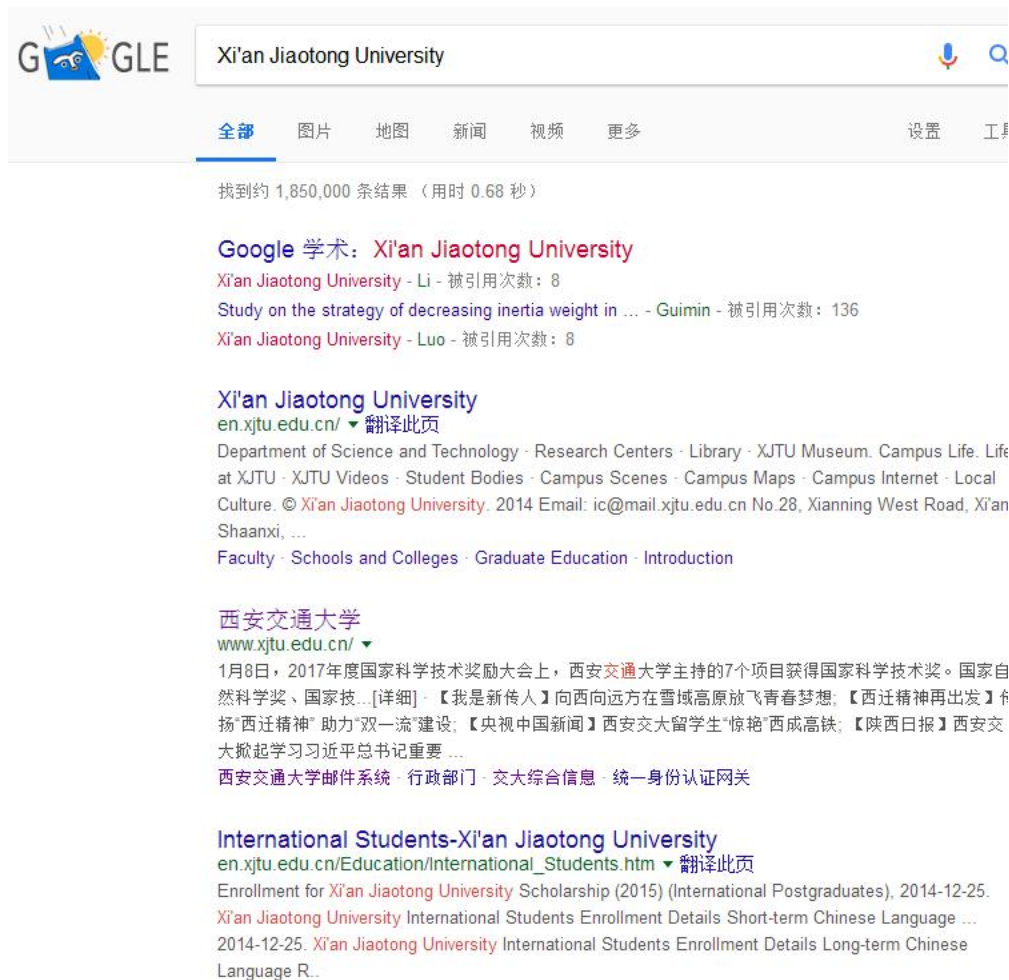
$$\mathbf{u}_k \rightarrow c_1 \mathbf{x}_1, \quad k \rightarrow \infty$$

最大特征值所对应的特征向量决定稳态，稳态与初值无关；第二大的特征值控制收敛速度

内容提要

- Markov矩阵及其性质
 - 应用举例：Google 网页排名算法
-

网页排名



Google 搜索: Xi'an Jiaotong University

全部 图片 地图 新闻 视频 更多 设置 工具

找到约 1,850,000 条结果 (用时 0.68 秒)

Google 学术: Xi'an Jiaotong University
Xi'an Jiaotong University - Li - 被引用次数: 8
Study on the strategy of decreasing inertia weight in ... - Guimin - 被引用次数: 136
Xi'an Jiaotong University - Luo - 被引用次数: 8

Xi'an Jiaotong University
en.xjtu.edu.cn/ ▼ 翻译此页
Department of Science and Technology · Research Centers · Library · XJTU Museum · Campus Life · Life at XJTU · XJTU Videos · Student Bodies · Campus Scenes · Campus Maps · Campus Internet · Local Culture · © Xi'an Jiaotong University. 2014 Email: ic@mail.xjtu.edu.cn No.28, Xianning West Road, Xi'an Shaanxi, ...
Faculty · Schools and Colleges · Graduate Education · Introduction

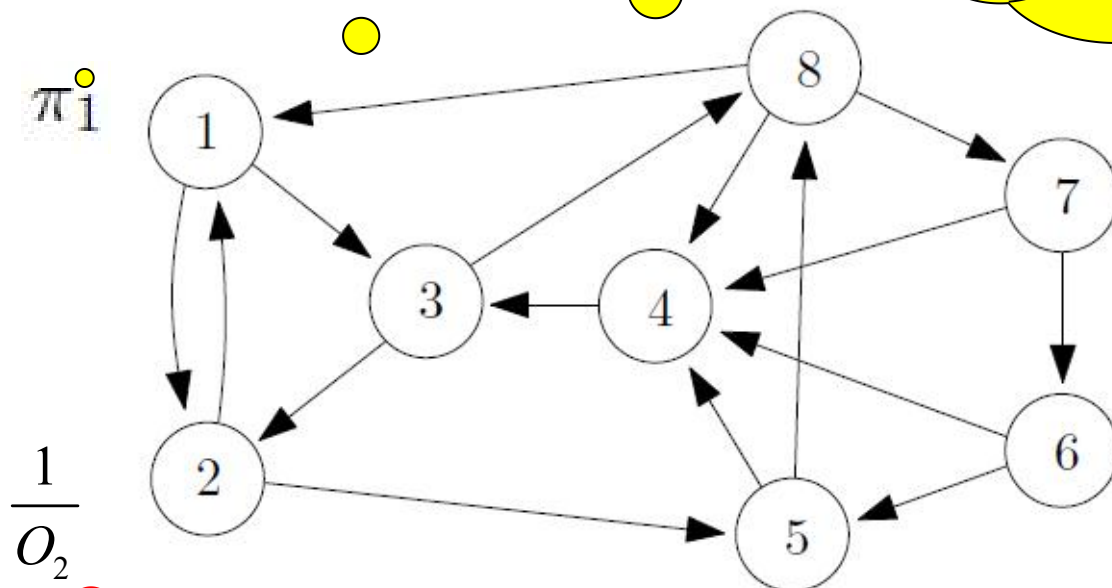
西安交通大学
www.xjtu.edu.cn/ ▼
1月8日, 2017年度国家科学技术奖励大会上, 西安交通大学主持的7个项目获得国家科学技术奖。国家自然科学奖、国家技...[详细] · 【我是新传人】向西向远方在雪域高原放飞青春梦想; 【西迁精神再出发】弘扬“西迁精神” 助力“双一流”建设; 【央视中国新闻】西安交大留学生“惊艳”西成高铁; 【陕西日报】西安交大掀起学习习近平总书记重要 ...
西安交通大学邮件系统 · 行政部门 · 交大综合信息 · 统一身份认证网关

International Students-Xi'an Jiaotong University
en.xjtu.edu.cn/Education/International_Students.htm ▼ 翻译此页
Enrollment for Xi'an Jiaotong University Scholarship (2015) (International Postgraduates), 2014-12-25.
Xi'an Jiaotong University International Students Enrollment Details Short-term Chinese Language ...
2014-12-25. Xi'an Jiaotong University International Students Enrollment Details Long-term Chinese Language R...

- 网页内容与搜索关键词的相关性 (Relevance Score)
- 网页本身的重要性 (Importance Score)

Google PageRank算法

链接到该网页的
其他网页越重要，
该网页越重要



$$\pi_1 = \sum_{j \rightarrow 1} \frac{\pi_j}{O_j}$$

$$\pi_1 = 0\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + 0\pi_3 + 0\pi_4 + 0\pi_5 + 0\pi_6 + 0\pi_7 + \frac{1}{3}\pi_8$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + 0\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 + 0\pi_4 + 0\pi_5 + 0\pi_6 + 0\pi_7 + 0\pi_8$$

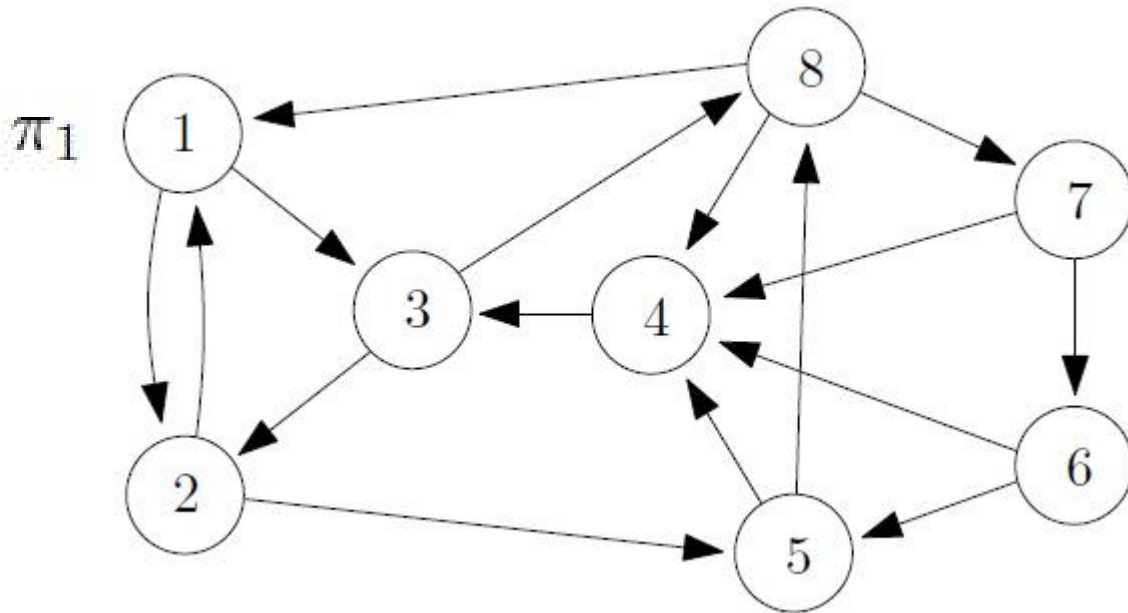
$$\vdots \quad \frac{1}{O_5}$$

$$\pi_8 = 0\pi_1 + 0\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 + 0\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_5 + 0\pi_6 + 0\pi_7 + 0\pi_8$$

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{H}$$

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{O_i}, & i \rightarrow j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Google PageRank算法



$$\pi_1 = \sum_{j \rightarrow 1} \frac{\pi_j}{O_j}$$

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{H}$$

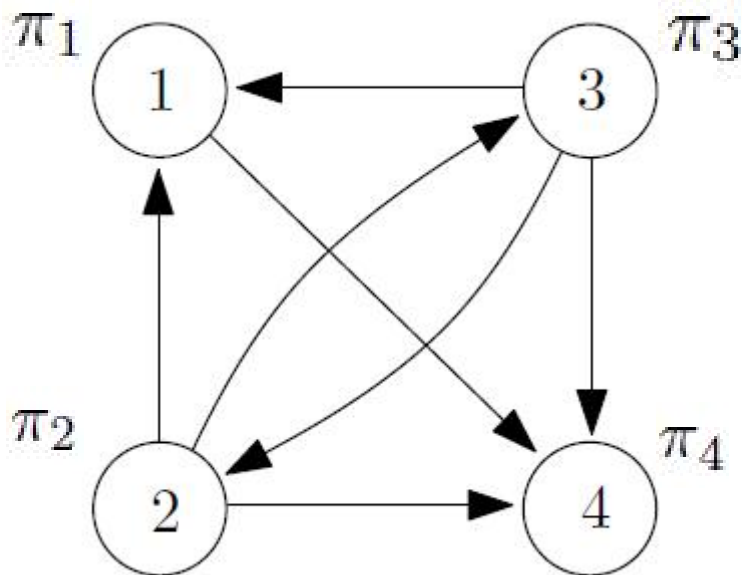
$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{O_i}, & i \rightarrow j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Google PageRank算法

一定存在这样的向量 π 么?

$$\pi^T = \pi^T \mathbf{H}$$



$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(\pi_2 + \pi_3) = \pi_1 \\ \frac{1}{3}\pi_3 = \pi_2 \\ \frac{1}{3}\pi_2 = \pi_3 \\ \pi_1 + \frac{1}{3}(\pi_2 + \pi_3) = \pi_4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \pi_1 &= 0 \\ \pi_2 &= 0 \\ \pi_3 &= 0 \\ \pi_4 &= 0 \end{aligned}$$

Google PageRank算法

H^T 应为正
Markov 矩阵

$$\pi^T = \pi^T H \quad \longrightarrow \quad \pi = H^T \pi$$

- 1、 H^T 具有特征值 1
- 2、 π 是与 1 对应的 **唯一** 特征向量

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



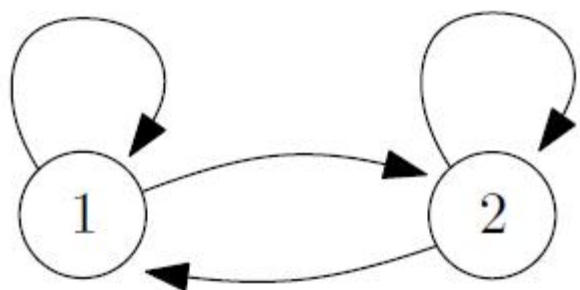
$$\hat{H} = H + \frac{1}{N}(\mathbf{w}\mathbf{1}^T)$$

$$w_i = \begin{cases} 1, & i \text{ is a dangling node} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Google PageRank算法

H^T 不是正
Markov矩阵

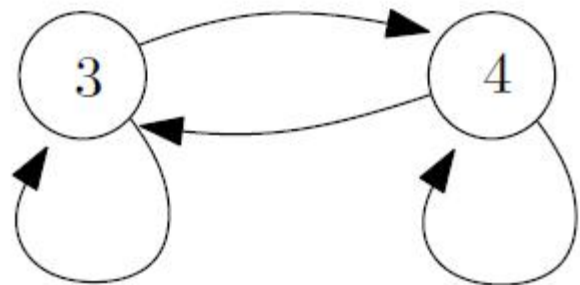


$$H = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

解不唯一:

$$\pi^* = [0.5 \ 0.5 \ 0 \ 0]^T$$

$$\pi^* = [0.15 \ 0.15 \ 0.35 \ 0.35]^T$$



$$\hat{H} = H + \frac{1}{N}(\mathbf{w}\mathbf{1}^T) \quad \Rightarrow \quad G = \theta \hat{H} + (1 - \theta) \frac{1}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

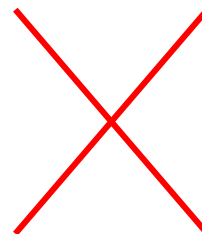
Google PageRank算法

正Markov
矩阵

$$\pi^T = \pi^T \mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \pi^T = \pi^T \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad \pi = \mathbf{G}^T \pi$$

如何求解 π ?

$$(\mathbf{G}^T - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

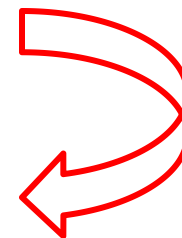


如果 \mathbf{A} 是正Markov矩阵, 则:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{u}_0 \rightarrow c_1 \mathbf{x}_1, \quad k \rightarrow \infty$$

迭代算法:

$$\pi[k] = \mathbf{G}^T \pi[k-1]$$



谢谢大家！
