第二节 0° 根轨迹及参量根轨迹绘制

一、0^o等相角根轨迹的绘制规则

当根轨迹增益k_g为负数($-\infty<k_g<0$)时，绘制的根轨迹称为0^o等相角根轨迹。根轨迹满足的幅值条件和相角条件如下:

$$\frac{|k_g|\prod_{j=1}^{m}|(s+z_j)|}{\prod_{i=1}^{n}|(s+p_i)|}=1$$

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s+z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s+p_i)=2k\pi,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

与180^o等相角根轨迹的幅值条件和相角条件相比较，两者的幅值条件相同，而相角条件不同。与相角条件有关的一些绘制规则是不同的，需要调整。

需要调整的规则：

- **根轨迹的渐近线**

渐近线的倾角为：$\varphi=\dfrac{2k\pi}{n-m}, k=0,1,2,\ldots n-m-1$

渐近线与实轴的交点：不变

- **实轴上的根轨迹**

实轴上的某一区域，若其右方开环零点和极点个数之和为偶数（包括0），则该区域必是根轨迹。

- **渐近线的出射角和入射角**

根轨迹上开环极点$-p_k$处的出射角为：

$$\theta_{pk}=\sum_{j=1}^{m}\angle(p_k+z_j)-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\angle(p_k+p_i)$$

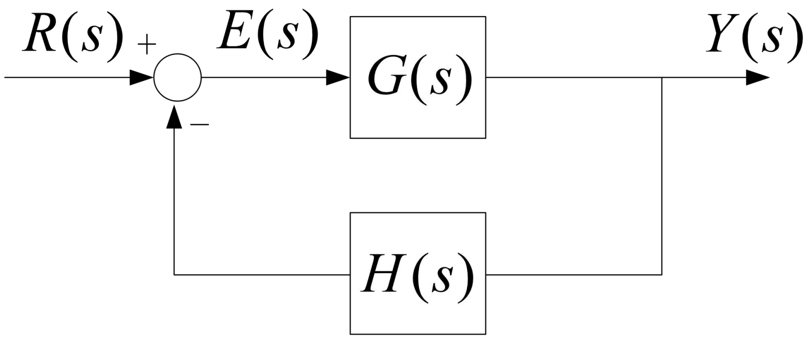
根轨迹上开环极点-z_k处的入射角为:

$$\theta_{zk} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} \angle(z_k + z_j) + \sum_{i=1}^{n} \angle(z_k + p_i)$$

二、参量根轨迹

上面介绍的根轨迹的基本绘制规则，是以根轨迹增益k_g作为参变量而得出的，这种情况在实际系统中是最常见的。但有时也需要绘制除根轨迹增益k_g之外的其它参量（比如校正环节的参数，开环零点和极点等）作为参变量时的根轨迹。这种根轨迹称为参量根轨迹，又称为广义根轨迹。

负反馈控制系统的方块图为：



开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

假设取其中一个开环极点p作为参变量，考虑k_g为常量。下面讨论p作为参变量时根轨迹的画法。

系统的闭环特征方程（根轨迹方程）为：

$$\frac{k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{(s+p)\prod_{i=1}^{n-1}(s+p_i)}=-1$$

变形得：
$$\frac{p\prod_{i=1}^{n-1}(s+p_i)}{s\prod_{i=1}^{n-1}(s+p_i)+k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}=-1$$

$$\boxed{\frac{k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{(s+p)\prod_{i=1}^{n-1}(s+p_i)}=-1}$$

$$\frac{\boxed{p}\prod_{j=1}^{n-1}(s+ze_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+pe_i)}=-1$$

上式称为等效根轨迹方程。其等式左边部分相当于某一等效系统的开环传递函数，参变量p称为等效根轨迹增益。z_{ej}和p_{ei}分别称为等效开环零点和开环极点。

说明：

- 等效开环传递函数，其开环零点和开环极点与原系统的开环零点和开环极点是不同的。

$$\frac{p\prod_{j=1}^{n-1}(s+ze_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+pe_i)}=-1$$

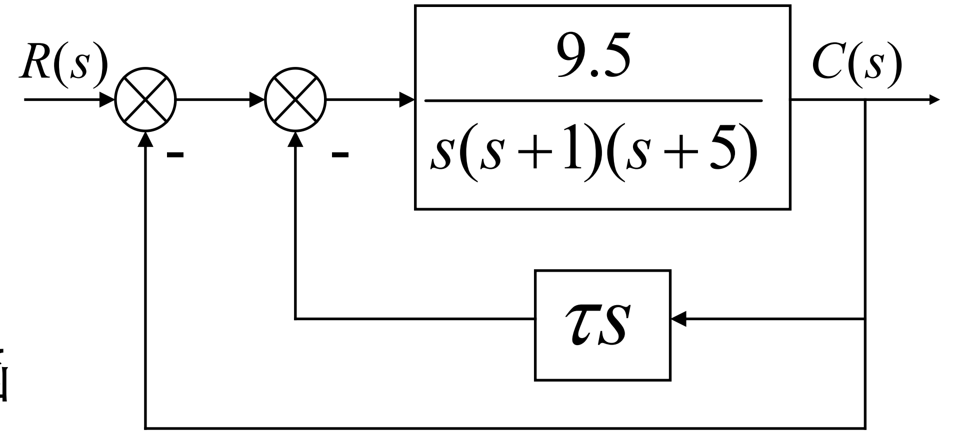
- 等效系统与原系统具有相同的闭环极点。

- 用前面介绍的根轨迹绘制的基本规则，可以绘制等效根轨迹增益 p=0~±∞变化时等效系统的根轨迹。由于等效系统与原系统有相同的闭环极点，故该根轨迹就是原系统参量p的参量根轨迹。

绘制参量根轨迹的步骤

- 列出原系统的闭环特征方程。
- 以闭环特征方程中不含参量p的各项除以特征方程，得等效系统的根轨迹方程。该方程中原系统的参变量p即为等效系统的根轨迹增益。
- 根据根轨迹绘制规则，可绘制等效系统的根轨迹，即为原系统的参量根轨迹。

[例]：系统方块图如图所示，绘制以τ为参变量的根轨迹。



解：1. 先求等效开环传递函数。此时系统特征方程为：

$$1+G_k(s)=1+\frac{9.5(1+\tau s)}{s(s+1)(s+5)}=0,\quad \Phi(s)=\frac{9.5}{s(s+1)(s+5)+9.5(1+\tau s)}$$

$$\Rightarrow s(s+1)(s+5)+9.5(1+\tau s)=0 \Rightarrow s^3+6s^2+5s+9.5+9.5\tau s=0$$

$$\Rightarrow 1+\frac{9.5\tau s}{s^3+6s^2+5s+9.5}=0$$

令$\tau^*=9.5\tau$，等效开环传函为

$$G_k^*=\frac{\tau^* s}{s^3+6s^2+5s+9.5}=\frac{\tau^* s}{(s+5.4)(s+0.3-j1.292)(s+0.3+j1.292)}$$

2.绘制参量根轨迹

$$G_k^* = \frac{\tau^* s}{(s+5.4)(s+0.3-j1.292)(s+0.3+j1.292)}$$

① 开环极点为-5.4、-0.3±j1.292，开环零点为0。

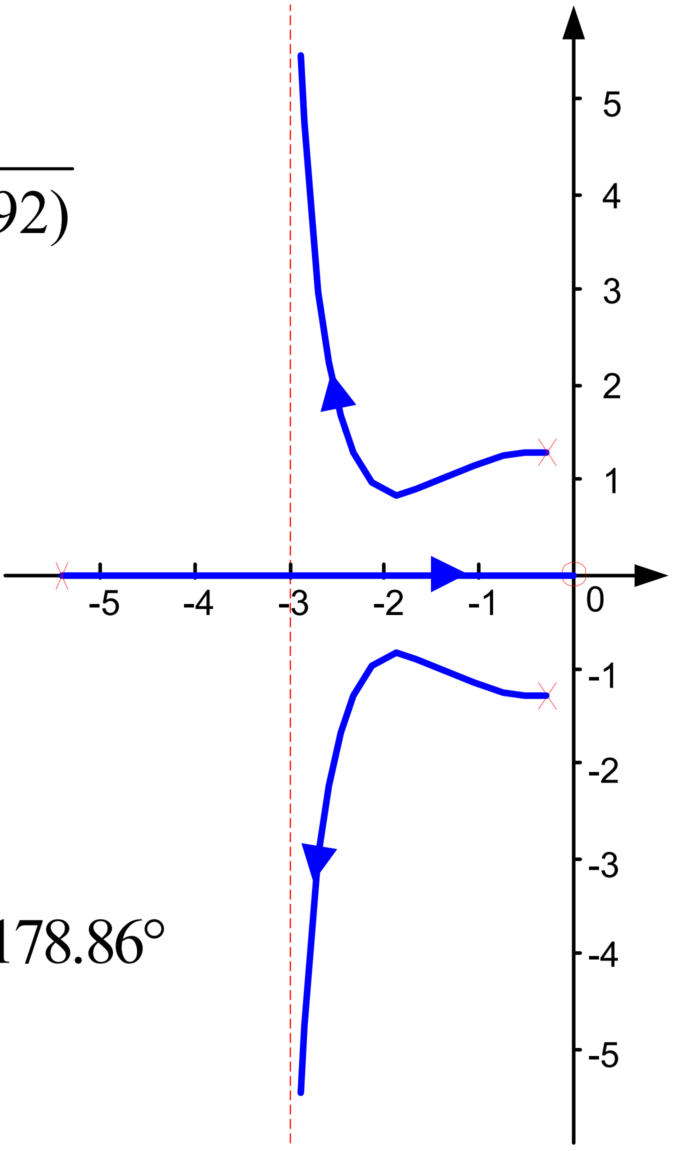
② 实轴根轨迹：[−5.4，0]

③ 渐近线2条：$\sigma=-3$，$\theta=\pm 90°$

④ 出射角：

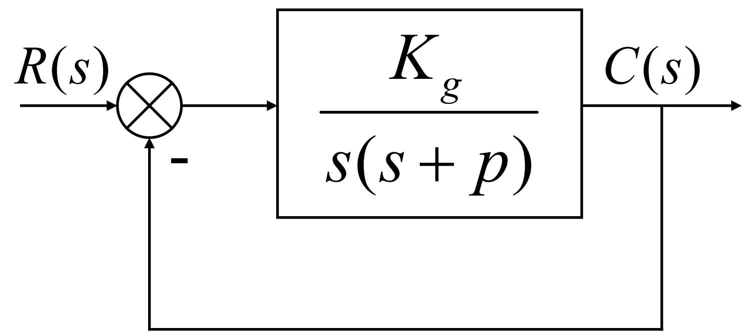
$$\theta_{2c}=\pi+(\pi-\mathrm{tg}^{-1}\frac{1.292}{0.3})-\mathrm{tg}^{-1}\frac{1.292}{5.1}-90°=178.86°$$

$$\theta_{3c}=-178.86°$$



当系统有两个参数变化时，所绘出的根轨迹称为根轨迹簇。

[例]系统如右。试绘制K_g和p分别从零变化到无穷大时的根轨迹。

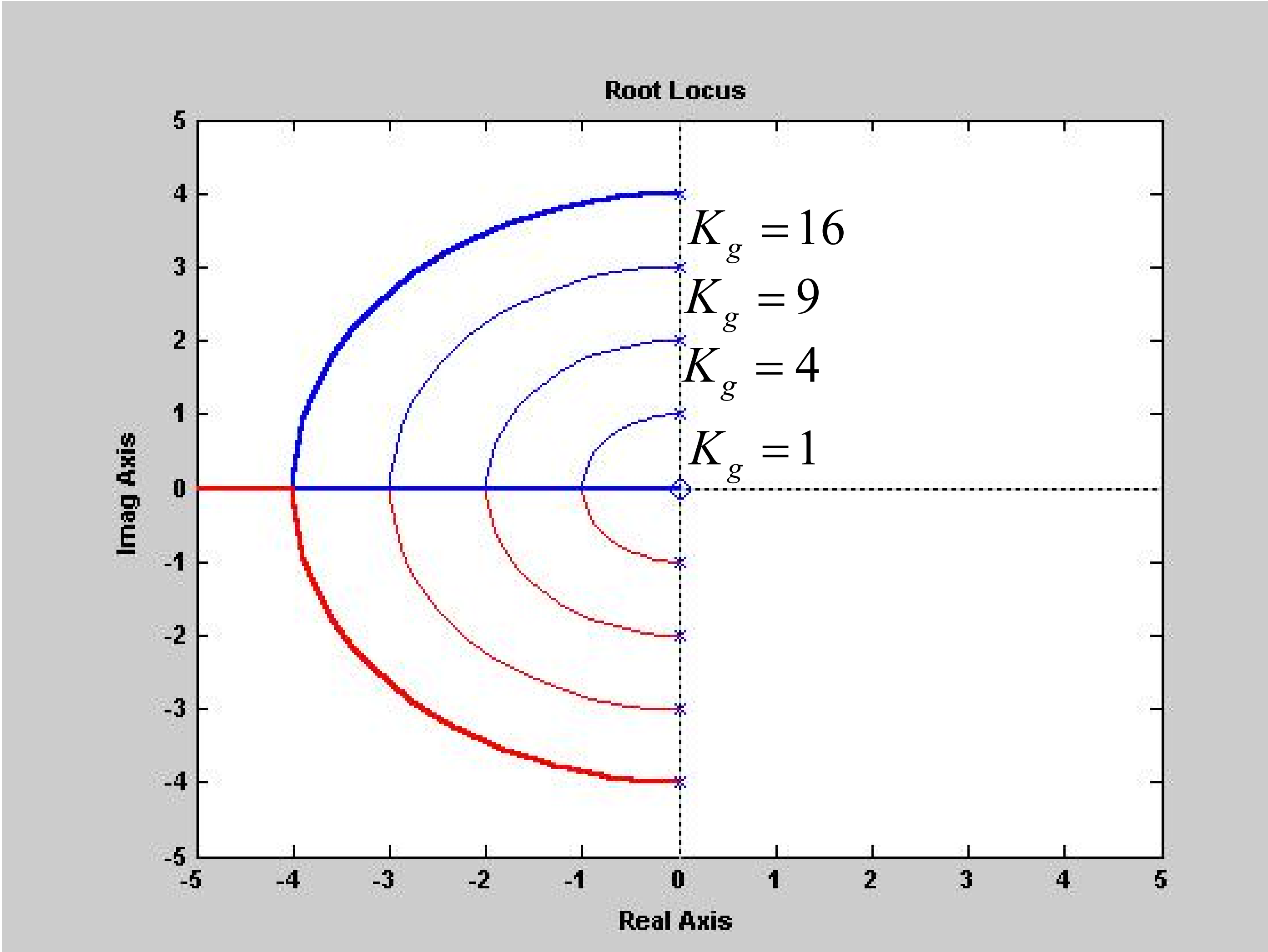


[解]：有两种方法：

- 取K_g为不同值时，绘制参量p从零变化到无穷大时的参量根轨迹。这时，根轨迹方程为：

$$p\frac{s}{s^2+K_g}=-1$$

K_g不同时的根轨迹如下页所示：

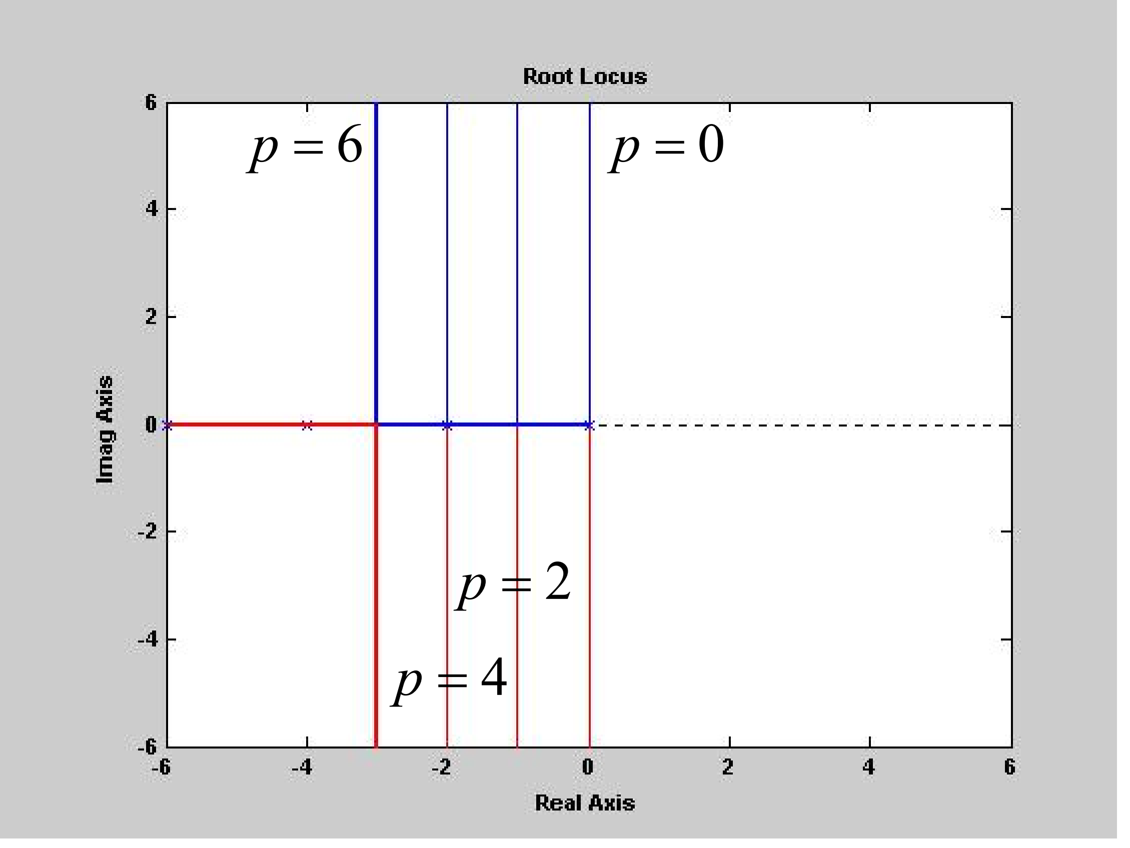


$$p \frac{s}{s^2 + K_g} = -1$$

- 取p为不同值时，绘制参量K_g从零变化到无穷大时的180度（常规）根轨迹。这时，根轨迹方程为：

$$K_g \frac{1}{s(s+p)} = -1$$

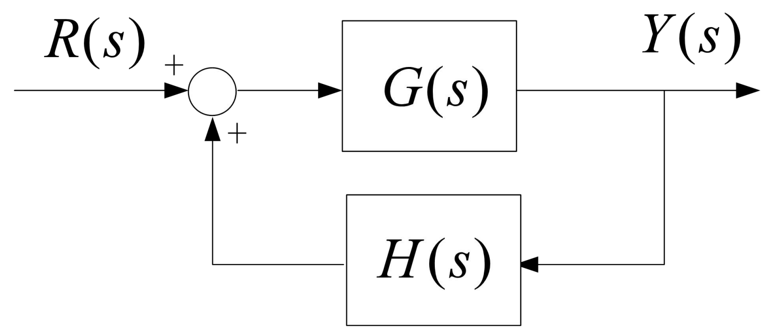
p不同时的根轨迹如右所示：



三、关于180°和0°等相角根轨迹的几个问题

正反馈环节的根轨迹

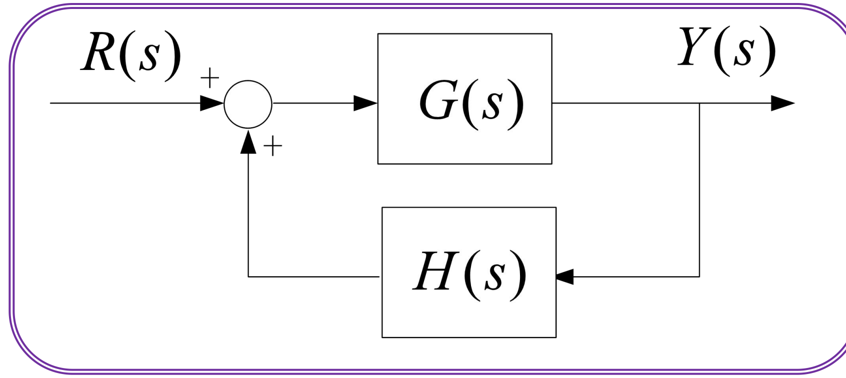
上面所介绍的180°和0°等相角根轨迹的绘制规则是以负反馈控制系统为基础，根据根轨迹增益k_g为正或者为负，应用根轨迹方程的不同相角条件进行推导的。



$0<k_g<+\infty$时为180°等相角根轨迹，$-\infty<k_g<0$时为0°等相角根轨迹。但是对于如图所示的正反馈环节，其结论是相反的。

正反馈环节的闭环特征方程为：

$$1-G(s)H(s)=0$$



根轨迹方程为：

$$\frac{k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=1$$

可见，当$0<k_g<+\infty$时，根轨迹的幅值条件和相角条件为：

$$\frac{k_g\prod_{j=1}^{m}\left|(s+z_j)\right|}{\prod_{i=1}^{n}\left|(s+p_i)\right|}=1$$

应当按照0°等相角根轨迹的绘制规则绘制根轨迹。

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s+z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s+p_i)=2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

当$-\infty<k_g<0$时，根轨迹的幅值条件和相角条件为：

$$\frac{|k_g|\prod_{j=1}^{m}|(s+z_j)|}{\prod_{i=1}^{n}|(s+p_i)|}=1$$

$$\boxed{\frac{k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=1}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s+z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s+p_i)=(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

应当按照180°等相角根轨迹的绘制规则绘制根轨迹。

在绘制正反馈和负反馈控制系统的根轨迹时，应该注意这种区别。

■ 绘制根轨迹时，应将开环传递函数写成零极点形式

有些控制系统虽然是负反馈结构，但在其开环传递函数的分子或分母多项式中，s的最高次幂项的系数为负，使系统具有正反馈的性质。

例如：$\dfrac{k(1-2s)}{(s+2)(s+3)}, k>0$

$$\frac{k(-s^2+3s-2)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2)},\quad k>0$$

在绘制根轨迹时，应将它们转换为零、极点形式：

$$\frac{k_{g1}(s-0.5)}{(s+2)(s+3)},\quad k_{g1}=-2k<0$$

$$\frac{k_{g2}(s^2-3s+2)}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2)},\quad k_{g2}=-k<0$$

由于k_{g1}和k_{g2}小于零，所以应采用0°根轨迹绘制规则进行绘制

【综合】

对于形如 $\dfrac{k_g \prod\limits_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(s+p_i)} = -1$ 的根轨迹方程:

- 绘制根轨迹的准则有两种：180° 和0° 根轨迹绘制准则。
- 不论是绘制正反馈系统、负反馈系统的根轨迹，还是绘制参量根轨迹，均要先转换成上述标准形式，然后根据根轨迹增益k_g（包括等效根轨迹增益k_g'）的取值范围，选择采用180° 或0° 根轨迹准则绘图即可。

例4.2.6 负反馈控制系统的开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{k(As+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

k 作为参变量，且k>0。当A取不同值时，应当如何选择绘制根轨迹的规则?

解： 当A =0时，系统的开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{k}{s(s+2)(s+3)} = \frac{k_g}{s(s+2)(s+3)}$$

由于k_g=k >0，所以应当选择180° 等相角根轨迹的绘制规则进行绘制。

当$A\neq 0$时，系统的开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{kA(s+1/A)}{s(s+2)(s+3)}=\frac{k_g(s+a)}{s(s+2)(s+3)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} G_k(s)=\dfrac{k_g(s+a)}{s(s+2)(s+3)} \\ k_g=kA,\quad a=1/A \end{array}}$$

其中：$k_g=kA,\ a=1/A$

根据A的取值范围的不同，有以下两种情况：

- $A>0$时，$k_g>0$，应选择180°等相角根轨迹的绘制规则进行绘制。
- $A<0$ 时，$k_g<0$，应选择0°等相角根轨迹的绘制规则进行绘制。

小结

- 0°等相角根轨迹的绘制规则

  与180°等相角根轨迹的绘制规则的不同之处（相角条件不同，与相角条件有关的规则变化了）
- 参量根轨迹的概念及绘制步骤
- 关于180°和0°根轨迹的几个问题

  正反馈环节根轨迹的绘制（与负反馈系统根轨迹的不同）