

# 第四章 线性系统的根轨迹分析法

# 本章主要内容

- 根轨迹的基本概念
- 根轨迹的绘制准则
- 特殊根轨迹
- 利用根轨迹分析闭环系统
- 利用MATLAB绘制根轨迹及分析（自学）

## 根轨迹的意义

闭环控制系统的稳定性和时间响应的形式由闭环极点决定，时间响应的大小由系统的闭环零点和闭环极点共同决定。

对于高阶系统来说，当系统的参数（比如开环增益，开环零点和开环极点等）发生变化时，闭环特征根需要重复计算，而且不能看出系统参数变化对闭环特征根分布的影响趋势。

控制系统的设计者通常希望借助某种较为简单的分析方法，当已知的开环系统某个参数发生变化时，可以很明确地看出闭环特征根的变化趋势。

W.R.伊文思提出了一种在复平面上由开环零点、极点确定闭环极点的图解方法——根轨迹法。

其基本思路：当开环传递函数的一个或多个参数发生变化时，根据系统的开环零点和极点，借助若干条绘图准则，可绘制出闭环特征根变化的轨迹，简称根轨迹。

利用根轨迹法可以：

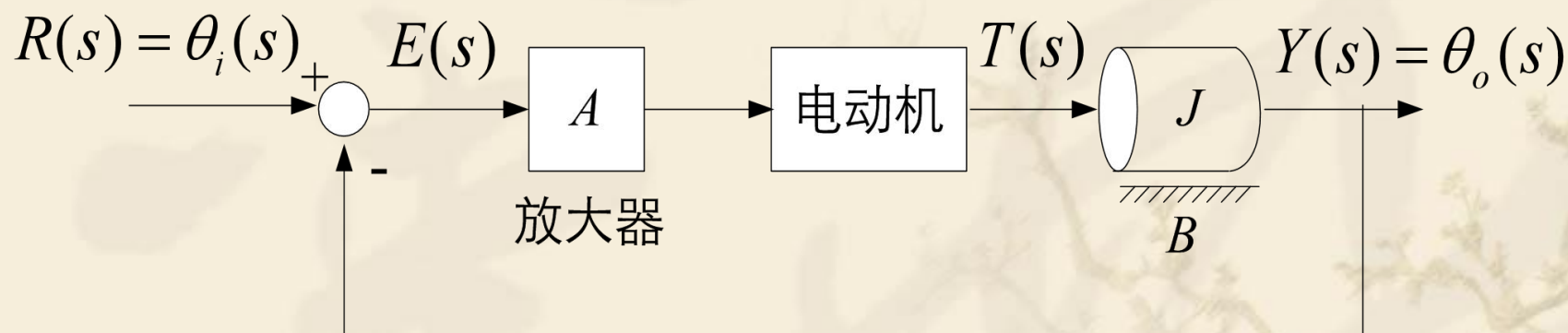
- 分析闭环系统的稳定性
- 计算（或估算）闭环系统的瞬态和稳态性能指标
- 确定闭环系统的某些参数对系统性能的影响
- 对闭环系统进行校正

# 第一节 根轨迹的基本概念

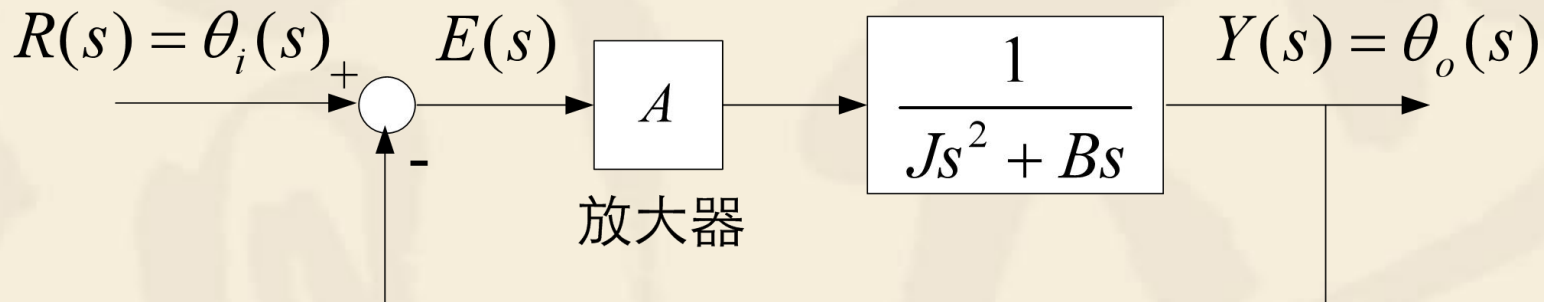


## 【举例说明根轨迹的概念】

**例4.1.1** 考虑如下图所示的位置控制系统。误差信号为 $E(s)$ ，电动机产生的扭矩为 $T(s)$ ，系统负载包括电动机的负载惯量 $J$ 和粘性阻尼 $B$ 。试讨论当放大系数 $A$ 从小变化到无穷大时，该位置控制系统闭环极点的变化情况，并分析系统时间响应。



解：画出位置系统的方块图，这是一个单位负反馈控制系统。



系统的开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{A/J}{s(s + B/J)} = \frac{k_g}{s(s + a)}$$

假设  $a=2$ ，有：

$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s + 2)}$$

系统的闭环传递函数为：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_g}{s(s + 2) + k_g} = \frac{k_g}{s^2 + 2s + k_g}$$

$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+2)}, \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_g}{s^2 + 2s + k_g}$$

系统的闭环极点为:  $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-k_g}$

显然, 该位置控制系统的闭环极点取决于 $k_g$ (或A)的取值。

### 分析:

- 当 $k_g=0$ 时, 两个闭环极点是 $s_1=0$ 和 $s_2=-2$ , 为系统的开环极点。
- 当 $k_g=1$ 时, 两个闭环极点是 $s_{1,2}=-1$ , 为重极点。
- 当 $0 < k_g < 1$ 时, 闭环极点为负实数, 位于 $s$ 平面的负实轴上, 其区间为 $(-2, -1)$ ,  $(-1, 0)$ 。
- 当 $k_g > 1$ 时, 闭环极点为一对共轭复根。其实部为 $-1$ , 说明 $s_{1,2}$ 位于过 $(-1, j0)$ 点, 且平行于虚轴的直线上。



[讨论]: 由  $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - k_g}$

① 当  $k_g=0$  时,  $s_1=0$ ,  $s_2=-2$ , 是开环极点

② 当  $k_g=0.5$  时,  $s_1=-0.293$ ,  $s_2=-1.707$

③ 当  $k_g=1$  时,  $s_1=-1$ ,  $s_2=-1$

④ 当  $k_g=3$  时,  $s_1=-1+1.4j$ ,  $s_2=-1-1.4j$

⑤ 当  $k_g=\infty$  时,  $s_1=-1+\infty j$ ,  $s_2=-1-\infty j$

画出  $k_g$  从  $0 \rightarrow \infty$  时所有的闭环极点连成的光滑曲线就是该系统的根轨迹。根轨迹上的箭头表示随着  $k_g$  值的增加, 根轨迹的变化趋势, 而标注的数值则代表与闭环极点位置相应的参数  $k_g$  的数值。

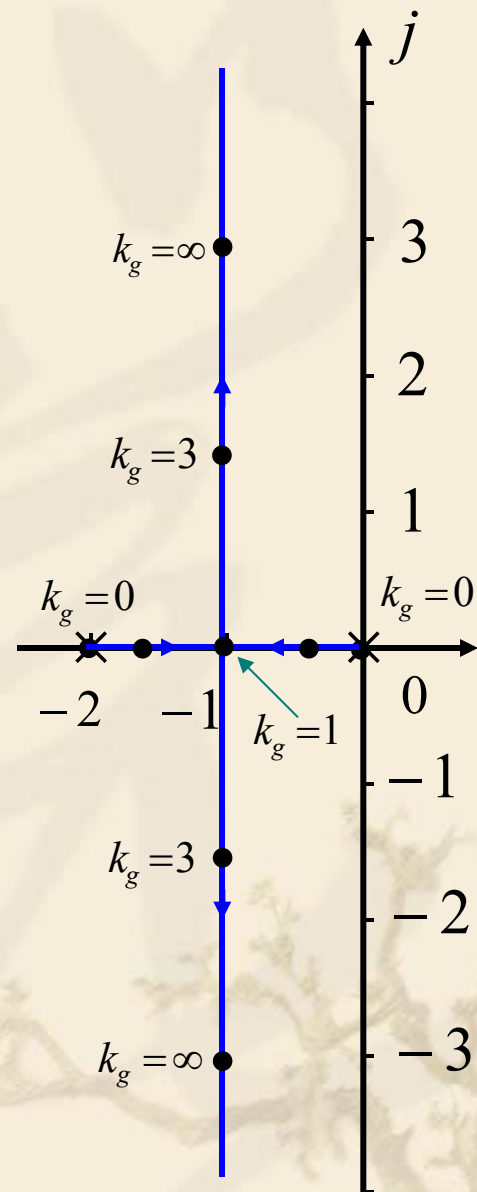
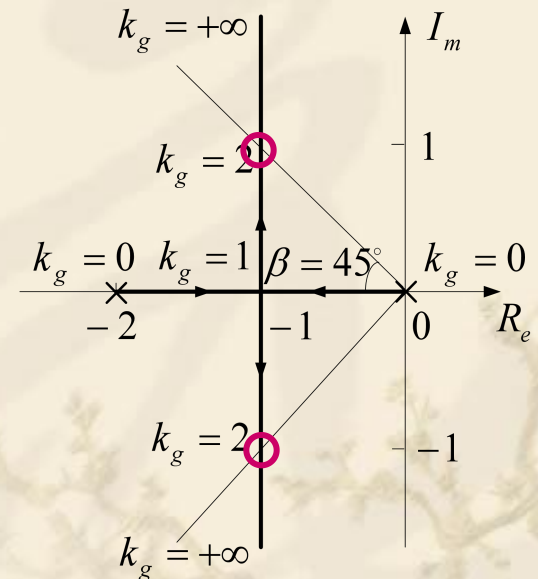


表4.1.1 部分闭环极点的位置

$k_g$	0	0.5	1.0	2.0	3.0	...	50.0	...
$s_1$	-0+j0	-0.293+j0	-1.0+j0	-1.0+j1.0	-1.0+j1.414	...	-1.0+j7.0	...
$s_2$	-2.0-j0	-1.707-j0	-1.0-j0	-1.0-j1.0	-1.0-j1.414	...	-1.0-j7.0	...

图中画出了当 $k_g=2$ 时的阻尼角 $\beta = 45^\circ$ ，这时系统的阻尼系数 $\zeta$ 为0.707，对应的闭环极点为 $s_{1,2} = -1 \pm j1$ 。

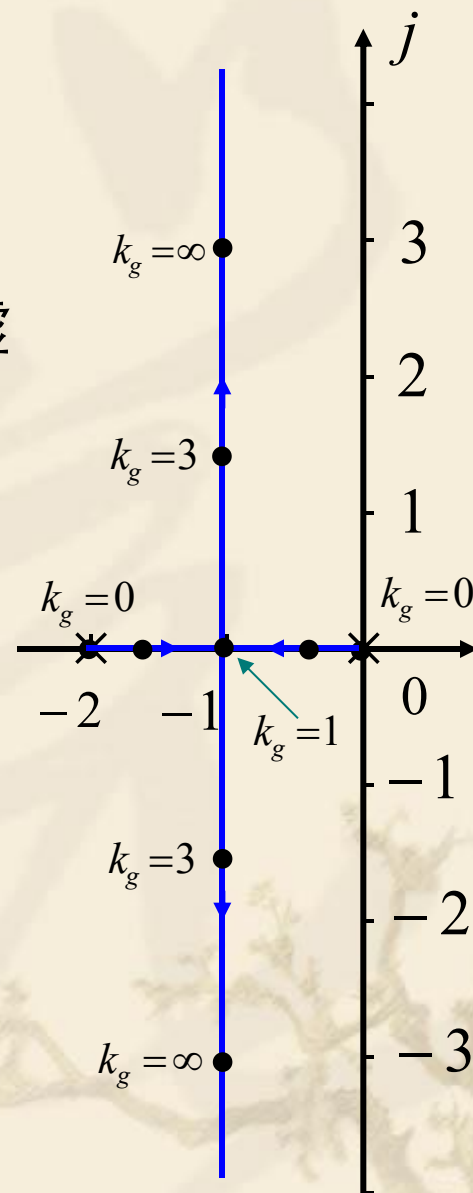


根轨迹图直观全面地描述了参数 $k_g$ 对闭环特征根分布的影响。可据此分析系统性能。

• **稳定性：** 当 $k_g$ 从 $0 \rightarrow +\infty$ 时，根轨迹不会越过虚轴进入右半 $s$ 平面，因此该系统当 $k_g > 0$ 时都是稳定的。

• **稳态性能：** 开环系统在原点有一个极点，所以系统属于 I 型系统。

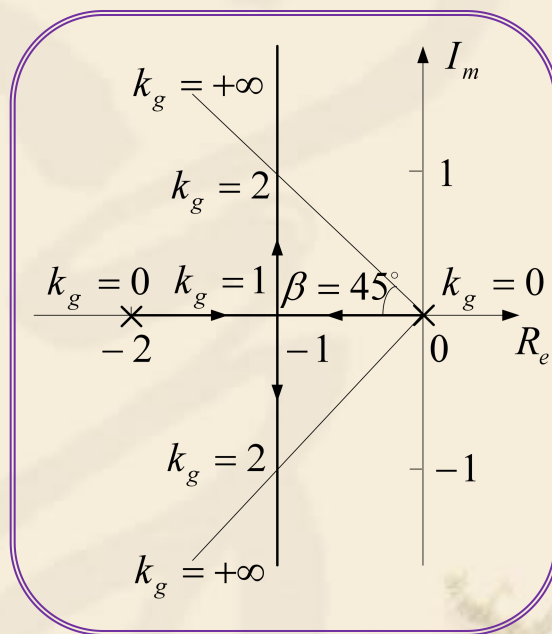
• **动态性能：** 当 $k_g$ 从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时，闭环特征根在 $s$ 左半平面变化，其单位阶跃响应的形式是不同的。



## 根据根轨迹分析系统的单位阶跃响应：

■ 当 $0 < k_g \leq 1$ 时，闭环特征根是两个负实数，表明该系统是过阻尼二阶系统( $k_g=1$ 时为临界阻尼二阶系统)，其单位阶跃响应是单调上升曲线。

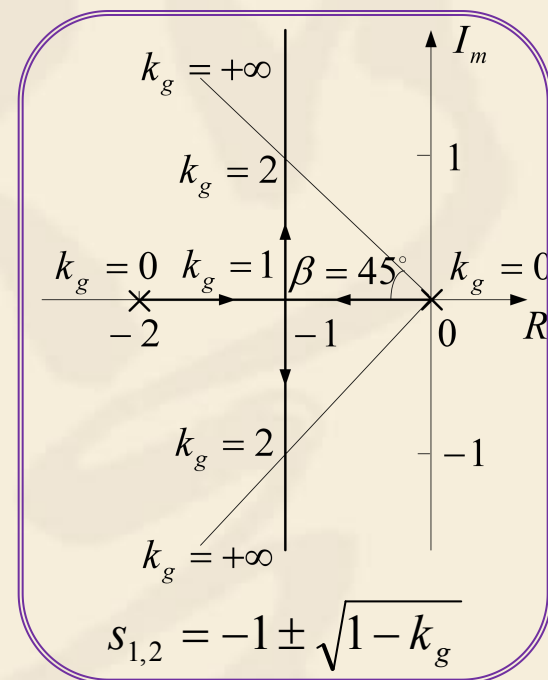
■ 当 $k_g > 1$ 时，闭环特征根是共轭复数，假设为 $\sigma \pm j\omega_d$ 。表明该系统是欠阻尼二阶系统，其单位阶跃响应是衰减振荡曲线。





根据根轨迹分析，当 $k_g$ 增加时，欠阻尼系统( $k_g > 1$ 时)的瞬态性能指标变化：

- 阻尼角增加，阻尼比减小。表明闭环系统瞬态响应的超调量增加。
- 阻尼振荡频率 $\omega_d$ 增加。 $\omega_d$ 是复数特征根的虚部，描述了瞬态响应的振荡频率。当 $\omega_d$ 增加时，系统的振荡加剧。
- 共轭复数特征根的实部 $\sigma$ 不变，等于常数。说明系统的调整时间不变。
- 特征根的轨迹是一条垂直线，在该垂线上，特征根的实部 $\sigma = -\zeta\omega_n$ 是常数，且位于 $s$ 左半平面。表明对于该二阶系统，不管增益 $k_g$ 如何增加，系统总是稳定的。





$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - k_g}$$

- 若 $k_g < 0$ ，闭环特征根只有实数根，特征根的轨迹全部位于实轴上，区间为 $0 < s_1 \leq +\infty$ ， $-\infty \leq s_2 < -2$ 。可见 $k_g$ 为负数时，总是有一部分特征根在 $s$ 平面的右半平面，在这种情况下，系统是不稳定的。

**[根轨迹定义]**控制系统的某一参数由零到无穷大变化时，闭环系统的特征根（闭环极点）在 $s$ 平面上形成的轨迹。

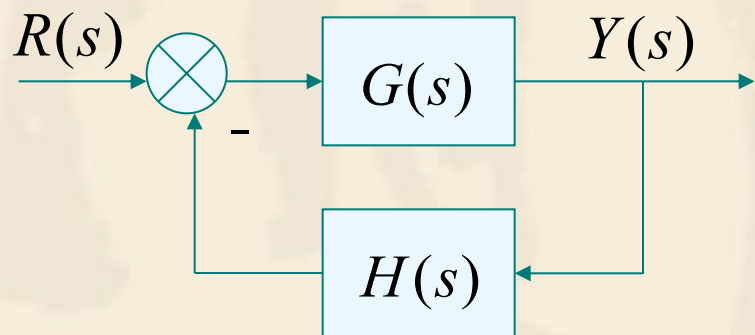
在根轨迹图中，根轨迹用粗实线表示，根轨迹上的箭头表示参变量增加的方向，开环零点和极点在图中分别用“○”和“×”表示，“·”表示根轨迹上的点。

## [根轨迹的绘制方法]

- 逐点（试探）算法。（相对繁琐）
- 利用伊文斯[美，1948]图解法(手工画法)获得系统根轨迹是一种很实用的工程方法。（本章介绍）
- 使用计算机辅助计算软件，比如MATLAB软件，获得系统的根轨迹。（同学自学）

## 根轨迹的幅值条件和相角条件:

系统的方块图如下:



闭环传递函数为:  $\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

开环传递函数为:  $G_k(s) = G(s)H(s)$

将  $G_k(s)$  写成开环零、极点形式得:

$$G_k(s) = k_g \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

其中  $k_g$  称为根轨迹增益, 其值从0变化到正无穷大或负无穷大。

$-Z_i$ ,  $-P_j$  为开环零点和开环极点。

绘制根轨迹图的基本方法是根据系统的开环零点、极点以及根轨迹增益 $k_g$ 来获得系统闭环极点的轨迹。

闭环传递函数的极点就是闭环特征方程： $1 + G_k(s) = 0$  的根。

换句话说，满足  $G_k(s) = -1$

或

$$k_g \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1$$

的点就是闭环系统的极点，即闭环特征方程的根。

$$k_g \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1$$

当根轨迹增益 $k_g$ 从零到无穷大变化时，满足上式的对应于所有 $k_g$ 的 $s$ 值，就是闭环传递函数的极点。把这些闭环极点在平面 $s$ 上按顺序连接起来，就是闭环系统的根轨迹。

称 $G_k(s) = -1$ 或： $k_g \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1$ 为负反馈系统根轨迹方程。



当根轨迹增益 $k_g > 0$ 时:

根轨迹方程可写为:

$$\frac{k_g \prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} e^{j \left[ \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) \right]} = -1 = 1 \cdot e^{j(2k+1)\pi}$$

$$k_g \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1$$

$$\text{即: } \frac{k_g \prod_{i=1}^m |(s + z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s + p_j)|} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = (2k + 1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

以上两式称为满足根轨迹方程( $k_g > 0$ )的幅值条件和相角条件。

## [说明]

- $\angle(s+z_i)$ 为开环零点 $z_i$ 到点 $s$ 的向量的相角； $\angle(s+p_j)$ 为开环极点 $p_j$ 到点 $s$ 的向量相角。
- 相角条件的含义：对于任何正 $k_g$ 值，在 $s$ 平面上从各开环零点和极点分别向某点 $s$ 引向量，如果从各零点所引向量的相角之和减去从各极点所引向量的相角之和等于 $\pi$ 的奇数倍时，那么该点 $s$ 就是根轨迹上的点。
- 相角条件与 $k_g$ 无关，幅值条件与 $k_g$ 有关。把满足相角条件的 $s$ 带入到幅值条件中，总可以求出对应的 $k_g$ 值。表明如果 $s$ 满足相角条件，则必满足幅值条件。**相角条件是确定 $s$ 平面上的根轨迹的充分必要条件。**
- 绘制根轨迹时，一般**先用相角条件绘制出根轨迹图**，然后**利用幅值条件计算出根轨迹上各点对应的 $k_g$ 值。**

当根轨迹增益 $k_g < 0$ 时:

根轨迹方程可写为:

$$\frac{|k_g| \prod_{i=1}^m |s + z_i|}{\prod_{j=1}^n |s + p_j|} e^{j \left[ \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) \right]} = 1 = 1 \cdot e^{j2k\pi}$$

$$\text{即: } \frac{|k_g| \prod_{i=1}^m |(s + z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s + p_j)|} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

上述两式称为满足根轨迹方程( $k_g < 0$ )的幅值条件和相角条件。

$$k_g \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = -1$$

## 根轨迹的两种类型：

- **180°等相角根轨迹**：复平面上所有满足相角条件式( $k_g > 0$ )的点连成的曲线，称为180°等相角根轨迹，简称根轨迹。
- **0°等相角根轨迹**：复平面上所有满足相角条件式( $k_g < 0$ )的点连成的曲线，称为0°等相角根轨迹。

这样，当根轨迹增益从 $k_g=0$ 到 $k_g=\pm\infty$ 变化时，根据根轨迹应满足的相应幅值和相角条件，完全可以确定 $s$ 平面上的根轨迹和根轨迹上各点对应的 $k_g$ 值。



## 利用试探法确定根轨迹上的点:

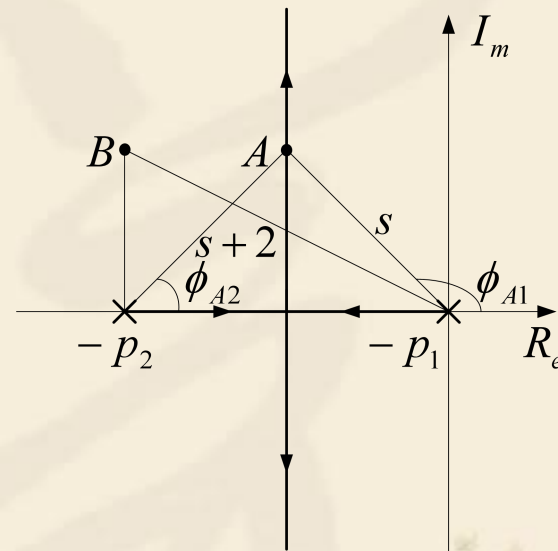
由于根轨迹上的点满足相角条件, 所以可利用相角条件来判断 $s$ 平面上的点是否在根轨迹上。

以例4.1.1为例:

$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+2)}$$

假设 $s$ 平面上有任意点 $A$ , 如右图所示。记 $-p_1$ 指向点 $A$ 的向量为 $s$ ,  $-p_2$ 指向点 $A$ 的向量为 $s+2$ , 向量 $s$ 和 $s+2$ 的相角分别为 $\phi_{A1}$ 和 $\phi_{A2}$ , 假设 $k_g > 0$ , 则开环传递函数的相角为:

$$\angle \frac{k_g}{s(s+2)} \Big|_{s=A} = -\angle s - \angle(s+2) = -\phi_{A1} - \phi_{A2}$$





显然，对于A点，有： $\phi_{A1} + \phi_{A2} = \pi$ ，A点是根轨迹上的点。对于B点，由于：

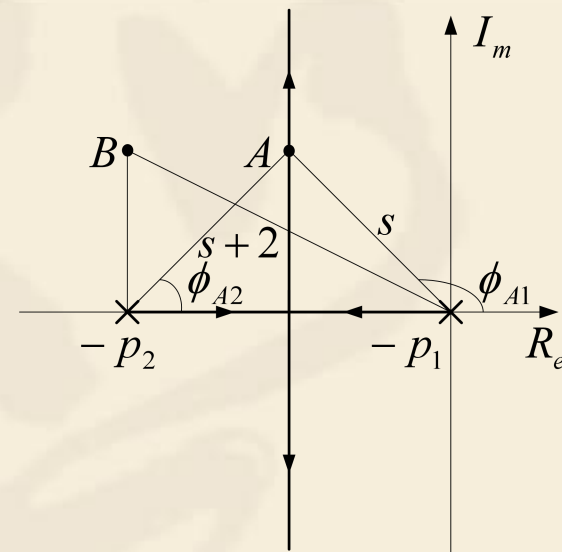
$$\angle \frac{k_g}{s(s+2)} \Big|_{s=B} = -\angle s - \angle(s+2) = -\phi_{B1} - \phi_{B2} \neq \pm\pi$$

不满足相角条件，所以点B不是根轨迹上的点。

利用幅值条件在根轨迹上确定特定点的根轨迹增益 $k_g$

上例中，A点的坐标是 $-1+j1$ ，则根据幅值条件：

$$k_g \left| \frac{1}{s(s+2)} \right|_{s=-1+j1} = 1, \therefore k_g = 2$$



# 小结

- ❑ 根轨迹概念与定义
- ❑ 根轨迹方程
- ❑ 根轨迹的幅值条件和相角条件
- ❑ 180度和0度等相角根轨迹
- ❑ 相角条件和幅值条件的使用
- ❑ 用试探法绘制根轨迹的方法