总　复　习

第一章 复数与复变函数

1.复数的概念 $z = x + iy$ 　**复数不能比较大小**

共轭复数 $\bar{z} = x - iy$

(1). $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

(2). $\bar{\bar{z}} = z$.

(3). $z \cdot \bar{z} = \left[\mathrm{Re}(z)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(z)\right]^2$

(4). $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.

复数的模 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = z\bar{z}$

幅角 $\mathrm{Arg}z=\theta_0+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $\qquad -\pi<\arg z\le\pi$

三角表示 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

指数表示 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\qquad z=re^{i\theta}$

复数的乘积与商

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\qquad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\Rightarrow\begin{cases}\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\\ \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.\end{cases}$$

幂与方根 $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

复变函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$ 映射

复变函数的极限与连续 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

第一章 典型例题

例1 若 $\dfrac{-3-i}{(1+i)^2}=re^{i\theta}$，则 $r=$ ________ $\theta=$ ________

例2 若 $|z|=1, w=z^n+\dfrac{1}{z^n}$（$n$是正整数），则(　　　)

$(A)\,\mathrm{Re}(w)=0$;　$(B)\,\mathrm{Im}(w)=0$;　$(C)\,\arg(w)=0$;　$(D)\,\arg(w)=\pi$

例3 函数$w=\dfrac{1}{z}$将z平面上的下列曲线变成w平面上的什么曲线？

(1) $x^2+y^2=9$; (2) $x=2$. （3）$x>1$

例4 若$f\left(\dfrac{1}{z+i}\right)=\bar{z}$，则$\lim\limits_{z\to i} f(z)=$【　　】

(A) i;　(B) 2i;　(C) $-i$;　(D) $-2i$.

第二章　解析函数

1.复变函数的导数与微分

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$$

$$dw=f'(z_0)\Delta z$$

函数在一点可微与在一点可导是等价的.

可导与连续的关系：连续是可导的必要而非充分条件

2.解析函数

(1)定义 设 $f(z)$ 在区域D有定义.

设 $z_0 \in D$，若存在 z_0的一个邻域，使得

$f(z)$ 在此邻域内处处可导, 则称 $f(z)$在 z_0处解析.

在一点解析与在一点可导不等价，但在区域内解析与区域内可导等价

(2)性质：

(a) 两解析函数的和、差、积、商（在分母不为0的点）仍解析.

(b) 设函数$h=g(z)$在z平面上的区域D内解析，$w=f(h)$在h平面上的区域G内解析，且$g(z)$的值域含于G, 则复合函数$w=f[g(z)]$在D内解析.

(c)解析函数的导数仍是解析函数，且可以任意阶求导.

(3)可导与解析的判定

定理2.1 复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+iy$ 处可微(即可导)的充分必要条件是二元函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x,y) 处都可微，并且满足Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

推论2.1:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

定理2.2 复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

在区域D内解析的充分必要条件是$u(x,y),v(x,y)$

在区域 D 内可微, 且在D内满足C-R方程.

3.初等解析函数

(1)指数函数 $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

性质 (a)对任意复数z, $|e^z| = e^x > 0$, 则 $e^z \neq 0$;

(b) e^z在z平面上处处解析, 而且$(e^z)' = e^z$;

(c) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

(d) e^z是以$2\pi i$为周期的周期函数

(2)对数函数

$$e^{w}=z\ (z\neq 0)\qquad w=\mathrm{Ln}z.$$

$$w=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)\ \left(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right).$$

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z\qquad \mathrm{Ln}z=\ln z+2ik\pi\ \left(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right).$$

性质：

$(1)\ \mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}z_1+\mathrm{Ln}z_2,$

$\mathrm{Ln}(\frac{z_1}{z_2})=\mathrm{Ln}z_1-\mathrm{Ln}z_2\ (z_1,z_2\neq 0,z_1,z_2\neq\infty).$

(2)Lnz的各个分支在除去原点与负实轴的复平面内处处连续、处处解析.且

$$\left(\mathrm{Ln}z\right)'=\frac{1}{z},\quad \left(\ln z\right)'=\frac{1}{z}$$

(3)幂函数

设α 是任意复数，对于 $z \neq 0$ ，用下列等式定义z的幂函数

$$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Ln} z}$$

性质（1）z^{α}是一个无穷多值函数；

（2）其各个分支在除去原点和负实轴的平面上是解析的，且

$$\left(z^{\alpha}\right)' = \alpha z^{\alpha-1}$$

(4)三角函数、双曲函数

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

4.调和函数和共轭调和函数

调和函数：设φ 在D内具有二阶连续偏导数，且 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y}=0$

定理3.15 （解析函数与调和函数的关系）

任何在区域D内的解析函数，它的实部和虚部都是调和函数.

共轭调和函数

设$u(x,y)$为区域D内的调和函数，如果区域D内的另一函数$v(x,y)$使$u+iv$在D内构成解析函数，则称$v(x,y)$为$u(x,y)$的共轭调和函数.

若区域D内的调和函数u和v满足C-R方程，则它们是共轭调和函数.

定理3.16 （解析函数与共轭调和函数的关系）

任何在区域D内的解析函数，它的实部和虚部都是共轭调和函数.

典型例题

例1 判断下列函数何处可导何处解析，并在可导或解析处求出其导数.

(1) $f(z)=x^3-y^3 i$;

(2) $f(z)=\overline{z}z^n.\left(n\in Z^+\right)$

$\because f'(0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\overline{z}z^n-0}{z-0}=0, \therefore f(z)$在$z=0$处可导.

由反证法知$\overline{z}z^n$在$z\neq 0$处不可导，故$f(z)$仅在$z=0$可导，处处不解析.

例2 z_0是$f(z)$和$g(z)$的一个奇点，则下列选项正确的是【　　】

(A)z_0一定是$f(z)+g(z)$的奇点；(B)z_0一定是$f(z)\cdot g(z)$的奇点

(C) z_0一定是$f(z)/g(z)$的奇点；(D)以上答案均不正确.

例3 求 (1)$(1+i)^{1-i}$； (2)$\ln(1+i)^{i}$ 的主值.

例4 求解方程 $\sin z + \cos z = 0$.

例5 证明柯西-黎曼方程的极坐标形式是：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

第三章　复变函数的积分

1.积分存在的条件及计算

定理3.1 设C是分段光滑(或可求长)的有向曲线

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在C上连续，则

$\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 存在，并且

$$\int_C f(z)dz=\underline{\underline{\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y}}\;+\underline{\underline{i\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y}}.$$

$C:z=z(t),\alpha\le t\le\beta\qquad \int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$

2. 积分的性质

设曲线C的长度为L，函数$f(z)$在C上满足

$$|f(z)|\le M,\text{ 则}\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C|f(z)|\mathrm{d}s\le ML.$$

3. 柯西-古萨基本定理

定理3.2 (Cauchy积分定理) 设$f(z)$是在简单闭曲线C上以以及由它所围成的区域D内处处解析，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

此时，积分与路径无关.

基本定理的推广-复合闭路定理

定理2.4 设 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$是多连通区域D内分段光滑(或可求长) Jordan曲线, $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 都在C 的内部, 它们互不包含也互不相交, 并且以 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$为边界的闭区域含于D内.若f在D内解析,

那么（1）$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$，C,C$_k$均取正向

（2）$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$ $\quad \Gamma = C + C_1^{-1} + C_2^{-1} + \cdots + C_n^{-1}$

5. Cauchy积分公式

定理3.10　设$f(z)$在区域D内处处解析，C为D内任意一条正向简单闭曲线，它的内部完全含于D,z_0为C内任意一点则

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0).$$

6.高阶导数公式

定理3.11解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数，它的n阶导数可表示为

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

7.明星公式

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

典 型 例 题

例1 计算 $\int_C \frac{z}{\bar{z}} dz$, 其中$C$ 是 $x^2+y^2=1$ 的上半圆周 从x=-1到x=1的一段弧.

例2　C为简单闭曲线正向，D为C所包围区域，A是D的面积，则

$\oint_C \mathrm{Re}(z)dz =$ ______________

例3　计算 $I=\int_{\Gamma}\frac{e^{z}}{z\left(z^{2}-1\right)}dz$,其中是圆环域:$\frac{1}{2}\le|z|\le 2$的边界正向.

例4 已知 $u(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$, 求解析函数

$f(z)=u+iv$ 使得 $f(0)=0$.

解 法一 偏积分法

$$u_x=3x^2+12xy-3y^2,\ u_y=6x^2-6xy-6y^2,$$

$$v_y=u_x\Rightarrow v=\int(3x^2+12xy-3y^2)dy$$

$$\Rightarrow v=3x^2y+6xy^2-y^3+\varphi(x)$$

$$v_x=-u_y\Rightarrow 6xy+6y^2+\varphi'(x)=-6x^2+6xy+6y^2$$

$$\Rightarrow\varphi'(x)=-6x^2\ \Rightarrow\varphi'(x)=-2x^3+C$$

$$\therefore v=3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C$$

$$u(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3,$$

故所求解析函数为

$$f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3+i\left(3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+C\right),$$

$$=(1-2i)z^3+iC. \quad (x=z, y=0)$$

法二 不定积分法

$$u_x=3x^2+12xy-3y^2, u_y=6x^2-6xy-6y^2=-v_x$$

$$f'(z)=u_x+iv_x=3x^2+12xy-3y^2-i\left(6x^2-6xy-6y^2\right),$$

$$=3z^2-i6z^2. \quad (x=z, y=0) \Rightarrow f(z)=z^3-2z^3i+Ci$$

例5 设$f(z)=u+iv$解析，且$u_x+v_x=0$，求$f(z)$.

例6 设 $f(z)$在$|z|<1$解析,在$|z|\le 1$上连续,证明

$$f'(0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\cos\theta d\theta$$

第四章　泰勒级数和洛朗级数

1.复数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

$$s_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}s_n=s}\qquad\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=s}$$

定理4.3（级数收敛的充要条件）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\alpha_n=a_n+ib_n\right)\quad\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{和}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\text{ 均收敛.}$$

推论4.1（复数项级数收敛的必要条件） $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛 $\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$

绝对收敛与条件收敛　$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\alpha_n\right|$

2. 复变函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$

$$s_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(z) = s(z) \qquad s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

3.幂级数

(1)定义： $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$

(2)定理4.7 (Abel定理)若级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在$z_1 \neq 0$ 处收敛，

则当 $|z| < |z_1|$时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 绝对收敛；

若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 z_2 处发散，则当 $|z| > |z_2|$时，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散.

（3）幂级数收敛半径的计算方法（比值法和根值法）

定理4.8 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.如果满足下列条件之一：

$$(1)\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lambda; \qquad (2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lambda$$ 则

(1) 当 $0 < \lambda < +\infty$ 时，收敛半径 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

(2) 当 $\lambda = +\infty$ 时，收敛半径 $R = 0$;

(3) 当 $\lambda = 0$ 时，收敛半径 $R = +\infty$;

(4)幂级数在收敛域内的性质： 运算性质，分析性质

4.泰勒级数

（1）定理4.10 (Taylor展开定理) 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，z_0 为 D 内的一点，R 为 z_0 到 D 边界的距离 (D 是全平面时，$R=+\infty$)，则 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内可可唯一地表示为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

其中 $c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots).$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ $f(z)$ 在 z_0 点的Taylor级数.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

（2）将函数展成泰勒级数的方法：间接展开法

附: 常见函数的Taylor展开式

$$(1)\ e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (|z| < \infty)$$

$$(2)\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad (|z| < 1)$$

$$(3)\ \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

$$(|z| < 1)$$

$$(4)\ \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

$$(|z| < \infty)$$

$$(5)\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad (|z| < \infty)$$

$$(6)\ \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z| < 1)$$

$$(7)\ (1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 +$$

$$\cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots, \qquad (|z| < 1)$$

4.洛朗级数

（1）定理4.11(Laurent展开定理) 设 $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, 函数 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析, 则函数 $f(z)$

在此环域内必能唯一地展开为Laurent级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \left(R_1 < |z - z_0| < R_2\right),$$

其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,

C 是圆周 $|z - z_0| = R \ (R_1 < R < R_2)$ 的正向.

（2）将函数展成洛朗级数的方法：间接展开法

可用代数运算、代换、求导、积分等方法去展开.

典型例题

例1 判断下列级数的敛散性：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{i}{2^n}\right);\qquad(2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+5i}{2}\right)^n.$$

例2 求 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} ne^{-|n|}z^n$ 的收敛域.

例3 求函数 $e^{\frac{1}{1-z}}$和$\sin\frac{1}{1-z}$ 在 $z=0$ 的泰勒 展开式到含 z^3的项，并指出收敛半径.

参考书128页

例4 求函数 $e^{\sin z}$ 在 $z=0$ 的泰勒 展开式的收敛半径R与 z^4 项的系数 C_4 为 $(R, C_4)=$【　　】.

(A)$\left(1, \dfrac{1}{4!}\right)$; (B)$\left(1, \dfrac{2}{3!}\right)$; (C)$\left(\infty, \dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{3!}\right)$; (D)$\left(1, \dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{3!}\right)$

例5 若$\dfrac{1}{1-\cos z}=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n z^n, 0<|z|<\dfrac{\pi}{2}$,则$a_2=$ ________

例6 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)^2}$ 在以1为中心的圆环域内展成洛朗级数.

教材102页例4.9

例7 求 $\oint\limits_{|\zeta|=1}\dfrac{\sin\zeta}{1-\zeta z^{2}}d\zeta$ 在 $|z|>1$ 的洛朗级数.

第五章 留数及留数定理

1. 孤立奇点及其分类

（1）定义：如果函数$f(z)$在z_0点不解析，但在z_0的某个去心邻域

$$0<|z-z_0|<\delta$$ 内处处解析，则成z_0为$f(z)$的孤立奇点.

（2）分类：可去奇点、极点、本性奇点

孤立奇点	Laurent级数的特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	无负幂项	存在且为有限值
m级极点	含有有限个负幂项 关于$(z-z_0)^{-1}$的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$	∞
本性奇点	含无穷多个负幂项	不存在且不为∞

2. 零点与极点的关系

（1）零点定义：不恒等于0的解析函数$f(z)$如果能表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$$

其中，$\varphi(z)$在z_0解析, $\varphi(z_0)\neq 0, m\in Z^+$，那么$z_0$称为$f(z)$的$m$级极点.

（2）关系：定理5.2 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 那末z_0就是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点. 反过来也成立.

3. 留数与留数定理

（1）定义：设z_0是$f(z)$的孤立奇点, C是在z_0的充分小邻域内包含z_0在其内部的分段光滑正向 Jordan曲线，

积分 $$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

称为$f(z)$在z_0点的留数(Residue), 记做 $\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]$.

留数即是$f(z)$在圆环域内Laurent级数-1次幂项的系数.

(2)留数基本定理: 设函数$f(z)$在区域D

内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$外处处解析, C是D

内包含所有奇点在其内部的分段光滑正向 Jordan曲线, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right].$$

说明:(1) $f(z)$在D内处处解析，柯西-古萨基本定理;

(2) 把沿封闭曲线的积分计算转化为留数的计算.

4. 计算留数的方法

(1) 如果 z_0为 $f(z)$ 的可去奇点, 则

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0.$$

(2) 如果 z_0为 $f(z)$ 的本性奇点, 则需将 $f(z)$展开

成Laurent级数, 求 c_{-1}.

(3) 如果 z_0 为 $f(z)$ 的极点, 则有如下计算规则

• 法则1　如果 z_0 为 $f(z)$ 的1级极点, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0}[(z - z_0) f(z)].$$

• 法则2　如果 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级极点, 取正整数

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)].$$

• 法则3　设 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析.

如果 $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的1级极点, 并且 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

4. 函数在无穷远点处的留数

定义5.8 设$z=\infty$是$f(z)$的孤立奇点，C为圆环域$0<R<|z|<+\infty$绕原点的任一正向简单闭曲线（f在其内解析），则称积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$$

为$f(z)$在$z=\infty$的留数，并记做$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$，其中$C^-$表示圆周$|z|=r\ (r>R)$的负向(即顺时针方向). 即

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1}.$$

c_{-1}为洛朗展开式中$\frac{1}{z}$前面的系数.

定理5.4 设函数$f(z)$在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，$z_1,z_2,\cdots,z_{N-1},z_N=\infty$，则$f(z)$在所有各孤立奇点留数的总和等于0，即

$$\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=0.$$

•法则4　设$f(z)$在 $0<|z|<+\infty$ 内解析，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right].$$

计算积分 $\oint_C f(z)dz \longrightarrow$ 计算无穷远点的留数.

•法则5　设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理分式，且多项式

$Q(z)$ 的次数比 $P(z)$ 的次数至少高2次，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0.$$

小结：无穷远点处留数的计算方法

$$(1)\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}$$

$$(2)\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right].$$

5. 留数在定积分中的应用

(1) 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ 的定积分

令 $z = e^{i\theta}$ $\longrightarrow$ $\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta$ $\longrightarrow$ $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$，则

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{z^2-1}{2iz}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{z^2+1}{2z}.$$

$$I = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right]\frac{1}{iz}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z), z_k\right].$$

注意：z_k是$f(z)$在单位圆周内部的所有孤立奇点.

(2) 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ 的广义积分

设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x),Q(x)$为互质多项式，且$Q(x)$的次数至少比

$P(x)$高二次，在实轴上，$Q(x)$没有零点，

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k].$$

(3) 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx \quad (a>0)$ 的广义积分

设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ，$P(x),Q(x)$为互质多项式，且$Q(x)$的次数至少比

$P(x)$高一次，在实轴上，$Q(x)$没有零点，

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{aiz},z_k].$$

注意：z_k是$R(z)$在上半平面内的所有孤立奇点.

典 型 例 题

例 1 $z=i$是函数$\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$的[　　　]

(A)本性奇点；(B)二级极点；(C)一级极点；(D)三级极点

例 2 计算下列各题：

$$(1)\mathrm{Res}\left(\frac{\ln(1+z)}{e^z-1},0\right)$$

$$(2)\mathrm{Res}\left(e^{\frac{z}{z-1}},1\right)$$

$$(3)\mathrm{Res}\left(\tan\frac{1}{1-z},1\right)$$

$$(4)\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1-e^z}+\cot z,0\right)$$

$$(5)\mathrm{Res}\left(\sin\frac{z}{z+1},-1\right)$$

例 3 计算 $\oint_{|z|=r(r>1)} \frac{z}{(1+z^2)e^{\frac{1}{z}}} dz$

例 4 计算$\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{z^{11}}{\left(1+z^{2}\right)^{2}\left(z^{4}+3\right)^{2}}dz$

例 4 计算下列积分：

$$(1)\int_0^{\pi}\frac{dx}{\left(2+\sqrt{3}\cos x\right)^2};$$

$$(2)\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx$$

$$(3)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi\cos x}{x^2+4x+5}dx.$$