第一章 离散时间系统与 z 变换

1．解：P(t)是一个周期函数，可以用傅氏级数来表示

$$P(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{jm\Omega_s t}$$

$$a_m=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}P(t)e^{-jm\Omega_s t}dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{\tau}e^{-jm\Omega_s t}dt=\frac{1}{jm2\pi}(1-e^{-jm\Omega_s\tau})$$

$$P(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{jm2\pi}(1-e^{-jm\Omega_s\tau})e^{jm\Omega_s t}$$

$$X_s(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)P(t)e^{-j\Omega t}dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{jm2\pi}(1-e^{-jm\Omega_s\tau})\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j(\Omega-m\Omega_s)t}dt$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{j2m\pi}(1-e^{-jm\Omega_s\tau})X_a(j\Omega-jm\Omega_s)$$

2．解：

$$x_{s1}(t)=x_{a1}(t)P(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2}n$$

$$x_{s2}(t)=x_{a2}(t)P(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\cos\frac{3\pi}{2}n$$

$$x_{s3}(t)=x_{a3}(t)P(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\frac{5\pi}{2}n$$

频谱混淆现象是指采样频率小于带限信号的最高频率(0 到 2π内) 的 2 倍时所产生的一种频谱混叠，使得采样后的序列不能真正反映原信号。

3．解：

对于 x_{a1} 来说 ω_M =2π，而 ω_s =8π>2 ω_M =4π，$\therefore y_a(t)$ 无失真，可以被还原；

对于 x_{a2} 来说 ω_M =5π，而 ω_s =8π<2 ω_M =10π，$\therefore y_a(t)$ 有失真，不可以被还原；

4．解：

(1)δ(n)因果稳定　　；(2) δ(n-n_0)， n_0>=0，因果稳定； n_0<0，稳定非因果

(3)u(n), 因果非稳定　；(4)u(3-n)，非因果非稳定

(5) $2^n u(n)$，因果非稳定；(6) $2^n u(-n)$，稳定非因果

(7) $2^n R_N(n)$，因果稳定 ；(8) $0.5^n u(n)$，因果稳定

(9) $0.5^n u(-n)$，非因果非稳定；(10) $\frac{1}{n}u(n)$，因果稳定

(11) $\frac{1}{n^2}u(n)$，因果稳定　　；　(12) $\frac{1}{n!}u(n)$，因果稳定

5．解：

(1)

$$
\begin{aligned}
&R_4(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)\\
&y(n)=R_4(n)\otimes R_4(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)+4\delta(n-3)+3\delta(n-4)+2\delta(n-5)\\
&+\delta(n-6)R_4(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)\\
&y(n)=R_4(n)\otimes R_4(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)+4\delta(n-3)+3\delta(n-4)+2\delta(n-5)\\
&+\delta(n-6)
\end{aligned}
$$

(2) $y(n)=2^n R_4(n)\otimes[\delta(n)-\delta(n-2)]=2^n R_4(n)-2^{n-2}R_4(n-2)$

(3)

$$
\begin{aligned}
&y(n)=0.5^n u(n)\otimes R_5(n)\\
&a)0\le n<4\text{时}, y(n)=2-2^n\\
&b)n\ge 4\text{时}, y(n)=31\cdot 2^n\, y(n)=0.5^n u(n)\otimes R_5(n)
\end{aligned}
$$

6．解：

(1)

$$y(1)=\frac{1}{3}\times 1+1=\frac{4}{3}$$

$$y(2)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}+0=\frac{4}{3^2}$$

$$y(3)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3^2}+0=\frac{4}{3^3}$$

$\vdots$

递推得：$y(n)=\frac{4}{3^n}u(n-1)+\delta(n)$

(2)

$$y(1)=\frac{1}{3}\times 1+1=\frac{1}{3}+1$$

$$y(2)=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3}+1)+1=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1$$

$$y(3)=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1)+1=\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1$$

$\vdots$

递推得 : $y(n)=(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{3}+1)u(n-1)+\delta(n)=\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^{n+1}],n\geq 0$

(3)

$$y(1)=\frac{1}{3}\times 1+1=\frac{1}{3}+1$$

$$y(2)=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3}+1)+1=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1$$

$$y(3)=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1)+1=\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1$$

$$y(4)=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1)+1=\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1$$

$$y(5)=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1)+1=\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+1$$

$$y(n)=\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^{n+1}],0\leq n\leq 5$$

7．解：

$$y(n)=x(n)+x(n-1)+\frac{1}{2}y(n-1)$$

$$y(0)=1+0+\frac{1}{2}\times 0, y(1)=1+1+\frac{1}{2}\times 1=1+\frac{3}{2}, y(2)=1+1+\frac{1}{2}\times(2+\frac{1}{2})=1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}$$

$$\text{递推得}: y(n)=(1+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{3}{2^n})u(n)=2[(\frac{3}{2})^{n+1}-1]u(n)$$

8．解：

$$y(n)=x(n)+2y(n-1)\text{即}y(n-1)=\frac{1}{2}y(n)-\frac{1}{2}x(n)$$

$$x(n)=\delta(n)$$

$$y(-1)=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$y(-2)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2^2}$$

$$y(-3)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2^2})=-\frac{1}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$\text{递推得}: y(n)=-2^n u(-n-1)$$

9．解：

$$Z[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$(1)Z[\delta(n-n_0)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-n_0)z^{-n}=z^{-n_0}$$

$a)n_0 \ge 0$

$ROC: |Z| \ne 0$且$|z| \in R$

$b)n_0 < 0$

$ROC: |z| \ge 0$除去$+\infty$

零点出现在无穷远处

(2)

$$Z[0.5^n u(n)]=\sum_{n=0}^{+\infty}0.5^n z^{-n} =\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},ROC:|z|>\frac{1}{2}$$

极点 $:z=\frac{1}{2}$

零点 $:z=0$

(3) $Z[-0.5^n u(-n-1)]=\sum_{n=-\infty}^{-1}-(\frac{1}{2})^n z^{-n} =\frac{1}{\frac{1}{2}z^{-1}-1},ROC:|z|<\frac{1}{2}$

极点 $:z=\frac{1}{2}$

零点 $:z=0$

(4) $Z[0.5^n(u(n)-u(n-10))]=\dfrac{1-(\frac{1}{2}z^{-1})^{11}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

零极点抵消，ROC 为全平面

(5) $Z[e^{j\omega_0 n}u(n)]=\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}},ROC:|z|>1$

极点 $:z=e^{j\omega_0}$

零点 $:z=0$

(6) $Z[\cos\omega_0 n\cdot u(n)]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}z^{-n} =\frac{1}{2}[\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}]$

$ROC:|z|>1$

极点 $:z=e^{j\omega_0},z=e^{-j\omega_0}$

零点 $:z=0,z=\cos\omega_0$

$$(7)Z[\sin\omega_0 n u(n)]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{j\omega_0 n}-e^{-j\omega_0 n}}{2j}z^{-n}=\frac{z\sin\omega_0}{(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})}$$

$ROC:|z|>1$

极点$:z=e^{j\omega_0},z=e^{-j\omega_0}$

零点$:z=0$

10．解：

$$(1)Z[a^{|n|}]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a^{n}z^{-n}=\frac{z(1-a^2)}{(1-az)(z-a)},ROC:|a|<|z|<\frac{1}{a}$$

极点$:z=a,z=\frac{1}{a}$

零点$:z=0$

$$(2)Z[e^{(a+j\omega_0)n}u(n)]=\frac{1}{1-e^{a+j\omega_0}z^{-1}},ROC:|z|>e^{a}$$

极点$:z=e^{a+j\omega_0}$

零点$:z=0$

$$(3)Z[Ar^n\cos(\omega_0 n+\varphi)u(n)]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Ar^n e^{j(\omega_0 n+\varphi)}+Ar^n e^{-j(\omega_0 n+\varphi)}}{2}z^{-n}$$

$$=\frac{Ae^{jp}}{2}\frac{1}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{Ae^{-ip}}{2}\frac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}},$$

$ROC:|z|>r$

$$(4)\,Z[Ar^n\sin(\omega_0 n+\varphi)u(n)]=\sum_{n=0}^{+\infty}Ar^n\,\frac{e^{j(\omega_0 n+\varphi)}-e^{-j(\omega_0 n+\varphi)}}{2j}z^{-n}$$

$$=\frac{Ae^{j\varphi}}{2j}\frac{1}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}-\frac{Ae^{-j\varphi}}{2j}\frac{1}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$ROC:|z|>r$

$z=re^{j\omega_0},z=re^{-j\omega_0}$

$$z=0,z=-\frac{\sin(\omega_0-\varphi)}{\sin\varphi}$$

(5) $Z[a^n u(n)+b^n u(-n-1)]=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}=\dfrac{z(1-\frac{a}{b})}{(z-a)(1-\frac{1}{b}z)}$

$ROC: a>\frac{1}{b}$时$,|z|>a; a\le\frac{1}{b}$时$,|z|>\frac{1}{b}$

极点:z=a,z=b

零点:z=0

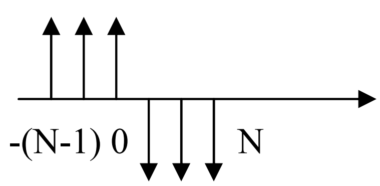
(6) $a^{|n|}\xleftrightarrow{Z}\dfrac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$

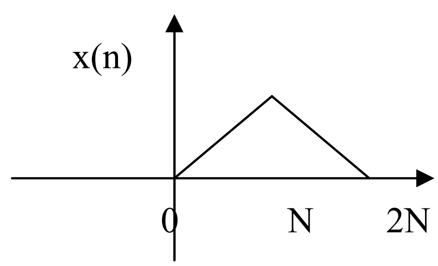
$$a^{|n|}\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}[a^{|n|}e^{j\omega_0 n}+a^{|n|}e^{-j\omega_0 n}]$$

$$\xleftrightarrow{Z}\frac{1}{2}[\frac{1-a^2}{(1-az^{-1}e^{j\omega_0})(1-aze^{-j\omega_0})}+\frac{1-a^2}{(1-az^{-1}e^{-j\omega_0})(1-aze^{j\omega_0})}]$$

$ROC:|a|<|z|<|a|^{-1}$

(7)设 y(n)如图





y(n)=x(n)-x(n-1)

$$Y(z)=\frac{z^{-1}z^{-N}(z^N-1)^2}{1-z^{-1}}$$

$$X(z)=\frac{Y(z)z^{-N}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{(z^N-1)^2}{z^{2N-1}(z-1)^2}$$

(8)X(Z)=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}=e^{z^{-1}},0\le|z|<+\infty$

11.解:

长除法:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+0.5z^{-1}+0.5^2z^{-2}+\cdots \\
z-0.5 & z \\
 & z-0.5 \\ \hline
 & 0.5 \\
 & 0.5-0.5^2z^{-1} \\ \hline
 & 0.5^2z^{-1} \\
 & 0.5^2z^{-1}-0.5^3z^{-1} \\ \hline
 & 0.5^3z^{-1} \\
 & \vdots
\end{array}
$$

所以$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}0.5^n z^{-n}$

$x(n)=0.5^n u(n)$

留数定律: $x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{z^{n-1}}{1-az^{-1}}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{z^n}{z-0.5}dz$

由收敛域可知 x(n)是右边,所以不必考虑 n<0 时的情况

n>=0 有一个极点为 z=0.5

$\mathrm{Re}\,s[X(z)z^{n-1},0.5]=(z-0.5)\frac{z^n}{z-0.5}|_{z=0.5^n}$,也即 $x(n)=0.5^n u(n)$

部分分式法: $X(z)=\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}} \leftrightarrow \quad x(n)=0.5^{n}u(n)$

(2)

长除法:

$$
-0.5+z \overset{-2z-2^{2}z^{2}-2^{3}z^{3}-\cdots}{\overline{\left.\right)z}}
$$

$$
\begin{array}{l}
\underline{z-2z^{2}} \\
2z^{2} \\
\underline{2z^{2}-4z^{3}} \\
4z^{3} \\
\underline{4z^{3}-2^{3}z^{4}} \\
2^{3}z^{4} \\
\vdots
\end{array}
$$

$$X(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty}-(\frac{1}{2})^{n}z^{-n}$$

$$x(n)=-(\frac{1}{2})^{n}u(-n-1)$$

留数法: $x(n)=\dfrac{1}{j2\pi}\oint_{c}\dfrac{z^{n-1}}{1-0.5z^{-1}}$

由收敛域可知 x(n)为左边序列,所以不必考虑 n>=0 的情况

n<0,z=0 处为(-n)阶极点

$$\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1},0]=\frac{1}{(-n-1)!}\frac{d^{-n-1}}{dz^{-n-1}}[(z-0)^{-n}\frac{z^{n}}{z-0.5}]|_{z=0}=-0.5^{n}$$

$$x(n)=-0.5^{n}u(-n-1)$$

部分分式法: $X(z)=\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}} \leftrightarrow x(n)=-0.5^{n}u(-n-1)$

(3)

长除法:

$$-\frac{1}{a}-\frac{1-a^2}{a^2}z^{-1}-\frac{1-a^2}{a^3}z^{-2}\cdots$$

$$-a+z^{-1}\ \overline{)\,1-az^{-1}}$$

$$\frac{1-\frac{1}{a}z^{-1}}{(\frac{1}{a}-a)z^{-1}}$$

$$\frac{\frac{1}{a}-a)z^{-1}-\frac{1-a^2}{a^2}z^{-2}}{\frac{1-a^2}{a^2}z^{-2}}$$

$$\vdots$$

$$x(n)=\begin{cases}0, n<0\\ -\frac{1}{a}, n=0\\ -\frac{1-a^2}{a^{n+1}}, n>0\end{cases}$$

留数定律：由收敛域可知 x(n)为右边序列

n>=0 时, $X(z)z^{n-1}=\frac{z^{n-1}(z-a)}{1-az}$,有极点 z=0, $z=\frac{1}{a}$

$$\mathrm{Re}\,s[X(z)z^{n-1},\frac{1}{a}]=(z-\frac{1}{a})\frac{z^{n-1}(z-a)}{1-az}|_{z=1/a}=-\frac{1-a^2}{a^{n+1}}$$

$$\mathrm{Re}\,s[X(z)z^{n-1},0]=0$$

$$x(n)=\begin{cases}0,n<0\\-\dfrac{1}{a},n=0\\-\dfrac{1-a^2}{a^{n+1}},n>0\end{cases}$$

部分分式法:

$$X(z)=\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}=-\frac{1}{a(1-\frac{1}{a}z^{-1})}+\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$$

$$x(n)=-(\frac{1}{a})^{n+1}u(n)+(\frac{1}{a})^{n}u(n-1)$$

12.解:

$$X(z)=\frac{-32^{-1}z^2}{(1-2z)(2-z)}=\frac{1}{96}\cdot\frac{1}{2-z^{-1}}-\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

零点:z=0(二阶)

极点:z=2,z=1/2

(1)|z|>2 为右边序列,$x(n)=\frac{1}{192}\cdot(\frac{1}{2})^n u(n)-\frac{1}{48}\cdot 2^n u(n)$

(2)|z|<0.5 为左边序列,x(n)=$-\frac{1}{192}(\frac{1}{2})^n u(-n-1)+\frac{1}{48}2^n u(-n-1)$

(3)0.5<|z|<2 为双边序列,x(n)=$\frac{1}{192}(\frac{1}{2})^n u(n)-\frac{1}{48}2^n u(-n-1)$

13.解:

$$(1)X(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})},1<|z|<2$$

$$X(z)=\frac{2}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}}\leftrightarrow x(n)=2^{-(n-1)}u(-n-1)-u(n)$$

$$(2)X(z)=\frac{z-5}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)},0.5<|z|<2$$

$$X(z)=\frac{-8}{1-0.5z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}+\frac{6}{1-2z^{-1}}-\frac{4z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$x(n)=-8\cdot 0.5^{n}u(n)+0.5^{n-1}u(n-1)-6\cdot 2^{n}u(-n-1)+4\cdot 2^{n-1}u(-n)$$

(3)

$$X(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})},|z|<1$$

$$X(z)=\frac{1}{2}[\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1+z^{-1}}]$$

$$x(n)=-\frac{1}{2}u(-n-1)-\frac{1}{2}(-1)^{n}u(-n-1)$$

$$(4)X(z)=\frac{1-z^{-}\cos\omega_0}{1-z^{-1}2\cos\omega_0+z^{-2}}+\frac{z^{-1}(1+\cos\omega_0)}{1-z^{-1}2\cos\omega_0+z^{-2}}$$

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-z^{-1}2\cos\omega_0+z^{-2}}+\frac{1+\cos\omega_0}{\sin\omega_0}\cdot\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-z^{-1}2\cos\omega_0+z^{-2}}$$

$$x(n)=\cos\omega_0 nu(n)+\frac{1+\cos\omega_0}{\sin\omega_0}\sin\omega_0 u(n)$$

$$(5)X(z)=\frac{1}{6}\cdot\frac{6z^{-1}}{(1-6z^{-1})^{2}}\longleftrightarrow x(n)=n6^{n-1}u(n)$$

$$(6)X(z)=\frac{(-1)^{n}+1}{2}(-1)^{n/2}u(n),$$

(7)

$$X(z)=z^{-1}+6z^{-4}+5z^{-7}$$
$$x(n)=\delta(n-1)+6\delta(n-4)+5\delta(n-7)$$

14．解： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}$

$$=\delta(n)+\frac{1}{n!}$$

15．解：

(1)

$$a^{n}u(n)\longleftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}},|z|>a$$
$$\because nx(n)\longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}\therefore na^{n}u(n)\longleftrightarrow\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{2}}$$

(2)

$$na^{n}u(n)\longleftrightarrow\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^{2}}\therefore n^{2}a^{n}u(n)\longleftrightarrow\frac{2az^{-1}-az^{-3}}{(1-az^{-1})^{4}}$$

16．证明： $Z[x(-n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(z^{-1})^{-n}=X(z^{-1})$

17．解：

$$x(n)=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}})^{n}$$
$$x^{*}(n)=(\sqrt{2})^{n+1}e^{-j\frac{(n+1)\pi}{4}}u(n)$$

18．解：

x(n)是因果序列， $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z),x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$

(1) $x(0)=1, x(\infty)=\frac{30}{13}$

(2) $x(0)=0, x(\infty)=2$

(3) $x(0)=1, x(\infty)=-3$

19．解：

(1) $f(n)=x(n)\otimes y(n)=a^n\frac{1-(a^{-1}b)^{n+1}}{1-a^{-1}b}$

(2)

$$x(n)\longleftrightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}, y(n)\longleftrightarrow\frac{1}{1-bz^{-1}}$$

$$F(z)=\frac{a}{a-b}\cdot\frac{1}{1-az^{-1}}-\frac{b}{a-b}\cdot\frac{1}{1-bz^{-1}}$$

$$f(n)=\frac{a}{a-b}a^nu(n)-\frac{b}{a-b}b^nu(n)=\frac{1-(a^{-1}b)^{n+1}}{1-a^{-1}b}u(n)$$

20．解：

(1)

$$f(n)=\sum a^{n-m}u(n-m)b^mu(-m)$$

$$n\le 0, f(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}a^{n-m}b^m=a^n\cdot\frac{(a^{-1}b)^n}{1-a^{-1}b}, |a^{-1}b|<1, a\ne 0$$

$$n>0, f(n)=a^n\frac{1}{1-a^{-1}b}, |a^{-1}b|<1, a\ne 0$$

(2) $f(n)=a^nu(n)*\delta(n-2)=a^{n-2}, n\ge 2$

(3) $f(n)=\sum a^{n-m}u(n-m)u(m-1)=\frac{a^{-1}(a^n-1)}{1-a^{-1}}, n\ge 1$

21．解：

(1) 直接法 $x(n)y(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}\frac{1}{2j}[\frac{1}{1-ae^{j\omega_0}z^{-1}}-\frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}z^{-1}}$

复卷积法：

$$x(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}X(z)=\frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)},|a|<|z|<|a|^{-1}$$

$$y(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}Y(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}},|z|>b$$

$$\omega(n)=x(n)y(n),W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y(z/v)v^{-1}dv,|z|>|ab|$$

极点：$v_1=a,v_2=\frac{1}{a},v_3=\frac{z}{b},v_2,v_3$不在$c$内

$$W(z)=\frac{1}{1-abz^{-1}},|z|>|ab|$$

22．解：

$$(1)X(z)=\frac{0.99}{(1-0.1z^{-1})(1-0.1z)}=\frac{0.1z^{-1}}{1-0.1z^{-1}}-\frac{10z^{-1}}{1-10z^{-1}},0.1<|z|<10$$

$$x(n)=(0.1)^n u(n-1)-10^n u(-n)$$

$$Y(z)=\frac{z^{-1}}{z^{-1}-10}\overset{z}{\leftrightarrow}y(n)=-(0.1)^n u(n-1),|z|>0.1$$

$$x(n)y(n)=-(0.1)^{2n}u(n-1)\overset{z}{\leftrightarrow}Z[x(n)y(n)]=\frac{-0.01z^{-1}}{1-0.01z^{-1}},z>0.01$$

$$(2)X(z)=\frac{0.99}{(1-0.1z^{-1})(1-0.1z)}=\frac{0.1z^{-1}}{1-0.1z^{-1}}-\frac{10z^{-1}}{1-10z^{-1}},0.1<|z|<10$$

$$x(n)=(0.1)^{n}u(n-1)-10^{n}u(-n)$$

$$Y(z)=\frac{z^{-1}}{z^{-1}-10}\overset{z}{\leftrightarrow}y(n)=-(0.1)^{n}u(n-1),|z|<0.1$$

$$y(n)=(0.1)^{n}u(-n)$$

$$x(n)y(n)=-u(-n)$$

$$Z[x(n)y(n)]=-\frac{1}{1-z^{-1}},|z|<1$$

$$(3)X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}},|z|>0.5\overset{z}{\longleftrightarrow}x(n)=0.5^{n}u(n)$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-2z},|z|<0.5\overset{z}{\longleftrightarrow}y(n)=0.5^{n}u(-n)$$

$$x(n)y(n)=\delta(n)\overset{z}{\longleftrightarrow}1$$

23．解：直接法

$$(1)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)=\frac{1}{1-abz^{-1}}，\quad |ab|<1$$

$$(2)\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)=1$$

$$(3)\quad\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)=n_0a^{n_0}$$

帕塞伐定律

(1)

$$X(v)Y^*(1/v^*)v^{-1}=\frac{1}{(v-a)(1-bv^*)},|a|<|v|<|\frac{1}{b}|$$

极点：z=a,,由留数定律得：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)=\frac{1}{1-abz^{-1}}$

同理得：

(2)) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)=1$

(3) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n)=n_0a^{n_0}$

24．证明：

$$x(n)*y(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)y(n-m)$$

x(n)与 y(n)为稳定的因果序列

当 n=0 时，x(n)*y(n)=x(0)y(0)

式左边=x(0)y(0)

$$\because\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})d\omega=x(0),\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Y(e^{j\omega})d\omega=y(0)$$

式右边=x(0)y(0)　　左边等于右边

25．解：

$$(1)X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}},0<a<1$$

$$(2)X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}2a\cos\omega_0+z^{-2}a^2}\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}2a\cos\omega_0+a^2e^{-j2\omega}},0<a<1$$

$$(3)X(z)=\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j6\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$(4)X(z)=\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1-ae^{-j\omega}}{e^{-j\omega}-a},a>1$$

26．解：

$$(1)x(n)=\delta(n)\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})=1;(2)x(n)=\delta(n-n_0)\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_0}$$

$$(3)x(n)=e^{-an}u(n)\xleftrightarrow{F}X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-a-j\omega}}$$

$$(4)X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-a+j(\omega_0-\omega)}};(5)X(e^{j\omega})=\frac{1-\cos\omega_0e^{-a-j\omega}}{1-2\cos\omega_0e^{-a-j\omega}+e^{-2a-j2\omega}}$$

$$(6)X(e^{j\omega})=\frac{\sin\omega_0e^{-a-j\omega}}{1-2\cos\omega_0e^{-a-j\omega}+e^{-2a-j2\omega}};(7)X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$(8)X(e^{j\omega})=e^{-j\omega N}[\frac{1-e^{-j2\omega N}}{1-e^{-j\omega}}-\frac{1}{2}\frac{1-e^{-j2\omega N}}{1-e^{j(\frac{\pi}{N}-\omega)}}-\frac{1}{2}\frac{1-e^{-j2\omega N}}{1-e^{-j(\frac{\pi}{N}+\omega)}}]$$

27．解：$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}e^{j\omega_0 n}d\omega=\frac{1}{\pi n}\sin\omega_0 n$

28．证明：$x(-n)\overset{F}{\leftrightarrow}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(-n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j(-\omega)n}=X(e^{-j\omega})$

29．证明：

$$x(n)\stackrel{F}{\longleftrightarrow}X(e^{j\omega}),x(-n)\stackrel{F}{\longleftrightarrow}X(e^{-j\omega}),\text{令}X(e^{j\omega})=Ae^{j\phi(\omega)}$$
$$x(n)=x(-n)\Rightarrow Ae^{j\phi(\omega)}=Ae^{j\phi(-\omega)}\Rightarrow\phi(\omega)-\phi(-\omega)=2k\pi$$
$\therefore\phi(\omega)$是线性的

同理$x(n)=-x(-n)\Rightarrow\phi(\omega)$是线性的

30．解：设延迟器的输入为 $x_1(n)$

$$\begin{cases}y(n)=a_1x_1(n-1)+a_0x_1(n)\\x_1(n)=x(n)+b_1x_1(n)\end{cases}\Rightarrow y(n)=b_1y(n-1)+a_1x(n-1)+a_0x(n)$$

系统函数为：$H(z)=\dfrac{a_0+a_1z^{-1}}{1-b_1z^{-1}}$

(1) $H(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}},h(n)=0.5^{n-1}u(n-1)$ 无零点，极点：z=0.5

(2) $H(z)=\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}},h(n)=0.5^{n}u(n)$，零点：z=0，极点：z=0.5

(3) $H(z)=\dfrac{0.5+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}},h(n)=0.5^{n+1}u(n)+0.5^{n-1}u(n-1)$

零点：z=-2，极点：z=0.5

(4) $H(z)=\dfrac{-0.5+z^{-1}}{1-0.5z^{-1}},h(n)=-0.5^{n+1}u(n)+0.5^{n-1}u(n-1)$

零点：z=2，极点：z=0.5

本题图略

31．解：

差分方程为：y(n)=x(n)+x(n-N)

系统函数为：$H_0(z)=1+z^{-N}$，零点：$z=e^{j\frac{\pi}{N}k},k=0,1,2,\dots N-1$取奇数

无极点

$$h_0(n)=\delta(n)+\delta(n-N)$$
$$Y(e^{j\omega})=(1+e^{-j\omega N})X(e^{j\omega})$$

本题图略

32．解：

差分方程为：y(n)=ax(n)+ax(n-1)+by(n-1)-y(n-2)

系统函数为：$H_1(z)=\dfrac{1+az^{-1}}{1-bz^{-1}+z^{-2}}$,零点$:z=0,-1,$极点$:z=\cos\dfrac{2\pi}{N}\pm j\sin\dfrac{2\pi}{N}$

$$H_1(z)=\frac{1}{2}[\frac{1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}}z^{-1}}]\xleftrightarrow{Z^{-1}}h_1(n)=\cos\frac{2\pi}{N}nu(n)$$

该系统是 IIR 系统，是递归结构,图略

33．解：

$$H(z)=(1+z^{-N})\cdot\frac{1}{2}[\frac{1}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}}z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}}z^{-1}}]$$
$$h(n)=\cos\frac{2\pi}{N}nu(n)+\cos\frac{2\pi}{N}(n-N)u(n)=2\cos\frac{2\pi}{N}nu(n)$$

零点：$z=e^{j\frac{\pi}{N}k},k=0,1,2,\dots N-1$取奇数，z=0

极点：$z=e^{\pm j\frac{2\pi}{N}}$

是 IIR 系统,非递归结构

34．解：

$$H(z)=\sum_{i=0}^{N-1}\cos\frac{2\pi}{N}iz^{-i}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(e^{j\frac{2\pi}{N}i}+e^{-j\frac{2\pi}{N}i})z^{-i}$$

$$=\frac{1}{2}[\sum_{i=0}^{N-1}(e^{j\frac{2\pi}{N}}z^{-1})^{i}+\sum_{i=0}^{N-1}e^{-j\frac{2\pi}{N}}z^{-1}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1-z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}}z^{-1}}+\frac{1-z^{-N}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}}z^{-1}}]$$

$$=\frac{(1-\cos\frac{2\pi}{N}z^{-1})(1-z^{-N})}{1-2\cos\frac{2\pi}{N}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$=\frac{1-\cos\frac{2\pi}{N}z^{-1}-z^{-N}+\cos\frac{2\pi}{N}z^{-(N+1)}}{1-2\cos\frac{2\pi}{N}z^{-1}+z^{-2}}$$

|z|>0

零点：$z^{-N}=1\Rightarrow z=e^{j\frac{2\pi}{N}k},k=0,1,2,\ldots,N-1$

极点：$\begin{cases}z=e^{j\frac{2\pi}{N}}\\ z=e^{-j\frac{2\pi}{N}}\ \text{其中极点}\ z=e^{j\frac{2\pi}{N}}\ \text{与零点}\ z=e^{j\frac{2\pi}{N}}\ \text{抵消}\\ z=0\end{cases}$

所以共有零点(N-1)个

35．解：

(1)

$$G(z)=X(z)H(z),R(z)=G(z^{-1})H(Z)\Rightarrow Y(z)=H(z)H(z^{-1})X(z)$$
$$\because h(n)\text{是实序列}\therefore H(z^{-1})=H^{*}(z)\Rightarrow H(z)H(z^{-1})=|H(z)|^{2}$$

所以具有零相位

$$h_0(n)=h(n)*h(-n)$$

(2)

$$G(z)=X(z)H(z),R(z)=X(z^{-1})H(z),Y(z)=G(z)+R(z^{-1})$$
$$\therefore Y(z)=X(z)[H(Z)+H(z^{-1})]$$
$$H(z^{-1})+H(z)=2\operatorname{Re}s[H(z)]$$

所以具有零相移

$$h_1(n)=h(n)+h(-n)$$

第二章 离散傅里叶变换(DFT)

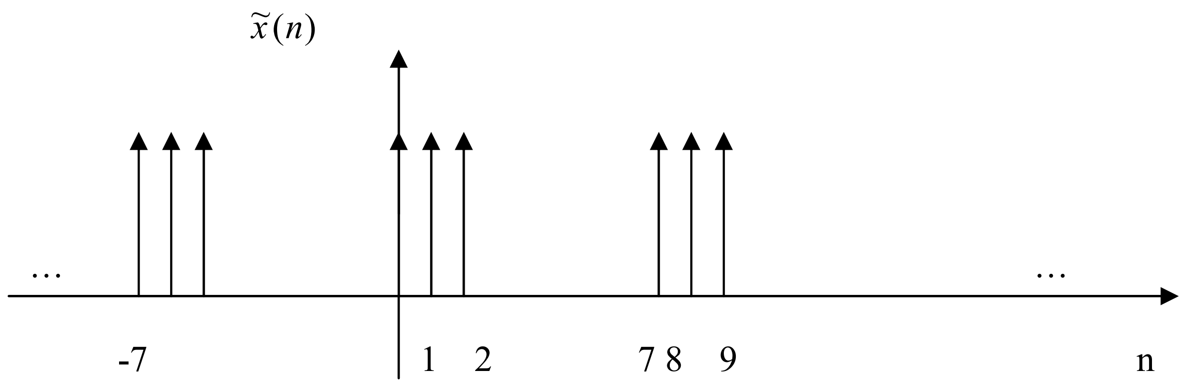
1． 设 x(n)=R3(n)

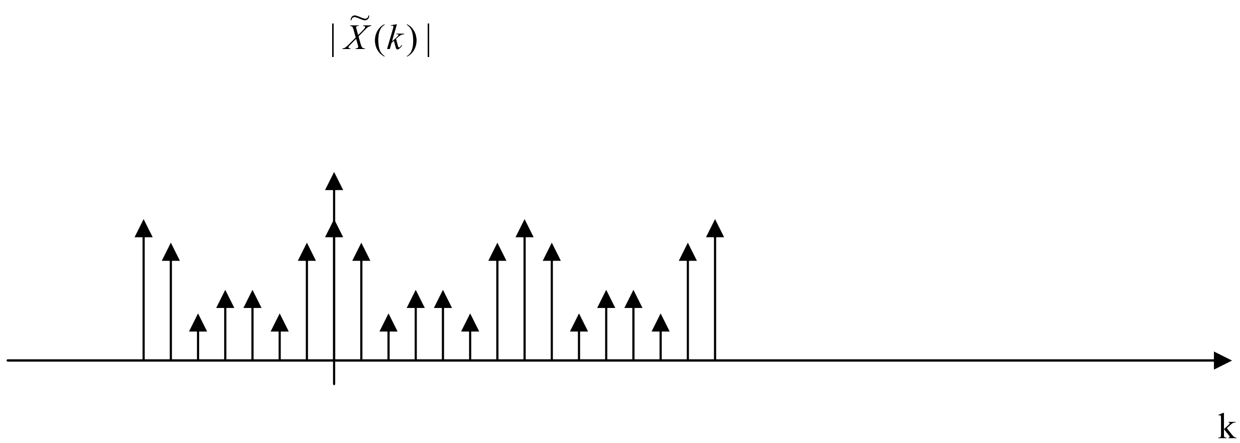
求 $\widetilde{X}(k)$，并作图表示 $\widetilde{x}(n)$，$\widetilde{X}(k)$。

$$\widetilde{x}(n)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n+7r)$$

解：$\widetilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$=\sum_{n=0}^{2}e^{-j\frac{2\pi}{7}kn}=e^{-j\frac{2\pi}{7}k}\frac{\sin(\frac{3\pi}{7}k)}{\sin(\frac{\pi}{7}k)}$$





2.设

$$x(n)=\begin{cases}1,0\le n\le 3\\0,其它n\end{cases}\qquad y(n)=\begin{cases}1,4\le n\le 6\\0,其他n\end{cases}$$

$$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+7r)\qquad \tilde{y}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}y(n+7r)$$

求：$\tilde{x}(n)$，$\tilde{y}(n)$的周期卷积序列$\tilde{f}(n)$，以及$\tilde{F}(k)$。

解：

$$\tilde{f}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}f(n+7r)$$

$$f(n)=3\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)+0\delta(n-3)+\delta(n-4)+2\delta(n-5)+3\delta(n-6)$$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{2\pi}{7}kn}=e^{-j\frac{3\pi}{7}k}\frac{\sin(\frac{4\pi}{7}k)}{\sin(\frac{\pi}{7}k)}$$

$$\tilde{Y}(k)=\sum_{n=4}^{6}e^{-j\frac{2\pi}{7}kn}=e^{-j\frac{10\pi}{7}k}\frac{\sin(\frac{3\pi}{7}k)}{\sin(\frac{\pi}{7}k)}$$

$$\tilde{F}(k)=\tilde{X}(k)\tilde{Y}(k)=e^{-j\frac{13\pi}{7}k}\frac{\sin(\frac{4\pi}{7}k)\sin(\frac{3\pi}{7}k)}{\sin^2(\frac{\pi}{7}k)}$$

2．用封闭形式表达以下有限长序列的 DFT[x(n)]。

解：

(1)

$$x(n)=e^{j\omega 0n}R_N(n)$$

X(k)=DFT[x(n)]

$$=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\omega_0 n}W_N^{kn}R_N(k)=\frac{1-e^{j\omega_0 N}W_N^{kN}}{1-e^{j\omega_0}W_N^k}R_N(k)$$

$$=e^{j(\frac{\pi}{N}k+\frac{N-1}{2}\omega_0)}\frac{\sin(\frac{\omega_0}{2}N)}{\sin(\frac{\omega_0}{2}-\frac{\pi k}{N})}R_N(k)$$

(2)

$$x(n)=\cos\omega_0 nR_N(n)$$

$\because \cos\omega_0 n=R_e[e^{j\omega_0 n}]$由关系：$R_e[x(n)]\leftrightarrow\frac{1}{2}[X(k)+X^*(k)]$

有：$X(k)=DFT[x(n)]=[\frac{1}{2}\frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{j\omega_0}W_N^k}+\frac{1}{2}\frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{-j\omega_0}W_N^k}]R_N(k)$

$$=\frac{1-\cos\omega_0 N-W_N^k\cos\omega_0+W_N^k\cos(N-1)\omega_0}{1-2\cos\omega_0 W_N^k+W_N^{2k}}R_N(k)$$

(3)

$$x(n)=\sin\omega_0 nR_N(n)$$

$\because \sin\omega_0 n=\mathrm{Im}[e^{j\omega_0 n}]$由关系:$\mathrm{Im}[x(n)]\leftrightarrow\frac{1}{2j}[X(k)-X^*(k)]$

有：X(k)=DFT[x(n)]

$$X(k)=[\frac{1}{2j}\frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{j\omega_0}W_N^k}-\frac{1}{2j}\frac{1-e^{-j\omega_0 N}}{1-e^{-j\omega_0}W_N^k}]R_N(k)$$

$$=\frac{W_N^k\sin\omega_0-\sin\omega_0 N-\sin(N-1)\omega_0 W_N^k}{1-2\cos\omega_0 W_N^k+W_N^{2k}}R_N(k)$$

(4)

$$x(n)=nR_N(n)$$
$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{kn}R_N(k)=-(\frac{N}{1-W_N^k})R_N(k)=e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{N}k)}\frac{N}{2\sin(\frac{\pi}{N}k)}R_N(k)$$

$$x(n)=nR_N(n)$$
$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{kn}R_N(k)=-(\frac{N}{1-W_N^k})R_N(k)=e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{N}k)}\frac{N}{2\sin(\frac{\pi}{N}k)}R_N(k)$$

4.已知以下 X(k),求 IDFT[X(k)],其中 m 为某一正整数,0<m<N/2.

解：(1)

$$X(k)=\begin{cases}\frac{N}{2}e^{j\theta},k=m\\ \frac{N}{2}e^{-j\theta},k=N-m\\ 0,其他k\end{cases}$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(K)W_N^{-kn})R_N(n)$$

$$=\frac{1}{2}(e^{j\theta}W_N^{-mn}+e^{-j\theta}W_N^{-(N-m)n})R_N(n)$$
$$=\frac{1}{2}(e^{j\theta}e^{j\frac{2\pi mn}{N}}+e^{-j\theta}e^{-j\frac{2\pi mn}{N}})R_N(n)$$

$$=\cos(\frac{2\pi mn}{N}+\theta)R_N(n)$$

(2)

$$X(k)=\begin{cases}-\frac{N}{2}je^{j\theta},k=m\\ \frac{N}{2}je^{-j\theta},k=N-m\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

x(n)=IDFT[X(k)]=（$\frac{1}{N}\sum X(k)W_N^{-kn})R_N(n)$

$$=\frac{1}{2j}(e^{j\theta}e^{j\frac{2\pi mn}{N}}-e^{-j\theta}e^{-j\frac{2\pi mn}{N}})R_N(n)$$

$$=\sin(\frac{2\pi mn}{N}+\theta)R_N(n)$$

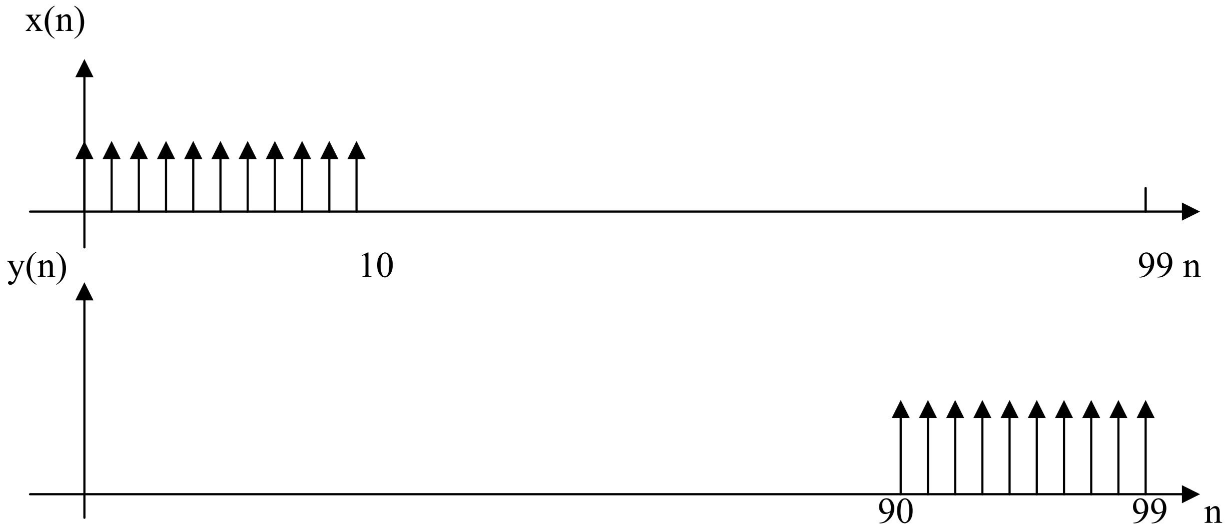
5．有限长为 N=100 的两序列

$$x(n)=\begin{cases}1,0\le n\le 10\\ 0,11\le n\le 99\end{cases},y(n)=\begin{cases}1,n=0\\ 0,1\le n\le 89\\ 1,90\le n\le 99\end{cases}$$

作出 x(n),y(n)示意图,并求圆周卷积 f(n)=x(n)⊗y(n)并作图。

解：

$$f(n)=x(n)\otimes y(n)=\begin{cases}11-n,0\le n\le 10\\ n-89,90\le n\le 99\\ 0,\text{其他}n\end{cases}$$



6．有限长序列 N=10 的两序列

$$x(n)=\begin{cases}1,0\le n\le 4\\0,5\le n\le 9\end{cases},y(n)=\begin{cases}1,0\le n\le 4\\-1,5\le n\le 9\end{cases}$$

用作图表示 x(n),y(n)f(n)=x(n)⊗y(n)。

解：

7．已知两有限长序列 $x(n)=\cos(\frac{2\pi}{N}n)R_N(n), y(n)=\sin(\frac{2\pi}{N}n)R_N(n)$ 用卷积法和 DFT 变换两种方法分别求解 f(n)。

解：(1)

$$f(n)=x(n)*\widetilde{x}(n)=(\sum_{m=0}^{N-1}x(m)x((n-m))_N)R_N(n)$$

$$=(\sum_{m=0}^{N-1}\cos\frac{2\pi}{N}m\cos\frac{2\pi}{N}(n-m))R_N(n)$$

$$=(\cos\frac{2\pi}{N}n\sum_{m=0}^{N-1}\cos^2\frac{2\pi}{N}m+\sin\frac{2\pi}{N}n\sum_{m=0}^{N-1}\cos\frac{2\pi}{N}m\sin\frac{2\pi}{N}m)$$

$$=\frac{N}{2}\cos\frac{2\pi}{N}nR_N(n)$$

$$X(k)=DFT[x(n)]=\begin{cases}N/2, k=1, N-1\\0, \text{其他}k\end{cases}$$

$$F(k)=\begin{cases}N^2/4,k=1,N-1\\0,其他k\end{cases}$$

$$f(n)=(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k)W_N^{-kn})R_N(n)$$

$$=[\frac{N}{4}(W_N^{-n}+W_N^{-(N-1)n})R_N(n)$$

$$=\frac{N}{4}(e^{j\frac{2\pi}{N}n}+e^{-j\frac{2\pi}{N}n})R_N(n)$$

$$=\frac{N}{4}\cos\frac{2\pi}{N}nR_N(n)$$

(2)

$$f(n)=y(n)*x(n)=(\sum_{m=0}^{N-1}y(m)x((n-m))_N)R_N(n)$$

$$=(\sum_{m=0}^{N-1}\sin\frac{2\pi}{N}m\cos\frac{2\pi}{N}(n-m))R_N(n)$$

$$=(\cos\frac{2\pi}{N}n\sum_{m=0}^{N-1}\sin\frac{2\pi}{N}m\cos\frac{2\pi}{N}m+\sin\frac{2\pi}{N}n\sum_{m=0}^{N-1}\sin^2\frac{2\pi}{N}m)R_N(n)$$

$$=\frac{N}{2}\sin\frac{2\pi}{N}nR_N(n)$$

$$X(k)=DFT[x(n)]=\begin{cases}N/2,k=1,N-1\\0,其他k\end{cases}$$

$$Y(k)=DFT[y(n)]=\begin{cases}-j\frac{N}{2},k=1\\j\frac{N}{2},k=N-1\\0,其他k\end{cases}$$

$$F(k)=\begin{cases}-j\dfrac{N^2}{4},k=1\\ j\dfrac{N^2}{4},k=N-1\\ 0,\text{其他}k\end{cases}$$

$$f(n)=(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k)W_N^{-kn})R_N(n)=(\frac{N}{4j}W_N^{-n}-\frac{N}{4j}W_N^{-(N-1)n})R_N(n)$$

$$=\frac{N}{2}(\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n}-e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}{2j})R_N(n)=\frac{N}{2}\sin\frac{2\pi}{N}nR_N(n)$$

(3)

$$f(n)=y(n)*y(n)=(\sum_{m=0}^{N-1}y(m)y((n-m))_N)R_N(n)$$

$$=(\sum_{m=0}^{N-1}\sin\frac{2\pi}{N}m\sin\frac{2\pi}{N}(n-m))R_N(n)$$

$$=(\sin\frac{2\pi}{N}n\sum_{m=0}^{N-1}\sin\frac{2\pi}{N}m\cos\frac{2\pi}{N}m-\cos\frac{2\pi}{N}n\sum_{m=0}^{N-1}\sin^2\frac{2\pi}{N}m)R_N(n)$$

$$=-\frac{N}{2}\cos\frac{2\pi}{N}nR_N(n)$$

$$F(k)=\begin{cases}-\dfrac{N^2}{4},k=1,N-1\\ 0,\text{其他}k\end{cases}$$

$$f(n)=(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k)W_N^{-kn})R_N(n)=[-\frac{N}{4}(W_N^{-n}+W_N^{-(N-1)n})]R_N(n)=-\frac{N}{2}\cos\frac{2\pi}{N}nR_N(n)$$

8．x(n)为长为 N 有限长序列，$x_e(n)$，$x_o(n)$ 分别为 x(n)的圆周共轭偶部及奇部，也即：

$$x_e(n) = x_e^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$

$$x_0(n) = -x_o^*(N-n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$$

证明：$DFT[x_e(n)] = R_e[X(k)], DFT[x_o(n)] = j\,\mathrm{Im}[X(k)]$

证明：

$$DFT[x_e(n)] = \frac{1}{2}DFT[x(n)] + \frac{1}{2}DFT[x^*(N-n)] = \frac{1}{2}X(k) + \frac{1}{2}X^*(N-N+k)$$

$$= \frac{1}{2}X(k) + \frac{1}{2}X^*(k) = R_e[X(k)]$$

$$DFT[x_o(n)] = \frac{1}{2}X(k) - \frac{1}{2}X^*(k) = j\,\mathrm{Im}[X(k)]$$

9．证明：若 x(n)实偶对称，即 x(n)=x(N-n),则 X(k)也实偶对称；

若 x(n)实奇对称，即 x(n)=-x(N-n),则 X(k)为纯虚数并奇对称。

证：

(1)
$$x(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(N-n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$$
$$X(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] = R_e[X(k)],\text{实函数}$$

又：$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(N-n) W_N^{kn} R_N(k)$

$$= \sum_{m=1}^{N} x(m) W_N^{-km} R_N(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-km} R_N(k)$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{(N-k)m} R_N(k) = X(N-k),\text{偶对称}$$

(2)

$$x(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(N-n)]=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]$$

$$X(k)=\frac{1}{2}[X(k)-X^*(k)]=j\operatorname{Im}[X(k)],\text{纯虚数}$$

$$\because x(-n)\leftrightarrow X(-k)$$

$$x(N-n)\leftrightarrow W_N^{-kN}X(-k)=X(-k)=X(N-k)$$

$$\text{又}:X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}R_N(k)=-\sum_{m=0}^{N-1}x(N-n)W_N^{kn}$$

$$=-X(N-k),\text{奇对称}$$

10．若已知：DFT[x(n)]=X(k)

求：$DFT[x(n)\cos(\frac{2\pi m}{N}n)],DFT[x(n)\sin(\frac{2\pi m}{N}n)]$。

解：

$$\widetilde{x}(n)=x((n))_N,x(n)=x((n))_N R_N(n)$$

$$DFS[\widetilde{x}(n)\cos\frac{2\pi m}{N}n]=\frac{1}{2}DFS[\widetilde{x}(n)W_N^{-mn}+\widetilde{x}(n)W_N^{mn}]=\frac{1}{2}[X((k-m))_N-X((k+m))_N]$$

$$\therefore DFT[x(n)\cos\frac{2\pi m}{N}n]=\frac{1}{2}[X((k-m))_N-X((k+m))_N]R_N(n)$$

同理：$DFT[x(n)\sin\frac{2\pi m}{N}n]=\frac{1}{2j}[X((k-m))_N-X((k+m))_N]R_N(n)$

11．若长为 N 的有限长序列 x(n)是序列 x(n)=$R_N(n)$

(1)求 Z[x(n)]并画出其零极点分布；

(2)求频谱 $X(e^{j\omega})$ 并作幅度曲线；

(3)求 DFT[x(n)]用封闭形式表达式，并对照 $X(e^{j\omega})$。

解：(1)

$$Z[x(n)]=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{z^{N}-1}{z^{N-1}(z-1)}$$

图略

(2)

$$X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

(3) $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{kn}=\frac{1-W_N^{kN}}{1-W_N^{k}}=N\delta(k)$

12．已知 x(n)是长为 N 的有限序列，X(k)=DFT[x(n)],现将长度扩大 r 倍,得长度为 rN 的有限长序列 y(n)

$$y(n)=\begin{cases}x(n),0\le n\le N-1\\0,N\le n\le rN-1\end{cases}$$

求：DFT[x(n)]与 X(k)的关系。

解：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{rN-1}y(n)W_{rN}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\frac{k}{r}n}=X(\frac{k}{r})$$

$$(2)X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$(3)X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{kn}=\frac{1-W_N^{kN}}{1-W_N^{k}}=N\delta(k)$$

12.已知$x(n)$是长为N的有限长序列,$X(k)=DFT[x(n)]$,现将长度扩大r倍,得长度为rN的有限长序列$y(n)$

$$y(n)=\begin{cases}x(n),0\le n\le N-1\\0,N\le n\le rN-1\end{cases}$$

求:$DFT[y(n)]$与$X(k)$的关系

解:$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{rN-1}y(n)W_{rN}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{\frac{k}{r}n}=X(\frac{k}{r}).$$

13.已知 x(n)是长为 N 的有限长序列,X(K)=DFT[x(n)],现将 x(n)的每两点之间补进 r-1 个零点,得到一长为 rN 的有限长序列 y(n)

$$y(n)=\begin{cases}x(n/r),n=ir,i=0,\cdots,N-1\\0,其他n\end{cases}$$

求：DFT[y(n)]与 X(k)的关系。

解：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{rN-1}y(n)W_{rN}^{kn}=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{ki}=X(k)$$

14．若 DFT[x(n)]=X(k)，求证：DFT[x(n)]=N $x((-k))_N$

证：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},0\le n\le N-1$$

$$N\tilde{x}(n)=Nx((n))_N=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

上式中，令 k=m　-n=k

则：$$Nx((-k))_N=\sum_{m=0}^{N-1}X(m)W_N^{km}$$

$$Nx((-k))_N=DFT[X(n)]$$

15．已知复有限长序列 f(n)是由两实有限长序列 x(n),y(n)组成 f(n)=x(n)+jy(n)，令已知 DFT[f(n)]=F(k),求 X(k),Y(k)以及 x(n),y(n)。

解：

(1) $$F(k)=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha W_N^k}+j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$$

$$X(k)=DFT[x(n)]=DFT[R_e(f(n))]=\frac{1}{2}[F(k)+F^*(N-k)]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha W_N^k}+j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}+\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha W_N^k}-j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}]$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{2(1-\alpha^N)}{1-\alpha W_N^k}]=\frac{1-\alpha^N}{1-\alpha W_N^k}$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\alpha^nR_N(n)$$

$$Y(k)=DFT[\mathrm{Im}(f(n))]=\frac{1}{2j}[F(k)-F^*(N-k)]=\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$$

$$y(n)=b^nR_N(n)$$

(2)

$F(k)=1+jN$

$X(k)=DFT[R_e(f(n))]=\frac{1}{2}[F(k)+F^*(N-k)]=1$

$x(n)=\delta(n)$

$Y(k)=DFT[\mathrm{Im}(f(n))]=\frac{1}{2j}[F(k)-F^*(N-k)]=N$

y(n)= $N\delta(n)$

16．已知序列 x(n)= $a^n u(n)$,0<a<1,今对其 z 变换 X(z)在单位圆上 N 等分采样，采样值为 X(k)=X(z)$|_{z=W_N^{-1}}$,求有限长序列 IDFT[X(k)]。

解：方法一

$$X(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a^m z^{-m}$$

$$X(k)=X(z)|_{z=W_N^{-k}}=\sum a^m W_N^{km}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{\infty}a^m\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}=\begin{cases}0, m\neq n+rN\\ \sum_{r=0}^{\infty}a^m R_N(n), m=n+rN\end{cases}=\frac{a^n}{1-a^N}R_N(n)$$

方法二

$$\because DFT[a^n R_N(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}a^n W_N^{kn}=\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}$$

$$\therefore \frac{a^n R_N(n)}{1-a^N}=IDFT[\frac{1}{1-aW_N^k}]=IDFT[X(k)]=x(n)$$

17．设 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列，通过系统 H(z)以后，求证序列 $\tilde{y}(n)$ 为

$$\tilde{y}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(W_N^k)\tilde{X}(k)W_N^{-kn}$$

证：在单位圆上对 H(z)N 等分采样，$H(z)|_{z=W_N^{-k}}=\tilde{H}(W_N^{-k})$, x(n)通过系统 H(z)以后,

输出频谱为

$$\widetilde{Y}(k) = \widetilde{X}(k)\widetilde{H}(W_N^{-k})$$

$$\widetilde{y}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Y}(k)W_N^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{H}(W_N^{-k})\widetilde{X}(k)W_N^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H(W_N^{-k})\widetilde{X}(k)W_N^{-kn}$$

18．若系统 H(z)的输入为周期单位脉冲序列

$\widetilde{x}(n) = \widetilde{\delta}(n) = \begin{cases} 1, n = mN, m\text{为任意整数} \\ 0, \text{其他}n \end{cases}$，并测得系统输出序列 $\widetilde{y}(n)$ 及 DFS[$\widetilde{y}(n)$]=$\widetilde{Y}(k)$,问：系统函数在单位圆上的采样值等于多少？

解：

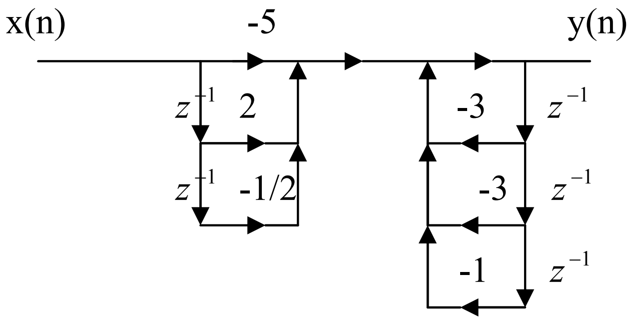
$$\widetilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)W_N^{kn} = W_N^{knm} = 1$$

$$\widetilde{Y}(k) = \widetilde{X}(k)\widetilde{H}(W_N^{-k}) = \widetilde{H}(W_N^{-k})$$

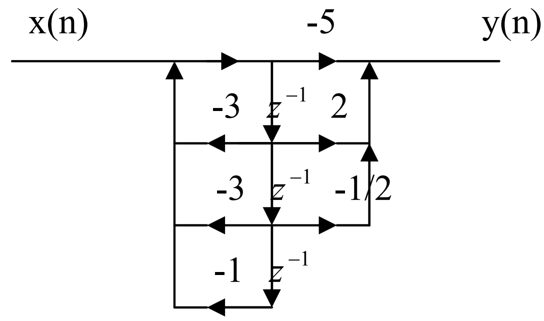
$$H(W_N^{-k}) = Y((k))_N R_N(k) = \widetilde{Y}(k)R_N(k) = Y(k)$$

第三章　用直接型及正准型结构实现以下传递函数

1．(1) $H(z)=\dfrac{-5+2z^{-1}-0.5z^{-2}}{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}$

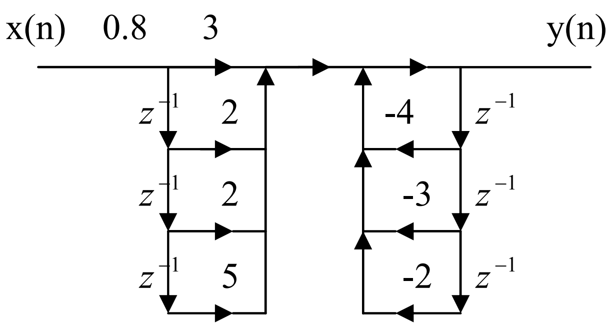


直接型

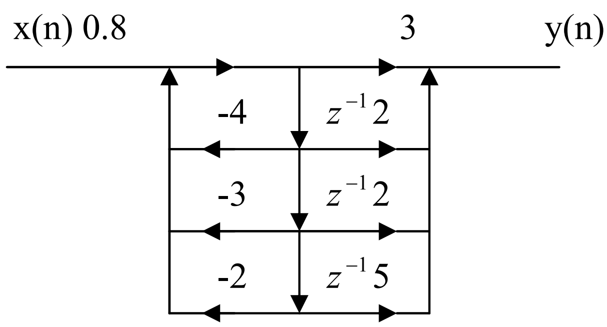


正准型

(2)　$H(z)=\dfrac{0.8(3z^{3}+2z^{2}+2z+5)}{z^{3}+4z^{2}+3z+2}=0.8\dfrac{3+2z^{-1}2z^{-2}+5z^{-3}}{1+4z^{-1}3z^{-2}+2z^{-3}}$

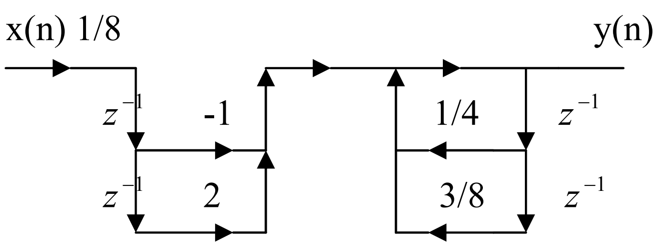


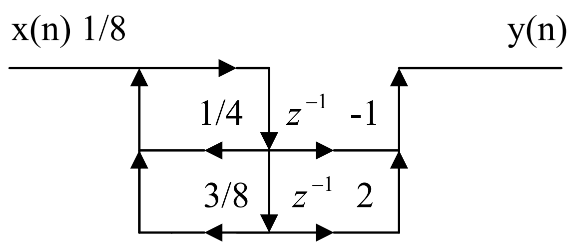
直接型



正准型

(3)　$H(z)=\dfrac{-z+2}{8z^{2}-2z-3}=\dfrac{1}{8}\dfrac{-z^{-1}+2z^{-2}}{1-1/4z^{-1}-3/8z^{-2}}$



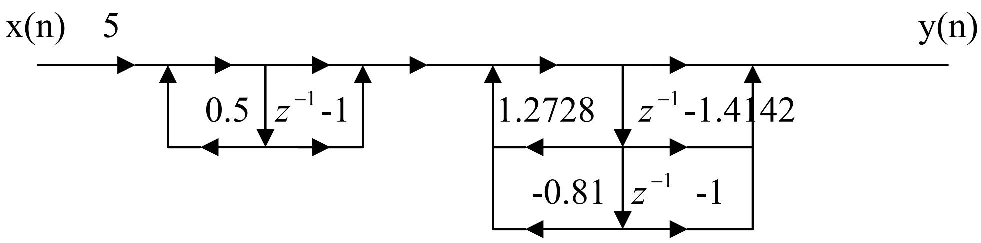


2．用级联型结构实现以下传递函数

$$H(z)=\frac{5(1-z^{-1})(1-1.4142z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.5z^{-1})(1-1.2728z^{-1}+0.81z^{-2})}$$

一共能有几种级联型网络？

解：



级联型之一

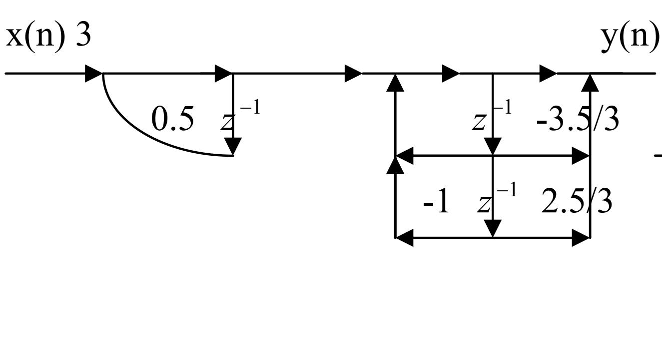
共有 2！*2！=4 种级联型网络。

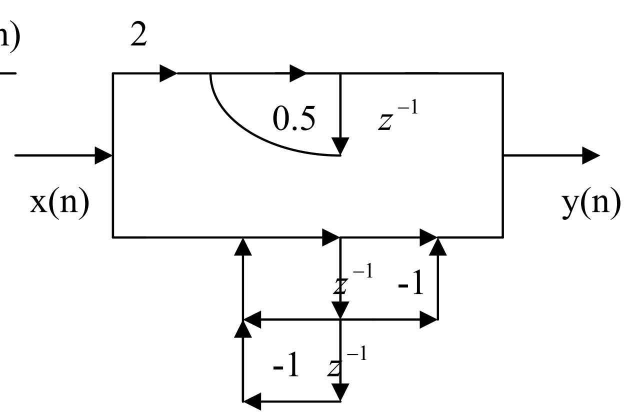
3．用级联型及并联型实现以下传递函数：

解：

(1)

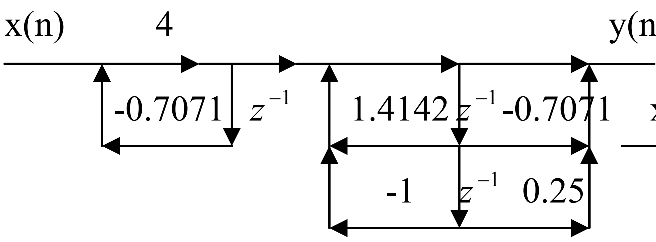
$$H(z)=\frac{3z^{3}-3.5z^{2}+2.5z^{1}}{(z^{2}-z+1)(z-0.5)}=3\frac{1-\frac{3.5}{3}z^{-1}+\frac{2.5}{3}z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1}+z^{-2})}=\frac{2}{1-0.5z^{-1}}+\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$



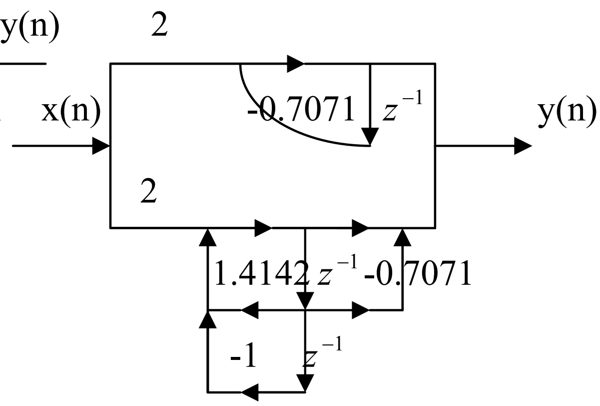


级联型之一　　　　　　　　　　并联型

$$(2)\ H(z)=\frac{4z^3-2.8284z^2+z}{(z^2-1.4142z+1)(z+0.7071)}=\frac{2}{1+0.7071z^{-1}}+\frac{2(1-0.7071z^{-1})}{1-1.4142z^{-1}+z^{-2}}$$



级联型之一



并联型

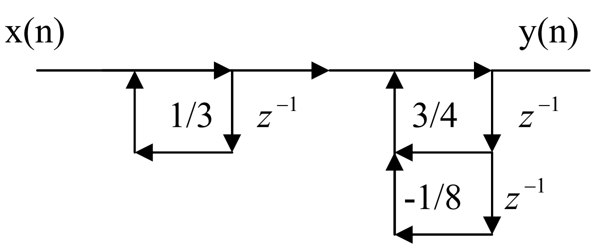
4．设滤波器差分方程为：

$$y(n)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)+\frac{3}{4}y(n-1)-\frac{1}{8}y(n-2)$$

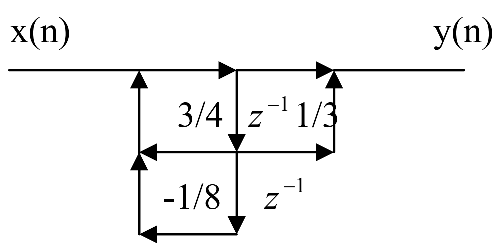
用直接 I 型，II 型以及全部一阶节的级联型，并联型结构实现它。

解：传递函数为：

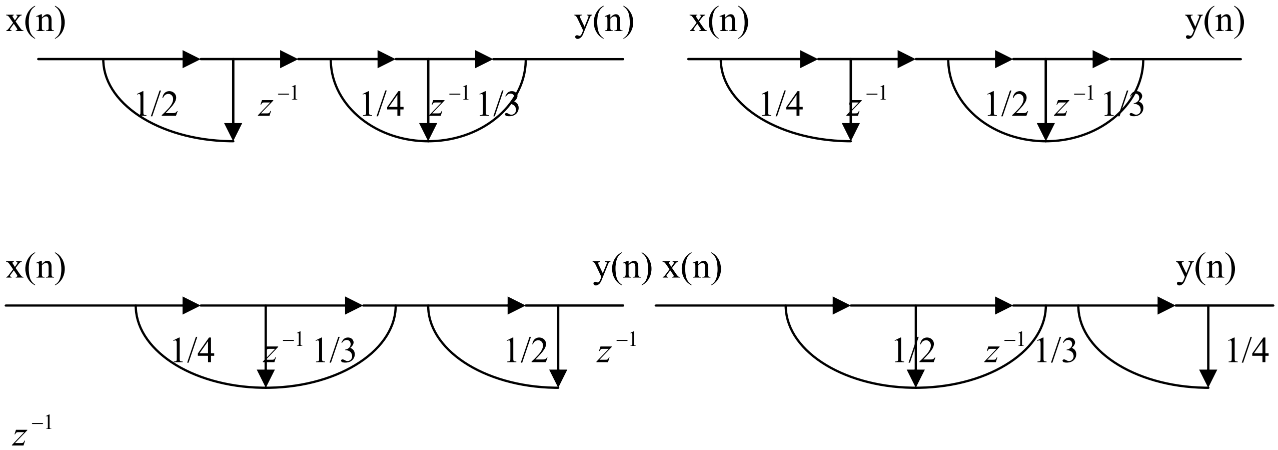
$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{10/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-7/3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$



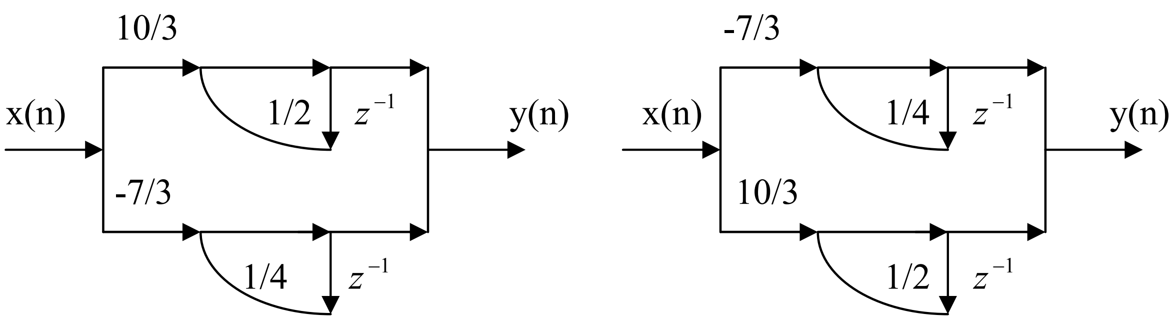
直接 I 型



直接 II 型

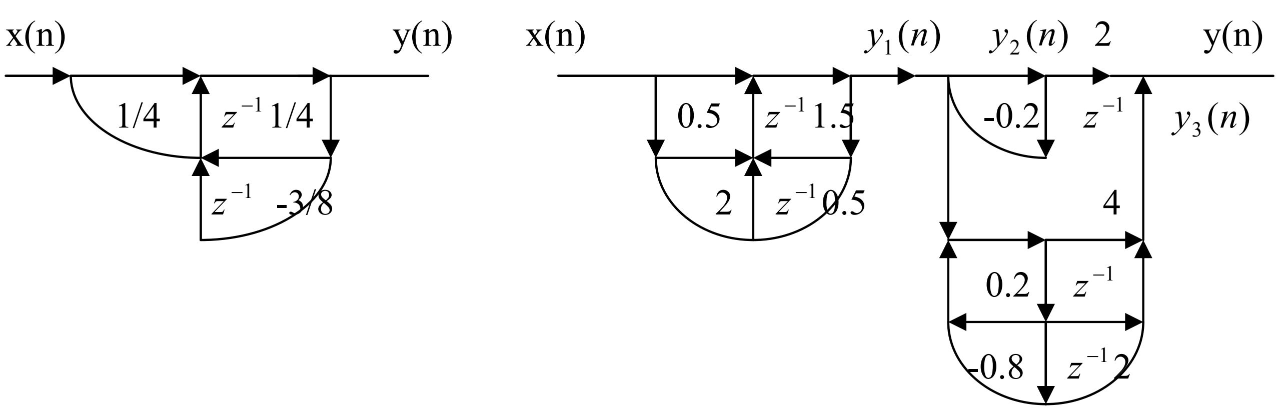


级联型



并联型

5．求以下结构的差分方程及传递函数：



(a)　　　　(b)

解：(a)

$$y(n)=2x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)+\frac{1}{4}y(n-1)-\frac{3}{8}y(n-2)$$

$$H(z)=\frac{2+{}^{1}\!/_{4}z^{-1}}{1-{}^{1}\!/_{4}z^{-1}+{}^{3}\!/_{8}z^{-2}}$$

(b)

$$y_1(n)=x(n)+0.5x(n-1)+2x(n-2)+1.5y_1(n-1)+0.5y_1(n-2)$$
$$y_2(n)=y_1(n)-0.2y_2(n-1)$$
$$y_3(n)=4y_1(n)+y_1(n-1)+2y_1(n-2)+0.2y_3(n-1)-0.8y_3(n-2)$$
$$y(n)=2y_2(n)+y_3(n)$$

$$H_1(z)=\frac{1+0.5z^{-1}+2z^{-2}}{1-1.5z^{-1}-0.5z^{-2}}=\frac{Y_1(z)}{X(z)},H_2(z)=\frac{Y_2(z)}{Y_1(z)}=\frac{1}{1+0.2z^{-1}}$$

$$H_3(z)=\frac{Y_3(z)}{Y_1(z)}=\frac{4+z^{-1}+2z^{-2}}{1-0.2z^{-1}+0.8z^{-2}}$$

$$H_1(z)H_2(z)=\frac{Y_2(z)}{X(z)}=\frac{1+0.5z^{-1}+2z^{-1}}{(1-1.5z^{-1}-0.5z^{-2})(1+0.2z^{-1})}$$

$$H_1(z)H_3(z)=\frac{Y_3(z)}{X(z)}=\frac{(1+0.5z^{-1}+2z^{-1})(4+z^{-1}+2z^{-1})}{(1-1.5z^{-1}-0.5z^{-2})(1-0.2z^{-1}+0.8z^{-2})}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{6+4.4z^{-1}+16.5z^{-2}+5.1z^{-3}+7.8z^{-4}+0.8z^{-5}}{1-1.5z^{-1}+0.26z^{-2}-0.98z^{-3}-0.62z^{-4}-0.08z^{-5}}$$

y(n)=6x(n)+4.4x(n-1)+16.5x(n-2)+5.1x(n-3)+7.8x(n-4)+0.8x(n-5)+1.5y(n-1)

-0.26y(n-2)+0.98y(n-3)+0.62y(n-4)+0.08y(n-5)

6．求以下结构的差分方程及传递函数：

解：设变量u_1,u_2,u_3,u_4

有：

$$\begin{cases} u_1 = x + r\cos\theta u_2 - r\sin\theta u_4 \\ u_2 = u_1 z^{-1} \\ u_3 = u_2 r\sin\theta + r\cos\theta u_4 \\ u_4 = u_3 z^{-1} \end{cases}$$

$$\frac{u_3}{x} = \frac{r\sin\theta z^{-1}}{1-2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$\because Y = u_3$$

$$\therefore H(z) = \frac{r\sin\theta z^{-1}}{1-2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$y(n) = r\sin\theta x(n-1) + 2r\cos\theta y(n-1) - r^2 y(n-2)$$

(b)

设变量：u_1, u_2, u_3

有：$\begin{cases} u_1 = a_{11}z^{-1}u_1 + a_{12}z^{-1}u_2 + x \\ u_2 = a_{21}z^{-1}u_1 + a_{22}z^{-1}u_2 + a_{23}z^{-1}u_3, Y = u_3 \\ u_3 = a_{32}z^{-1}u_2 + a_{33}z^{-1}u_3 \end{cases}$

用矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{-1}u_1 \\ z^{-1}u_2 \\ z^{-1}u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x, Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

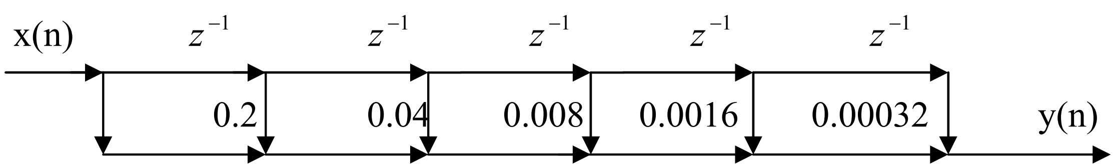
即：$\begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ u_3(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n-1) \\ u_2(n-1) \\ u_3(n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(n)$

$$y(n)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(n)\\u_2(n)\\u_3(n)\end{bmatrix},H(z)=\frac{Az^{-2}}{1-Bz^{-1}+Cz^{-2}-Dz^{-3}}$$

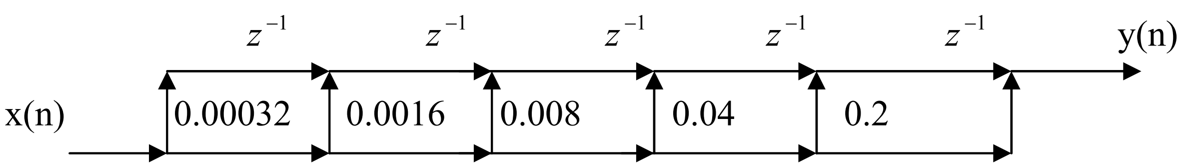
$$y(n)=Ax(n-2)+By(n-1)-Cy(n-2)+Dy(n-3)$$

其中：$\begin{cases}A=a_{12}a_{32}\\B=a_{11}+a_{22}+a_{33}\\C=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}-a_{32}a_{23}\\D=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\end{cases}$

7．已知滤波器单位脉冲响应为 $h(n)=\begin{cases}0.2^n,0\le n\le 5\\0,其他n\end{cases}$，横截型结构。

解：


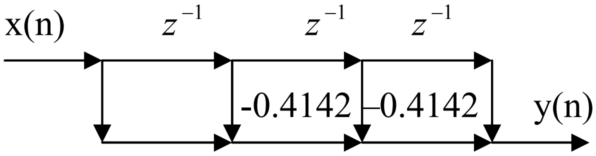
或：



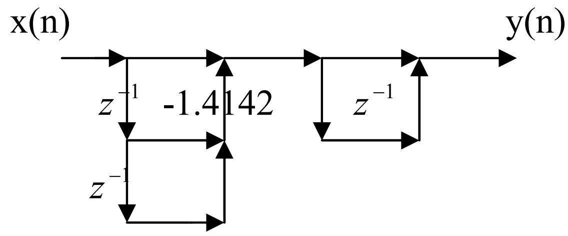
8．用横截型和级联型结构实现传递函数。

$$H(z)=(1-1.4142z^{-1}+z^{-2})(1+z^{-1})$$

解：$H(z)=1-0.4142z^{-1}-0.4142z^{-2}+z^{-3}$



横截型之一

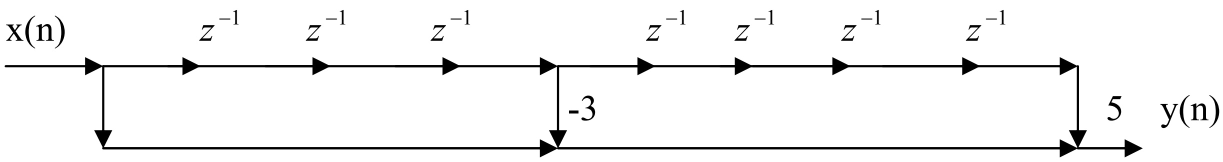


级联型之一

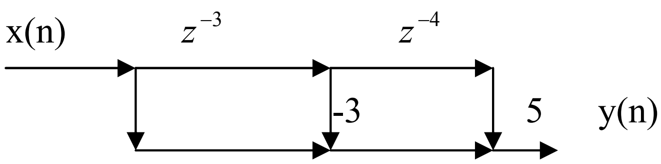
9．试问：用什麽结构可以实现以下单位脉冲响应

$$h(n)=\delta(n)-3\delta(n-3)+5\delta(n-7)$$

解：用横截型：

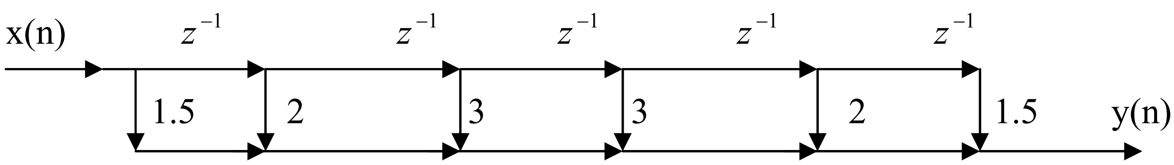


等效为：

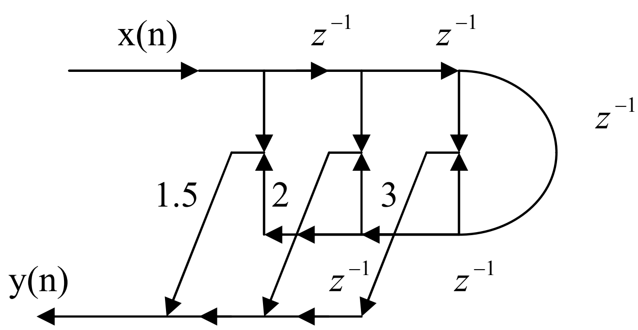


10．FIR 滤波器的 h(n)是圆周偶对称的，N=6，h(0)=h(5)=1.5,h(1)=h(4)=2, h(2)=h(3)=3,求滤波器的卷积结构。

解：

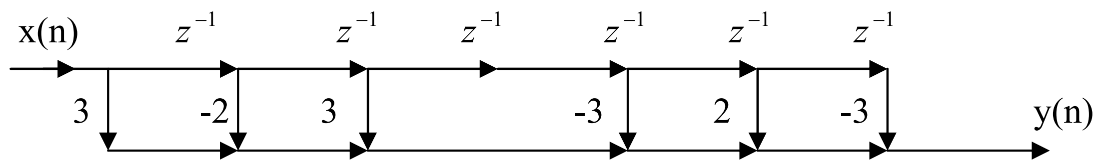


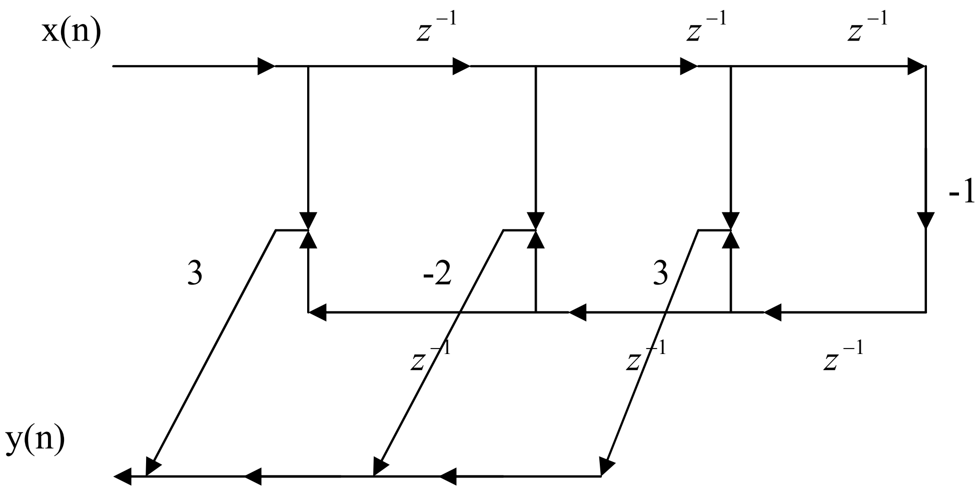
或：



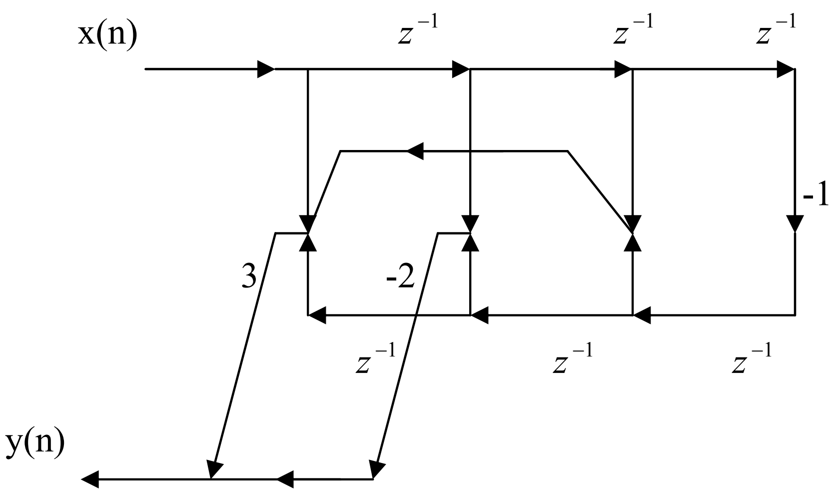
可少用三个乘法器

11．FIR 滤波器的 h(n)是圆周奇对称的，N=7，h(0)=-h(6)=3,h(1)=-h(5)=-2, h(2)=-h(4)=3,h(3)=0,求滤波器的卷积结构。

解：



可少用两个乘法器



可少用三个乘法器

12．已知：FIR 滤波器的十六个频率采样值为：

H(0)=12,H(1)=-3-j$\sqrt{3}$,H(2)=1+j,H(3)到 H(13)都为零，H(14)=1-j,H(15)=-3+j$\sqrt{3}$

求滤波器的采样结构。(设选则修正半径 r=1,即不修正极点位置)

解：N=16,r=1

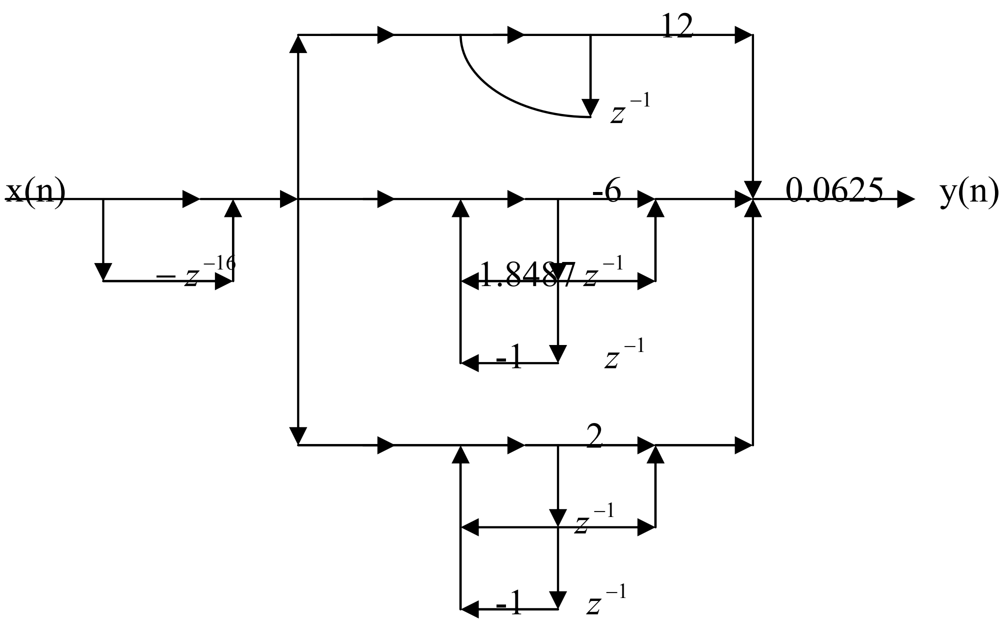
$$H(z)=(1-z^{-16})\frac{1}{16}[\frac{H(0)}{1-z^{-1}}+\frac{H(8)}{1+z^{-1}}+\sum_{k=1}^{7}\frac{\alpha_{0k}+\alpha_{1k}z^{-1}}{1-z^{-1}2\cos(\frac{\pi}{8}k)+z^{-2}}]$$

$$\alpha_{01}=2R_e[H(1)]=-6,\alpha_{11}=-2R_e[H(1)e^{-j\frac{\pi}{8}}]=6.8689,2\cos(\frac{\pi}{8})=1.8487$$

$$\alpha_{02}=2R_e[H(2)]=2,\alpha_{12}=-2R_e[H(2)e^{-j\frac{\pi}{4}}]=-2.8284,2\cos(\frac{\pi}{4})=1.4142$$

$$\alpha_{0j}=\alpha_{1j}=0(j=3,4,5,6,7),H(8)=0$$

$$H(z)=0.0625(1-z^{-16})[\frac{12}{1-z^{-1}}+\frac{-6+6.8689z^{-1}}{1-z^{-1}1.8478+z^{-2}}+\frac{2-2.8284z^{-1}}{1-z^{-1}1.4142+z^{-2}}$$



13.用频率采样结构实现传递函数 $H(z)=\dfrac{5-2z^{-3}-3z^{-6}}{1-z^{-1}}$,N=6,修正半径 r=0.9.

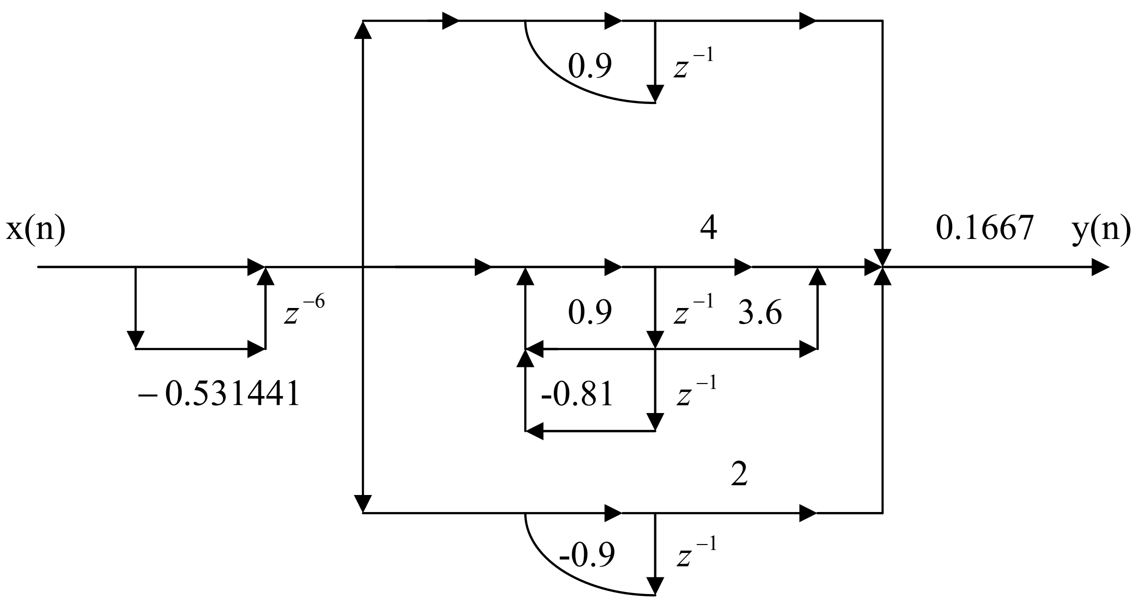
解：$H(k)=H(z)|_{z=W_N^{-k}}=\dfrac{5-2e^{-jk\pi}-3e^{-j2k\pi}}{1-z^{-1}}=\begin{cases}24,k=0\\ 2\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{6}k}e^{-j\frac{\pi}{3}k},k\neq 0\end{cases}(0\le k\le 5)$

$H(0)=24, H(1)=4e^{-j\frac{\pi}{4}}, H(2)=0, H(3)=2, \alpha_{01}=2R_e[H(1)]=4,$

$\alpha_{11}=-2rR_e[H(1)e^{-j\frac{\pi}{3}}]=3.6$

$r^6=0.531441,$

$H(z)=0.1667(1-0.531441z^{-6})[\frac{24}{1-0.9z^{-1}}+\frac{2}{1+0.9z^{-1}}+\frac{4+3.6z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}$



14．FIR 滤波器 N=5, $h(n)=\delta(n)-\delta(n-1)+\delta(n-4)$,计算一个 N=5 的采样结构，修正半径 r=0.9。

解：

$$h(n)\leftrightarrow H(z)=1-z^{-1}+z^{-4}$$

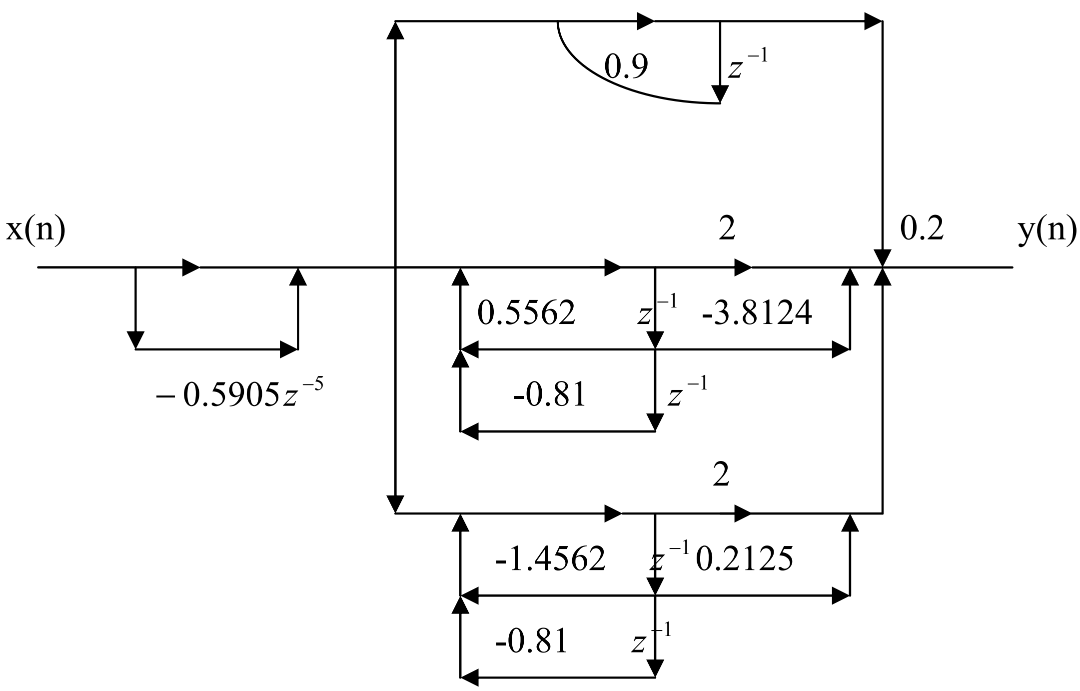
$$H(k)=H(z)|_{z=e^{jk\frac{2\pi}{5}}}=1-e^{-j\frac{2\pi}{5}k}+e^{-j\frac{8\pi}{5}k}$$

$$H(0)=1, H(1)=1+j1.9021, H(2)=1+j1.1756,$$

$$\alpha_{01}=2, \alpha_{11}=-3.8124, 2\cos\frac{2\pi}{5}=0.6180$$

$$2\cos(\frac{2\pi}{5})=0.6180, a_2=2, a_{12}=0.2125, 2\cos(\frac{4\pi}{5})=-1.6180, r^5=0.5905$$

$$H(z)=0.2(1-0.5905z^{-5})[\frac{1}{1-0.9z^{-1}}+\frac{2-3.8124z^{-1}}{1-0.5562z^{-1}+0.81z^{-2}}+\frac{2+0.2125z^{-1}}{1+1.4562z^{-1}+0.81z^{-2}}$$



第四章　无限长单位脉冲响应(IIR)滤波器的设计方法

1．$H_a(s)=\dfrac{3}{(s+1)(s+3)}$，试用脉冲响应不变法及双线性变换将以上模拟传递函数 H(z)，采样周期 T=0.5。

解：

(1) 用脉冲响应不变法：

$$H_a(s)=\frac{3/2}{s+1}-\frac{3/2}{s+3}$$

$$H(z)=\frac{3/4}{1-e^{-0.5}z^{-1}}-\frac{3/4}{1-e^{-1.5}z^{-1}}=\frac{0.2876z^{-1}}{1-0.8297z^{-1}+0.1353z^{-2}}$$

(2) 用双线性变换

$$H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{3(1+2z^{-1}+z^{-2})}{4(2+z^{-1})}$$

2．$H_a(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$，采样周期 T=2,重复第 1 题。

解：

(1) 用脉冲响应不变法：

$$H_a(s)=\frac{-\frac{1}{j\sqrt{3}}}{s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{1}{j\sqrt{3}}}{s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$H(z)=\frac{-\frac{1}{j\sqrt{3}}\cdot 2}{1-e^{-(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{j\sqrt{3}}\cdot 2}{1-e^{-(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})2}z^{-1}}=\frac{\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-1}\sin\sqrt{3}z^{-1}}{1-2e^{-1}\cos\sqrt{3}z^{-1}+e^{-2}z^{-2}}$$

$$H(z)=\frac{0.8386z^{-1}}{1+0.1181z^{-1}+0.1353z^{-2}}$$

方法：

$$h_a(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}tu(t)$$

$$h(n)=Th_a(nT)=\frac{4}{\sqrt{3}}e^{-n}\sin\sqrt{3}nu(n)$$

$$H(z)=\frac{0.8386z^{-1}}{1+0.1181z^{-1}+0.1353z^{-2}}$$

(2) 双线性变换

$$H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{3+z^{-2}}$$

3． $H_a(s)=\dfrac{3s+2}{2s^2+3s+1}$，采样周期为 T=0.1，重复第一题。

解：(1)脉冲响应不变法

$$H_a(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1/2}{s+1/2}$$

$$H(z)=\frac{0.1}{1-e^{-0.1}z^{-1}}+\frac{0.05}{1-e^{-0.05}z^{-1}}=\frac{0.15-0.1404z^{-1}}{1-1.8561z^{-1}+0.8607z^{-2}}H_a(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1/2}{s+1/2}$$

$$H(z)=\frac{0.1}{1-e^{-0.1}z^{-1}}+\frac{0.05}{1-e^{-0.05}z^{-1}}=\frac{0.15-0.1404z^{-1}}{1-1.8561z^{-1}+0.8607z^{-2}}$$

(2)双线性变换

$$H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{5+4z^{-1}-z^{-2}}{2(3-z^{-1})}$$

4．用脉冲不变法将以下$H_a(s)$转换为 H(z)，采样周期 T。

解：

(1) $H_a(s)=\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$

方法一：$H_a(s)=\dfrac{1/2}{s+a+jb}+\dfrac{1/2}{s+a-jb}$

$$H(z)=\frac{T/2}{1-e^{-(a+jb)T}z^{-1}}+\frac{T/2}{1-e^{-(a-jb)}z^{-1}}=\frac{T(1-e^{-aT}\cos bTz^{-1})}{1-2e^{-aT}\cos bTz^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$$

方法二：

$$h_a(t)=e^{-aT}\cos btu(t)$$
$$h(n)=Th_a(nT)=Te^{-aTn}u(n)$$
$$H(z)=\frac{T(1-e^{aT}\cos bTz^{-1})}{1-2e^{-aT}\cos bTz^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$$

(2)

$$H_a(s)=\frac{A}{(s-s_0)^2}$$
$$h_a(t)=Ate^{s_0t}u(t)$$
$$h(n)=AT^2ne^{s_0Tn}u(n)$$
$$H(z)=-AT^2z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-e^{s_0T}z^{-1}}=\frac{AT^2e^{s_0T}z^{-1}}{(1-e^{s_0T}z^{-1})^2}$$

(3)

$H_a(s)=\dfrac{A}{(s-s_0)^m}.,h_a(t)=\dfrac{A}{(m-1)!}t^{m-1}e^{s_0t}u(t)$

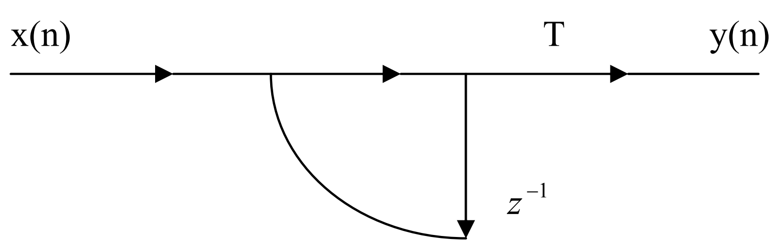
$h(n)=\dfrac{AT^m}{(m-1)!}n^{m-1}e^{s_0Tn}u(n)$　　　　,m 为任意整数

$H(z)=\dfrac{AT^m}{(m-1)!}(-1)^{m-1}(z\dfrac{d}{dz})^{m-1}(\dfrac{1}{1-e^{s_0T}z^{-1}})$

5． $H_a(s)=\dfrac{1}{s}$是理想积分器，其输出信号是输入信号的积分 $y_a(t)=\int_{-\infty}^{t}x_a(\tau)d\tau$

$y_a(t)$就是曲线$x_a(\tau)$下的面积，现用脉冲响应不变法将$H_a(s)$转换为一数字积分器，写出数字积分器的传递函数，差分方程，画出其结构图，并证明所得数字系统的功能与原模拟系统的差别就在于以$x_a(t)$采样值向后所做的矩形面积来代替$x_a(\tau)$的连续面积。

解： $H(z)=\dfrac{T}{1-z^{-1}},y(n)=Tx(n)+y(n-1)$



x(n)是$x_a(t)$采样值。Tx(n)就是以$x_a(t)$采样值向后所做的矩形面积，由差分方程 y(n)=Tx(n)+y(n-1)，可见系统是递归型的，当前的 y(n)等于当前$x_a(t)$采样值向后所做的矩形面积之和，即 $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}Tx(m)$，这正是：

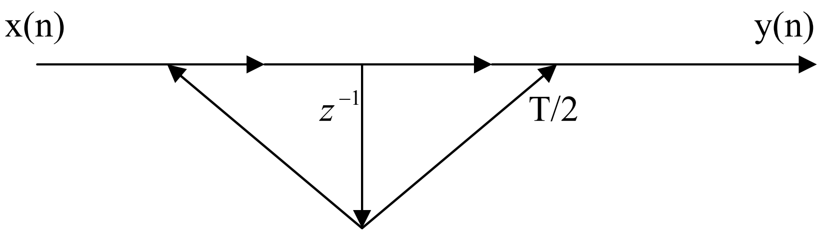
y(n)=x(n)*h(n)=Tx(n)*u(n)

由此证明所得数字系统的功能与原模拟数字系统的差别就在于以 $x_a(t)$ 采样值后所做的矩形面积来代替 $x_a(\tau)$ 的连续面积。

6．以双线性变换 $s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代替脉冲响应不变法，重复第五题。并证明这时数字系统的功能就是将前后两采样点之间连线所围成的梯形面积来代替 $x_a(\tau)$ 的连续面积。

解：

$$H(z)=\frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}},y(n)=\frac{T}{2}[x(n)+x(n-1)]+y(n-1)$$

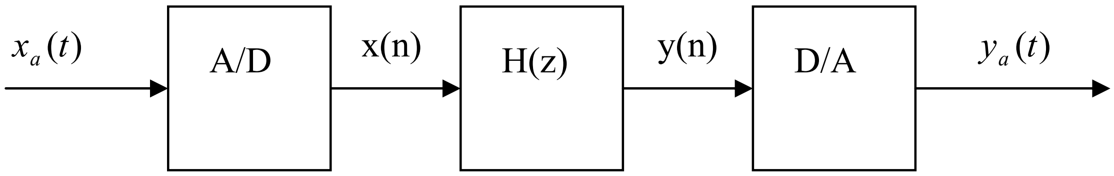


同第五题。(T/2)[x(n)+x(n-1)]是 $x_a(t)$ 两采样点之间连线所围成的梯形面积。y(n)等于这块梯形面积加以往各梯形面积之和，以代替 $x_a(\tau)$ 的连续面积。用数学式子加以表示：

$$h(n)=\frac{T}{2}[u(n)+u(n-1)],y(n)=x(n)*h(n)$$
$$y(n)=\frac{T}{2}x(n)*[u(n)+u(n-1)]=\frac{T}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}[x(m)+x(m-1)]$$

7．一个采样数字处理低通滤波器如图，H(z)的截止频率为 $\omega_c=0.2\pi$，整个系统相当于一个模拟低通滤波器，今采样频率 $f_s=1kHz$，问等效于模拟低通的截止频率 f_c=？若采样频率分别为 $f_s=5kHz,200Hz$，而 H(z)不变，问这时等效于模拟低

通的截止频率又为多少？



解：

$$\omega_c = 2\pi f_c / f_s$$

$$f_s = 1kHz, f_c = \frac{\omega_c f_s}{2\pi} = 100Hz$$

$$f_s = 5kHz, f_c = \frac{\omega_c f_s}{2\pi} = 500Hz$$

8．设采样频率为 f_s=6.28318kHz，用脉冲响应不变法设计一个三阶巴特瓦兹数字低通，截止频率为 f_c=1kHz,并画出该低通的并联结构图。

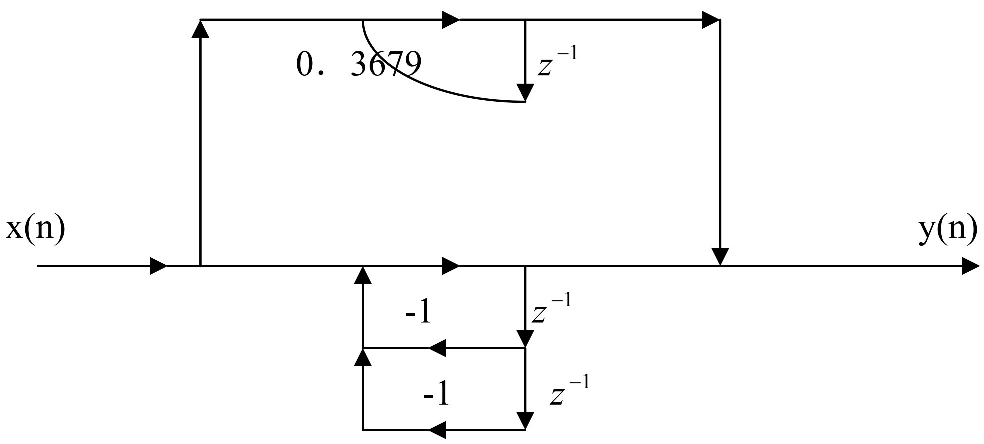
解：$\omega_c = \Omega_c T = 2\pi f T = 2\pi \times \frac{1}{6.28318} = 1$

设

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2(\frac{s}{\omega_c}) + 2(\frac{s}{\omega_c})^2 + (\frac{s}{\omega_c})^3} = \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

$$\therefore H(z) = \frac{1}{1 - e^{-1}z^{-1}} + \frac{-\frac{4}{\sqrt{3}} je^{j\frac{2}{3}\pi}}{1 - e^{j\frac{2}{3}\pi} z^{-1}} + \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} je^{-j\frac{2}{3}\pi}}{1 - e^{-j\frac{2}{3}\pi} z^{-1}} = \frac{1}{1 - 0.3679z^{-1}} + \frac{4}{1 + z^{-1} + z^{-2}}$$

并联结构如图：



9．用双线性变换设计一个巴特瓦兹数字低通，采样频率为 f_s=1.2kHz，截止频率为 f_c=400Hz。

解：数字域临界频率为 $\omega_c = 2\pi f_c T = \frac{2\pi}{3}$，预畸的模拟滤波器临界频率

$$\Omega c = tg(\omega_c / 2) = \sqrt{3}$$

$$H_a(s) = \frac{3\sqrt{3}}{(s+\sqrt{3})(s-\sqrt{3}e^{j\frac{2}{3}\pi})(s-\sqrt{3}e^{j\frac{4}{3}\pi})} = \frac{3\sqrt{3}}{(s+\sqrt{3})(s^2+\sqrt{3}s+3)}$$

将 Ω_c 代入式(4-19)

$$H(z) = H_a(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{3\sqrt{3}(1+z^{-1})^3}{(5\sqrt{3}-7)z^{-3}-(3+7\sqrt{3})z^{-2}+(3+7\sqrt{3})z^{-1}+(7+5\sqrt{3})}$$

10．用双线性变换设计一个巴特瓦兹数字低通，采样频率为 f_s=6kHz，截止频率为 f_c=1.5kHz。

解：数字域临界频率为 $\omega_c = 2\pi f_c T = 0..5\pi$,预畸的模拟滤波器临界频率

$$\Omega c = tg(\omega_c / 2) = 1, H_a(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

将Ω_c代入式(4-19)

由双线性变换得：

$$H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{1}{2}\frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{3+z^{-2}}$$

11．用双线性变换设计一个巴特瓦兹数字高通，采样频率为f_s=720Hz，上下边带截止频率为$f_1=60Hz, f_2=300Hz$。

解：数字域的上下边带截止频率

$\omega=2\pi f_1T=\frac{\pi}{6},\omega_2=2\pi f_2T=\frac{5}{6}\pi$ 代入式(4-28),

求中心频率：$\cos\omega_0=\frac{\sin(\omega_1+\omega_2)}{\sin\omega_1+\sin\omega_2}=0,\omega_0=0.5\pi$

代入式(4-30)，求模拟低通的截止频率：

$$\Omega_c=\frac{cso0.5\pi-\cos\omega_1}{\sin\omega_1}=-\sqrt{3}$$

模拟低通为$H_a(s)=\frac{-3\sqrt{3}}{s^3-2\sqrt{3}s^2+6s-3\sqrt{3}}$

$$H(z)=H_a(s)|_{s=\frac{z^2+1}{z^2-1}}=\frac{-3\sqrt{3}(z^2-1)}{(7-5\sqrt{3})z^6-(3+7\sqrt{3})z^4-(3+7\sqrt{3})z^2+(7+5\sqrt{3})}$$

12．若$u_a(t)$是模拟网络$H_a(s)$的阶跃响应，也就是网络在单位阶跃输入的情况下的输出，即$x_a(t)$=u(t)则$y_a(t)=u_a(t),u_d(n)$为数字网络 H(z)的阶跃响应，即网络在单位阶跃序列输入下的输出序列，x(n)=u(n)则$y(n)=u_d(n)$。如果已知$H_a(s)$及

$u_a(t)$，令 $u_d(n) = u_a(nT)$ 这样来设计 H(z)就称为阶跃不变法，试用阶跃不变法确定 H(z)与 $H_a(s)$ 的关系。

解：

$u_d(n) = u(n) * h(n)$ 两边取 z 变换得：$U_d(z) = \dfrac{z}{z-1}H(z)$

$$H(z) = \frac{z-1}{z}U_d(z), u_a(t) = u(t) * h_a(t)$$

$$U_a(s) = \frac{1}{s}H_a(s), u_d(n) = u_a(nT) = [S^{-1}[\frac{1}{s}H_a(s)]]_{t=nT}$$

$$H(z) = \frac{z-1}{z}Z\{[S^{-1}[\frac{1}{s}H_a(s)]]_{t=nT}\}$$

其中表示反拉氏变换。

13．证明式(4-37)满足全通特性，即 $|g(e^{-j\omega})| = 1$。

证明：

$$g(z^{-1}) = \pm\prod_{i=1}^{N}\frac{z^{-1} - \alpha_i^*}{1 - \alpha_i z^{-1}}$$

$$|\frac{e^{j\omega} - \alpha_i^*}{1 - \alpha_i e^{j\omega}}| = |\frac{(e^{-j\omega} - \alpha_i)^*}{e^{j\omega}(e^{-j\omega} - \alpha_i)}| = 1 g(z^{-1}) = \pm\prod_{i=1}^{N}\frac{z^{-1} - \alpha_i^*}{1 - \alpha_i z^{-1}}$$

$$|\frac{e^{j\omega} - \alpha_i^*}{1 - \alpha_i e^{j\omega}}| = |\frac{(e^{-j\omega} - \alpha_i)^*}{e^{j\omega}(e^{-j\omega} - \alpha_i)}| = 1$$

14．证明式(4-37)满足稳定性要求，即 z 平面的单位圆以内映射到 u 的单位圆以内，z 平面的单位圆以外映射到 u 的单位圆以外。

解：

$$\frac{1}{|u|}=|\pm\prod_{i=1}^{N}\frac{z^{-1}-a_i^*}{1-a_iz^{-1}}|=|\prod_{i=1}^{N}\frac{R^{-1}e^{-j\omega}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}R^{-1}e^{-j\omega}}|,z=\mathrm{Re}^{j\omega},a_i=re^{j\theta}$$

$$=|\prod_{i=1}^{N}\frac{e^{-j\omega}-r\,\mathrm{Re}^{-j\theta}}{R-re^{j(\theta-\omega)}}|\le|\prod_{i=1}^{N}\frac{1-rR}{R-r}|,\theta=\omega$$

|r|<1

当|R|>1 时，$|\frac{1-rR}{R-r}|<1\therefore\frac{1}{|u|}<1,\therefore|u|>1$

即 z 平面单位圆以外映射到 u 单位圆以外

同理，当$\theta-\omega=\pi,\frac{1}{|u|}\ge|\prod_{i=1}^{N}\frac{e^{-j\omega}-r\,\mathrm{Re}^{-j\pi}\,e^{-j\omega}}{R+r}|=|\prod_{i=1}^{N}\frac{1+rR}{R+r}|$

当|R|<1 时，|u|<1 即 z 平面单位圆以内映射到 u 单位圆以内。

15．证明式(4-37)当 N=1 时，即一个实根单节全通函数时，其相位函数$\phi(\varpi)$满足φ(0)−φ(π)=π。

解：

$$g(z^{-1})=\frac{z^{-1}-a_1}{1-a_1z^{-1}}=\frac{e^{j\omega}-A}{1-Ae^{j\omega}}=\frac{e^{j\omega}-A}{e^{j\omega}(e^{-j\omega}-A)}$$

φ(0)−φ(π)=π

16．证明式(4-37)当 N=2,并且a_1,a_2为一对共轭复根时，φ(0)−φ(π)=2π。

证明：

$z=e^{j\omega}$

$$g(z^{-1})=\pm\prod_{i=1}^{N}\frac{e^{-j\omega}-a_i^*}{1-a_ie^{-j\omega}}=\pm\frac{e^{-j\omega}-a_1^*}{1-a_1e^{-j\omega}}\cdot\frac{e^{-j\omega}-a_2^*}{1-a_2e^{-j\omega}}$$

$$a_1^*=a_2,g(z^{-1})=\pm\frac{e^{-j\omega}-a_1^*}{1-a_1e^{-j\omega}}\cdot\frac{e^{-j\omega}-a_1}{1-a_1^*e^{-j\omega}}$$

$$\omega=0,g(z^{-1})=|g(z^{-1})|e^{j\phi(0)}=\pm1,\omega=\pi,g(z^{-1})=\pm1\therefore\phi(0)-\phi(\pi)=2\pi$$

17．证明式(4-37)的相差一般特性，φ(0)−φ(π)=Nπ。

证明：

$$\omega=0,g(z^{-1})=\pm\prod_{i=1}^{N}\frac{1-a_i^*}{1-a_i},\omega=\pi,g(z^{-1})=\pm\prod_{i=1}^{N}\frac{-1-a_i^*}{1+a_i}$$

$$g(e^{-j0})\Big/g(e^{-j\pi})=e^{j[\phi(0)-\phi(\pi)]}$$

当a_i为实数时，N 为偶数$e^{j[\phi(0)-\phi(\pi)]}=1$，N 为奇数$e^{j[\phi(0)-\phi(\pi)]}=$-1

所以$\phi(0)-\phi(\pi)=N\pi$

当a_i为复数时，则两两共轭，N=2R 时相当于 16 题情况$e^{j[\phi(0)-\phi(\pi)]}=1$

N=2R+1 时则有 R 对共轭复根和一个实根，$e^{j[\phi(0)-\phi(\pi)]}=$-1

所以$\phi(0)-\phi(\pi)=N\pi$

18．证明 u=-z 是一个低通到高通，带通到带阻的稳定转换。

证明：H(u)=H(-z)=$H(-e^{-j\omega})=H(e^{j(\pi-\omega)})$

变化的是相位而幅度无变化。

19．若$g_1(z^{-1})$及$g_2(z^{-1})$分别为两个稳定的全通变换函数，证明$g_1[g_2(z^{-1})]$仍然是稳定全通变换函数。

证明：$|g_1(z^{-1})|=|g_2(z^{-1})|=1$

$|g_1[g_2(z^{-1})]|=1$

第五章　有限长单位脉冲响应滤波器的设计方法

1．解：

$$(a)\, h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j(\omega-\pi)\alpha}d\omega=\frac{e^{j\pi\alpha}}{2\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi}e^{j\omega(n-\alpha)}d(n-\alpha)$$

$$=\frac{e^{j\pi\alpha}}{2\pi(n-\alpha)}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi}[\cos\omega(n-\alpha)+j\sin\omega(n-\alpha)]d(n-\alpha)$$

$$=\frac{e^{j\pi\alpha}}{2\pi(n-\alpha)}[\sin\omega(n-\alpha)|_{\pi-\omega_c}^{\pi}-j\cos\omega(n-\alpha)|_{\pi-\omega_c}^{\pi}]$$

$$=e^{j\pi\alpha}\frac{\omega_c}{\pi}S_a[(n-\alpha)\omega_c]=(-1)^n\frac{\omega_c}{\pi}S_a[(n-\alpha)\omega_c]$$

$$h(n)=h_d(n)\cdot\omega_R(n)=(-1)^n\frac{\omega_c}{\pi}S_a[(n-\alpha)\omega_c]\omega_R(n)$$

（b）为了保证线性相位

$$\alpha=\frac{N-1}{2},\text{若}N\text{为奇数},N=2k+1,\alpha=\frac{2k+1-1}{2}=k$$

$$h(n)=(-1)^n\frac{\omega_c}{\pi}S_a[(n-k)\omega_c]\omega_R(n)$$

h(n)的类型取决于$(-1)^n$，N 为奇数 h(n)为偶对称第一类，h(n)必须偶对称于 n=α处，否则不满足 N 为奇数的已知条件

若 N 为偶数。即 N=2k,则

$$\alpha=\frac{2k-1}{2}=k-\frac{1}{2}$$

$$h(n)=(-1)^n\frac{\omega_c}{\pi}S_a[(n-\alpha)\omega_c]\omega_R(n)$$

h(n)必须奇对称于 n=α处，否则不满足 N 为偶数的已知条件

(c) $h(n)=(-1)^n\dfrac{\omega_c}{2\pi}S_a[\omega_c(n-\alpha)(1-\cos\dfrac{2\pi n}{N-1})]\omega_R(n)$

2. 解：

(a) $h_d(n)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi}-je^{-j(\omega-\pi)\alpha}e^{j\omega n}d\omega+\dfrac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi+\omega_c}je^{-j(\omega-\pi)\alpha}e^{j\omega n}d\omega$

$$=\frac{e^{j\pi\alpha}}{2\pi}[\int_{\pi-\omega_c}^{\pi}-je^{j(n-\alpha)\omega}d\omega+\int_{\pi}^{\pi+\omega_c}je^{j(n-\alpha)\omega}d\omega]$$
$$=\frac{e^{i\pi\alpha}}{2\pi}[\frac{-e^{j(n-\alpha)\omega}}{n-\alpha}|_{\pi-\omega_c}^{\pi}+\frac{e^{j(n-\alpha)\omega}}{n-\alpha}|_{\pi}^{\pi+\omega_c}]$$
$$=\frac{(-1)^n}{2\pi}\frac{\alpha\cos(n-\alpha)\omega_c-\alpha}{n-\alpha}=\frac{(-1)^{n+1}\alpha\sin^2[(n-\alpha)\omega_c/2]}{(n-\alpha)\pi}$$

$$h(n)=h_d(n)*\varpi_R(n)=\frac{(-1)^{n+1}\alpha\sin^2[(n-\alpha)\omega_c/2]}{(n-\alpha)\pi}\varpi_R(n)$$

(b)为了保证线性相位$\alpha=\dfrac{N-1}{2}$

若 N 为奇数，设 N=2k+1 则α=k

$$h(n)=(-1)^{n+1}\frac{2\sin^2[(n-k)\omega_c/2]}{(n-k)\pi}\varpi_R(n)$$

h(n)满足奇对称，即 h(n)=-h(N-1-n)属于第III类 FIR 滤波器

若 N 为偶数，设 N=2k 则α=k-1/2

$$h(n)=(-1)^{n+1}\frac{2\sin^2[(n-k+1/2)\omega_c/2]}{(n-k+1/2)\pi}$$

h(n)满足偶对称，即 h(n)=h(N-1-n)属于第II类 FIR 滤波器

(c) $h(n)=(-1)^{n+1}\dfrac{\sin[(n-\alpha)\omega_c/2]}{(n-\alpha)\pi}[1-\cos\dfrac{2\pi n}{N-1}]\varpi_R(n)$

3．解：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_0-\omega_c}^{\omega_0+\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0-\omega_c}^{-\omega_0+\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{\sin[(n-\alpha)(\omega_0+\omega_c)]-\sin[(n-\alpha)(\omega_0-\omega_c)]}{(n-\alpha)\pi}$$

$$=\frac{2\cos(n-\alpha)\omega_0\sin(n-\alpha)\omega_c}{(n-\alpha)\pi}$$

$h(n)=h_d(n)\varpi_R(n)$

(a)N 为奇数时，设 N=2k+1，$\alpha=\dfrac{N-1}{2}=k$

$$h(n)=\frac{2\cos(n-k)\omega_0\sin(n-k)\omega_c}{(n-k)\pi}\varpi_R(n)$$

h(n)满足于偶对称，属于第I类 FIR 滤波器

(b)N 为偶数时，设 N=2k,α=k-1/2

$$h(n)=\frac{2\cos(n-k+1/2)\sin(n-k+1/2)\omega_c}{(n-k+1/2)\pi}\varpi_R(n)$$

h(n)满足偶对称，属于第II类 FIR 滤波器

(c)N 为奇数时，用升余弦窗设计

$$h(n)=\frac{2\cos(n-k)\omega_0\sin(n-k)\omega_c}{(n-k)\pi}[0.54-0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}]R_N(n)$$

N 为偶数，用升余弦窗设计

$$h(n)=\frac{2\cos(n-k+1/2)\omega_0\sin(n-k+1/2)\omega_c}{(n-k)\pi}[0.54-0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}]R_N(n)$$

4．解：

与第三题相比知 $\varphi(\omega)$ 由-ωα变为-αω–π/2，所以只需将上题 $h_d(n)$ 由偶对称变为奇对称即可

$$h(n)=\frac{2\cos(n-\alpha)\omega_0\sin(n-\alpha)\omega_c}{(n-\alpha)\pi}\operatorname{sgn}(n-\alpha)$$

$$h(n)=h_d(n)\varpi_R(n)$$

(a)N 为奇数，α=k

$$h(n)=\frac{2\cos(n-k)\omega_0\sin(n-k)\omega_c}{(n-k)\pi}\operatorname{sgn}(n-k)\varpi_R(n)$$

奇对称属于第III类滤波器

(b)N 为偶数，α=k-1/2

$$h(n)=\frac{2\cos(n-k+1/2)\omega_0\sin(n-k+1/2)\omega_c}{(n-k+1/2)\pi}\operatorname{sgn}(n-k+1/2)\varpi_R(n)$$

奇对称属于第IV类滤波器

(c)用改进升余弦窗设计

N 为奇数

$$h(n)=\frac{2\cos(n-k)\omega_0\sin(n-k)\omega_c}{(n-k)\pi}[0.54-0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}]R_N(n)\operatorname{sgn}(n-k)$$

N 为偶数

$$h(n)=\frac{2\cos(n-k+1/2)\omega_0\sin(n-k+1/2)\omega_c}{(n-k+1/2)\pi}\operatorname{sgn}(n-k+1/2)$$

$$\times[0.54-0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}]R_N(n)$$

5．解：

(a)一个带阻滤波器相当于一个全通滤波器减去一个带通滤波器

全通 $H(e^{j\omega})=e^{j\varphi(\omega)}$

带通 $H_B(e^{j\omega})=H_B(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$

则带阻 $H_r(e^{j\omega})=e^{j\varphi(\omega)}-H_B(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=[1-H_B(\omega)]e^{j\varphi(\omega)}$

(b)因是线性相位滤波器，不妨设φ(ω)=−αω

$$h_r(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1-H_B(\omega)]e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j(n-\alpha)\omega}d\omega-h_E(n)$$

$$=\frac{\sin(n-\alpha)\pi}{(n-\alpha)\pi}--h_E(n)$$

6．解：

(a)

$$H_d(e^{j\omega})=-je^{-j\omega a}=e^{j(-\omega a-\pi/2)}$$

$$\therefore|H_d(e^{j\omega})|=1,\varphi(\omega)=-\omega a-\pi/2\;\therefore h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin n\pi}{n\pi}$$

$$\therefore h_d(n)=\frac{\sin(n-a)\pi}{(n-a)\pi}\operatorname{sgn}(n-a)$$

$$h(n)=h_d(n)\varpi_R(n)=\frac{\sin(n-a)\pi}{(n-a)\pi}\operatorname{sgn}(n-a)\varpi_R(n)$$

(b)N 为奇数时，α=(N-1)/2=k

$$\therefore h(n)=\begin{cases}1,n=a\\0,n\neq a\end{cases}$$

N 为偶数时，α=(N-1)/2=k-1/2

$$h(n)=\frac{\sin(n-k+1/2)\pi}{(n-k+1/2)\pi}\mathrm{sgn}(n-k+1/2)\varpi_R(n)$$

显然 N 为偶数时性能好

(c) $h(n)=\dfrac{\sin(n-a)\pi}{(n-a)\pi}\mathrm{sgn}(n-a)\dfrac{I_0(\beta\sqrt{1-[1-n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)}$

7．解：

(a)

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}-j\omega e^{-\omega a}e^{j\omega n}d\omega=-\frac{(-1)^{n-a}}{n-a}$$

$$h(n)=\frac{-(-1)^{n-a}}{n-a}\varpi_R(n)$$

(b)N 为奇数时，a=k

$$h(n)=-\frac{(-1)^{n-k}}{n-k}\varpi_R(n)$$

N 为偶数时，a=k-1/2

$$h(n)=-\frac{(-1)^{n-k}j}{n-k+1/2}\varpi_R(n)$$

N 为奇数时性能好

（c） $h(n) = -\dfrac{(-1)^{n-k}}{n-k} \dfrac{I_0(\beta\sqrt{1-[1-2n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)}$

9．解：

(a)

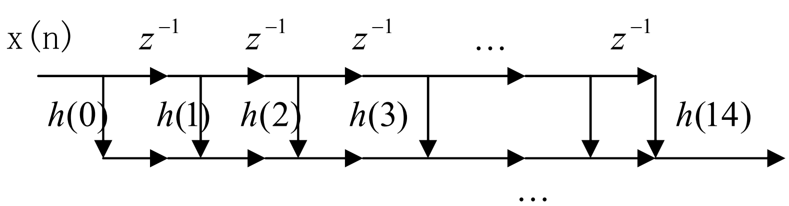
$$\theta(k) = -k\frac{2\pi}{N}(\frac{N-1}{2}) = -k\pi(1-1/N), H_d(0) = 1, H_d(1) = 0.5e^{-j\pi(1-1/15)}$$
$$H_d(k) = H_d(N-k) = 0, k = 2,3,\ldots,13$$
$$H_d(14) = 0.5e^{-j14(15-1)\pi/15} = H_d^*(1)$$

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H_d(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

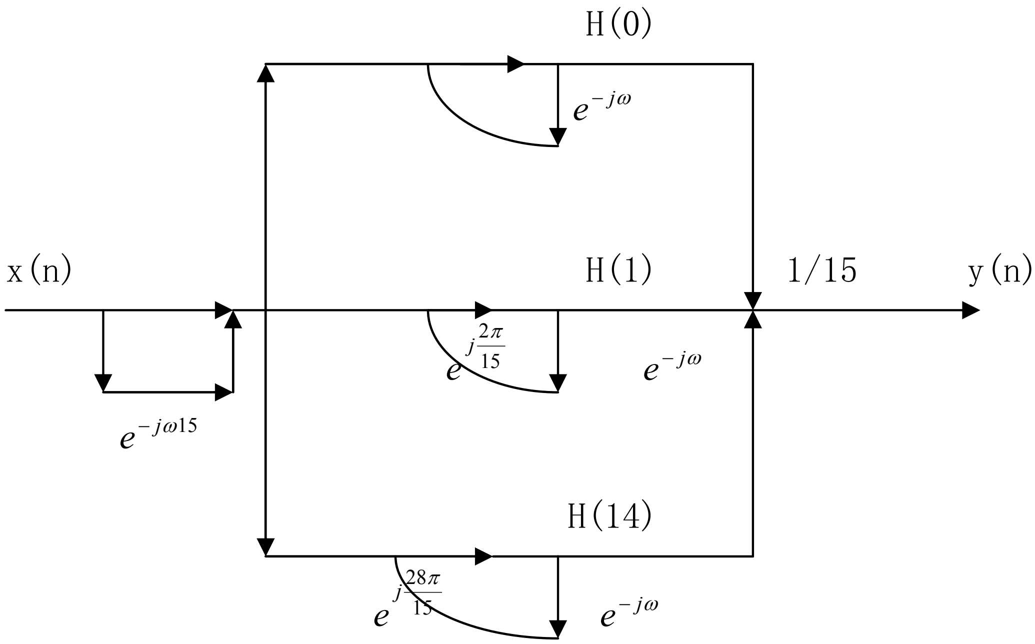
$$= \frac{1}{15}(1 + 0.5e^{-j\frac{14}{15}\pi}e^{j\frac{2\pi}{15}n} + 0.5e^{j\frac{14}{15}\pi}e^{j\frac{28}{15}\pi n})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{j\omega 15}}{15}\sum_{k=o}^{14}\frac{H(k)}{1-e^{-j\omega}e^{j22k/15}}$$

(b)横截型



频率采样型



(c)横截型用的乘法器多，频率采样型用的加法器多

10．解：

(a)

$\because h_2(n)$ 为 $h_1(n)$ 的圆周移位

$$H_2(k) = H_1(k)W_N^{=km} = H_1(k)e^{jk\pi} \ \therefore |H_1(k)| = |H_2(k)|$$
$$\theta_1(k) = \theta_2(k) - k\pi$$

(b)如图所示，又$\because N = 8, a = (N-1)/2 = 3.5$ 知 $h_1(n)$，$h_2(n)$ 均关于 n=3.5 偶对称，所以属于线性相位滤波器时延为 3.5

11．解：

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, 0 \le \omega \le \omega_c \\ 0, 其他\omega \end{cases}$$

图略

第一类线性相位 FIR 滤波器，

$$\mathrm{H(K)}=|\mathrm{H(K)}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\mathrm{K})},\theta(K)=-(\frac{N-1}{2})\frac{2\pi}{N}k=-k\pi(1-\frac{1}{N})$$

$$|H(K)|=\begin{cases}1,0\le k\le \mathrm{int}[\frac{N\omega_c}{2\pi}]=\frac{N-1}{4}\\0,\mathrm{int}[\frac{N\omega_c}{2\pi}]+1\le k\le\frac{N-1}{2}\end{cases},|H(K)|=|H(N-k)|,\frac{N+1}{2}\le k\le N-1,\text{偶对称}$$

$$\theta(K)=\begin{cases}-\frac{2\pi}{N}k(\frac{N-1}{2}),0\le k\le\frac{N-1}{2}\\\frac{2\pi}{N}(N-k)(\frac{N-1}{2}),\frac{N+1}{2}\le k\le N-1\end{cases}$$

$$|H(K)|=\begin{cases}1,0\le k\le 8\\0,9\le k\le 16\text{及}17\le k\le 24,\\1,25\le k\le 32\end{cases}\theta(K)=\begin{cases}-\frac{32}{33}\pi k,0\le k\le 16\\\frac{32}{33}\pi(33-k),17\le k\le 32\end{cases}$$

设计的过渡带宽 $\Delta\omega=\frac{2\pi}{N}=\frac{2\pi}{33}$

如果边沿设定ϖ(k)为一点，即令ϖ(9)= ϖ(24)=0.39

$$|H(K)|=\begin{cases}1,0\le K\le 8\\0.39,K=9\\0,10\le K\le 16\end{cases}$$

则过渡带宽为$2*\frac{2\pi}{N}=\frac{4\pi}{33}$

$$H(e^{j\omega})=e^{-j16\omega}\{\frac{\sin\frac{33}{2}\omega}{33\sin\frac{\omega}{2}}+\sum[\frac{\sin[33(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33})]}{33\sin(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33})}+\frac{\sin[33(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{33})]}{33\sin(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{33})}]\}$$

12．解：

(a)N=33

$$|H(k)|=\begin{cases}0,0\le k\le 11,22\le k\le 32\\0.39,k=12,21\\1,13\le k\le 20\end{cases},\theta(k)=\begin{cases}-\frac{32}{33}k\pi,0\le k\le 16\\\frac{32}{33}\pi(33-k),17\le k\le 32\end{cases}$$

(b)N=32

$$|H(k)|=\begin{cases}0,0\le k\le 11,23\le k\le 33\\0.39,k=12,22\\1,13\le k\le 21\end{cases},\theta(k)=\begin{cases}-\frac{33}{34}k\pi,0\le k\le 17\\\frac{33}{34}\pi(34-k),18\le k\le 33\end{cases}$$

13.解：

(a)N=33，因为 N 为奇数，所以可能是第I，III型滤波器

$$|H(k)|=\begin{cases}0,0\le k\le 4,13\le k\le 20,29\le k\le 32\\1,5\le k\le 12,21\le k\le 28\end{cases}$$

第I型 $\theta(k)=\begin{cases}-\frac{32}{33}k\pi,0\le k\le 16\\\frac{32}{33}\pi(33-k),17\le k\le 32\end{cases}$

第III型 $\theta(k)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-\frac{32}{33}k\pi,0\le k\le 16\\-\frac{\pi}{2}+\frac{32}{33}\pi(33-k),17\le k\le 32\end{cases}$

(b)N=34, 可能是第II,IV型滤波

$$|H(k)|=\begin{cases}0,0\le k\le 4,13\le k\le 21,30\le k\le 33\\1,5\le k\le 12,22\le k\le 29\end{cases}$$

第II型 $\theta(k)=\begin{cases}-\dfrac{33}{34}k\pi,0\le k\le 17\\ \dfrac{33}{34}\pi(34-k),18\le k\le 33\end{cases}$

第IV型 $\theta(k)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{33}{34}k\pi,0\le k\le 17\\ \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{33}{34}\pi(34-k),18\le k\le 33\end{cases}$

14．解：

(a)N 为偶数，上面正交网络可设计成第IV型滤波器

$$\theta(k)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{N-1}{2}\dfrac{2k\pi}{N},k=0,\cdots,[\dfrac{N-1}{2}]\\ \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{N-1}{2}(\dfrac{2\pi}{N})(N-k),k=[\dfrac{N-1}{2}]+1,\cdots,N-1\end{cases}$$

(b)N 为奇数，纯虚数幅度响应样本为：

$$jH_r(k)=\begin{cases}0,k=0\\ -j,k=1,\cdots,N-1\end{cases}$$

由于这是一个III型线性相位滤波器，在ω=π处振幅响应应为零，即 $H_k=0$ 为了减少波动，在靠近ω=π处（即中点两旁）设过渡点，不妨选值为 0.4j

$$H_k=\begin{cases}0,k=0,k=(N-1)/2\\ -j,2\le k\le(n-5)/2,(N+3)/2\le k\le N-2\\ 0.4j,k=(N-3)/2,(N+1)/2,1,N-1\end{cases}$$

$$\theta(k)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}-(\frac{N-1}{2})(\frac{2k\pi}{N}),k=0,\cdots[\frac{N-1}{2}]\\ \frac{\pi}{2}+(\frac{N-1}{2})(\frac{2\pi}{N})(N-k),k=[\frac{N-1}{2}]+1,\cdots,N-1\end{cases}$$

15．解：

(a)（虚数）幅度样本为：

$$jH_r(k)=\begin{cases}-j\frac{2\pi}{N}k,k=0,\cdots,[\frac{N-1}{2}]\\ -j\frac{2\pi}{N}(N-k),k=[\frac{N-1}{2}]+1,\cdots,N-1\end{cases}$$

N 为奇数时没有突变边沿

N 为偶数时没有突变边沿

(b) N 为偶数时

$$H_k=\begin{cases}\frac{2\pi}{k},k=0,\cdots,\frac{N}{2}-1\\ \frac{2\pi}{N}(\frac{N}{2}-1),k=N/2\\ \frac{2\pi}{N}(N-k),k=N/2+1,\cdots,N-1\end{cases}$$

$$\theta(k)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}-(\frac{N-1}{2})(\frac{2k\pi}{N}),k=0,\cdots,[\frac{N-1}{2}]\\ \frac{\pi}{2}+(\frac{N-1}{2})(\frac{2\pi}{N})(N-k),k=[\frac{N-1}{2}]+1,\cdots,N-1\end{cases}$$

第六章　快速傅里叶变换(FFT)

1. 如果一台通用计算机的速度为平均每次复乘需 100μs,每次复加需 20μs,今用来计算 N=1024 点的 DFT[x(n)],

问用直接运算需要多少时间,用 FFT 运算需要多少时间。

解：

$$m_{DFT}=a_{DFT}=4N^2=4\times1024^2=4\times10^6$$
$$DFT\text{作复乘}4\times10^6, DFT\text{作复乘所需时间}4\times10^6\times10^2=4\times10^8\,\mu s,$$
$$DFT\text{作复加所需时间}4\times10^6\times20\mu s=8\times10^7\,\mu s$$
$$m_{FFT}=\frac{N}{2}\log_2 N=5120,(\because N=2^{10}=1024),a_{FFT}=N\log_2 N=10240$$
$$FFT\text{作复乘所需时间}5120\times10^2\,\mu s=512\times10^3\,\mu s$$
$$FFT\text{作复加所需时间}1024\times20\mu s=2048\times10^2\,\mu s$$

2. 用图 6.8 所示流程图验证图 6.7 所示的 8 点变址运算。

证明：

由图 6.8 知取 A=x(0),B=x(4)

N=8

X(k)=$X_1(k)+W_N^kX_2(k),k=0,1,\cdots,N/2-1$

X(N/2+k)=$X_1(k)-W_N^kX_2(k),k=0,1,\cdots,N/2-1$

5.试证实以下流图是一个 N=8 的 FFT 流图.其输入是自然顺序的,而输出是码位倒置顺序的,试问这个流图是属与时间抽取法还是频率抽取法?并比较与书中哪一个流图等效。

解：这个流图属于频率抽取法。

6.试设计一个频率抽取的 8 点 FFT 流图,需要输入是按码位倒置顺序而输出是按

自然顺序的。

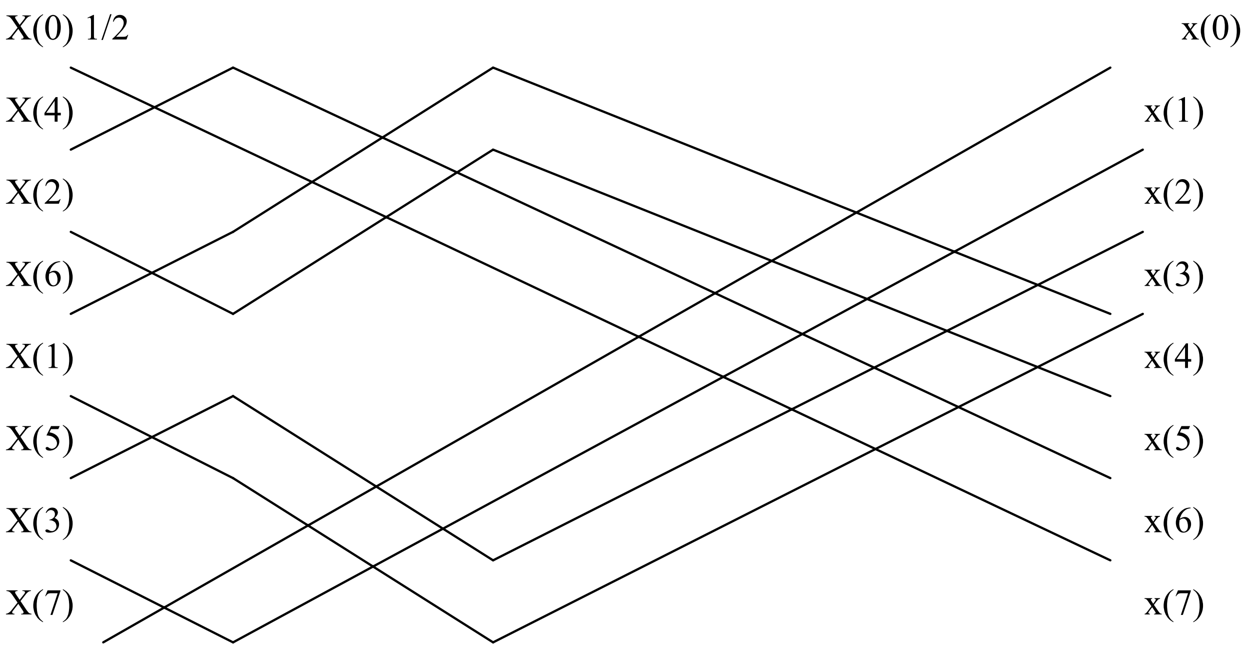
解:设计的流图为第五题的流图左右翻转 180 度。

$$X(2r)=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(k) W_{N/2}^{kr}$$

$$X(2r+1)=\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(k) W_{N/2}^{kr}$$

7.试用图 6.14(a)中的蝶形运算设计一个频率抽取的 8 点 IFFT 流图。

解：



9.试作一个 N=12 点的 FFT 流图,请按 N=2,2,3 分解,并问可能有几种形式?

解：可能有三种

$N=2\times 2\times 3$

先分成 2 组，每组有 6 各点，后每组内再分成两组

时间顺序为 x(0),x(4),x(8),x(2),x(6),x(10),x(1),x(5),x(9),x(7),x(11)

频域顺序为 X(0),X(1),X(2),X(3),X(4),X(5),X(6),X(7),X(8),X(9),X(10),X(11)

流图如图 6.18

解：

由题可得

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}\text{由于}z=z_k=e^{j\frac{2\pi}{N}k},k=0,1,\cdots,N-1$$

$$\therefore X(z)|_{z=z_k}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

(a)将 M 点序列分成若干段 N 点序列，设段数为 k 即 $kN>M\geq(k-1)N$

并令

$$y_0(n)=x(n)$$
$$y_1(n)=x(n+N)$$
$$\vdots$$
$$y_{k-1}(n)=\begin{cases}x[n+(k-1)N],0\leq n\leq M-(k-1)N-1\\0,M-(k-1)N-1<n\leq N-1\end{cases}$$

$$X(z)|_{z=z_k}=\sum_{n=0}^{N-1}[[\sum_{i=0}^{k-1}y_i(n)]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

若用 N 点 FFT 计算 $X(z_k)$ 先由 x(n)形成 $y_i(n)$，再计算 $\sum_{i=0}^{k-1}y_i(n)$ 的 N 点 FFT 即可

(b)先将序列添加一点等于零的点，使得

$$x_0(n)=\begin{cases}x(n),0\leq n\leq M-1\\0,M\leq n\leq N-1\end{cases}$$

再计算 $x_0(n)$ 的 N 点 FFT 即 $X(z)|_{z=z_k}=\sum x_0(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},0\le k\le N-1$ 即可

13.已知 X(K),Y(K)是两个 N 点实序列 x(n),y(n)的 DFT 值,今需要从 X(K),Y(K)求 x(n),y(n)值,为了提高运算效率试设计用一个 N 点 IFFT 运算一次完成。

解：

构成 Z(k)=X(k)+jY(k),由于 X(k),Y(k)都为实序列所以 z(n)是唯一的，x(n)=Re[z(n)]

y(n)=Im[z(n)]

对 Z(k)作 FFT

14.已知 X(K),K=0,1…,2N-1,是 2N 点实序列 x(n)的 DFT 值,现在需要由 X(K)求 x(n)值,为了提高运算效率,试设计一个 N 点 IFFT 运算一次完成。

解：

$$x(n)=\frac{1}{2N}\sum_{K=0}^{2N-1}X(K)W_{2N}^{-Kn}$$

$$x(n)=\begin{cases}x(2m),n=\text{偶数}\\x(2m+1),n=\text{奇数}\end{cases}$$

$$x(2m)=\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}X(K)W_N^{-km}=\frac{1}{2N}[\sum_{k=0}^{N-1}X(K)W_N^{-Km}+\sum_{k=0}^{N-1}X(KN)W_N^{-m(K+N)}]$$

$$=\frac{1}{2N}\sum_{K=0}^{N-1}\frac{1}{2}[X(K)+X(K+N)]W_N^{-mK}$$

15.若一个 FIR 滤波器处理机,用 FFT 算法分段过滤信号,每段运算 N=1024 点,运算一遍需要 0.2 秒,处理机具有两组 1024 个单元的复数存储器可供交替使用,一组供运算时,另一组可以用来存贮实时输入的信号序列。

用该处理机并配以采样器及 A/D 变换器作连续信号的实时过滤,试问

(a) 采样频率最高是多少?

(b)若作两路信号同时过滤时,采样频率最高是多少?

(c)在这两种情况下最高可以处理多高频率的信号?

解:一次蝶形时间$T_B \mu s$,则总的运算$T_B \cdot \frac{N}{2}\log_2 N$

$$T_{B1} \cdot \frac{512}{2}\log_2 512 = T_{B2} \cdot \frac{1024}{2}\log_2 1024$$

$$\frac{T_{B1}}{T_{B2}} = \frac{\frac{1024}{2}\log_2 1024}{\frac{512}{2}\log_2 512}, T_{B1} = 0.09s, f_s = 512/0.09 = 5688.9Hz$$

a)中最高信号频率$f_{\max} = 5120/2 = 2560Hz$

b)中最高信号频率$f_{\max} = 5688.9/2 = 2844.4Hz$