



---

---

---

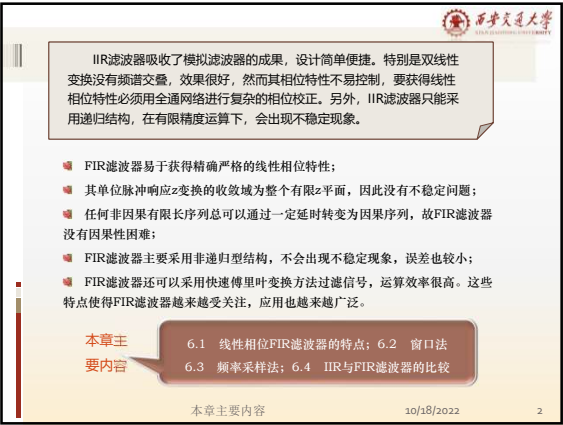
---

---

---

---

---



---

---

---

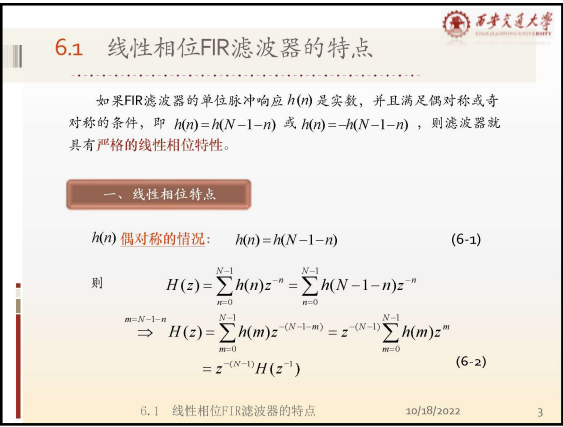
---

---

---

---

---



---

---

---

---

---

---

---

---

也可以写成  $H(z) = \frac{1}{2} [H(z) + z^{-(N-1)} H(z^{-1})]$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} + z^{-(N-1-n)}]$$

$$= z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{z^{-\left(n - \frac{N-1}{2}\right)} + z^{\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}}{2} \right]$$

因此  $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$  (6-3) 标量

将频响  $H(e^{j\omega})$  用相位函数  $\varphi(\omega)$  及幅度函数  $H(\omega)$  表示

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (6-4)$$

那么  $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$  (6-5)

这个幅度函数是标量函数，可以包括正值和负值。

6.1 线性相位FIR滤波器的特点 10/18/2022 4

---

---

---

---

---

---

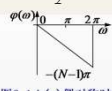
---

---

---

---

$\varphi(\omega) = -\omega \left( \frac{N-1}{2} \right) \Rightarrow$  这个相位特性则是一个完全的严格的直线特性，如图6.1所示。 (6-6)



这个特性表明FIR滤波器有  $(N-1)/2$  个采样周期的时延，即等于单位脉冲响应  $h(n)$  长度的一半的时延。因此，当  $h(n)$  满足偶对称时，所得到

图6.1  $h(n)$  偶对称时的线性相位特性

$h(n)$  奇对称的情况:  $h(n) = -h(N-1-n)$  (6-7)

则  $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = - \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n) z^{-n}$

$$= -z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^m = -z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \quad (6-8)$$

也可  $H(z) = \frac{1}{2} [H(z) - z^{-(N-1)} H(z^{-1})]$

写成  $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) [z^{-n} - z^{-(N-1-n)}] = z^{-\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[ \frac{z^{-\left(n - \frac{N-1}{2}\right)} - z^{\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}}{2} \right]$

6.1 线性相位FIR滤波器的特点 10/18/2022 5

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

因此  $H(e^{j\omega}) = -je^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$  (6-9)

$$= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$$

幅度函数  $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$  (6-10)

相位函数  $\varphi(\omega) = -\omega \left( \frac{N-1}{2} \right) - \frac{\pi}{2}$  (6-11)

这个相位特性同样是一条严格的直线，但是它在零频处还有  $-\pi/2$  的截距，如图6.2所示。它说明FIR滤波器不仅有  $(N-1)/2$  个采样周期的群时延，而且所有通过的信号还将产生  $90^\circ$  的相移。

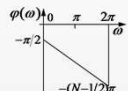


图6.2  $h(n)$  奇对称时的线性相位特性

这种在所有频率上都产生  $90^\circ$  相移的变换也称为信号的 正交变换。信号的正交变换在电子技术中有很重要的地位，因此这种正交变换网络无论在理论上还是在实用上都有很重要的意义。因此，当  $h(n)$  奇对称时，FIR滤波器将是一个具有严格线性相位的 正交变换网络。

6.1 线性相位FIR滤波器的特点 10/18/2022 6

---

---

---

---

---


---

---

---

---

---

 西安交通大学

## 二、幅度响应特点

分四种情况来考察FIR滤波器的幅度函数 $H(\omega)$ 。

(1)  $h(n)$  为偶对称,  $N$ 为奇数

从式 (6-5) 看  $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos[\omega(n - \frac{N-1}{2})]$

可以发现 $h(n)$ 和 $\cos[\omega(n - (N-1)/2)]$ 都是偶对称的, 即  $h(N-1-n) = h(n)$

$$\cos[\omega(N-1-n - \frac{N-1}{2})] = \cos[\omega(-n + \frac{N-1}{2})]$$

$$= \cos[\omega(n - \frac{N-1}{2})]$$

因此可以将 $\Sigma$ 内两两相等的项合并, 但是由于 $N$ 是奇数, 必然剩下  
 单项 $n = (N-1)/2$ 无法和其它项合并, 这样幅度函数可表示为:

$$H(\omega) = h(\frac{N-1}{2}) + \sum_{n=(N+1)/2}^{N-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \frac{N-1}{2})]$$

6.1 线性相位FIR滤波器的特点      10/18/2022      7

---

---

---

---

---


---

---

---

---

---

 西安交通大学

令  $n = \frac{N-1}{2} + m$ , 则

$$H(\omega) = h(\frac{N-1}{2}) + \sum_{m=1}^{(N-1)/2} 2h(\frac{N-1}{2} + m) \cos m\omega$$

经整理, 可表示为

$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos n\omega \\ a(0) = h(\frac{N-1}{2}), \quad a(n) = 2h(\frac{N-1}{2} + n) \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (6-12)$$

特点: 由于 $\cos n\omega$ 对 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 这些点都是偶对称的, 因此 $H(\omega)$ 对 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 都有偶对称的结构。

(2)  $h(n)$  为偶对称,  $N$ 为偶数

由于 $N$ 为偶数, 因此式 (6-5) 中无单项, 全部可以两两合并并得

$$H(\omega) = \sum_{n=N/2}^{N-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \frac{N-1}{2})]$$

6.1 线性相位FIR滤波器的特点      10/18/2022      8

---

---

---

---

---


---

---

---

---

---

 西安交通大学

令  $n = \frac{N}{2} - 1 + m$ , 则

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^{N/2} 2h(\frac{N}{2} - 1 + m) \cos[\omega(m - \frac{1}{2})]$$

因此

$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos[\omega(n - \frac{1}{2})] \\ b(n) = 2h(\frac{N}{2} - 1 + n) \end{cases} \quad (6-13)$$

特点:  $\omega = \pi$  时  $\cos[\pi(n - 1/2)] = 0$ , 而且 $\cos[\pi(n - 1/2)]$ 对 $\omega = \pi$ 呈奇对称, 因此 $H(\pi) = 0$ , 而且 $H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 呈奇对称。

(3)  $h(n)$  为奇对称,  $N$ 为奇数

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n - \frac{N-1}{2})] \quad (6-10)$$

这种情况下 $h(n)$ 的中间项 $h(\frac{N-1}{2})$ 必须为零, 因为 $h(n)$ 的奇对称要  
 求 $h(\frac{N-1}{2}) = -h(N-1 - \frac{N-1}{2}) = -h(\frac{N-1}{2})$ , 因此 $h(\frac{N-1}{2}) = 0$

这样可以将 (6-10) 式中两两对应项合并, 因为 $\sin$ 和 $h(n)$ 都是奇对称的。

6.1 线性相位FIR滤波器的特点      10/18/2022      9

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学  
XIAOJIAN UNIVERSITY

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n - \frac{N-1}{2})] \quad (6-10)$$

于是, 
$$H(\omega) = \sum_{n=(N+1)/2}^{N-1} 2h(n) \sin[\omega(n - \frac{N-1}{2})]$$

$$= \sum_{m=1}^{(N-1)/2} 2h(\frac{N-1}{2} + m) \sin m\omega$$

即 
$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin n\omega \\ c(n) = 2h(\frac{N-1}{2} + n) \end{cases} \quad (6-14)$$

特点: 由于  $\sin n\omega$  在  $\omega=0, \pi, 2\pi$  处都为零, 并对这些点呈奇对称。  
因此  $H(\omega)$  在  $\omega=0, \pi, 2\pi$  处为零, 并对  $\omega=0, \pi, 2\pi$  呈奇对称。

(4)  $h(n)$  为奇对称,  $N$  为偶数

$$H(\omega) = \sum_{n=N/2}^{N-1} 2h(n) \sin[\omega(n - \frac{N-1}{2})]$$

将(6-10)式全部  
两两合并后得 
$$= \sum_{m=1}^{N/2} 2h(\frac{N}{2} - 1 + m) \sin[\omega(m - 1/2)]$$

6.1 线性相位FIR滤波器的特点 10/18/2022 10

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学  
XIAOJIAN UNIVERSITY

因此 
$$\begin{cases} H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin[\omega(n - 1/2)] \\ d(n) = 2h(\frac{N}{2} - 1 + n) \end{cases} \quad (6-15)$$

特点: 由于  $\sin[\omega(n - 1/2)]$  在  $\omega=0, 2\pi$  处为零, 所以  $H(\omega)$  在  $\omega=0, 2\pi$  处为零, 即  $H(z)$  在  $z=1$  上有零点, 并对  $\omega=0, 2\pi$  呈奇对称。

最后, 将上述四种线性相位滤波器的特性示于表6-1。

6.1 线性相位FIR滤波器的特点 10/18/2022 11

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学  
XIAOJIAN UNIVERSITY

表6-1 四种线性相位FIR滤波器

$h(n) = h(N-1-n)$ $\varphi(\omega) = -\omega(\frac{N-1}{2})$ 	$N$ 为奇数 	$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos n\omega$ <p>偶对称</p>
$h(n) = -h(N-1-n)$ $\varphi(\omega) = -\omega(\frac{N-1}{2}) - \frac{\pi}{2}$ 	$N$ 为偶数 	$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos[\omega(n - \frac{1}{2})]$ <p>奇对称</p>
$h(n) = h(N-1-n)$ $\varphi(\omega) = -\omega(\frac{N-1}{2})$ 	$N$ 为奇数 	$H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin n\omega$ <p>奇对称</p>
$h(n) = -h(N-1-n)$ $\varphi(\omega) = -\omega(\frac{N-1}{2}) - \frac{\pi}{2}$ 	$N$ 为偶数 	$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin[\omega(n - 1/2)]$ <p>偶对称</p>

6.1 线性相位FIR滤波器的特点 10/18/2022 12

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

思考:

我们知道FIR序列的傅里叶变换是以  $2\pi$  为周期的。如果我们将表 6-1 中的幅度响应曲线以  $2\pi$  为周期进行延拓, 得到的曲线的对称性和前述的幅度响应的对称性一致吗? 思考一下, 为什么会这样?

思考:

在  $0$  到  $2\pi$  范围内, 上述滤波器能保证严格线性相位的吗?

6.1 线性相位FIR滤波器的特点

10/18/2022

13

---

---

---

---

---

---

---

---

三、零点特性

线性相位滤波器的传递函数有以下特点:  
$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$
因此若  $z = z_1$  是零点,  $H(z_1) = 0$ , 则它的倒数  $z = z_1^{-1}$  也必定是零点, 因为  $H(z_1^{-1}) = \pm z_1^{-(N-1)} H(z_1) = 0$ ; 而且由于  $h(n)$  是实数,  $H(z)$  的零点必须共轭成对, 所以  $z = z_1^*$  及  $z = (z_1^*)^{-1}$  也必定是零点, 故线性相位滤波器的零点必须是互为倒数的共轭对。  
这种互为倒数的共轭对有三种可能的结构:  
第一种,  $z_1$  既不在实轴上又不在单位圆上, 那么必然是四个互为倒数的两两共轭对, 这种四零点组的结构如图 6.3 (a) 所示。  
第二种,  $z_1$  或在单位圆上, 则共轭对的倒数就是其本身。或在实轴上, 即  $z_1$  是实数, 因而  $z_1$  的共轭数就是其本身。这时则只需两两成对地出现, 如图 6.3 (b)。

6.1 线性相位FIR滤波器的特点

10/18/2022

14

---

---

---

---

---

---

---

---

第三种, 当  $z_1$  既在单位圆上, 又在实轴上, 则四个互倒的共轭数都会合为一点, 因此是成单出现, 成单出现的根只有两种可能, 即  $z = 1$  或  $z = -1$ , 如图 6.3 (c)。

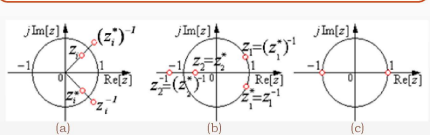


图 6.3 线性相位FIR滤波器的零点结构

总结: 线性相位滤波器是FIR滤波器中最重要、应用最广泛的一种滤波器, 通过上面的讨论我们了解了它的各种特性, 这样在实际应用中, 就可以根据需要选择它的合适的类型, 并在设计时遵循它的约束条件。

下面, 我们将介绍FIR的设计方法。

6.1 线性相位FIR滤波器的特点

10/18/2022

15

---

---

---

---

---

---

---

---

5

6.2 窗口法

如果所希望得到的滤波器的理想响应为  $H_d(e^{j\omega})$ ，那么FIR滤波器的设计就在于寻找一个传递函数  $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$  去逼近  $H_d(e^{j\omega})$ 。

这种逼近中最直接的一种方法就是从单位脉冲响应  $h(n)$  着手，使  $h(n)$  逼近单位脉冲响应序列  $h_d(n)$ 。

我们知道  $h_d(n)$  可以从理想频响  $H_d(e^{j\omega})$  通过傅氏反变换得到，即

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (6-17)$$

但一般来说，这样得到的  $h_d(n)$  往往都是无限长序列，并且是非因果的。

下面以截止频率为  $\omega_c$  的线性相位理想低通为例，设低通的时延为  $\alpha$ ，即

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (6-18)$$

6.2 窗口法

10/18/2022

16

---

---

---

---

---

---

---

---

则 
$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \quad (6-19)$$

这是一个以  $\alpha$  为中心的偶对称的无限长非因果序列，如图6.4所示。

这样一个无限长序列怎样用一个有限长序列去逼近呢？最简单的办法就是直接截取它的一段来代替它。

例如截取  $0 \leq n \leq N-1$  的一段作为  $h(n)$ 。但为保证所得到的是线性相位滤波器，必须满足  $h(n)$  偶对称，所以时延应取  $h(n)$  长度的一半，即

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \alpha = (N-1)/2$$

这种直接截取的办法可以看作  $h_d(n)$  和一个“窗口函数”的乘积，如右图所示。

6.2 窗口法

10/18/2022

17

---

---

---

---

---

---

---

---

一般来说，窗口函数并不一定要是矩形函数，可以在矩形以内再对  $h_d(n)$  作一定的加权处理。因此，一般可以表示为

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) \quad \text{窗口函数} \quad (6-22)$$

设  $W(e^{j\omega})$  为窗口函数的频谱： $W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-j\omega n}$ ，则根据卷积公式有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (6-23)$$

可见，逼近程度的好坏完全取决于窗口函数的频率特性。例如矩形窗口  $R_N(n)$  的频率特性为：

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

用幅度函数和相位函数表示为：

$$W_R(e^{j\omega}) = W(\omega) e^{-j\omega\alpha}$$

其线性相位部分  $e^{-j\omega\alpha}$  只表示时延一半长度  $\alpha = (N-1)/2$ ，对频响起影响的部分是它的幅度函数：

$$W(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (6-24)$$

6.2 窗口法

10/18/2022

18

---

---

---

---

---

---

---

---

该函数在  $\omega = \pm 2\pi/N$  之内有一主瓣，然后向两侧呈衰减振荡展开，形成许多旁瓣，如下页图6.5 (b) 所示。

理想响应也可写成  $H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\omega\alpha}$ ，其中

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

将这两结果代入式 (6-23)，得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j\alpha\theta} W_R(\omega - \theta) e^{-j(\omega - \theta)\alpha} d\theta$$

$$= e^{-j\omega\alpha} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \right]$$

设  $H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j\omega\alpha}$ ，则实际FIR滤波器的幅度函数  $H(\omega)$  为：

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \quad (6-26)$$

这个卷积过程可用图6.5来说明。

图6.5 矩形窗的卷积过程

6.2 窗口法 10/18/2022 19

我们特别注意由于这个卷积过程而给  $H(\omega)$  响应上造成的起伏现象。如图6.5 (f)，在通带截止频率的两旁  $\omega = \omega_c \pm 2\pi/N$  处， $H(\omega)$  出现最大的肩峰值。在这两肩峰之间形成一个过渡带，过渡带宽度等于  $W_R(\omega)$  的主瓣宽度  $\Delta\omega = 4\pi/N$ 。在这最大肩峰的两侧形成长长的余振，如果增加截取的长度  $N$ ，我们看主瓣附近的频谱结构：

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \approx \frac{\sin(\omega N/2)}{\omega/2} = N \frac{\sin x}{x} \quad \text{其中 } x = \omega N/2$$

可见，长度  $N$  的改变只能改变  $\omega$  坐标的比例与  $W_R(\omega)$  的绝对大小，而不能改变主瓣与旁瓣的相对比例。这个相对比例是由  $\sin x/x$  决定的，与  $N$  无关。因此增加  $N$  也不能改变肩峰的大小，例如矩形窗的情况下，最大肩峰值为8.95%。当  $N$  增加时，只能使起伏的振荡变密，而最大肩峰却永远是8.95%，这种现象称为吉布斯 (Gibbs) 效应。

6.2 窗口法 10/18/2022 20

结论：由于加了窗函数将对理想特性产生以下三点影响：

- 使理想特性不连续的边沿加宽，形成一个过渡带，过渡带宽度取决于窗口频谱的主瓣宽度。
- 在过渡带两旁产生肩峰和余振，它们取决于窗口频谱的旁瓣，旁瓣越多，余振也越多，旁瓣相对值越大，肩峰则越强。
- 增加截取长度  $N$ ，只能缩小窗口频谱的主瓣宽度而不能改变旁瓣的相对值（但  $N$  太小时会影响旁瓣相对值），旁瓣与主瓣的相对关系只取决于窗口函数的形状。因此增加  $N$  只能相应减小过渡带宽度，而不能改变肩峰值。肩峰值的大小直接决定着通带内的波动和阻带的衰减，对滤波器的性能有很大影响。要改变阻带的衰减特性，只能从改善窗口形状上找出路。

改善窗口形状的标  
准如下：

- 尽量减小窗口频谱中的旁瓣，也即，使能量集中在主瓣中，这样就可以减小肩峰和余振，提高阻带的衰减。
- 主瓣的宽度尽量窄，以获得较陡的过渡带。

然而，这两个要求总是不能兼得的，往往需要用增加主瓣宽度来换取旁瓣的抑制。

6.2 窗口法 10/18/2022 21

下面，我们讨论几种业已采用的窗口函数，并比较它们的性能。

(1) 矩形窗

$$w(n) = R_N(n)$$

$$W_R(e^{j\omega}) = W_R(\omega)e^{-j\omega N/2} \quad W_R(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

(2) 升余弦窗 [Hanning窗]

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

频谱可表示为：

$$W(e^{j\omega}) = W(\omega)e^{-j\omega N/2}$$

用矩形窗的幅度函数  $W_R(\omega)$  表示的升余弦窗幅度函数为：

$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25\left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right] \quad (6-28)$$

当  $N \gg 1$  时， $2\pi/(N-1) \approx 2\pi/N$ ，上式可表达为

$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25\left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)\right] \quad (6-29)$$

图6.6 升余弦窗频谱

6.2 窗口法 10/18/2022 22

(3) 改进的升余弦窗 [Hamming窗]

对升余弦窗加以改进，可得到旁瓣最小的效果，此时

$$w(n) = \left[ 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n) \quad (6-30)$$

频谱幅度函数为：

$$W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23\left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right] \quad (6-31)$$

结果达到将99.96%的能量集中在主瓣内，在与升余弦窗相等的主瓣宽度下，获得了更好的旁瓣抑制。

(4) 二阶升余弦窗 [Blackman窗]

要进一步抑制旁瓣，可以对升余弦窗再加一个二次谐波的余弦分量，这样的到的窗函数为：

$$w(n) = \left[ 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n) \quad (6-32)$$

6.2 窗口法 10/18/2022 23

频谱幅度函数为：

$$W(\omega) = 0.42W_R(\omega) + 0.25\left[W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right] + 0.04\left[W_R\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_R\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right)\right] \quad (6-33)$$

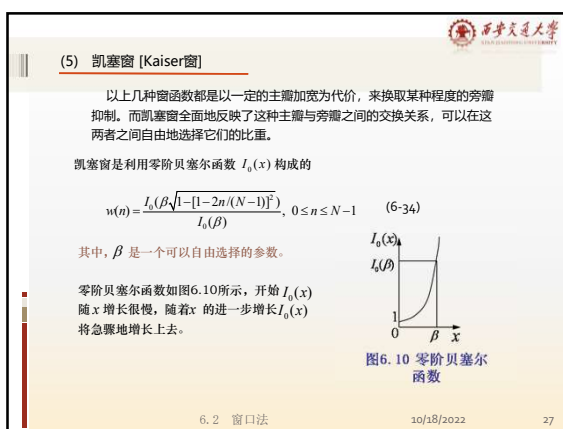
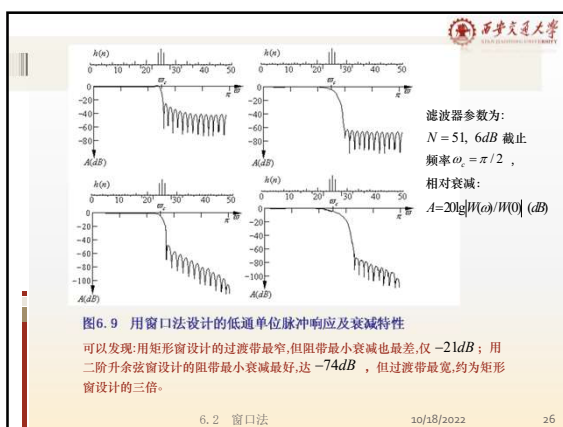
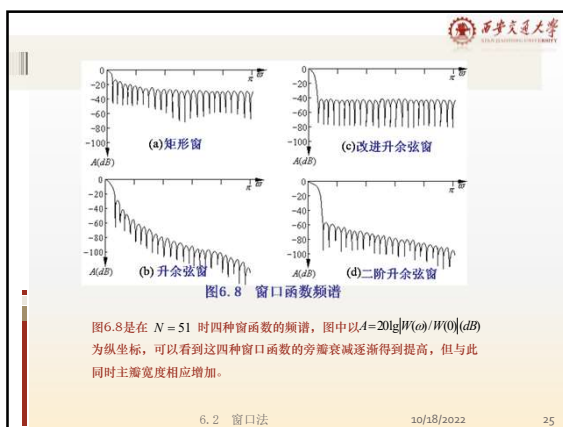
这样可以得到更低的旁瓣，但是主瓣宽度却不得不进一步加宽到矩形窗的三倍。

图6.7描述了这四种窗函数的曲线。

图6.7 窗口函数

6.2 窗口法 10/18/2022 24





西安交通大学

凯塞窗函数曲线如图6.11所示，在中点 $n=\frac{N-1}{2}$ 时， $w(\frac{N-1}{2})=\frac{I_0(\beta)}{I_0(\beta)}=1$ ，当 $n$ 从中点向两边变化时 $w(n)$ 逐渐减小，参数 $\beta$ 越大 $w(n)$ 变化越快，最后 $n=0$ 及 $n=N-1$ 时， $w(0)=w(N-1)=1/I_0(\beta)$ 。参数 $\beta$ 选得越高，其频谱的旁瓣越小，但主瓣宽度也相应增加。因而改变 $\beta$ 值就可以在主瓣宽度与旁瓣衰减之间进行选择。

例如图6.11中， $\beta=5.44$ 时的曲线就接近于改进升余弦窗的情况， $\beta=8.5$ 的曲线则与二阶升余弦窗相近，而 $\beta=0$ 就是矩形窗。

上述五种窗函数的主要性能归纳起来可用下页表6-2表示。

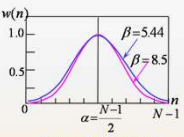


图6.11 凯塞窗函数

6.2 窗口法

10/18/2022

28

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

表6-2 五种窗函数性能比较

窗函数	旁瓣峰值衰减 (dB)	过渡带 $\Delta\omega$	阻带最小衰减 (dB)
矩形窗	-13	$4\pi/N$	-21
升余弦窗	-25	$8\pi/N$	-25
改进升余弦窗	-31	$8\pi/N$	-44
二阶升余弦窗	-57	$12\pi/N$	-74
凯塞窗 $\beta=7.865$	-57	$10\pi/N$	-80

表6-3 凯塞窗 $\beta$ 参数的影响

$\beta$	过渡带 $\Delta\omega$	阻带最小衰减 (dB)
2.120	$3.00\pi/N$	-30
3.384	$4.46\pi/N$	-40
4.538	$5.86\pi/N$	-50
5.658	$7.24\pi/N$	-60
6.768	$8.64\pi/N$	-70
7.865	$10.0\pi/N$	-80
8.960	$11.4\pi/N$	-90
10.056	$12.8\pi/N$	-100

表6-3 表示凯塞窗函数在不同 $\beta$ 值下的特点

6.2 窗口法

10/18/2022

29

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

虽然凯塞窗看上去没有初等函数的解析表达式，但是零阶贝塞尔函数 $I_0(x)$ 可以展开成无穷级数：

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2 \quad (6-35)$$

这个无穷级数可以用有限项级数去近似，因而采用计算机是很容易求解的。

**总结：**

窗口法设计的主要优点是简单，使用起来方便。窗口函数大多都有封闭的公式可循，性能、参数都已有表格、资料可供参考，计算程序简便，所以很实用。

窗口法的出发点是时域开始，以有限长 $h(n)$ 近似理想的 $h_d(n)$ ，然后再对 $h(n)$ 进行修正，以便使频响能更好的逼近理想要求 $H_d(\omega)$

6.2 窗口法

10/18/2022

30

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

XI'AN JIAOTONG DAXUE

FIR滤波器设计步骤（窗口法）

1、了解需求，确定  $|H_d(e^{j\omega})|$  在  $0 \leq \omega \leq \pi$  区间的性质。

2、依据表6-1确定滤波器的类型，并确定滤波器的阶数  $N$ 。

3、依据对称性，确定  $H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{j\phi_0(\omega)}$ 。

其中  $\phi_d(\omega) = -\omega\alpha$  或  $\phi_d(\omega) = -\omega\alpha - \pi/2$  而  $\alpha = \frac{N-1}{2}$ ，

$$H_d(\omega) = \begin{cases} |H_d(e^{j\omega})|, & 0 \leq \omega < \pi \\ \pm |H_d(e^{j\omega})|, & \pi \leq \omega < 2\pi \end{cases}$$

正负决定于滤波器的类型或  $H_d(\omega)$  的对称性。

2022/10/18 数字信号处理I 31

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

XI'AN JIAOTONG DAXUE

FIR滤波器设计步骤（窗口法）

4、求

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega$$

5、加窗：

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n) \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

数字信号处理I 32

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

XI'AN JIAOTONG DAXUE

第六章 FIR滤波器的设计方法

习题一、用矩形窗口法设计一个线性相位低通滤波器。要求  $N=8$ ，其理想低通滤波器的截止角频率  $\omega_c = \frac{\pi}{3}$  如图1所示。

1、选择确定所设计的线性相位低通FIR滤波器的类型；

2、确定理想线性相位低通滤波器的频率响应

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{j\phi_0(\omega)}$$

给出在反变换积分区间的表达式。

3、求所设计的低通滤波器的单位脉冲响应函数  $h(n)$ ；

4、计算  $h(n), n=0, 1, \dots, 7$  的值，验证所设计  $h(n)$  的奇/偶对称性。

5、编写一段MATLAB程序，画出该低通滤波器的幅频响应。

6、画出该低通滤波器的横截结构，说明这类FIR结构至少要用几个延时单元。

图1 理想幅频响应

数字信号处理I 2022/10/18 33

---

---

---

---

---

---

---

---

**窗口法例题**

例1、用矩形窗口法设计一个线性相位低通滤波器。要求 $N=8$ ，其理想低通滤波器的截止角频率 $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ ，如图1所示。

1、选择确定所设计的线性相位低通FIR滤波器的类型；  
 2、确定理想线性相位低通滤波器的频率响应

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{j\theta_d(\omega)}$$

给出在反变换积分区间的表达式。

3、求所设计的低通滤波器的单位脉冲响应函数 $h(n)$ ；  
 4、计算 $h(n)$ ， $n=0,1,\dots,7$ 的值，验证所设计 $h(n)$ 的奇/偶对称性。  
 5、编写一段MATLAB程序，画出该低通滤波器的幅频响应。  
 6、画出该低通滤波器的横截结构，说明这类FIR结构至少要用几个延时单元。

图1 理想幅频响应

数字信号处理I      2022/10/18      34

---

---

---

---

---

---

---

---

**窗口法例题**

**习题一的题解：**

(1) 由于 $N=8$ ，是偶数阶，只能选用第二或第四类；又因为它是低通滤波器，所以就只选用**第二类**了。

(2) 因为它是第二类所以有  $\theta_d(\omega) = -\frac{(N-1)}{2}\omega = -\frac{7\omega}{2}$

而： $H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & -\frac{\pi}{3} \leq \omega < \frac{\pi}{3} \\ 0, & -\pi \leq \omega < -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \leq \omega < \pi \end{cases}$

所以： $H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{j\theta_d(\omega)} = \begin{cases} e^{-j\frac{7\omega}{2}}, & -\frac{\pi}{3} \leq \omega < \frac{\pi}{3} \\ 0, & -\pi \leq \omega < -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \leq \omega < \pi \end{cases}$

其反变换积分分为  $h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{7\omega}{2}} \cdot e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{j(\frac{n-7}{2})\omega} d\omega$

数字信号处理I      2022/10/18      35

---

---

---

---

---

---

---

---

**窗口法例题**

(3)  $h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{j(\frac{n-7}{2})\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi j \left(n - \frac{7}{2}\right)} \cdot e^{j(\frac{n-7}{2})\omega} \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{1}{2\pi j \left(n - \frac{7}{2}\right)} \left[ e^{j\frac{\pi}{3}(\frac{n-7}{2})} - e^{-j\frac{\pi}{3}(\frac{n-7}{2})} \right] = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(n - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(n - \frac{7}{2}\right)}$$

所以有  $h(n) = h_d(n) \cdot R_8(n) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(n - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(n - \frac{7}{2}\right)} \cdot R_8(n)$

(4) 解得： $h(0) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(0 - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(0 - \frac{7}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{7\pi}{6}}{\frac{7\pi}{2}} = -\frac{1}{7\pi}$   $h(7) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(7 - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(7 - \frac{7}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{7\pi}{6}}{\frac{7\pi}{2}} = -\frac{1}{7\pi}$

数字信号处理I      2022/10/18      36

---

---

---

---

---

---

---

---

窗口法例题

$$h(1) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(1 - \frac{7}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{5\pi}{6}}{\frac{5\pi}{2}} = \frac{1}{5\pi} = h(6) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(6 - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(6 - \frac{7}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{5\pi}{6}}{\frac{5\pi}{2}} = \frac{1}{5\pi}$$
$$h(2) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(2 - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(2 - \frac{7}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi} = h(5) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(5 - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(5 - \frac{7}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$$
$$h(3) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(3 - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(3 - \frac{7}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = h(4) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} \left(4 - \frac{7}{2}\right)}{\pi \left(4 - \frac{7}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$
$$h(0) = h(7) = -\frac{1}{7\pi}, \quad h(1) = h(6) = \frac{1}{5\pi}, \quad h(2) = h(5) = \frac{2}{3\pi}, \quad h(3) = h(4) = \frac{1}{\pi}$$

可见  $h(n) = h(N-1-n)$  是偶对称的。符合第二类的特点。

数字信号处理I2022/10/1837

---

---

---

---

---

---

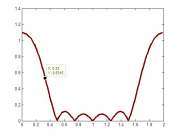
---

---

窗口法例题

(5) MATLAB程序

```
clear all
close all
N=200;
M=8;
w=[(1:N-1)*2/N;
wc=pi/3;
h=[-1/(7*pi) 2/(5*pi) 2/(3*pi) 1/(pi) 2/(3*pi) 1/(5*pi) -1/(7*pi)];
for k=1:200
z=exp(-j*(k-1)*2*pi/N);
H(k)=abs(h(1)+h(2)*z+h(3)*z^2+h(4)*z^3+h(5)*z^4+h(6)*z^5+h(7)*z^6+h(8)*z^7);
end
plot(w,H)
```



数字信号处理I2022/10/1838

---

---

---

---

---

---

---

---

窗口法例题

(6) 该低通滤波器的横截型结构如下图所示:

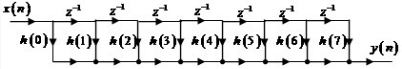


图 1C 线性相位低通滤波器的横截型结构

N=8的FIR线性相位滤波器横截型结构需要7个延时单元。

数字信号处理I2022/10/1839

---

---

---

---

---

---

---

---

13

**6.3 频率采样法**

我们知道，一个有限长序列和相应的频响可以用N个频域的采样值唯一确定，根据频率采样定理，有

$$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}} \quad (6-36)$$

其中  $H(k)$  是频率采样值，

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=W_N^k} = H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad (6-37)$$

这为我们设计FIR滤波器提供了另一条途径，即直接从频域出发，对理想频响采样，以此来确定  $H(k)$  值。即令

$$H(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad (6-38)$$

这样就可以使设计所得的传递函数  $H(z)$  去逼近要求的传递函数  $H_d(z)$ ，至少在采样点的频率上，两者可以具有相同的频响：

$$H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) \quad (6-39)$$

6.3 频率采样法 10/18/2022 40

---

---

---

---

---

---

---

---

当我们需要设计的是线性相位滤波器时，还必须使采样值  $H(k)$  的幅度和相位遵循表6-1中的约束条件。

例如，要设计第一类线性相位滤波器，即  $N$  为奇数的情况。根据表6-1第一栏：

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega) e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})} \quad (6-40)$$

其中，幅度函数  $H(\omega)$  应具有偶对称性：

$$H(\omega) = H(2\pi - \omega) \quad (6-41)$$

如果频率采样值  $H(k)$  也用幅值  $H_k$  (纯标量) 与相角  $\theta_k$  表示，

$$H(k) = H_k e^{j\theta_k} \quad (6-42)$$

那么根据式 (6-40)、(6-41) 的约束条件， $\theta_k$  值必须取为

$$\theta_k = -k \frac{2\pi}{N} \left( \frac{N-1}{2} \right) = -k\pi(1 - 1/N) \quad (6-43)$$

而  $H_k$  必须满足偶对称要求，即  $H_k = H_{N-k}$  (6-44)

6.3 频率采样法 10/18/2022 41

---

---

---

---

---

---

---

---

若所要设计的是  $N$  为偶数的线性相位滤波器，根据表6-1第二栏除了相位约束式 (6-43) 不变外，由于幅度特性关于  $\omega = \pi$  是奇对称的：

$$H(\omega) = -H(2\pi - \omega) \quad (6-45)$$

因此， $H_k$  也必须满足

$$H_k = -H_{N-k} \quad (6-46)$$

其它两类线性相位滤波器的设计，同样也需要注意幅度与相位的约束关系。

看起来，频率采样法设计是比较简单的；接下来，我们进一步考察用这种频率采样所得到的传递函数的逼近效果，以及如此得到的频响  $H(e^{j\omega})$  与理想要求的频响  $H_d(e^{j\omega})$  之间的差别。

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \phi(\omega - \frac{2\pi}{N}k) \quad (6-47)$$

其中， $\phi(\omega)$  是内插函数

$$\phi(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})} \quad (6-48)$$

6.3 频率采样法 10/18/2022 42

---

---

---

---

---

---

---

---

从内插公式可知，除在每个采样点上，频响将严格与理想特性一致外，在采样点之间的频响则是由各采样点的内插函数延伸叠加形成的。

因此，如果采样点之间的理想特性越平缓，则内插值就越接近理想值，逼近也就越好，如图6.12(b)。

相反，如果采样点之间的理想特性变化越剧烈，则内插与理想值的误差就越大，在理想特性的每一个不连续点附近都会出现肩峰与起伏，不连续性越大，出现的肩峰和起伏也越大，如图6.12(a)。

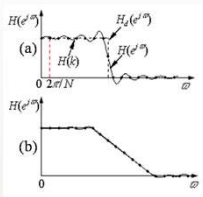


图6.12 频率采样的响应

6.3 频率采样法 10/18/2022 43

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

在窗口法中，用加宽过渡带来换取阻带衰减，这个概念同样可以引用到频率采样法的设计中。

例如，我们可以在理想特性不连续的边缘加一点过渡的采样点，如图6.13 (a) 中的  $H_{c1}$ ，这样虽然加宽了过渡带，但缓和了边缘上两采样点之间的突变，因而将有效地减少起伏振荡，提高阻带的最小衰减。但是  $H_{c1}$  取值不同所得到的效果也将不同。

我们从频响的内插公式可以看到，任何给定频率上的频响都是一组频率采样的线性组合，因此  $H_{c1}$  的取值对任何频率上频响的影响也都是线性的，可以采用线性规划来求解最优过渡点  $H_{c1}$  值，以使阻带最小衰减获得最大值。这种优化可以借助于CAD来实现。

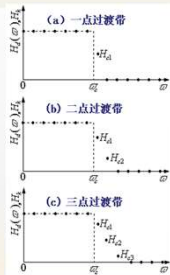


图6.13 加过渡带

6.3 频率采样法 10/18/2022 44

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

过渡点取一、二、三点以后已经可以取得相当良好的效果。各种情况下过渡带的最佳衰减特性如图6.14所示。过渡点更多时，线性规划的计算工作量会非常大。

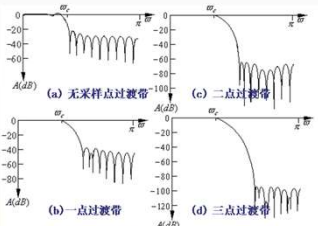


图6.14 最佳过渡带的衰减特性  
 $A=20\lg|f(\omega)|$

6.3 频率采样法 10/18/2022 45

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

FIR滤波器设计步骤（频率采样法）

- 1、了解需求，确定  $|H_d(e^{j\omega})|$  在  $0 \leq \omega \leq \pi$  区间的性质。
- 2、依据表6-1确定滤波器的类型，并确定滤波器的阶数  $N$ 。
- 3、依据对称性，确定  $H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{j\phi_d(\omega)}$ 。

其中  $\phi_d(\omega) = -\omega\alpha$  或  $\phi_d(\omega) = -\omega\alpha - \pi/2$  而  $\alpha = \frac{N-1}{2}$ ，

$$H_d(\omega) = \begin{cases} |H_d(e^{j\omega})|, & 0 \leq \omega < \pi \\ \pm |H_d(e^{j\omega})|, & \pi \leq \omega < 2\pi \end{cases}$$

正负决定于滤波器的类型或  $H_d(\omega)$  的对称性。

2022/10/18 数字信号处理I 46

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

FIR滤波器设计步骤（频率采样法）

- 4、求频域采样点的值：

$$H(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$$

- 5、求系统脉冲响应：

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)W_N^{-kn} \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\phi(\omega - \frac{2\pi k}{N})$$

$$\phi(\omega) = \frac{\sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

数字信号处理I 47

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

### 频率采样法例题

例2、用频率采样法设计一个线性相位高通滤波器。要求  $N=8$ ，其理想高通滤波器的截止角频率  $\omega_c = \frac{5\pi}{8}$  如图2所示，不设过渡点。

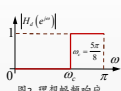


图2 理想幅频响应

- (1) 选择确定所设计的线性相位高通FIR滤波器的类型，并说明该滤波器的单位脉冲响应的奇偶对称性；
- (2) 确定该理想线性相位高通滤波器在频率采样点上的频率响应  $H_d(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$  中  $H_d$ 、 $\theta_d$  和  $H_d(k)$ ， $k=0, 1, \dots, 7$  各采样点的值；
- (3) 求所设计滤波器的单位脉冲响应  $h(n)$  的表达式；
- (4) 根据所求得的单位脉冲响应计算  $h(n)$ ， $n=0, 1, \dots, 7$  的值；
- (5) 验证所设计滤波器的奇偶对称性，说明它是否属于线性相位FIR滤波器；
- (6) 编写一段MATLAB程序，画出该高通滤波器的幅频响应。

数字信号处理I 2022/10/18 48

---

---

---

---

---

---

---

---



**频率采样法例题**

**解:**

(1)  $N=8$ , 是偶数阶次, 所以只能选择第二类或第四类, 而第二类不能用于高通滤波器, 所以就只能选择第四类了。第四类是奇对称的。

(2)  $N=8$ , 频率采样法在  $0$  至  $2\pi$  之间就会有 8 个采样点:  $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$  而有些采样点中只有 3 点在通带内 (即值不为零):  $\frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$ , 如图 2A 所示。

图 2A 幅频特性采样

据此有:  $H_k = \begin{cases} 1, & k=3, 4, 5 \\ 0, & k=0, 1, 2, 6, 7 \end{cases}$

$$\theta_k = -\frac{2\pi}{N}k \cdot \frac{N-1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{8}k \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{8}k - \frac{\pi}{2}, \quad k=0, 1, \dots, 7$$

$$H_d(k) = H_k e^{j\theta_k} = \begin{cases} 0, & k=0, 1, 2, 6, 7 \\ e^{-j(\frac{21\pi}{8} - \frac{\pi}{2})} = -e^{-j\frac{\pi}{8}}, & k=3 \\ e^{-j(\frac{28\pi}{8} - \frac{\pi}{2})} = 1, & k=4 \\ e^{-j(\frac{35\pi}{8} - \frac{\pi}{2})} = -e^{-j\frac{\pi}{8}}, & k=5 \end{cases}$$

数字信号处理 I      2022/10/18      49

---

---

---

---

---

---

---

---

**频率采样法例题**

(3) 
$$h(n) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_d(k) W_N^{nk} \right] \cdot R_N(n) = \frac{R_N(n)}{8} \left[ \sum_{k=0}^7 H_d(k) e^{j\frac{2\pi}{8}nk} \right]$$

$$h(n) = \frac{R_N(n)}{8} \left\{ -e^{-j\frac{\pi}{8}} e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{j\pi n} - e^{-j\frac{\pi}{8}} e^{j\frac{5\pi}{4}n} \right\}$$

$$= \frac{R_N(n)}{8} \left\{ -e^{-j\frac{\pi}{8}} e^{j(\frac{1}{4} + \pi)n} + e^{j\pi n} - e^{-j\frac{\pi}{8}} e^{j(\frac{5}{4} + \pi)n} \right\}$$

$$= \frac{R_N(n)}{8} \left\{ (-1)^n e^{-j\frac{\pi}{8}} e^{j\frac{\pi n}{4}} - (-1)^n e^{-j\frac{\pi}{8}} e^{j\frac{5\pi n}{4}} \right\}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{R_N(n)}{8} \left\{ 1 - e^{-j\frac{\pi}{4}(n+\frac{1}{2})} - e^{j\frac{\pi}{4}(n+\frac{1}{2})} \right\} = (-1)^n \cdot \frac{R_N(n)}{8} \left\{ 1 - 2 \cos \frac{\pi}{4} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$h(n) = \frac{(-1)^n}{8} \left\{ 1 - 2 \cos \frac{\pi}{4} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right\} \cdot R_N(n)$$

(4) 
$$h(0) = \frac{1}{8} \left[ 1 - 2 \cos \frac{\pi}{8} \right] = -\frac{1}{8} \left[ 1 - 2 \cos \frac{\pi}{8} \right] = \frac{1}{8} \left[ 1 - 2 \cos \frac{\pi}{8} \right] \approx -0.106$$

数字信号处理 I      2022/10/18      50

---

---

---

---

---

---

---

---

**频率采样法例题**

$$h(1) = -\frac{1}{8} \left[ 1 - 2 \cos \frac{3\pi}{8} \right] = -h(6) = -\left\{ -\frac{1}{8} \left[ 1 - 2 \cos \frac{3\pi}{8} \right] \right\} \approx -0.0293$$

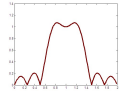
$$h(2) = \frac{1}{8} \left[ 1 + 2 \cos \frac{3\pi}{8} \right] = -h(5) = -\left\{ -\frac{1}{8} \left[ 1 + 2 \cos \frac{3\pi}{8} \right] \right\} \approx 0.2207$$

$$h(3) = -\frac{1}{8} \left[ 1 + 2 \cos \frac{\pi}{8} \right] = -h(4) = -\left\{ -\frac{1}{8} \left[ 1 + 2 \cos \frac{\pi}{8} \right] \right\} \approx -0.356$$

(5) 在 (4) 中我们已经看到这里的  $h(n) = h(N-1-n)$ , 是奇对称的, 所以该滤波器是一个实系数, 且  $h(n)$  为奇对称的 FIR 滤波器, 这样的滤波器是线性相位的滤波器。

(6) MATLAB 程序及该滤波器的幅频特性

```
clear all; close all; N=200; M=8; w=[1:N-1]*2*pi/N; wc=pi/3;
h=[-0.106 -0.0293 0.2207 -0.356 0.2207 -0.0293 0.0293 0.106];
for k=2:200
    z=exp(-j*(k-1)*2*pi/N);
    H(k)=abs(h(1)+h(2)*z+h(3)*z^2+h(4)*z^3+h(5)*z^4+h(6)*z^5+h(7)*z^6+h(8)*z^7);
end
plot(w,H)
```



数字信号处理 I      2022/10/18      51

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

XI'AN JIAOTONG DAXUE

总结:

- 频率采样设计法的优点是可从频域直接处理,并且适合于最优化设计。用选择过渡点的办法所得的效果也相当好。
- 其缺点是频率控制点的位置受限于频率轴上的N个采样点,因此滤波器的截止频率不易随意控制。如果为了适应截止频率的选择自由,就必须增加采样点数,这样做是很不经济的。

最后,强调一下,FIR滤波器的频率采样型结构与传递函数的频率采样设计方法不要混为一谈。

尽管两者的理论依据都是频率采样理论,但是频率采样型结构,对于任何FIR传递函数都能采用;而频率采样法设计所得的传递函数,并不涉及滤波器的结构,既可以采用频率采样型结构来实现,也可以采用横截型或级联型等结构来实现。

6.3 频率采样法

10/18/2022

52

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

XI'AN JIAOTONG DAXUE

6.4 IIR与FIR滤波器的比较

我们已经讨论了IIR和FIR两种滤波器的传递函数设计方法,下面我们对这两种滤波器作一个简单的比较:

从性能上讲:

IIR滤波器可以用较少的阶数获得很高的选择特性,所用存储单元少,运算次数少,经济、效率高;其代价是相位的非线性,选择性越好非线性越严重。相反,FIR滤波器可以得到严格的线性相位,但要获得一定的选择性,则需要较多的存储器和较多的定点运算,信号延时也较大。FIR滤波器的这些缺点是相对于非线性相位的IIR滤波器而言的,如果按相同的选择性和相同的相位要求的话,那么IIR滤波器必须加全通网络来进行相位校正,同样需要大大增加滤波器阶数和复杂性。如果相位要求严格一点,那么FIR滤波器在性能上和经济上都优于IIR滤波器。

6.4 IIR与FIR滤波器的比较

10/18/2022

53

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

XI'AN JIAOTONG DAXUE

从结构上讲:

IIR滤波器必须采用递归型结构,极点位置必须在单位圆内,否则系统将不稳定;另外,这种结构对舍入误差非常敏感,有时会产生微弱的寄生振荡。相反,FIR滤波器主要采用非递归结构,在理论上和实际的有限精度运算中都不存在稳定性问题,运算误差也较小。此外,FIR滤波器可以采用FFT算法,相同阶数下,运算速度可以快得多。

从设计上讲:

IIR滤波器可以借助于模拟滤波器的成果,一般都有有效的封闭函数的设计公式可供准确的计算,又有许多数据和表格可查,设计计算的工作量较小,对计算工具的要求不高。FIR滤波器设计则一般没有封闭函数的设计公式,只有计算程序可循,因此对计算工具要求较高。

6.4 IIR与FIR滤波器的比较

10/18/2022

54

---

---

---


---

---

---

---

---



另一方面，IIR滤波器虽然设计简单，但主要用于设计具有分段常数特性的滤波器，如低、高、带通及带阻等，往往脱离不了模拟滤波器的格局；而FIR滤波器则要灵活得多，尤其是频率采样设计法更容易适应各种幅度特性和相位特性的要求，可以设计出理想的正交变换、理想微分、线性调频等各种重要网络，有更大的适应性和更广阔的天地。

通过上述比较可以看到，IIR与FIR滤波器各有所长，所以实际应用中应该从多方面考虑来加以选择。如对相位要求不高的场合，选用IIR滤波器较合适；而对线性相位要求较高的场合，采用FIR滤波器比较好。当然在实际设计中还应考虑经济上的要求以及计算工具的条件等多方面的因素。

6.4 IIR与FIR滤波器的比较

10/18/2022

55

---

---

---

---

---

---

---

---