# 第四节 基于根轨迹法的系统性能分析

利用根轨迹，可以对闭环系统的性能进行分析和校正

- 由给定参数确定闭环系统极点的位置；
- 分析参数变化对系统稳定性的影响；
- 分析系统的瞬态和稳态性能；
- 根据性能要求确定系统的参数；
- 对系统进行校正。

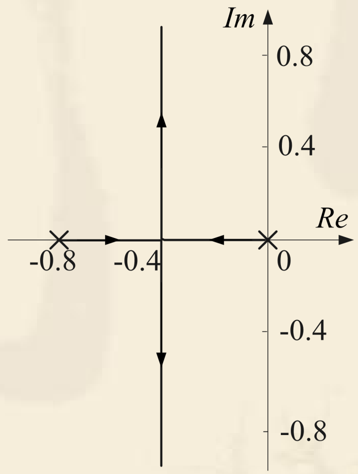
本节首先讨论增加开环零、极点对根轨迹的影响，其次讨论条件稳定系统，最后利用根轨迹法估算系统的性能指标。

## 一、增加开环零、极点对根轨迹的影响

- 根轨迹是由系统的开环零、极点确定的，因此在系统中增加开环零、极点或改变开环零、极点在$s$平面上的位置，都可以改变根轨迹的形状。
- 增加开环零点就是在系统中加入超前环节，它产生微分作用，改变开环零点在$s$平面上的位置就是改变微分强度。
- 增加开环极点就是在系统中加入滞后环节，它产生积分作用或滞后作用，改变开环极点在$s$平面上的位置，就可以改变积分强弱或滞后程度。
- 在系统开环传递函数中引入适当的零、极点，可以改善系统的性能。

## 1、增加开环零点对根轨迹的影响

以开环传递函数为 $G_k(s)=\dfrac{k_g}{s(s+0.8)}$ 的单位负反馈二阶系统为例。根轨迹为：



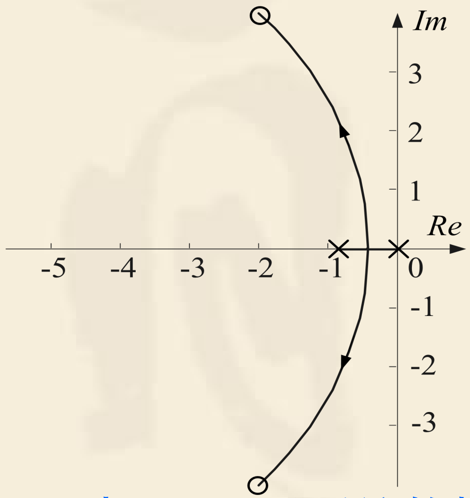

分别加入零点-2±j4和-4后系统的开环传递函数如下：

$$G_k(s)=\frac{k_g(s+2+\mathrm{j}4)(s+2-\mathrm{j}4)}{s(s+0.8)}$$

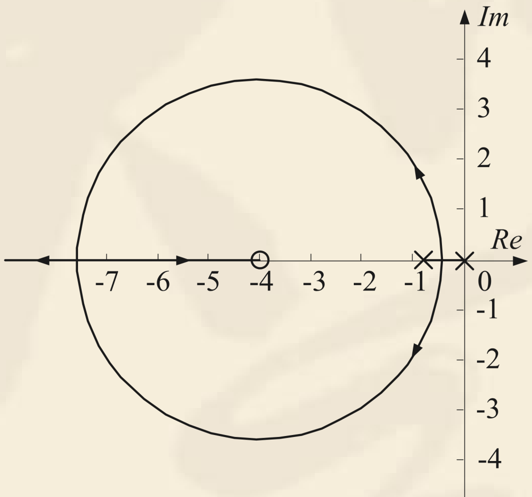
$$G_k(s)=\frac{k_g(s+4)}{s(s+0.8)}$$

$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+0.8)}$$

对应的根轨迹分别为:



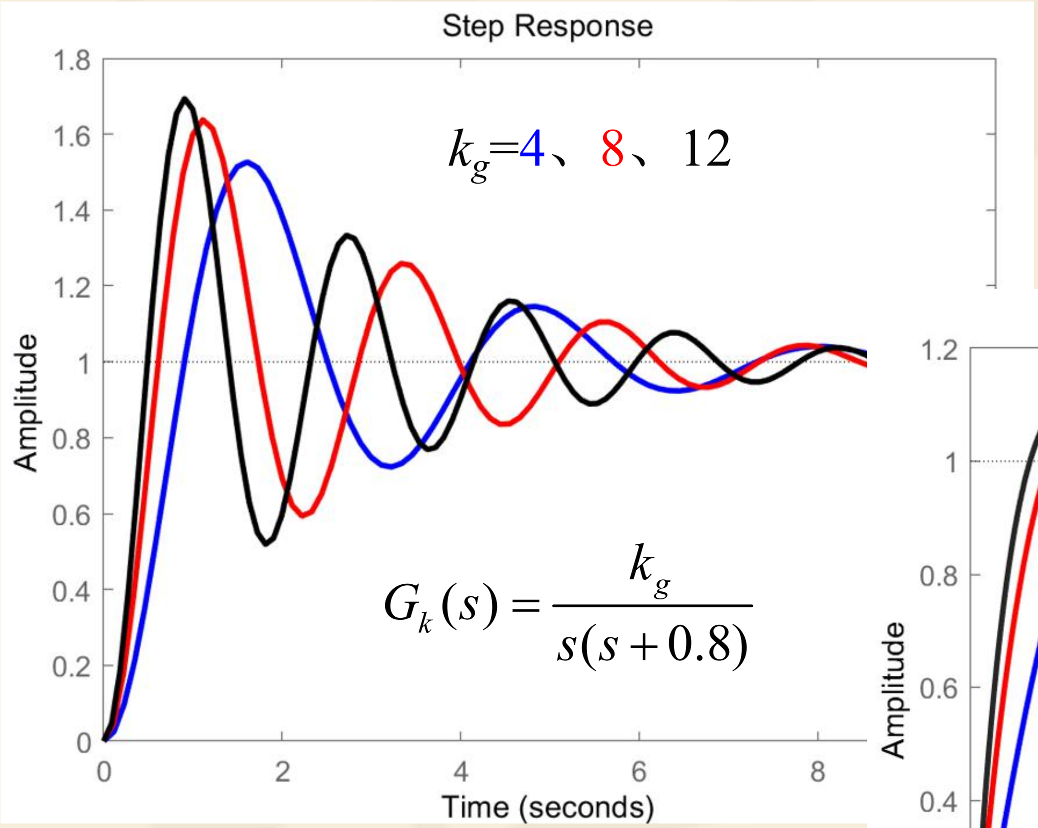

加开环零点-2±j4后系统的根轨迹图

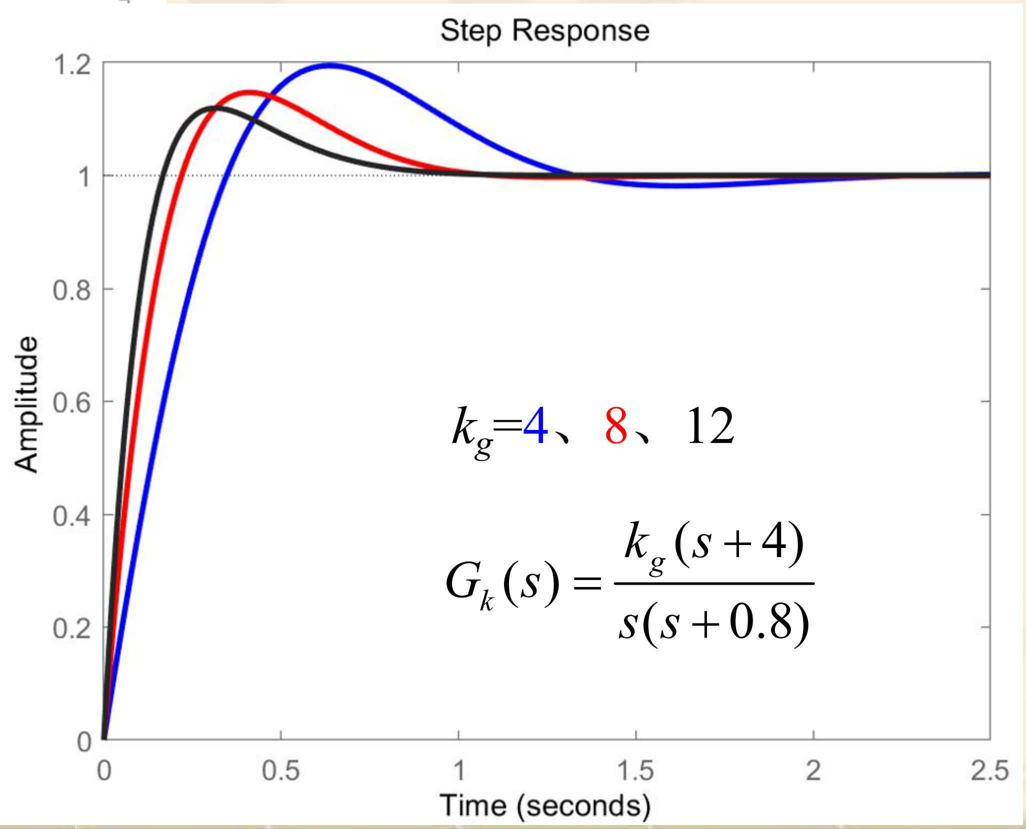



加开环零点-4后系统的根轨迹图

- 加入开环零点后可以改变渐近线的倾角，减少渐近线的条数;
- 随着$K_g$的增加，根轨迹的两个分支向左半平面弯曲或移动，这相当于增大了系统阻尼，使系统的瞬态过程时间减小（极点实部绝对值增大），提高了系统的相对稳定性。

# 示例：引入开环零点前后，闭环系统的单位阶跃响应曲线



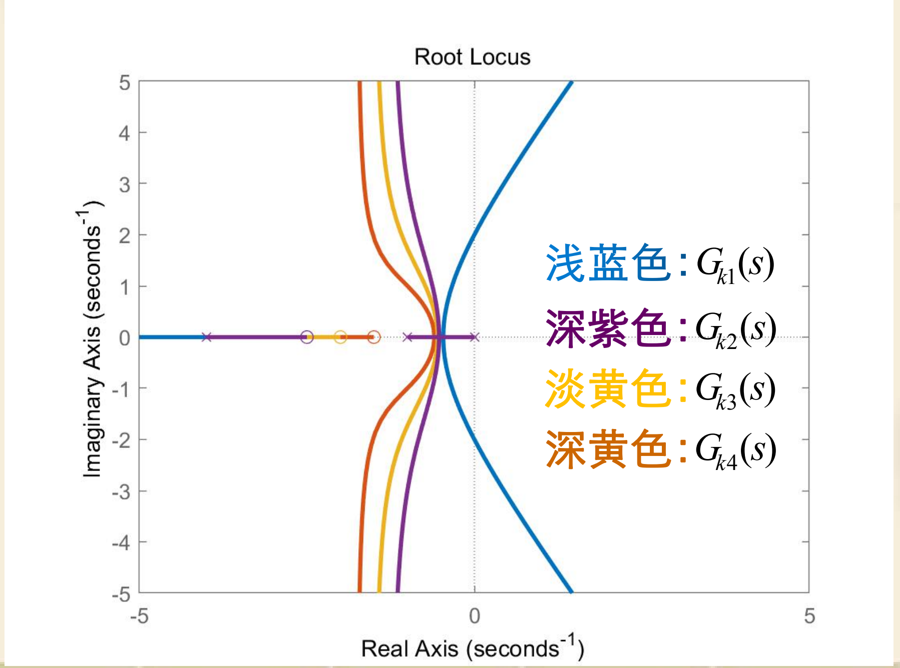



# 补例：增加的开环零点距离虚轴远近，对系统性能的影响

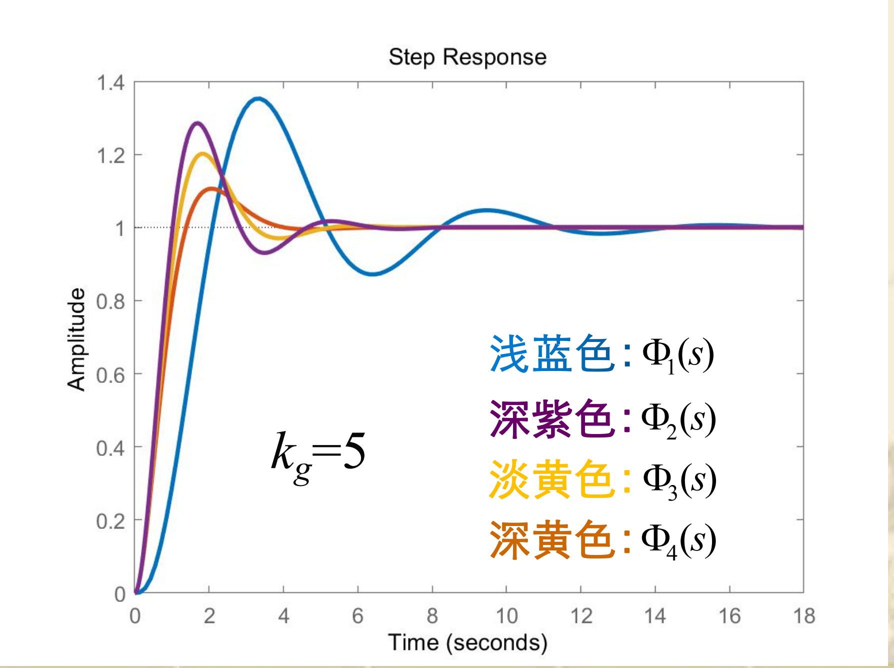
$$G_{k1}(s)=\frac{k_g}{s(s+1)(s+4)} \qquad G_{k2}(s)=\frac{k_g(s+2.5)}{s(s+1)(s+4)}$$

$$G_{k3}(s)=\frac{k_g(s+2)}{s(s+1)(s+4)} \qquad G_{k4}(s)=\frac{k_g(s+1.5)}{s(s+1)(s+4)}$$

4个开环系统的根轨迹




4个闭环系统的单位阶跃响应

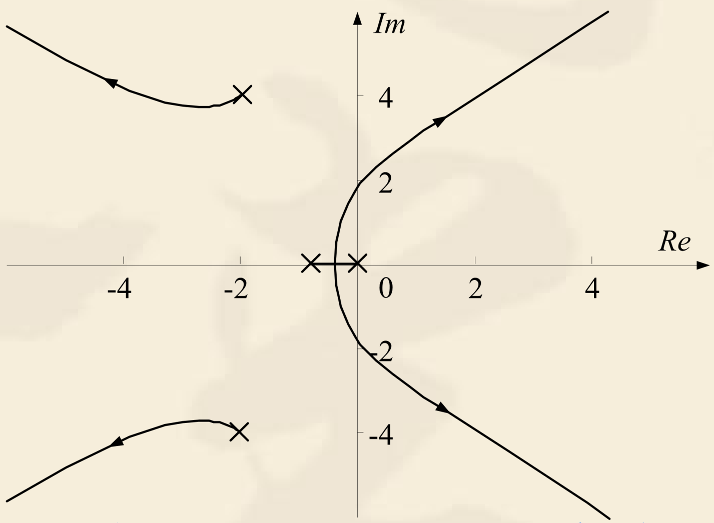


## 2、增加开环极点对根轨迹的影响

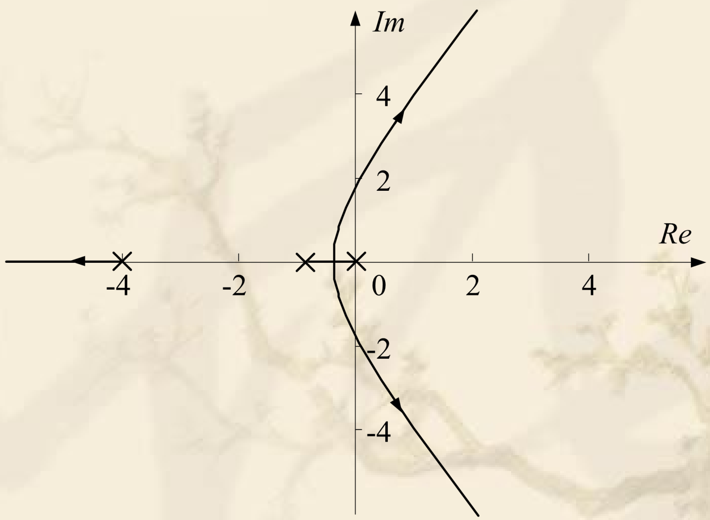
在原系统上分别增加一对复数开环极点-2±j4和一个实数开环极点-4，则系统的开环传递函数分别为

$$G_k(s)=\frac{k_g}{s(s+0.8)(s+2+j4)(s+2-j4)}$$

$$G_k(s)=\frac{k_g}{s(s+0.8)(s+4)}$$




加开环极点-2±j4后系统的根轨迹图




加开环极点-4后系统的根轨迹图

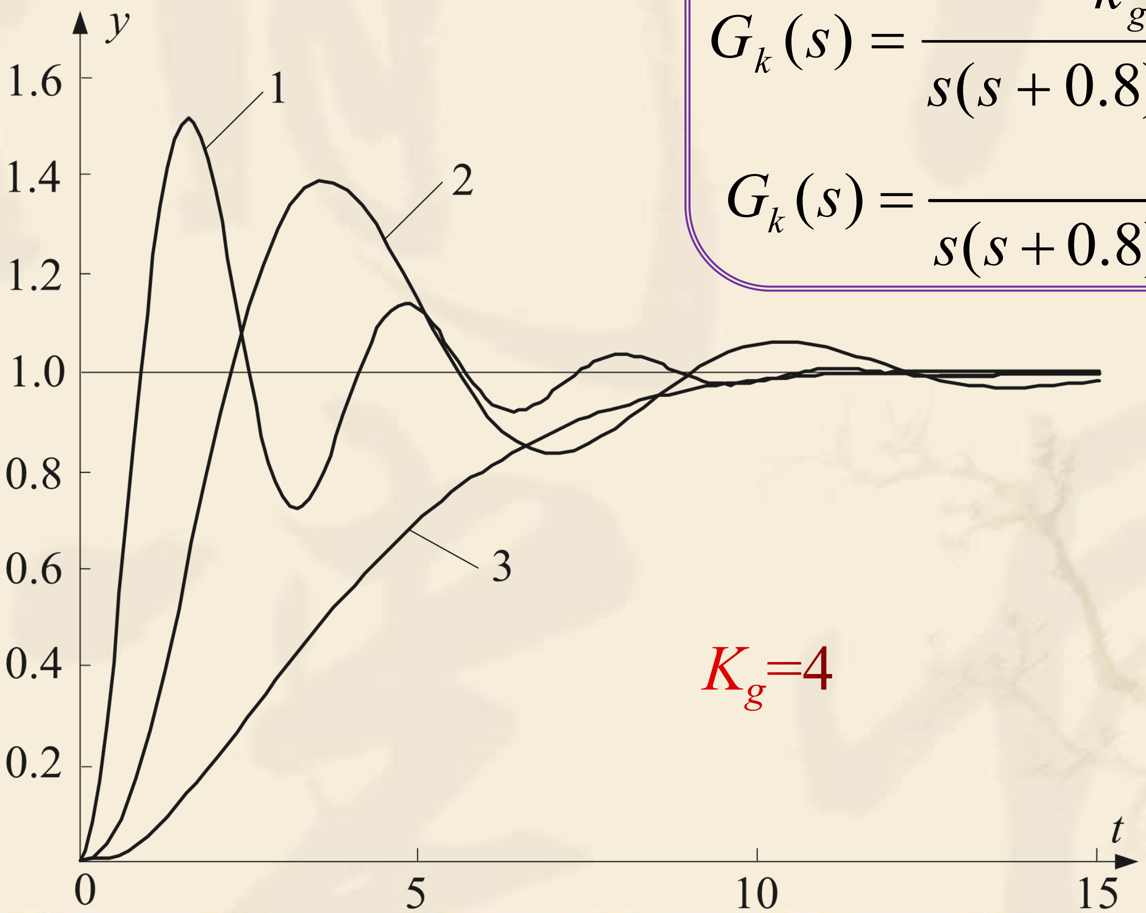
- 加入开环极点后增加了系统的阶数，改变了渐近线的倾角，增加了渐近线的条数。
- 随着$k_g$的增加，根轨迹的两个分支向$s$右半平面弯曲或移动，这相当于减小了系统的阻尼，使系统的稳定性变差。
- 由于加入的开环极点和$k_g$的不同，系统的闭环主导极点也将不同，系统的性能也会有所不同。

# 三个闭环系统的单位阶跃响应曲线

$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+0.8)}$$

$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+0.8)(s+4)}$$

$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+0.8)(s+2+\mathrm{j}4)(s+2-\mathrm{j}4)}$$




$K_g$=4

# 结论

- 控制系统增加开环零点，通常引起根轨迹的左移，使系统更加稳定，系统的瞬态过程时间缩短，超调量减小。
- 控制系统增加开环极点，通常引起根轨迹的右移，使系统的稳定性降低。系统的瞬态过程时间增加，超调量由系统的主导极点决定。

## 二、条件稳定系统分析

如果根轨迹全部处于$s$左半平面，则对于所有的根轨迹增益，闭环系统都是稳定的。但是很多系统的根轨迹通常一部分处于$s$左半平面，而另外部分处于$s$右半平面，这意味着对于某些根轨迹增益，闭环系统是稳定的，而对于另外的根轨迹增益，闭环系统是不稳定的。

参数在一定范围内取值才能使闭环系统稳定，这样的系统称为条件稳定系统。条件稳定系统可由根轨迹法确定使系统稳定的参数的取值范围。

条件稳定系统的例子：

- 开环非最小相位系统，其闭环系统的根轨迹必然有一部分在$s$的右半平面；
- 具有正反馈的环节

[例]：设开环系统传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{k_g(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$

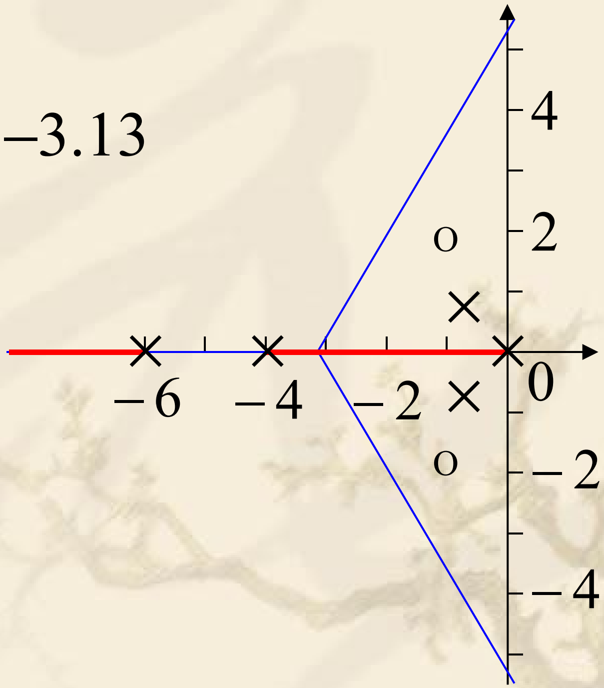
试绘制根轨迹并讨论使闭环系统稳定时$k_g$的取值范围。

[解]根据绘制根轨迹的步骤，可得：

- 开环极点：0，-4，-6，$-0.7\pm j0.714$，零点：$-1\pm j1.732$
- 渐近线：与实轴的交点：

$$-\sigma=-\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=-\frac{4+6+1.4-2}{3}=-3.13$$

倾角：$\theta=\dfrac{\pi(2k+1)}{n-m}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi$




- 实轴上根轨迹区间：$(-\infty,-6),[-4,0]$

➢分离会合点:　　　　　分离角: $\theta_d = \frac{\pi}{2}$

$$N(s) = s^2 + 2s + 4, N'(s) = 2s + 2$$

$$D(s) = s^5 + 11.4s^4 + 39s^3 + 43.6s^2 + 24s$$

$$D'(s) = 5s^4 + 45.6s^3 + 117s^2 + 87.2s + 24$$

由: $\begin{cases} N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0 \\ k_{gd} = -\dfrac{D'(s)}{N'(s)}\Big|_{s=-\sigma_d} \end{cases}$　　可以求得分离点$s=-2.3557$ 。

近似求法: 分离点在[-4，0]之间。

| $s$ | 0 | -0.5 | -1 | -1.5 | -2.0 | -2.5 | -3 | -3.5 | -4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_{gd}$ | 0 | 1.628 | 3 | 5.971 | 8.80 | 9.375 | 7.457 | 3.949 | |

$k_{gd}$ 的最大值为9.375，这时$s$=-2.5，是近似分离点。

- 出射角：$\theta_c = \mp 55^\circ$，入射角：$\theta_r = \pm 103^\circ$
- 与虚轴的交点和对应的增益值：

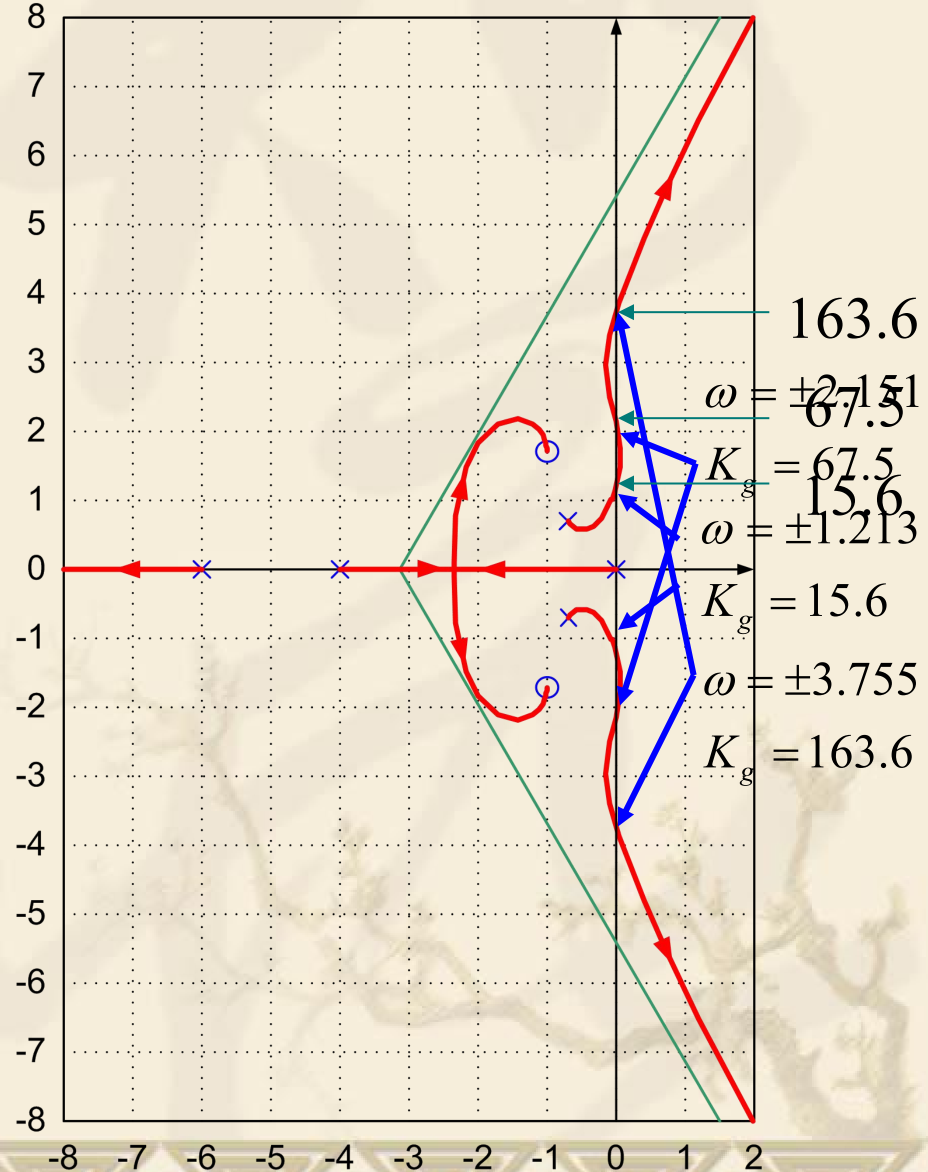
$$\omega = \begin{matrix} \pm 1.213 \\ \pm 2.151 \\ \pm 3.755 \end{matrix} \qquad k_{gp} = \begin{cases} 15.6 \\ 67.5 \\ 163.6 \end{cases}$$

画出根轨迹如图所示，该图是用Matlab绘制的。

由图可知：当 $0 < K_g < 15.6$ 和 $67.5 < K_g < 163.6$时，系统是稳定的；

当 $K_g > 163.6$和$15.6 < K_g < 67.5$ 时，系统是不稳定的。

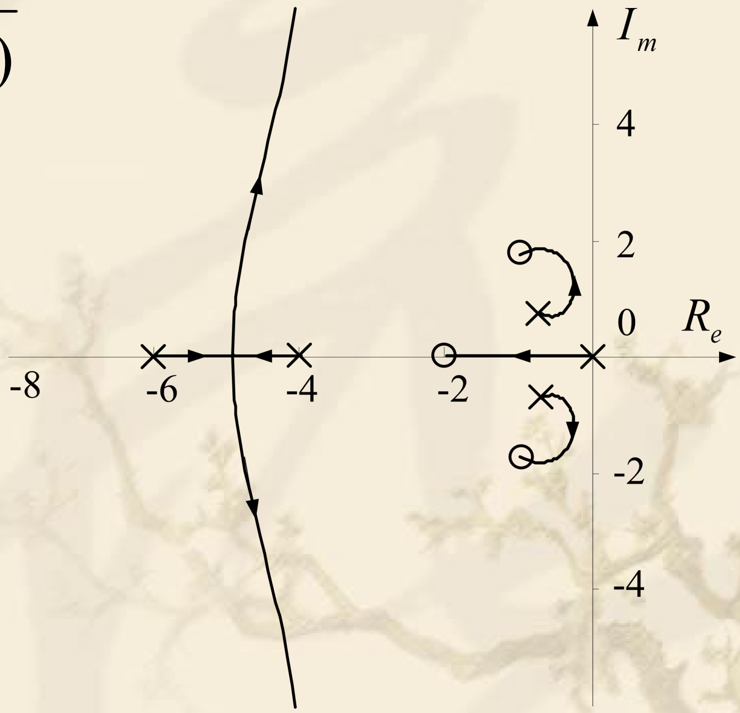
这种情况为条件稳定系统



适当调整系统的参数或在系统中增加合适的校正网络，可以消除条件稳定性问题。比如在系统的开环传递函数中增加一个零点，即增加一个比例微分环节，通常可使根轨迹向左方弯曲。在上例中，如果增加一个零点-2，则开环传递函数成为

$$G_k(s)=\frac{k_g(s^2+2s+4)(s+2)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$$

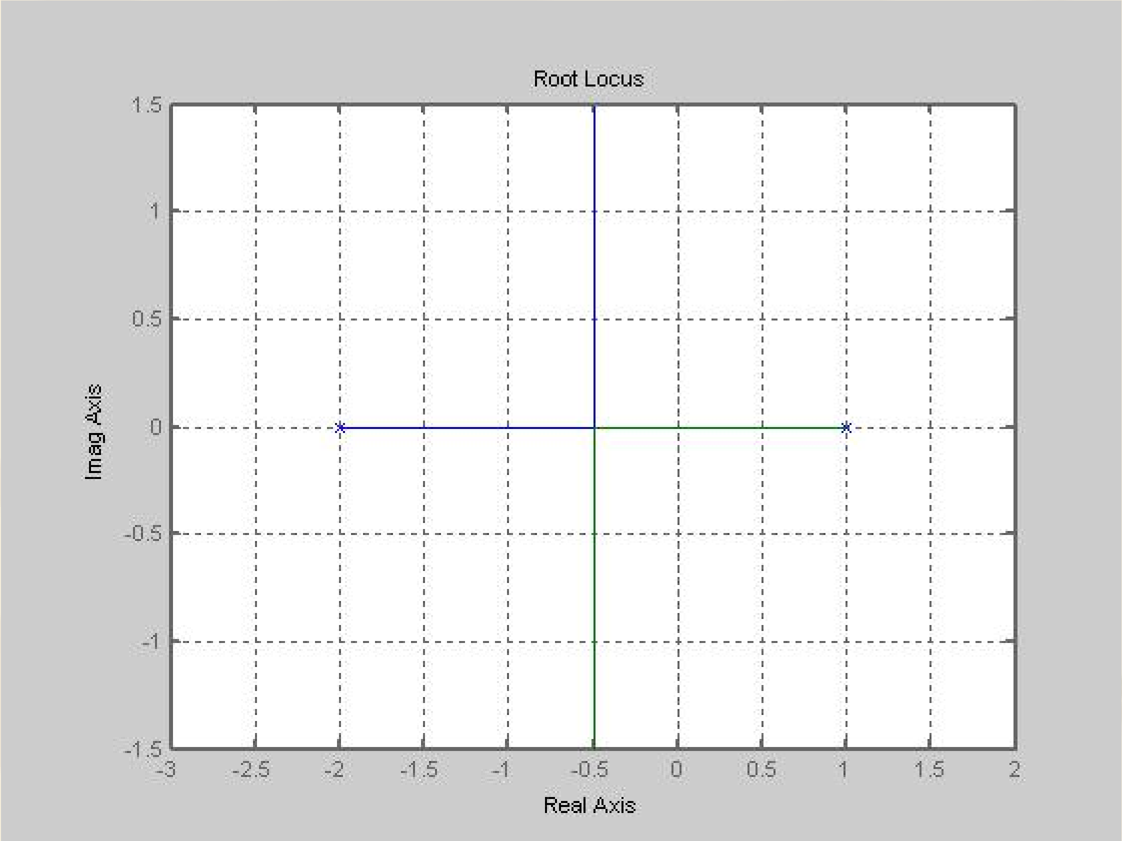
根轨迹为:




从稳定的角度看，开环系统增加了零点后，不论根轨迹增益取何值，闭环系统都是稳定的。至于增加零点后闭环系统其它性能指标的变化情况，要视具体情况而定。

[例]非最小相位系统：$G_k(s)=\dfrac{k_g}{(s-1)(s+2)}$，试确定系统的临界稳定增益值$k_{gp}$。

[解]：根轨迹如右：




有闭环极点在$s$右半平面，系统是不稳定的。显然稳定临界点在原点。该点的增益临界值为$k_{gp}$。

闭环特征方程为：$s^2+s+k_g-2=0$，当$s$=0时，$k_{gp}=2$。系统稳定的条件是$k_g>2$。

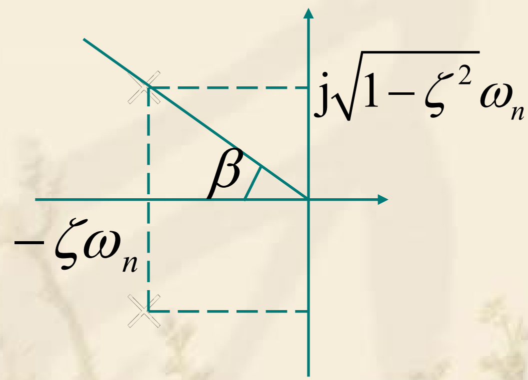
## 三、利用根轨迹估算系统的性能

利用根轨迹可以清楚的看出开环根轨迹增益或其他开环参数变化时，闭环系统极点位置及其瞬态性能的改变情况。

以二阶系统为例：开环传递函数为 $G_k(s)=\dfrac{\omega_n^{\;2}}{s(s+2\zeta\omega)}$

闭环传递函数为 $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\;2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\;2}}$

共轭极点为：$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm \mathrm{j}\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$



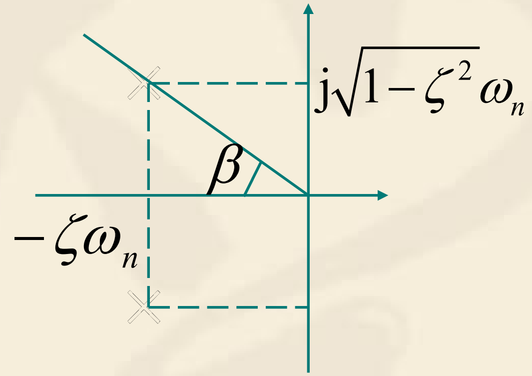

闭环极点在$s$平面上的分布如右图：

闭环极点的张角$\beta$为：

$$\cos\beta=\frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n)^2+(\zeta\omega_n)^2}}=\zeta,\therefore\ \beta=\cos^{-1}\zeta=\arccos\zeta$$

$\beta$称为阻尼角。斜线称为等阻尼线。

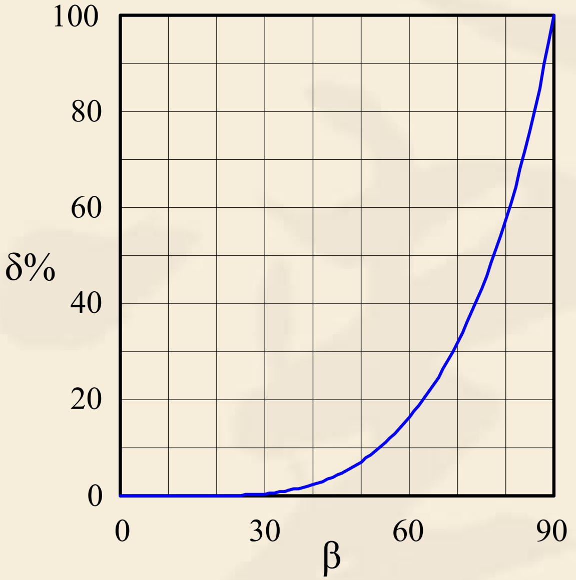
闭环二阶系统的主要的性能指标是超调量和调整时间。这些性能指标和闭环极点的关系如下:




$$\delta\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = e^{-\pi\mathrm{ctg}\beta} \times 100\%$$

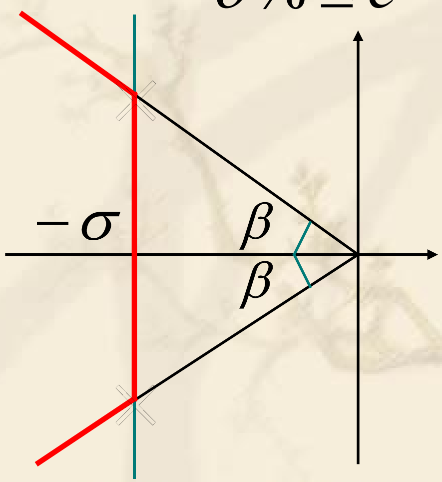
$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{\sigma}(-\sigma\text{为极点实部})$$

$\delta\%$和$\beta$的关系如下图




若闭环极点落在下图中红线包围的区域中，则有:

$$\delta\% \le e^{-\pi\mathrm{ctg}\beta}\text{和}t_s \le \frac{3}{\sigma}$$



在具有主导极点的高阶系统中，可以使用上述方法估算系统的瞬态性能指标。在进行高阶系统的性能指标估算时，应先确定系统的闭环主导极点（可能是复数或实数形式），将系统简化为以主导极点为极点的二阶系统（或一阶系统），然后再根据二阶系统（或一阶系统）的性能指标来估算。

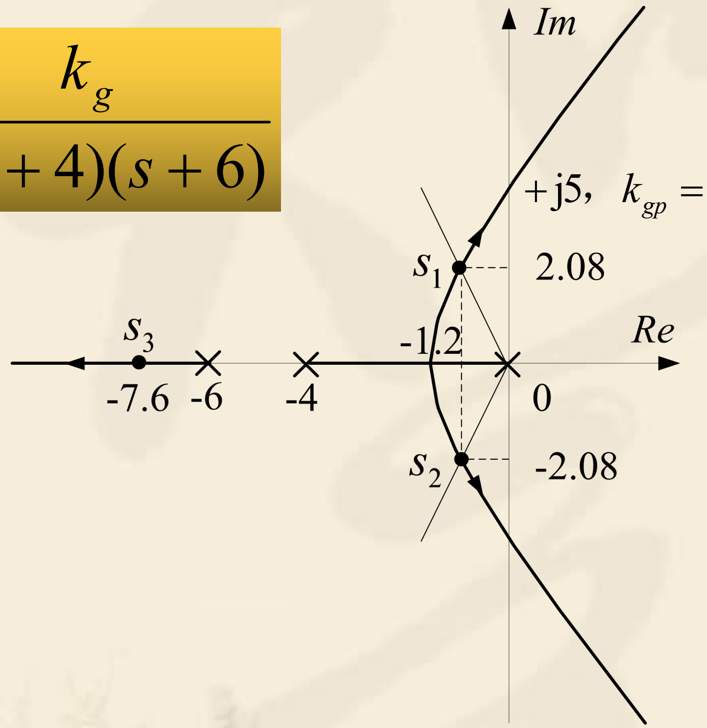
例4.4.1 若导弹航向控制系统的开环传递函数为

$$G_k(s)=\frac{k_g}{s(s+4)(s+6)}$$

判断$s_{1,2}$=-1.20±j2.08是不是系统的闭环主导极点。若是，试估算该闭环系统的超调量和调整时间。

[解]：首先画出根轨迹如右。由图可以看出：根轨迹与虚轴的交点为+j5,-j5，这时的临界增益 $k_{gp} = 240$ 当 $k_g >= 240$ 时，闭环系统不稳定。

$$G_k(s) = \frac{k_g}{s(s+4)(s+6)}$$

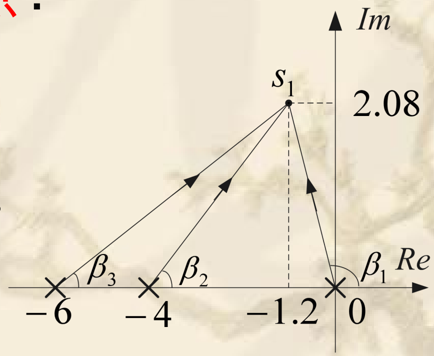



(1) 先判断 $s_{1,2}$=-1.20±j2.08是不是根轨迹上的点：

$$\angle G_k(s_1) = -\beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = -\angle s_1 - \angle(s_1+4) - \angle(s_1+6)$$

$$= -(180^\circ - \mathrm{tg}^{-1}\frac{2.08}{1.2} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{2.08}{4-1.2} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{2.08}{6-1.2}) = -180^\circ$$

可知是根轨迹上的点。



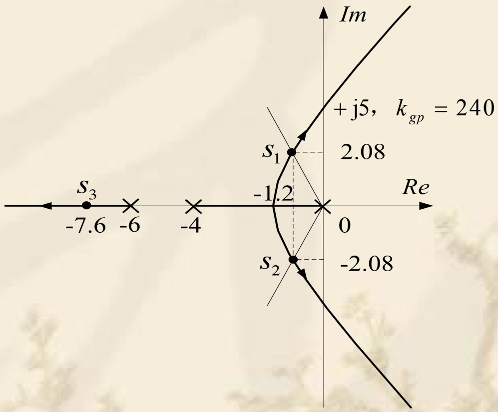
再判断是否闭环主导极点。根据根轨迹绘制规则：“系统开环极点之和等于系统闭环极点之和（当$n-m\geq 2$时）”，令系统的另一个闭环极点为$-s_3$。

$$-1.2+j2.08-1.2-j2.08-s_3=0-4-6$$

解得$-s_3=-7.6$。

由于7.6/1.2=6.333>5，可知是系统的闭环主导极点。

对应根轨迹增益的计算：




$$\left|\frac{k_g}{s(s+4)(s+6)}\right|_{s=-1.2+j2.08}=1$$

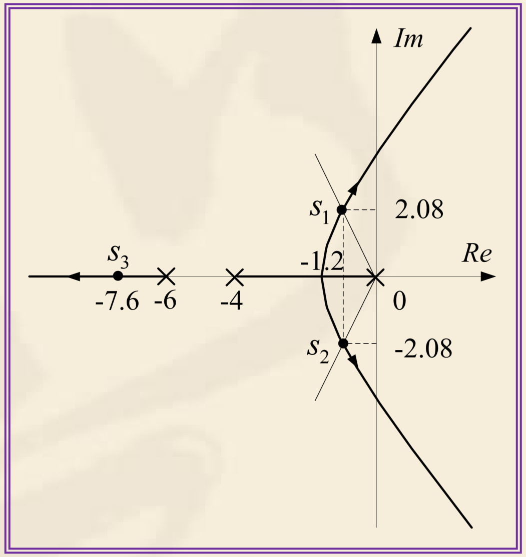
$$k_g\approx 44$$

这是一个三阶系统，从根轨迹上看出，随着$K_g$的增加，主导极点越显著。所以可以用二阶系统的性能指标近似计算。

(2) 估算系统的性能指标:

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{44}{(s+1.2+j2.08)(s+1.2-j2.08)(s+7.6)}$$




化简为

$$\Phi(s) \approx \frac{5.79}{(s+1.2+j2.08)(s+1.2-j2.08)}$$

可知，$k_g$=44时系统的阻尼角为$\beta$=$\mathrm{tg}^{-1}(2.08/1.2)=60^{o}$。则:

系统的超调量为

$$\delta\% = e^{-\pi \mathrm{ctg}\beta} \times 100\% = e^{-\pi \mathrm{ctg}60^{\circ}} \times 100\% \approx 16.3\%$$

调整时间为（ Δ=5时）

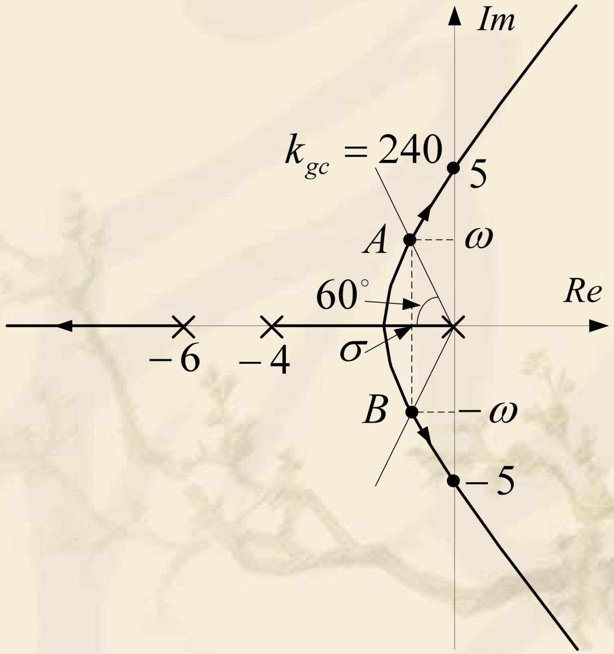
$$t_s = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{1.2} = 2.5(s)$$

## 四、利用根轨迹计算系统的参数

讨论如何根据系统的瞬态和稳态性能要求确定系统的参数。

例4.4.2 控制系统如下所示。(1) 试确定使闭环系统稳定时的根轨迹增益$k_g$的范围；(2) 若要求闭环单位阶跃响应的最大超调量$\delta\%$<=16.3%，试确定根轨迹增益$k_g$的范围。

$$G_k(s)=\frac{k_g}{s(s+4)(s+6)}$$




[解]：首先画出根轨迹如右。由图可以看出：根轨迹与虚轴的交点约为+j5,-j5，这时的临界增益$k_{gp}=240$，当$0<k_g<240$时，闭环系统稳定。

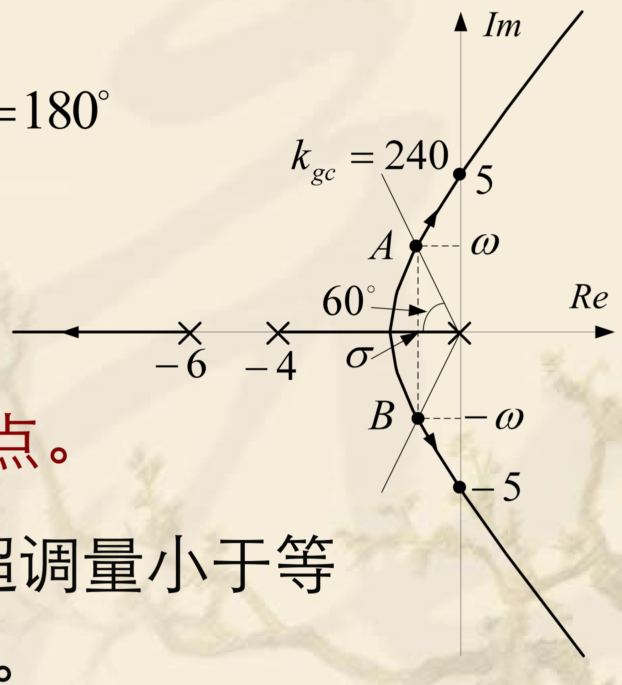
■ 【方法1】由于$\delta\% = e^{-\pi \mathrm{ctg}\beta} \times 100\%$，当$\delta\%\le 16.3\%$时，解得阻尼角$\beta \le 60^{\circ}$。在根轨迹图上画两条与实轴夹角为$60^{\circ}$的直线，与根轨迹交于$A$、$B$两点。这时系统的超调量等于16.3%。(?)通过求$A$、$B$两点的坐标，可确定该点的根轨迹增益$k_g$。

设$A$点坐标为：$-\sigma + \mathrm{j}\omega$

$$\frac{\omega}{\sigma} = \mathrm{tg}60^{\circ} = \sqrt{3} \qquad 120^{\circ} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega}{4-\sigma} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega}{6-\sigma} = 180^{\circ}$$

解得：$\sigma = 1.2,\ \omega = 2.08$

即$A$点坐标为：$s_A = -1.2 + \mathrm{j}2.08$




另一闭环根为-7.6(?)，则$A$、$B$为主导极点。

此时的根轨迹增益为$k_g$=44(?)，若要求超调量小于等于16.3%，则$k_g$的范围是$0 < k_g \le 44$ (?)。

【方法2】先写出系统的闭环特征方程，将$\sigma$和$\omega$的关系式代入其中，再令闭环特征方程的实部和虚部为零，可求出$\sigma$、$\omega$和对应的$k_g$。

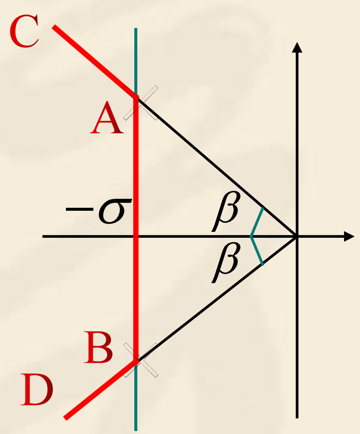
令 $s = x + \mathrm{j}\sqrt{3}x$；代入特征方程 $s^3 + 10s^2 + 24s + k_g = 0$

实部方程 $-8x^3 - 20x^2 + 24x + K_g = 0$

虚部方程 $20\sqrt{3}x^2 + 24\sqrt{3}x = 0$

解得:

$x = -1.2$，$s = -1.2 \pm \mathrm{j}2.08$，$k_g = 44$




通常，在对系统提出超调量的同时，又提出调整时间的要求。这时，应在如右图所示的折线CABD以左区域内寻找满足要求的参数。若在该区域内没有根轨迹，则不能满足提出的要求。

例：单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_k(s)=\frac{k_g}{(s+1)^2(s+4)^2}$$

1. 画出根轨迹;

2. 能否通过选择$k_g$满足最大超调量$\delta\%\le 4.32\%$的要求?

3. 能否通过选择$k_g$满足调节时间$t_s\le 2$秒的要求?

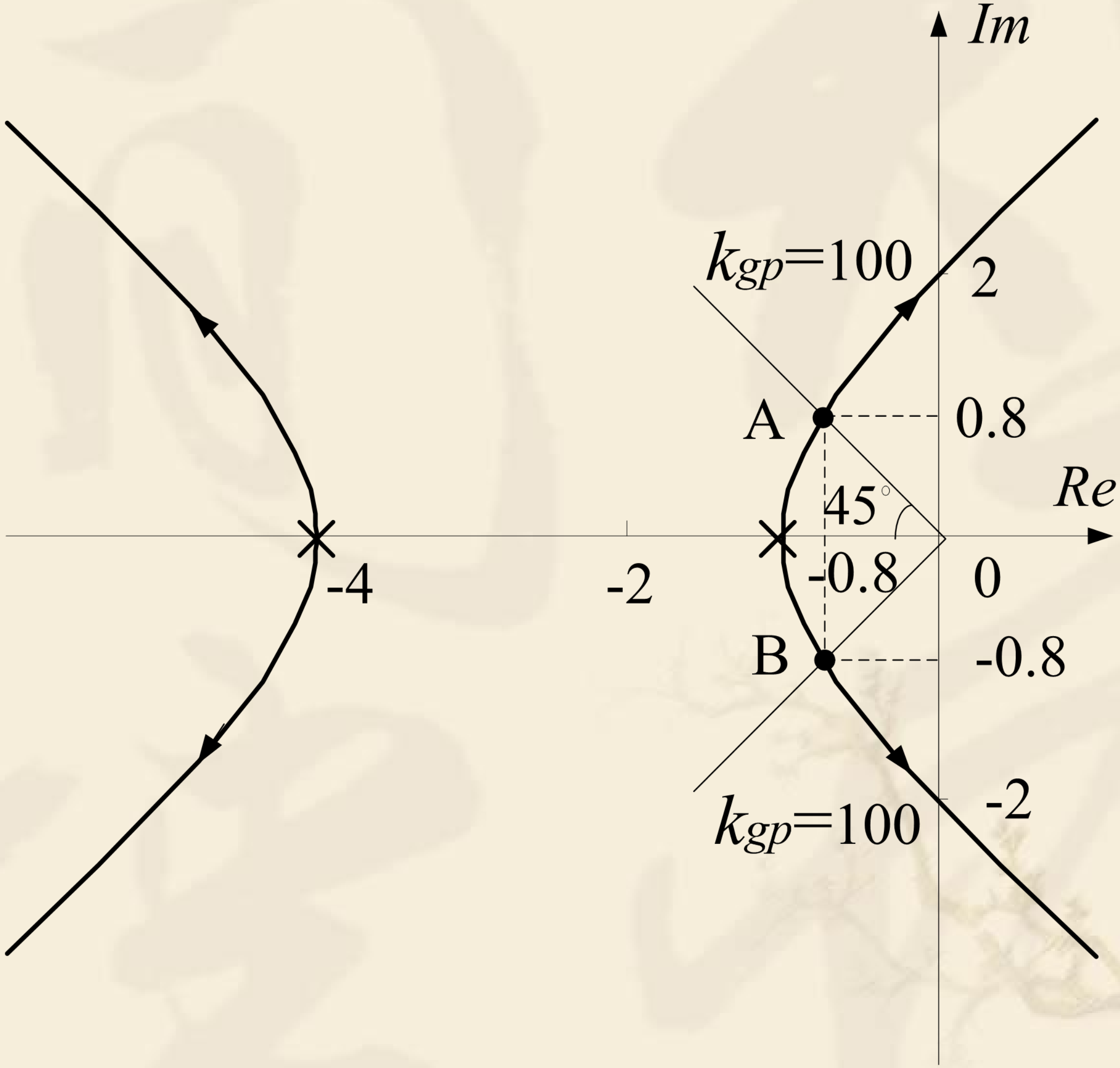
4. 能否通过选择$k_g$满足位置误差系数$K_p\ge 10$的要求?

解： 1. 画根轨迹

①实轴上无根轨迹

②渐近线 $\sigma$=-2.5， $\theta=\pm 45°$ ，$\pm 135°$

③与虚轴交点$\omega=\pm 2$， $K_{gp}$=100


Im
$k_{gp}$=100
2
A
0.8
Re
45°
-4
-2
-0.8
0
B
-0.8
-2
$k_{gp}$=100

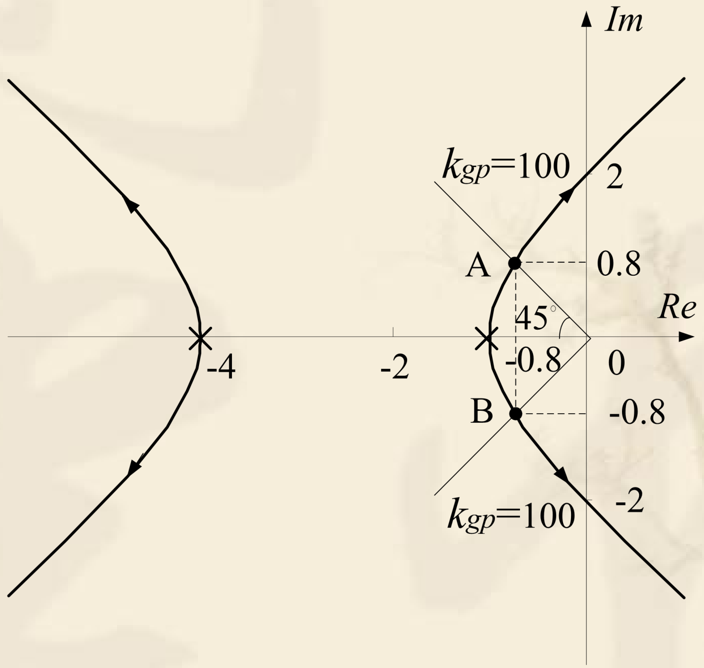
2.能否通过选择$k_g$满足最大超调量δ%≤4.32%的要求?

假设该系统有主导极点。当δ%≤4.32%时阻尼角≤ 45°。

画阻尼角为45°的直线与根轨迹相交于A，可求得闭环极点为

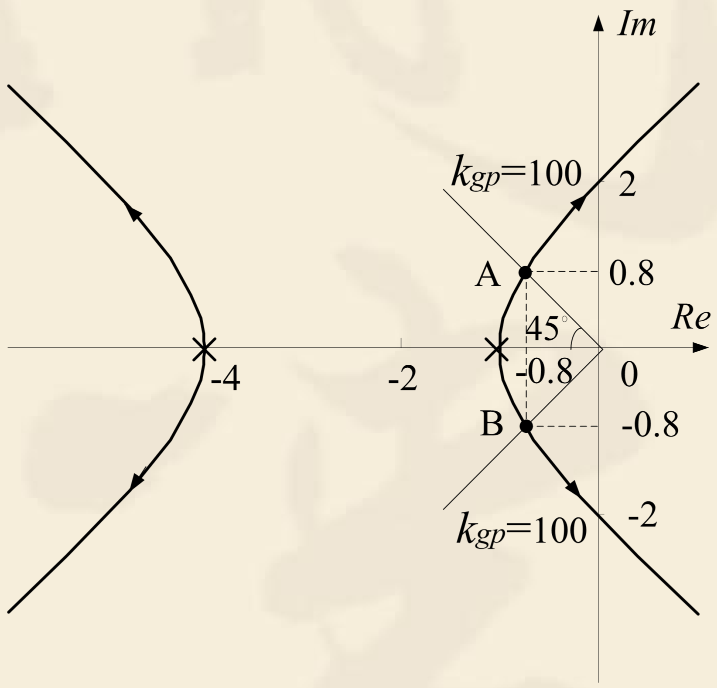
$s_A = -0.8+0.8j$；由幅值条件可求得在$s_A$点处：$k_g=7.4$。另一对

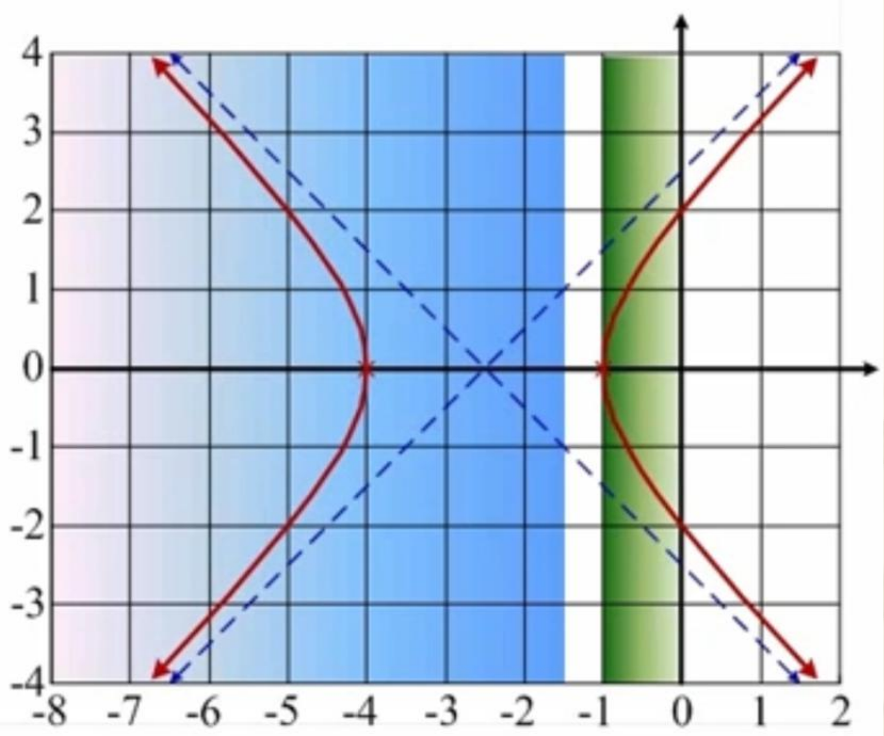
闭环极点的实部为－4.2(?) 。所以极点$s_A$是主导极点。



3. 能否通过选择$k_g$满足调节时间$t_s$≤2秒的要求?

要求$t_s$≤2秒，即要求3/σ≤2，可得σ≥1.5，即要求主导极点的|实部|≥1。由根轨迹可知主导极点的|实部|均≤1，所以不能通过选择$k_g$满足$t_s$≤2秒的要求。

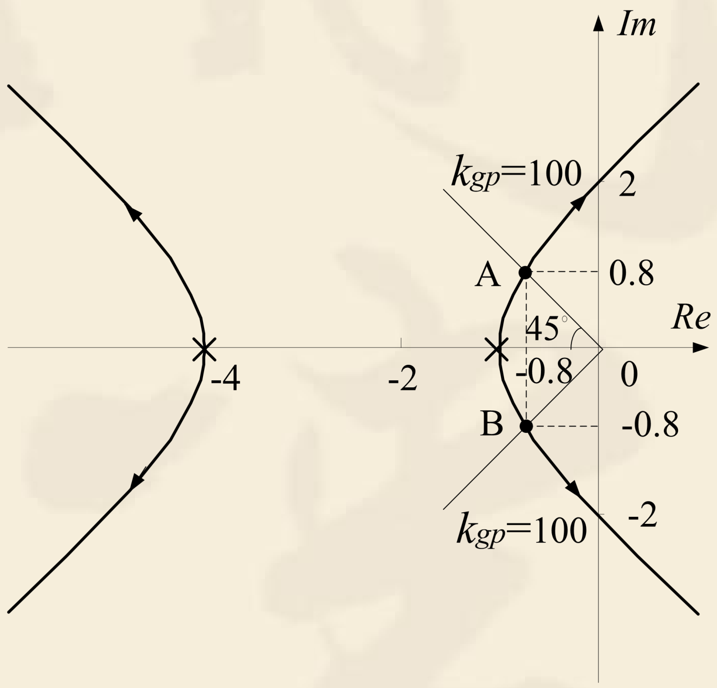


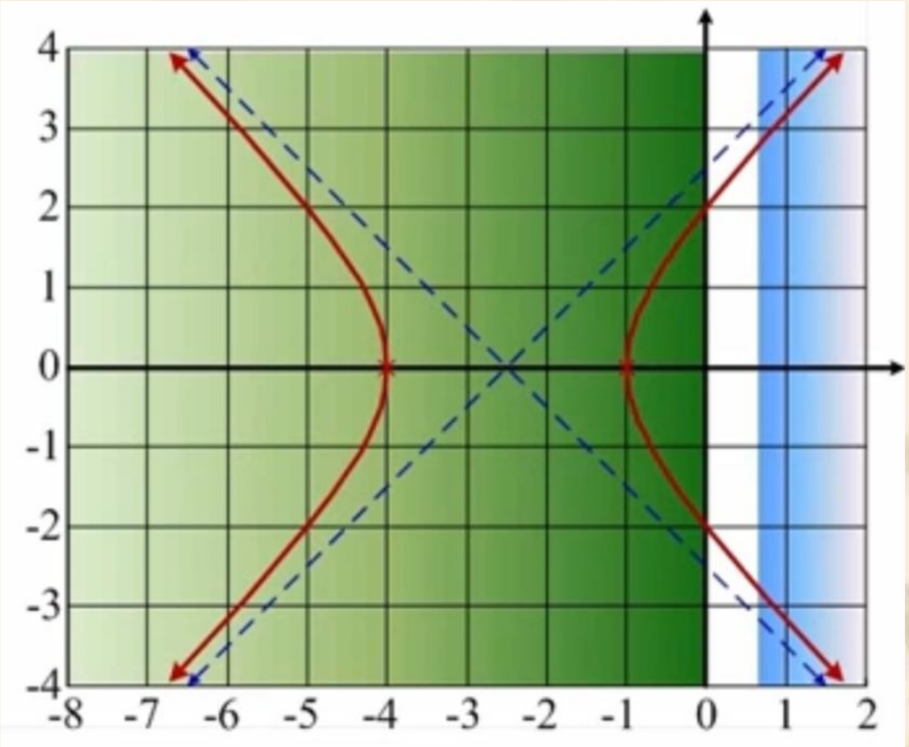



4. 能否通过选择$k_g$满足位置误差系数$K_p \geq 10$的要求?

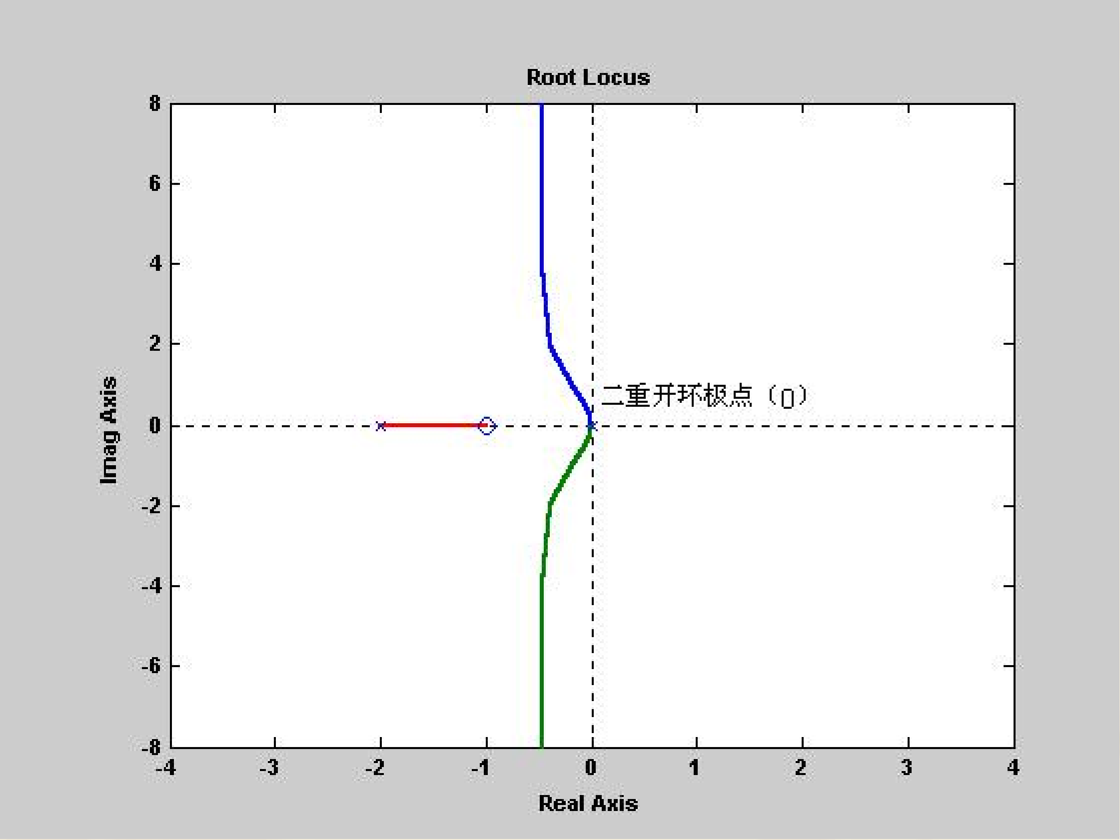
即：$K_p = \lim_{s=0} G_k(s) = \dfrac{k_g}{16} \geq 10$，可得 $k_g \geq 160$，此时系统不稳定。

所以不能通过选择$k_g$满足$K_p \geq 10$的要求。



[例4-15]：设系统A和B有相同的被控对象，且有相同的根轨迹，如下图所示。已知系统A有一个闭环零点，系统B没有闭环零点。试确定系统A和B的开环传递函数和它们所对应的闭环方块图。

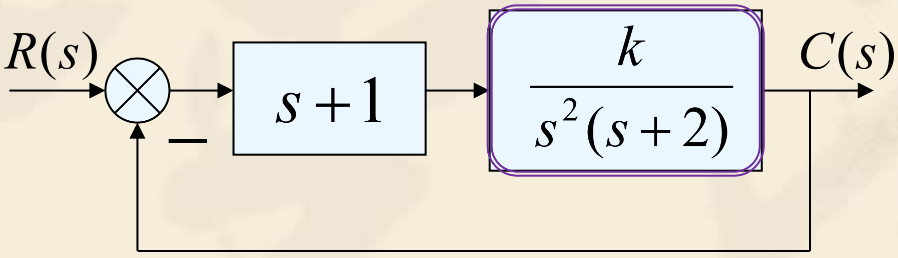


[解]：①由于两系统的根轨迹完全相同，因而它们对应的开环传递函数和闭环特征方程式也完全相同。由上页图可知系统A和B的开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{k(s+1)}{s^2(s+2)}$$ 特征方程为：$D(s)=s^2(s+2)+k(s+1)$

②[分析]系统A：（前向传函$G_a(s)$，反馈传函$H_a(s)$）

$$G_a(s)=\boxed{\frac{k}{s^2(s+2)}(对象)}\times(s+1),\ \ H_a(s)=1$$

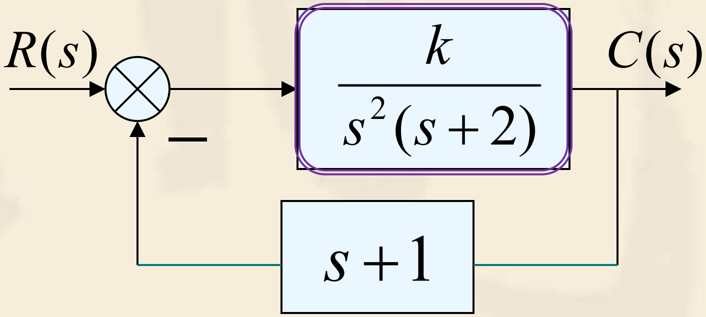



图(a) A系统

$$\phi_A(s)=\frac{G_a(s)H_a(s)}{1+G_a(s)H_a(s)}=\frac{k(s+1)}{s^2(s+2)+k(s+1)}$$

系统B：（前向传函$G_b(s)$，反馈传函$H_b(s)$）

$$G_b(s)=\boxed{\frac{k}{s^2(s+2)}(\text{对象})},\quad H_b(s)=(s+1)$$




图(b) B系统

$$\phi_B(s)=\frac{G_b(s)}{1+G_b(s)H_b(s)}$$

$$=\frac{k}{s^2(s+2)+k(s+1)}$$

系统A是单位反馈系统，系统B是非单位反馈系统。系统A和B有相同的被控对象、相同的开环传递函数和闭环特征方程。

[可见]根轨迹相同的系统，开环传递函数和闭环极点都相同，但闭环传递函数却不一定相同，即闭环零点不一定相同。

# 小结

- 开环零、极点对根轨迹形状的影响
- 条件稳定系统的分析
  --- 临界稳定增益的确定
- 瞬态性能分析和开环系统参数的确定
  ---阻尼角和等阻尼线
  ---主导极点的确定
  ---超调量、调整时间与闭环主导极点的关系
  ---根据性能指标确定二阶及高阶系统的开环放大系数
- 用Matlab绘制根轨迹及分析的方法（建议学习）

作业：4.11，4.12，4.14

# 用Matlab绘制根轨迹（自学）

Matlab参考书推荐:

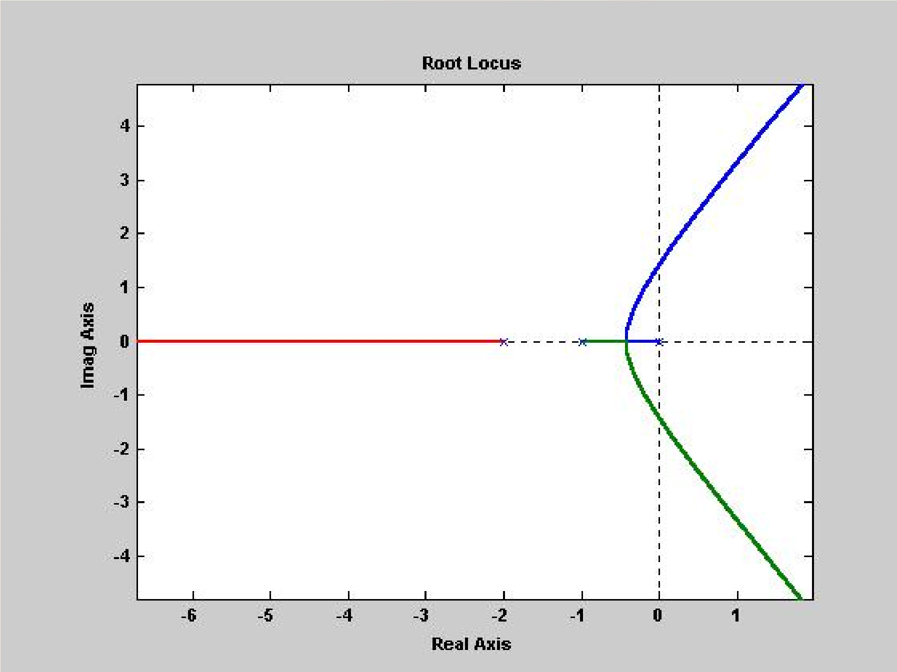
- 现代控制工程，[美]Katsuhiko Ogats,卢伯英译，电子工业出版社
- MATLAB控制系统设计，欧阳黎明著，国防工业出版社

[例子]系统的开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{k_g}{s(s+1)(s+2)}$ ，试利用Matlab画出系统的根轨迹。

[解]打开*Matlab*，创建一个*m*文件，输入下列程序片段：

```
num=[0 0 0 1];%开环传递函数分子系数，降幂排列
den=[1 3 2 0]; %开环传递函数分母系数，降幂排列
r=rlocus(num,den);
```

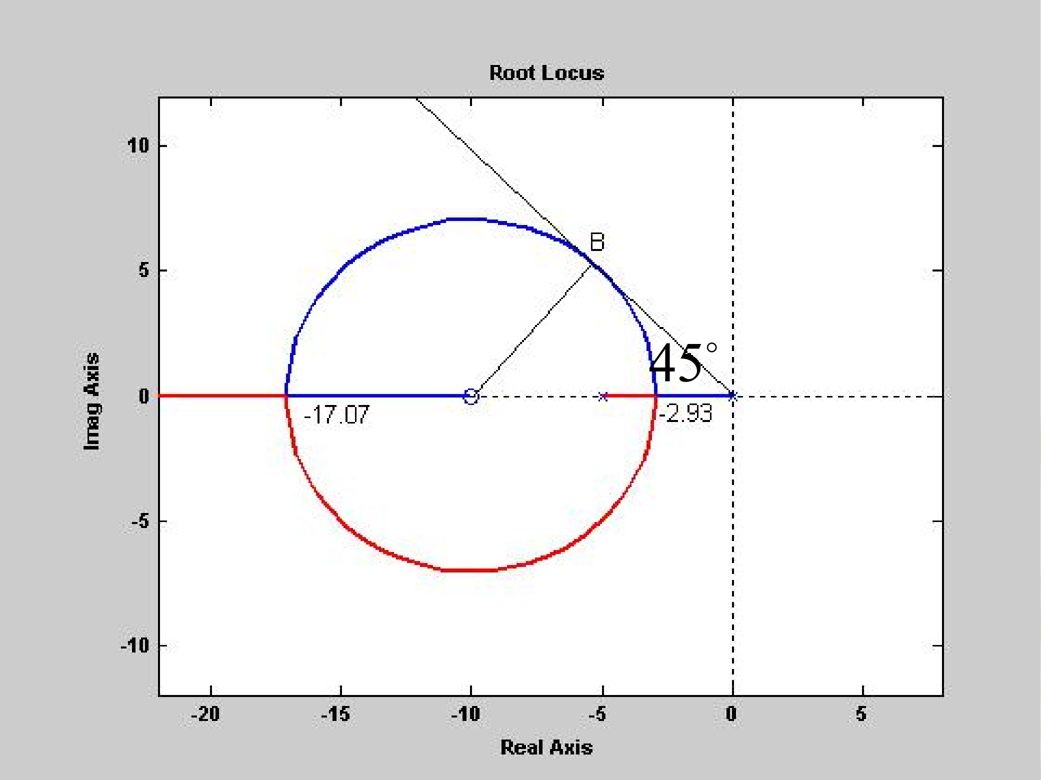
执行之，可得到根轨迹。



[例4-14]已知单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{k(s+10)}{s(s+5)}$（1）画出系统的根轨迹；（2）计算当增益$k$为何值时，系统的阻尼比ζ是 $1/\sqrt{2}$，并求此时系统的闭环特征根；（3）分析$k$对系统性能的影响，并求系统最小阻尼比所对应的闭环极点。

- 画根轨迹

分离会合点分别为-2.93和-17.07，分离会合角为90度。根轨迹为圆，如右图所示。



当 $1/\sqrt{2}$ 时，阻尼角β=45°，表示45°角的直线为OB，其方程为σ=−ω，代入特征方程整理后得:

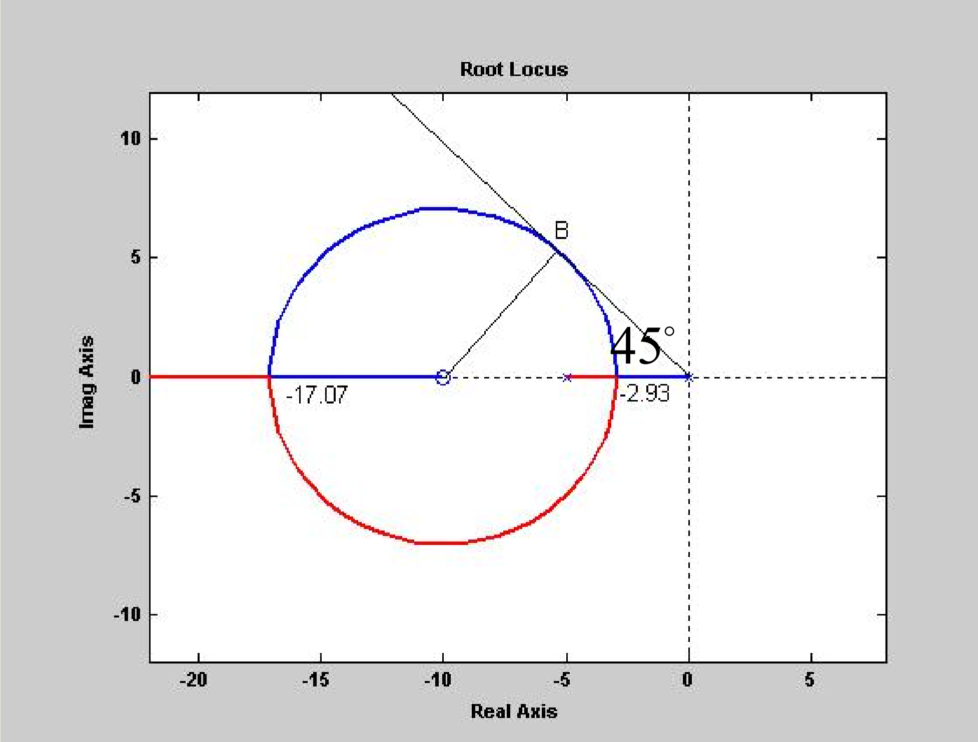
$$\sigma(5+k)+10k+\mathrm{j}\left(2\sigma^2+5\sigma+k\sigma\right)=0$$

令实部和虚部分别为零，有

$$\begin{cases}\sigma(5+k)+10k=0\\ 2\sigma+5+k=0\end{cases}$$

解得 $k=5,\quad \sigma=-5$

由图可知当$k$=5时直线OB与圆相切，系统的阻尼比 $1/\sqrt{2}$ ，特征根为 $-5\pm \mathrm{j}5$

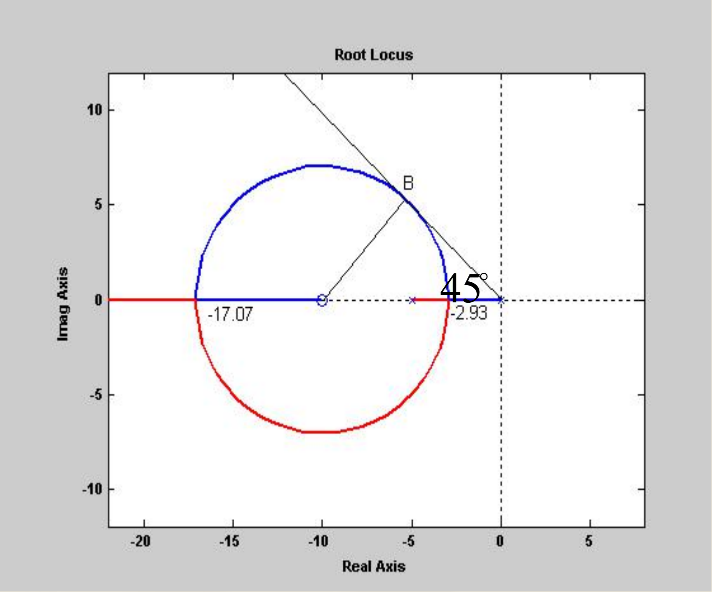


- 对于分离点-2.93，由幅值条件可知

$$k_1 = \frac{2.93 \times |5 - 2.93|}{|10 - 2.93|} = 0.858$$

对于会合点-17.07，有

$$k_2 = \frac{17.07 \times |5 - 17.0|}{|10 - 17.07|} = 29.14$$



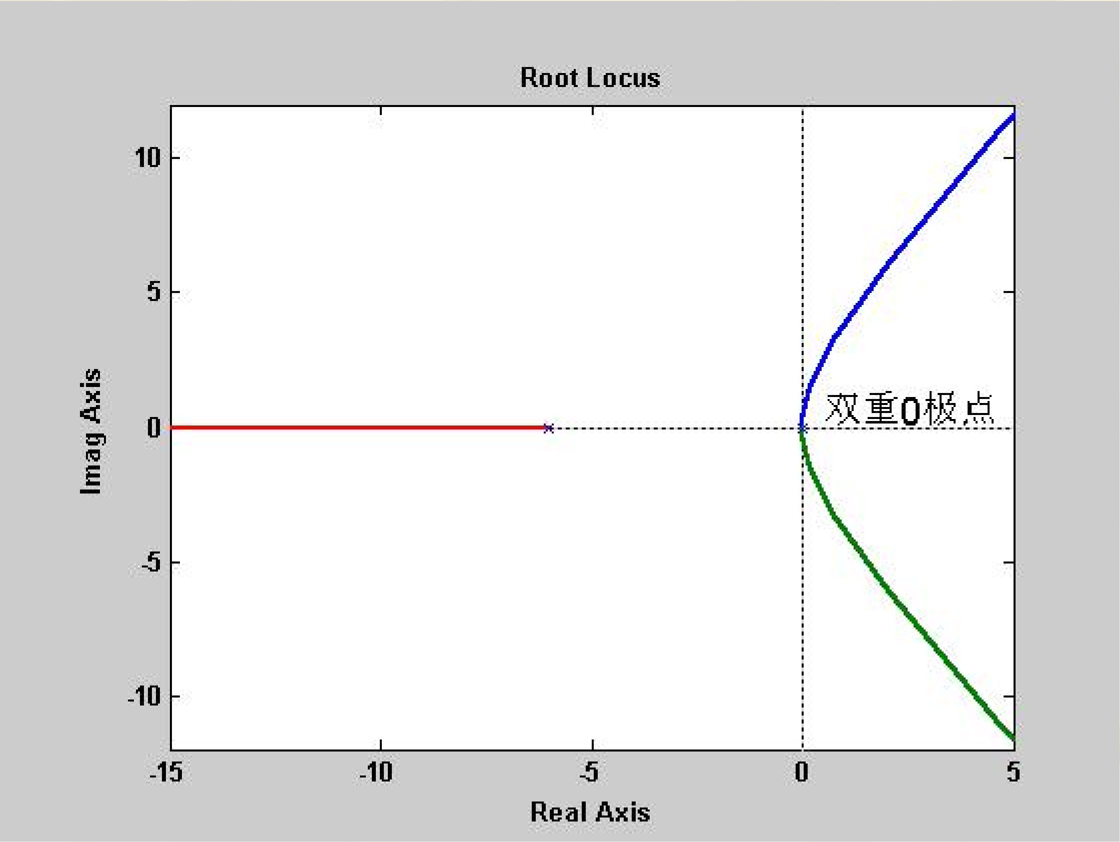

由根轨迹图可知，当$0<k<0.858$时，闭环系统有一对不等的负实数极点，其瞬态响应呈过阻尼状态。当$0.858<k<29.14$时，闭环系统有一对共轭复数极点，其瞬态响应呈欠阻尼状态。当$29.14<k<\infty$时，闭环系统又有一对不等的负实数极点，瞬态响应又呈过阻尼状态。

- 由坐标原点作根轨迹圆的切线，此切线就是直线OB，直线OB与负实轴夹角的余弦就是系统的最小阻尼比，由上可知，此时系统的闭环极点为 $-5 \pm j5$ 。

[例4-16]:已知单位反馈系统的根轨迹如下图所示。

（1）写出该系统的闭环传递函数;

（2）试用适当的方法使系统在任意$k_g$值时均处于稳定的状态。



[解]：① 由根轨迹图知系统的开环传递函数为：$G(s)=\dfrac{k_g}{s^2(s+6)}$

单位反馈系统的闭环传递函数为：

$$\phi(s)=\frac{k_g}{s^2(s+6)+k_g}=\frac{k_g}{s^3+6s^2+k_g}$$

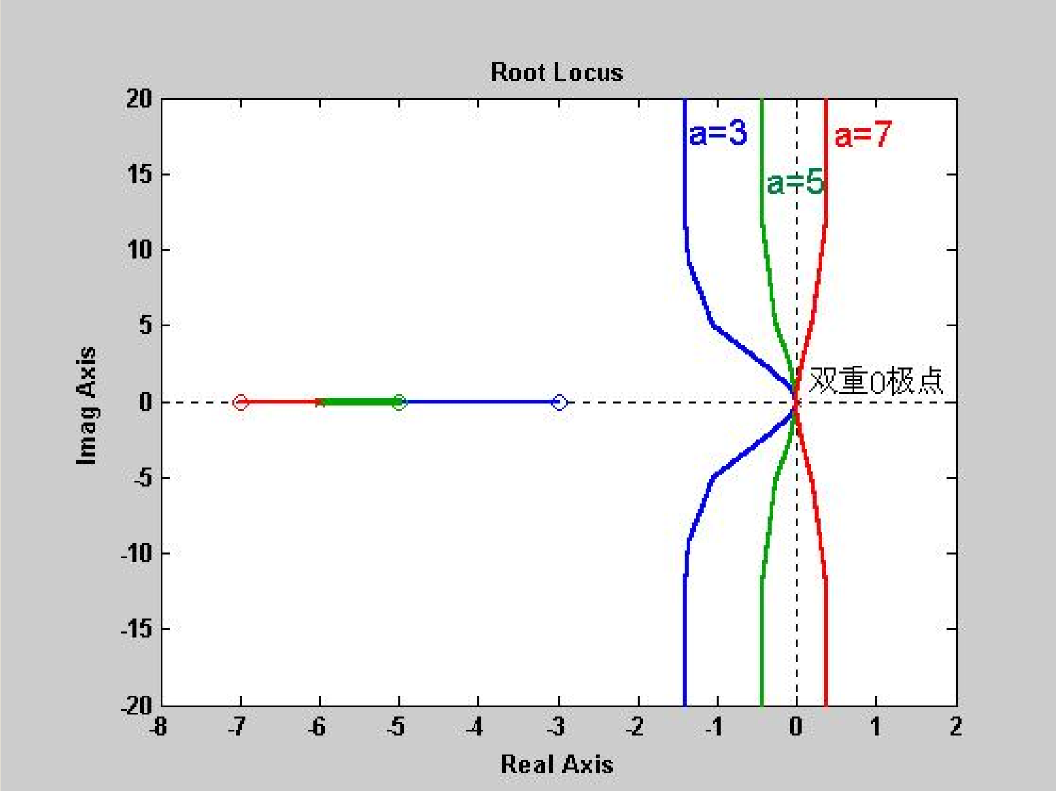
② 当在系统中加入比例微分控制时，开环传递函数增加了一个零点，此时：$G(s)=\dfrac{k_g(s+a)}{s^2(s+6)}$

渐近线与实轴的夹角为：$\pm 90^\circ$，只要渐近线与负实轴相交，系统的根轨迹就在左半$s$平面。因此有：

$\sigma_a=\dfrac{6-a}{2}>0$，所以$0<a<6$。

提示：①加入比例微分控制后，系统增加了开环零点。②在系统中加入零点后，将使根轨迹左移，有利于系统的稳定性。

从下图可以看出：$a$越小，根轨迹越左，稳定性越好。$a<6$时，根轨迹全部在$s$左半平面。$a=6$时，根轨迹有一部分在虚轴上。$a>6$时，根轨迹有一部分在$s$右半平面。




```
clc;
num1=[0 0 1 3];
den1=[1 6 0 0];
num2=[0 0 1 5];
den2=[1 6 0 0];
num3=[0 0 1 7];
den3=[1 6 0 0];
g1=tf(num1,den1);
g2=tf(num2,den2);
g3=tf(num3,den3);
rlocus(g1,g2,g3)
```