信号与系统
SIGNALS AND SYSTEMS

第七章　采样
Sampling

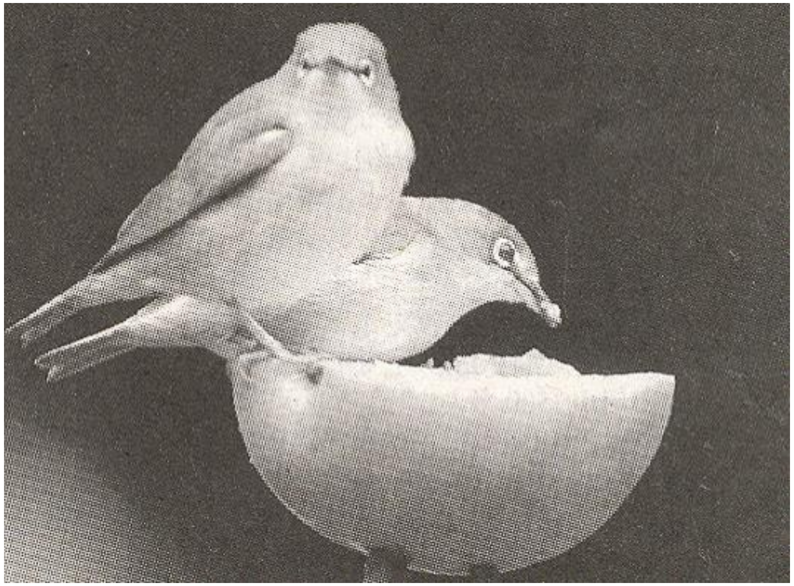
本章主要内容

1. 如何用连续时间信号的离散时间样本来表示连续时间信号——采样定理。
2. 如何从采样所得到的样本重建连续时间信号。
3. 欠采样导致的后果——频谱混叠。
4. 连续时间信号的离散时间处理。
5. 离散时间信号的采样、抽取及内插。
6. 频域采样。

7.0 引言:(Introduction)

在日常生活中，常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如传真的照片、电视屏幕的画面、电影胶片等等，这些都表明连续时间信号与离散时间信号之间存在着密切的联系。在一定条件下，可以用离散时间信号代替连续时间信号而并不丢失原来信号所包含的信息。

例1. 一幅新闻照片



局部放大后的图片

研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系

主要包括：

1. 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息。
2. 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号。
3. 如何对一个连续时间信号进行离散时间处理。
4. 对离散时间信号如何进行采样、抽取，及内插。

Harry Nyquist
1889-1976

Nyquist，美国物理学家，1889年出生在瑞典。1976年在Texas逝世。他对信息论做出了重大贡献。1907年移民到美国并于1912年进入北达克塔大学学习。1917年在耶鲁大学获得物理学博士学位。1917～1934年在AT&T公司工作，后转入Bell电话实验室工作。

1927年，Nyquist确定了对某一带宽的有限时间连续信号进行抽样，且在抽样率达到一定数值时，根据这些抽样值可以在接收端准确地恢复原信号。为不使原波形产生"半波损失"，采样率至少应为信号最高频率的2倍，这就是著名的Nyquist采样定理。

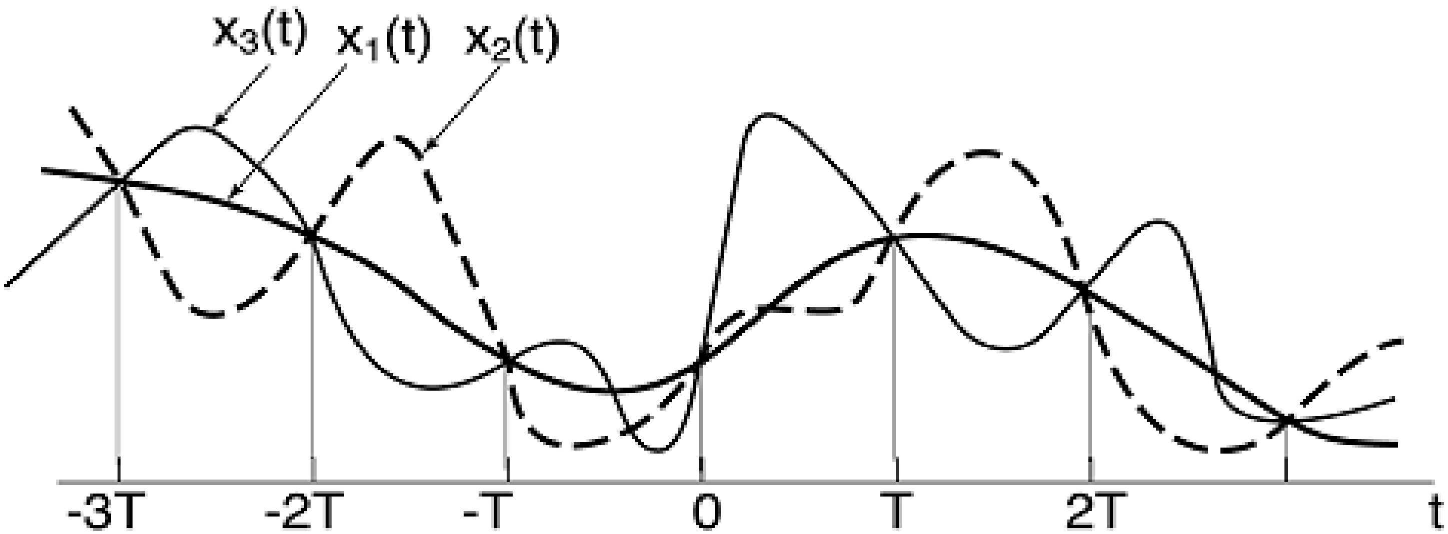
7.1 用样本表示连续时间信号: 采样定理
Theorem of Sampling

一. 采样: Sampling

在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为采样。

是否任何信号都可以由它的离散时间样本来表示?

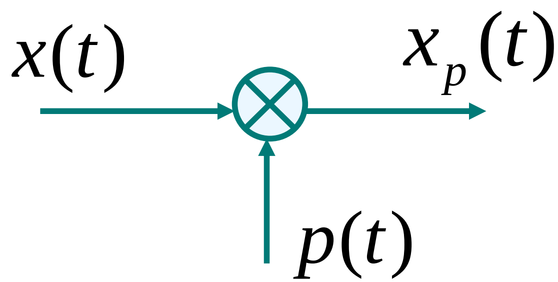
对一维连续时间信号采样的例子:



在没有任何条件限制的情况下，从连续时间信号采样所得到的样本序列不能唯一地代表原来的连续时间信号。

此外，对同一个连续时间信号，当采样间隔不同时也会 得到不同的样本序列。

二. 采样的数学模型：



在时域： $x_p(t) = x(t)\cdot p(t)$

在频域： $X_p(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$

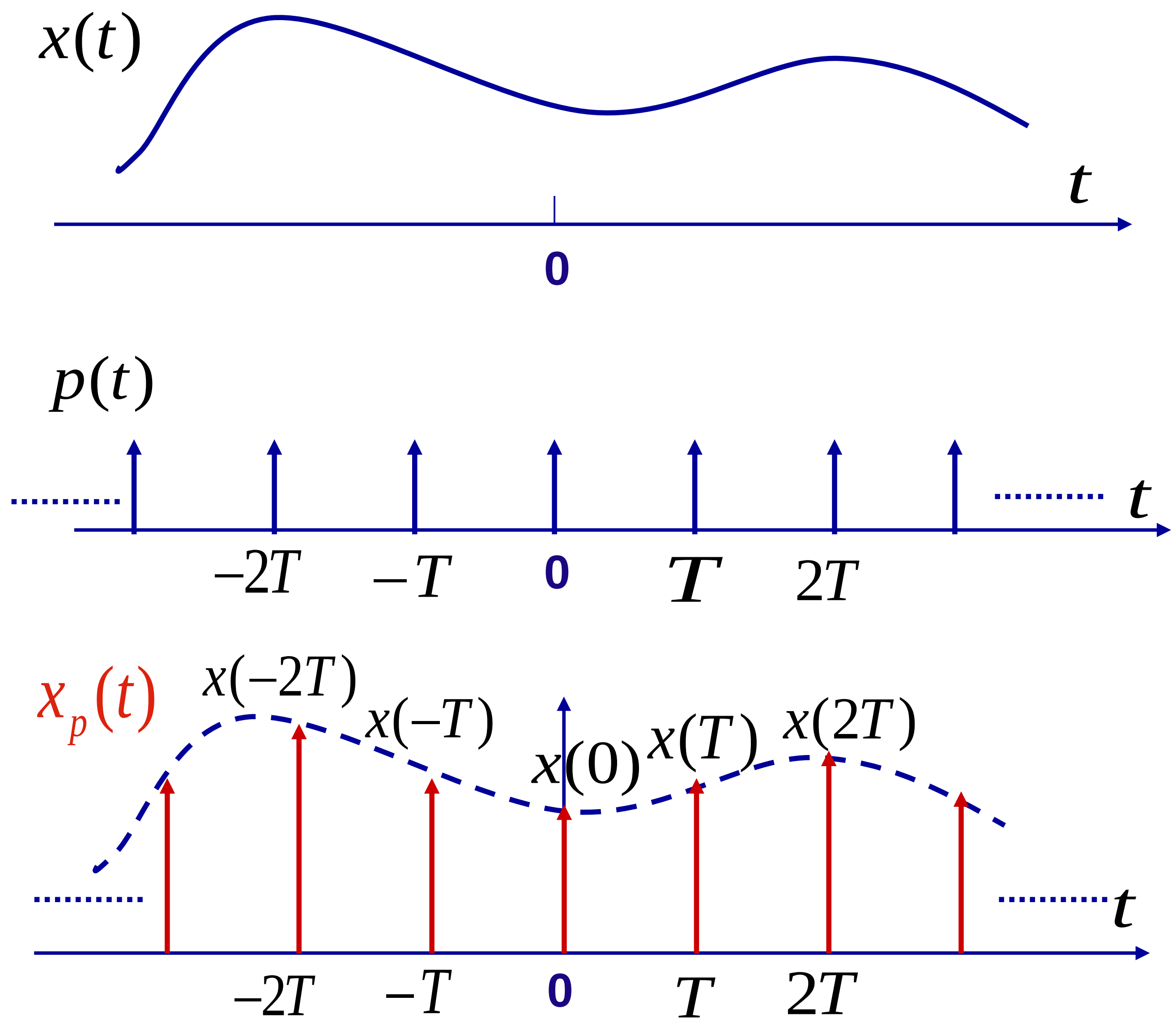
三. 冲激串采样(理想采样)：

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

T 为采样间隔

$$x_p(t) = x(t)p(t)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$


$x(t)$
t
0
$p(t)$
t
$-2T$
$-T$
0
T
$2T$
$x_p(t)$
$x(-2T)$
$x(-T)$
$x(0)$
$x(T)$
$x(2T)$
t
$-2T$
$-T$
0
T
$2T$

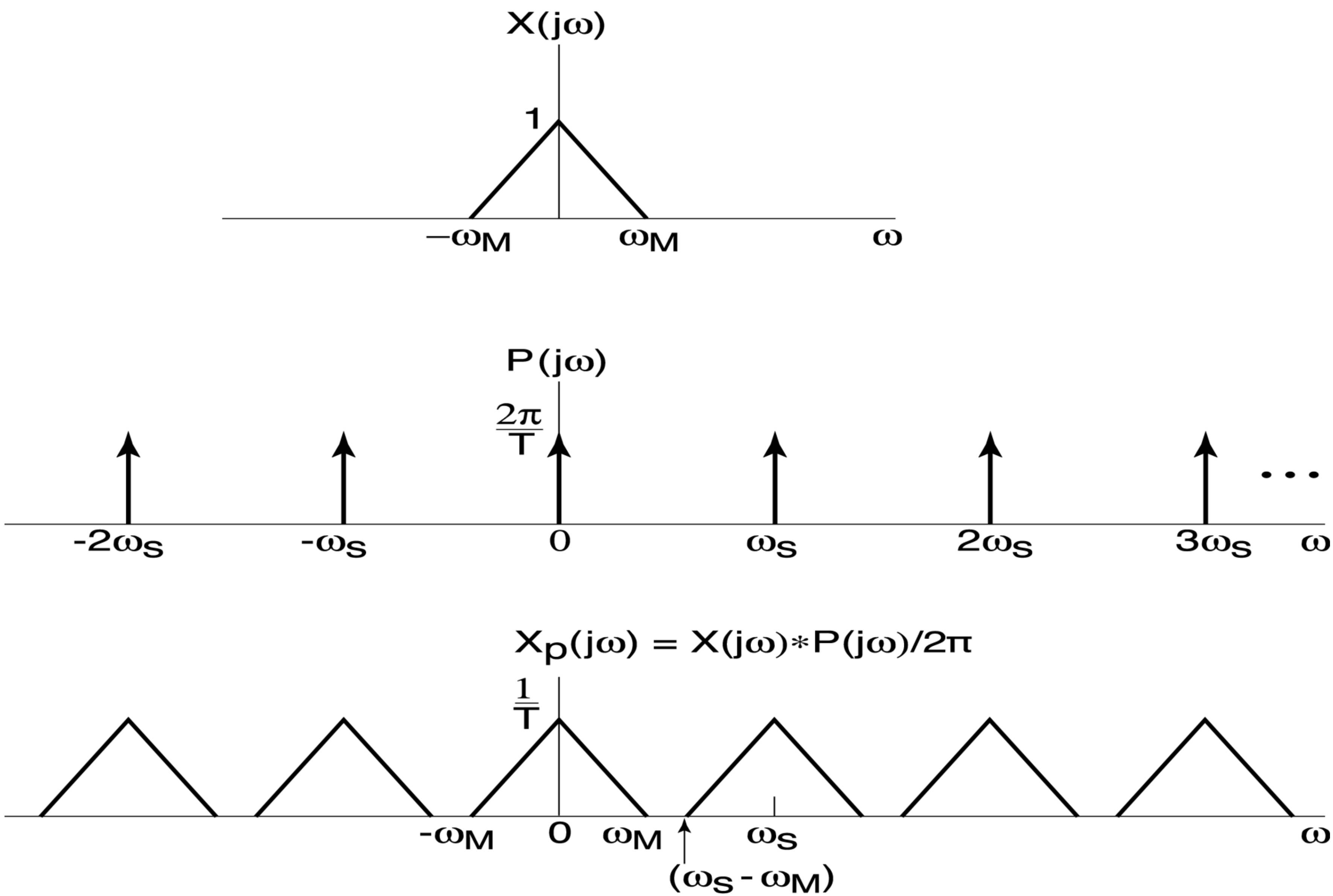
在频域由于 $p(t) \leftrightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}k)$

所以 $X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega)$

$$= \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(j(\omega - k\omega_s)) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

可见，在时域对连续时间信号进行冲激串采样，就相当于在频域将连续时间信号的频谱以 ω_s 为周期进行延拓。

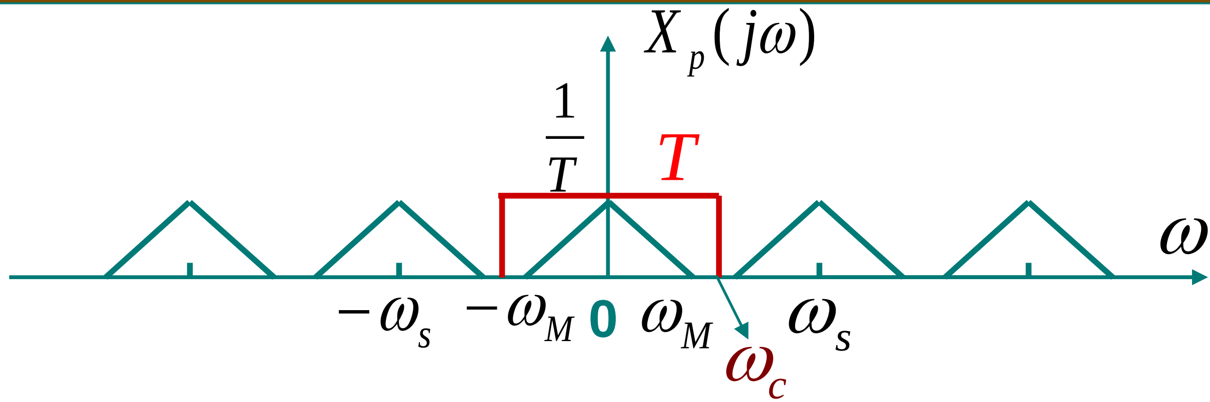

X(jω)
1
−ωM
ωM
ω
P(jω)
2π/T
-2ωS
-ωS
0
ωS
2ωS
3ωS
ω
Xp(jω) = X(jω)*P(jω)/2π
1/T
-ωM
0
ωM
ωS
(ωS - ωM)
ω

要想使采样后的信号样本能完全代表原来的信号，就意味着要能够从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出 $X(j\omega)$ 。这就要求$X_p(j\omega)$在周期性延拓时不能发生频谱的混叠。为此必须要求:

1. $x(t)$ 必须是带限的，最高频率分为 ω_M 。

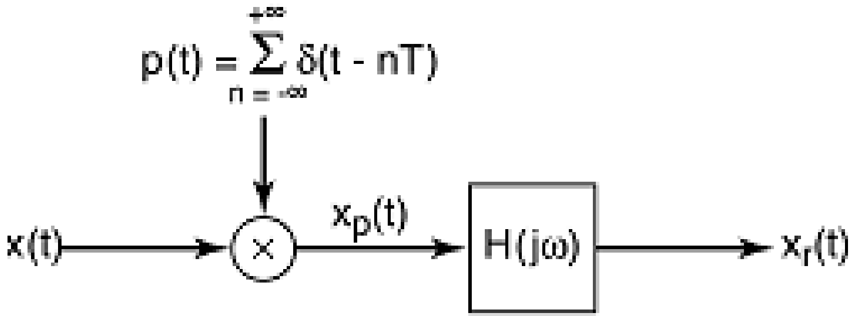
2. 采样间隔**(**周期**)**不能是任意的，必须保证采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_M$ 。其中$\omega_s = 2\pi / T$ 为采样频率。

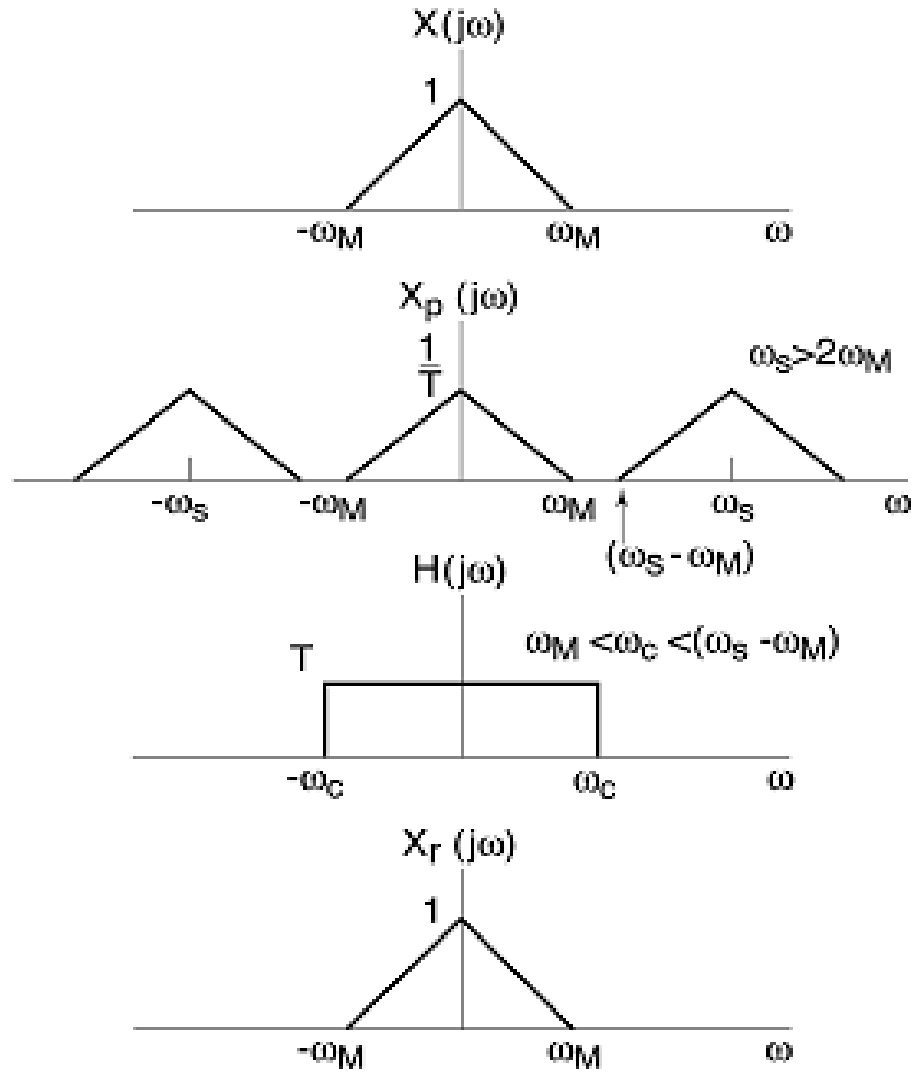
在满足上述要求时，可以通过理想低通滤波器从 $X_p(j\omega)$ 中不失真地分离出$X(j\omega)$。



四. Nyquist 采样定理:

对带限于最高频率 ω_M 的连续时间信号$x(t)$，如果以$\omega_s \geq 2\omega_M$ 的频率进行理想采样，则$x(t)$可以唯一的由其样本 $x(nT)$ 来确定。





- 在工程实际应用中，理想滤波器是不可能实现的。而非理想滤波器一定有过渡带，因此，实际采样时，ω_s必须大于$2\omega_M$ 。

- 低通滤波器的截止频率必须满足:

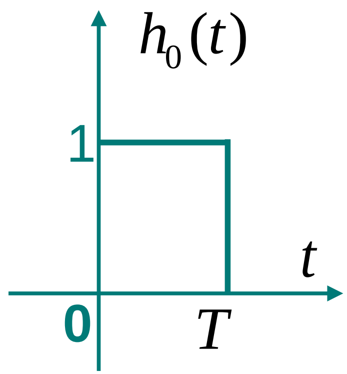
$$\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$$

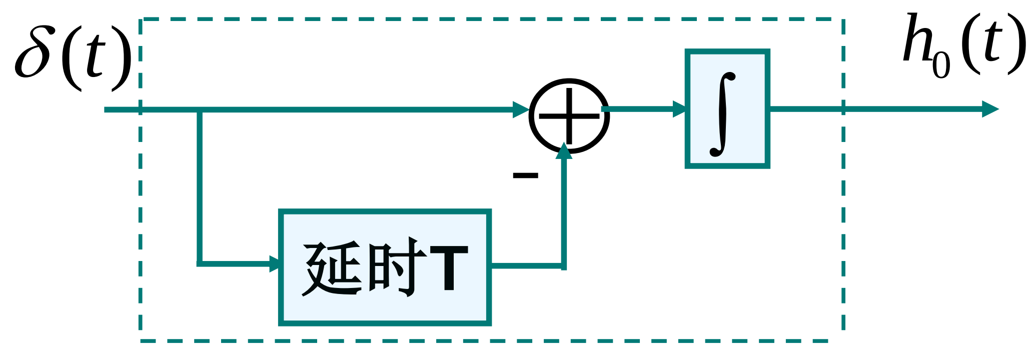
- 为了补偿采样时频谱幅度的减小，滤波器应具有 T 倍的通带增益。

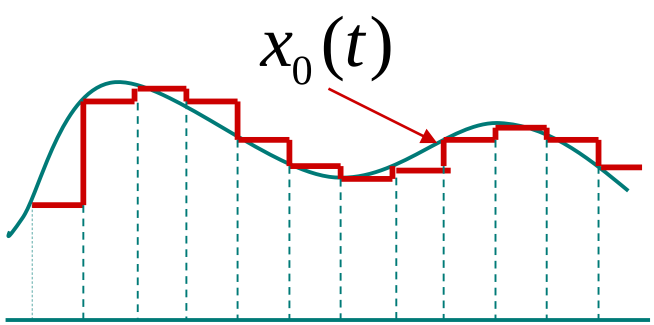
三. 零阶保持采样:

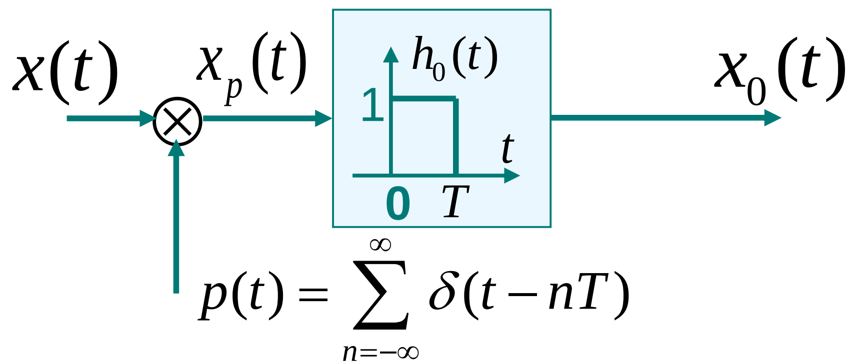
1.零阶保持：信号的样本经零阶保持后，所得到的信号是一个阶梯形信号。

2.零阶保持系统：是一个 $h(t)$ 为矩形脉冲的系统。









零阶保持采样相当于理想采样后，再级联一个零阶保持系统。

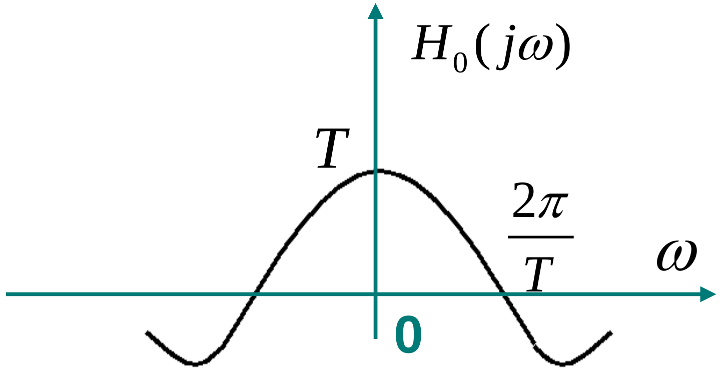
为了从$x_0(t)$能恢复 $x(t)$，就要求零阶保持后再级联一个系统$H_r(j\omega)$。使得

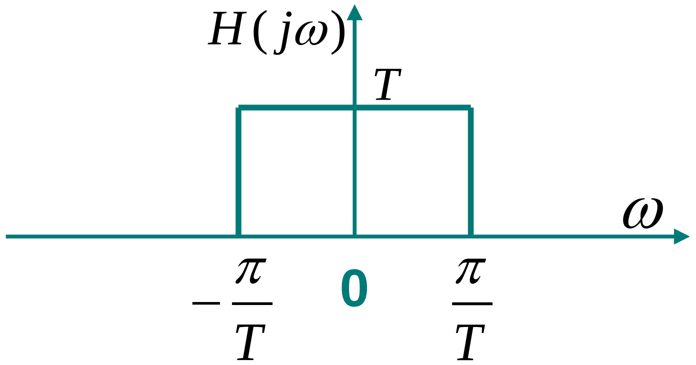
$$H_0(j\omega)H_r(j\omega)=\begin{cases}T, & |\omega|<\omega_c \\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases} \qquad \omega_M<\omega_c<\omega_s-\omega_M$$

而 $$H_0(j\omega)=\frac{2\mathrm{Sin}\dfrac{\omega T}{2}}{\omega}e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

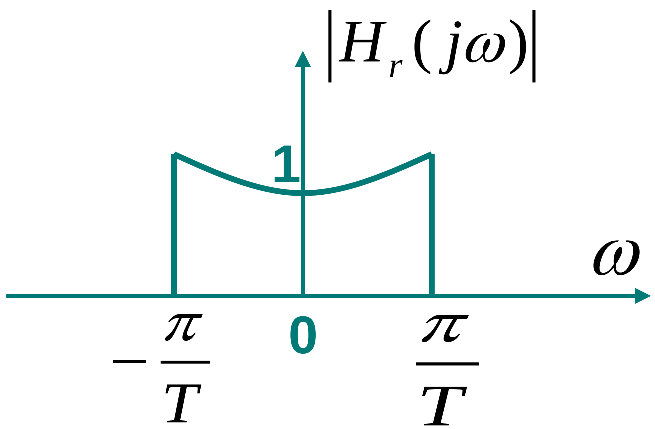
所以 $$H_r(j\omega)=\frac{H(j\omega)}{\dfrac{2\mathrm{Sin}\,\omega T/2}{\omega}}\cdot e^{j\frac{\omega T}{2}}$$

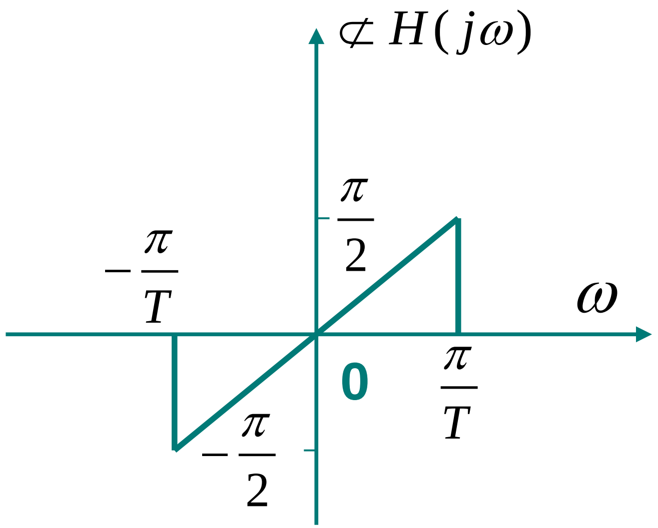
以 $H(j\omega)$ 表示理想低通滤波器的特性，则:





若 $\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s$ 则





采样定理给出了连续时间信号离散化的理论依据。遵循采样定理，一个连续时间信号就可以由其样本值来唯一表征。

将采样定理进一步分解，则要将连续时间信号离散化必须满足三个条件：

即： 1. 信号带限于ω_M；

2. 采样频率$\omega_s > 2\omega_M$

3. $\omega_M < \omega_c < (\omega_s - \omega_M)$；常取$\omega_c = \omega_s / 2$。

7.2 利用内插从样本重建信号

Reconstruction of a Signal from Its Samples Using Interpolation

内插：由样本值重建某一函数的过程。

一. 理想内插:

若 $h(t)$ 为理想低通的单位冲激响应，则

$$x(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT)$$

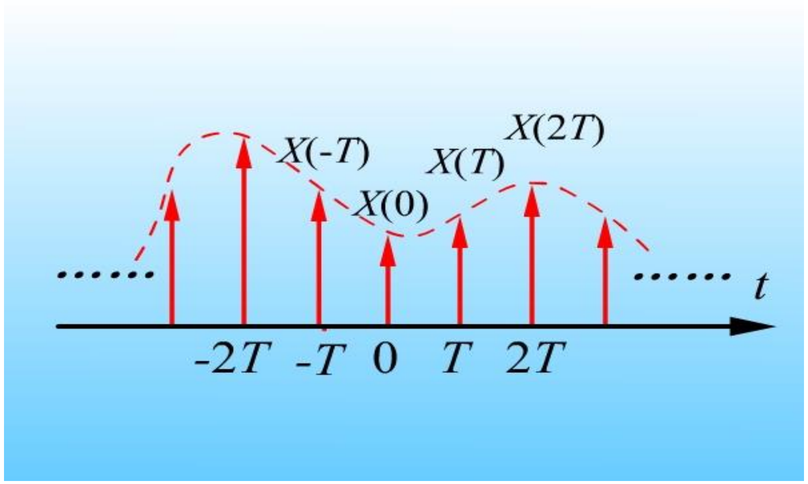
理想内插以理想低通滤波器的单位冲激响应作为内插函数

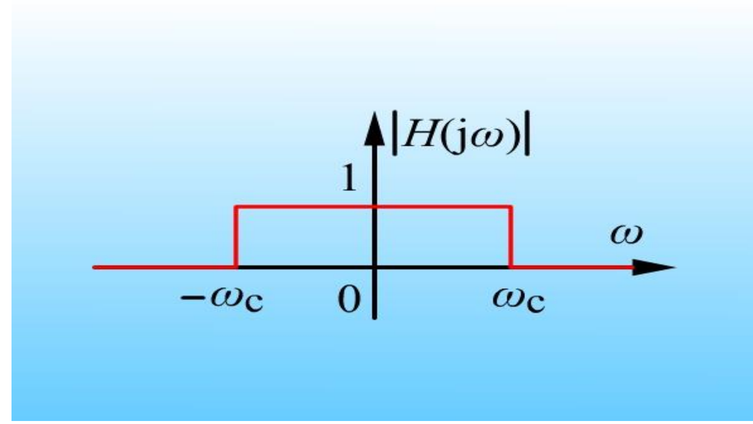
$$h(t)=\frac{T\omega_c}{\pi}\mathrm{Sinc}(\frac{\omega_c}{\pi}t)=\frac{T\omega_c}{\pi}\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c t}{\omega_c t}=T\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c t}{\pi t}$$

$$\therefore x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\frac{\omega_c T}{\pi}\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}$$

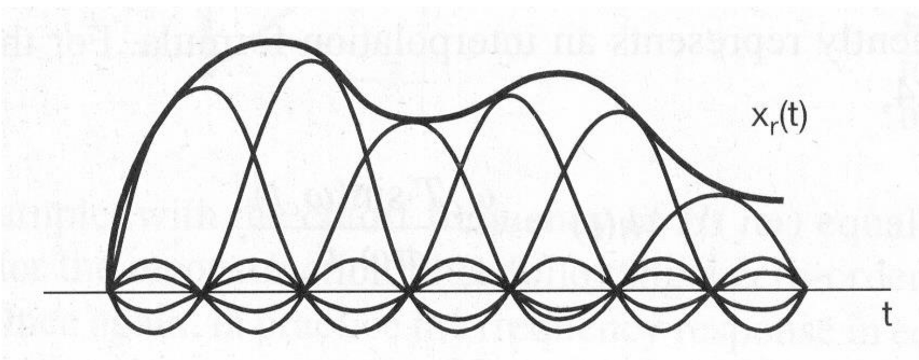
当 $\omega_c=\frac{\omega_s}{2}=\frac{\pi}{T}$ 时 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c(t-nT)}{\omega_c(t-nT)}$

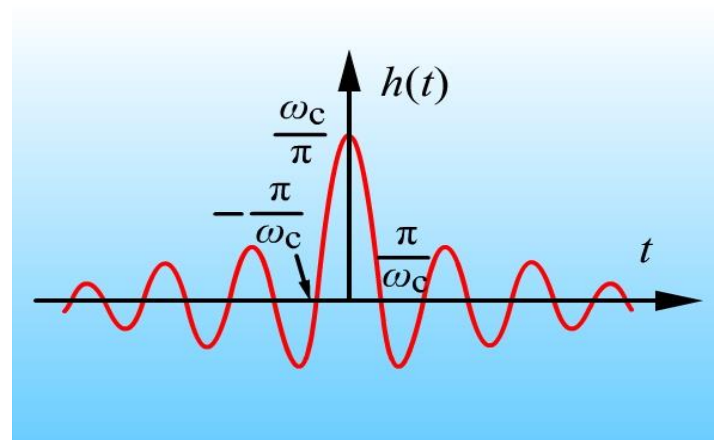
这种内插称为时域中的带限内插。





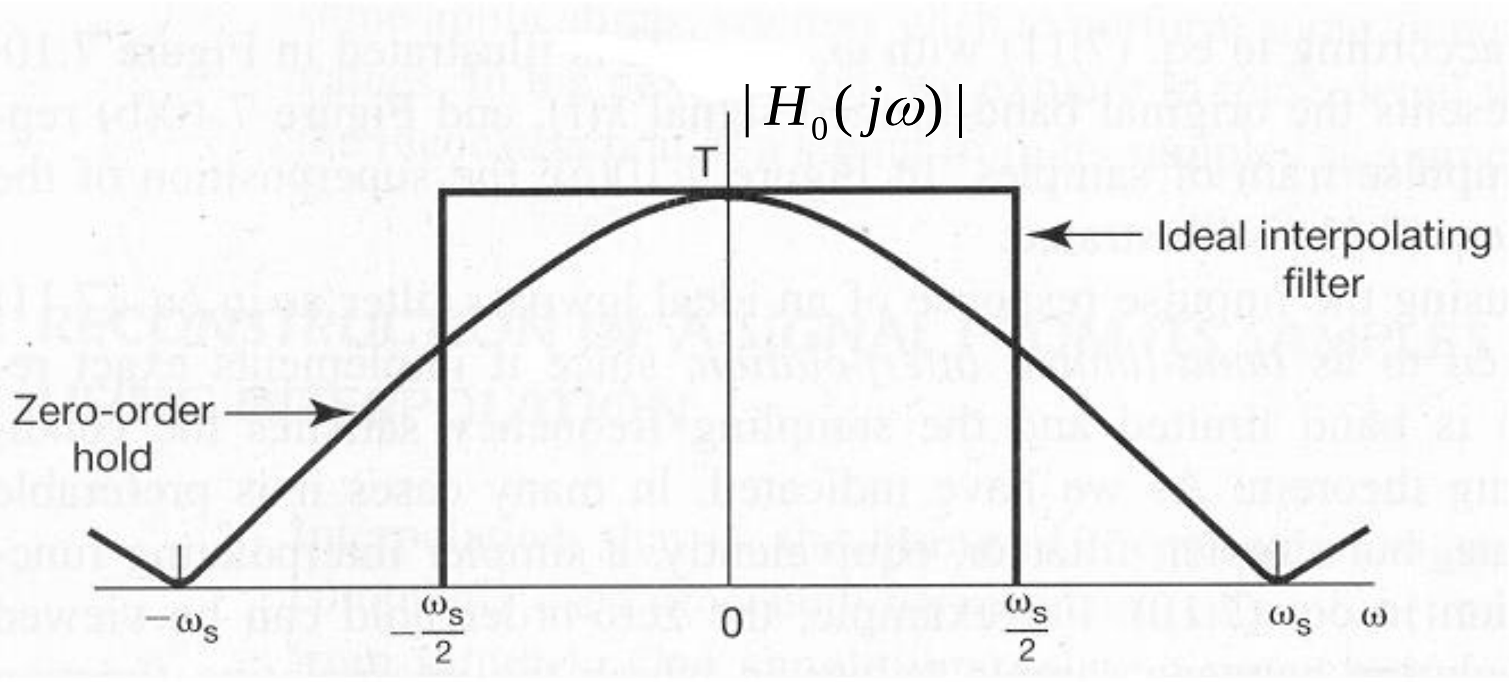
取$\omega_c=\omega_s/2=\pi/T$

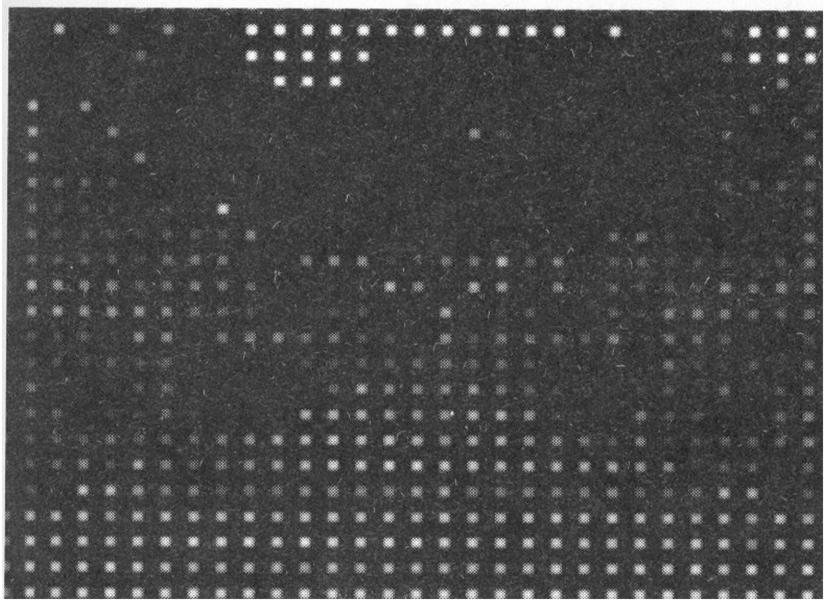


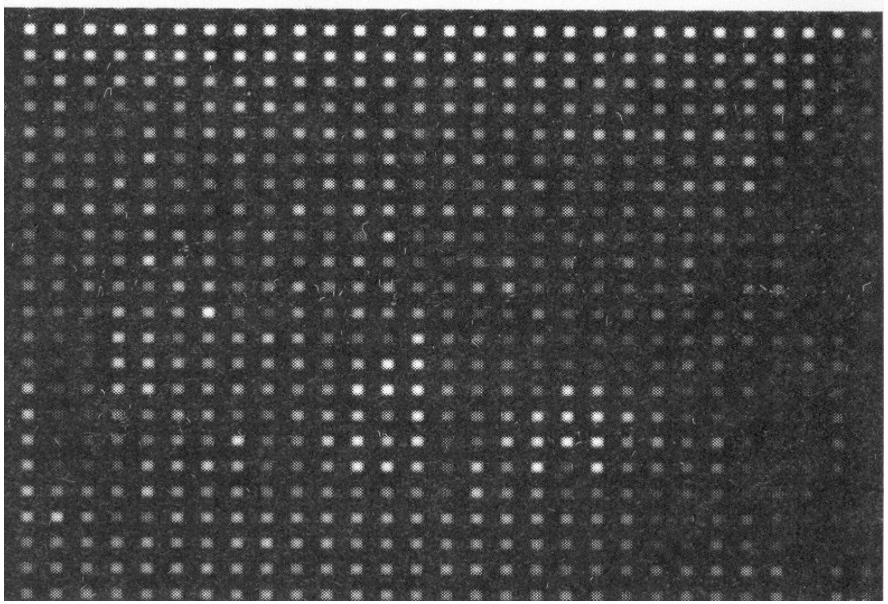


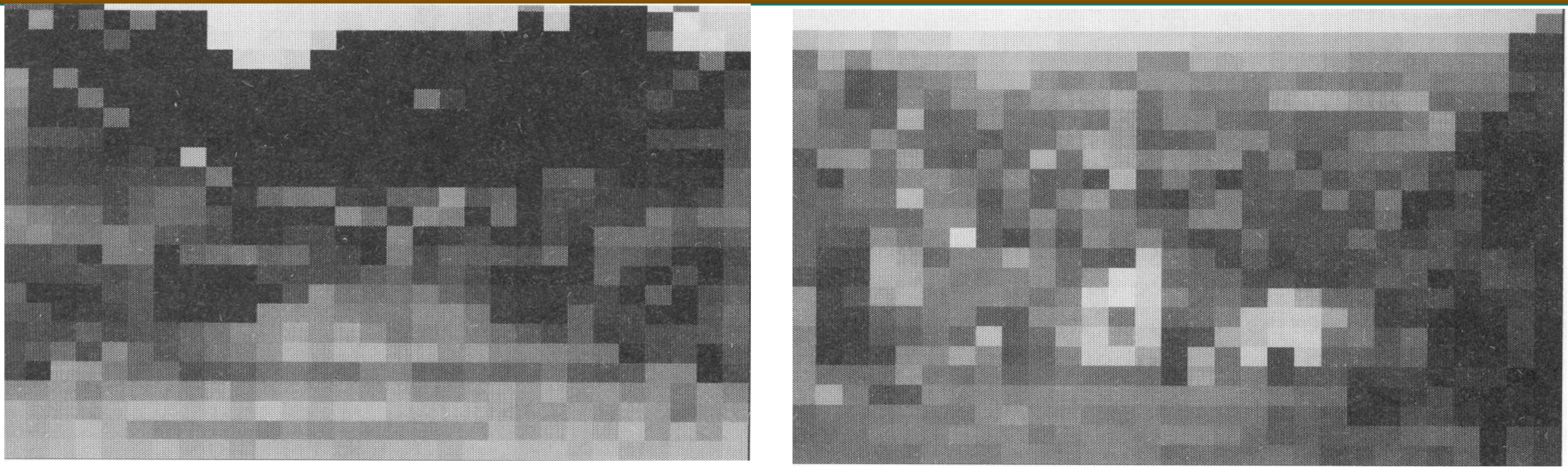
二. 零阶保持内插:

零阶保持内插的内插函数是零阶保持系统的单位冲激响应$h_0(t)$。

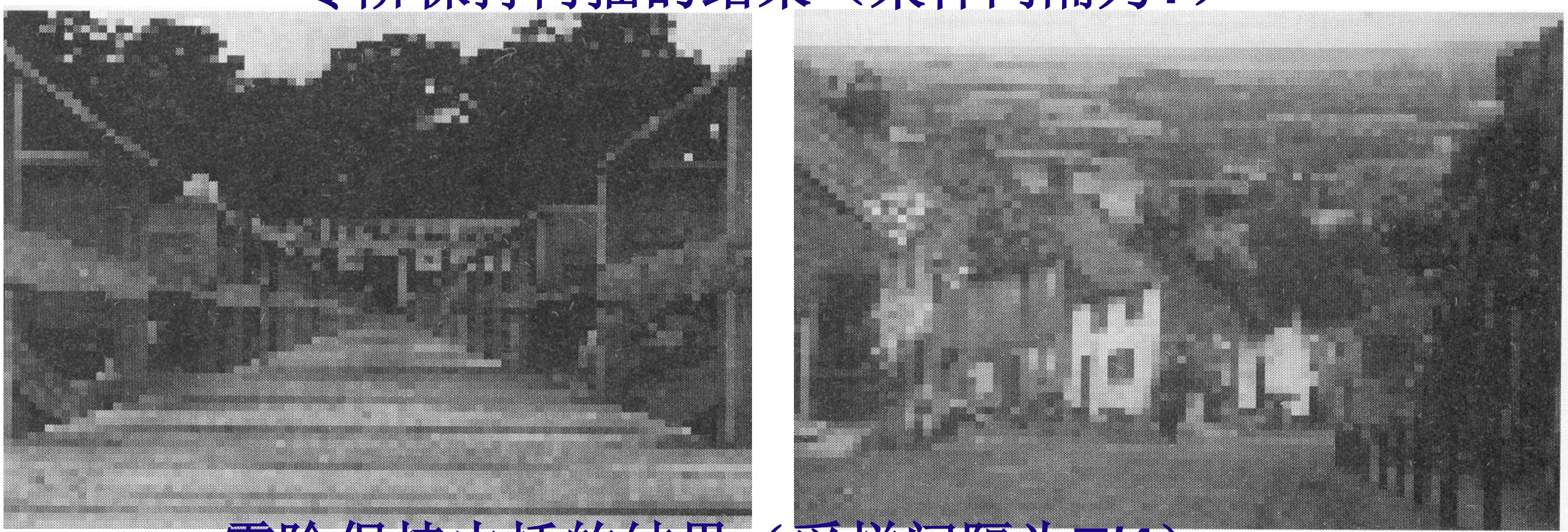








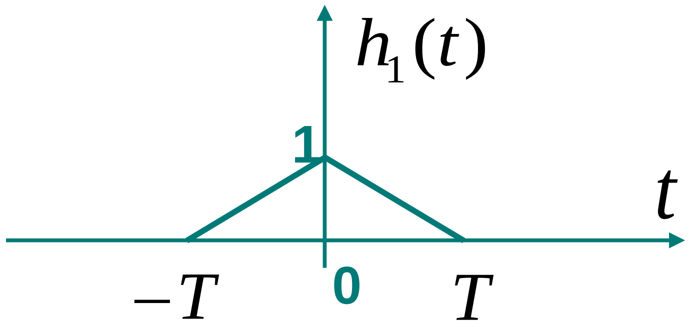
零阶保持内插的结果（采样间隔为T）

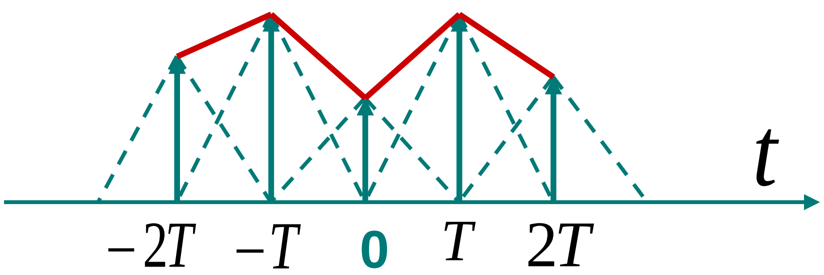


零阶保持内插的结果（采样间隔为T/4）

三. 一阶保持内插(线性内插):

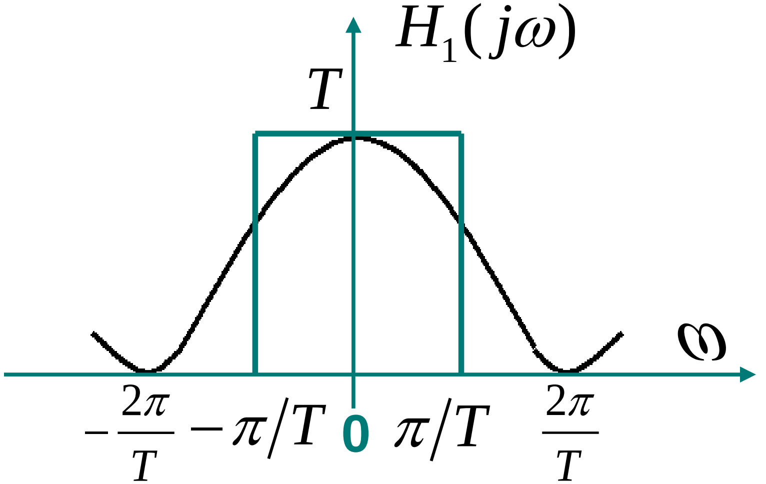
线性内插时，其内插函数是三角形脉冲。





$$H_1(j\omega)=T\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega T/2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\omega T}{2}}{\omega/2}\right]^2$$



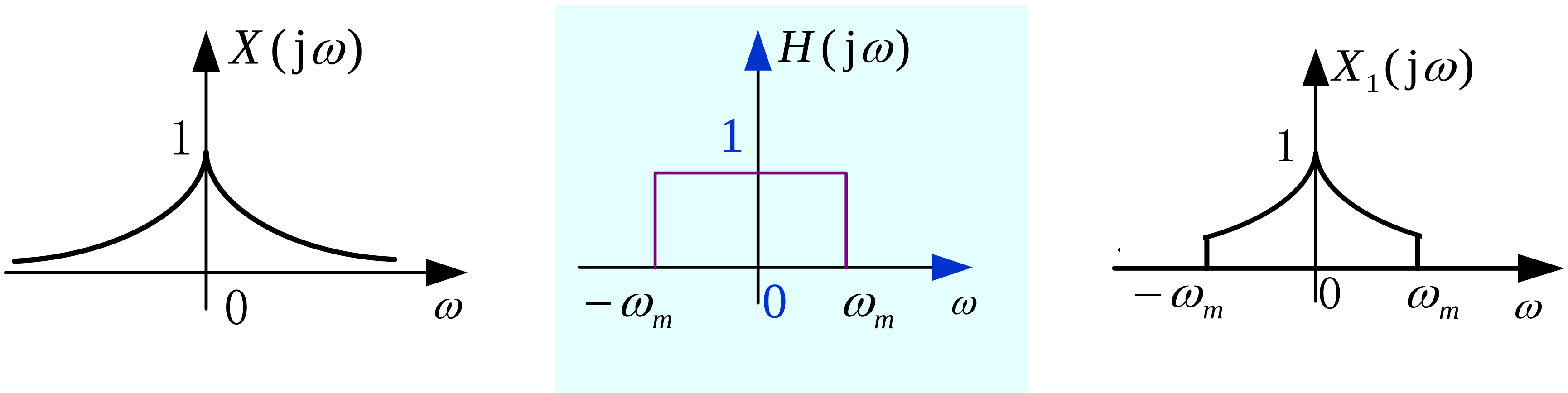
一阶保持内插的结果（采样间隔为T/4）

采样定理的工程应用

抽样间隔(周期)	T	(s)
抽样角频率	$\omega_{sam}=2\pi/T$	(rad/s)
抽样频率	$f_{sam}=1/T$	(Hz)

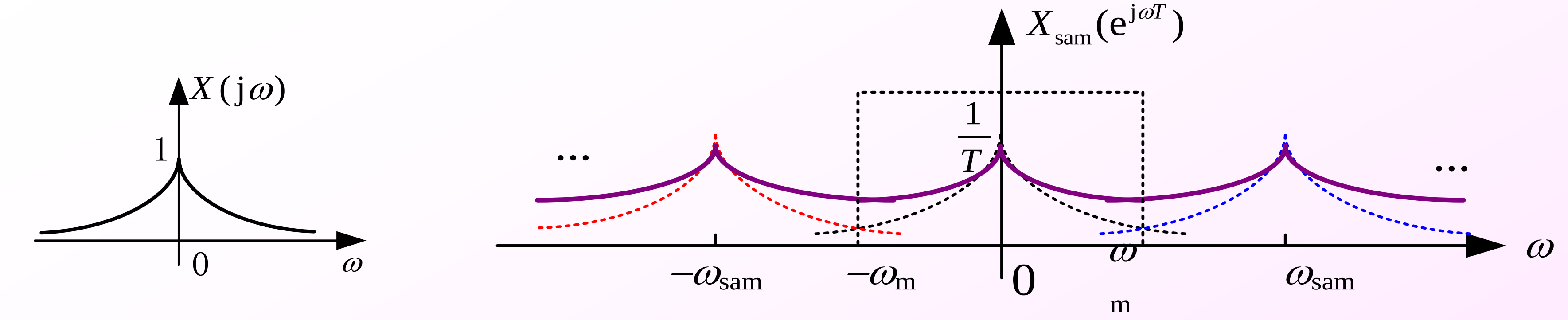
采样定理的工程应用

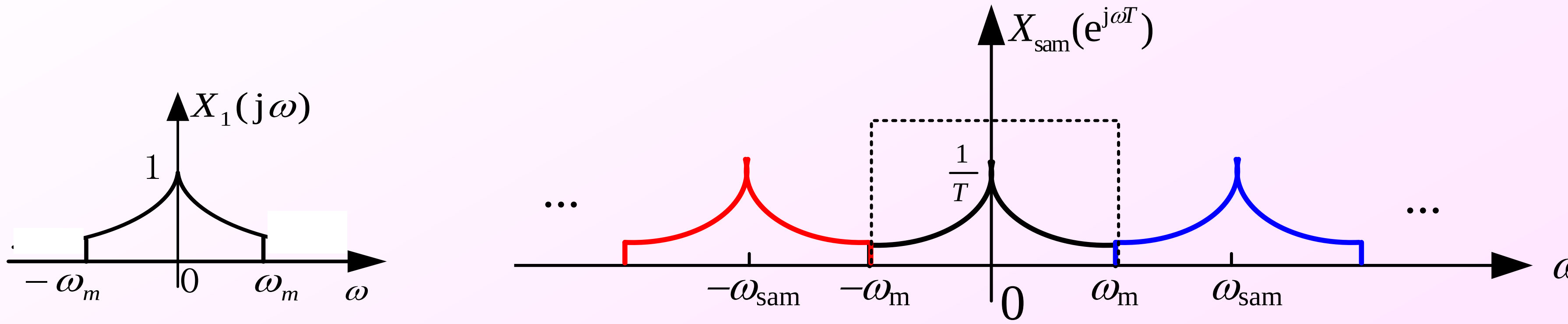
许多实际工程信号不满足带限条件



采样定理的工程应用

混叠误差与截断误差比较





采样定理的工程应用

抽样频率f_s=5,512 Hz

抽样频率f_s=5,512 Hz

抽样前对信号进行了抗混叠滤波

采样定理的工程应用

☆时域采样问题的探究

(1) 若连续时间信号 $x(t)$ 的最高频率f_m未知，如何确定信号的采样间隔T?

(2) 窄带高频信号采样不失真条件是否也需满足$f_s \geq 2f_m$？

(3) 对带限信号进行采样时，只需采样速率 $f_s \geq 2f_m$。在工程应用中，采样速率为何常设为 $f_s \geq (3\sim5)f_m$?

……

7.3 欠采样的效果—频谱混叠
The Effect of Undersampling : Aliasing

一. 欠采样与频谱混叠:

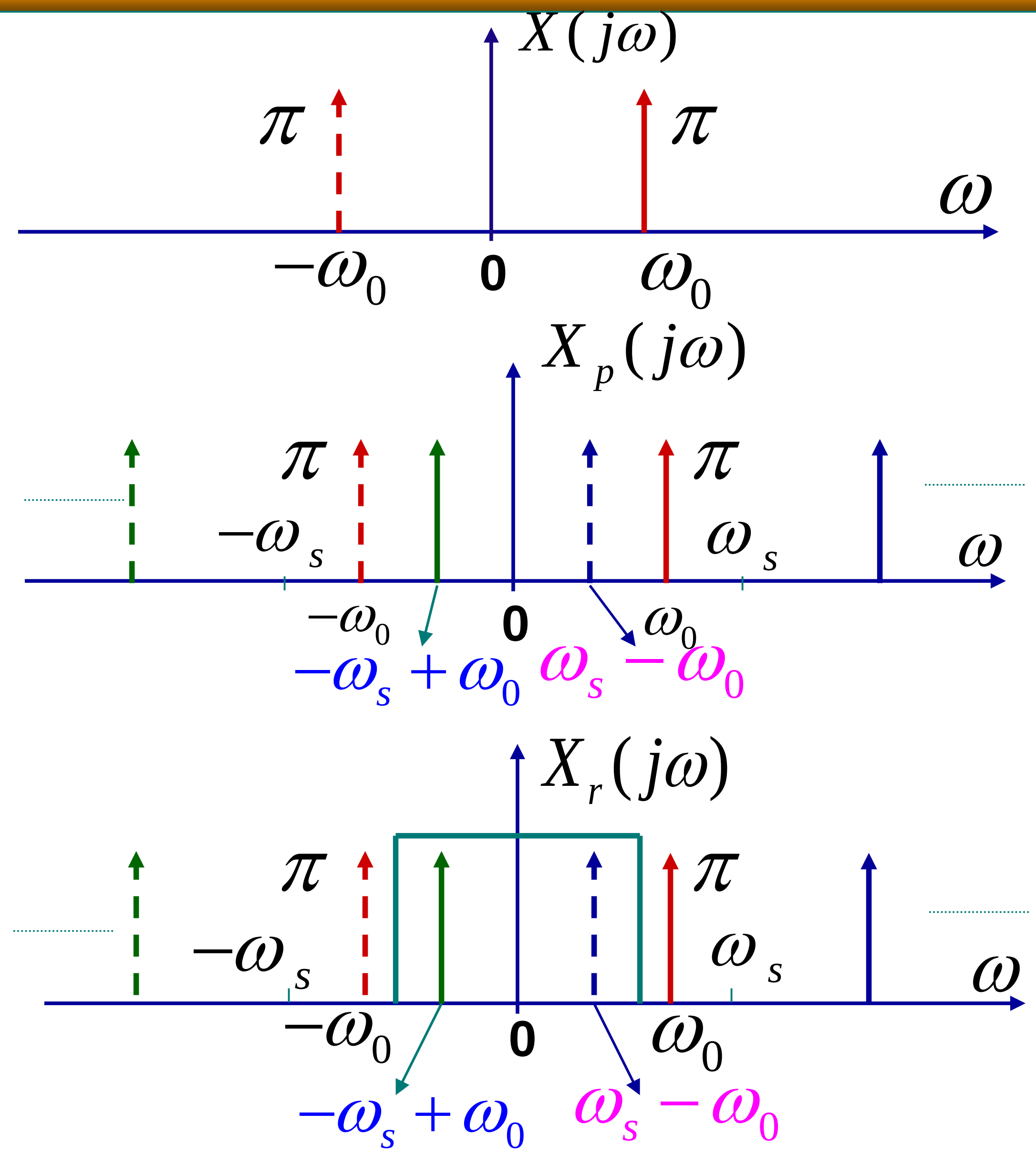
如果采样时，不满足采样定理的要求，就一定会在 $x_p(t)$的频谱周期延拓时出现频谱混叠的现象。

此时，即使通过理想内插也得不到原信号。但是无论怎样，恢复所得的信号 $x_r(t)$ 与原信号 $x(t)$ 在采样点上将具有相同的值。

$$x_r(nT) = x(nT)$$

例：$x(t) = \cos\omega_0 t$

$x(t)$的频谱$X(j\omega)$



当 $\omega_0 < \omega_s < 2\omega_0$

时，产生频谱混叠。

恢复的信号为

$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t$

显然当 $t=nT$ 时有

$$x_r(nT)=\cos(\omega_s-\omega_0)nT$$

$$=\cos\omega_s nT\cdot\cos\omega_0 nT+\mathrm{Sin}\,\omega_s nT\cdot\mathrm{Sin}\,\omega_0 nT$$

$$=\cos\omega_0 nT=x(nT)$$

如果 $x(t)=\cos(\omega_0 t+\varphi)$，则在上述情况下:

$$X_r(j\omega)=\pi\left\{\delta[\omega-(\omega_s-\omega_0)]\cdot e^{-j\varphi}+\delta[\omega+(\omega_s-\omega_0)]\cdot e^{j\varphi}\right\}$$

$$\therefore x_r(t)=\cos[(\omega_s-\omega_0)t-\varphi]$$

表明恢复的信号不仅频率改变而且相位倒置(反相)

工程应用时，如果采样频率 $\omega_s = 2\omega_M$ 将不足以从样本恢复原信号。

例如 $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ 在 $2\omega_0 = \omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ 时

$$x(t) = \cos\varphi \cos\omega_0 t + \sin\omega_0 t \sin\varphi$$

$$x(nT) = \cos\varphi \cos\omega_0 nT$$

这和对 $x_1(t) = \cos\varphi \cos\omega_0 t$ 采样的结果一样。

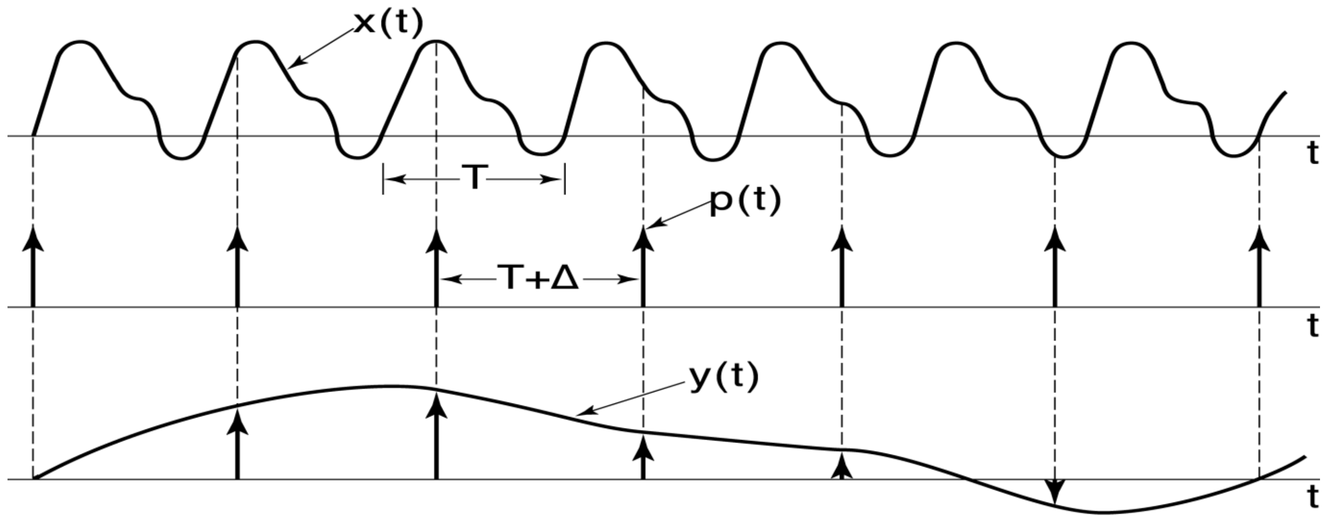
从用样本代替信号的角度出发，出现欠采样的情况是工程应用中不希望的。

但欠抽样并不是百害而无一利的，在实际应用中，利用欠抽样可使高频变化的信息映射到低频变化的信号上。这为高频信号的测量带来了便利。如频闪仪和抽样示波器等。

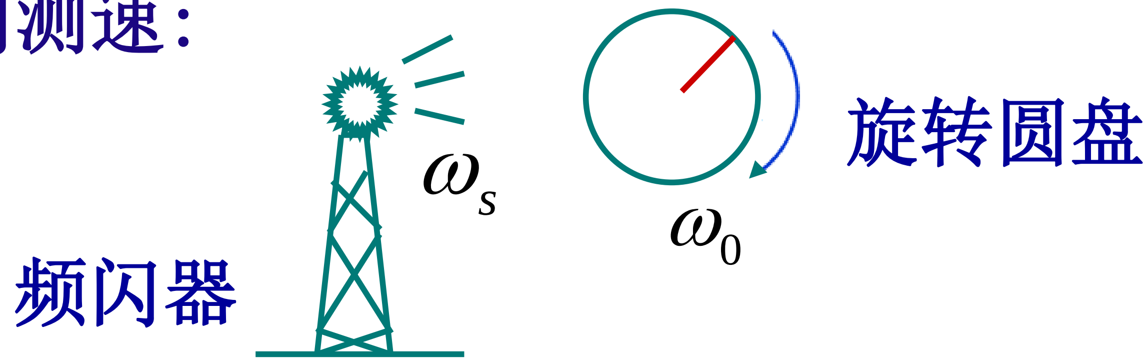
欠采样在工程实际中的应用：

1. 取样示波器；
2. 频闪仪

1. 采样示波器:



2. 频闪测速:

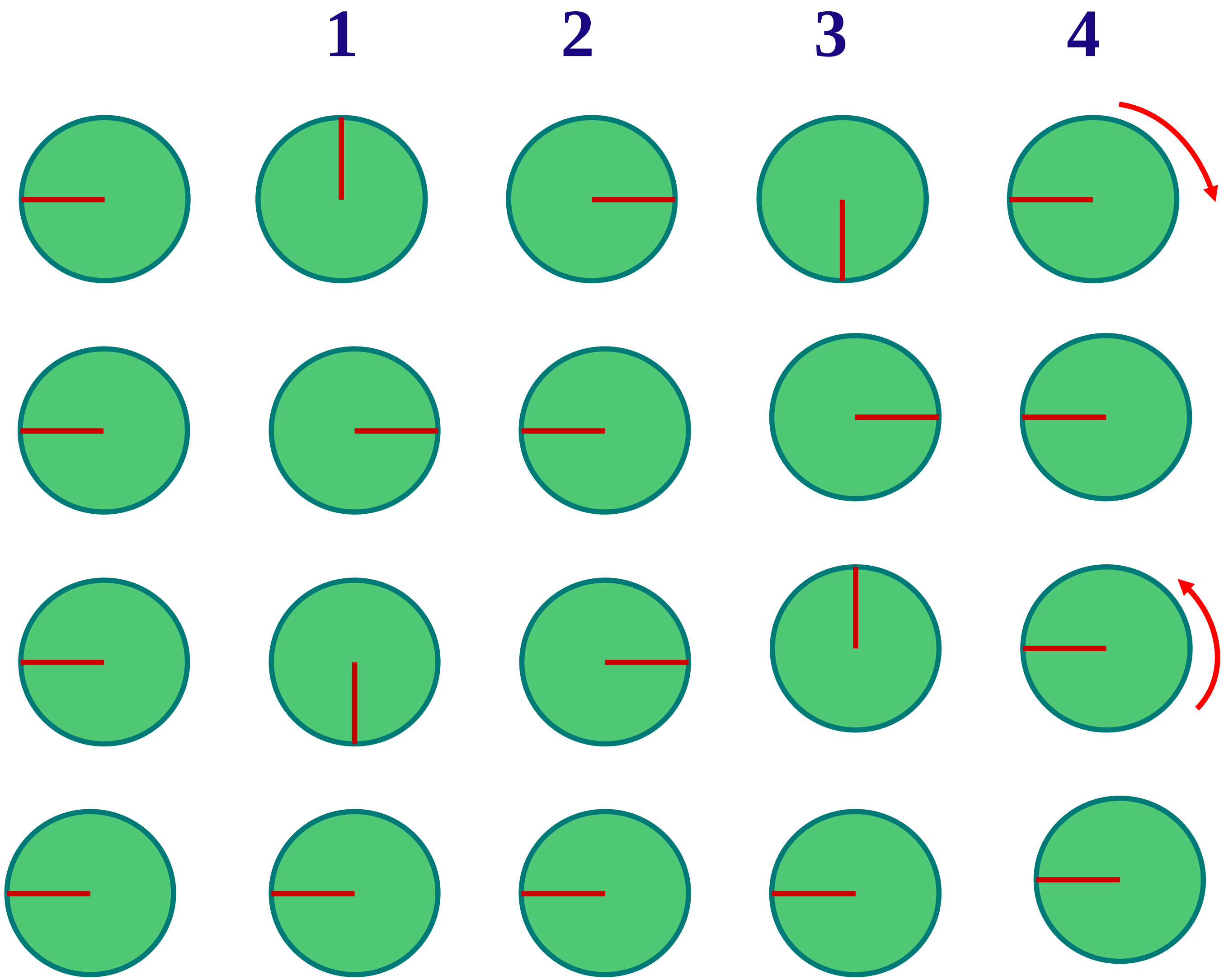


$$\omega_s = 4\omega_0$$

$$\omega_s = 2\omega_0$$

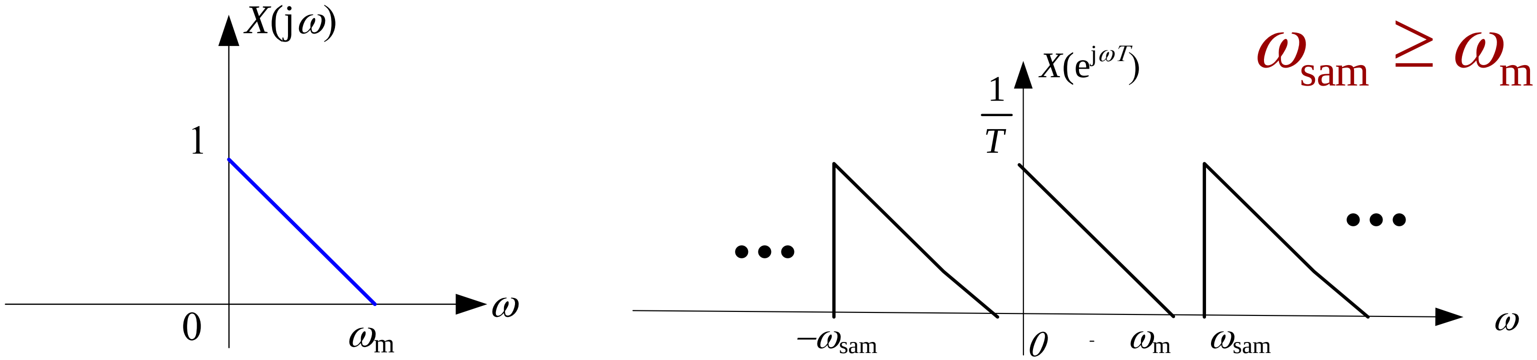
$$\omega_s = \frac{4}{3}\omega_0$$

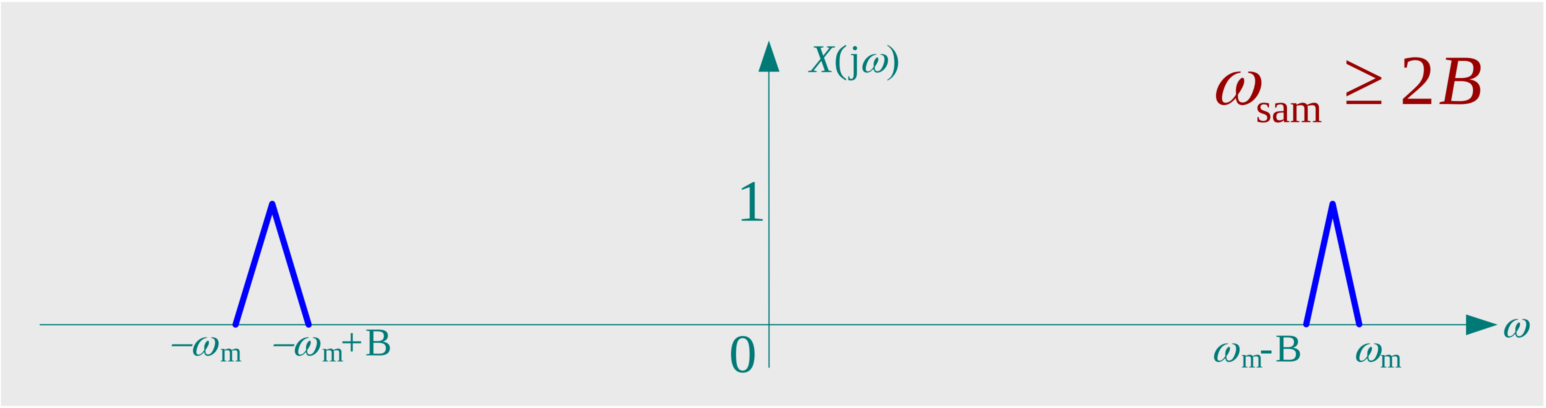
$$\omega_s = \omega_0$$



采样定理的进一步解析

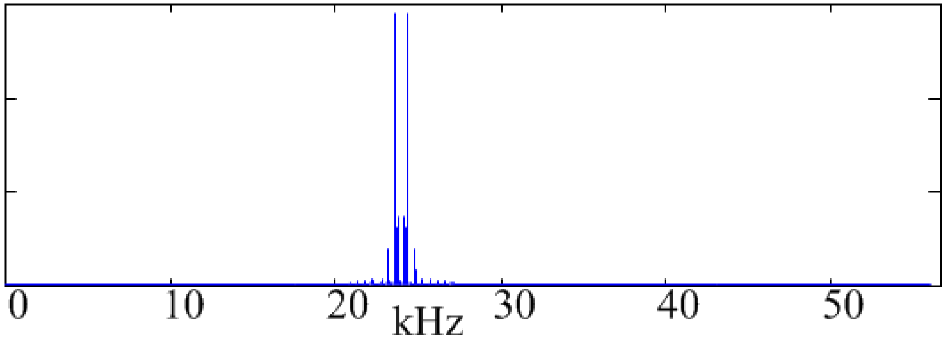
采样定理仅是充分条件而非必要条件。对复信号与窄带高频信号的采样只要做到采样后采样频率不混迭就同样可以有效解决离散化问题。





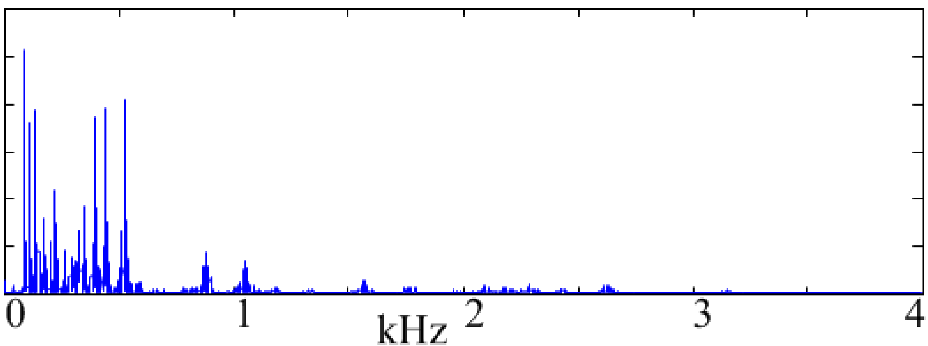
采样定理的进一步解析

窄带高频信号的抽样



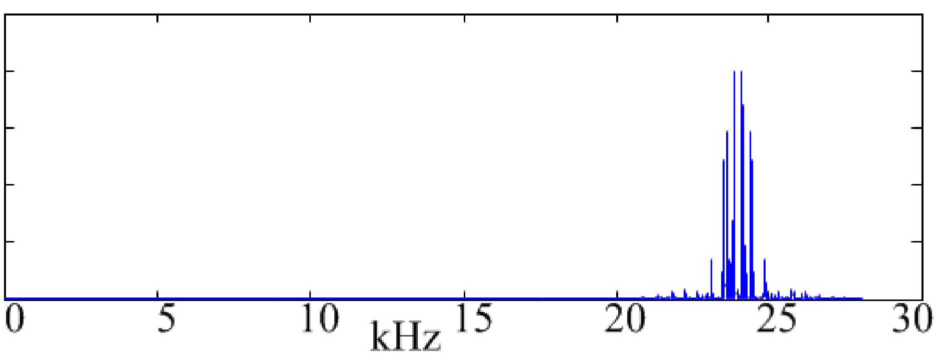
中心频率24kHz，带宽8kHz。

解调后语音信号



f_{sam}=8kHz 抽样后的频谱。

采样后的语音信号



f_{sam}=56kHz 抽样后的频谱。

采样后语音信号

7.4 连续时间信号的离散时间处理

Discrete-Time Processing of Continuous-Time Signals

对连续时间信号进行离散时间处理的系统可视为三个环节的级连。

一. C/D 转换:

在时域: $$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$x_p(t)=x_c(t)\cdot p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_c(nT)\delta(t-nT)$$

$$x_d(n)=x_c(nT)$$

在频域: $$X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left[j(\omega-k\omega_s)\right],\quad \omega_s=\frac{2\pi}{T}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$ （以Ω表示离散频率）

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

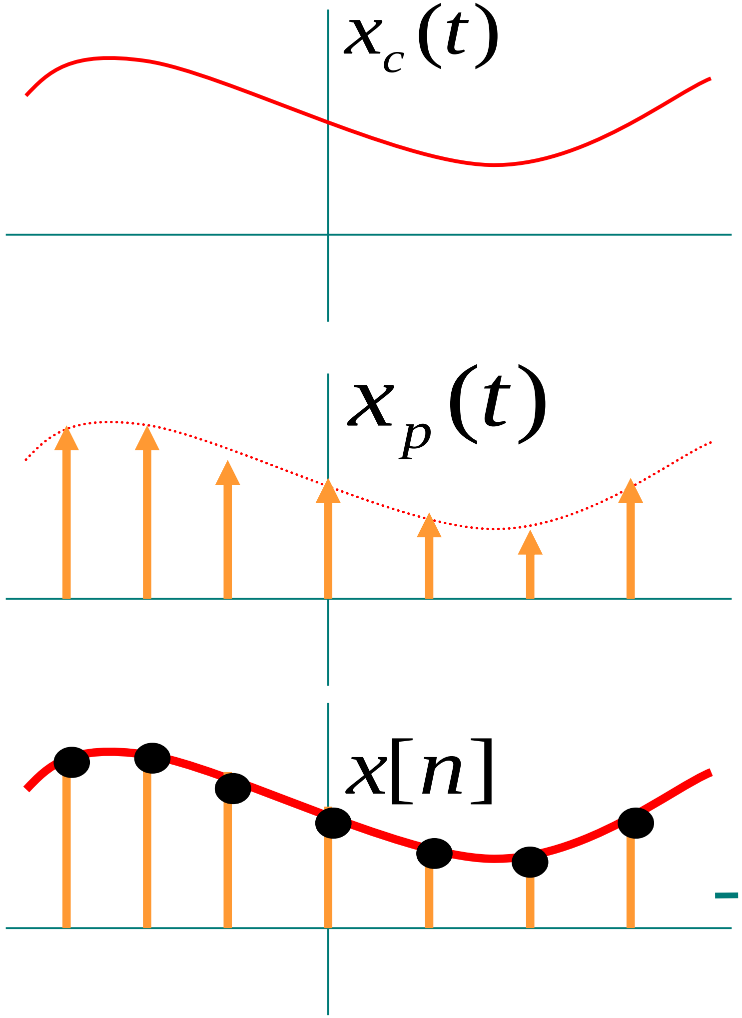
$$\Omega = \omega T$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\frac{\Omega}{T})$$

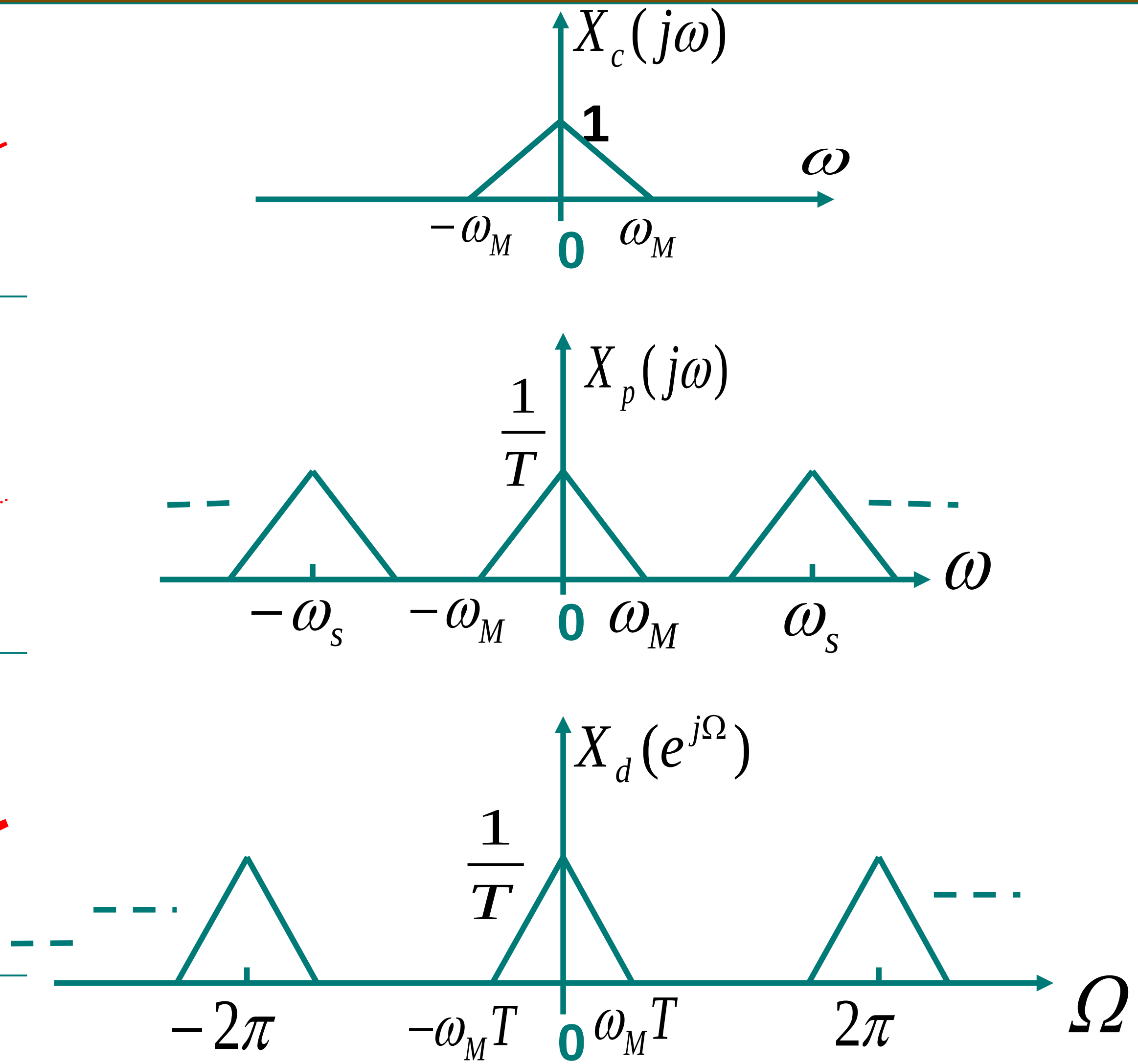
$$X_p(j\omega) = X_d(e^{j\omega T})$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c[j\frac{1}{T}(\Omega - 2\pi k)]$$

可见，冲激串到序列的变换过程，在时域是一个对时间归一化的过程；在频域是一个频率去归一化的过程。

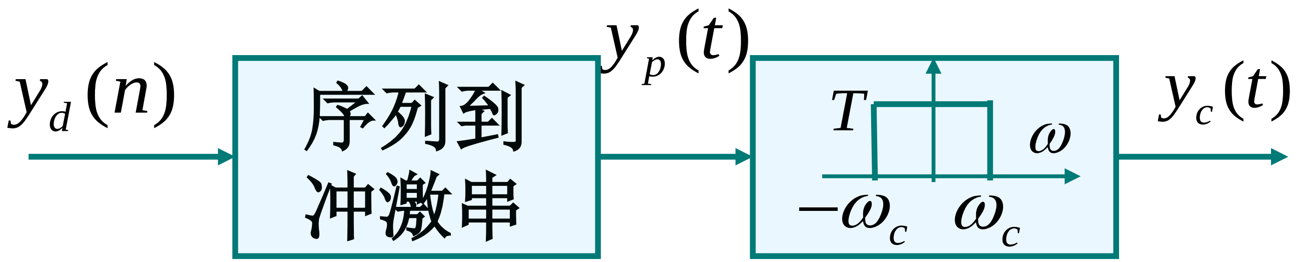

$x_c(t)$
$x_p(t)$
$x[n]$

时域示意图


$X_c(j\omega)$
1
ω
$-\omega_M$
0
ω_M
$X_p(j\omega)$
$\frac{1}{T}$
$-\omega_s$
ω_s
$X_d(e^{j\Omega})$
-2π
$-\omega_M T$
$\omega_M T$
2π
Ω

频域示意图

二. D/C 转换:

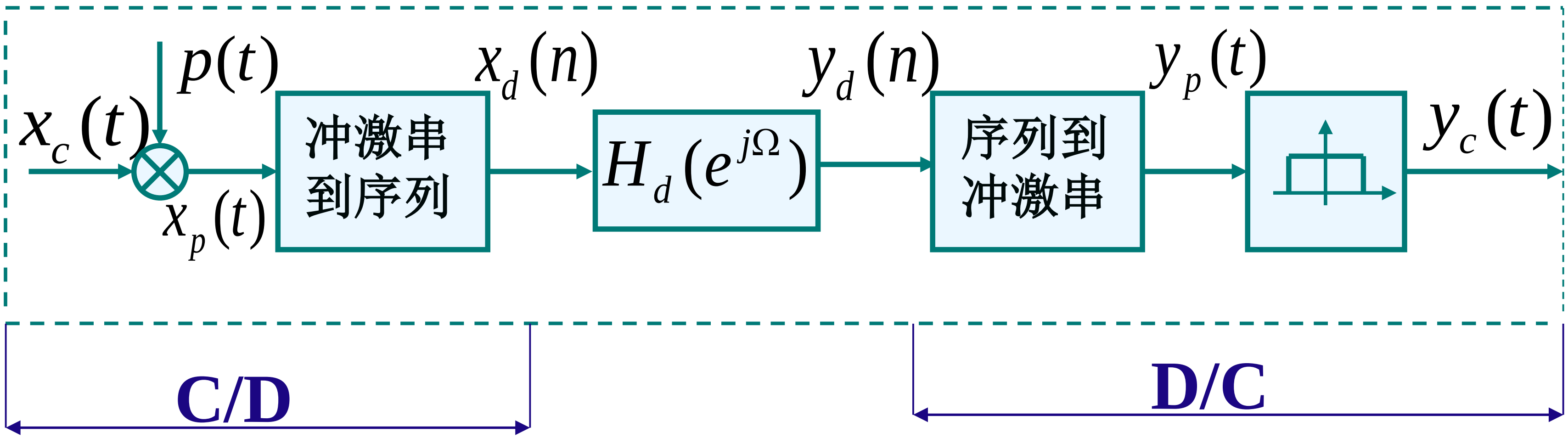


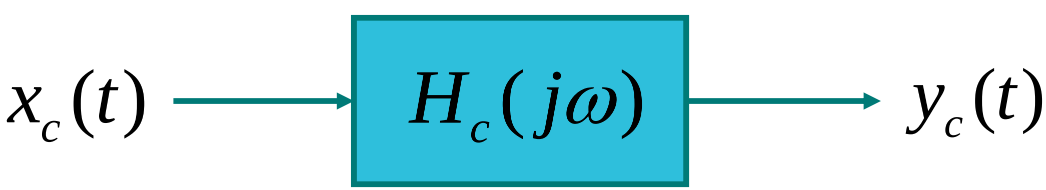
$$y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n)\delta(t-nT) \qquad Y_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n)e^{-j\omega nT}$$

$$Y_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_d(n)e^{-j\Omega n}$$

$$Y_d(e^{j\Omega}) = Y_p(j\frac{\Omega}{T}) \qquad Y_p(j\omega) = Y_d(e^{j\omega T})$$

三. 连续时间信号的离散时间处理:





假定$H_d(e^{j\Omega})=1$，有$y_d(n)=x_d(n)$，在满足采样定理时有$y_p(t)=x_p(t)$，$y_c(t)=x_c(t)$，整个系统是恒等系统，表明**D/C是C/D的逆系统**。

对一般情况：

$$Y_d(e^{j\Omega})=X_d(e^{j\Omega})\cdot H_d(e^{j\Omega})$$

$$Y_d(e^{j\omega T})=X_d(e^{j\omega T})H_d(e^{j\omega T})$$

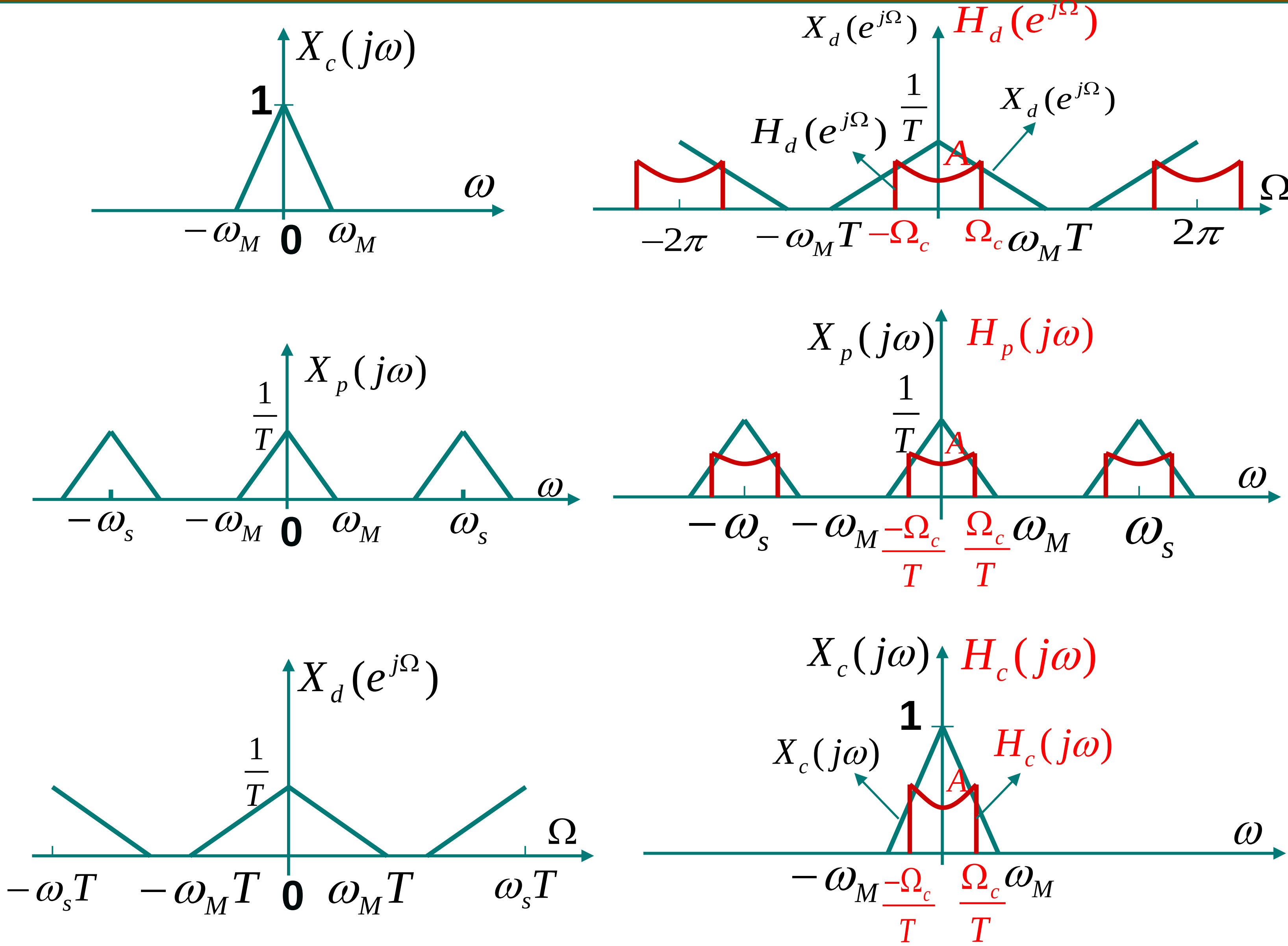
$$Y_p(j\omega)=Y_d(e^{j\omega T})=X_p(j\omega)\cdot H_d(e^{j\omega T})$$

$$Y_c(j\omega) = Y_p(j\omega)H(j\omega)$$

$$= \begin{cases} 0 & |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \\ \underbrace{TX_p(j\omega)\cdot H_d(e^{j\omega T})}_{\text{即}X_c(j\omega)\cdot H_c(j\omega)} & |\omega| < \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

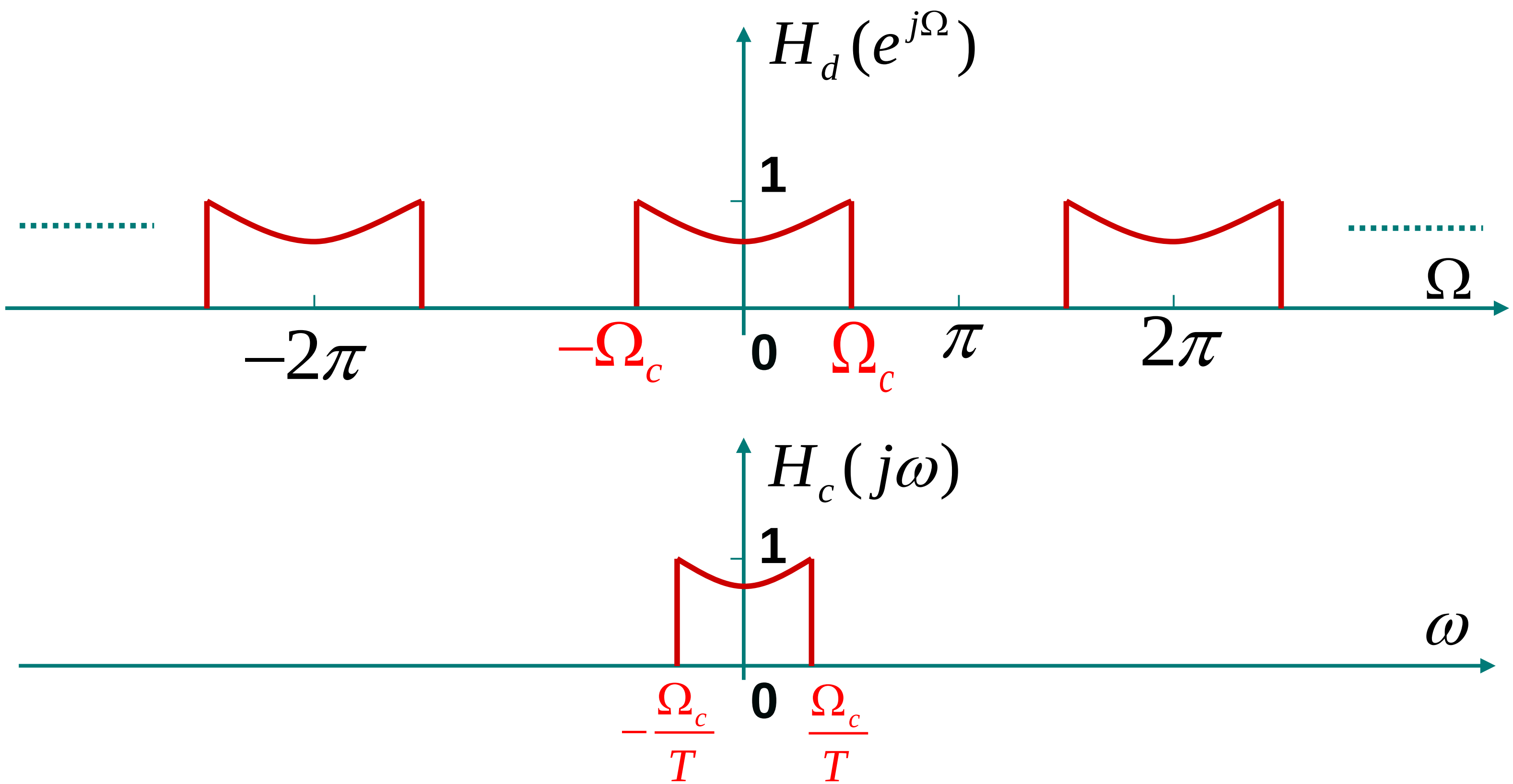
$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \dfrac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

或 $H_c(j\dfrac{\Omega}{T}) = H_d(e^{j\Omega})$ $\quad |\Omega| < \pi$



$X_c(j\omega)$
1
ω
$-\omega_M$ 0 ω_M
$X_p(j\omega)$
$\frac{1}{T}$
$-\omega_s$ $-\omega_M$ 0 ω_M ω_s
$X_d(e^{j\Omega})$
Ω
$-\omega_s T$ $-\omega_M T$ 0 $\omega_M T$ $\omega_s T$
$X_d(e^{j\Omega})$ $H_d(e^{j\Omega})$
$H_d(e^{j\Omega})$
A
-2π $-\omega_M T$ $-\Omega_c$ Ω_c $\omega_M T$ 2π
$X_p(j\omega)$ $H_p(j\omega)$
$-\omega_s$ $-\omega_M$ $-\frac{\Omega_c}{T}$ $\frac{\Omega_c}{T}$ ω_M ω_s
$X_c(j\omega)$ $H_c(j\omega)$
$-\omega_M$ $-\frac{\Omega_c}{T}$ $\frac{\Omega_c}{T}$ ω_M

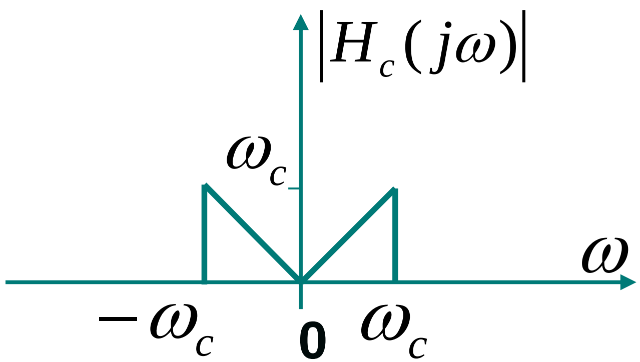
等效连续时间系统的频响，就是离散时间系统频响在一个周期内的特性，只不过在频率上有一个尺度变换。

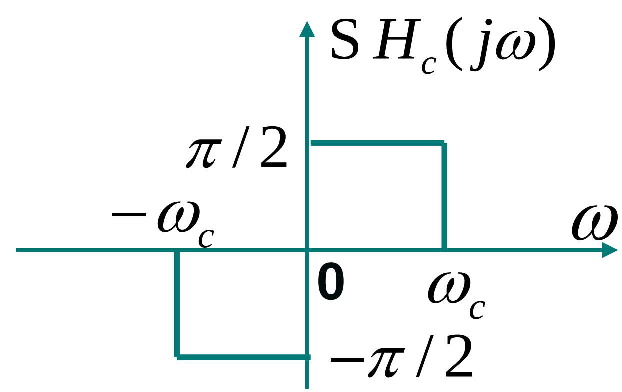


对连续时间信号进行离散时间处理的系统只在 $x_c(t)$ 带限，且采样频率满足采样定理的要求时才能等效为一个LTI系统。

例：数字微分器：

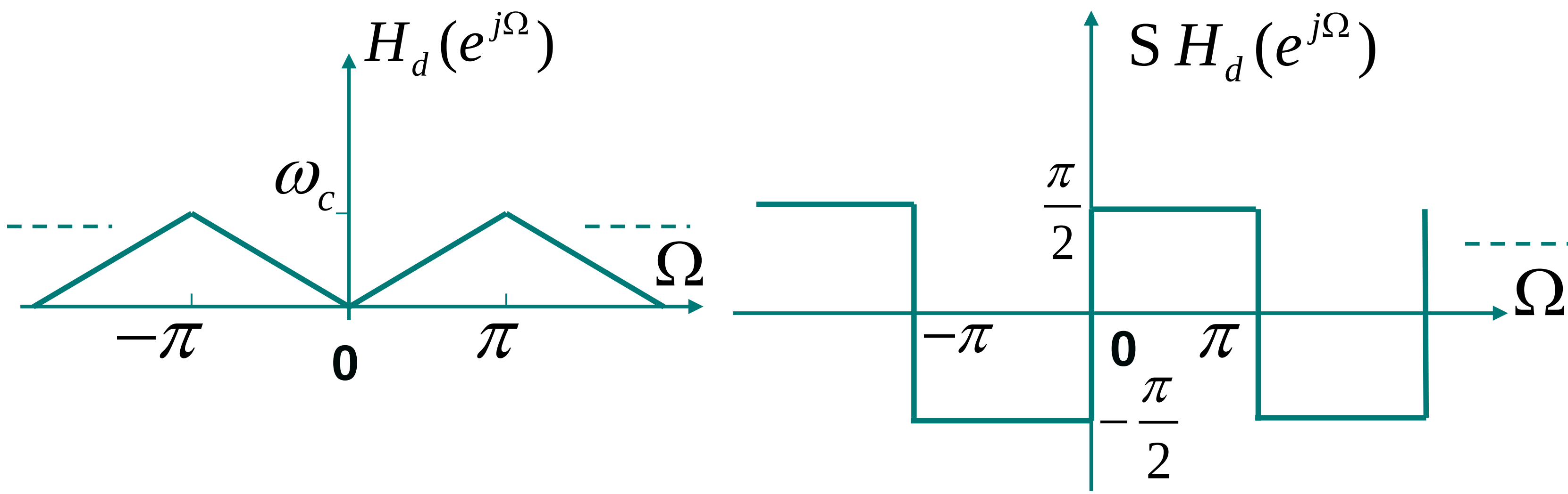
带限微分器 $$H_c(j\omega)=\begin{cases} j\omega\ , & |\omega|<\omega_c \\ 0\ , & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$





由 $H_c(j\frac{\Omega}{T})=H_d(e^{j\Omega})$可得，$\omega_c=\frac{\omega_s}{2}$ 时有

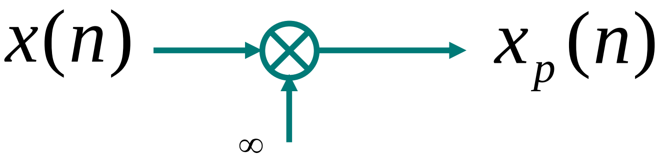
$$H_d(e^{j\Omega})=j\frac{\Omega}{T} \qquad |\Omega|<\pi$$






7.5 离散时间信号采样：
Sampling of Discrete-Time Signal

一. 脉冲串采样：

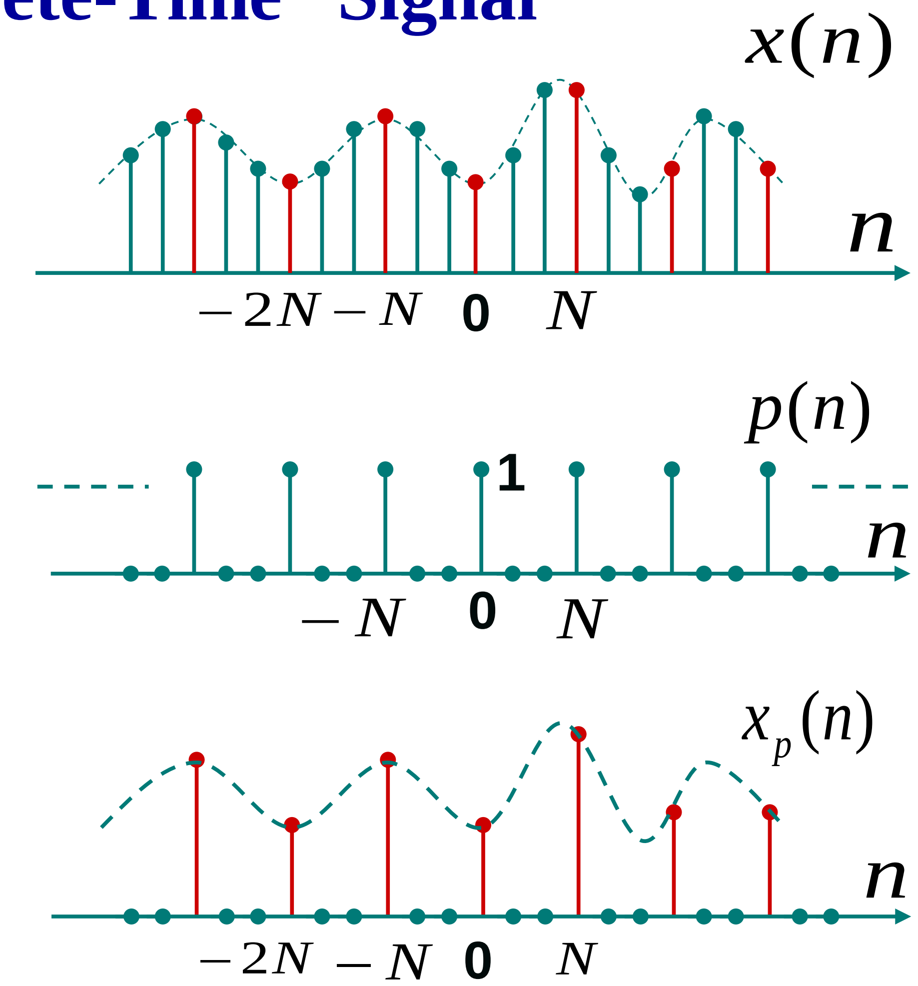


$$p(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(n-kN)$$

$$x_p(n)=x(n)\cdot p(n)$$

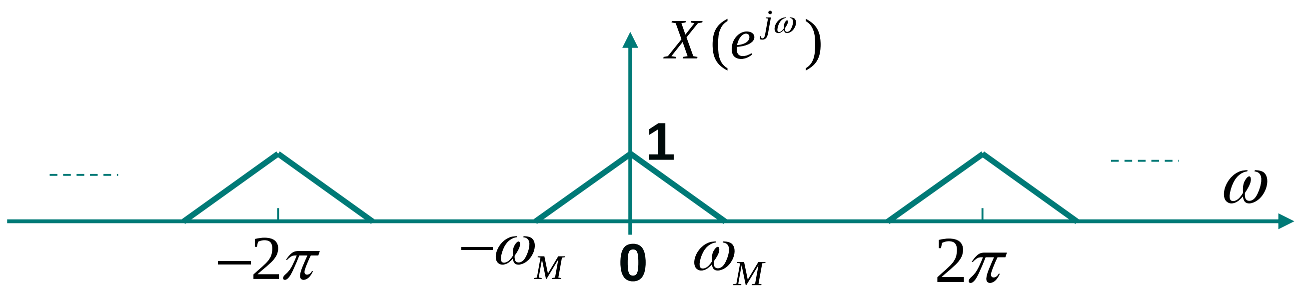
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kN)\delta(n-kN)$$

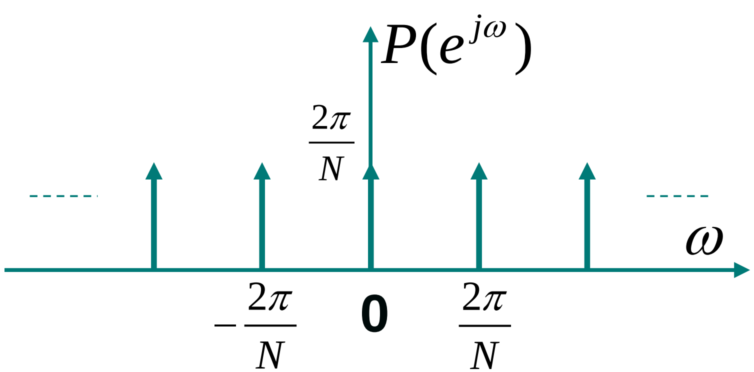
$$P(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

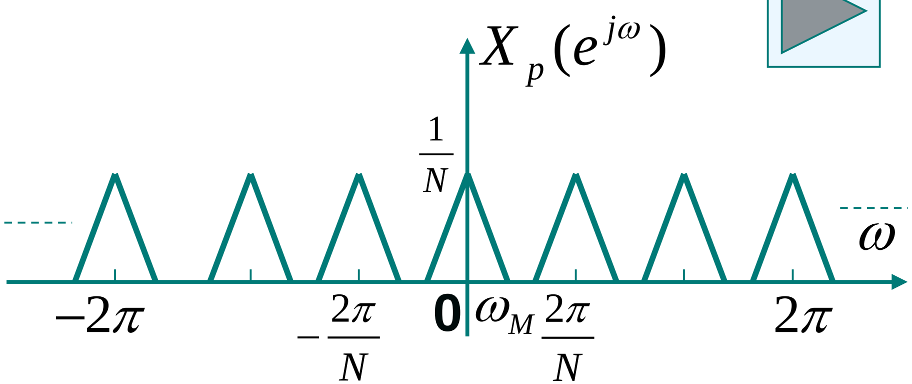


$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \circledast P(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\int_{2\pi} X(e^{j\theta}) P(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$= \frac{1}{N}\int_{2\pi} X(e^{j\theta}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\theta-\frac{2\pi}{N}k) d\theta = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N}k)})$$



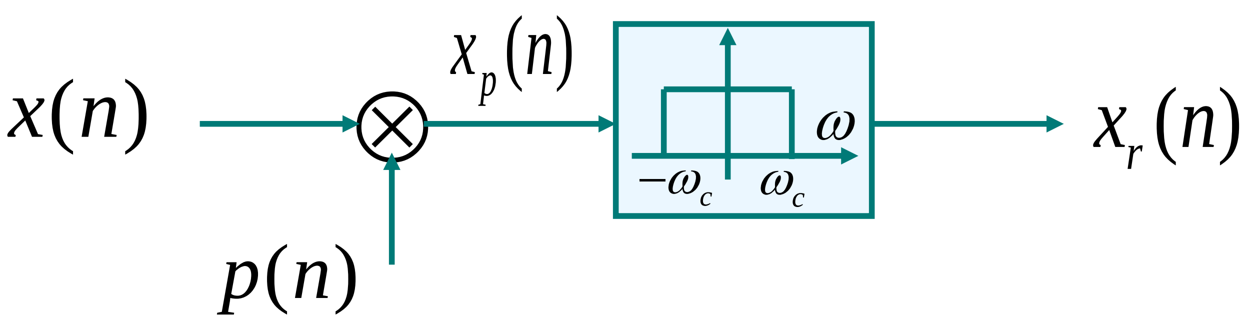




在时域，对离散时间信号以N为间隔采样，在频域，信号的频谱就在一个周期内以$\frac{2\pi}{N}$为间隔周期性延拓。

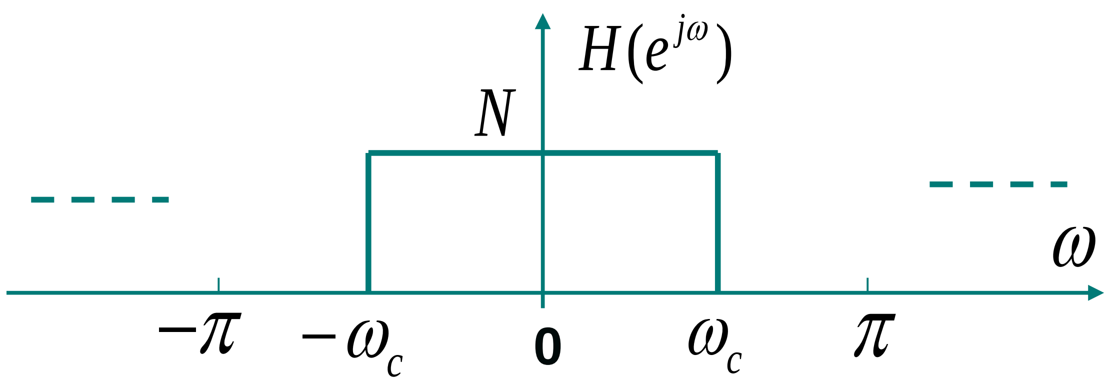
要使$x_p(n)$能恢复成$x(n)$，则频谱在周期性延拓时不能发生混叠。为此要求：

1. $x(n)$带限于ω_M。　　**2.** $\omega_s = \frac{2\pi}{N} \geq 2\omega_M$。



此时可以通过离散时间理想低通滤波器实现对信号$x(n)$的恢复。理想低通的通带增益为N。截止频率满足：$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$

恢复 $x(n)$ 的过程也是一种带限内插过程。其内插函数为理想低通的单位脉冲响应$h(n)$ 。



$$h(n)=\frac{N\omega_c}{\pi}\mathrm{SinC}(\frac{\omega_c n}{\pi})=N\cdot\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c n}{\pi n}$$

$$x_r(n)=x_p(n)*h(n)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kN)\frac{N\omega_c}{\pi}\mathrm{Sinc}\frac{\omega_c(n-kN)}{\pi}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kN)\frac{N\omega_c}{\pi}\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c(n-kN)}{\omega_c(n-kN)}$$

当 $\omega_c=\pi/N$ 时，

$$x_r(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kN)\frac{\mathrm{Sin}\,\omega_c(n-kN)}{\omega_c(n-kN)}$$

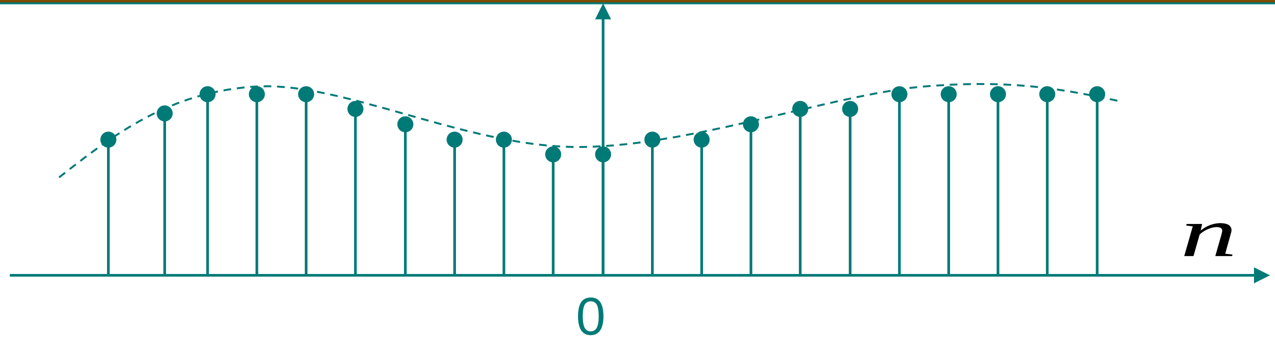
二. 离散时间抽取与内插:

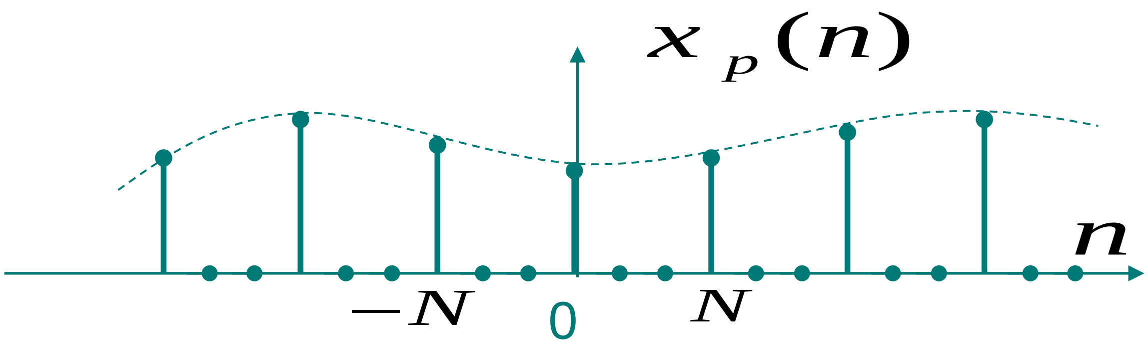
Discrete-Time Decimation and Interpolation

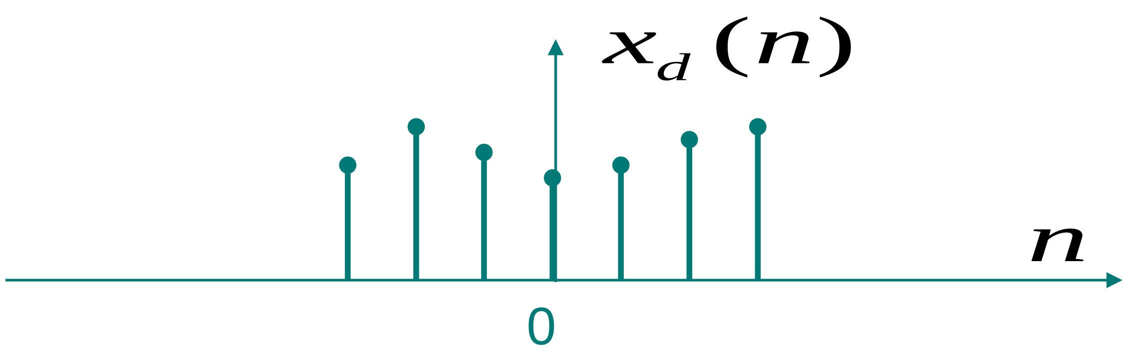
如果$x_d(n)=x_p(nN)=x(nN)$，则把由 $x(n)$ 经过$x_p(n)$到$x_d(n)$的过程称为抽取。

若直接从 $x(n)$ 抽取得到$x_d(n)$，这个过程是不可逆的。但当$x(n)$满足采样定理的要求时，先经过$x_p(n)$再到$x_d(n)$，则抽取过程是可逆的。

抽取过程在频域的反映:


n
0


$x_p(n)$
n
$-N$
0
N


$x_d(n)$
n
0

$$X_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(nN)e^{-j\omega n}$$

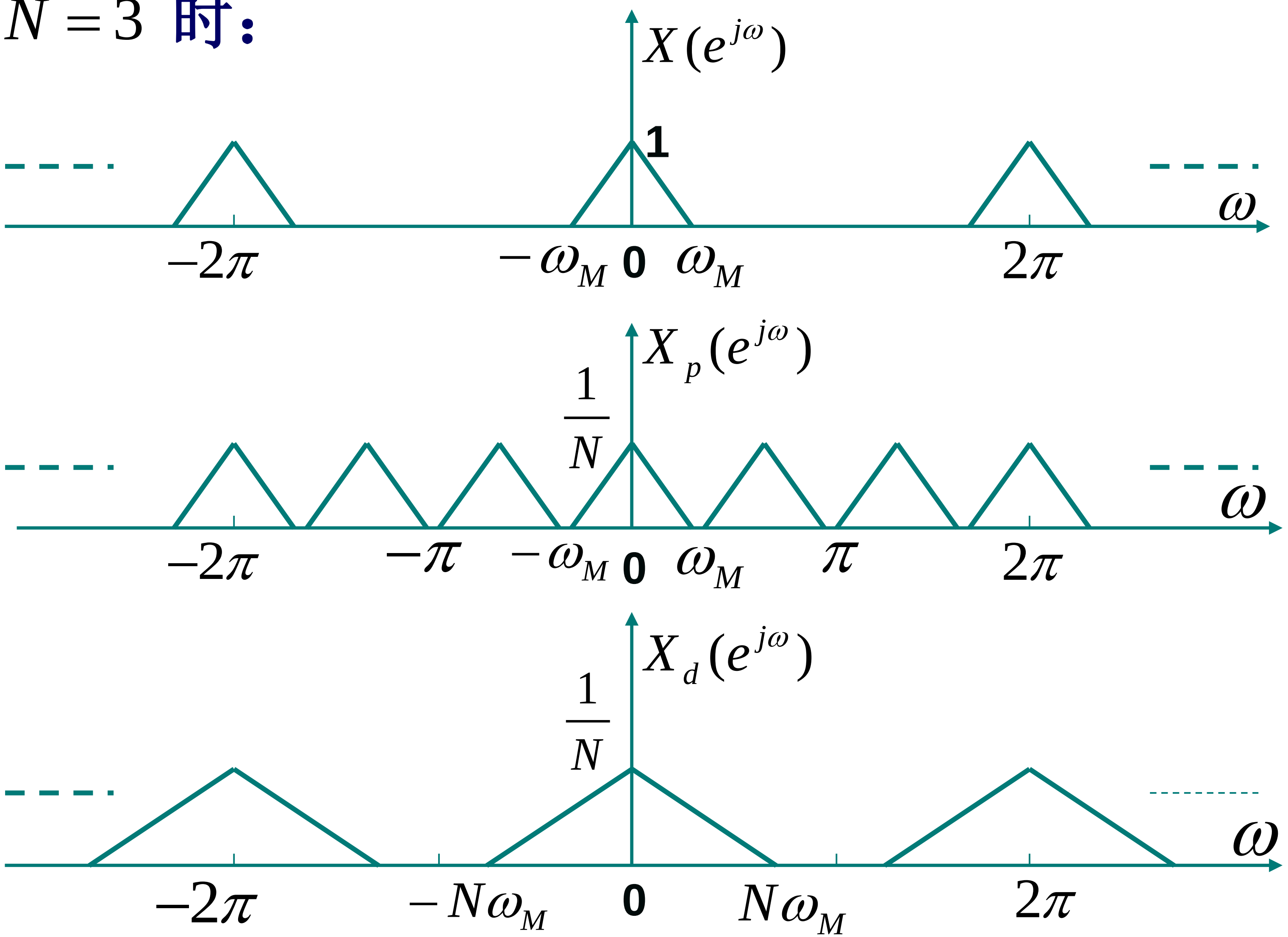
$$= \sum_{n=-\infty, n=rN}^{\infty} x_p(n)e^{-j\omega \frac{n}{N}}$$

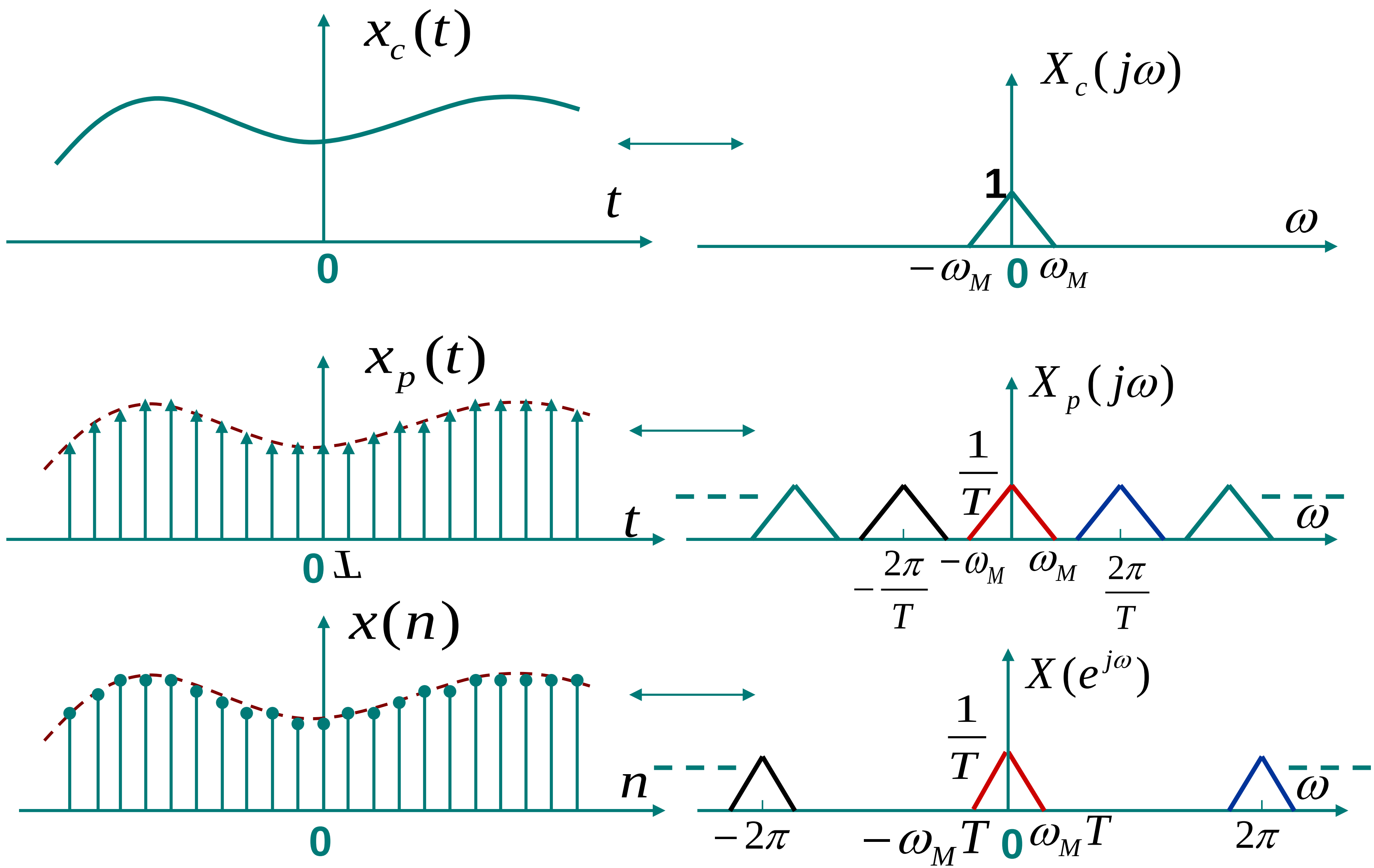
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p(n)e^{-jn\frac{\omega}{N}} = X_p(e^{j\frac{\omega}{N}})$$

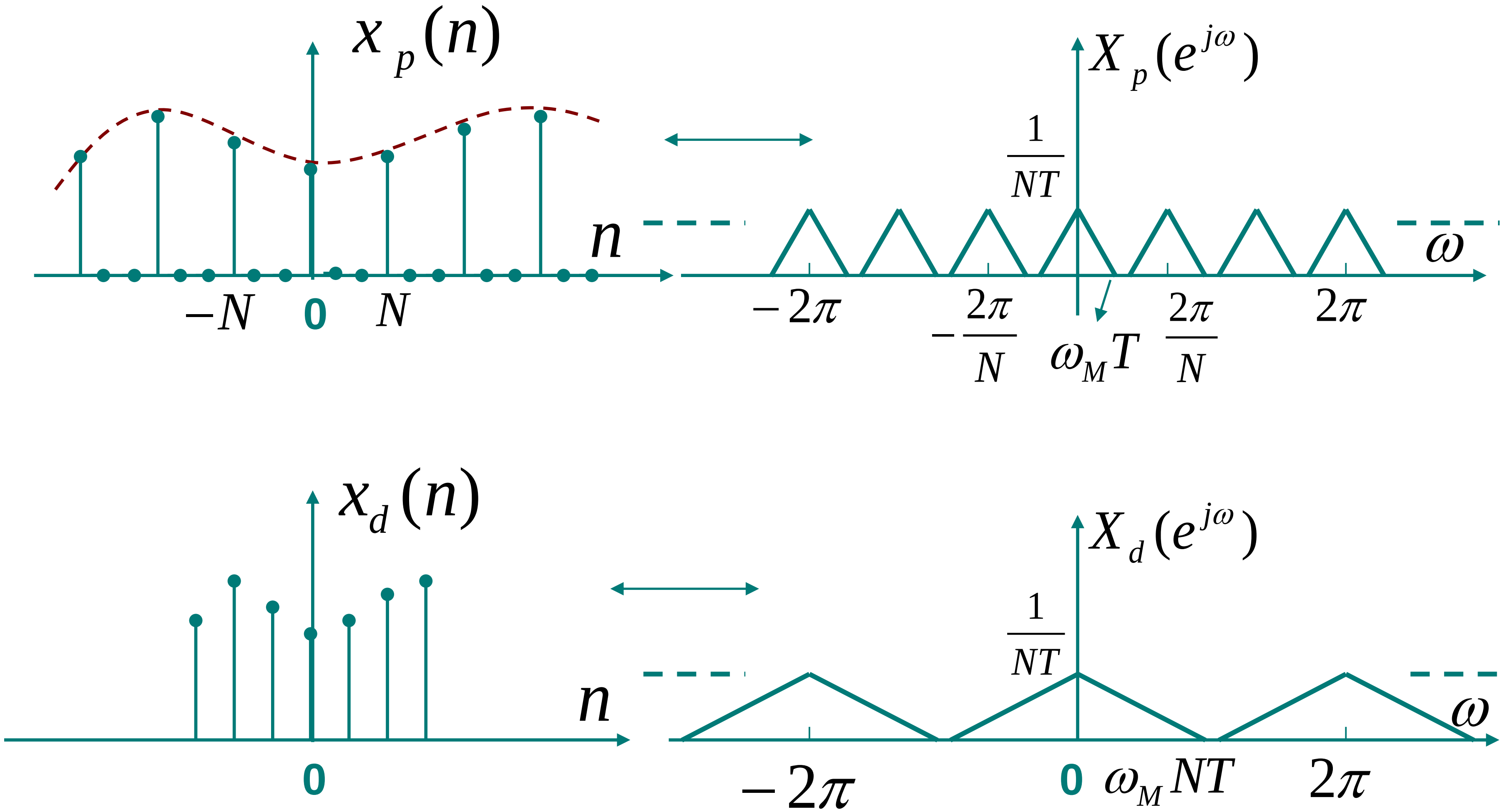
即 $X_d(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\frac{\omega}{N}})$

这表明，在时域对带限序列进行抽取，相当于在频域对采样序列的频谱进行尺度变换。

$N=3$ 时：




$x_c(t)$
t
0
$X_c(j\omega)$
1
ω
$-\omega_M$
0
ω_M
$x_p(t)$
t
0
T
$X_p(j\omega)$
$\frac{1}{T}$
ω
$-\frac{2\pi}{T}$
$-\omega_M$
ω_M
$\frac{2\pi}{T}$
$x(n)$
n
0
$X(e^{j\omega})$
$\frac{1}{T}$
ω
-2π
$-\omega_M T$
0
$\omega_M T$
2π


$x_p(n)$
n
$-N$
0
N
$X_p(e^{j\omega})$
$\frac{1}{NT}$
ω
-2π
$-\frac{2\pi}{N}$
$\omega_M T$
$\frac{2\pi}{N}$
2π
$x_d(n)$
n
0
$X_d(e^{j\omega})$
$\frac{1}{NT}$
ω
-2π
0
$\omega_M NT$
2π

对 $x_c(t)$ 以T为间隔采样后再以N为间隔抽取，相当于直接对 $x_c(t)$ 以NT为间隔采样。

内插：

$$x_p[n]=\begin{cases} x_d[n/N] & n\text{为}N\text{的整倍数} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$X_p(e^{j\omega})=X_d(e^{j\omega N})$$

抽取又称为减抽样，内插又称为增抽样。

减抽样使信号的频带扩展，但提高了数据的传输率。

增抽样虽降低了信息的传输率，但节省了传输频带。

例：某一离散时间序列 $x(n)$ ，其傅立叶变换如图a所示。现采用抽取、内插等手段对信号进行处理，欲使处理后信号 $y(n)$ 的频谱如图b所示，请给出信号处理过程的系统框图，并画出各处相应的频谱图。

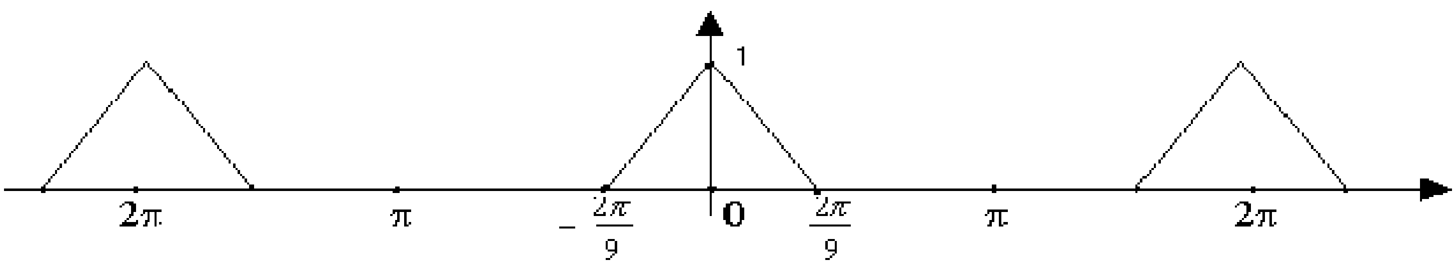


图 a

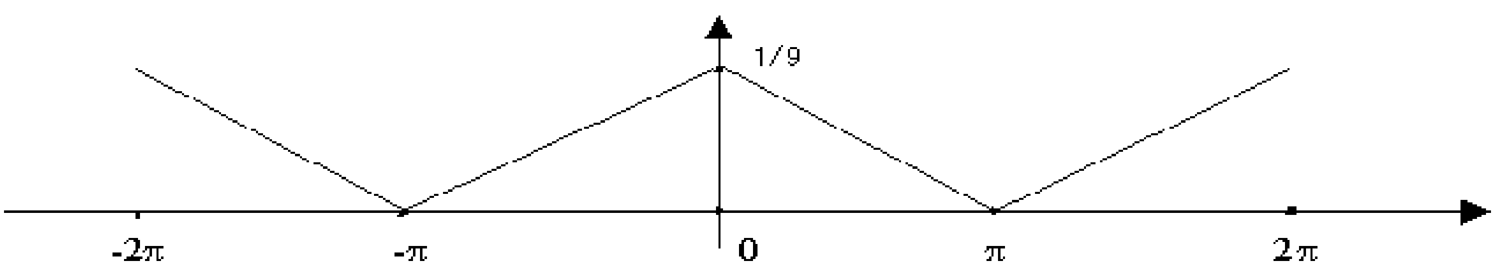


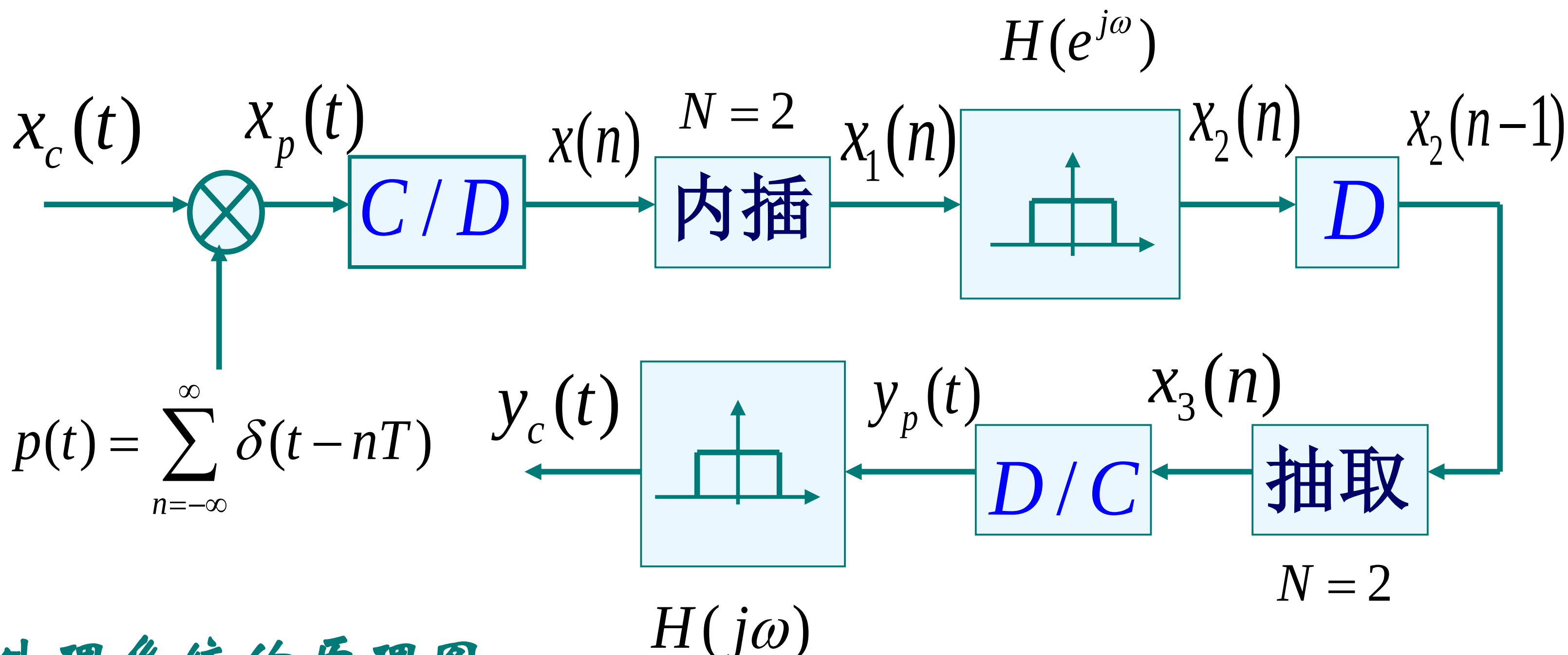
图 b

三. 抽取与内插的应用：

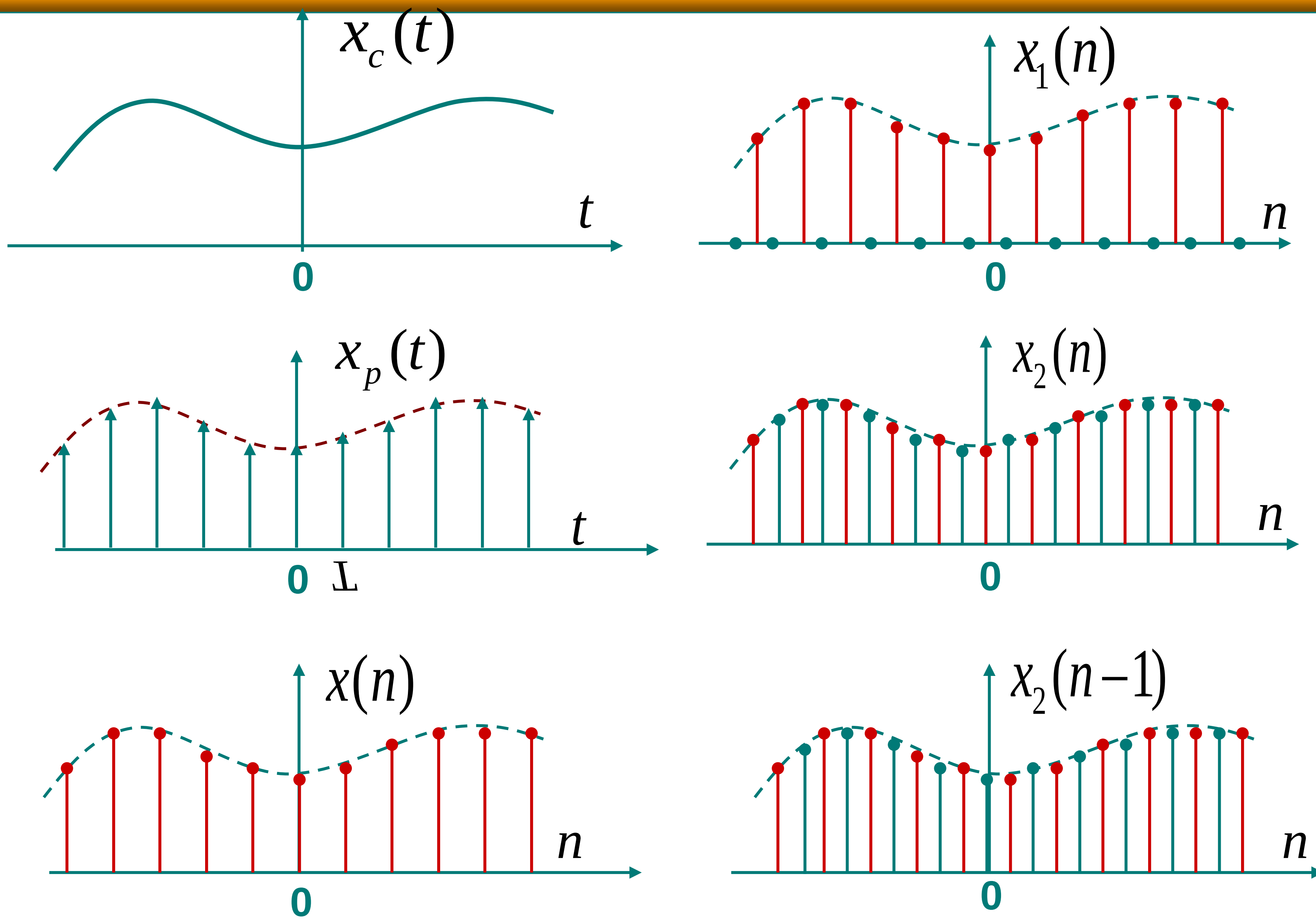
半抽样间隔延时：

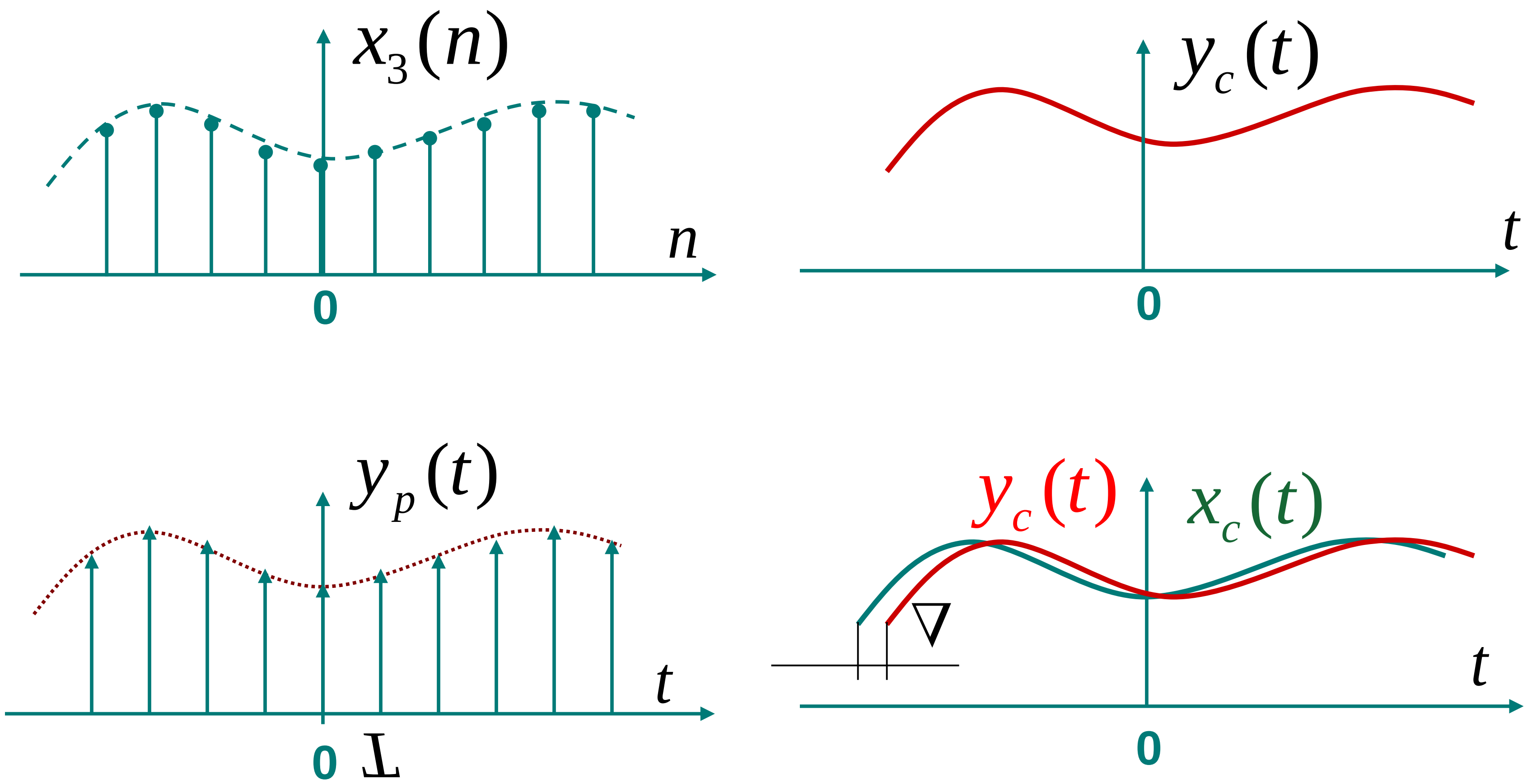
$$h[n]=\frac{\sin(\pi(n-\frac{1}{2}))}{\pi(n-\frac{1}{2})}$$

$$y_c(t)=x(t-\Delta),\quad \Delta=\frac{T}{2}$$



处理系统的原理图


$x_c(t)$
t
0
$x_1(n)$
n
0
$x_p(t)$
t
0 T
$x_2(n)$
n
0
$x(n)$
n
0
$x_2(n-1)$
n
0



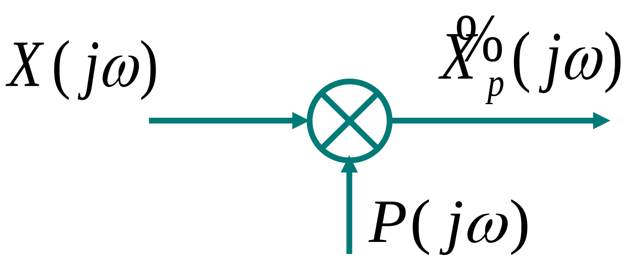
$$y_c(t) = x_c(t - \Delta)$$

$$\Delta = \frac{T}{2}$$

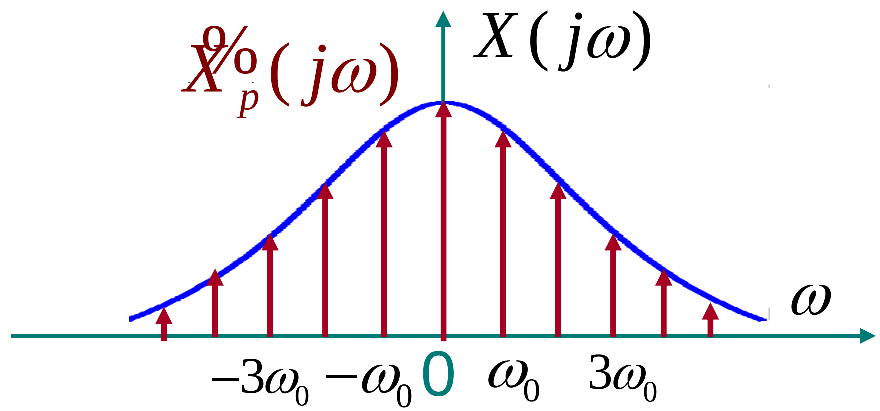
7.6 频域采样

Sampling in Frequency Domain

采样的本质是将连续变量的函数离散化。因此，在频域也可以对连续的频谱进行采样。这一过程与时域采样是完全对偶的。



$$P(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$



在频域有：$\tilde{X}_p(j\omega) = X(j\omega)P(j\omega)$

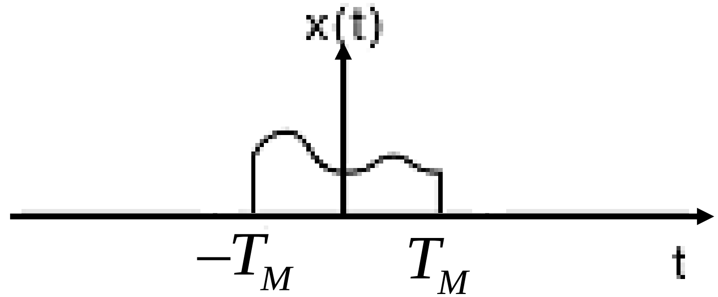
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0)$$

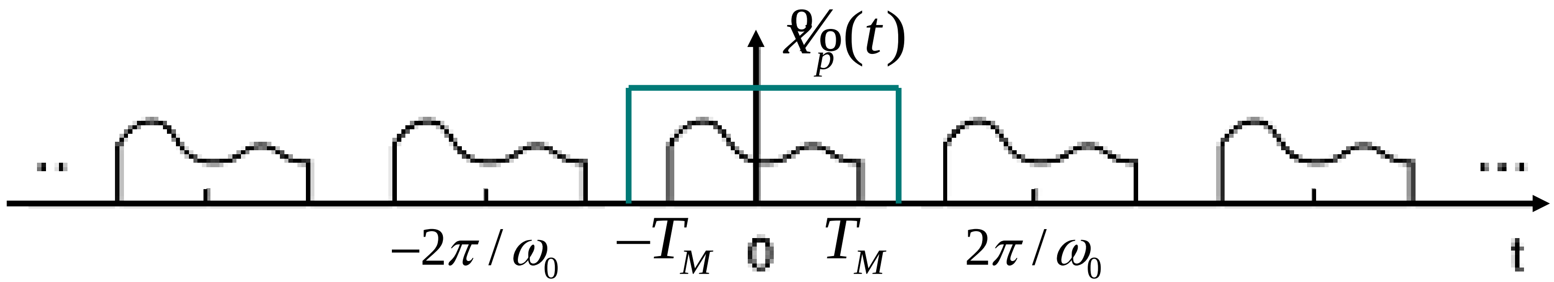
在时域有：

$$\tilde{x}_p(t) = x(t) * p(t) \qquad p(t) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}k\right)$$

$$\therefore \qquad \tilde{x}_p(t) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t - \frac{2\pi}{\omega_0}k\right)$$

这表明：对信号的频谱在频域理想采样，相当于在时域将信号以 $2\pi/\omega_0$ 为周期无限延拓。



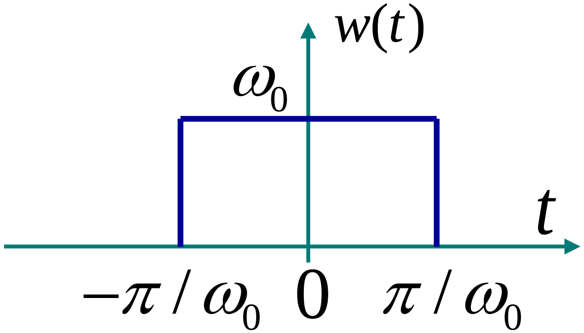


要使频域采样的样本能完全代表原信号，就必须保证信号在周期性延拓时不发生重叠。为此要求：

1. 信号 $x(t)$ 必须时限于 T_M 。

2. $2T_M \le \dfrac{2\pi}{\omega_0}$　　即　　$T_M \le \dfrac{2\pi}{\omega_0} - T_M$

此时，可以通过矩形窗从周期性延拓的信号中截取出原信号。



$$w(t)=\begin{cases}\omega_0 & |t|\le \pi/\omega_0\\ 0 & |t|>\pi/\omega_0\end{cases}$$

$$x(t)=\tilde{x}_p(t)w(t)$$

在频域，从频谱的样本重建连续频谱时的频域时限内插过程是以矩形窗的频谱作为内插函数实现的。

在频域有：$X(j\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\tilde{X}_p(j\omega)*W(j\omega)$

$$W(j\omega)=2\pi\,\mathrm{sinc}(\omega/\omega_0)$$ ——内插函数

$$\therefore\quad X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega-k\omega_0}{\omega_0}\right)$$

应该指出：

带限信号一定不时限；时限信号一定不带限。因此，对带限信号在频域采样时，频谱的样本不能代表原信号。对时限信号在时域采样时也是如此。

对有限长的离散时间信号当然也可以在频域采样。但由于离散时间信号的频谱是以 2π 为周期的，因此在频域采样时，必须保证在频谱的一个周期内采样的点数为整数，并且不能小于信号的长度。否则，频域采样的样本将不能完全代表原信号。例如：对一个N 点序列，必须以 $2\pi / M$ 为频域的采样间隔，其中M为整数，且满足：

$M \geq N$ （请大家解释为什么会有这样的约束）

7.7 小结：Summary

1. 连续时间信号的时域采样，采样定理，从样本通过内插重建信号。

2. 欠采样引起的效果，及欠采样在工程实际中的某些应用。

3. 连续时间信号的离散时间处理。

4. 离散时间信号的时域采样、抽取与内插。

5. 频域采样。

作业

#7.6	7.8	7.10	7.21	7.22
#7.15	7.19	7.26	7.29	7.35
#7.31	7.38	7.41 a,b	7.52	

本章习题中的错误更正

7.38 中应将“$\cos\left[\left(2\pi/T\right)+\theta\right]$”改为“$\cos\left[\left(2\pi t/T\right)+\theta\right]$”；还有在图 P7.38 中的

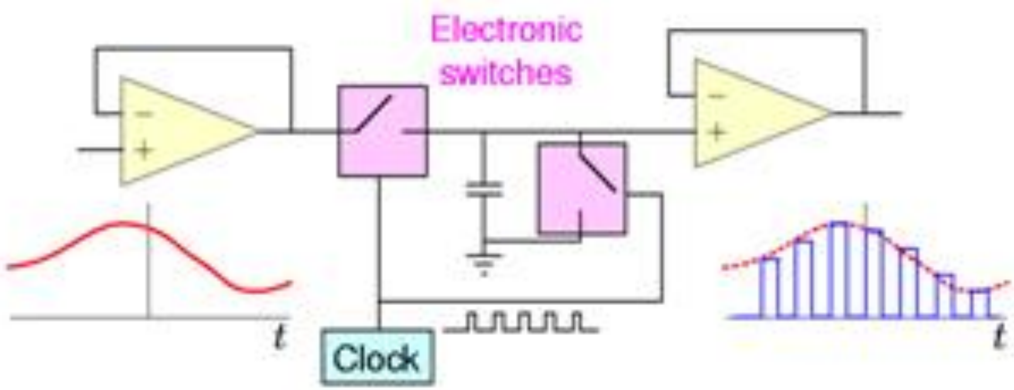
$$H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\dfrac{1}{2(T+\Delta)}\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$$ 改为 $$H(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\dfrac{\pi}{T+\Delta}\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$$ 。

7.26 中将“假定 $\omega_1>\omega_2-\omega_1$”改为“假定 $\omega_2-\omega_1<\omega_1<2\left(\omega_2-\omega_1\right)$”。

Sample-and-hold circuit

In this lecture we are concerned only with the sampling of a CT signal to produce a sampled CT signal. Later we will discuss how to form a DT signal from the sampled CT signal. We will not describe how to form a digital signal which involves converting infinite precision numbers to finite precision numbers, a process called analog-to-digital conversion.

A schematic diagram of a sample-and-hold circuit that produces samples of a CT signal is shown below.

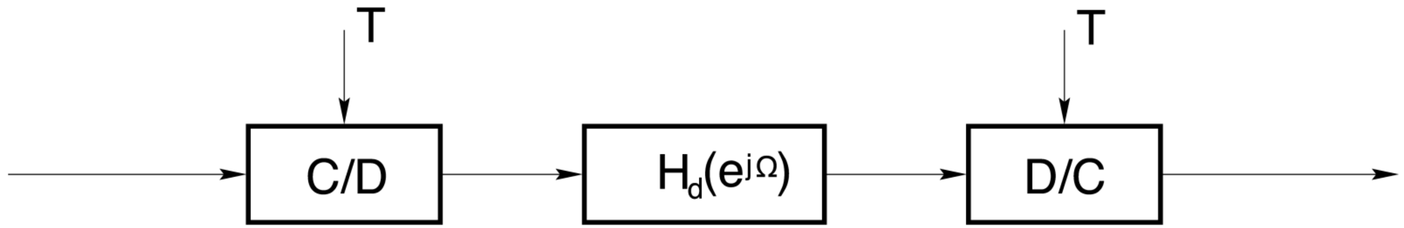


Design of Digital Differentiator

Bandlimited Differentiator

$$\text{Desired:} \qquad H_c(j\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

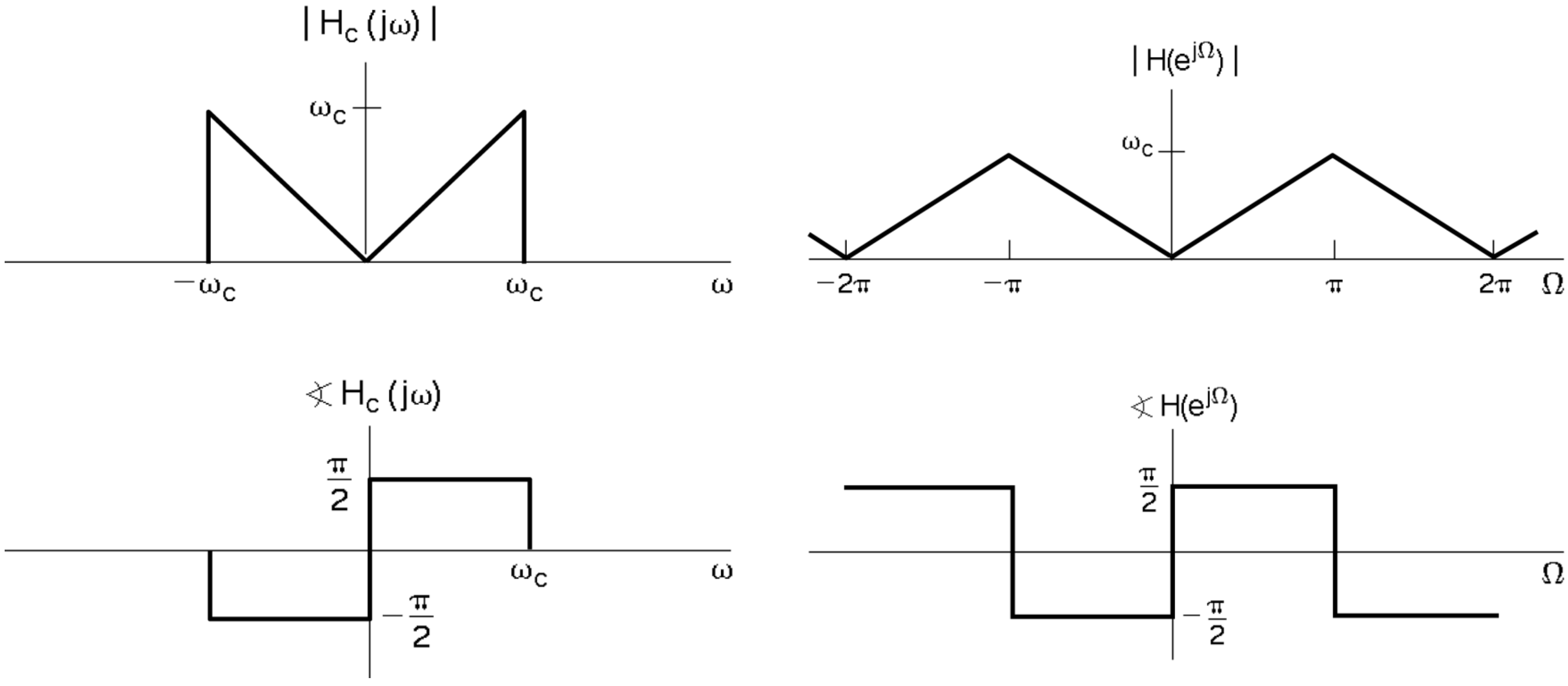
Set $\omega_s = 2\omega_c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi}{\omega_c}$. Assume $\omega_M < \omega_c$ (Nyquist rate met)



Choice for $H_d(e^{j\Omega})$:

$$\begin{aligned} H_d(e^{j\Omega}) &= \begin{cases} H_c(j\Omega/T), & |\Omega| < \pi \\ \text{periodic}, & |\Omega| \geq \pi \end{cases} \\ &= j\left(\frac{\Omega}{T}\right) = j\omega_c\left(\frac{\Omega}{\pi}\right) \quad |\Omega| < \pi \end{aligned}$$

Band-Limited Digital Differentiator (continued)



CT

DT

Digital Differentiator in the Time-Domain

For: $$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} j(\Omega/T), & |\Omega| < \pi \\ \text{periodic}, & |\Omega| \geq \pi \end{cases}$$

The corresponding unit sample response:

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} H_d(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} j\frac{\Omega}{T}\cdot j\sin(\Omega n)d\Omega \\ &= -\frac{1}{\pi T}\left\{\frac{1}{n}\left[-\Omega\cos(\Omega n)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(\Omega n)d\Omega\right\} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{nT}(-1)^n, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$