# 《概率论与数理统计》

# 课后题详解

(修订版)

——西安交通大学·仲英书院学业辅导中心出品

# 概率论与数理统计课后题详解（修订版）

**编写人员：（根据编写章节顺序排名）**计试81朱吉羽、能动B71王培宇、能动C71吴家豪、能动D71张翼霄、计算机钱71徐子介、能动B71杨松、材料72杨卓凡、新能源71曹瑞曦

**勘误及排版：**能动 B71 杨松 **加水印：**电气 713 余希裴 **修订:**能动D71张翼霄

感谢学业辅导中心各位工作人员与志愿者的努力工作，使本资料可以按时完工。由于编者们的能力与精力限制，难免有错误之处。如果同学们在本资料中发现错误，请联系仲英学业辅导中心：XJTUzyxuefu@163.com，我们将在修订时予以更正。

从第5周开始，**每晚19:30-21:30**，学辅志愿者在东21舍118学辅办公室值班，当面为学弟学妹们答疑。

同时，我们也有线上答疑平台——学粉群。**17 级学粉群：656224943，697672133；18 级学粉群：646636875，928740856**。以及微信公众号。

期中考试与期末考试前，我们还会举办考前讲座。学辅还有新生专业交流会，转专业交流会，英语考试讲座等活动，消息会在学粉群和公众号上公布，欢迎同学们参与。

仲英书院学业辅导中心

2019年2月4日

学辅公众号

# 第二章

1. (1) $X$的分布律:

$x<-1, F(x)=P\{X\leq x\}=0$;

$-1\leq x<1, F(x)=P\{x\leq x\}=\frac{1}{3}=P\{x=-1\}$;

$1\leq x<3, F(x)=P\{x\leq x\}=P\{x=-1\}+P\{x=1\}=\frac{5}{6}$;

$x\geq 3, F(x)=P\{x\leq x\}=1$.

| $X$ | $-1$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

$X$的分布函数:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{3} & -1\leq x<1\\ \frac{5}{6} & 1\leq x<3\\ 1 & x\geq 3\end{cases}$$

(2) $P\{x\leq 0\}=F(0)=\frac{1}{3}$ $P\{-1<x\leq 2\}=F(2)-F(-1)=\frac{1}{2}$

$P\{-1\leq x\leq 2\}=F(2)-F\_(-1)=P\{-1<x\leq 2\}+P\{x=-1\}=\frac{5}{6}$

补充: $P\{a<x\leq b\}=F(b)-F(a)$ $P\{a\leq x\leq b\}=F(b)-F\_(a)$

$P\{a\leq x<b\}=F\_(b)-F\_(a)$ $P\{a<x<b\}=F\_(b)-F(a)$

$P\{x=a\}=F(a)-F\_(a)$

2. $x<0, F(x)=0$; $0\leq x<R, F(x)=P\{x\leq x\}=\frac{\pi x^2}{\pi R^2}=\frac{x^2}{R^2}$;

$x>R, F(x)=P\{x\leq x\}=1$.

综上: $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x^2}{R^2}, & 0\leq x<R\\ 1, & x>R\end{cases}$

3. (1) $F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2$ ∴不是

(2) $a_1F_1(+\infty)+a_2F_2(+\infty)=a_1+a_2=1$ 且非降, 右连续 ∴是

(3) $F_1(+\infty)F_2(+\infty)=1$ $F_1(-\infty)F_2(-\infty)=0$ 且单增, 右连续 ∴是

(4)不能保证$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(x)\,dx=1$ 如$f_1(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$

$$f_2(x)=\begin{cases}e^{-2x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

此时$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)\,dx=\frac{2}{3}\neq 1$　∴不是

4. (1) $F(+\infty)=A+B\times\frac{\pi}{2}=1$　$F(+\infty)=A-B\times\frac{\pi}{2}=0$　$\therefore A=\frac{1}{2}\ B=\frac{1}{\pi}$

(2) $P\{-1<x\le 1\}=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}$

5. $P\{x=-1\}=F(-1)-F\_(-1)=0.125$　$P\{x=0\}=F(0)-F\_(0)=0.5$
$P\{x=0.5\}=F(0.5)-F\_(0.5)=0.25$　$P\{x=1\}=F(1)-F\_(1)=0.125$

$\therefore X$的分布律为：

| $X$ | $-1$ | $0$ | $0.5$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.125 | 0.5 | 0.25 | 0.125 |

6. $P\{x=0\}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$　$P\{x=1\}=\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{45}$　$P\{x=2\}=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{8}=\frac{1}{45}$

$\therefore X$的分布律为：

| $X$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{8}{45}$ | $\frac{1}{45}$ |

$X$的分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{4}{5}, & 0\le x<1\\ \frac{44}{45}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

7. (1) $P\{x=k\}=(1-0.8)^{k-1}\times 0.8$（即 $X\sim G(p)$ 几何分布）

(2) $P\{x=k\}=C_{k-1}^{r-1}0.2^{k-r}\times 0.8^{r}, k=r,r+1,r+2\cdots$ (即 $X\sim NB(p)$ 负二项分布)

8. (1)$X\sim P(4)$　$p_1=P\{x\ge 6\}-P\{x\ge 7\}=P\{x=6\}$　查表得 $p_1=0.1042$

(2) $p_2=P\{x\ge 5\}-P\{x\ge 11\}$　查表得 $p_2=0.3683$

9. $X\sim B(500,0.005)$ 近似 $X\sim P(2.5)$ $p=1-P\{x\ge 6\}$ 查表得 $p=0.9580$

10. (1) $P\{x=k\}=\begin{cases}0.7\times 0.3^{\frac{k-1}{2}}\times 0.2^{\frac{k-1}{2}}=0.7\times 0.06^{\frac{k-1}{2}}, & k=1,3,5\cdots\\ 0.8\times 0.3\times 0.3^{\frac{k-2}{2}}\times 0.2^{\frac{k-2}{2}}=0.24\times 0.06^{\frac{k-1}{2}}, & k=2,4,6\cdots\end{cases}$

(2) $P\{x=k\}=0.3^{k-1}\times 0.2^{k-1}\times(0.7+0.3\times 0.8)=0.94\times 0.6^{k-1}$, $k=1,2,3\cdots$

(3) $P\{x=0\}=0.7 \quad P\{x=k\}=0.282\times 0.06^{k-1},\ k=1,2,3\cdots$

11. (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}\,dx=-Ae^{-x}\Big|_{0}^{+\infty}+Ae^{x}\Big|_{-\infty}^{0}=A+A=1 \quad \therefore A=\frac{1}{2}$

(2) $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}\,dx=\frac{1}{2}e^{x}$

$x\ge 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}\,dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{x}\,dx=1-\frac{1}{2}e^{x}$

$$综上：F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x},\ x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{x},\ x\ge 0\end{cases}$$

(3) $P\{-1<x<2\}=F(2)-F(-1)=0.7484$

12. (1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{A}{\sqrt{1-x^2}}dx=Aarcsinx\Big|_{-1}^{1}=A\pi=1 \quad \therefore A=\frac{1}{\pi}$

(2)$x<-1,F(x)=0$

$-1\le x<1,F(x)=\int_{-1}^{x}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arcsinx$

$x\ge 1,F(x)=1$

$$综上：F(x)=\begin{cases}0,\ x<-1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arcsinx,\ -1\le x<1\\ 1,\ x\ge 1\end{cases}$$

(3)$P\left\{-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$

13. $x<1,F(x)=0,f(x)=0$

$1\le x<e,F(x)=\int_{1}^{x}ln\,x\,dx=ln\,x\ f(x)=\frac{1}{x}$

$x\ge e,F(x)=1\ f(x)=0$

$$综上：f(x)=\begin{cases}0,\ x<1\\ \frac{1}{x},\ 1\le x<e\\ 0,\ x\ge e\end{cases}$$

14. (1)$P\{x>-1\}=1-\Phi\left(\frac{-1+2}{3}\right)=1-0.6293=0.3707$

(2)$P\{-5\le x\le 3\}=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)-\Phi(-1)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)-1+\Phi(1)=0.7938$

(3)$P\{0<x<5\}=\Phi\left(\frac{7}{3}\right)-\Phi\left(\frac{2}{3}\right)=0.2415$

(4)$P\{|x|>1\}=P\left\{Y=\frac{X+2}{3}<\frac{1}{3}或Y>1\right\}=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)+1-\Phi(1)=0.7880$

(5)$P\{|x+2|<4\}=P\left\{|Y|<\frac{4}{3}\right\}=\Phi\left(\frac{4}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{4}{3}\right)=2\Phi\left(\frac{4}{3}\right)-1=0.8164$

(6)$P\{|x-a|<a\}=0.01=P\left\{\frac{2}{3}\le Y<\frac{2a+2}{3}\right\}=\Phi\left(\frac{2a+2}{3}\right)-\Phi\left(-\frac{2}{3}\right)=0.01$

$\Phi\left(\frac{2a+2}{3}\right)=0.7586$ 　　查表得$\frac{2a+2}{3}\approx 0.70$(近似) 得$a\approx 0.05$

15. $X \sim N(10.05, 0.06^2)$

$$P\{|x-10.05|<0.12\}=P\left\{\frac{|x-10.05|}{0.06}<2\right\}=2\Phi(2)-1=0.9544$$

不合格概率$p=1-0.9544=0.0456$

16.

$$P\{120<x\leq 200\}=P\left\{-\frac{40}{\sigma}<\frac{x-160}{\sigma}\leq\frac{40}{\sigma}\right\}=2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)-1\geq 0.80\ \ \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right)\geq 0.90$$

查表得$\frac{40}{\sigma}\geq 1.28, \sigma\leq 31.25$

17. $P\{|x|\leq 30\}=P\left\{-\frac{5}{4}<\frac{x-20}{40}\leq\frac{1}{4}\right\}=\Phi\left(\frac{1}{4}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{4}\right)=0.4931$

$\therefore p=1-(1-0.4931)^3=0.8698$

18. $X\sim exp\left(\frac{1}{5}\right)\ \ P\{X>10\}=1-\int_0^{10}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}\,dx=1-(1-e^{-2})=e^{-2}$

$Y\sim B(5,e^{-2})\quad P\{Y=k\}=C_k^5 e^{-2k}(1-e^{-2})^{5-k},\ k=0,1\cdots 5$

$P\{Y\geq 1\}=1-P\{Y=0\}=0.5167$

19. $X\sim U[0,5]\ \ P\{\Delta\geq 0\}=P\{x\leq 1.5\}=\int_0^{1.5}\frac{1}{5}dx=0.3$

20. $X\sim exp(0.001)$ 设$T$为仪器寿命，$x_i$表示第$i$个元器件寿命 $(i=1,2,3)$

$P\{1000<T<1500\}=P\{T>1000\}-P\{T>1500\}$

$=P\{x_1,x_2,x_3>1000\}-P\{x_1,x_2,x_3>1500\}$

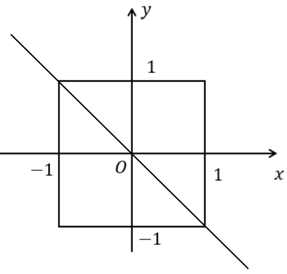
$=(P\{x_1>1000\})^3-(P\{x_2>1500\})^3=e^{-3}-e^{-4.5}$ (本题读者若有其他更好解法，欢迎联系编者)

21. $\because P\{-1<X\leq 1,-1<Y\leq 1\}$

$=F(1,1)-F(-1,1)-F(1,-1)+F(-1,-1)$

$=-10<0$

$\therefore F(x,y)$不是分布函数。(不满足P36页联合分布函数性质(4)




21 题图

22. (1)$P\{X\leq a\}=F(a,+\infty)$

(2)$P\{Y>b\}=1-F(+\infty,b)$

(3)$P\{X>a,Y>b\}=1-F(a,+\infty)-F(+\infty,b)+F(a,b)$

(4) $P\{a<X\leq b,Y>c\}=F(b,c)-F(a,c)$

23. (1)$F(-\infty,-\infty)=A\left(B+\frac{\pi}{2}\right)\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$F(-\infty,-\infty)=A\left(B-\frac{\pi}{2}\right)\left(C-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\therefore B=C=\frac{\pi}{2},A=\frac{1}{\pi^2}$$

(2) $P\{0<X\leq 2,0<Y\leq 3\}=F(2,3)-F(2,0)-F(0,3)+F(0,0)=\frac{1}{16}$

(3) $P\{X>2,Y>3\}=1-F(+\infty,3)-F(2,+\infty)+F(2,3)=\frac{1}{16}$

(4) $F_X=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+arctan\frac{x}{2}\right), F_Y=F(y,+\infty)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+arctan\frac{y}{3}\right)$

24.

| $Y\backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | $P_{\cdot j}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3/8 | 3/8 | 0 | 3/4 |
| 3 | 1/8 | 0 | 0 | 1/8 | 1/4 |
| $P_{i\cdot}$ | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 | 1 |

25. (1)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,(x,y)\in G\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

$$G=\{(x,y)|y\ge x,x\ge 1,y\le 3\}=\{(x,y)|1\le x\le y\le 3\}$$

(2)

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^3\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}(3-x) & ,1\le x\le 3\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_1^y\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}(y-1) & ,1\le y\le 3\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

(3)

$$P\{Y-X\le 1\}=\iint\limits_{\substack{y-x\le 1\\1\le x\le y\le 3}}f(x,y)dxdy=1-\iint\limits_{\substack{y-x>1\\1\le x\le y\le 3}}\frac{1}{2}dxdy=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

26. (1)

$$P\{2X\le Y\}=\iint\limits_{2x\le y}f(x,y)dxdy=\int_{\varphi}^{\varphi+\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}\frac{1}{4\pi^2}e^{-\frac{\rho^2}{4\pi}}\rho d\rho=\frac{1}{2}$$

(令$X=x-1,Y=y-2$ 则$dxdy=dXdY$ 用极坐标有$\rho^2=X^2+Y^2$

(2)

$$P\{(X,Y)\in \mathrm{G}\}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{4\pi^2}e^{-\frac{\rho^2}{4\pi}}\rho d\rho=e^{-\frac{1}{4}}-e^{-1}$$

27. (1)

$$\int_{-1}^1dx\int_{x^2}^1Cx^2ydy=\frac{4C}{21}=1\ ,\quad C=\frac{21}{4}$$

(2)

$$P\{|X|\leq Y\}=\int_0^1 dx\int_x^1\frac{21}{4}x^2ydy+\int_{-1}^0 dx\int_{-x}^1\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{7}{10}$$

(3)

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^1\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}(x^2-x^6) & , \quad -1\leq x\leq 1\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}} & , \quad 0\leq y\leq 1\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

28. (1)

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_o^{y}e^{-y}dx=ye^{-y} & , \quad y>0\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

(2)

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=e^{-y}, & 0<x<y\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

(3)

$$P\{X>2|Y<4\}=1-P\{X\leq 2|Y<4\}=1-\frac{\int_0^2 dx\int_x^4 e^{-y}dy}{\int_0^4 y\,e^{-y}dy}=\frac{e^{-2}-3e^{-4}}{1-5e^{-4}}$$

29.

$$f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y|x)=\begin{cases}\frac{f(x,y)}{f_x(x)}=\left(\frac{24y(1-x-y)}{\int_0^{1-x}24y(1-x-y)dy}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=24y-48y^2 & 0<y<\frac{1}{2}\\ 0 & , \quad 其他\end{cases}$$

$$P\left\{Y>\frac{1}{4}\middle|X=\frac{1}{2}\right\}=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(24y-48y^2)dy=\frac{1}{2}$$ (注意与28(3)题异同!此题与2019年1月期末第四题相似)

30. (1)$P\{X=n,Y=k\}=C_n^k(\frac{1}{2})^n\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\frac{1}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda}(k=0,1,\dots;n=0,1\dots)$

(2) $P(Y=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-k}}{(n-k)!}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}e^{-\lambda}=\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k}{k!}e^{-\frac{\lambda}{2}}(k=0,1,\dots)$ 即 $Y\sim P(\frac{\lambda}{2})$

(3)当$k=0,1,\dots$时 $P\{X=n|Y=k\}=\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-k}e^{-\frac{\lambda}{2}}\,(n=k,k+1,\dots)$

31. (1)

$$f(x,y)=\begin{cases}f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)=xe^{-xy}, & 0\le x\le 1, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2)

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_o^y xe^{-xy}dx=\frac{1}{y^2}[1-(1+y)e^{-y}], & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3)

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{xy^2e^{(1-x)y}}{e^y-(1+y)}, & 0<x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

32.

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{9}=\mathrm{P}\{X=1\}\cdot\mathrm{P}\{Y=0\}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}+a\right),\therefore a=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{18}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{18}+b\right),\therefore b=\frac{1}{9}$$

33. (1)

$$f_X(x)=\int_0^2\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dy=2x^2+\frac{2}{3}x\ ,\ f_Y(y)=\int_0^1\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dx=\frac{1}{3}+\frac{y}{6}$$

$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故$X,Y$不独立

(2)

$$f_X(x)=\int_0^1 6x^2ydy=3x^2\ ,\ f_Y(y)=\int_0^1 6x^2ydx=2y$$

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故$X,Y$独立

(3)

$$f_X(x) = \int_{-x}^{x} \frac{3}{2} x dy = 3x^2 \ , \quad f_Y(y) = \int_0^1 \frac{3}{2} x dx = \frac{3}{4}$$

$f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$,故$X$ ,$Y$不独立

(4)

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \ , \quad f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-y} dx = e^{-y}$$

$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 故$X$ ,$Y$独立

34. 当$-1 \leq x,y,z \leq 1$ 时,

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} \frac{1}{8}(1 - xyz) dz = \frac{1}{2} \ , f_Y(y) = \frac{1}{2} \ , f_Z(z) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \ , f(x,z) = f_X(x) \cdot f_Z(z) \ , f(y,z) = f_Y(y) \cdot f_Z(z)$$
$$\Rightarrow F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \ , F(x,z) = F_X(x) \cdot F_Z(z) \ , F(y,z) = F_Y(y) \cdot F_Z(z)$$

但$f(x,y,z) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z)$ $\therefore X,Y,Z$两两独立，但不相互独立

35. 列表:

| $X$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2X+1$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ | $7$ |
| $\|1-2X\|$ | $5$ | $3$ | $1$ | $1$ | $3$ | $5$ |
| $1-X^2$ | $-3$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-3$ | $-8$ |
| $cos\frac{\pi X}{4}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| $P_k$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ |

得:

(1)$Y_1$的分布律为:

| $Y_1$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ |

(2)$Y_2$的分布律为:

| $Y_2$ | $1$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

(3)$Y_3$的分布律为:

| $Y_3$ | $-8$ | $-3$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{11}{30}$ | $\frac{13}{30}$ | $\frac{1}{6}$ |

(4)$Y_4$的分布律为:

| $Y_4$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{11}{30}$ | $\frac{13}{30}$ | $\frac{1}{6}$ |

36. 设国徽向上的次数为$X$，则$X\sim B(5,\frac{1}{2})$，$P\{X=k\}=C_5^k(\frac{1}{2})^5,k=0,1,2,3,4,5$

令$Y=X(5-X)$,则$Y=0,4$ 或 $6$

$$P\{Y=0\}=P\{X=0\text{ 或 }5\}=P\{X=0\}+P\{X=5\}=\frac{1}{16}$$
$$P\{Y=4\}=P\{X=1\text{ 或 }4\}=P\{X=1\}+P\{X=4\}=\frac{5}{16}$$
$$P\{Y=6\}=P\{X=2\text{ 或 }3\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{5}{8}$$

则所求分布律为:

| $Y$ | $0$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{5}{8}$ |

37. $X$的概率密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0,\quad x\le 0\end{cases}$

(1)$Y_1=g_1(X)=X^3$,$X=g_1^{-1}(Y_1)=\sqrt[3]{Y_1}$，则$Y_1$的概率密度函数为:

$$f_{Y_1}(y)=f_X(\sqrt[3]{y})\cdot\left|(\sqrt[3]{y})'\right|=\begin{cases}\frac{\lambda}{3}e^{-\lambda\sqrt[3]{y}}\cdot y^{-\frac{2}{3}}\ ,y>0\\ 0\qquad\qquad ,y\le 0\end{cases}$$

(2)$Y_2=g_2(X)=e^{-\lambda x}>0$,$X=g_2^{-1}(Y_2)=-\frac{1}{\lambda}lnY_2$，则$Y_2$的概率密度函数为:

$$f_{Y_2}(y)=\begin{cases}f_X\left(-\frac{1}{\lambda}lny\right)\cdot\left|\left(-\frac{1}{\lambda}lny\right)'\right|,y>0\\ 0\qquad\qquad ,\text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1\ ,0<y<1\\ 0\ ,\text{其他}\end{cases}$$

38. 出现正面的次数$Y\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$,$P\{Y=k\}=C_5^k(\frac{1}{2})^5$，$k=0,1,2,3,4,5$

则有$X=Y+(-1)\cdot(5-Y)=2Y-5$

$$P\{X=2k-5\}=P\{2Y-5=2k-5\}=P\{Y=k\}=C_5^k(\frac{1}{2})^5, k=0,1,2,3,4,5$$

即为$X$的分布律。

39. $Y$的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\begin{cases}P\{-y\le X-\mu\le y\}, y>0\\ 0 \quad ,y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{y}{\sigma}\right), y>0\\ 0 \quad ,y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right)-1, y>0\\ 0 \quad ,y\le 0\end{cases}$$，求导可得$Y$的概率密度函数为：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sigma}\varphi\left(\frac{y}{\sigma}\right), y>0\\ 0 \quad ,y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, y>0\\ 0 \quad ,y\le 0\end{cases}$$

40. 列表：

| $(X,Y)$ | $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(1,0)$ | $(1,1)$ |
|---|---|---|---|---|
| $X+Y$ | 0 | 1 | 1 | 2 |
| $2X$ | 0 | 0 | 2 | 2 |
| $XY$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $X^2$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $p$ | $(\frac{1}{2})^2$ | $(\frac{1}{2})^2$ | $(\frac{1}{2})^2$ | $(\frac{1}{2})^2$ |

得：

(1)$X+Y$的分布律为：

| $X+Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

(2)$2X$的分布律为：

| $2X$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

(3)$XY$的分布律为：

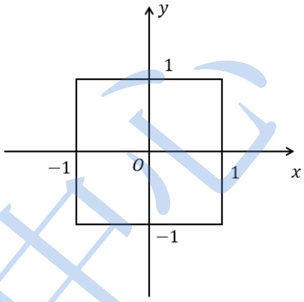
| $XY$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

(4)$X^2$的分布律为:

| $X^2$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

41. $X$的概率密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,-1<x<1 \\ 0 & ,其他\end{cases}$， $Y$与$X$同分布

由于$X$和$Y$相互独立，则$X$和$Y$的联合概率密度函数为



$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4} & ,-1<x,y<1 \\ 0 & ,其他\end{cases}$$

则$(X,Y)$在$-1<x,y<1$区域上服从二维正态分布

$Z$的分布函数为 $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{XY\le z\}=\iint_{xy\le z} f(x,y)dxdy$

①$z\ge 1$, $F_Z(z)=1$

(说明:41题到50题均为求二维连续型随机变量函数的概率密度,这里仅提供一种参考解法即公式法,读者也可选择书上提供的一般方法,即先求分布函数再求导.实际上这类问题求解的关键即是划分区间,确定积分的上下限.)

②$z\le -1$, $F_Z(z)=0$

③$z=0$, $F_Z(z)=\frac{1}{2}$

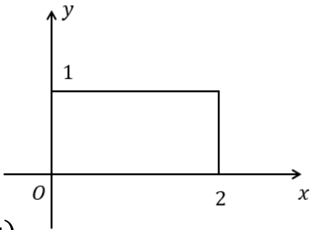
④$0<z<1, F_Z(z)=1-2\int_z^1 dx\int_{\frac{z}{x}}^1 \frac{1}{4}dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z(1-lnz)$

⑤$-1<z<0, F_Z(z)=2\int_{-1}^z dx\int_{\frac{z}{x}}^1 \frac{1}{4}dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z(1-ln|z|)$

综上所述，$Z$的分布函数为$F_Z(z)=\begin{cases}0 & ,z\le -1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}z(1-ln|z|) & ,0<|z|<1 \\ \frac{1}{2} & ,z=0 \\ 1 & ,z\ge 1\end{cases}$

42. $X$和$Y$的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & ,(x,y)\in G \\ 0 & ,其他\end{cases}$

$S$的分布函数为 $F(s)=P\{S\le s\}=P\{XY\le s\}=\iint_{xy\le s} f(x,y)dxdy$



①$s\ge 2$, $F(s)=1$

②$s\le 0, F(s)=0$

③$0<s<2, F(s)=1-\int_s^2 dx\int_{\frac{s}{x}}^1 \frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}(s+sln2-slns)$

故$S$的概率密度为$f(s)=F'(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(ln2-lns),0<s<2\\ \qquad 0 \qquad ,其他\end{cases}$

43. $X$的概率密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x},x>0\\ 0,\quad x\le 0\end{cases}$

$Y$的概率密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x},y>0\\ 0,\quad y\le 0\end{cases}$

由于$X$和$Y$相互独立，故可用卷积公式，$Z=X+Y$的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^z \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\cdot\lambda_2 e^{-\lambda_2(z-x)}\,dx,z>0\\ 0,z\le 0\end{cases}=\begin{cases}\int_0^z \lambda_1\lambda_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)x-\lambda_2 z}\,dx,z>0\\ 0,z\le 0\end{cases}$$

①$\lambda_1=\lambda_2$，$f_Z(z)=\begin{cases}\lambda_1^2 z e^{-\lambda_1 z}dx,z>0\\ 0,z\le 0\end{cases}$

②$\lambda_1\ne\lambda_2$，$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}\right)dx\ ,z>0\\ 0\qquad ,z\le 0\end{cases}$

44. 设两周和三周的需求量分别为$Z_2$和$Z_3$,第$i$周的需求量为$X_i$

则有 $Z_2=X_1+X_2$，$Z_3=Z_2+X_3$

$X_1$和$X_2$相互独立，可用卷积公式，则$Z_2$的概率密度函数为

$$f_{Z_2}(z_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1)f(z_2-x_1)dx_1$$

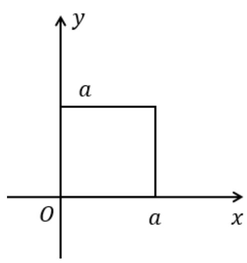
$$=\begin{cases}\int_0^{z_2} f(x_1)f(z_2-x_1)dx_1,z_2>0\\ 0\qquad ,z_2\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{6}z_2^3 e^{-z_2}\quad ,z_2>0\\ 0\qquad ,z_2\le 0\end{cases}$$

$Z_2$和$X_3$相互独立，可用卷积公式，则$Z_3$的概率密度函数为

$$f_{Z_3}(z_3)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_2}(z_2)f(z_3-z_2)dz_2=\begin{cases}\int_0^{z_3} f_{Z_2}(z_2)f(z_3-z_2)dz_2,z_3>0\\ 0,z_3\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^{z_3}\frac{1}{6}z_2^3 e^{-z_2}\cdot(z_3-z_2)e^{-(z_3-z_2)}dz_2\ ,z_3>0\\ 0\qquad ,z_3\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{120}z_3^5 e^{-z_3}\quad ,z_3>0\\ 0\qquad ,z_3\le 0\end{cases}$$

45. 由于$X$和$Y$相互独立，则$X$和$Y$的联合概率密度函数为



$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a^2} & ,0\le x,y\le a\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

则$(X,Y)$在$0\le x,y\le a$区域上服从二维正态分布

(1)令$Z=X-Y$,Z的分布函数为

$$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}=\iint\limits_{x-z\le y}f(x,y)dxdy$$

①$z\ge a,F(z)=1$

②$z\le -a,F(z)=0$

③$-a<z\le 0,F(z)=\frac{1}{2}(a+z)^2\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{(z+a)^2}{2a^2}$

④$0<z<a,F(z)=1-\frac{1}{2}(a-z)^2\cdot\frac{1}{a^2}=1-\frac{(z-a)^2}{2a^2}$

所以$Z$的概率密度为$f(z)=F'(z)=\begin{cases}\frac{1}{a^2}(a-|z|), & -a\le z\le a\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$

(2)令$Z=|X-Y|$,Z的分布函数为

$$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{|X-Y|\le z\}=\iint\limits_{|x-y|\le z}f(x,y)dxdy$$

①$z\ge a,F(z)=1$

②$z\le 0,F(z)=0$

③$0<z<a,F(z)=1-2\cdot\frac{1}{2}(a-z)^2\cdot\frac{1}{a^2}=1-\frac{(z-a)^2}{a^2}$

所以$Z$的概率密度为$f(z)=F'(z)=\begin{cases}\frac{2}{a^2}(a-z) & ,0<z<a\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$

46. 由于$X$和$Y$独立性暂未知，故$Z$的概率密度为$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$

$x\in[-1,1]\cap[z-1,z+1]$时，$f(x,z-x)\ne 0$

①$z<-2$或$z>2$时，$f(x,z-x)=0$，故$f_Z(z)=0$

②$-2\le z\le 0$时，$f_Z(z)=\int_{-1}^{z+1}f(x,z-x)dx=\frac{1}{24}(z^3-8)$

③$0 < z \le 2$时，$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} f(x, z-x)dx = \frac{1}{24}(8 - z^3)$

综上所述，$Z$的概率密度为$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{24}(8 - |z|^3), |z| \le 2 \\ \quad 0 \qquad ,其他 \end{cases}$

47. $X$和$Y$的联合概率密度函数为 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{ab} \ , \ 0 \le x \le a, \ 0 \le y \le b \\ \quad 0 \qquad , \quad 其他 \end{cases}$

$Z$的概率密度为$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$

$y \in [0, b] \cap [0, \frac{a}{z}]$时，$f(yz, y) \neq 0$

①$z < 0$，$f(yz, y) = 0$，故$f_Z(z) = 0$

②$z = 0, f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(0, y) dy = \int_0^b y \frac{1}{ab} dy = \frac{b}{2a}$

③$0 < z < \frac{a}{b}, f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy = \int_0^b y \frac{1}{ab} dy = \frac{b}{2a}$

④$z \ge \frac{a}{b}, f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy = \int_0^{\frac{a}{z}} y \frac{1}{ab} dy = \frac{a}{2bz^2}$

综上所述，$Z$的概率密度为$f_Z(z) = \begin{cases} 0 \quad , \ z < 0 \\ \frac{b}{2a} \ ,0 \le z < \frac{a}{b} \\ \frac{a}{2bz^2} \quad ,z \ge \frac{a}{b} \end{cases}$

48. $X$和$Y$相互独立,则$Z$的概率密度函数为$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz) f(y) dy$

$y \in [100, +\infty] \cap [\frac{100}{z}, +\infty]$时，$f(yz)f(y) \neq 0$

①$z \le 0$，$f(yz)f(y) = 0$，故$f_Z(z) = 0$

②$0 < z < 1, f_Z(z) = \int_{\frac{100}{z}}^{+\infty} |y| f(yz) f(y) dy = \int_{\frac{100}{z}}^{+\infty} \frac{10000}{y^3 z^2} dy = \frac{1}{2}$

③$z \ge 1, f_Z(z) = \int_{100}^{+\infty} |y| f(yz) f(y) dy = \int_{100}^{+\infty} \frac{10000}{y^3 z^2} dy = \frac{1}{2z^2}$

综上所述，$Z$的概率密度为$f_Z(z) = \begin{cases} 0 \quad , \ z \le 0 \\ \frac{1}{2} \ ,0 < z < 1 \\ \frac{1}{2z^2} \quad ,z \ge 1 \end{cases}$

49. $X$和$Y$同分布，概率密度函数为$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$X$和$Y$独立，则联合概率密度函数为$f(x,y) = f(x)f(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

令$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$，则$R$分布函数

$$F_R(r)=P\{R\le r\}=\mathrm{P}\{X^2+Y^2\le r^2\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)dxdy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\rho,r\ge 0\\ 0,r<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}\right),r\ge 0\\ 0\quad,\quad r<0\end{cases}$$

所以$R$的概率密度为$f_R(r)=F_R'(r)=\begin{cases}\frac{r}{\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}},r\ge 0\\ 0\quad,r<0\end{cases}$

50\. $X$的概率密度函数为$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5},0\le x\le 5\\ 0\ ,\ \text{其他}\end{cases}$

$Y$的概率密度函数为$f_Y(y)=\begin{cases}5e^{-5y},y>0\\ 0,\quad y\le 0\end{cases}$

(1)令$W=X+Y$，由于$X$和$Y$相互独立，故可用卷积公式，$W$的概率密度为

$$f_W(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(w-x)dx$$

①$w\le 0$，此时$f_X(x)f_Y(w-x)=0$，故$f_W(w)=0$

②$0<w<5$，$f_W(w)=\int_0^w\frac{1}{5}\cdot 5e^{-5(w-x)}dx=\frac{1}{5}(1-e^{-5w})$

③$w\ge 5$，$f_W(w)=\int_0^5\frac{1}{5}\cdot 5e^{-5(w-x)}dx=\frac{1}{5}(e^{25-5w}-e^{-5w})$

综上所述，$W$的概率密度为$f_W(w)=\begin{cases}0\quad,\ w\le 0\\ \frac{1}{5}(1-e^{-5w})\quad,0<w<5\\ \frac{1}{5}(e^{25}-1)e^{-5w}\quad,\mathrm{w}\ge 5\end{cases}$

(2)$P\{Z=1\}=P\{Y\ge X\}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^5dx\int_x^{+\infty}\frac{1}{5}\cdot 5e^{-5y}dy=\frac{1}{25}(1-e^{-25})$$

$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}=\frac{1}{25}(24+e^{-25})$，则$Z$的分布律为

| $Z$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{24+e^{-25}}{25}$ | $\frac{1-e^{-25}}{25}$ |

51\. 由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布，其分布函数都为$F(x)=\begin{cases}0\quad,x<0\\ x\ ,0\le x<1\\ 1\quad,x\ge 1\end{cases}$

故$Y_n$的分布函数为$F_{Y_n}(y)=[F(y)]^n=\begin{cases}0\quad,y<0\\ y^n\ ,0\le y<1\\ 1\quad,y\ge 1\end{cases}$

$P\{Y_n \geq 0.99\} \geq 0.95$
$\rightarrow P\{Y_n < 0.99\} \leq 0.05$

$\rightarrow F_{Y_n}(0.99) \leq 0.05$

$\rightarrow 0.99^n \leq 0.05$

$\rightarrow n \geq log_{0.99}(0.05) = 298.07$，故$n \geq 299$且$n \in N^*$

52. 列表（因版面问题未能横着列表）

| $(X,Y)$ | $X+Y$ | $max(X,Y)$ | $min(X,Y)$ | $P$ |
|---|---|---|---|---|
| (0,0) | 0 | 0 | 0 | 0 |
| (0,1) | 1 | 1 | 0 | 0.01 |
| (0,2) | 2 | 2 | 0 | 0.02 |
| (1,0) | 1 | 1 | 0 | 0.05 |
| (1,1) | 2 | 1 | 1 | 0.09 |
| (1,2) | 3 | 2 | 1 | 0.11 |
| (2,0) | 2 | 2 | 0 | 0.08 |
| (2,1) | 3 | 2 | 1 | 0.12 |
| (2,2) | 4 | 2 | 2 | 0.13 |
| (3,0) | 3 | 3 | 0 | 0.12 |
| (3,1) | 4 | 3 | 1 | 0.15 |
| (3,2) | 5 | 3 | 2 | 0.12 |

得:

(1)$Z = X + Y$的分布律为($Z = 0$不能不写)

| $Z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0 | 0.06 | 0.19 | 0.35 | 0.28 | 0.12 |

(2)$U = max(X,Y)$的分布律为($U = 0$不能不写)

| $U$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0 | 0.15 | 0.46 | 0.39 |

(3)$V = min(X,Y)$的分布律为

| $V$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.28 | 0.47 | 0.25 |

53. 边缘概率密度:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{1}{2}, |x| \leq 1 \\ 0\text{，其他} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, |y| \leq 1 \\ 0\text{，其他} \end{cases}$$

$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$，故$X$与$Y$不独立

令$U=X^2, V=Y^2$

$U$的分布函数$F_U(u)=P\{U\le u\}=P\{X^2\le u\}$

$$=\begin{cases}0 & ,u\le 0\\ P\{-\sqrt{u}\le X\le\sqrt{u}\} & ,0<u<1\\ 1 & ,u\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0 & ,u\le 0\\ \sqrt{u} & ,0<u<1\\ 1 & ,u\ge 1\end{cases}$$

$U$的概率密度为$f_U(u)=F_U'(u)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{u}} & ,0<u<1\\ 0 & ,其他\end{cases}$

同理可得，$V$的概率密度为$f_V(v)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{v}} & ,0<v<1\\ 0 & ,其他\end{cases}$

$(U,V)$的联合分布函数$F(u,v)=P\{U\le u,V\le v\}=P\{X^2\le u,Y^2\le v\}$

$$=\begin{cases}P\{-\sqrt{u}\le X\le\sqrt{u},-\sqrt{v}\le Y\le\sqrt{v}\} & ,0<u,v\le 1\\ 1 & ,\quad u,v>1\\ 0 & ,\quad 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}dx\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}}\frac{1+xy}{4}dy & ,0<u,v\le 1\\ 1 & ,\quad u,v>1\\ 0 & ,\quad 其他\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{uv} & ,0<u,v\le 1\\ 1 & ,\quad u,v>1\\ 0 & ,\quad 其他\end{cases}$$

则$(U,V)$的联合概率密度$f(u,v)=\frac{\partial^2 F(u,v)}{\partial u\partial v}=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{uv}} & ,\ 0\le u,v\le 1\\ 0 & ,其他\end{cases}$

由于$f_U(u)\cdot f_V(v)=f(u,v)$，故$U$与$V$独立,即$X^2$与$Y^2$独立

注：本题说明,若随机变量$X$与$Y$不独立，则$f(X)$与$g(Y)$不一定不独立

54. (泊松分布的可加性)

$P\{X=k\}=\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}, k=0,1,2\cdots$，$P\{Y=k\}=\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2}, k=0,1,2\cdots$

则$Z=X+Y$的分布律为

$$P\{Z=n\}=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k,Y=n-k\}=\sum_{k=0}^{n}P\{X=k\}\cdot P\{Y=n-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\lambda_1^k\cdot\lambda_2^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

即$Z \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

55. 各随机变量有相同的概率密度和分布函数，分别设为$f(x)$和$F(x)$

则$P\{X_n > max\{X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}\}\} = P\{X_n > X_1, X_n > X_2, \cdots, X_n > X_{n-1}\}$

$$= P\{X_n > X_1\}P\{X_n > X_2\} \cdots P\{X_n > X_{n-1}\}$$

$$= \sum P\{X_n = x_n\} \cdot P\{x_n > X_1\}P\{x_n > X_2\} \cdots P\{x_n > X_{n-1}\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_n)d(x_n) \cdot \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1)d(x_1) \cdot \int_{-\infty}^{x_n} f(x_2)d(x_2) \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_{n-1})d(x_{n-1})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_n)d(x_n) \cdot F(x_n) \cdot F(x_n) \cdots F(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x_n)]^{n-1} f(x_n)d(x_n)$$

$$= \int_{x_n=-\infty}^{x_n=+\infty} [F(x_n)]^{n-1} d\big(F(x_n)\big) = \frac{1}{n}[F(x_n)]^n\Big|_{x_n=-\infty}^{x_n=+\infty} = \frac{1}{n}(1^n - 0^n) = \frac{1}{n}$$

# 第三章

1. $X$的可能取值为 0,1,2,3 $P\{X=0\}=\frac{C_{12}^5C_3^0}{C_{15}^5}=\frac{24}{91}$，$P\{X=1\}=\frac{C_{12}^4C_3^1}{C_{15}^5}=\frac{45}{91}$，

   $P\{X=2\}=\frac{C_{12}^3C_3^2}{C_{15}^5}=\frac{20}{91}$，$P\{X=3\}=\frac{C_{12}^2C_3^3}{C_{15}^5}=\frac{2}{91}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{24}{91}+1\times\frac{45}{91}+2\times\frac{20}{91}+3\times\frac{2}{91}=1$

2. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-|x|}dx=0$

3. $E(X)=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{+\infty}\sqrt{2}\sigma\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d(\frac{x^2}{2\sigma^2})=\sqrt{2}\sigma\times\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$

4. $E(X)=\int_a^{+\infty}xd(1-\frac{a^3}{x^3})=\int_a^{+\infty}\frac{3a^3}{x^3}dx=\frac{3}{2}a$

5. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\,|_{-\infty}^{+\infty}$，

因反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx\sim\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$不绝对收敛，故柯西分布的$E(X)$不存在

6. $E(X)=E(sinX)=\int_0^{2\pi}\sin x\frac{1}{2\pi-0}dx=0$

7. $(1)E(|X-E(X)|)=E(|X-\mu|)$

$$=-\int_{-\infty}^{\mu}\frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx+\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x-\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)=2\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(1)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

$$(2)E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sqrt{2}\sigma\Gamma(1)=1$$

8. $E(X)=\frac{1}{2}m\int_0^{+\infty}\frac{4x^4}{a^3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}dx=\frac{2m}{a^3\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{a^5}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}d(\frac{x^2}{a^2})$

$$=\frac{2m}{a^3\sqrt{\pi}}\frac{a^5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}ma^2$$

9. 设净利润为$Y$元，$P\{Y=-200\}=P\{X\leq 1\}=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=1-e^{-\frac{1}{4}}$，

   $P\{Y=100\}=1-P\{Y=-200\}=e^{-\frac{1}{4}}$，$E(Y)=300e^{-\frac{1}{4}}-200$

10. (1)由$E(X)=-(a+0.1)+(0.2+c)=0$,

$E(Y)=(a+0.2)+0.4+3(b+c)=2, a+b+c+0.4=1$,

解得$a=0.2, b=0.3, c=0.1$

(2)$Z=(X-Y)^2$ ,$Z$的分布律为 $\begin{array}{cccccc} Z & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ P & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \end{array}$ 故$E(Z)=5$

(3)$Z=X^2Y$, Z 的分布律为 $\begin{array}{ccccc} Z & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{array}$ 故$E(Z)=1$

11. $E(X)=\int_0^1 dy\int_0^2 \frac{1}{3}(x+y)xdx=\frac{11}{9}$,

$E(Y)=\int_0^1 dy\int_0^2 \frac{1}{3}(x+y)ydx=\frac{5}{9}, E(XY)=\int_0^1 dy\int_0^2 \frac{1}{3}xy(x+y)dx=\frac{2}{3}$,

$$E(X^2+Y^2)=\int_0^1 dy\int_0^2 \frac{1}{3}(x^2+y^2)(x+y)dx=\frac{13}{6}$$

12. $(X,Y)$服从 $0\le x\le a, 0\le y\le a$上的均匀分布,

$$E(|X-Y|)=\int_0^a dx\int_0^x \frac{1}{a^2}(x-y)dy+\int_0^a dx\int_x^a \frac{1}{a^2}(y-x)dy=\frac{a}{3}$$

13. $(X,Y)$服从$x^2+y^2\le R^2$上的均匀分布,$R=\sqrt{X^2+Y^2}$,

$$E(R)=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \frac{\rho}{\pi R^2}\rho d\rho=\frac{2}{3}R$$

14. 设随机变量$X_i=\begin{cases} 0, \text{不配对} \\ 1, \text{配对} \end{cases}$ ,$X=\sum_{i=1}^n X_i$ ,$E(X_i)=\frac{1}{n}, E(X)=E(\sum_{i=1}^n X_i)=1$

15. (1)$X\sim U(0,2), Y\sim exp(2)$ ,$E(X+\mathrm{Y})=E(X)+E(Y)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

$$E(X^2-2Y+1)=E(X^2)-2E(Y)+1=\frac{1}{12}(12-0)^2+1-2\times\frac{1}{2}+1=\frac{4}{3}$$

(2)由$X$与$Y$相互独立,$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{2}$

16. $P\left(X>\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$, $Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$ ,$E(Y^2)=D(Y)+E^2(Y)=5$

17. (1)$X,Y$的联合分布律为 $\begin{array}{ccc} Y\backslash X & -1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}$

(2)$E(X)=\frac{1}{2}, E(Y)=-\frac{1}{2}, E(X^2)=1, E(Y^2)=1, D(X)=\frac{3}{4}, D(Y)=\frac{3}{4}$,

$E(XY)=0, Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4},$

故$D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)=2$

18. $(1)D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{572}{1001}$

$$(2)D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-|x|}dx-0=2$$

$$(3)E(X^2)=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^3}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=2\sigma^2, D(X)=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$$

$$(4)E(X^2)=\int_{a}^{+\infty}\frac{3a^3}{x^2}dx=3a^2, D(X)=\frac{3}{4}a^2$$

19. $E(Y^2)=\int_0^{2\pi}sin^2x\frac{1}{2\pi}dx=\frac{1}{2}, D(Y)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

20. $f_X(x)=\begin{cases}2x, 0\le x\le 1\\ 0, other\end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, |y|\le 1\\ 0, other\end{cases},$

$$E(X^2)=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}, E(X)=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 y^2(1-y)dy+\int_{-1}^0 y^2(1+y)dy=\frac{1}{6},$$

$$E(Y)=\int_{-1}^1 y(1-|y|)dy=0, D(X)=\frac{1}{18}, D(Y)=\frac{1}{6}$$

21. $E(X-Y)^2=D(X-Y)+E^2(X-Y)=DX+DY=2\sigma^2$

22.

| $XY$ | $0$ | $1$ | $2$ | $-1$ | $-2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $0.6$ | $0.2$ | $0$ | $0.2$ | $0$ |

$E(XY)=0, E(X)=0.4, E(Y)=0,$

$Cov(X,Y)=0, \rho_{XY}=0$

23. $E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^1 xy(2-x-y)dy=\frac{1}{6},$

$$E(X)=\int_0^1 dx\int_0^1 x(2-x-y)dy=\frac{5}{12},$$

$$E(Y)=\int_0^1 dx\int_0^1 y(2-x-y)dy=\frac{5}{12},$$

$$E(X^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 x^2(2-x-y)dy=\frac{1}{4},$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^1 y^2(2-x-y)dy=\frac{1}{4},$$

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{12}\right)^2=-\frac{1}{144},D(X)=D(Y)=\frac{11}{144},$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\frac{1}{11},$$

$$D(2X-Y+1)=4D(X)+D(Y)-4Cov(X,Y)=\frac{59}{144}$$

24. $E(XY)=\int_0^2 dy\int_0^2 xy\frac{1}{8}(x+y)dx=\frac{4}{3},E(X)=E(Y)=\frac{7}{6},$

$$E^2(X)=E^2(Y)=\frac{5}{3},D(X)=D(Y)=\frac{11}{36},$$

$$Cov(X,Y)=-\frac{1}{36},\rho_{XY}=-\frac{1}{11},D(X+Y)=\frac{5}{9}$$

25. $D(X)$与$D(Y)$均存在且大于零，$Cov(\mathrm{X},\mathrm{Y})=0\Leftrightarrow E(XY)=E(X)\cdot E(Y),$

$$\rho_{XY}=0\Leftrightarrow X与Y\text{ 不相关}\Leftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

26. $Cov(X_1-X_2,X_1X_2)=E\left({X_1}^2X_2\right)-E\left({X_2}^2X_1\right),$

因$X_1$与$X_2$相互独立，方差存在，故${X_1}^2$与$X_2$, ${X_2}^2$与$X_1$也相互独立

$\therefore Cov(X_1-X_2,X_1X_2)=E\left({X_1}^2\right)E(X_2)-E\left({X_2}^2\right)E(X_1)=0$ $\therefore Y_1$与$Y_2$不相关

27. (1)$E(W)=E(X)+E(Y)+E(Z)=1$

(2)$D(W)=D(X+Y)+D(Z)+2Cov(X+Y,Z)$

$=D(X+Y)+D(Z)+2\big(Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)\big),$

$\because \rho_{XY}=0\ \therefore D(X+Y)=DX+DY=2,\because \rho_{XZ}=\dfrac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=\dfrac{1}{2},$

$\rho_{YZ}=\dfrac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}=-\dfrac{1}{2},\therefore D(Z)=1,Cov(X,Z)=\dfrac{1}{2},Cov(Y,Z)=-\dfrac{1}{2},$

$\therefore D(W)=3$

28. $XY$的分布律为$\begin{matrix} XY & 0 & 1 & -1 \\ P & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$ $E(XY)=0,EX=EY=0,$

$\therefore Cov(X,Y)=0,X$与$Y$不相关

$\because P\{X=-1,Y=-1\}=0\neq P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}=\dfrac{1}{16}$ $\therefore X$与$Y$不独立

29. $\because D(X)=1, Cov(X,Y)=-1, \rho_{XY}=-\frac{1}{2}\ \therefore D(Y)=4$

$\therefore D(X-Y)=1+4-2\times(-1)=7$

30. 若$\rho_{XY}=0$,则$X$与$Y$不相关$\therefore E(XY)=P(AB)=E(X)\cdot E(Y)=P(A)P(B)$,

即事件$A$与$B$相互独立，又由于下列事件中只要有一对相互独立，其他三对也相互独立

$$(A,B),(\overline{A},B),(A,\overline{B}),(\overline{A},\overline{B})$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=P\{X=0\}P\{Y=0\},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})P(B)=P\{X=0\}P\{Y=1\},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P\{X=1\}P\{Y=0\},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P(A\cap B)=P(A)P(B)=P\{X=1\}P\{Y=1\}$$

$\therefore$ 随机变量$X$与$Y$相互独立

31. (1) $\because Cov(XY,X)=E(X^2)\cdot E(Y)-E^2(X)\cdot E(Y)=({\sigma_1}^2+{\mu_1}^2)\mu_2-{\mu_1}^2\mu_2=\mu_2{\sigma_1}^2, D(XY)=E(X^2)E(Y^2)-(EX)^2(EY)^2={\mu_1}^2{\sigma_2}^2+{\mu_2}^2{\sigma_1}^2+{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2$

$$\therefore \rho_{ZX}=\frac{\mu_2{\sigma_1}^2}{\sqrt{{\mu_1}^2{\sigma_2}^2+{\mu_2}^2{\sigma_1}^2+{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\sigma_1}=\frac{\mu_2\sigma_1}{\sqrt{{\mu_1}^2{\sigma_2}^2+{\mu_2}^2{\sigma_1}^2+{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}}$$

(2)由(1)同理可得,当$\rho_{ZY}=0$ 即$\mu_1=0$时,

$Z$与$Y$不相关，但由于相关系数只是反映线性关系的一个量，故不能有严格的线性关系.

## 第四章

1. $P\{|x-\mu|<\varepsilon\sigma\}\geq 1-\frac{D(x)}{(\varepsilon\sigma)^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$ 故概率下界为$\frac{8}{9}$

2. $P\{E(X)-\varepsilon<X<E(X)+\varepsilon\}=P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\left(\frac{0.3}{\varepsilon}\right)^2$

   令$1-\left(\frac{0.3}{\varepsilon}\right)^2\geq 0.9\Rightarrow\varepsilon\geq 0.9487\Rightarrow\varepsilon_{min}=0.9487$

3. 设正面出现的次数为$X,X\sim B(1000,0.5)$ ,$E(X)=500,D(X)=250$

   $$\mathrm{P}\{400<\mathrm{X}<600\}=\mathrm{P}\{|\mathrm{X}-500|<100\}\geq 1-\frac{250}{100^2}=0.975$$

4. 设一天的生产量为$X,E(X)=500,D(X)=9^2$

   $P\{455<X<545\}=P\{|X-500|<45\}\geq 1-(9/45)$^2 = 24/25

5. $E(X_i)=-2^n\cdot 2^{-(2n+1)}+2^n\cdot 2^{-(2n+1)}=0$

   由切比雪夫大数定律得，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k-1}^{n}X_k-0\right|<\varepsilon\right\}=1$

6. 由独立同分布的大数定律，$E(X_i)=\frac{1+5}{2}=3\quad\therefore Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}3$

7. $X_i\sim exp(2)\ (i=1,2,\cdots,n),E(X_i)=0.5,D(X_i)=0.25,E(X_i^2)=0.25+0.5^2=0.5$

   由独立同分布的大数定律，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E(X_i^2)=0.5$

8. 设$X_i$为第$i$只部件的使用寿命$(i=1,2,\cdots,30)\ E(X_i)=10,D(X_i)=100$

   $$P\left\{\sum_{i=1}^{30}X_i>350\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{30}X_i-30\times 10}{\sqrt{30}\times 10}>\frac{350-300}{\sqrt{30}\times 10}\right\}\approx 1-\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$
   $$\approx 1-0.8186=0.1814$$

9. 设$X_i=\begin{cases}0,\text{第}i\text{道题答错}\\1,\text{第}i\text{道题答对}\end{cases}$，$(i=1,2,\cdots,100)\ X_i\sim\left(1,\frac{1}{4}\right),E(X_i)=\frac{1}{4},D(X_i)=\frac{3}{16}$

   $$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i>40\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100\times\frac{1}{4}}{\sqrt{100}\times\sqrt{\frac{3}{16}}}>\frac{40-25}{\sqrt{\frac{100\times 3}{16}}}\right\}\approx 1-\Phi\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)\approx 1-1$$
   $$=0$$

10. 设$X_i$为第$i$袋大米的重量$(i=1,2,\cdots,100)\ E(X_i)=10,D(X_i)=0.1$

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{100} X_i - 1000\right| < 10\right\}$$

$$= P\left\{-\frac{10}{\sqrt{100\times 0.1}} < \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 1000}{\sqrt{100\times 0.1}} < \frac{10}{\sqrt{100\times 0.1}}\right\}$$

$$\approx \Phi(\sqrt{10}) - \Phi(-\sqrt{10}) \approx 0.9986$$

11. 设终端使用的次数为$X, X\sim B(100,0.02)$

则由二项分布可得：$P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.98^{100} \approx 0.8674$

而由中心极限定理得：$P(X\geq 1) = P\left\{\frac{X-100\times 0.02}{\sqrt{100\times 0.02\times 0.98}} \geq \frac{1-100\times 0.02}{\sqrt{100\times 0.02\times 0.98}}\right\} \approx 1 - \Phi(-0.71)$

$$= \Phi(0.71) = 0.7611$$

12. 设投掷次数为$n$，$X_i = \begin{cases} 0, 出现反面 \\ 1, 出现正面 \end{cases}$ $(i = 1,2,\cdots,100), E(X_i) = 0.5, D(X_i) = 0.25$

由切比雪夫不等式有：

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.5\right| < 0.1\right\} = P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.5n\right| < 0.1\text{n}\right\} \geq 1 - \frac{\frac{1}{4}\cdot n}{(0.1n)^2}$$

$$= 1 - \frac{25}{n}$$

令$1 - \frac{25}{n} \geq 0.9 \ \Rightarrow n \geq 250$

由中心极限定理有：

$$P\left\{0.4 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 0.6\right\} = P\left\{\frac{0.4-0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}}} \leq \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}}} < \frac{0.6-0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}}}\right\}$$

$$\approx \Phi(0.2\sqrt{n}) - \Phi(-0.2\sqrt{n}) = 2\Phi(0.2\sqrt{n}) - 1 \geq 0.9$$

查表可得$0.2\sqrt{n} \geq 1.65 \Rightarrow n \geq 68$

13. 设需要$n$个车位，且第$i$户有车辆数为$X_i(i = 1,2,\cdots,2000)$ $E(X_i) = 0.8$ $D(X_i) = 0.36$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{2000} X_i \le n\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{2000} X_i - 2000\times 0.8}{\sqrt{2000\times 0.36}} < \frac{n-1600}{\sqrt{2000\times 0.36}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{n-1600}{12\sqrt{5}}\right)$$

$$\ge 0.95$$

查表后可得$\frac{n-1600}{12\sqrt{5}} \ge 1.65 \Rightarrow n \ge 1644$ (此解法参考了浙大概率论第四版习题,仍与答案不符,欢迎读者批评指正)

14. (1)设售出第$i$只蛋糕的价格为$X_i(i=1,2,\cdots,300), E(X_i)=4.2, D(X_i)=0.31$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{300} X_i \ge 1200\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{300} X_i - 300\times 4.2}{\sqrt{300\times 0.31}} \ge \frac{1200-300\times 4.2}{\sqrt{300\times 0.31}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(-6.22)\approx 1$$

(2)设$Y_i=\begin{cases}0, 出售价格不为 4 元\\ 1, 出售价格恰为 4 元\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,300), E(Y_i)=0.5, D(Y_i)=0.25$

$$P\left\{\sum_{i=1}^{300} Y_i > 100\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{300} Y_i - 300\times 0.5}{\sqrt{300\times 0.25}} > \frac{100-300\times 0.5}{\sqrt{300\times 0.25}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(-5.77)\approx 1$$

15. 设灯的使用盏数为$X, X\sim B(1000,0.7)$

$$P\{7800\le X\le 8200\} = P\left\{\frac{7800-7000}{\sqrt{2100}} \le \frac{X-7000}{\sqrt{2100}} < \frac{8200-7000}{\sqrt{2100}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{1200}{\sqrt{2100}}\right)-\Phi\left(\frac{800}{\sqrt{2100}}\right)\approx \Phi(26.19)-\Phi(17.64)=0$$

16. 设$X_i=\begin{cases}0, 第i件产品为劣质产品\\ 1, 第i件产品为优质产品\end{cases}$, $(i=1,2,\cdots,6000)\ X_i\sim\left(1,\frac{1}{6}\right)$,

$$E(X_i)=\frac{1}{6}, D(X_i)=\frac{5}{36}$$

$$P\left\{\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{100} X_i-\frac{1}{6}\right|<0.01\right\} = P\left\{\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \le \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} < \frac{0.01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right\}$$

$$\approx 2\Phi\left(\frac{0.01}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right)-1 = 2\times 0.9808-1=0.9616$$

17. 设 正 品 数 为 $\eta_n, \eta_n\sim B(10000,0.8), X_i=\begin{cases}0, 第i只显像管为次品\\ 1, 第i只显像管为正品\end{cases}$, $(i=1,2,\cdots,n)$

设每月生产$n$只, $Y_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P\{Y_n < 10000\} < 0.003 \Rightarrow P\left\{\frac{Y_n - n\cdot 0.8}{\sqrt{n\cdot 0.8\cdot 0.2}} < \frac{10000 - n\cdot 0.8}{\sqrt{n\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{10000-0.8n}{\sqrt{0.16n}}\right) < 0.003$$

查表得$\frac{10000-0.8n}{\sqrt{0.16n}} \leq -2.75 \Rightarrow n \geq 12654.68$

故最少生产 12655 只显像管

18. 设$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i{}^2$

$\because X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，故$X_1{}^2, X_2{}^2, \cdots, X_n{}^2$也独立同分布，且$E\left(X_i{}^2\right)$与$D\left(X_i{}^2\right)$均存在。

由中心极限定理，$n$充分大时，$Z_n$近似服从于正态分布

$E\left(X_i{}^2\right) = \alpha_2, D\left(X_i{}^2\right) = E\left(X_i{}^4\right) - \left(E\left(X_i{}^2\right)\right)^2 \quad \therefore Z_n \sim N(\alpha_2, \frac{\alpha_4 - \alpha_2{}^2}{n})$

19. $E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}e^{-x}}{n!}dx = \frac{\Gamma(n+2)}{n!} = n+1$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \int_0^{+\infty} \frac{X^{n+1}e^{-X}}{n!}dx - (n+1)^2$$

$$= \frac{\Gamma(n+3)}{n!} - (n+1)^2 = n+1$$

由切比雪夫不等式得：

$$P\{0 < x < 2(n+1)\} = P\{|X-(n+1)| < n+1\} \geq 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$$

# 第五章

3. $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\left(\frac{1}{b-a}\right)^n & a\le x_1\le\cdots\le x_n\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

4. $P\{X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}\cdot e^{-\lambda}}{(x_i)!}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{-n\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i)!}$

5. $F_3(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{3} & -1\le x<0\\ \frac{2}{3} & 0\le x<6\\ 1 & x\ge 6\end{cases}$

7. $E(\bar{X})=E(X_i)=0$

$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot D(X_i)=\frac{1}{3n}$

8. 根据题意可得：$\overline{X_1}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$　　$\overline{X_2}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

又因为上述两者相互独立，有：$\overline{X_1}-\overline{X_2}\sim N(0,\frac{2\sigma^2}{n})$

因此有：$P\{|\overline{X_1}-\overline{X_2}-0|>\sigma\}=1-P\{|\overline{X_1}-\overline{X_2}|\le\sigma\}=2\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\sigma}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]\le 0.01$

于是：$\sqrt{\frac{n}{2}}\ge 2.58$，$n$取14

9. (1)$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+cY_i)=a+\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=a+c\bar{Y}$

$$S_Y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-n\bar{Y}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-a}{c}\right)^2-n\left(\frac{\bar{X}-a}{c}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right]=\frac{1}{c^2}S_X^2$$

(2) $E(\bar{Y})=\frac{1}{c}[E(\bar{X})-a]=\frac{1}{c}(\mu-a)$

$E(S_Y^2)=\frac{1}{c^2}E(S_X^2)=\frac{\sigma^2}{c^2}$

10. (1) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n}+\overline{X_n}-a)^2$
$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2+2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})(\overline{X_n}-a)+n(\overline{X_n}-a)^2$
$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2+n(\overline{X_n}-a)^2$

其中：$2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})(\overline{X_n}-a)=\sum_{i=1}^{n}(X_i\overline{X_n}-aX_i-\overline{X_n}^2+a\overline{X_n})$

$$=n\overline{X_n}^2-a\cdot n\overline{X_n}-n\overline{X_n}^2+a\cdot n\overline{X_n}=0$$

$$(2)\ \overline{X_{n+1}}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}X_i=\frac{1}{n+1}\left(X_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}(X_{n+1}+n\overline{X_n}+\overline{X_n}-\overline{X_n})$$

$$=\overline{X_n}+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X_n})$$

$$S_{n+1}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}(X_i-\overline{X_{n+1}})^2=\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n+1}X_i^2-(n+1)\overline{X_{n+1}}^2]$$

$$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X_n}^2]$$

因此：$S_{n+1}^2-\frac{n-1}{n}S_n^2=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n+1}X_i^2-(n+1)\overline{X_{n+1}}^2\right]-\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X_n}^2]$

$$=\frac{X_{n+1}^2}{n}-\frac{n+1}{n}\overline{X_{n+1}}^2+\overline{X_n}^2=\frac{X_{n+1}^2}{n}-\frac{n+1}{n}\left[\overline{X_n}+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X_n})\right]^2+\overline{X_n}^2$$

$=\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X_n})^2$　(此题读者若有更好证法，欢迎联系编者)

11. 由于$X\sim P(\lambda)$，且$X_1,X_2,\dots,X_n$相互独立，故有$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(n\lambda)$（泊松分布的可加性）

所以$P(\sum_{i=1}^{n}X_i=k)=P\left(\bar{X}=\frac{k}{n}\right)=\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}(k=0,1,\dots)$

12. $X_\tau\sim\Gamma(\alpha,\beta)$（$i=1,2,\dots$）由$Gamma$分布第一参数可加性：$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\Gamma(n\alpha,\beta)$

下面以此来求$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\,(X>0)$的分布规律：(此题超纲,仅供读者参考)

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\le x\right)=P(\sum_{i=1}^{n}X_i\le nx)=\int_0^{nx}\frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}t^{n\alpha-1}\cdot e^{-\beta t}dt$$

对上式求导得到概率密度函数：

$$f_{\bar{X}}(x)=\begin{cases}n\dfrac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}(nx)^{n\alpha-1}\cdot e^{-n\beta x}=\dfrac{(n\beta)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)}x^{n\alpha-1}\cdot e^{-n\beta x} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}\sim\Gamma(n\alpha,n\beta)$$

13. 由于$X_1-2X_2\sim N(0,20)$，故$\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}\sim\chi^2(1)$

同时$3X_3-4X_4\sim N(0,100)$，故$\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}\sim\chi^2(1)$

所以$Y=\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}\sim\chi^2(2)$，于是$a=\frac{1}{20}$，$b=\frac{1}{100}$

14. (1)$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2}\le 2.041\right\}=P\left\{\frac{(16-1)S^2}{\sigma^2}\le 15\times 2.041\right\}$ 又因为$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

因此$P\{\chi^2(15)\le 15\times 2.041\}=0.99$

$$(2)D(S^2)=(\frac{\sigma^2}{n-1})^2\cdot D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=\frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2\sigma^4}{15}$$

15. $Y=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{20}(x_i-\mu)^2\sim\chi^2(20)$

16. $\sum_{i=1}^{m}X_i\sim N(0,m)$，$\sum_{i=m+1}^{n}X_i\sim N(0,n-m)$

故有：$\frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m}X_i)^2\sim\chi^2(1)$，$\frac{1}{n-m}(\sum_{i=m+1}^{n}X_i)^2\sim\chi^2(1)$

因此：$Y\sim\chi^2(2)$

17. $X\sim exp(\frac{1}{2})$　故：$X\sim\chi^2(2)$　$Y=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\chi^2(2n)$（根据$\chi^2$分布的可加性）

18. $T=-2\sum_{i=1}^{n}lnF(X_i)$　　$Y_i=-2lnF(X_i)$

下证：$Y_i\sim\chi^2(2)$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$

当$y>0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{-2lnF(x)\le y\}=P\left\{F(x)\ge e^{-\frac{1}{2}y}\right\}$

$$=P\left\{x\ge F^{-1}\left(e^{-\frac{1}{2}y}\right)\right\}=1-P\left\{x\le F^{-1}\left(e^{-\frac{1}{2}y}\right)\right\}$$

$$=1-F\left(F^{-1}\left(e^{-\frac{1}{2}y}\right)\right)=1-e^{-\frac{1}{2}y}$$

也即：$Y\sim exp(\frac{1}{2})$，$Y_i\sim\chi^2(2)$ 因此$T\sim\chi^2(2n)$（由于$T=\sum_{i=1}^{n}Y_i$且$Y_i$相互独立）

19. $U=X_{n+1}-\overline{X_n}\sim N\left(0,\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$V=\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X_n})^2=\chi^2(n-1)$

因此：$\frac{U/\sqrt{\frac{n+1}{n}}\sigma}{\sqrt{V/(n-1)}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X_n}}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}S_n}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{X_{n+1}-\overline{X_n}}{S_n}\sim t(n-1)$ 即$c=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$

20. $Y_1=\frac{\sqrt{m}\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=n+1}^{n+m}(\frac{X_i}{\sigma})^2}}\sim t(m)$

(2) $Y_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2/n}{\sum_{i=n+1}^{n+m}X_i^2/m}\sim F(n,m)$

21. $P\{X>1\}=P\left\{\frac{1}{X}<1\right\}$　由于$X\sim F(n,n)$，故：$\frac{1}{X}\sim F(n,n)$

于是有：$P\{X>1\}=\frac{1}{2}\{P(X>1)+P(X\le 1)\}$ 且$P\{X=1\}=0$

因此$P\{X>1\}=0.5$

22. 由于$X_1+X_2 \sim N(0,2\sigma^2)$ $X_1-X_2 \sim N(0,2\sigma^2)$

故有：$\frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ $\frac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2} \sim \chi^2(1)$

因此：$Y=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}=\frac{\frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}}{\frac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}} \sim F(1,1)$

23. $Y=\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i^2}{2\sum_{i=11}^{15} X_i^2}=\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2}{2\sum_{i=11}^{15}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/10}{2\sum_{i=11}^{15}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/10}=\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/10}{\sum_{i=11}^{15}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2/5} \sim F(10,5)$

24. 由于$X \sim t(n)$ 令$X=\frac{U}{\sqrt{V/n}}$ 故：$X^2=\frac{U^2/1}{V/n}$ 又因为：$U^2 \sim \chi^2(1)$ $V \sim \chi^2(n)$

因此：$X^2 \sim F(1,n)$

25. $F=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{X_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2/n_2} \sim F(n_1,n_2)$

26. $Y=2\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i$ 令$T_i=2\lambda\cdot X_i$

下证：$T_i \sim \chi^2(2)$ $(i=1,\dots,n)$

$f_T(t)=\begin{cases}\left|\frac{1}{2\lambda}\right|\lambda\cdot e^{-\frac{\lambda t}{2\lambda}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} & t\geq 0\\ 0 & 其它\end{cases}$ 因此：$T_i \sim exp(\frac{1}{2})$，也即$T_i \sim \chi^2(2)$

又因为$Y=\sum_{i=1}^{n} T_i$且$T_i$相互独立，所以：$Y \sim \chi^2(2n)$

# 第六章

1. (1) $\alpha_1 = E(X) = \frac{1}{\lambda} = \bar{A} = \bar{X}$. 矩估计量$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$, 矩估计值$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}$, $X_i > 0$. $\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$.

令$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$. 极大的矩估计值$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$, 矩估计量$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

(2)$\alpha_1 = E(X) = mp = \bar{X}$. 矩估计量$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$, 矩估计值$\hat{p} = \frac{\bar{x}}{m}$.

$L(p) = \prod_{k=1}^{n} C_m^{X_k} (1-p)^{m-X_k} p^{X_k} = \prod_{k=1}^{n} C_m^{X_k} (1-p)^{m\cdot n - \sum_{k=1}^{n} X_k} \cdot p^{\sum_{k=1}^{n} X_k}$

$\ln L(p) = \ln c + (mn - \sum_{k=1}^{n} X_k) \cdot \ln(1-p) + \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \ln p$

令$\frac{d \ln L(p)}{dp} = -\frac{mn - \sum_{k=1}^{n} X_k}{1-p} + \sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{\bar{X}}{m}$

$$(3)\begin{cases} \alpha_1 = E(X) = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \bar{X} \\ \alpha_2 = E(X^2) = (\dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2})^2 + \dfrac{1}{12}(\theta_2 - \theta_1)^2 = \dfrac{1}{12} \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{cases}$$

解得$\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \sqrt{3B_2} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3(n-1)}{n}} S$

$\hat{\theta}_2 = \bar{X} + \sqrt{3B_2} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3(n-1)}{n}} S$.

$$L(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, \theta_1 \leq X_1, \dots, X_n \leq \theta_2 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

当$\theta_1 = X_{(1)}$, $\theta_2 = X_{(n)}$时, $L(\theta_1, \theta_2)$有最大值, $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$, $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$.

(4)$\alpha_1 = E(X) = \int_0^1 \sqrt{\theta} X^{\sqrt{\theta}-1+1} dX = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} = \bar{X}$. 即$\hat{\theta} = (\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}})^2$.

$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i) = \theta^{\frac{n}{2}} \cdot (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\sqrt{\theta}-1}$. $\ln L(\theta) = \frac{n}{2} \ln \theta + (\sqrt{\theta} - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$

令$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = 0$. 得$\hat{\theta} = \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^{n} \ln X_i)^2}$

(5) $\alpha_1 = E(X) = \int_c^{+\infty} \theta \cdot c^{\theta} \cdot X^{-\theta} \, dX = \frac{c\theta}{\theta - 1} = \bar{X}$. 即$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - c}$.

$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta \cdot c^{\theta} \cdot {X_i}^{-(\theta+1)} = \theta^n \cdot c^{n\theta} \cdot (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{-(\theta+1)}$

$\ln L(\theta) = n \ln \theta + n\theta \ln c - (\theta + 1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$.

令$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + n \ln c - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = 0$

得$\theta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-n\ln c}$ $\therefore\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-n\ln c}$

2. $\alpha_1=E(X)=\int_0^1(\beta+1)X^{\beta+1}\,dX=\frac{\beta+1}{\beta+2}=\bar{X}$. 即$\hat{\beta}=\frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$

$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}(\beta+1){X_i}^{\beta}=(\beta+1)^n(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\beta}$

$$\ln L(\beta)=n\ln L(\beta+1)+\beta\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

令$\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$，得$\hat{\beta}=-(1+\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i})$

3. (1)$\alpha_1=E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta=\bar{X}$

$\hat{\theta}=\frac{3-\bar{X}}{2}$ 当观测值为(1,2,1)时，$\hat{\theta}=\frac{5}{6}$

(2)$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(X=X_i)=(\theta^2)^2\cdot2\theta\cdot(1-\theta)=2\theta^5\cdot(1-\theta)=2\theta^5-2\theta^6$

令$\frac{d\,L(\theta)}{d\theta}=0$，得$\hat{\theta}=\frac{5}{6}$.

4. (1) $\begin{cases}\alpha_1=E(X)=\int_{\theta_1}^{+\infty}\frac{X}{\theta_2}\cdot e^{-\frac{X-\theta_1}{\theta_2}}\,dX=\theta_1+\theta_2=\bar{X}\\ \alpha_2=E(X^2)=\int_{\theta_1}^{+\infty}\frac{X^2}{\theta_2}\cdot e^{-\frac{X-\theta_1}{\theta_2}}\,dX={\theta_1}^2+2\theta_1\theta_2+2{\theta_2}^2=A_2\end{cases}$

解得$\hat{\theta}_1=\bar{X}-\sqrt{B_2}$，$\hat{\theta}_2=\sqrt{B_2}$

(2)$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_2}\cdot e^{-\frac{X_i-\theta_1}{\theta_2}}=\frac{1}{{\theta_2}^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-n\theta_1}{\theta_2}}=e^{-\frac{n\theta_1}{\theta_2}}\cdot\frac{1}{{\theta_2}^n}\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\theta_2}}(X_i>\theta_1)$

$\ln L(\theta_1,\theta_2)=-n\ln\theta_2+\frac{n\theta_1}{\theta_2}-\frac{1}{\theta_2}\cdot\sum_{i=1}^{n}X_i$

令$\frac{\partial\ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}=\frac{n}{\theta_2}=0$，$\frac{\partial\ln L(\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}=-\frac{n}{\theta_2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\theta_1}{{\theta_2}^2}=0\Rightarrow\theta_1+\theta_2=\bar{X}$.

只能通过定义求

当$\theta_1=X_{(1)}$时，$\theta_2=\bar{X}-X_{(1)}$，$L(\theta_1,\theta_2)$有最大值. 故$\hat{\theta}_1=X_{(1)}$，$\hat{\theta}_2=\bar{X}-X_{(1)}$

5. $X\sim P(\lambda)$ $P\{X=0\}=\frac{\lambda^0e^{-\lambda}}{0!}=e^{-\lambda}$，由例 6.1.10, $\lambda$的极大的矩估计量为$\bar{X}$,

又由性质 6.1.1，$e^{-\hat{\lambda}}$也是极大的矩估计. $\therefore\hat{P}\{X=0\}=e^{-\hat{\lambda}}=e^{-\hat{X}}$

6. $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta\,{X_i}^{\theta-1}=\theta^n\cdot(\prod_{i=1}^{n}X_i)^{\theta-1}$，$0<X_1,\dots,X_n<1$

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}X_i$ 令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i=0$

得$\hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$. 由性质 6.1.1，$\hat{T}=e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}{n}}$.

7. $(1)E(c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2)$

$=c\cdot D(\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i))+c\cdot E^2(\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i))$

$=c\cdot(n-1)\cdot 2\sigma^2+0=\sigma^2\Rightarrow c=\frac{1}{2(n-1)}$

$(2)E(\bar{X}^2-cS^2)=D(\bar{X})+E^2(\bar{X})-c\cdot E(S^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-c\cdot\sigma^2=\mu^2$

$\Rightarrow c=\frac{1}{n}$

8. $(1)E(T_1)=\frac{1}{6}\cdot 2\theta+\frac{1}{3}\cdot 2\theta=\theta$. $E(T_2)=\frac{1}{5}\cdot(\theta+2\theta+3\theta+4\theta)=2\theta\neq\theta$

$E(T_3)=\frac{1}{4}\cdot 4\theta=\theta$ $\therefore T_1,T_3$为$\theta$的无偏估计量

$(2)D(T_1)=\frac{1}{36}\cdot 2\theta^2+\frac{1}{9}\cdot 2\theta^2=\frac{5}{18}\theta^2$, $D(T_3)=\frac{1}{16}\cdot 4\theta^2=\frac{1}{4}\theta^2$

$D(T_1)>D(T_3)$ $\therefore T_3$较为有效

9. $(1)\because E(\bar{X})=p$, $D(\bar{X})=\frac{p(1-p)}{n}$ $\therefore E(\bar{X}^2)=p^2+\frac{p(1-p)}{n}=\frac{n-1}{n}p^2+\frac{p}{n}$

$\therefore E(\frac{n}{n-1}\bar{X}^2-\frac{\bar{X}}{n-1})=\frac{n}{n-1}\cdot E(\bar{X}^2)-\frac{1}{n-1}\cdot E(\bar{X})=p^2$(配凑)

即$\hat{p}^2=\frac{n}{n-1}(\bar{X}^2-\frac{1}{n}\bar{X})$

(2)由(1)知，$E\left(\bar{X}-\left(\frac{n}{n-1}\bar{X}^2-\frac{\bar{X}}{n-1}\right)\right)=E(\bar{X})-E\left(\frac{n}{n-1}\bar{X}^2-\frac{\bar{X}}{n-1}\right)=p(1-p)$

即$p\widehat{(1-p)}=\bar{X}-(\frac{n}{n-1}\bar{X}^2-\frac{\bar{X}}{n-1})=\frac{n}{n-1}\bar{X}(1-\bar{X})$

10. $\because E(\bar{X})=\lambda$, $D(\bar{X})=\frac{\lambda}{n}$, $E(S^2)=\lambda$

$\therefore$对于任意的常数$k$，$E(k\bar{X}+(1-k)S^2)=k\cdot\lambda+(1-k)\cdot\lambda=\lambda$

即$k\bar{X}+(1-k)S^2$是$\lambda$的无偏估计量

11. $\because E(\hat{\theta}^2)=D(\hat{\theta})+E^2(\hat{\theta})=D(\hat{\theta})+\theta^2>\theta^2$ $\therefore\hat{\theta}^2$不是$\theta^2$的无偏估计量

12. $\because E(\hat{\theta}_1)=E(2\bar{X})=2\cdot\frac{\theta}{2}=\theta$ $\therefore 2\bar{X}$是$\theta$的无偏估计量

$D(2\bar{X})=4\cdot\frac{\frac{1}{12}\theta^2}{n}=\frac{\theta^2}{3n}$

$X_{(n)}$即$max\{X_1,\dots,X_n\}$的分布函数$F(x)=\begin{cases}(\frac{x}{\theta})^n, 0<x<\theta\\ 0, \quad 其他\end{cases}$

$$\therefore f(x) = F'(x) = \begin{cases} n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}, 0 < x < \theta \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$$

$$\therefore E(X_{(n)}) = \int_0^\theta n \cdot \frac{x^n}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1}\theta \quad \therefore E(\frac{n}{n+1}X_{(n)}) = \theta$$

$\therefore \frac{n+1}{n}X_{(n)}$是$\theta$的无偏估计量

$$D(\frac{n+1}{n}X_{(n)}) = (\frac{n+1}{n})^2 \cdot (\int_0^\theta n \cdot \frac{x^{n+1}}{\theta^n}\, dx - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \theta^2) = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2 < D(2\bar{X}) \ (n \geq 2)$$

$\therefore n \geq 2$时，$\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$更有效

13. ①$2\bar{X}$：$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|2\bar{X}-\theta| < \varepsilon\} = \lim\limits_{n\to\infty} P\{\left|\bar{X}-\frac{\theta}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\} \geq \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{\frac{\theta^2}{12}\cdot\frac{1}{n}}{(\frac{\varepsilon}{2})^2}) = 1$

又$P(\left|\bar{X}-\frac{\theta}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}) \leq 1$，由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|2\bar{X}-\theta| < \varepsilon\} = 1$

$\therefore 2\bar{X}$为$\theta$的相合估计量

$$\because E(2\bar{X}-\theta)^2 = D(2\bar{X}-\theta) + E^2(2X-\theta) = 4D(\bar{X}) + (2E(X)-\theta)^2 = \frac{\theta^2}{3n}$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} E(2\bar{X}-\theta)^2 = 0 \quad \therefore 2\bar{X}$为$\theta$的均方相合估计量

② $X_{(n)}$：$X_{(n)}$的概率密度为$f(x) = \begin{cases} n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}, 0 \leq x \leq \theta \\ 0, 其他 \end{cases}$

$$E(X_{(n)}) = \int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+1}\theta$$

$$D(X_{(n)}) = \int_0^\theta \frac{nx^{n+1}}{\theta^n} dx - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2 \quad D(\frac{n}{n+1}X_{(n)}) = \frac{n^3}{(n+2)(n+1)^4}\theta^2$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_{(n)}-\theta| < \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{n}{n+1}X_{(n)} - \frac{n}{n+1}\theta\right| < \frac{n\varepsilon}{n+1}\}$$

$$\geq \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2\varepsilon^2}\right) = 1$$

$\therefore X_{(n)}$为$\theta$的相合估计量

$$\because E(X_{(n)}-\theta)^2 = D(X_{(n)}) + (E(X_{(n)}) - \theta)^2 = \frac{2}{(n+2)(n+1)}\theta$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} E(X_{(n)}-\theta)^2 = 0$$

$\therefore X_{(n)}$为$\theta$的均方相合估计量

14. $\because \hat{\theta}$是$\theta$的一个渐进无偏估计量 $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(E(\hat{\theta})-\theta\right)=0$

$\because$ 对$\forall\varepsilon>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-E(\hat{\theta})|<\varepsilon\}\geq\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2})=1$

$\therefore \hat{\theta}$是$\theta$的相合估计量

$\because \lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta}-\theta)^2=\lim\limits_{n\to\infty}((E(\hat{\theta})-\theta)^2+D(\hat{\theta}))=0$ $\therefore \hat{\theta}$是$\theta$的均方相合估计量

15. 由已知，$X_i\sim B(1,p)$ $(i=1,\dots,100)$ $\bar{X}=p=0.6$，$\alpha=0.05$

由大样本的区间估计，置信区间为：

$$(\bar{X}-u_{\frac{0.05}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100}},\bar{X}+u_{\frac{0.05}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{100}})=(0.50,0.69)$$

16. $\bar{X}=15.0617$，$u_{\frac{0.05}{2}}=1.96$.

$\mu$的置信度为0.95的置信区间$(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}})=(14.88,15.20)$

17. $\bar{X}=10$，$S^2=0.16$，$\sigma^2$未知. $\mu$的置信区间$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}})=(9.7868,10.2132)$

18. $\mu$的置信区间长度$L=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sigma\times1.96}{\sqrt{n}}\leq k$ 即$n\geq(\frac{3.926}{k})^2$

19. $\sigma$的置信度为0.9的置信区间$(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}})=(0.15,0.31)$

$S=0.2$，$X^2_{\frac{0.1}{2}}(11)=19.675$，$X^2_{1-\frac{0.1}{2}}(11)=4.575$

20. $\bar{X}=12.075$，$S^2=\frac{1}{15}\times0.0366=0.00244$，

$X^2_{\frac{0.05}{2}}(15)=27.49$，$X^2_{1-\frac{0.05}{2}}(15)=6.26$

$\sigma^2$的置信区间为$(\frac{(n-1)S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)})=(0.0013,0.0058)$

21. $\bar{X}=999.853$，$S^2=23.5030$，

$t_{\frac{0.05}{2}}(9)=2.2622$ $X^2_{\frac{0.05}{2}}(9)=19.023$，$X^2_{1-\frac{0.05}{2}}(9)=2.7$

$\mu$的置信区间为$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{0.05}{2}})=(996.3852,1003.3211)$

$\sigma^2$的置信区间为$(\frac{(n-1)S^2}{X^2_{\frac{0.05}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-\frac{0.05}{2}}(n-1)})=(11.1195,78.3433)$

$\sigma$的置信区间为$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{X^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right) = (3.3346,8.8512)$

22. $\bar{X} = 0.14125$，${S_1}^2 = 8.25 \times 10^{-6}$，

$\bar{y} = 0.1392$，${S_2}^2 = 5.2 \times 10^{-6}$，$t_{\frac{0.05}{2}}(7) = 2.3646$，$S_w = 0.002551$

$\mu_1 - \mu_2$的置信区间为$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) = (-0.0019,0.0060)$

23. $\bar{X} = 650$，$\bar{y} = 480$，$\sigma_1 = 120$，$\sigma_2 = 106$，$u_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$，$n_1 = n_2 = 25$

$\mu_1 - \mu_2$的置信区间为$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{{\sigma_1}^2}{n_1} + \frac{{\sigma_2}^2}{n_2}}\right) = (107.24,232.76)$

24. $\bar{X} = 533.11$，$\bar{y} = 561.8$，${S_1}^2 = 63.99$，${S_2}^2 = 236.84$，

$F_{\frac{0.05}{2}}(8,9) = 4.10$，$F_{1-\frac{0.05}{2}}(8,9) = \frac{1}{4.36}$

$\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2}$的置信区间为$\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2 F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{{S_1}^2}{{S_2}^2 F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right) = (0.066,1.178)$

$\therefore \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$的置信区间为$(0.26,1.08)$

25. ${S_1}^2 = 0.5419$，${S_2}^2 = 0.6065$，$F_{\frac{0.05}{2}}(9,9) = 4.03$，$F_{1-\frac{0.05}{2}}(9,9) = \frac{1}{4.03}$

$\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2}$的置信区间为$\left(\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2 F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}, \frac{{S_2}^2}{{S_2}^2 F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right) = (0.2217,3.6008)$

26. $\bar{X} = 0.921$，$S^2 = 5.272 \times 10^{-4}$，$S = 0.02296$，$t_{0.05}(5) = 2.0150$

$M$的置信下限为$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) = 0.9021$

27. $t_\alpha(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.05}(7) = 1.8946$

$\mu_1 - \mu_2$的置信下限为$\bar{X} - \bar{Y} - t_\alpha(n_1 + n_2 - 2) \cdot S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = -0.0012$

28. $\frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2}$的置信上限为$\frac{{S_1}^2}{{S_2}^2 F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)} = \frac{0.5419}{0.6065 \times \frac{1}{3.18}} = 284$

# 第七章

1. 某种零件的长度服从正态分布，方差$\sigma^2 = 1.21$，随机抽取6件，记录其长度（单位：$mm$）分别为

32.46, 31.54, 30.10, 29.76, 31.67, 31.23

在显著性水平$\alpha = 0.05$下，能否认为这批零件的平均长度为$32.50mm$?

解 $H_0$:可以认为平均长度是$32.50mm$ $H_1$:不认为平均长度是$32.50mm$

长度$X \sim N(\mu, 1.21)$，$\mu$未知，$\sigma^2$已知。

设$U = \frac{\sqrt{n}\ (\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0} = \frac{\sqrt{6}\ (32.127-32.5)}{1.1} = -3.058$，而拒绝域为$U > u_{\frac{\alpha}{2}}\ or\ U < -u_{\frac{\alpha}{2}}$

$U$位于拒绝域，因此拒绝$H_0$，即不能认为平均长度为$32.50mm$。

2. 某厂计划投资1万元的广告费以提高某种食品的销售量，厂方认为此项计划可以使每周销售量达到$225kg$.实行此计划一个月后，调查了16家商店,计算得平均每周的销售量为$209kg$,标准差为$42kg$,问在$\alpha = 0.05$下，可否认为此项计划达到了该厂的预期效果（设每周销售量服从正态分布）？

解 设$H_0$：$\mu_0 = 225$，$H_1$：$\mu_0 \neq 225$.

销售量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2$未知，$\bar{X} = 209$.

设$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{s} = \frac{4(209-225)}{43} = -1.5238$，

而拒绝域为$t > t_{\frac{\alpha}{2}}(15)\ or\ t < -t_{\frac{\alpha}{2}}(15)$，

$-t_{\frac{\alpha}{2}}(15) < t < t_{\frac{\alpha}{2}}(15)$，因此接受$H_0$，即可认为达到了预期效果。

3. 正常人的脉搏平均每分钟72次，某医生测得10例四乙基铅中毒患者的脉搏数如下

54, 67, 68, 78, 70, 66, 67, 65, 69, 70

已知人的脉搏次数服从正态分布，问在显著性水平$\alpha = 0.05$下，四乙基铅中毒

患者的脉搏数和正常人的脉搏有无显著差异?

解　设$H_0$: $\mu_0 = 72$, $H_1$: $\mu_0 \neq 72$.

脉搏数$X \sim N(72, \sigma^2)$, $\sigma^2$未知, $\bar{X} = 67.4$, $S^2 = 35.156$.

设$t = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{s} = \frac{\sqrt{10}(67.4-72)}{\sqrt{35.156}} = -2.4534$,

而拒绝域为$t > t_{\frac{\alpha}{2}}(9)\ or\ t < -t_{\frac{\alpha}{2}}(9)$,

$t < -t_{\frac{\alpha}{2}}(9)$, 因此拒绝$H_0$, 即可认为有显著差异。

4. 某纯净水生产厂用自动灌装机灌装纯净水,该自动灌装机正常灌装量

$X \sim N(18, 0.4^2)$,

现测量某厂9个灌装样品的灌装量（单位: $L$）如下:

18.0, 17.6, 17.3, 18.2, 18.1, 18.5, 17.9, 18.1, 18.3

在显著性水平$\alpha = 0.05$下, 试问

(1)该天灌装是否正常?

(2)灌装量精度是否在标准范围内?

解(1)先检验均值 设$H_0$: $\mu = 18$, $H_1$: $\mu \neq 18$.

$\sigma^2$已知, $\bar{X} = 18$, $S^2 = 0.1325$。

$u = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{s} = 0$ 而拒绝域为$u > u_{\frac{\alpha}{2}}\ or\ u < -u_{\frac{\alpha}{2}}$

$u$位于接受域, 因此接受$H_0$;

再检验方差 设$H_0$: $\sigma^2 = 0.4^2$, $H_1$: $\sigma^2 \neq 0.4^2$, $\mu$已知.

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} = 6.625,\ \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(8) < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(8),$$

因此接受$H_0$; 因此可以认为该天灌装正常。

(2)设$H_0$: $\sigma^2 \leq 0.4^2$, $H_1$: $\sigma^2 > 0.4^2$.

设$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2} = 6.625$, $\chi^2 < \chi^2_{\alpha(8)} = 16.607$,

因此接受$H_0$, 即可认为精度在标准范围内。

5. 某地区100个登记死亡人的样本中，其平均值寿命为71.8年，标准差为8.9，假设人的寿命$X$服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$\mu,\sigma^2$均未知.问是否有理由认为该地区的平均寿命不低于70岁($\alpha=0.05$)?

解 设$H_0$：$\mu\geq 70$，$H_1$：$\mu<70$. $\sigma^2$未知，$\bar{X}=71.8$，$S=8.9$。

设$t=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}=\frac{10(71.8-70)}{8.9}=2.022$，因$t>-t_\alpha(99)$（书上附录没有$t_\alpha(99)$，可近似将$t_\alpha(45)$看作$t_\alpha(99)$）因此接受$H_0$，即可认为该地区平均寿命不低于70岁。

6. 某厂的生产管理员认为该厂第一道工序加工完的产品送到第二道工序进行加工之前的平均等待时间超过$90min$.现对100件产品进行随机抽样结果显示平均等待时间为$96min$,样本标准差为$30min$,设平均等待时间服从正态分布.问抽样的结果是否支持该管理员的看法？（$\alpha=0.05$）

解 设$H_0$：$\mu\geq 90$，$H_1$：$\mu<90$.

平均等待时间$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2$未知，$\bar{X}=96$，$S=30$。

设$t=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}=\frac{10\ (96-90)}{30}=2$，$t>-t_\alpha(99)$（道理同上）

因此接受$H_0$，即支持管理员的看法。

7. 某汽车配件厂在新工艺下对加工好的25个活塞直径进行测量,得样本方差$S^2=0.00066$.已知旧工艺生产的活塞直径的方差为 0.00040,假设活塞直径服从正态分布.问革新后活塞直径的方差是否大于旧工艺的方差（$\alpha=0.05$）？

解 设$H_0$：$\sigma_1^2\geq\sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2<\sigma_2^2$，活塞直径$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$S_1^2=0.00066,S_2^2=0.0004$，$\mu_1,\mu_2$均未知。

设$f=\frac{S_1^2}{S_2^2}=1.65$，$f>F_{1-\alpha}(24,24)=\frac{1}{F_\alpha(24,24)}=0.5051$，

因此接受$H_0$，即可以认为革新后活塞直径的方差大于旧工艺的方差。

8. 某种导线的电阻服从正态分布$N(\mu,0.005^2)$,从一批导线中抽取9根,测得这9根导线的电阻的样本标准差为0.008,能否认为这批导线电阻的标准差仍为0.005（$\alpha=0.05$）？

解 设$H_0$：$\sigma^2=0.005^2$，$H_1$：$\sigma^2\neq 0.005^2$， $\mu$未知，电阻$X\sim N(\mu,0.005^2)$

设$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=20.48$，因$\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(8)$，

因此拒绝$H_0$，即不可认为这批导线电阻的标准差仍为0.005。

9. 无线电厂生产某种高频管,其中一项指标服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$.从该厂生产的一批高频管中随机抽取8个，测得该项指标的数据为68,43,70,65,55,56,60,72.

(1)若已知$\mu=60$，检验假设$H_0$：$\sigma^2=49$，$H_1$：$\sigma^2\neq 49(\alpha=0.05)$;

(2)若$\mu$未知，$H_0$：$\sigma^2\leq 49$，$H_1$：$\sigma^2>49$（$\alpha=0.05$）.

解 (1)设$H_0$：$\sigma^2=49$，$H_1$：$\sigma^2\neq 49$，$\mu$已知，$\bar{X}=61.125$，$S^2=93.2679$

设$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}=\frac{663}{49}=13.53$ 由于$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(8)<\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(8)$，因此接受$H_0$;

(2)设$H_0$：$\sigma^2\leq 49$，$H_1$：$\sigma^2>49$，$\mu$未知，

设$\chi^2=\frac{(n-1)\ S^2}{\sigma_0^2}=13.324$ $\chi^2<\chi^2_{\alpha}(7)$，因此接受$H_0$。

10. 设有两个来自不同正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,$m=4,n=5$,

$\bar{x}=0.60,\bar{y}=2.25,S_1^2=15.07,S_2^2=10.81$,在显著性水平$\alpha=0.05$下,试检验两个样本是否来自相同方差的正态总体.

解 $H_0$：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$. $\mu_1,\mu_2$未知，$S_1^2=15.07,S_2^2=10.81$.

设$f=\frac{S_1^2}{S_2^2}=1.3941$，$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(3,4)=\frac{1}{15.10}=0.0662$

$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(3,4)<f<F_{\frac{\alpha}{2}}(3,4)$ ，因此接受$H_0$，即可认为两个样本来自相同方差

的正态总体。

(注意与28(3)题异同!此题与2019年1月期末第四题相似)

11. 为了提高振动板的硬度，热处理车间选择两种淬火温度$T_1$及$T_2$进行试验，测得振动板的硬度数据如下：

$$T_1: 85.6, 85.9, 85.7, 85.8, 85.7, 86.0, 85.5, 85.4;$$ 即

$$T_2: 86.2, 85.7, 85.5, 85.7, 85.8, 86.3, 86.0, 85.8.$$

假设两种淬火温度下的振动板的硬度服从正态分布，检验：

(1)两种淬火温度下振动板硬度的方差是否与显著差异（$\alpha = 0.05$）？

(2)淬火温度对振动板的硬度是否有显著影响（$\alpha = 0.05$）？

解 （1）设$H_0$：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$．$\mu_1, \mu_2$未知，

$$\bar{x} = 85.7, \bar{y} = 85.875, S_1^2 = 0.04, S_2^2 = 0.07357$$

设$f = \frac{S_1^2}{S_2^2} = 0.5437$，$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(7,7) = \frac{1}{4.99} = 0.2004$

$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(7,7) < f < F_{\frac{\alpha}{2}}(7,7)$，因此接受$H_0$，即可认为方差无显著差异；

（2）由（1）得$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$，设$H_0: \mu_1 = \mu_2$，$H_1$：$\mu_1 \neq \mu_2$，

设$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{85.7-85.785}{\sqrt{\frac{1}{2}S_1^2+\frac{1}{2}S_2^2}\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}} = -1.4688$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(14) = 2.1448$

$-t_{\frac{\alpha}{2}}(14) < t < t_{\frac{\alpha}{2}}(14)$，因此接受$H_0$，即可认为硬度无显著影响。

12. 对某地7岁儿童作身高调查，结果如下：

| 性别 | 人数 | 平均身高 | 样本标准差 |
|---|---|---|---|
| 男 | 384 | 118.64 | 4.53 |
| 女 | 377 | 117.86 | 4.56 |

假设身高服从正态分布，由以上数据能否说明性别对7岁儿童的身高有显著影响．（$\alpha = 0.05$）

解 先检验方差，设$H_0$：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$．

$\bar{x} = 118.64, \bar{y} = 117.86, S_1^2 = 4.53^2, S_2^2 = 4.56^2$.

设$f=\frac{S_1^2}{S_2^2}=0.8688$，$f<F_{\frac{\alpha}{2}}(383,376)$，因此接受$H_0$，即$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$；

再检验均值，设$H_0:\mu_1=\mu_2$，$H_1$：$\mu_1\neq\mu_2$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，

设$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{118.64-117.86}{\sqrt{\frac{383S_1^2+376S_2^2}{759}}\sqrt{\frac{1}{384}+\frac{1}{377}}}=2.2907$，$t>t_{\frac{\alpha}{2}}(759)$，因此接受$H_0$；

因此不可以认为性别对7岁儿童的身高有显著影响。

13. 某药厂为比较新旧两种方法提取某有效成分的效率，用新旧方法各做了10次实验，提取有效成分的比率如下表所示：

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 新方法 | 79.1 | 81 | 77.3 | 79.1 | 80 | 79.1 | 79.1 | 77.3 | 80.2 | 82.1 |
| 旧方法 | 78.1 | 72.4 | 76.2 | 74.3 | 77.4 | 78.4 | 76 | 75.5 | 76.7 | 77.3 |

假设这两种样本分布分别取自正态分布总体，且两样本相互独立，试问新方法的提取率比旧方法的提取率是否有所提高（$\alpha=0.01$）？

解 先检验方差，设$H_0$：$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$，

$\bar{x}=79.43,\bar{y}=76.23,S_1^2=2.2245,S_2^2=3.3245$

设$f=\frac{S_1^2}{S_2^2}=0.6691$，$F_{1-\frac{\alpha}{2}(9,9)}=\frac{1}{6.54}=0.1529$，$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(9,9)<f<F_{\frac{\alpha}{2}}(9,9)$

因此接受$H_0$，即$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$；

再检验均值，设$H_0:\mu_1\leq\mu_2$，$H_1$：$\mu_1>\mu_2$. $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，

设$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{79.43-76.23}{\sqrt{\frac{9S_1^2+9S_2^2}{18}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}=4.2958$，$t_\alpha(18)=2.5524$，$t>t_\alpha(18)$

因此拒绝$H_0$，即可认为新方法比旧方法提取率有所提高。

14. 在某校大一学生中随机抽取 10 人，让他们分别采用$A$和$B$两套数学试卷进行测试，成绩如下：

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 试卷$A$ | 78 | 63 | 72 | 89 | 91 | 49 | 68 | 76 | 85 | 55 |
| 试卷$B$ | 71 | 44 | 61 | 84 | 74 | 51 | 55 | 60 | 77 | 39 |

假设学生成绩服从正态分布，试检验两套数学试卷是否有显著差异

（$\alpha = 0.01$）.

解 先检验方差，设$H_0$：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，

$\bar{x} = 72.6, \bar{y} = 61.6, S_1^2 = 198.04, S_2^2 = 217.82$，

设$f = \frac{S_1^2}{S_2^2} = 0.9092$，$F_{1-\frac{\alpha}{2}(9,9)} = \frac{1}{6.54} = 0.1529$，$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(9,9) < f < F_{\frac{\alpha}{2}}(9,9)$，

因此接受$H_0$，即$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$；

再检验均值，$H_0: \mu_1 = \mu_2$，$H_1$：$\mu_1 \neq \mu_2$.

设$t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{72.6-61.6}{\sqrt{\frac{9S_1^2+9S_2^2}{18}}\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}} = 1.7058$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(18) = 2.8784$，

$-t_{\frac{\alpha}{2}}(18) < t < t_{\frac{\alpha}{2}}(18)$，因此接受$H_0$，即可以认为两套数学试卷无显著差异。(说明:11(2)题、14题得出的结论恰好与答案相反，是因所作的假设的不同导致的)