# 作业 3（第七讲~第九讲）

1、

(1) 求出标准正交向量 $\mathbf{q}_1$、$\mathbf{q}_2$、$\mathbf{q}_3$，使得 $\mathbf{q}_1$、$\mathbf{q}_2$ 能够张成如下矩阵 **A** 的列空间。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) 在 **A** 的四个基本子空间中，哪一个或哪些子空间包含 $\mathbf{q}_3$？

(3) 利用最小二乘法求解 $\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$。

2、已知三个向量 **a**、**b**、**c**，利用 Gram-Schmidt 方法求出正交向量 **A**、**B**、**C**。

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3、假设矩阵 **A** 具有 3 个特征值 0、3、5，与这三个特征值对应的特征向量分别是 **u**、**v**、**w**。

(1) 给出 **A** 的零空间和列空间的一组基底。

(2) 求出线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ 的一个特解，并给出其通解的形式。

(3) $\mathbf{Ax}=\mathbf{u}$ 是否有解？为什么？

4、已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，证明 $\mathbf{A}^k=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+3^k & 1-3^k \\ 1-3^k & 1+3^k \end{bmatrix}$。

5、已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b & -1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$，其中 $a$ 和 $b$ 均为实数。求出 $a$ 和 $b$ 应满足的条件，使得 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{Au}$ 和 $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{Bv}$ 的解在 $t\to\infty$ 时收敛至 **0**。

6、已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$

(1) 求矩阵 **A** 的特征值。

(2) 已知 $\mathbf{u}_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$，且 $\mathbf{u}_k=\mathbf{A}^k\mathbf{u}_0$，则当 $k\to\infty$ 时，$\mathbf{u}_k\to$？

7、对于一个 3 阶方阵 **A**，已知它的三个特征值是 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=c$，$\lambda_3=2$，且该

矩阵有 3 个特征向量：

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$$

(1) 当 $c$ 满足什么条件时，$\mathbf{A}$ 可以对角化？

(2) 当 $c$ 满足什么条件时，$\mathbf{A}$ 是 Markov 矩阵？

(3) 当 $c$ 满足什么条件时，$\dfrac{\mathbf{A}}{2}$ 是投影矩阵？