



---

---

---

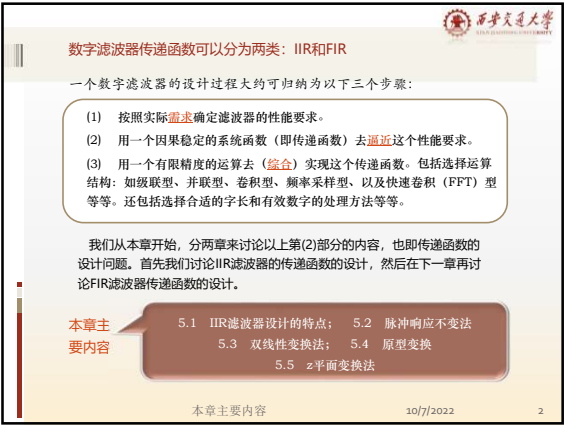
---

---

---

---

---



---

---

---

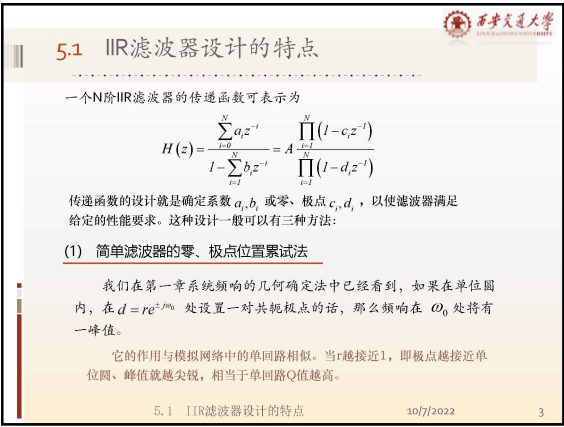
---

---

---

---

---



---

---

---

---

---

---

---

---

相反,如果在单位圆上 $C = e^{j\omega_0}$ 处设置一个零点,频响就会在 $\omega_0$ 处出现传输零点,也即可以实现陷波,如图所示。

如果特性达不到要求,可以再移动零、极点,这样做两三次调整后就可以获得一些简单要求的网络。用这种**零、极点累试法**,可以设计要求简单和阶数很低(一、二阶)的网络。

5.1 IIR滤波器设计的特点

10/7/2022

4

---

---

---

---

---

---

---

---

(2) 利用模拟滤波器的理论来设计数字滤波器

由于模拟网络逼近综合理论已经发展得很成熟,很多常用的模拟滤波器不仅有简单而严格的设计公式,而且已经表格化了,设计起来很方便。因此自然应该将这些成果继承下来,作为设计数字滤波器的现成工具。

(3) 用最优技术设计参数

最优化设计法一般分两步来进行,

**第一步:** 要选择一种最优的准则。例如最小均方误差准则,即是指在一组离散的频率 $\{\omega_i\} (i=1,2,\dots,M)$ 上,所设计的相应特性 $H(e^{j\omega})$ 与所需要的理想特性 $H_d(e^{j\omega})$ 的均方误差 $\mathcal{E}$ 最小。

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^M \left[ |H(e^{j\omega_i})| - |H_d(e^{j\omega_i})| \right]^2$$

此外还可以有其它多种误差最小的准则。

**第二步:** 改变传递函数 $H(z)$ 的系数 $a_i, b_i$ ,分别计算 $\mathcal{E}$ 。最后找到使 $\mathcal{E}$ 最小的一组最优系数 $a_i, b_i$ ,从而完成设计。这种设计需要进行大量的迭代运算,因此没有计算机是不行的。

5.1 IIR滤波器设计的特点

10/7/2022

5

---

---

---

---

---

---

---

---

在以上三种设计方法中,我们着重讲**第二种方法**,这是因为数字滤波器在很多场合所要完成的任务正和模拟滤波器相同。例如做低通、高通、带通以及带阻网络等。这时数字滤波器可以看作是“模仿”模拟滤波器。

利用模拟滤波器来设计数字滤波器,就是从已知的模拟滤波器传递函数 $H_a(s)$ 设计数字滤波器传递函数 $H(z)$ 。因此,它归根到底是一个由s平面到z平面的变换,这个变换通常是复变函数的映射变换,这种映射变换应该遵循两个基本的目标:

(1)  $H(z)$ 的频响应该模仿 $H_a(s)$ 的频响,也即s平面的虚轴 $j\Omega$ 应该映射到z平面的单位圆 $e^{j\omega}$ 上。

(2)  $H_a(s)$ 的因果稳定性通过映射后 $H(z)$ 仍应保持,也即s平面的左半平面 $\text{Re}[s] < 0$ 应该映射到z平面的单位圆以内 $|z| < 1$ 。

下面我们就分别讨论两种常见的变换方法。

5.1 IIR滤波器设计的特点

10/7/2022

6

---

---

---

---

---

---

---

---

2

**5.2 脉冲响应不变法**

利用模拟滤波器理论来设计数字滤波器，也就是使数字滤波器能模仿模拟滤波器的特性，这种模仿可以从不同的角度出发。**脉冲响应不变法**又称为**标准z变换法**。它是从滤波器的脉冲响应出发，使数字滤波器的单位脉冲响应序列  $h(n)$  模仿模拟滤波器的冲激响应  $h_a(t)$ ，让  $h(n)$  正好等于  $h_a(t)$  的采样值，即

$$h(n) = h_a(nT) \quad (4-1)$$

如果以  $H_a(s)$  及  $H(z)$  分别表示  $h_a(t)$  的拉氏变换及  $h(n)$  的z变换，即

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \mathcal{L}[h_a(t)] \\ H(z) &= \mathcal{Z}[h(n)] \end{aligned}$$

则根据第一章2.6中所讨论的采样序列z变换与模拟信号拉氏变换的关系式(2-6g)，可以得到

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega T}} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(s + j\frac{2\pi}{T}m\right) \quad (4-2)$$

5.2 脉冲响应不变法 10/7/2022 7

这样我们就看到，当采用脉冲响应不变法将模拟滤波器变换为数字滤波器时，它所完成的s平面到z平面的变换，正是我们在1.6中所讨论的拉氏变换到z变换的标准变换关系，也即首先对  $H_a(s)$  做周期延拓，然后再经过  $z = e^{j\Omega T}$  的映射关系映射到z平面上。

$z = e^{j\Omega T}$  的映射关系表明，s平面上每一条宽为  $2\pi/T$  的横带部分，都将重叠地映射到z平面的整个全平面上。而每一横带的左半部分映射在z平面的单位圆以内，横带的右半部分映射在单位圆以外。而轴  $j\Omega$  映射在单位圆上，但是  $j\Omega$  轴上的每一段  $2\pi/T$  都对应于绕单位圆一周，如图4.2

图4.2 脉冲响应不变法的映射关系

5.2 脉冲响应不变法 10/7/2022 8

应该指出， $z = e^{j\Omega T}$  的映射关系反映的是  $H_a(s)$  的周期延拓与  $H(z)$  的关系，而不是  $H_a(s)$  本身直接与  $H(z)$  的关系。因此使用脉冲响应不变法时，从  $H_a(s)$  到  $H(z)$  并没有一个由s平面到z平面的——对应的简单代数映射关系，即没有一个  $s = f(z)$  的代数关系式。

从式(4-2)我们也可看到，数字滤波器的频响并不是简单的重现模拟滤波器的频响，而是模拟滤波器频响的周期延拓：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega + 2\pi m}{T}\right) \quad (4-3)$$

正如我们在第一章1.1采样定律中所讨论的那样，如果模拟滤波器的频响是带限于折叠频率以内的，即

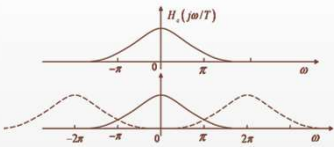
$$H_a(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \pi/T$$

这时才能使数字滤波器的频响不失真地重现模拟滤波器的频响（在折叠频率以内）。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi \quad (4-4)$$

5.2 脉冲响应不变法 10/7/2022 9

但是任何一个实际的模拟滤波器，其频响都不可能是真正带限的。  
这时就不可避免地会出现频谱的交叠，也即出现混淆现象如图4.3



这时数字滤波器的频响就不同于原模拟滤波器的频响，而带有一定的失真。当模拟滤波器频响在折叠频率以上衰减越大时，这个失真就越小。

脉冲响应不变法特别适合于用部分分式表达的传递函数，模拟滤波器的传递函数若只有单阶极点，且分母的阶数高于分子阶数  $N > M$ ，则可以表达为部分分式形式

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \quad (4-5)$$

其拉氏反变换为

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t} u(t) \quad \text{其中 } u(t) \text{ 是单位阶跃函数}$$

5.2 脉冲响应不变法10/7/202210

---

---

---

---

---

---

---

---

对  $h_a(t)$  采样就得到数字滤波器的单位脉冲响应序列

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i nT} u(n) = \sum_{i=1}^N A_i (e^{s_i T})^n u(n) \quad (4-6)$$

再对  $h(n)$  取z变换，即得到数字滤波器传递函数

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad (4-7)$$

比较式 (4-7) 与式 (4-5)，我们看到，s平面上的每一个极点  $s = s_i$  变换到z平面上是极点  $z = e^{s_i T}$ ，而  $H_a(s)$  与  $H(z)$  的部分分式中所有对应系数则不变。如果模拟滤波器是稳定的，则所有极点  $s_i$  都在s左半平面，即  $\text{Re}[s_i] < 0$ ，那么变换后  $H(z)$  的极点  $e^{s_i T}$  也都在单位圆以内，即  $|e^{s_i T}| = e^{\text{Re}[s_i]T} < 1$ ，因此数字滤波器也保持稳定。

虽然脉冲响应不变法能保证s平面与z平面的极点位置有一一对应的代数关系，但是这并不等于说整个s平面和z平面就存在这种一一对应的映射关系。特别是数字滤波器的零点位置就与s平面上的零点没有一一对应的关系，而是随着  $H_a(s)$  的极点  $s_i$  与系数  $A_i$  的不同而不同。

5.2 脉冲响应不变法10/7/202211

---

---

---

---

---

---

---

---

在实际应用脉冲响应不变法时往往稍微做一点修正，由式 (4-4)，频响  $H(e^{j\omega})$  与  $T$  成反比：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi$$

因此如果采样频率很高，即  $T$  很小时，数字滤波器可能具有太高的增益这是不希望的。为了使数字滤波器的增益不随采样频率变化，可以做如下的简单修正：

令

$$h(n) = T h_a(nT) \quad (4-8)$$

这样相应就有

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad (4-9)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega + 2\pi m}{T}\right) \approx H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi \quad (4-10)$$

下来举例说明脉冲响应不变法的应用。

5.2 脉冲响应不变法10/7/202212

---

---

---

---

---

---

---

---

4

例：已知模拟低通滤波器的传递函数为

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

直接用式 (4-9)，我们就可以得到用脉冲响应不变法的数字滤波器传递函数

$$H(z) = \frac{2T}{1 - e^{-T}} z^{-1} - \frac{2T}{1 - e^{-2T}} z^{-1} = \frac{2T(e^{-T} - e^{-2T})}{1 - (e^{-T} + e^{-2T})z^{-1} + e^{-3T}z^{-2}}$$

例如，当  $T=1$  时

$$H(z) = \frac{0.4651z^{-1}}{1 - 0.5032z^{-1} + 0.04979z^{-2}}$$

这时它们的频响分别为

$$H_a(j\Omega) = \frac{2}{(2 - \Omega^2) + j3\Omega}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{0.4651e^{-j\Omega/2}}{1 - 0.5032e^{-j\Omega} + 0.04979e^{-j2\Omega}}$$

幅度频响如图所示，可以看到由于频谱交叠所带来的明显失真。

5.2 脉冲响应不变法 10/7/2022 13

通过以上讨论我们可以看到，脉冲响应不变法的一个重要特点是**频率坐标的变换是线性的变换**，因此如果模拟滤波器频响是带限于折叠频率以内的话，通过变换后数字滤波器的频响可以不失真的反映原响应与频率的关系。

$$H(e^{j\Omega T}) = H_a(j\Omega), \quad |\Omega| < \pi/T$$

例如模拟滤波器是线性相位的贝塞尔低通滤波器，那么通过脉冲响应不变法得到的仍然是线性相位的低通数字滤波器。

另外，在某些场合，要求数字滤波器在时域上能模仿模拟滤波器的功能，这时采用脉冲响应不变法也是很合适的，它能实现时域冲激响应的模仿。同样，如果需要阶跃响应的模仿，可以用类似的方法，将模拟滤波器阶跃响应的采样作为数字滤波器的阶跃序列响应，这种方法称为**阶跃响应不变法**，其结果与脉冲响应不变法较接近。

5.2 脉冲响应不变法 10/7/2022 14

脉冲响应不变法的最大缺点是有**频谱周期延拓效应**。因此只能用于带限的频响特性，例如衰减特性很好的低通，或带通，而且高频衰减越大，频响的混淆效应就越小。至于高通和带阻滤波器，由于它们在高频部分不衰减，因此将完全混淆在低频响应中，从而使整个频响面目全非。所以如果要对高通和带阻实行脉冲响应不变法，必须先对高通和带阻滤波器加一保护滤波器，滤掉高于折叠频率以上的频带。然后再使用脉冲响应不变法转换为数字滤波器。这样会增加设计复杂性和滤波器的阶数，因而只有在一定要追求频率线性关系或保持网络瞬态响应时才采用。

5.2 脉冲响应不变法 10/7/2022 15

**5.3 双线性变换法**

脉冲响应不变法的主要缺点是频谱的交叠所产生的混淆效应。这是由于从s平面到z平面的标准变换  $z = e^{sT}$  是多值的对应关系。

为了克服这个缺点，我们可以设法分两步来进行变换：

第一步先将整个s平面压缩到  $s_1$  平面的一条横带里；

第二步再通过标准变换关系将此横带变换到整个z平面上去。

这样就可以使s平面与z平面建立一一对应的单值关系，消除了多值性，因而也就可以消除混叠现象。如下图4.5所示

图4.5 双线性变换的映射关系

5.3 双线性变换法 10/7/2022 16

为了将s平面的  $j\Omega$  轴压缩到  $s_1$  平面  $j\Omega_1$  轴上的  $-\pi/T$  到  $\pi/T$  一段上，可以通过以下的正切变换实现

$$\Omega = \Omega_1 \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$$

这样当  $\Omega_1$  由  $-\pi/T$  经过0变化到  $\pi/T$  时， $\Omega$  由  $-\infty$  经过0变化到  $\infty$ ，也既映射了整个  $j\Omega$  轴，将这个关系解析延拓到整个s平面，则得到s平面到  $s_1$  平面的映射关系：

$$s = \Omega_1 \tan\left(\frac{s_1 T}{2}\right) = \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

然后再将  $s_1$  平面通过标准变换关系映射到z平面： $z = e^{s_1 T}$

这样就得到最后的s平面与z平面的单值映射关系：

$$\begin{cases} s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} & (4-11) \\ z = \frac{1 + s}{1 - s} & (4-12) \end{cases}$$

这个变换就称为**双线性变换**，它在两个方面都符合我们前面所提出的映射变换的总要求。

5.3 双线性变换法 10/7/2022 17

首先，当  $z = e^{j\omega}$  时，代入式 (4-11)

$$s = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = j \tan(\omega/2) = j\Omega \quad (4-13)$$

即s的虚轴映射到z平面正是单位圆，同时  $s = \sigma + j\Omega$  代入 (4-12) 式

$$z = \frac{(1 + \sigma) + j\Omega}{(1 - \sigma) - j\Omega} \quad \text{因此,} \quad |z| = \frac{\sqrt{(1 + \sigma)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{(1 - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

当  $\sigma < 0$ ,  $|z| < 1$  ; 当  $\sigma > 0$ ,  $|z| > 1$  。也即s左半平面正是映射在单位圆内，而s右半平面正映射在单位圆外，正如图4.5所表示的那样。因此稳定的模拟滤波器通过双线性变换后，所得到的数字滤波器一定能保证也是稳定的。

双线性变换比起脉冲响应不变法来，其主要的优点是s平面与z平面是单值的——对应关系。整个  $j\Omega$  轴是单值的对应于单位圆一周，这个关系就是式 (4-13) 所表示的关系：

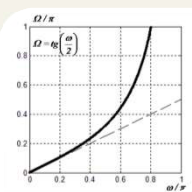
$$\Omega = \tan(\omega/2) \quad (4-14)$$

5.3 双线性变换法 10/7/2022 18

这个关系表示在图4.6上，从图中我们看到在零频附近它们的关系接近于线性关系，但当 $\Omega$ 进一步增加时， $\omega$ 增长得越来越慢，最后当 $\Omega \rightarrow \infty$ 时， $\omega$ 终止在折叠频率 $\omega = \pi$ 处，因而双线性变换就不会出现高频部分超过折叠频率而混淆到低频部分区的现象。

但是双线性变换的这个特点是靠频率的严重非线性关系而得到的，这种 $\Omega$ 与 $\omega$ 的非线性关系使数字滤波器与模拟滤波器在响应与频率的对应关系上发生畸变。

例如：如果模拟滤波器是最小时延滤波器，它的相位与频率是直线关系。而通过双线性变换后，所得的数字滤波器就不再保持相位与频率的直线关系了，因而这个数字滤波器也就不再是一个最小时延特性的滤波器。



5.3 双线性变换法10/7/202219

---

---

---

---

---

---

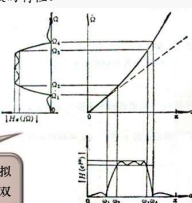
---

---

虽然双线性变换有这样一个缺点，但是双线性变换目前仍然是使用得最普遍、最有成效的一种设计工具。这是因为大量的滤波器都是具有片段常数的频响特性。例如低通、高通、带通、带阻等滤波器他们在通带内要求逼近一个衰减为零的常数特性。他们在阻带部分要求的是逼近于一个衰减为 $\infty$ 的常数特性。这种特性的滤波器通过双线性变换后，虽然频率发生了非线性的变化，但结果仍然不失片段常数的特性。

例如  $H_a(s)$  如果是一个考尔型的模拟滤波器。当它通过双线性变换后，所得的  $H(z)$  在其通带与阻带内部仍然保持原模拟滤波器相同的等起伏特性。只是通带截止频率、过渡带的边缘频率、以及起伏的峰点频率、谷点频率等临界频率的位置发生了非线性的变化，如图4.7。

这种频率的畸变不难通过预畸来校正，也即将模拟滤波器的临界频率事先加以畸变，然后让它通过双线性变换后正好映射到我们所需要的位置上去。



5.3 双线性变换法10/7/202220

---

---

---

---

---

---

---

---

最后，双线性变换比起脉冲响应不变法来，在设计运算上也比较直接和简单。因为s与z之间有简单的代数关系，所以从模拟传递函数可以直接通过代数置换得到数字滤波器的传递函数，这个置换过程为

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \quad (4-15)$$

频响也可用直接置换得到

$$H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega) \Big|_{\Omega=\omega\frac{T}{2}} = H_a\left(j\lg\frac{\omega}{2}\right) \quad (4-16)$$

或

$$H(e^{j\Omega T}) = H_a\left(j\lg\frac{\Omega T}{2}\right) \quad (4-17)$$

这些都比脉冲响应不变法的部分分式分解要简便得多。

因此，一般说，当着眼于滤波器的瞬态响应时，采用脉冲响应不变法较好。而在其他情况下，在IIR滤波器设计中，则大多采用双线性变换。

5.3 双线性变换法10/7/202221

---

---

---

---

---

---

---

---

5.4 原型变换

在模拟滤波器中已经形成了许多成熟的设计方法。如巴特沃兹滤波器、契比雪夫滤波器、考尔滤波器、贝塞尔滤波器等，每种滤波器都有自己的  
一套准确的计算公式。

同时，业已置备了大量归一化的设计表格与曲线，大大便利了滤波器的  
设计和计算，因此在模拟滤波器的设计中，只要掌握原型变换，就可以  
通过归一化低通原型的参数，去设计各种实际的低通、高通、带通或带阻  
滤波器。

这一套成熟的、行之有效的设计方法，也可以通过前面所讨论的各种  
变换应用于数字滤波器的设计。

下面我们通过举例来讨论应用模拟滤波器低通原型设计各种数字滤  
波器的基本原理。我们将着重于**双线性变换法**，其他变换方法如果需要，  
可以举一反三而得。

5.4 原型变换10/7/202222

---

---

---

---

---

---

---

---

一、低通变换

一般说，通过模拟原型设计数字滤波器大约可按以下四个步骤进行：

① 确定数字滤波器的性能要求，确定各临界频率 $\{\omega_k\}$ 值。

② 由变换关系将 $\{\omega_k\}$ 映射到模拟域，得出模拟滤波器的临界频率值 $\{\Omega_k\}$ 。

③ 按照临界频率 $\{\Omega_k\}$ 设计模拟滤波器传递函数 $H_a(s)$ 。

④ 通过变换将 $H_a(s)$ 转换为数字滤波器传递函数 $H(z)$

现举例说明。设采样周期 $T=250\mu s$ （即采样频率为 $4kHz$ ），要  
求用脉冲响应不变法及双线性变换法设计一个三阶的巴特沃兹低通滤  
波器，其 $3dB$ 截止频率为 $f_c=1kHz$ 。

1、脉冲响应不变法

由于脉冲响应不变法的频率关系是线性的，所以我们可以直接  
按 $f_c=1kHz$ 设计一个三阶巴特沃兹模拟低通滤波器，然后再按照公  
式（4-9）变换为数字滤波器。

5.4 原型变换10/7/202223

---

---

---

---

---

---

---

---

我们知道巴特沃兹滤波器传递函数为

$$H_a(s)H_a(-s)=\frac{1}{1+(-1)^N(s/\Omega_c)^{2N}} \quad (4-18)$$
$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)} \quad (4-19)$$

其中根 $s_k$ 为
$$s_k=\Omega_c e^{j\left[\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} \quad (4-20)$$

当 $N=3$ 时
$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)\left(s-\Omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\left(s-\Omega_c e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)} \quad (4-21)$$

稍加整理即可得到
$$H_a(s)=\frac{1}{1+2(s/\Omega_c)+2(s/\Omega_c)^2+(s/\Omega_c)^3} \quad (4-22)$$

以上传递函数也可以直接从查表来得到，即先从常用的滤波器设计手册中查出  
巴特沃兹多项式的系数，然后以 $s/\Omega_c$ 代替其归一化频率，则可得到以上结果。

5.4 原型变换10/7/202224

---

---

---

---

---

---

---

---



根据式 (4-22)，只要将  $\Omega_c = 2\pi f_c$  代入，就完成了三阶巴特瓦兹模拟滤波器的计算。但一般来说，具体数值应该放在完成了数字滤波器的变换后最后一次代入，以减少数值运算中的误差累积。

为了进行脉冲响应不变法应该将式 (4-21) 展成部分分式的结构。

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} + \frac{-(\Omega_c/\sqrt{3})e^{j\pi/6}}{s + \Omega_c(1-j\sqrt{3})/2} + \frac{-(\Omega_c/\sqrt{3})e^{-j\pi/6}}{s + \Omega_c(1+j\sqrt{3})/2}$$

将此部分分式的系数代入式 (4-9) 就得到

$$H(z) = \frac{\omega_c}{1 - e^{-j\omega_c} z^{-1}} + \frac{-(\omega_c/\sqrt{3})e^{j\pi/6}}{1 - e^{-j\omega_c(1-j\sqrt{3})/2} z^{-1}} + \frac{-(\omega_c/\sqrt{3})e^{-j\pi/6}}{1 - e^{-j\omega_c(1+j\sqrt{3})/2} z^{-1}}$$

其中  $\omega_c = \Omega_c T$  是数字滤波器数字频域的截止频率。将上式两项共轭复根合并，得

$$H(z) = \frac{\omega_c}{1 - e^{-j\omega_c} z^{-1}} - \frac{(\omega_c/\sqrt{3}) \left[ 2 \cos \pi/6 - 2z^{-1} e^{-j\omega_c/2} \cos \left( \frac{\sqrt{3}\omega_c}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right]}{1 - 2z^{-1} e^{-j\omega_c/2} \cos \left( \frac{\sqrt{3}\omega_c}{2} \right) + e^{-j\omega_c} z^{-2}}$$

5.4 原型变换 10/7/2022 25

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

从这个结果我们看到最后  $H(z)$  只与数字频域参数  $\omega_c$  有关，也即只与临界频率  $f_c$  与采样频率  $f_s$  的相对值有关，而与他们的绝对大小无关。例如  $f_c = 4\text{kHz}$ ， $f_s = 1\text{kHz}$  与  $f_c = 40\text{kHz}$ ， $f_s = 10\text{kHz}$  的数字滤波器将具有同一个传递函数。这个结论适合于所有的数字滤波器设计。

将  $\omega_c = 2\pi f_c T = 0.5\pi$  代入上式，就得到最后的传递函数：

$$H(z) = \frac{1.571}{1 - 0.2079z^{-1}} + \frac{-0.571 + 0.5541z^{-1}}{1 - 0.1905z^{-1} + 0.2079z^{-2}} \quad (4-23)$$

这个形式正好是用一个一阶节及一个二阶节并联起来实现。脉冲响应不变法由于需要通过部分分式来实现变换，因而对采用并联型的运算结构来说是比较方便的。

由于最终的传递函数只取决于数字频域的参数，因此又可以有另一种计算方法。即我们不必像上面那样首先计算一个实际的模拟滤波器  $H_a(s)$  作为数字滤波器的模仿对象。而只要计算一个相对于采样频率归一化的“样本”传递函数就行了。

5.4 原型变换 10/7/2022 26

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

这个计算方法是这样：

首先确定数字滤波器的临界频率  $\omega_c = \Omega_c T = 0.5\pi$ ，然后直接以  $\omega_c$  作为模拟滤波器的临界频率。计算传递函数：

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + 2(s/\omega_c) + 2(s/\omega_c)^2 + (s/\omega_c)^3}$$

这个传递函数实际上就是对采样频率归一化的模拟“样本”传递函数。然后将它展成部分分式：

$$H_a(s) = \frac{A_0}{s + d_0} + \frac{A_1}{s + d_1} + \frac{A_1^*}{s + d_1^*}$$

代入式 (4-9) 时 已经归一化为1了，因此

$$H(z) = \frac{A_0}{1 - e^{-j\omega_c} z^{-1}} + \frac{A_1}{1 - e^{-j\omega_c} z^{-1}} + \frac{A_1^*}{1 - e^{-j\omega_c} z^{-1}}$$

不难证明，这个等式代入数值后得到的结果与式 (4-23) 完全相同。这种计算方法，虽然概念上有一点曲折，但是计算起来更加简洁明了，使用起来更方便。

5.4 原型变换 10/7/2022 27

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

2、双线性变换法

首先确定数字域临界频率  $\omega_c = 2\pi f_c T = 0.5\pi$ 。

第二步根据频率的非线性关系式 (4-14)，确定预畸的模拟滤波器临界频率  $\Omega_c = \lg\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \lg\frac{\pi}{4} = 1$

第三步将  $\Omega_c$  代入式 (4-19) 就得到模拟的传递函数，由于  $\Omega_c = 1$ ，因此这个传递函数就是归一化的原型

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + 2s^2 + 2s + 1}$$

最后，将双线性变换关系带入就得到数字滤波器的传递函数

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1}{2} \frac{1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3}}{3+z^{-2}}$$

应该注意，这里所采用的模拟滤波器  $H_a(s)$  并不是数字滤波器所要模仿的截止频率  $f_c = 1\text{kHz}$  的实际滤波器。而是有如以上脉冲响应不变的第二种计算方法一样， $H_a(s)$  只是一个样本函数，它只是由低通原型到数字滤波器的变换中的一个中间变换阶段。

5.4 原型变换10/7/202228

---

---

---

---

---

---

---

---

图4.8表示了这两种设计方法所得到的频响，横坐标作了两种标度，一种是数字频率  $\omega$ ，一种是  $\omega$  所对应的实际频率  $f$  值。

1 脉冲响应不变法  
2 双线性变换法

从幅度特性可以看到，对于双线性变换的频响，由于频率的非线性变换，使截止区的衰减越来越快。最后在折叠频率处形成一个三阶传输零点。这个三阶零点正是模拟滤波器在  $\Omega = \infty$  处的三阶传输零点通过映射形成的。因此，通过双线性变换使滤波器的过渡带变窄，选择性改善。同时，在图上也看到脉冲响应不变法存在微小的混淆现象，因而选择性将受到一定损失，而且没有传输零点。

5.4 原型变换10/7/202229

---

---

---

---

---

---

---

---

二、高通变换

当我们需要设计高通、带通、带阻等数字滤波器时，可以有两种办法。

第一种办法是，首先设计一个相应的高通、带通或带阻模拟滤波器，然后再通过脉冲响应不变法或双线性变换转换为数字滤波器，如图4.9上图的方案。

第二种办法则是，直接利用模拟滤波器的低通原型，通过一定的频率变换关系，一步完成各种数字滤波器的设计，如图4.9下图的方案。

模拟原型 → 模拟高通、带通、带阻 → 数字高通、带通、带阻

模拟原型 → 频率变换 → 数字高通、带通、带阻

5.4 原型变换10/7/202230

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

对于第一种方案，设计办法完全和我们上面讨论的低通设计一样。即首先确定临界频率  $\{\omega_c\}$ ，然后转换成相应模拟滤波器的临界频率  $\{\Omega_c\}$ 。剩下的问题就完全是高通、带通或带阻模拟滤波器的设计问题了。最后再将设计好的  $H_a(s)$  代公式转换成  $H(z)$  即可。

第二种方案更为简便便利，得到普遍采用。

另外，由于脉冲响应不变法对于高通、带阻等都不能直接采用，或者只能在加了保护滤波器以后使用。因此一般脉冲响应不变法使用直接频率变换要有许多特殊考虑，故对于脉冲响应不变法来说，采用第一种方案有时更方便一些。

我们下面只考虑双线性变换，实际使用中多数情况也正是这样。

5.4 原型变换

10/7/2022

31

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

我们首先考虑高通变换，在模拟滤波器的高通设计中我们已经知道，低通至高通的变换就是  $s$  变量的倒量变换。这个关系同样也可以应用于双线性变换。只要将双线性变换式 (4-11) 中的  $s$  用它的倒数  $1/s$  代替，就可以颠倒数字滤波器频率与模拟滤波器的频率关系。即

$$s = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (4-24)$$

由于倒量变换不改变模拟滤波器的稳定关系，因此也不会影响双线性变换后的稳定条件，而且  $j\Omega$  轴仍然在单位圆上，只是方向颠倒了，即  $z = e^{j\omega}$  时

$$s = \frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} = -j \operatorname{ctg}(\omega/2) = j\Omega$$
$$\Omega = -\operatorname{ctg}(\omega/2) \quad (4-25)$$

这个关系表示在右图上， $\Omega=0$  映射到  $\omega=\pi$  即  $z=-1$  上， $\Omega=\infty$  映射到  $\omega=0$  即  $z=1$  上。

这条曲线就是在讨论双线性变换时图4.6上的同一条曲线，只是  $\omega$  坐标倒置了过来，因而通过这样的变换后就可以直接将模拟低通变换为数字高通，如下页图4.11所示。

5.4 原型变换

10/7/2022

32

---

---

---

---

---

---

---

---

西安交通大学

还应当明确一点，所谓高通数字滤波器，并不是  $\omega$  高到  $\infty$  都通过。由于数字频域存在折叠频率  $\omega=\pi$ ，对于实数响应的数字滤波器， $\omega$  由  $\pi$  到  $2\pi$  的部分只是  $\omega$  由  $\pi$  到 0 的镜像部分。因此有效数字域仅指  $\omega=0$  到  $\omega=\pi$ ，高通也仅指这一段的高端，即到  $\omega=\pi$  为止的部分。

高通变换的计算步骤也和低通变换一样，只是在确定模拟原型预畸的临界频率时，应该采用  $\Omega_c = \operatorname{ctg}(\omega_c/2)$ 。这里不必加负号，因为临界频率只有大小的意义而无正负的意义。现在举例说明。

例 采样频率  $f_s=10\text{kHz}$ ， $T=100\mu\text{s}$ ，设计一个三阶契比雪夫高通数字滤波器，其通过频率为  $f>2.5\text{kHz}$ （但不必考虑  $5\text{kHz}$  以上的频率分量），通带内损耗不大于  $1\text{dB}$ 。

契比雪夫低通原型的模函数为

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

$C_N(\cdot)$  为  $N$  阶契比雪夫多项式。

$$\varepsilon = \sqrt{10^{a_p/10} - 1}$$

5.4 原型变换

10/7/2022

33

---

---

---

---

---

---

---

---

通带损耗  $A_p = 1\text{dB}$  时,  $\epsilon = 0.5089$ , 当  $N = 3$  时传递函数为

$$H_a(s) = \frac{0.4913\Omega_c^3}{0.4913\Omega_c^3 + 1.238\Omega_c^2 s + 0.9883\Omega_c s^2 + s^3}$$

以上这些数据可以计算获得, 也可通过查表获得。现在我们来求预畸的截止频率  $\Omega_c$ , 首先确定数字域的截止频率  $\omega_c$

$$\omega_c = 2\pi f_c T = 2\pi \cdot 2.5 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0.5\pi$$

则

$$\Omega_c = \text{ctg}(\omega_c/2) = \text{ctg}(\pi/4) = 1$$

代入上式得到

$$H_a(s) = \frac{0.4913}{0.4913 + 1.238s + 0.9883s^2 + s^3}$$

最后代入式(4-24)

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}}$$

频响如图

$$H(z) = 0.1321 \frac{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}}{1 + 0.3432z^{-1} + 0.6043z^{-2} + 0.2041z^{-3}}$$

5.4 原型变换 10/7/2022 34

### 三、带通变换

如果数字频域上带通的中心频率为  $\omega_0$  的话, 显然带通变化的目标就是将模拟低通的  $\Omega = 0$  映射到数字域的  $\pm\omega_0$  上。而将  $\Omega = \pm\infty$  映射到高低频端  $\omega = 0$  及  $\omega = \pi$  上。也即应该将  $S$  的原点映射到  $z = e^{\pm j\omega_0}$ , 而将  $s = \pm j\infty$  点映射到  $z = \pm 1$ , 满足这个要求的双线性变换为

$$s = \frac{(z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0})}{(z - 1)(z + 1)} = \frac{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}{z^2 - 1} \quad (4-26)$$

当  $z = e^{j\omega}$  时

$$s = \frac{e^{j2\omega} - 2e^{j\omega} \cos \omega_0 + 1}{e^{j2\omega} - 1} = \frac{(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) - 2 \cos \omega_0}{(e^{j\omega} - e^{-j\omega})} = j \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega}{\sin \omega}$$

因此

$$\Omega = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega}{\sin \omega} \quad (4-27)$$

这个关系表示在图4.13上, 图中清楚地看到  $\Omega = 0$  点正映射在  $\omega = \omega_0$  上, 而  $\Omega = \pm\infty$  映射在  $\omega = 0, \pi$  两端。因而满足带通变换的要求。

图4.13 带通变换的频率关系

5.4 原型变换 10/7/2022 35

同时这个变换也满足稳定性要求, 设  $z = r \geq 0$ ,  $s = \frac{r^2 + 1 - 2r \cos \omega_0}{r^2 - 1}$

由于上式完全是实数, 所以是映射在  $s$  平面  $\sigma$  轴上。其中分子永远是非负的

$$(r - 1)^2 + 2r(1 - \cos \omega_0) \geq 0$$

因此  $\sigma$  的正负完全决定于分母  $r^2 - 1$  的正负关系。 $r < 1$  时  $\sigma < 0$ ;  $r > 1$  时,  $\sigma > 0$ 。

所以证明  $S$  左半平面映射在单位圆内, 而右半平面映射在单位圆外。这种变换关系是稳定的变换关系, 可以用它来完成带通的变换如右图所示。

在设计带通时, 一般只给出上下边带的截止频率  $\omega_1, \omega_2$  作为设计要求。因此应用以上变换时, 首先要从上下边带参数换算成另外两个参数。即中心频率  $\omega_0$  及模拟低通的截止频率  $\Omega_c$ 。

5.4 原型变换 10/7/2022 36

为了换算这两个参数, 我们将  $\omega_1, \omega_2$  代入式 (4-27)

$$\Omega_1 = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_1}{\sin \omega_1}, \quad \Omega_2 = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_2}{\sin \omega_2}$$

由于  $\Omega_1, \Omega_2$  在模拟低通中是一对镜像频率:  $\Omega_2 = -\Omega_1$

因此将此关系代入上面两等式, 就能求解出  $\cos \omega_0$

$$\cos \omega_0 = \frac{\sin(\omega_1 + \omega_2)}{\sin \omega_1 + \sin \omega_2} \quad (4-28)$$

或

$$= \frac{\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)} \quad (4-29)$$

同时  $\Omega_1$  也就是模拟低通的截止频率  $\Omega_c$ , 因此

$$\Omega_c = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_1}{\sin \omega_1} \quad (4-30)$$

有了这两个参数就可以完成全部计算了。举例说明。

5.4 原型变换 10/7/2022 37

例: 采样频率为  $f_s = 100\text{kHz}$ ,  $T = 10\mu\text{s}$  要求设计一个三阶巴特瓦兹带通滤波器, 其上下边带的 3dB 截止频率分别为  $f_2 = 12.5\text{kHz}$ ,  $f_1 = 37.5\text{kHz}$

首先确定数字域的上下边带截止频率

$$\omega_1 = 2\pi f_1 T = 0.75\pi, \quad \omega_2 = 2\pi f_2 T = 0.25\pi$$

代入式 (4-28), 求中心频率:  $\cos \omega_0 = \frac{\sin(0.25\pi + 0.75\pi)}{\sin 0.25\pi + \sin 0.75\pi} = 0, \quad \omega_0 = 0.5\pi$

再代入式 (4-30), 求模拟低通的截止频率:  $\Omega_c = \frac{\cos 0.5\pi - \cos 0.75\pi}{\sin 0.75\pi} = 1$

$\Omega_c = 1$  的模拟低通就是三阶巴特瓦兹归一化原型

代入变换公式:

$$H_c(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

$$s = \frac{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$$

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\frac{z^2+1}{z^2-1}}$$

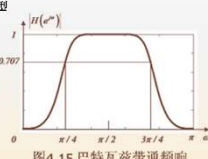
$$H(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 3z^{-2} + 3z^{-4} - z^{-6}}{3 + z^{-4}}$$


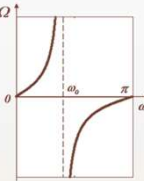
图4.15 巴特瓦兹带通频响

5.4 原型变换 10/7/2022 38

#### 四、带阻变换

和模拟滤波器的带阻变换一样, 如果把带通的频率关系倒置就得到带阻变换, 因此这个频率变换关系如图4.16所示, 它的整个计算方法都和带通是一致的。

$$s = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad (4-31)$$

$$\Omega = \frac{\sin \omega}{\cos \omega - \cos \omega_0} \quad (4-31)$$


5.4 原型变换 10/7/2022 39

**5.5 z平面变换法**

上一节我们讨论了由模拟网络的低通原型来设计各种数字滤波器的方法，这种原型变换的设计方法同样也可直接在数字域上进行。

如果我们已经有了一个数字滤波器的低通原型函数  $H_p(z)$ ，同样可以通过一定的变换，来设计其他各种不同的数字滤波器函数  $H(z)$ ，这种变换也就是由  $H_p(z)$  所在的  $z$  平面到  $H(z)$  所在的  $z$  平面的一个映射变换。

为了便于区分变换前后两个不同的  $z$  平面，我们可以把变换前的  $z$  平面定义为  $u$  平面，并将这一映射关系用一个函数  $g$  来表达

$$u^{-1} = g(z^{-1}) \quad (4-33)$$

这样，数字滤波器的原型变换就可以表达为

$$H(z) = H_p(u) \Big|_{u^{-1}=g(z^{-1})} \quad (4-34)$$

在式 (4-33) 中所以选用  $u^{-1}$  及  $z^{-1}$  而不用  $u$  及  $z$ ，是因为实际上在传递函数中  $u$  和  $z$  都是以负幂形式出现的。

5.5 z平面变换法 10/7/2022 40

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

现在，我们分析一下函数  $g(z^{-1})$  的一般特性。首先，我们希望变换以后的传递函数应该保持稳定性不变，因此要求  $u$  的单位圆内部必须对应于  $z$  的单位圆之内。

其次两个函数的频响要满足一定的变换要求，因此  $u$  的单位圆应映射到  $z$  的单位圆上，若以  $e^{j\omega}$  表示  $u$  的单位圆，以  $e^{j\phi(\omega)}$  表示  $z$  的单位圆，则式 (4-33) 应满足

$$e^{-j\phi} = g(z^{-1}) = \left| g(e^{-j\omega}) \right| e^{j\phi(\omega)} \quad (4-35)$$

其中  $\phi(\omega)$  是  $g(e^{-j\omega})$  的相位函数，从上式我们得到

$$\left| g(e^{-j\omega}) \right| = 1 \quad (4-36)$$

也即函数  $g(z^{-1})$  在单位圆上的幅度必须恒等于1，这种函数称为全通函数。

全通函数具有以下一些基本特性：

$$g(z^{-1}) = \pm \prod_{i=1}^N \frac{z^{-1} - \alpha_i^*}{1 - \alpha_i z^{-1}} \quad (4-37)$$

其中  $\alpha_i$  为它的极点，可以是实数，也可以是共轭复数，但都必须在单位圆以内，即  $|\alpha_i| < 1$ ，以保证变换的稳定性不变； $g(z^{-1})$  的所有零点都是其极点的共轭倒数； $N$  称为全通函数的阶数，当  $\omega$  由  $0 \rightarrow \pi$  时，其相位函数  $\phi(\omega)$  的变化量为  $N\pi$ 。

5.5 z平面变换法 10/7/2022 41

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

根据全通函数的这些基本特点，下面具体讨论各种原型变换。

**一、低通—低通**

在低通到低通的变换中， $H_p(e^{j\omega})$  及  $H(e^{j\omega})$  都是低通函数，只是截止频率互不相同，因此当  $\omega$  由  $0$  变到  $\pi$  时，相应  $\omega$  也应从  $0$  变到  $\pi$ ，根据全通函数相位  $\phi(\omega)$  变化量为  $N\pi$  的性质就可确定全通函数的阶数必须为1，并且必须满足以下两条件：

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 \\ g(-1) &= -1 \end{aligned}$$

从式 (4-33) 我们可以看到，满足以上要求的映射函数应该是

$$g(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (4-38)$$

其中  $\alpha$  是实数，而且  $|\alpha| < 1$ 。当我们把  $z = e^{j\omega}$  及  $u = e^{j\phi}$  代入上式，就可以找到这个变换所反映的变换关系是

$$e^{j\phi} = \frac{e^{-j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (4-39)$$

5.5 z平面变换法 10/7/2022 42

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

从这里不难解出  $\omega$  来

$$\omega = \arctan \left[ \frac{(1-\alpha^2)\sin\theta}{2\alpha + (1+\alpha^2)\cos\theta} \right] \quad (4-40)$$

图4.17作出了这个关系的三条代表性曲线，由图中可以看到，当  $\alpha > 0$  时，此变换代表的是频率压缩；而  $\alpha < 0$  时则是频率扩展。

如果低通原型的截止频率为  $\theta_c$ ，而所需变换后的相应截止频率为  $\omega_c$ ，那么代入式 (4-39)，我们就可以确定参数  $\alpha$  为

$$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\theta_c - \omega_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_c + \omega_c}{2}\right)} \quad (4-41)$$

从而整个变换函数也就唯一确定了。

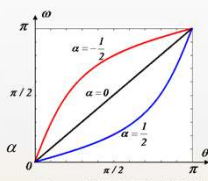


图4.17 低通-低通变换特性

5.5 z平面变换法10/7/202243

---

---

---

---

---

---

---

---

二、低通—高通

$$g(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad (4-38)$$

如果我们将  $z$  变换为  $-z$ ，我们就将单位圆上的频响旋转了一个角度，因此这个变换也称为旋转变换。利用旋转变换，原  $z$  平面上的低通就变换为相应的高通了，所以只要将式 (4-38) 中的  $z^{-1}$  代之以  $-z^{-1}$ ，就完成了由低通-高通的原型变换，其相应公式列入表4-1。（注意，这时  $\theta_c$  对应的不是  $\omega_c$  而是  $\pi + \omega_c$ ）。

三、低通—带通

若带通的中心频率为  $\omega_0$ ，它应该对应于低通原型的通带中心，即  $\theta = 0$  点；当带通的频率由  $\omega_0 \rightarrow \pi$  时，是由通带走向止带，因此应该对应于  $\theta$  由  $0 \rightarrow \pi$ ；同样，当  $\omega$  由  $\omega_0 \rightarrow 0$  时，也是由通带走向另一边止带，它对应的是低通原型的镜像部分，即相应于  $\theta$  由  $0 \rightarrow -\pi$

5.5 z平面变换法10/7/202244

---

---

---

---

---

---

---

---

这样我们看到，当  $\omega$  由  $0$  变化到  $\pi$  时， $\theta$  必须相应变化  $2\pi$ ，也即全通函数的阶数  $N$  必须为  $2$ ，这时

$$g(z^{-1}) = \pm \frac{z^{-1} - \alpha^*}{1 - \alpha z^{-1}} \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha^* z^{-1}} \quad (4-42)$$

当我们把带通的上、下截止频率  $\omega_2$ 、 $\omega_1$  与其对应的低通原型截止频率  $\theta_c$ 、 $-\theta_c$  代入式 (4-42) 后，整个变换函数的参数就可以确定了，其结果列入表4-1中。

四、低通—带阻

由带通到带阻的变换同样可以通过旋转变换来完成，其相应结果也列于表4-1中。

5.5 z平面变换法10/7/202245

---

---

---

---

---

---

---

---

15

表 4-1

变换关系	$g(z^{-1})$	参数的确定
低通-低通	$\frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$	$\alpha = \frac{\sin\left(\frac{\theta_c - \omega_c}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_c + \omega_c}{2}\right)}$
低通-高通	$-\left(\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}\right)$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\theta_c + \omega_c}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_c - \omega_c}{2}\right)}$

5.5 z平面变换法10/7/202246

---

---

---

---

---

---

---

---

表 4-1 (续)

变换关系	$g(z^{-1})$	参数的确定
低通-带通	$-\left(\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}\right)$	$\alpha = -\frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)}$ $k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$
低通-带阻	$\frac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+1}$	$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)}$ $k = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$

5.5 z平面变换法10/7/202247

---

---

---

---

---

---

---

---