

第二节 相位滞后校正

一、相位滞后校正网络的特性

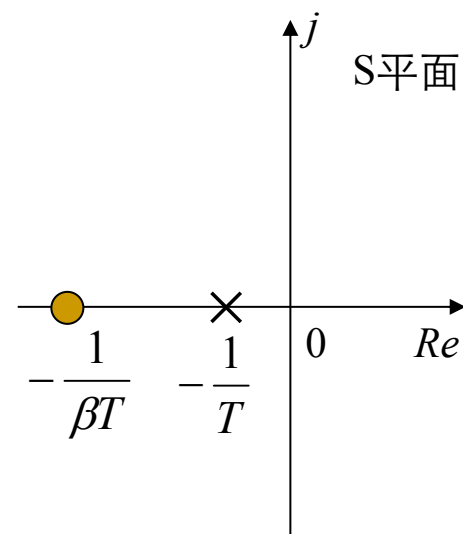
相位滞后校正网络的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1 + \beta Ts}{1 + Ts}, \quad \beta < 1$$

1. 零极点分布图

其零点在 $z = -\frac{1}{\beta T}$ ，极点在 $p = -\frac{1}{T}$ 。

因 $\beta < 1$ ，所以在复平面上，极点总是在零点的右面。由于极点较零点更接近原点，滞后校正装置具有明显的积分作用。相位滞后校正也称为积分校正。



2. Bode图

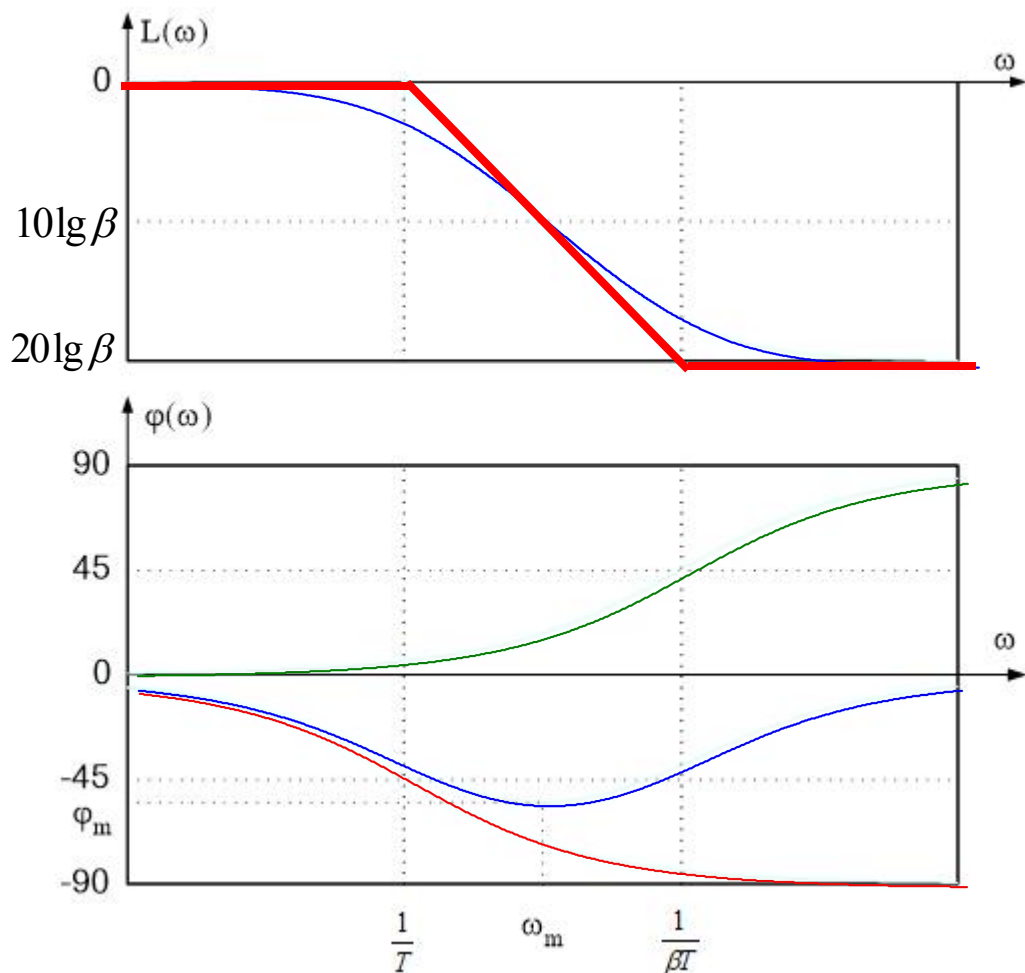
$$L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + (\beta T \omega)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (T \omega)^2}$$

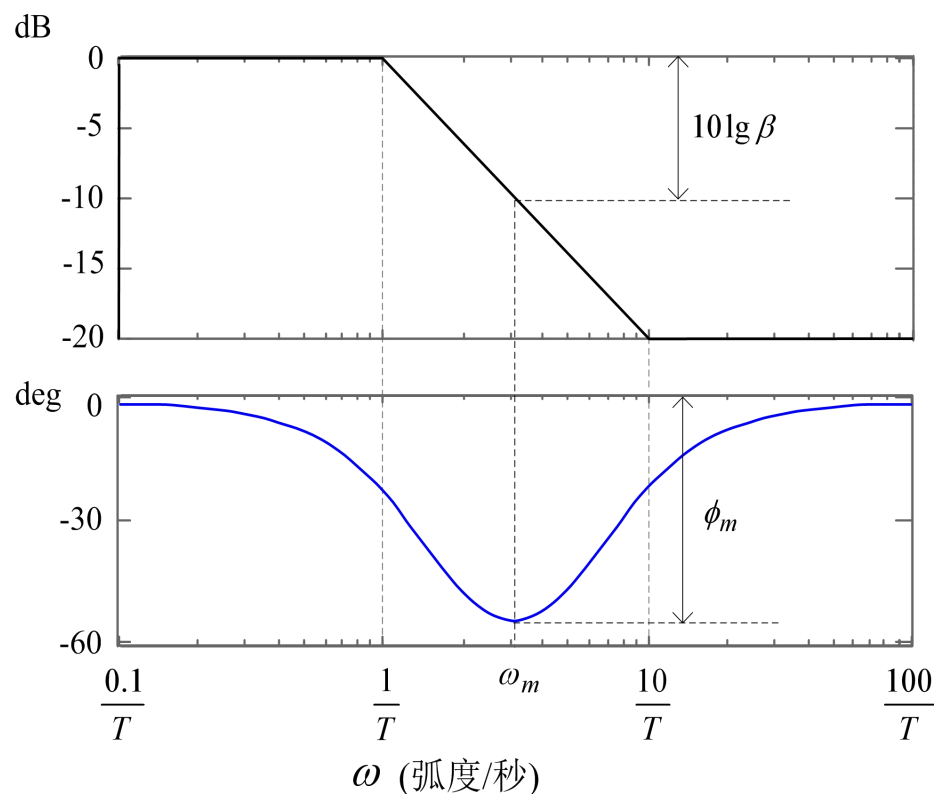
$$\varphi(\omega) = \operatorname{tg}^{-1} \beta T \omega - \operatorname{tg}^{-1} T \omega$$

频率特性的主要特点：

(1) 在所有频率下，相频特性为负值(滞后)。这点对系统的性能无好处，在实际校正中并不用这个特点，而要避开。

(2) 当 β 和 T 确定后，在 $\omega > 1/(\beta T)$ 后的最大幅值衰减量为 $|20 \lg \beta|$ 。





与超前网络类似，滞后网络的最大滞后相位 φ_m 发生在最大滞后频率 ω_m 处，且 ω_m 正好是频率（对数刻度） $1/T$ 至 $1/\beta T$ 的几何中心位置。 φ_m 及 ω_m 的表达式分别为：

$$\varphi_m = \sin^{-1} \frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\beta T}}$$

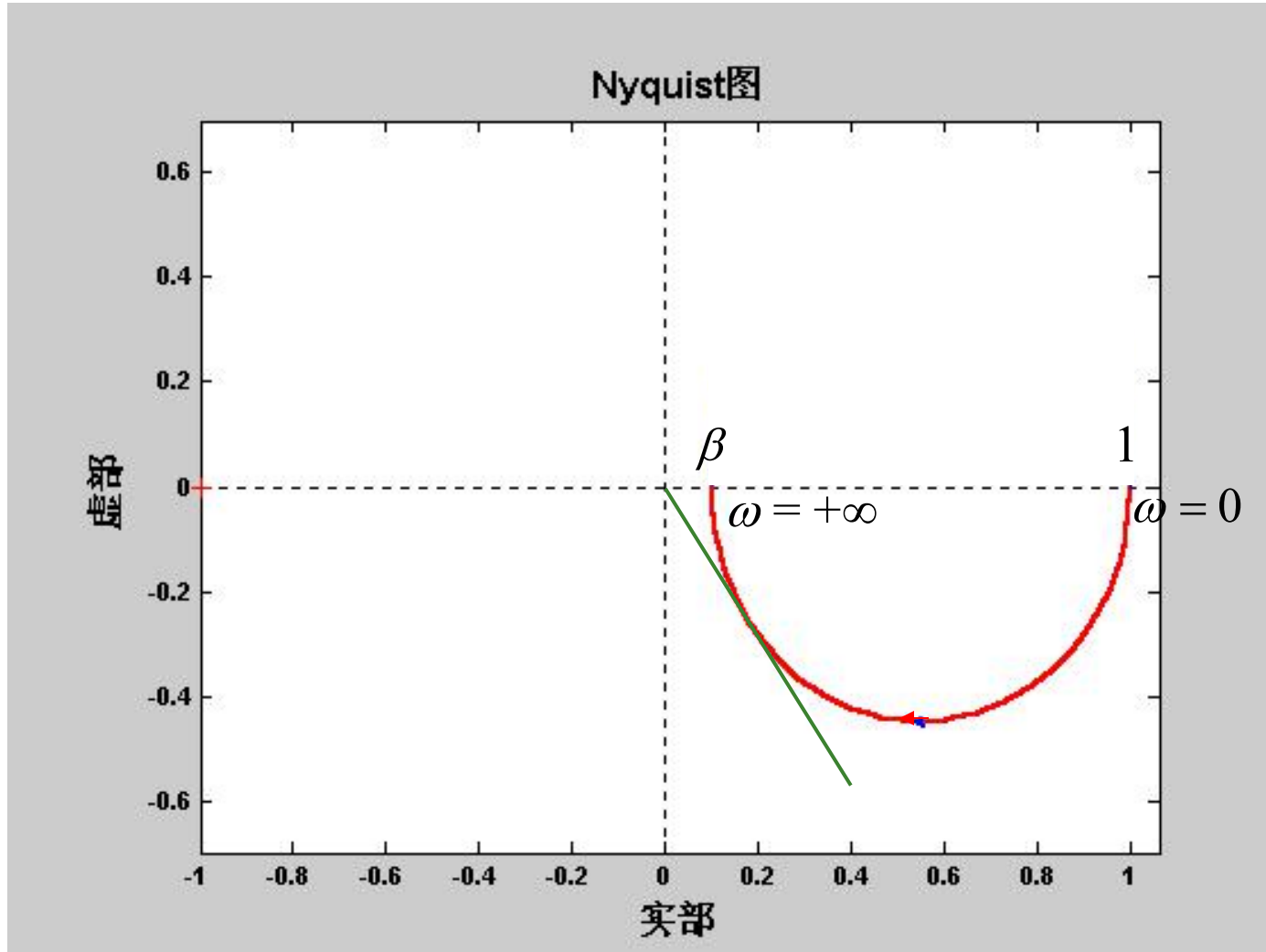
可看出，低频时，滞后校正网络的幅值为0分贝，高频时，其幅值为 $20\lg\beta$ 分贝。滞后校正网络是一个低通滤波器。

采用相位滞后网络进行串联校正时，主要是利用其高频幅值衰减特性，以降低系统的开环幅值穿越频率，提高系统的相位裕度。

因此，应力求避免其最大相位滞后发生在校正后系统开环幅值穿越频率 ω_{c2} 附近。为了达到这个目的，选择滞后网络参数时，通常应使网络的转折频率 $1/\beta T$ 远小于 ω_{c2} ，一般取：

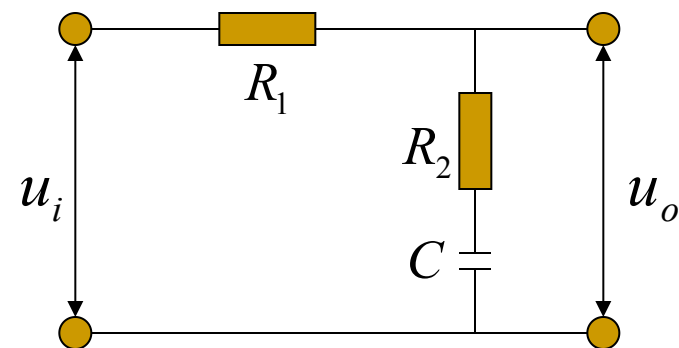
$$\frac{1}{\beta T} = \frac{\omega_{c2}}{10}$$

滞后校正环节的极坐标图如下：



二、相位滞后校正装置实现例子

【无源滞后校正装置】

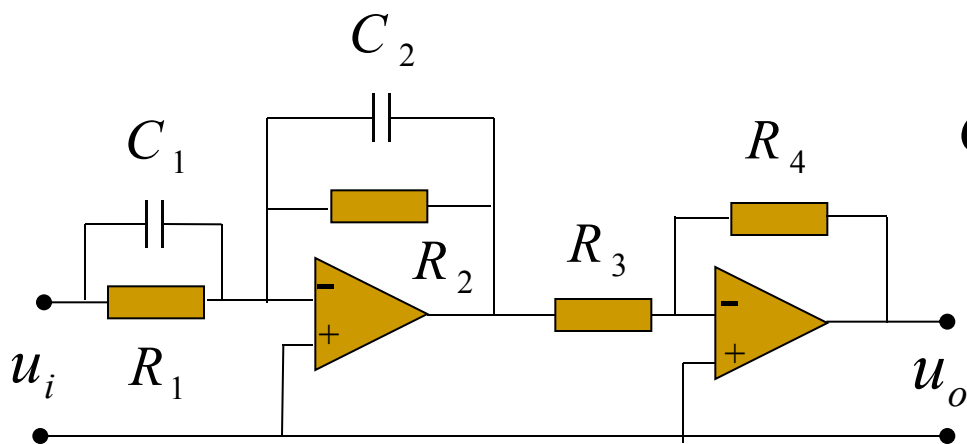


$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{u_o}{u_i} = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} \\ &= \frac{1 + R_2Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1 + R_2}(R_1 + R_2)Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{1 + \beta Ts}{1 + Ts} \end{aligned}$$

$$\text{其中: } T = (R_1 + R_2)C, \quad \beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \beta < 1$$

【有源滞后校正装置】

可用放大器和 RC 元件构成有源滞后校正装置。



$$G_c(s) = \frac{u_o}{u_i} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$$
$$= \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$$

当 $R_1 C_1 > R_2 C_2$ 时，为超前校正网络

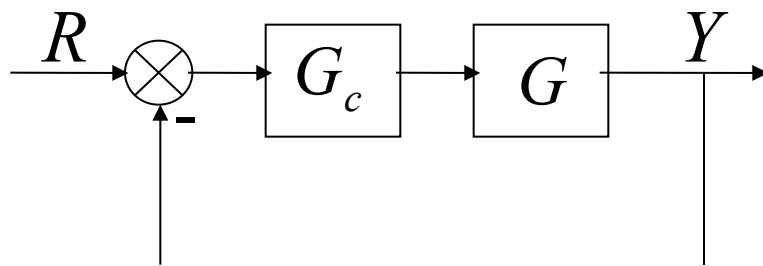
当 $R_1 C_1 < R_2 C_2$ 时，为滞后校正网络

【注意】 将该装置串入系统时，应进行增益补偿。

三、基于伯德图的相位滞后校正

- 设计相位滞后网络的基本原理是利用滞后网络的**高频幅值衰减**特性，使校正后系统的**幅值穿越频率减小**，借助校正前系统在新幅值穿越频率处的相位，使系统获得足够的相位裕度。
- 在设计滞后网络时，应力求避免让其最大的相位滞后发生在校正后系统幅值穿越频率附近。
- 由于滞后网络的高频衰减特性，减小了系统幅值穿越频率，从而降低了系统的响应速度。
- 当系统响应速度要求不高而抑制高频噪声要求较高时，可考虑采用串联滞后校正。

如下图所示的系统。假设性能指标是以相位裕度、增益裕度、静态误差系数等形式给出的。

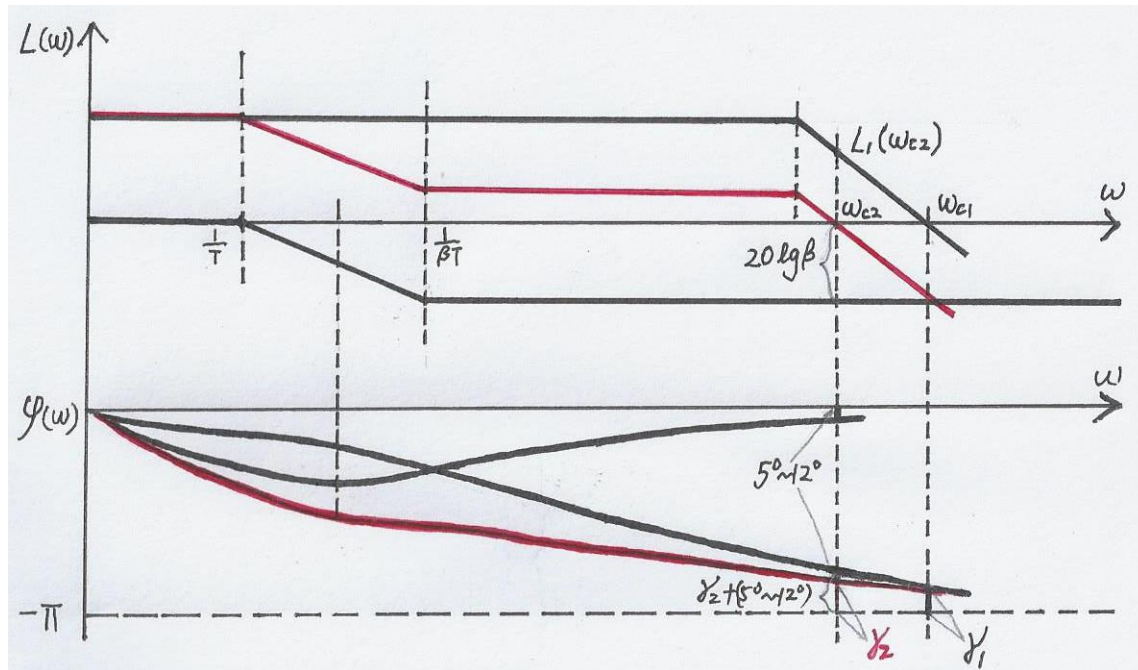


图中， G_c 为校正装置， G 为被控对象。

如何根据性能指标获得滞后校正装置 G_c ？

主要针对最小相位系统

【滞后校正基本思路和步骤】



⑥ 求 T : $\frac{1}{\beta T} = \frac{\omega_{c2}}{10}$

$\Rightarrow T = \frac{10}{\beta \omega_{c2}}$

⑦ $G_c(s) = \frac{1 + \beta Ts}{1 + Ts}$

⑧ 校验 γ_2 是否合格，不合格重做

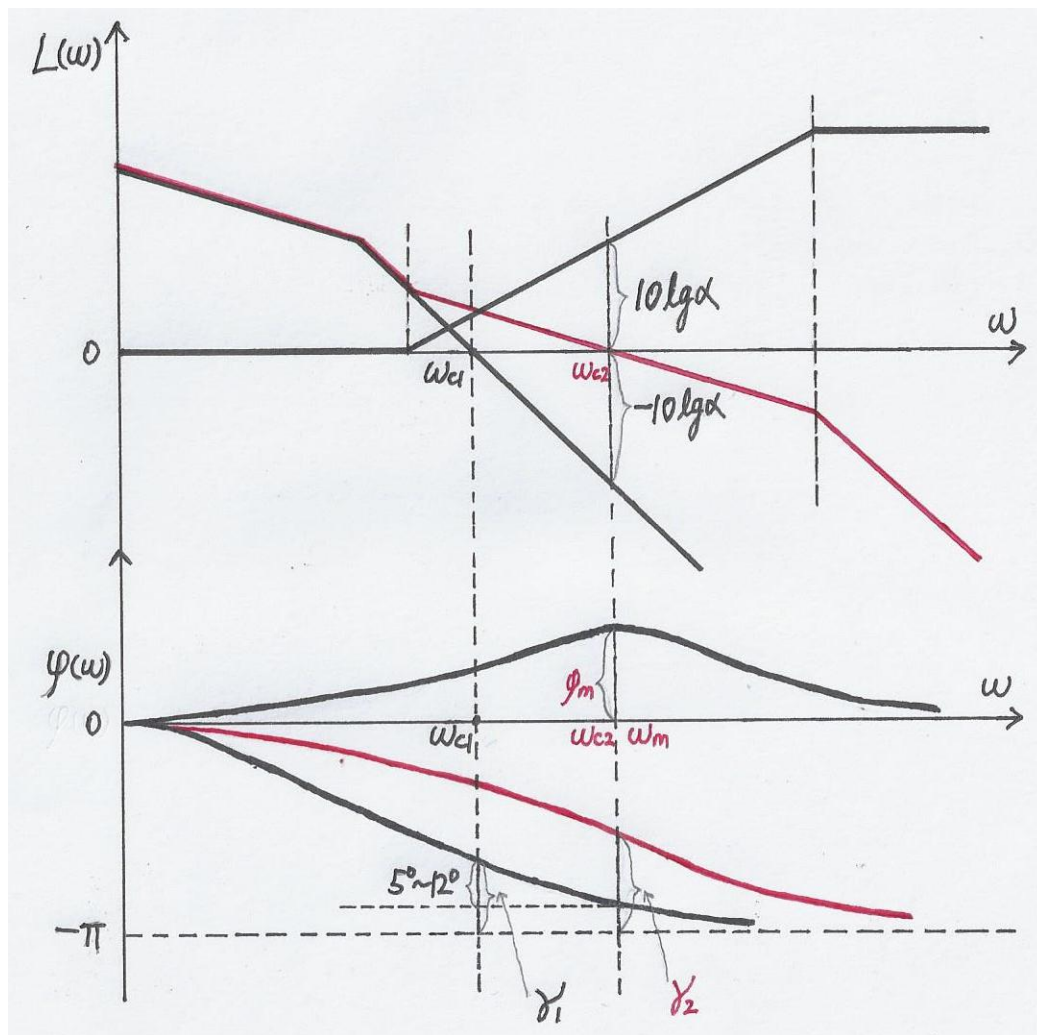
③ 决定 ω_{c2} ，其中 $\omega_{c2} < \omega_{c1}$ (ω_{c2} 为校正后系统的幅值穿越频率)

该点处: $\varphi_1(\omega_{c2}) = -180^\circ + \gamma_2 + (5^\circ \sim 12^\circ) \Rightarrow \omega_{c2}$

④ 决定滞后网络的零点 $\frac{1}{\beta T}$ (即决定滞后网络的位置), 取 $\frac{1}{\beta T} = \frac{\omega_{c2}}{10} \Rightarrow \beta T$

⑤ 求 β : $L_1(\omega_{c2}) = -20 \lg \beta \Rightarrow \beta = 10^{\frac{L_1(\omega_{c2})}{20}}$

【超前校正基本思路示例】



$$\textcircled{3} \begin{cases} \varphi_m = \gamma_2 - (\gamma_1 - (5^\circ \sim 12^\circ)) \\ \Rightarrow \alpha \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} \omega_{c2} = \omega_m \\ L_1(\omega_{c2}) = -10\lg\alpha \\ \Rightarrow \omega_{c2} = \omega_m \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} \alpha, \omega_m \Rightarrow T \\ \Rightarrow G_c(s) = \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} \end{cases}$$

⑥ 校验 γ_2 是否合格，不合格重做

【利用伯德图法设计滞后校正装置的步骤】

- ① 求出满足稳态性能指标的开环增益 K 值。
- ② 根据求出的 K 值，画出校正前的Bode图，确定此时的幅值穿越频率 ω_{c1} 和相位裕度 γ_1 。（①、②为准备工作）
- ③ 选择校正后系统的幅值穿越频率点 ω_{c2} ，使其相位裕度满足要求。

在校正前的幅频特性曲线寻找频率点 ω_{c2} 作为校正后系统的幅频穿越点，使其相位为： $\varphi_1(\omega_{c2}) = -180^\circ + \gamma_2 + (5^\circ \sim 12^\circ)$

γ_2 为校正后的期望相位裕度。

$5^\circ \sim 12^\circ$ 是相位滞后网络在 $\omega = \omega_{c2}$ 点引起的相位滞后量。

④ 选择滞后校正网络零点 βT （确定滞后校正环节的位置）

$$\frac{1}{\beta T} = \left(\frac{1}{2} \sim \frac{1}{10}\right) \omega_{c2}$$

理论上讲， $\frac{1}{\beta T}$ 小于 ω_{c2} 越远，相位滞后网络的相位滞后特性对系统的影响越小，所以 $\frac{1}{\beta T}$ 选得越小越好。

但因为当 $\frac{1}{\beta T}$ 小于 ω_{c2} 一定距离后， $\frac{1}{\beta T}$ 减小对 ω_{c2} 点的相位滞后量影响很小。又因为 $\frac{1}{\beta T}$ 小，则要求 T 大，给物理实现带来具体困难，所以一般选 $\frac{1}{\beta T}$ 在 ω_{c2} 的 $\frac{1}{2} \sim \frac{1}{10}$ 倍频处即可。

⑤ 求滞后校正网络中的 β 和 T 值:

为使校正后系统的幅值穿越频率为 ω_{c2} , 必须把校正前系统在 ω_{c2} 的幅值 $L_1(\omega_{c2})$ 衰减到0dB。而滞后网络在频率 $>1/\beta T$ 后提供的幅值衰减量为 $-20\lg\beta$ 。即当相位滞后校正网络起作用后应有:

$$20\lg\beta + L_1(\omega_{c2}) = 0$$

$$20\lg\beta = -L_1(\omega_{c2})$$

$$\beta = 10^{\frac{L_1(\omega_{c2})}{20}}$$

$$T = \frac{10}{\beta\omega_{c2}} \rightarrow G_c(s) = \frac{1 + \beta Ts}{1 + Ts}$$

⑥ 画出校正后的Bode图:

确定此时的幅值穿越频率 ω_{c2} 和相位裕度 γ_2 , 校验系统的性能指标。一定要校验, 不满足重做。

[例] 已知一单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{2500K_g}{s(s+25)}$ 。

试设计一个相位滞后校正装置满足：

(1) 相位裕度大于 45° ；

(2) 对单位速度函数输入，输出的稳态误差小于或等于 $0.01rad$ 。

[解]：① 对 I 型系统 $e_{ss} = 1/K_v$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_k(s) G_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2500K_g}{s(s+25)} G_c(s) = 100K_g$$

$$\text{要求 } e_{ss} = \frac{1}{100K_g} \leq 0.01, \text{ 即 } K_g \geq 1, \text{ 取 } K_g = 1$$

$$G(j\omega) = \frac{100}{j\omega(1 + 0.04\omega j)} \quad \text{写成时间常数形式}$$

② 画出 $K_g=1$ 时未校正系统Bode图，确定此时的 ω_{c1} 和 γ_1 。

$$L_1(\omega) = 20\lg 100 - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{1 + (0.04\omega)^2}$$

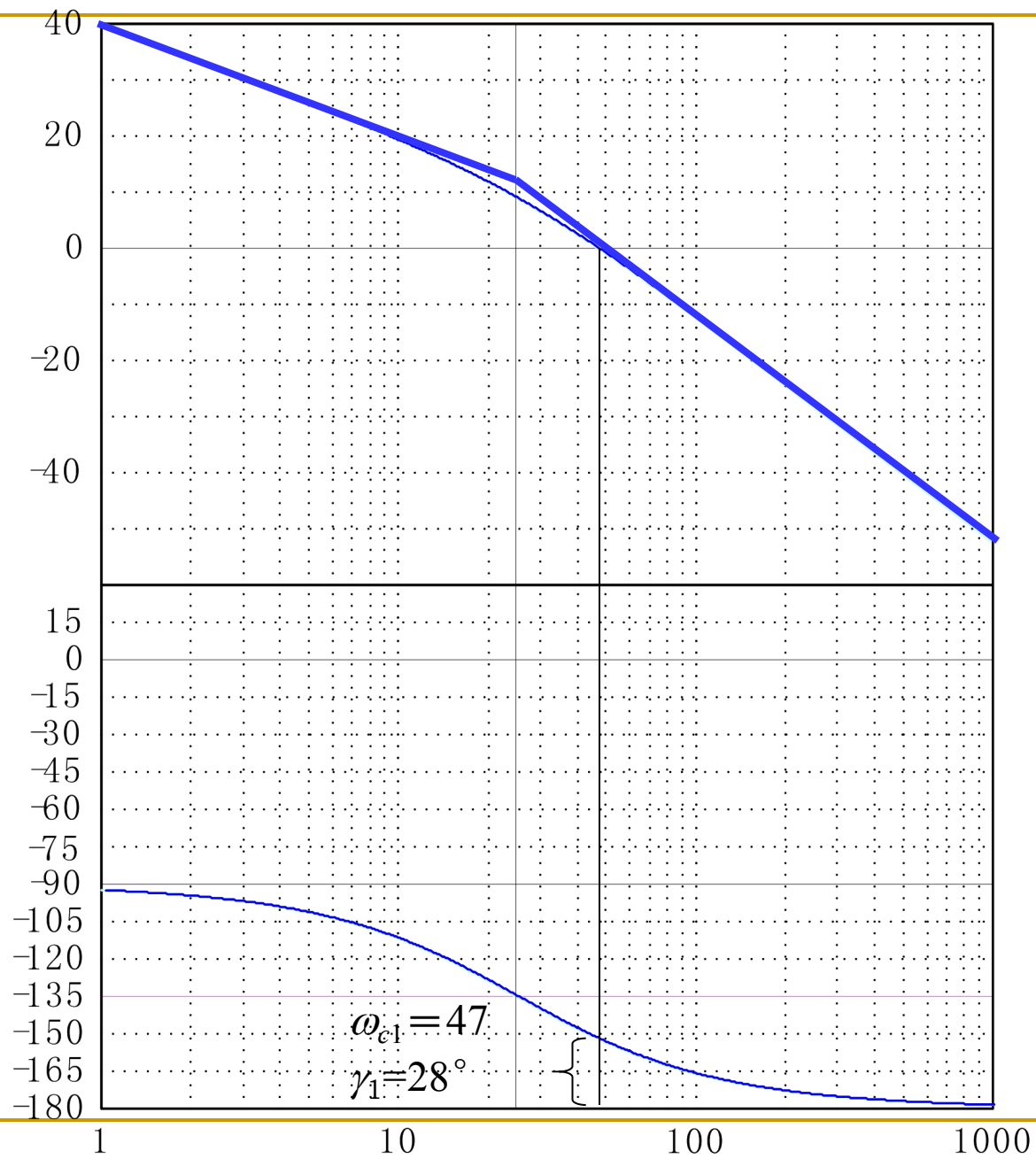
$$\text{令 } L_1(\omega)=0 \text{ 得: } L_1(\omega) = 20\lg \frac{100}{\omega\sqrt{1 + (0.04\omega)^2}} = 0$$

$$\omega_{c1} \approx 47, \quad \varphi_1(\omega_{c1}) = -90^\circ - \text{tg}^{-1} 0.04\omega_{c1} = -152^\circ$$

$$\gamma_1 = 180^\circ + \varphi_1(\omega_{c1}) = 180^\circ - 90^\circ - \text{tg}^{-1} 0.04\omega_{c1} = 28^\circ$$

$$\text{若按渐近线计算: } L_1(\omega) \approx 20\lg \frac{100}{\omega(0.04\omega)} = 0, \quad \omega_{c1} \approx 50$$

$$\gamma_1 = 180^\circ + \varphi_1(\omega_{c1}) = 180^\circ - 90^\circ - \text{tg}^{-1} 0.04\omega_{c1} = 26.6^\circ$$



③ 选择校正后系统的幅值穿越频率点 ω_{c2} ，使得在 ω_{c2} 处未校正系统的相位滞后量为：

$$\varphi_1(\omega_{c2}) = -180^\circ + \gamma_2 + (5^\circ \sim 12^\circ) = -180^\circ + 45^\circ + 5^\circ = -130^\circ$$

$$\varphi_1(\omega_{c2}) = -90^\circ - \operatorname{tg}^{-1} 0.04\omega_{c2} = -130^\circ$$

$$\operatorname{tg}^{-1} 0.04\omega_{c2} = 40^\circ$$

$$\omega_{c2} = 25 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \approx 21$$

④ 求出滞后校正网络中的 β 值：在 $\omega_{c2}=21$ 处，未校正系统在 ω_{c2} 的幅值为 $L_1(\omega_{c2})$ 。

$$L_1(\omega_{c2}) = 20[\lg 100 - \lg \omega_{c2} - \lg \sqrt{1 + (0.04\omega_{c2})^2}] \Big|_{\omega_{c2}=21} \approx 11.24$$

$$-20 \lg \beta = L_1(\omega_{c2})$$

$$\beta = 10^{-\frac{L(\omega_{c2})}{20}} \approx 0.274$$

⑤ 选择校正网络极点和零点

$$\frac{1}{\beta T} = \frac{\omega_{c2}}{10} = 2.1 \quad \beta T = 0.48$$

$$\frac{1}{T} = \beta \frac{\omega_{c2}}{10} = 2.1\beta = 0.575 \quad T = 1.74$$

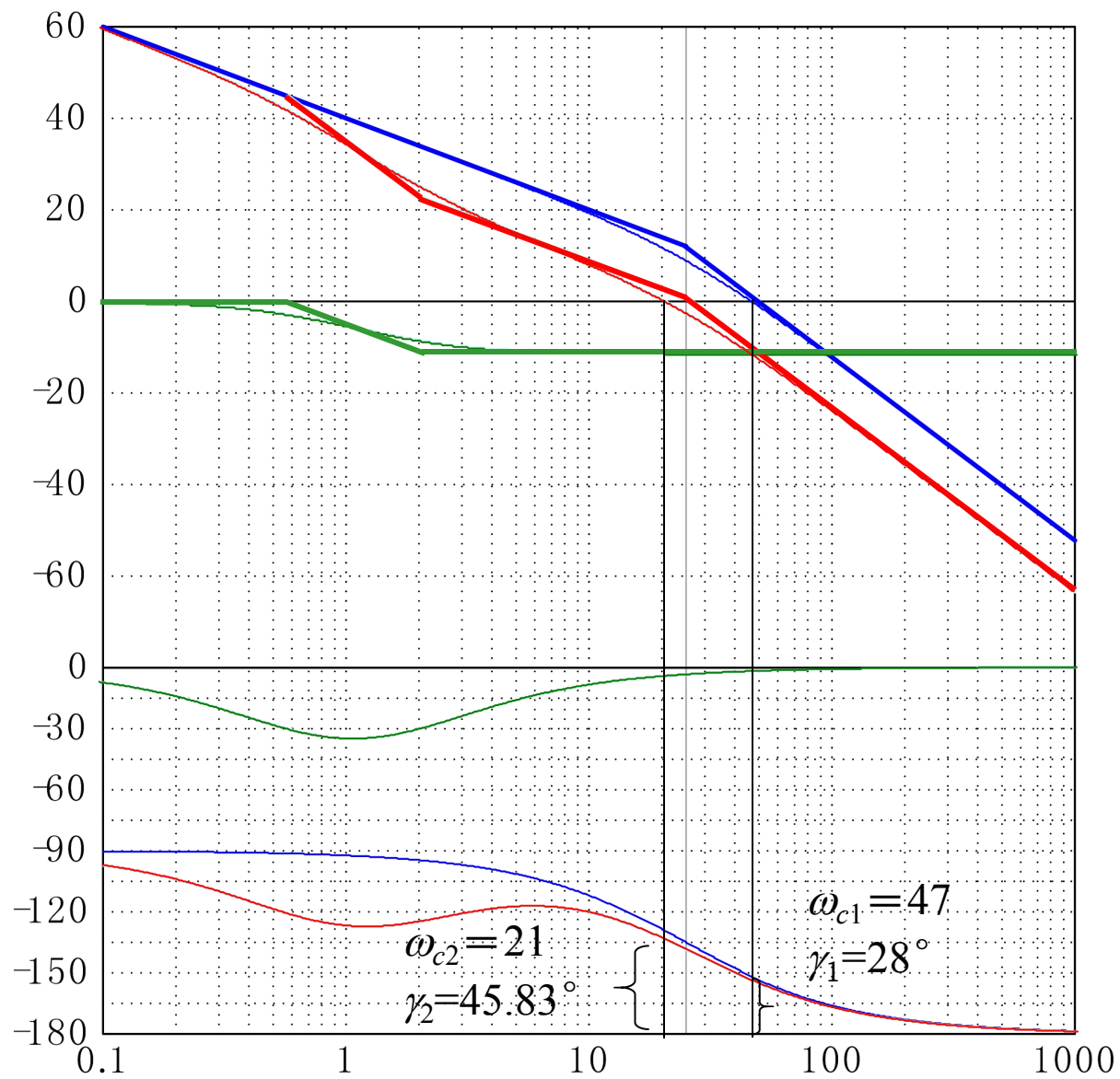
$$G_c(s) = \frac{1 + 0.48s}{1 + 1.74s}$$

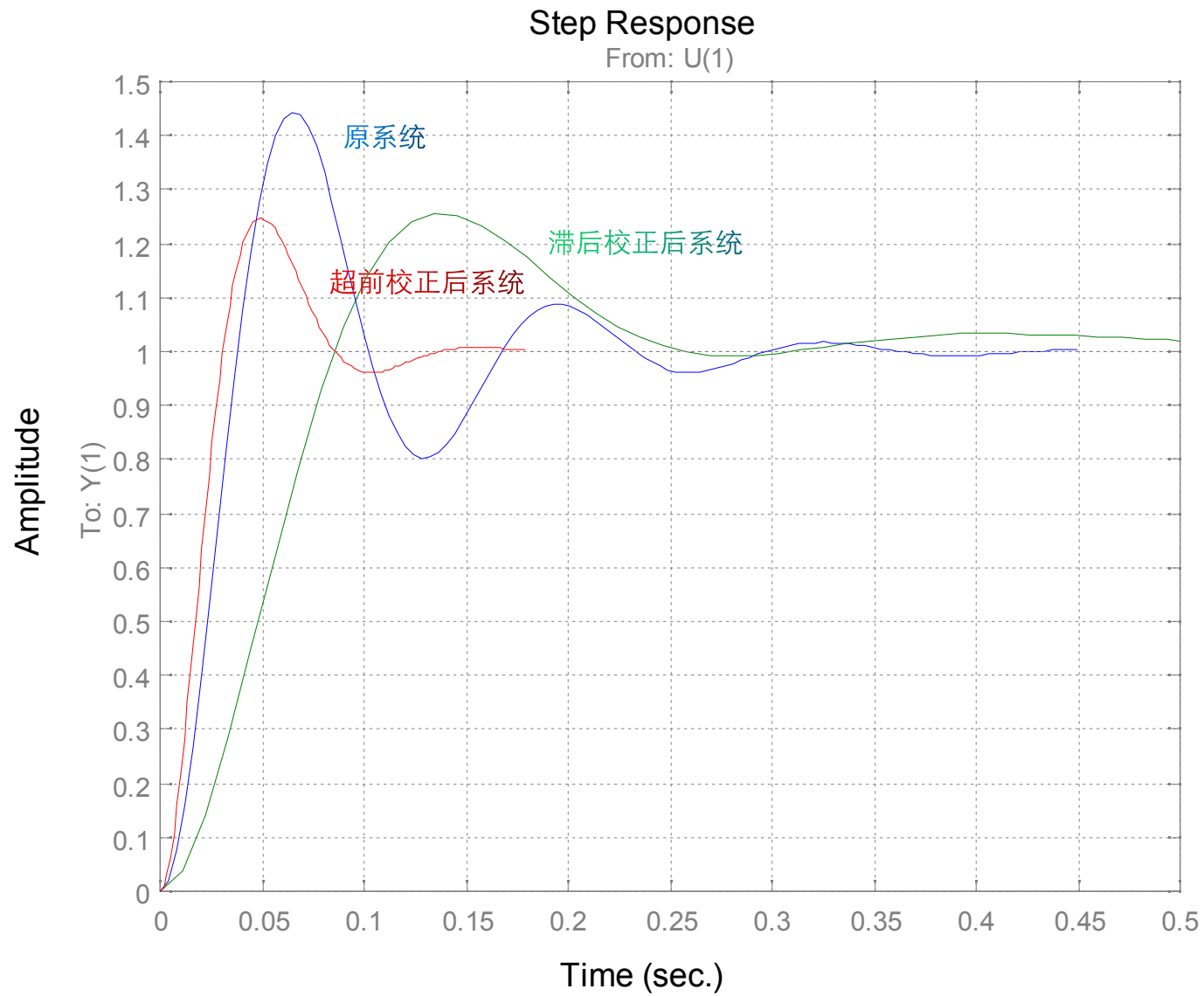
$$G_k(s) = G_c(s)G(s) = \frac{100(1 + 0.48s)}{s(1 + 0.04s)(1 + 1.74s)}$$

⑥ 画出校正后的Bode图，确定此时的幅值穿越频率 ω_{c2} 和相位裕度 γ_2 ，校验系统的性能指标。此时

$$\varphi_2(\omega) = -90^\circ - \text{tg}^{-1} 0.04\omega - \text{tg}^{-1} 1.74\omega + \text{tg}^{-1} 0.48\omega$$

$$\varphi_2(\omega_{c2})|_{\omega_{c2}=21} = -134.17^\circ, \quad \gamma_2 = 180^\circ + \varphi_2(\omega_{c2}) = 45.83^\circ$$





四、相位滞后校正对系统的影响和限制

1. 影响：

- ① 从Bode图看系统的幅值穿越频率 ω_c 减小了，对应 ω_b 减小
- ② 幅频特性在 ω_c 附近的斜率减小了，即曲线平坦了；
- ③ 改善了系统的相位裕度 γ 和增益裕度 K_g ，提高了系统的相对稳定性；
- ④ 减小了系统的最大超调量，但上升时间等增大；
- ⑤ 滞后校正本身对系统的稳态误差没有影响。

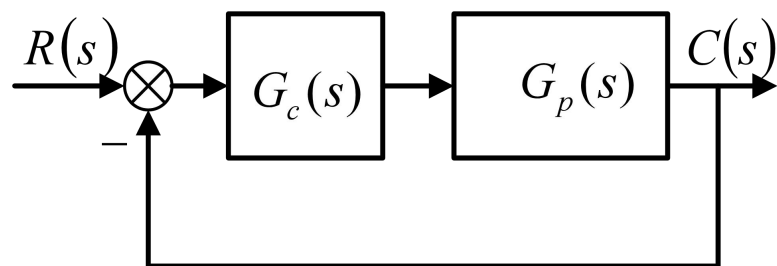
2. 限制：

当系统在低频段相频特性上找不到满足系统相位裕度点时，不能用相位滞后校正。

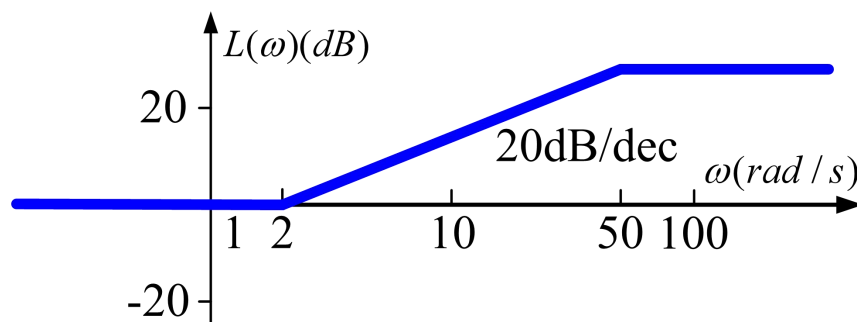
五、相位超前和相位滞后校正小结

- **相位超前校正**通过在幅值穿越频率点附近，提供一个**相位超前量**而使系统的相位裕度满足要求。**相位滞后校正**通过对中频及高频**幅值衰减**的特性，使幅值穿越频率向低频方向移动，同时使中频及高频的相位特性基本不变，从而使系统的相位裕度满足要求。
- 相位超前校正由于幅频特性在中频及高频有所提升，使得**带宽增大**，而带宽增大就意味着调节时间减少。而滞后校正的中频及高频衰减使**带宽变窄**。所以，对同一系统而言，**超前校正的带宽总大于滞后校正的带宽**。因此，如希望快的响应，就采用超前校正。然而，大的带宽同时意味着高频增益的增大，使噪声信号得以通过，在需要抑制干扰及高频噪声的情况下，可考虑采用滞后校正。

[例] 已知系统结构图如图(a)所示，其中 $G_c(s)$ 为校正装置， $G_p(s)$ 为被控对象，已知 $G_c(s)$ 是最小相位传递函数，其伯德图如图(b)所示。



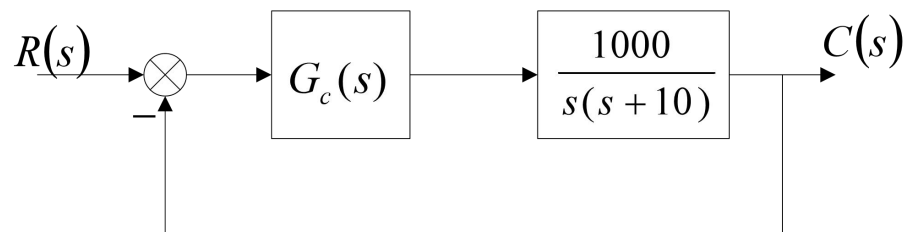
图(a)



图(b)

1. 写出校正装置 $G_c(s)$ 的传递函数；
2. 已知 $G_p(s)=20/[s(s+1)]$ ，分别画出 $G_p(s)$ 和 $G_c(s)G_p(s)$ 的渐近对数幅频特性；
3. 根据渐近对数幅频特性，分别计算校正前和校正后的幅值穿越频率和系统的相位裕度。

[例] 已知系统如图所示。



1. 画出 $G_c(s)=1$ 时的开环对数幅频特性图，并求出系统的幅值穿越频率 ω_c 和相位稳定裕度 γ 。

2. 说明下列表达式各是什么类型的校正装置？

1、 $G_{c1}(s) = K(T_1s + 1), \quad T > 0, \quad K > 0$

2、 $G_{c2}(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{(T_2s + 1)}, \quad T_1 > T_2 > 0, \quad K > 0$

3、 $G_{c3}(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{(T_2s + 1)}, \quad T_2 > T_1 > 0, \quad K > 0$

3. 选择2中合适的校正装置 $G_c(s)$ 使系统满足下列要求：

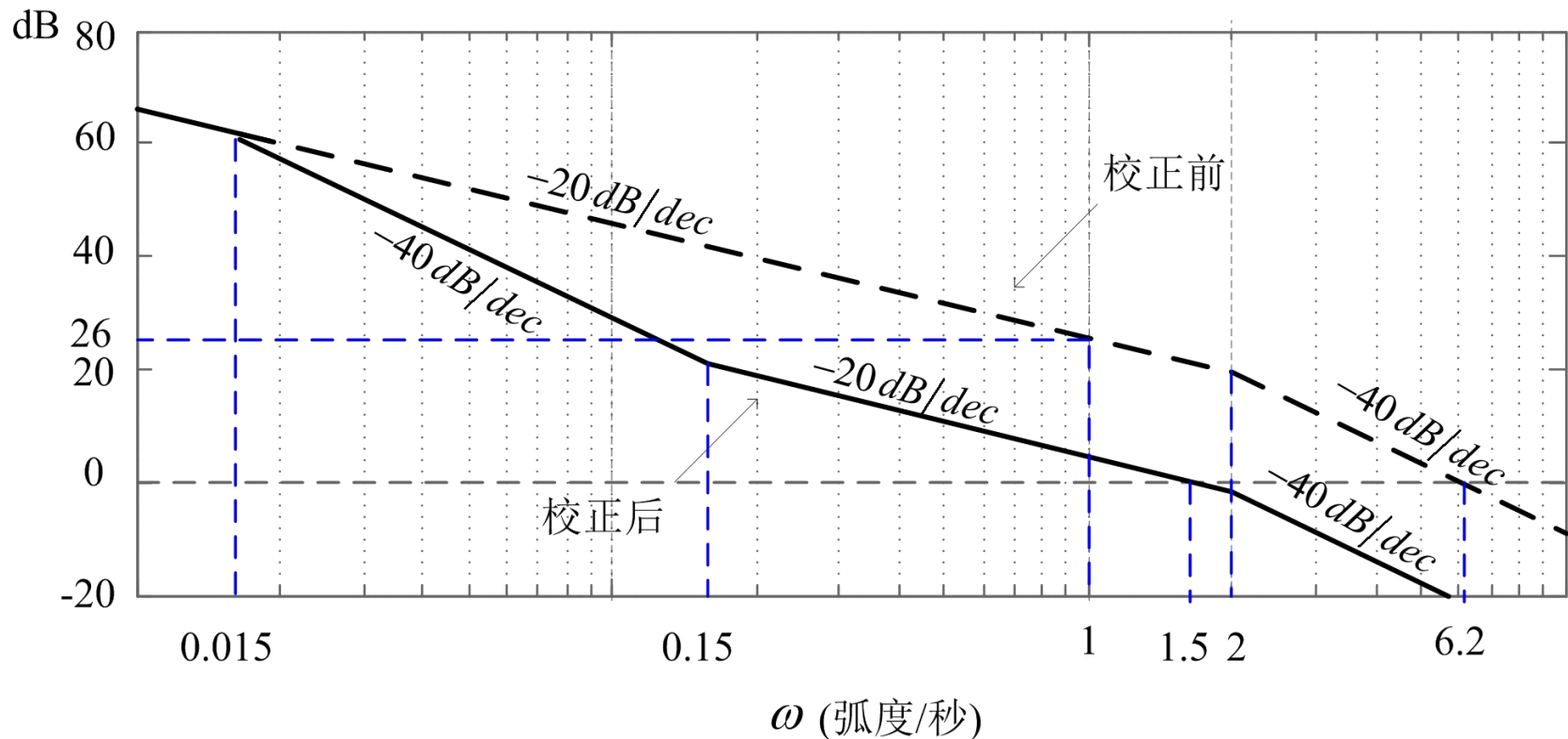
①对斜坡输入的稳态误差小于等于0.1；

②校正后的系统幅值穿越频率 $\omega_c=2\text{rad/sec}$ 以及相位稳定裕度 $\gamma=45^\circ$ 。

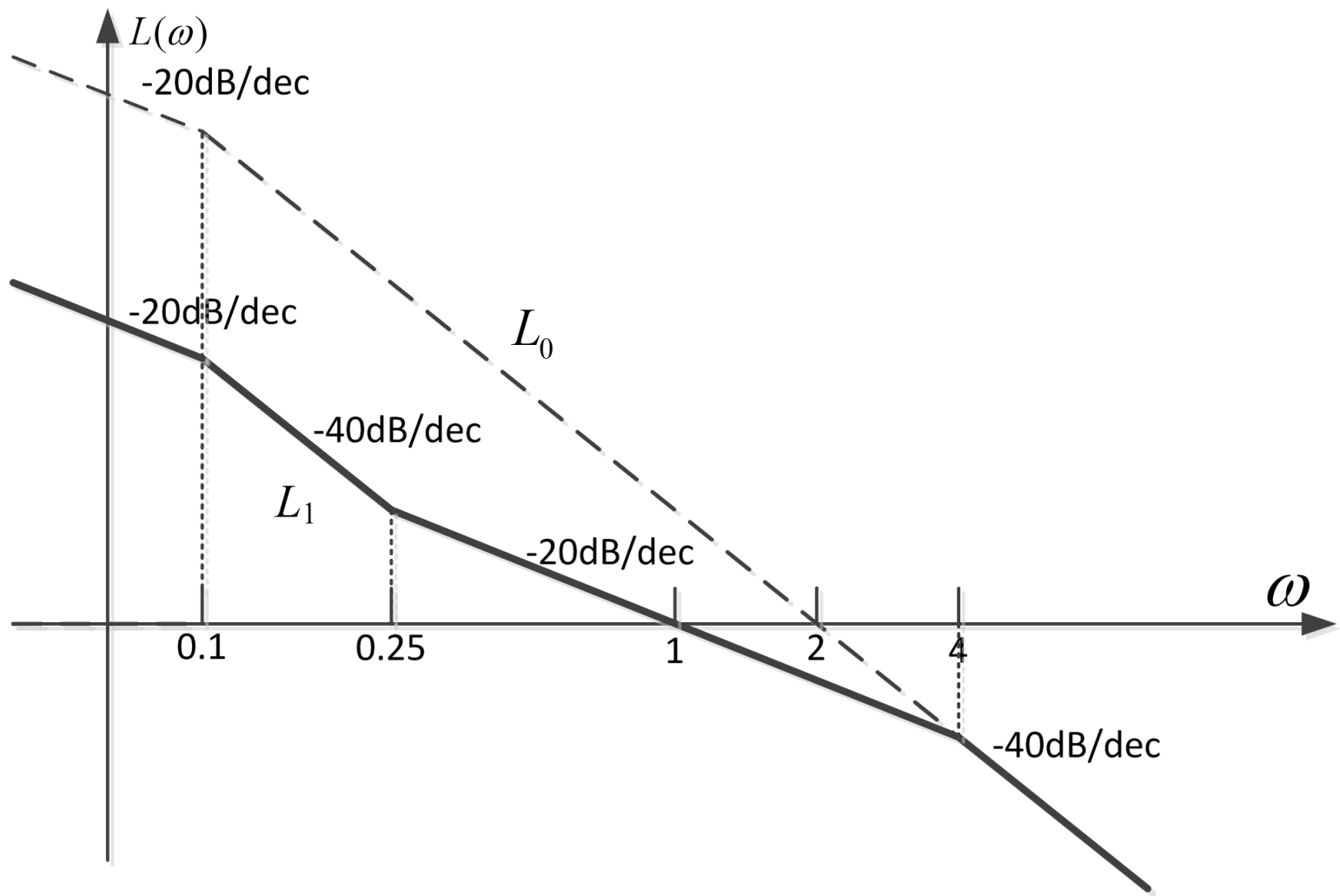
要求说明选择校正装置的理由，并确定所选校正装置的参数。

[例] 已知最小相位系统校正前和校正后的伯德图如图所示。

- (1) 写出校正前和校正后系统的传递函数。
- (2) 计算校正前和校正后系统的相位裕度。
- (3) 写出校正装置的传递函数，并说明该校正装置在该系统中的作用。



[例] L_0 、 L_1 分别为原系统和处理后的系统。说明做了什么处理？



小结

- 相位滞后校正及其特性
- 采用滞后校正装置校正时使用到的有益和应避免的特性
- 基于伯德图的滞后校正方法步骤

作业： 7.3 (2)