

概率论与数理统计期末考试模拟题(四)

一、填空题(每空3分,共18分)

1. 设 A, B 互不相容, $P(A) = 0.3, P(B) = 0.5$, 则 $P(\bar{B}|\bar{A}) =$ _____.
2. 设 X 服从二项分布 $B(2, p)$, Y 的分布律为 $P\{Y = k\} = (1-p)^{k-1}p, k = 1, 2, \dots$,
若已知 $P(X \geq 1) = \frac{5}{9}$, 则 $D(Y) =$ _____.
3. 设随机变量 (X, Y) 服从区域 $G = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的均匀分布, 则
 $P\left(\min(X, Y) \geq -\frac{1}{2}, \max(X, Y) \leq \frac{1}{2}\right) =$ _____.
4. 若 X_1, X_2, X_3 独立同分布, $P(X_n = 1) = \frac{1}{4}, P(X_n = -1) = \frac{3}{4}, Y_n = X_n X_{n+1}, n = 1, 2,$
则 $P(Y_2 = 1 | Y_1 = 1) =$ _____.
5. 若有一个容量为11的样本, 其样本均值为2, 样本二阶原点矩为10, 则样本
方差为_____.
6. 设 (X_1, X_2, \dots, X_5) 是取自总体 $N(0, 1)$ 的样本, 统计量 $T = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{C(X_3 + X_4)^2 + X_5^2}}$, 则当
 $C =$ _____时, T 服从 $t(2)$ 分布.

二、单项选择题(每题3分,共15分)

1. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = 0.4\Phi(x) + 0.6\Phi(x-1)$, $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) =$ ().
(A) 0 (B) 0.4 (C) 0.5 (D) 0.6
2. 将长为1米的木棍随机截成两段, 则此两段长度的相关系数等于().
(A) -1 (B) 0 (C) 0.5 (D) 1
3. 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, i = 1, 2$, 且满足 $P(X_1 + X_2 = 0) = 1$, 则
 $P(X_1 = X_2) =$ ().
(A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1
4. 设 $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 独立同分布于Poisson分布 $P(\lambda)$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则有().
(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\lambda}{n\lambda} \leq x\right) = \Phi(x)$ (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right) = \Phi(x)$
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right) = \Phi(x)$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leq x\right) = \Phi(x)$

5 下面说法中正确的是 ().

- ① 样本均值是总体期望的无偏估计
- ② 样本 k 阶原点矩是总体 k 阶原点矩的无偏估计
- ③ 样本方差是总体方差的无偏估计
- ④ 样本 k 阶中心矩是总体 k 阶中心矩的无偏估计

(A) ①②③ (B) ①③④ (C) ①②④ (D) ①②③④

三、(10 分) 设某地区移动、电信、联通的用户比例为 4:3:2, 一份对运营商的抽样调查数据表明: 移动、电信、联通的好评率分别为 80%、60%、70%. 现从这些数据资料中任取一位用户的评价,

- (1) 求该评价为好评的概率;
- (2) 若该评价是好评, 求该用户是电信用户的概率.

四、(10 分) 设 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ a + b \arcsin x, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$

- (1) a, b 满足什么条件时, $F(x)$ 为某随机变量的分布函数?
- (2) 若 $F(x)$ 为连续型随机变量的分布函数, 求 a, b .

五、(10 分) 设 X 服从参数为 λ 的指数分布, $Y = [X] + 1$, $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. (1) 求 Y 的分布; (2) 求在已知 $Y = 2$ 的条件下, X 的条件概率密度.

六、(12 分) 设随机变量 ξ, η 独立同分布, $\xi \sim U\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

- (1) 求 $\xi + \eta$ 的概率密度;
- (2) 若 $X = \xi \cos \eta, Y = \xi \sin \eta$, 问 X, Y 是否不相关?

七、(10 分) 设总体 X 的密度

$$f(x) = \begin{cases} a|x - \mu|, & \mu - \theta \leq x \leq \mu + \theta, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}, \quad (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ 为取自总体 } X \text{ 的样本.}$$

- (1) 求 a ;
- (2) 若 μ 已知, 求 θ 的矩估计量.

八、(15 分) 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本.

- (1) 若 μ 已知, σ^2 未知, 求 σ^2 的极大似然估计量;
- (2) 若 μ 已知, 由 (1) 构造 σ 的置信水平为 95% 的双侧置信区间;
- (3) 若已知 $\sigma = 2$, 考虑如下的假设检验问题,

$$H_0: \mu = 2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu = 3$$

检验由拒绝域 $W = \{\bar{x} \geq 2.8\}$ 确定, 当 $n = 36$ 时, 求检验犯两类错误的概率.

(用 $\Phi(\cdot)$ 表示, 不用计算)