

信息科学的矩阵分析基础

贺丽君

信息与通信工程学院

Email: lijunhe@mail.xjtu.edu.cn

2023-02

内容提要

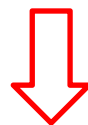
- 什么是矩阵
 - 矩阵分析研究的内容
 - 矩阵分析的应用
 - 关于本课程的学习
-

内容提要

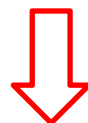
- 什么是矩阵
 - 矩阵分析研究的内容
 - 矩阵分析的应用
 - 关于本课程的学习
-

知识回顾：信号的时域描述

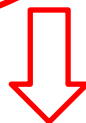
$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$



$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$



$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$x[n]$

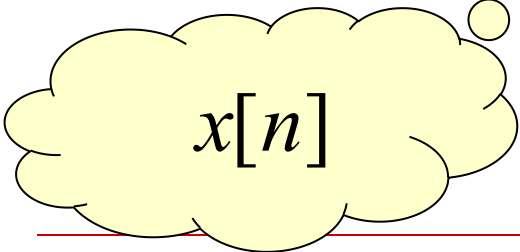
知识回顾：LTI系统对信号的响应

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

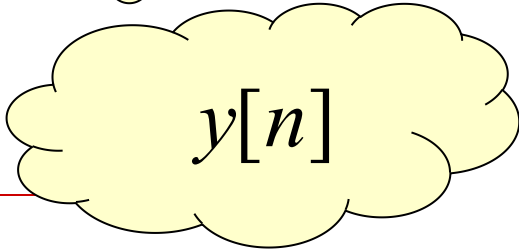
时不变性： $\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$

齐次性： $x[k]\delta[n-k] \rightarrow x[k]h[n-k]$

可加性： $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$



$x[n]$



$y[n]$

什么是矩阵

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

假设 $x[n]$ 和 $h[n]$ 都是长度为 N 的有限长序列，则有：

$$y[0] = x[0]h[0]$$

$$y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[0]$$

$$\vdots$$

$$y[2N-3] = x[N-2]h[N-1] + x[N-1]h[N-2]$$

$$y[2N-2] = x[N-1]h[N-1]$$

什么是矩阵

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[2N-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h[1] & h[0] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h[N-1] & h[N-2] \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h[N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

- 矩阵描述了一种线性变换
 - 矩阵乘以向量描述了线性系统对信号的响应
-

什么是矩阵

□ 一般矩阵能描述线性变换吗？

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k] \quad h[n] \text{长度不受限, 非因果}$$

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[n] \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & & & & \\ \cdots & & & & \\ h[n] & h[n-1] \cdots h[n-(N-1)] & & & \\ \cdots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

什么是矩阵

□ 线性但是时变系统还成立吗?

$$y[n_1] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n_1 - k]$$

$$y[n_2] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]g[n_2 - k]$$

不同时刻观察系统的单位脉冲响应发生变化

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ \vdots \\ y[n_2] \\ \vdots \\ y[n_1] \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & & & & \\ \dots & & & & \\ g[n_2] & g[n_2 - 1] \cdots g[n_2 - (N - 1)] & & & \\ \dots & & & & \\ h[n_1] & h[n_1 - 1] \cdots h[n_1 - (N - 1)] & & & \\ \dots & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N - 1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

矩阵变换的特点

- 矩阵所描述的输入-输出关系是线性关系，而物理世界的绝大多数现象或过程都可以用线性系统近似——矩阵的线性特性与物理世界相契合
 - 矩阵变换所处理的未知量个数是有限的，且输入输出信号都是离散的——矩阵处理信号的方式与计算机的工作机制相契合
-

内容提要

- 什么是矩阵
 - 矩阵分析研究的内容
 - 矩阵分析的应用
 - 关于本课程的学习
-

矩阵分析研究的内容

➤ 矩阵 A

- 矩阵代数
- 特殊矩阵及其性质
(投影矩阵、酉阵、
正交矩阵、Markov矩阵)
- 矩阵分解(LU、QR、
SVD、特征分解...)

➤ 向量 x

- 向量及其相互关系
- 向量空间
- 欧氏空间

➤ 矩阵对向量的作用: Ax

- $Ax=b$: 线性方程组
 - $Ax=\lambda x$: 特征值分析
 - $y=Ax$: 线性变换
-

内容提要

- 什么是矩阵
 - 矩阵分析研究的内容
 - 矩阵分析的应用
 - 关于本课程的学习
-

新闻的自动分类

根据新闻内容实现自动分类

Google 新闻

板块

Top Stories

World

U.S.

Business

Technology

Entertainment

Sports

Science

Health

管理板块



有关下列项的更多新闻:

刘佳宇

冬季奥林匹克运动会

刘佳宇单板滑雪U型场摘银！中国收获平昌冬奥首枚奖牌
新浪网 · 24 分钟前

相关报道

平昌冬奥中国首枚奖牌！刘佳宇单板U型场地摘银创造历史
地方新闻媒体 · 千龙网 · 11 分钟前

单板滑雪——女子U型场地：刘佳宇获得银牌
新华网 · 19 分钟前

刘佳宇平昌冬奥会收获银牌13岁时获全国冠军
人民网 · 44 分钟前

查看完整报道 →



杰志最惧天津低温 弗兰憋足劲儿要攻破权健城池
新浪网 · 1 小时前



郝佳晨：已缩小与顶尖选手差距盼参加北京冬奥
搜狐 · 2 小时前

相关报道

中国速滑长距离正缩小差距郝佳晨盼团体赛突破
地方新闻媒体 · 千龙网 · 2 小时前

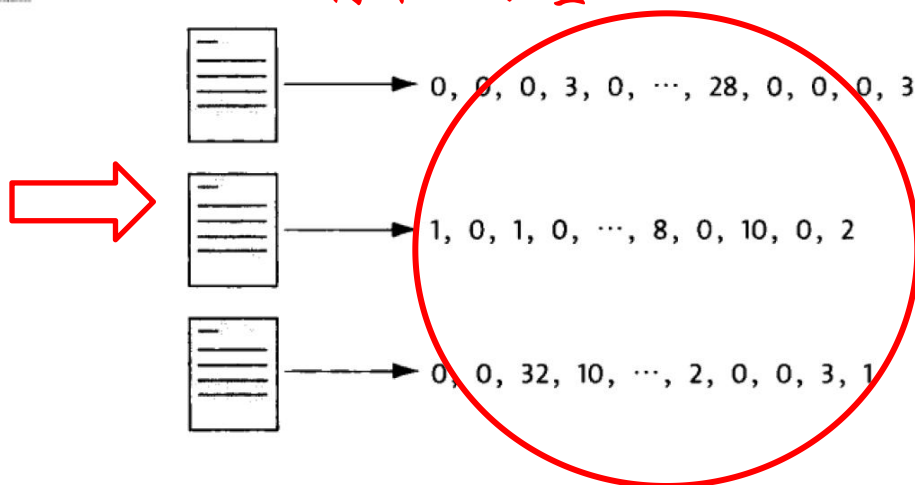
新闻的自动分类

$$TF \times \log \frac{D}{D_w}$$

建立词汇表 对每篇新闻，计算各单词的TF-IDF值

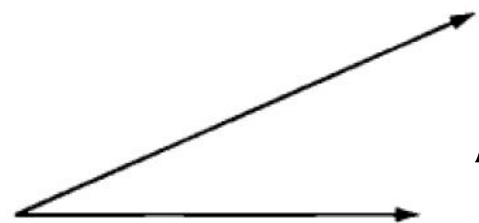
单词编号	汉字词	单词编号	TF-IDF 值
1	阿	1	0
2	啊	2	0.0034
3	阿斗	3	0
4	阿姨	4	0.00052
...
789	服装	789	0.034
...
64000	做作	64000	0.075

特征向量

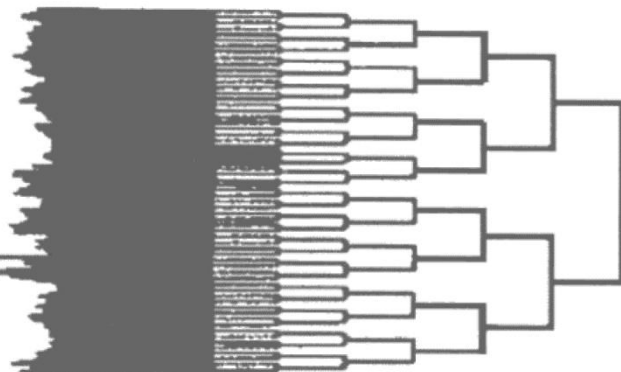


度量相似性——内积

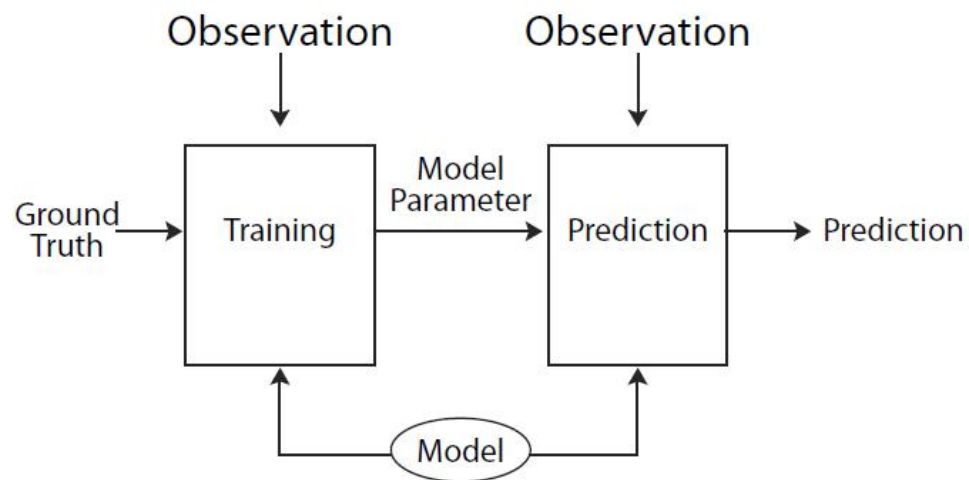
聚类



$$\rho_{s_1, s_2} = \frac{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle}{\|\mathbf{s}_1\| \cdot \|\mathbf{s}_2\|}$$



Netflix电影个性化推荐



电影推荐问题：
预测器设计

Netflix电影个性化推荐

$$\hat{r}_{ui} = \bar{r} + b_u + b_i$$

Users

	Movies							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1		5		2	4			
2	4		3	1			3	
3		5	4		5		4	
4						1	1	2
5	3		?		?	3		
6		?	2		4		?	

$$\text{minimize}_{\{b_u, b_i\}} \sum_{(u,i)} (r_{ui} - \hat{r}_{ui})^2$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \sum_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i)^2$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{c}\|_2^2$$

使上式最小化的 \mathbf{b} 即为
如下方程的解：

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{b} = \mathbf{A}^T \mathbf{c}$$

最小二
乘解

Netflix 电影个性化推荐

$$\|Ab - c\|_2^2$$

$$\text{minimize}_{\{b_u, b_i\}} \sum_{(u,i)} (r_{ui} - \hat{r}_{ui})^2$$

$$\hat{r}_{ui} = \bar{r} + b_u + b_i$$

对应训练集中样本数

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & \dots & 10 & A & B & \dots & E \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 30 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(A^T A) b = A^T c$$

(最小二乘解)

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{10} \\ b_A \\ b_B \\ \vdots \\ b_E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{1A} - \bar{r} \\ r_{3A} - \bar{r} \\ \vdots \\ r_{10E} - \bar{r} \end{pmatrix}$$

待估参数

网页排名

Google

Xi'an Jiaotong University

全部 图片 地图 新闻 视频 更多 设置 工具

找到约 1,850,000 条结果 (用时 0.68 秒)

Google 学术: Xi'an Jiaotong University
Xi'an Jiaotong University - Li - 被引用次数: 8
Study on the strategy of decreasing inertia weight in ... - Guimin - 被引用次数: 136
Xi'an Jiaotong University - Luo - 被引用次数: 8

Xi'an Jiaotong University
en.xjtu.edu.cn/ 翻译此页
Department of Science and Technology · Research Centers · Library · XJTU Museum · Campus Life · Life at XJTU · XJTU Videos · Student Bodies · Campus Scenes · Campus Maps · Campus Internet · Local Culture. © Xi'an Jiaotong University. 2014 Email: ic@mail.xjtu.edu.cn No.28, Xianning West Road, Xi'an Shaanxi, ...
Faculty · Schools and Colleges · Graduate Education · Introduction

西安交通大学
www.xjtu.edu.cn/ 翻译此页
1月8日, 2017年度国家科学技术奖励大会上, 西安交通大学主持的7个项目获得国家科学技术奖。国家自然科学奖、国家技... [详细] · 【我是新传人】向西向远方在雪域高原放飞青春梦想: 【西迁精神再出发】 · 弘扬“西迁精神” 助力“双一流”建设: 【央视中国新闻】西安交大留学生“惊艳”西成高铁: 【陕西日报】西安交大掀起学习习近平总书记重要...
西安交通大学邮件系统 · 行政部门 · 交大综合信息 · 统一身份认证网关

International Students-Xi'an Jiaotong University
en.xjtu.edu.cn/Education/International_Students.htm 翻译此页
Enrollment for Xi'an Jiaotong University Scholarship (2015) (International Postgraduates). 2014-12-25.
Xi'an Jiaotong University International Students Enrollment Details Short-term Chinese Language ...
2014-12-25. Xi'an Jiaotong University International Students Enrollment Details Long-term Chinese Language R...

Baidu 百度

xi'an jiaotong university

网页 新闻 贴吧 知道 音乐 图片 视频 地图 文库 更多 搜索工具

百度为您找到相关结果约2,520,000个

您可以仅查看: **英文结果**

Xi'an Jiaotong University
查看此网页的中文翻译, 请点击 [翻译此页](#)
The unveiling and signing ceremony of the establishment of Xi'an Artificial Intelligence and Robot Industrial Base and XJTU Innovation R... XJTU professor...
en.xjtu.edu.cn/ 百度快照

西安交通大学
1月8日, 2017年度国家科学技术奖励大会上, 西安交通大学主持的7个项目获得国家科学技术奖。国家自然科学奖、国家技... [详细] 【三秦都市报】两代教师备课笔记 诠释...
www.xjtu.edu.cn/ 百度快照 - 206条评价

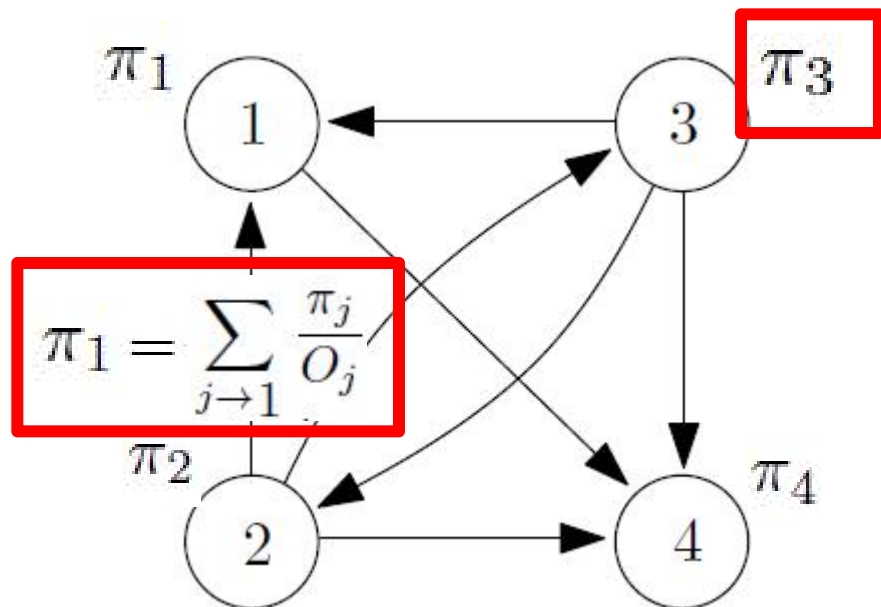
Xi'an Jiaotong University_百度百科
 西安交通大学 (Xi'an Jiaotong University) 简称“西安交大”, 位于古都西安, 是中华人民共和国教育部直属全国重点综合性研究型大学, 是国家“七五”、“八五”首批重点建设高校之一, “211工程”首批重点建设的七所大学之一, “985工程”...
[办学历史](#) [办学条件](#) [学术研究](#) [文化传统](#) [校园环境](#) [更多>>](#)
baike.baidu.com/ 百度快照

Xi'an Jiaotong University - Wikipedia
 Xi'an Jiaotong University (abbreviated XJTU) is one of the C9 League university with strengths in engineering, technology, management, and public health ...
<https://en.wikipedia.org/wiki/...> 百度快照 - 翻译此页

Introduction-Xi'an Jiaotong University
During its more than 120 year history, Xi'an Jiaotong University has forged a set of principles to which it has remained true: devotion to learning ...

网页排名

网页重要性
得分



$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi^T = \pi^T H$$

↓

$$1\pi^T = \pi^T H$$

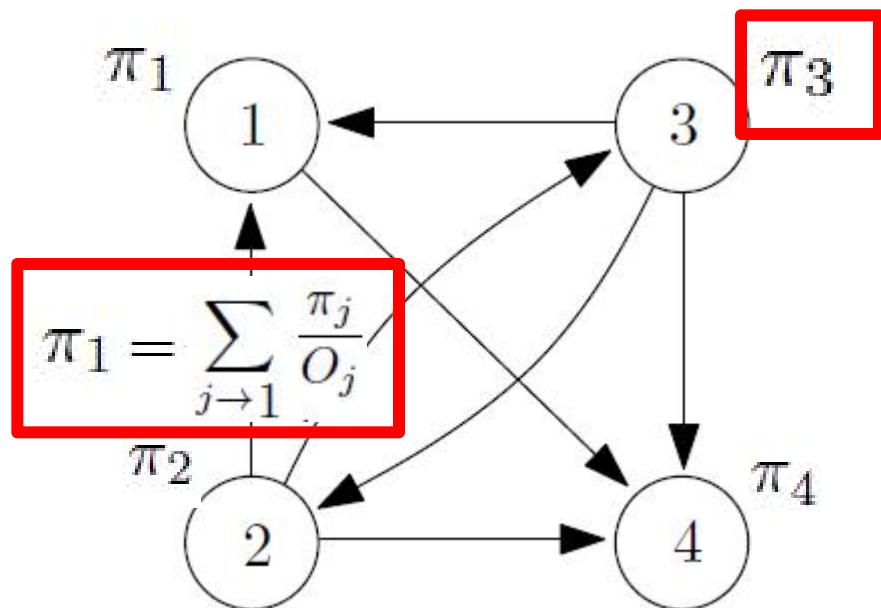
$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

1. A矩阵一定有特征值1?
2. 特征值1对应的特征向量只有一个?

特征值 λ 所对应的特征向量

网页排名

网页重要性
得分



$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\pi^T = \pi^T H$$

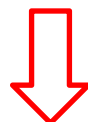
Markov 矩阵

$$\hat{H} = H + \frac{1}{N} (\mathbf{w} \mathbf{1}^T)$$

rank-1 矩阵

$$G = \theta \hat{H} + (1 - \theta) \frac{1}{N} \mathbf{1} \mathbf{1}^T$$

维数巨大



$$\pi^T[k] = \pi^T[k-1] G$$

$$\underline{\pi^{*T} = \pi^{*T} G}$$

特征值
分析

图像压缩 (JPEG2000)

原始图像 v



$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

基变换

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Haar小波基 W

变换系数 c

$$c = W^{-1}v$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

扔掉较小的
系数

阈值量化

重构

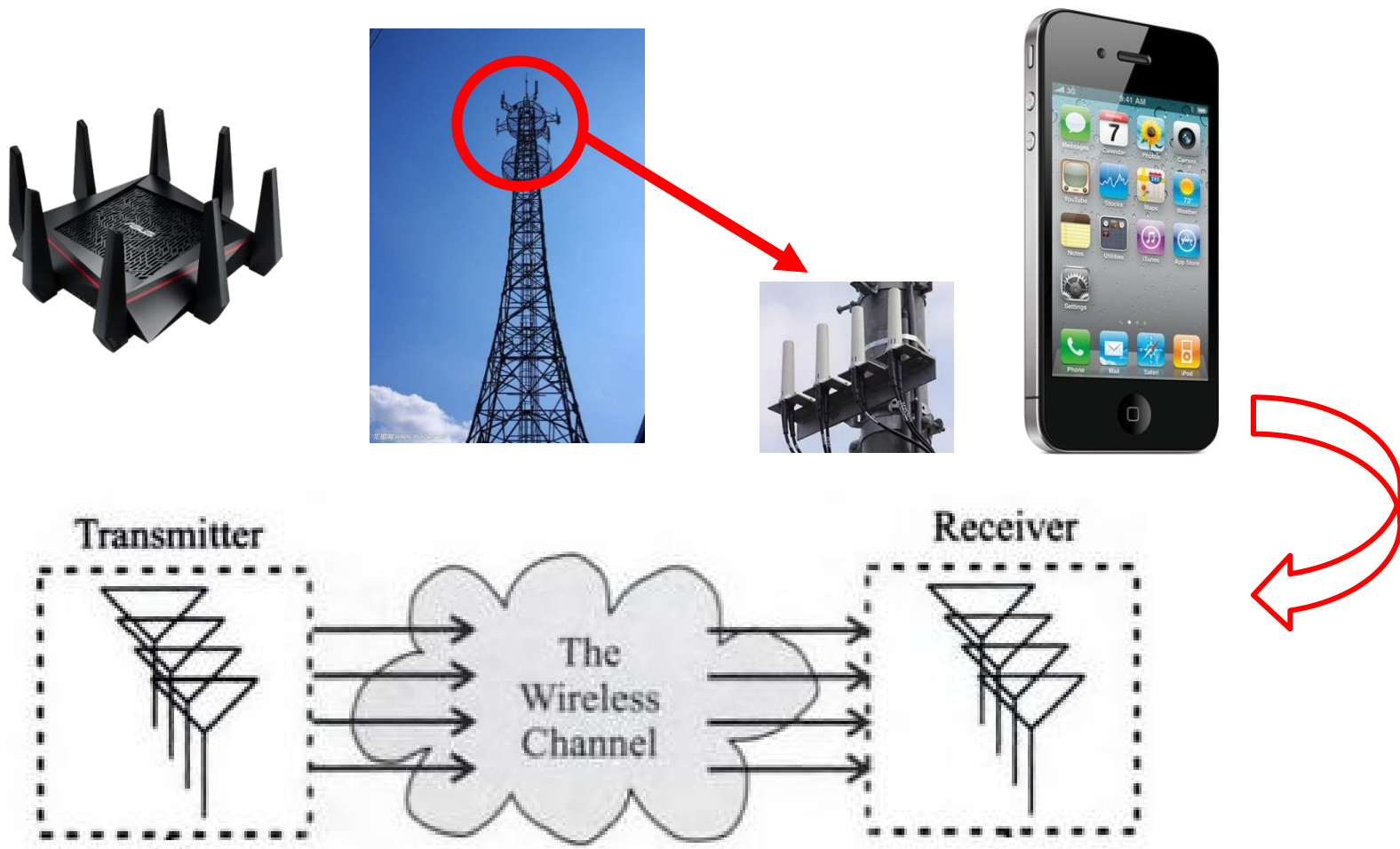
$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = \sum \hat{c}_i w_i$$

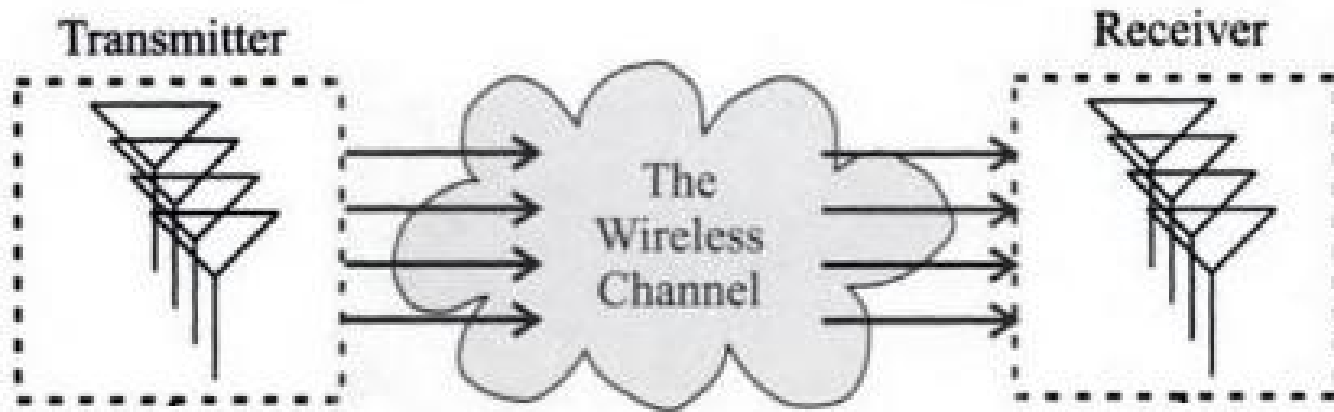
压缩后的图像



多天线通信系统



多天线通信系统



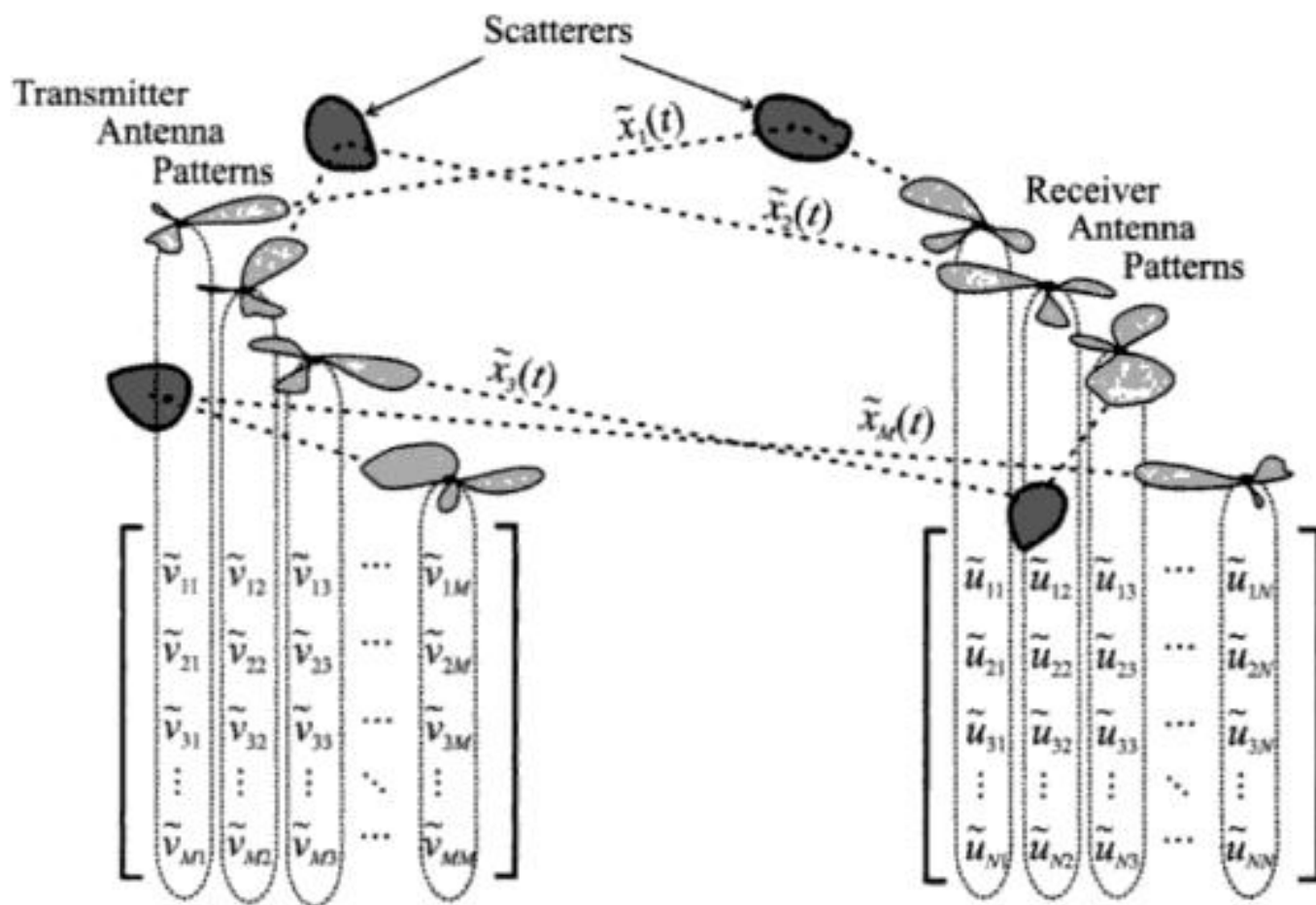
$$\mathbf{y} = \mathbf{U}^H \mathbf{H} \mathbf{V} \mathbf{x} + \mathbf{\Sigma}$$

解耦 ?

多天线通信系统

奇异值分解
(SVD)

$$\Sigma = \mathbf{U}^H \mathbf{H} \mathbf{V} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{H} = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^H$$



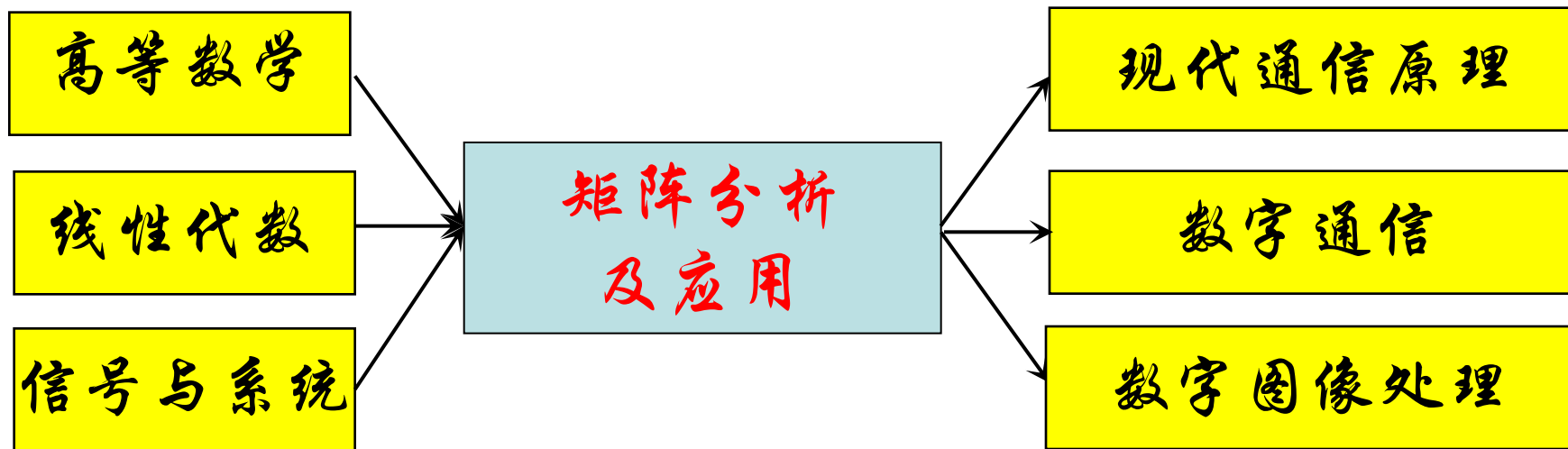
内容提要

- 什么是矩阵
 - 矩阵分析研究的内容
 - 矩阵分析的应用
 - 关于本课程的学习
-

开设的背景和目的

- 数学课程过多关注于抽象的符号运算，忽视数学公式背后的物理内涵与工程意义；专业课程的理论深度不够，导致学生不能自觉地运用数学理论描述和解决复杂的工程问题
 - 2015版培养方案中新增《矩阵分析及应用》工程数学课程，于2018年春季首次开设
 - 实现基础课和专业课的平滑过渡，强调数学方法、物理概念、工程观点相统一
-

课程的性质和地位

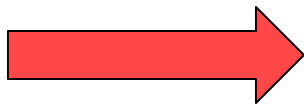


- 课程性质：工程数学
 - 课程特点：理论性、工程性、实践性
 - 与线性代数的关系：观点不同、知识扩充、强调数学直觉和工程应用
-

课程内容 (1)

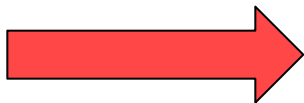
- 理论部分：矩阵理论中最基础、最核心、与信息工程专业关系最紧密的内容

矩阵代数基础



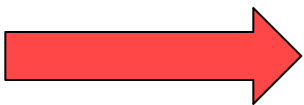
- 矩阵、向量及其运算

线性空间理论



- 线性空间与子空间
- 正交性与子空间投影
- 最小二乘法

特征值理论



- 特征值分析

奇异值理论



- 奇异值分解
- 伪逆

课程内容 (2)

➤ 应用部分：与专业课程、工程实际、学科前沿相结合

与专业课程相关

- FFT算法
- 线性常系数微分/差分方程
- 集总参数电路的矩阵描述与分析

与工程实际结合

- 信道估计
- 新闻的自动分类
- 通信系统接收机设计
- 迫零信道均衡
- 曲线拟合与预测
- Netflix电影推荐
- Google 网页排名
- 多天线通信系统
- 数据压缩

与学科前沿匹配

- 零空间在保密通信中的应用
- 旋转矩阵在数据降维和信号星座设计中的应用

课程内容 (3)

- 第0讲：引言
 - 第1讲：矩阵及其运算
 - 第2讲：向量空间
 - 第3讲：线性方程组
 - 第4讲：线性空间与子空间
 - 第5讲：正交性与子空间投影
-

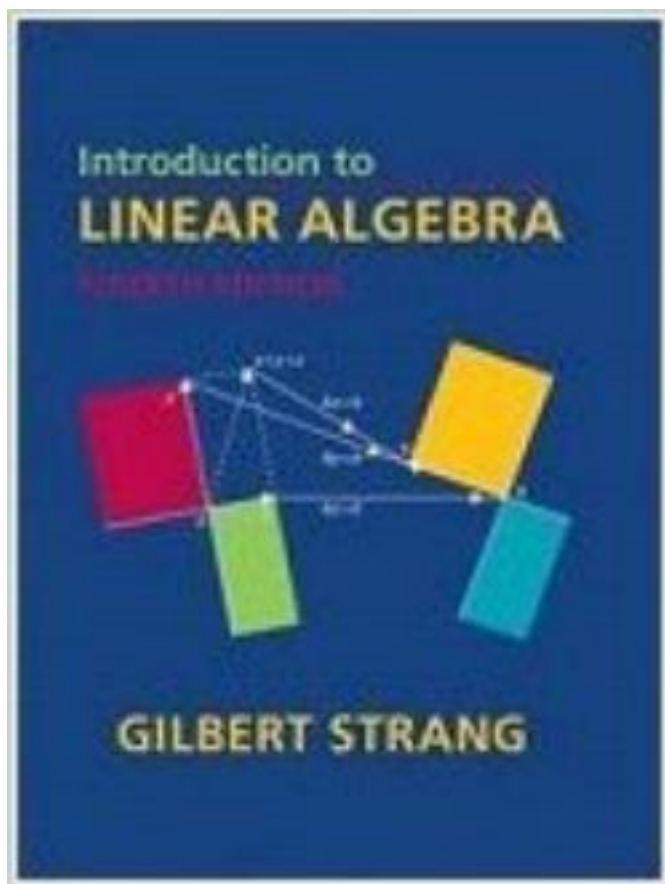
课程内容 (4)

- 第6讲：最小二乘法及其应用
 - 第7讲：正交矩阵
 - 第8讲：特征值分析
 - 第9讲：特征值分析方法的应用
 - 第10讲：奇异值分解
 - 第11讲：伪逆
 - 第12讲：总复习
-

如何学好本课程

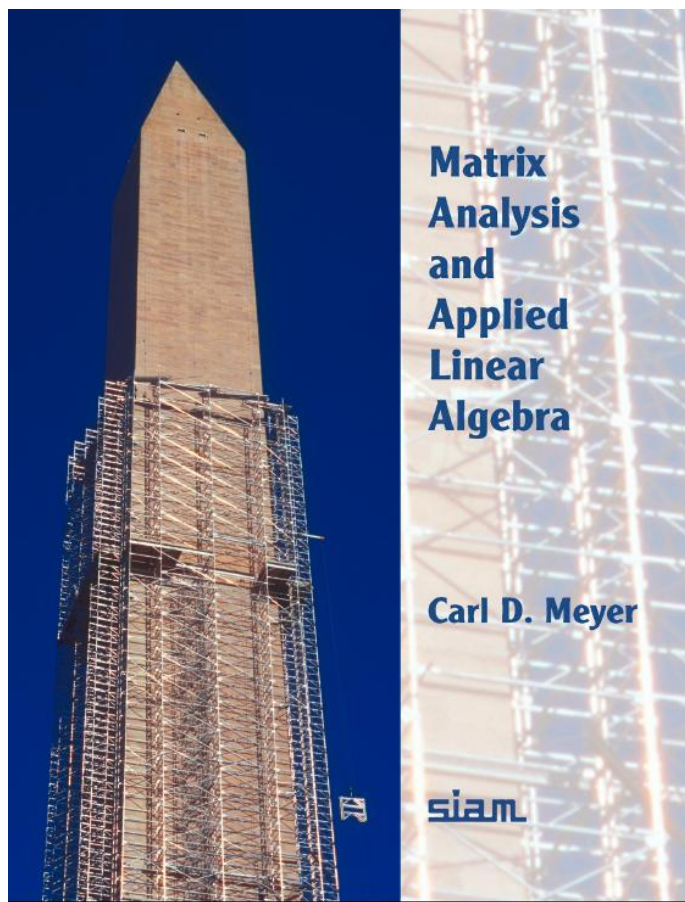
- 抽象与形象相结合
 - 数学方法与物理概念相结合
 - 本门课程与相关课程相结合
 - 基础理论与工程应用相结合
-

教材



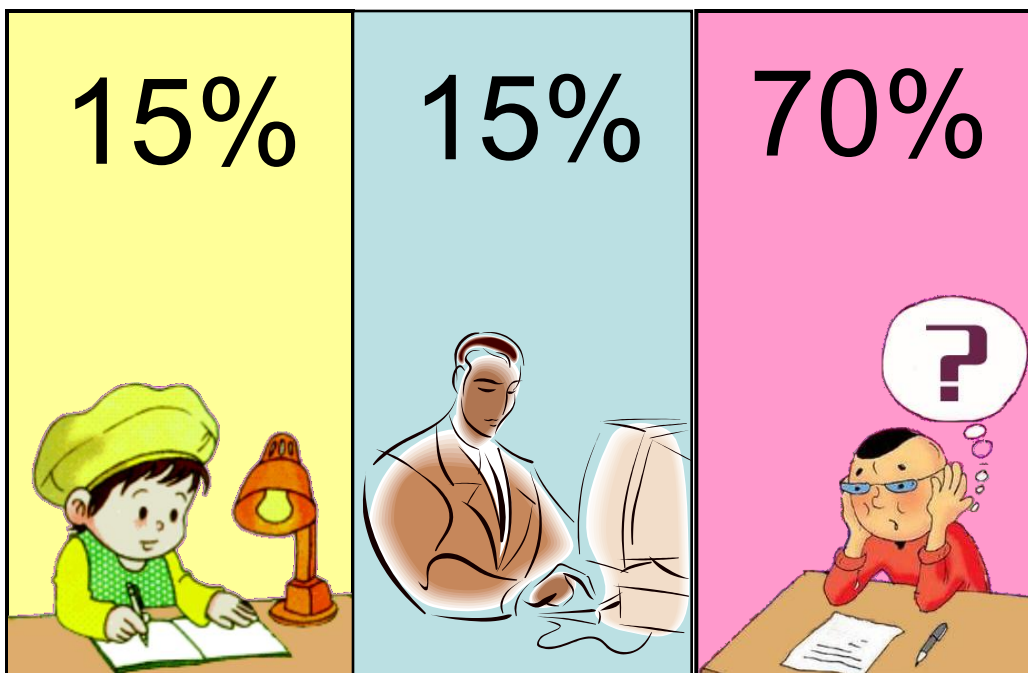
(美) Gilbert Strang 著，
Introduction to Linear Algebra
(第4版). Wellesley: Wellesley-
Cambridge Press, 2009.

参考书



(美) Carl D. Meyer 著, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra (第1版). Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

考核方式



- 平时作业：15% —— 独立完成
- 课程实验：15% —— 独立完成
- 期末考试：70% —— 闭卷

谢谢大家！
