作业 4（第十讲~第十一讲）

1、已知 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的各元素为 a_{ij} $\left(1\le i\le m,\ 1\le j\le n\right)$。

(1) 证明 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ 的迹等于所有 a_{ij}^2 之和。

(2) 若 $\mathbf{A}$ 是一个秩为 1 的矩阵，设 σ_1 为其奇异值。证明 σ_1^2 等于所有 a_{ij}^2 之和。

2、假设 $\mathbf{A}$ 是一个 2×2 的实对称矩阵，它具有两个单位特征向量 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$。如果该矩阵的特征值为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=-2$，求矩阵 $\mathbf{A}$ 的奇异值分解。

3、假设 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的奇异值分解可以表示为 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{V}_{n\times r}=\mathbf{U}_{m\times r}\mathbf{\Sigma}_{r\times r}$（即约化形式），矩阵 $\mathbf{A}$ 具有正交的列向量 $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n$，且这 n 个向量的长度分别为 $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ $(\sigma_i>0,\ i\le 1\le n)$，求 $\mathbf{U}$、$\mathbf{V}$、Σ。

4、求下列矩阵的 SVD：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

5、已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

(1) 求 $\mathbf{A}$ 的伪逆 $\mathbf{A}^+$。
(2) 求 $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ 和 $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$。
(3) 如果向量 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{A}$ 的零空间中，求 $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{x}$。
(4) 如果向量 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{A}$ 的行空间中，求 $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{x}$。