第七章 线性系统的设计方法

引言

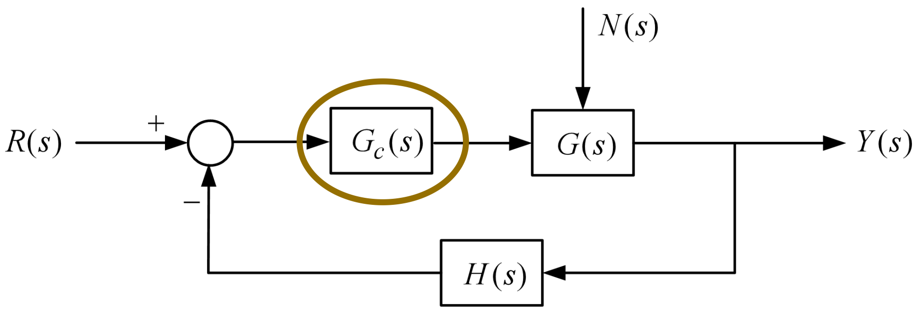
系统的设计与校正问题

前面章节介绍的都是在给出系统的结构和参数的基础上分析系统的性能，这个过程称为系统分析。

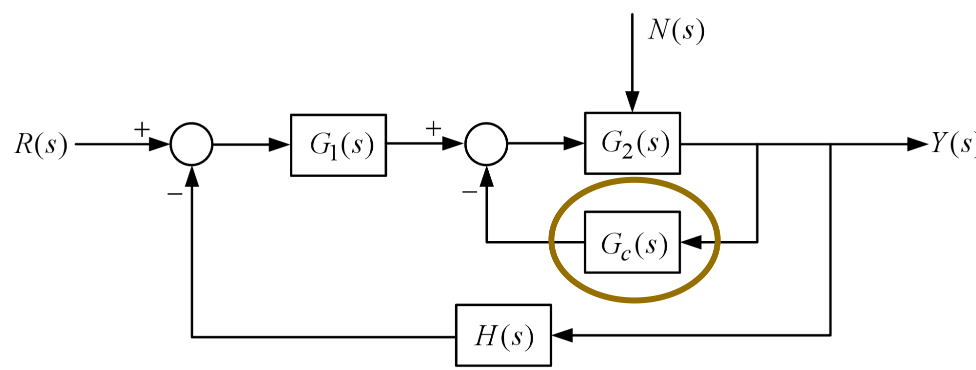
如果已知控制对象，以及控制系统所要达到的性能指标，要求得到一个系统达到这些指标，这个过程称为系统的设计。

对于一个已存在的控制系统，如果通过调整控制系统本身的物理参数后仍然不能全面满足设计要求的性能指标，就需要在系统中增加一些参数及特性可按需要改变的校正装置，使系统性能全面满足设计要求，这就是控制系统设计中的校正问题。校正装置也称为控制/调节/补偿器。

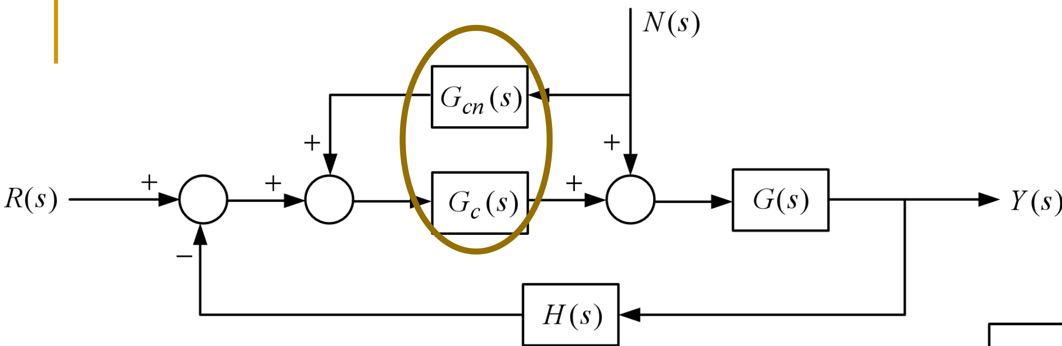
【常见的校正方式】按照校正装置（$G_c(s)$）在控制系统中的不同位置，控制系统的校正可分为串联校正、并联（反馈）校正和复合校正等几种。



串联校正

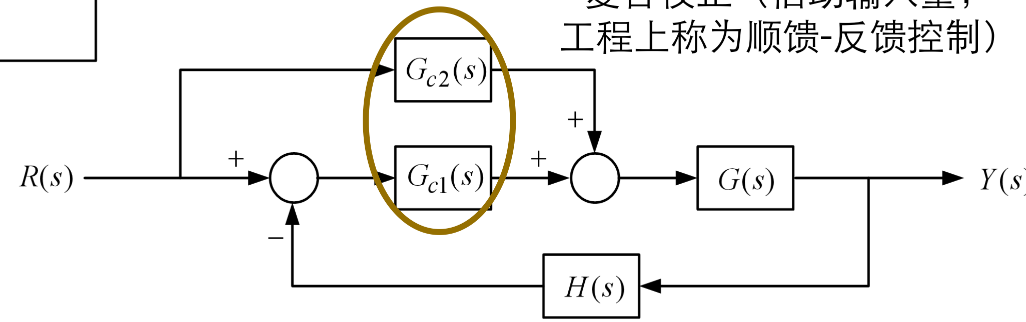


并联（反馈）校正



复合校正（借助扰动量，
工程上称为前馈-反馈控制）

复合校正（借助输入量，
工程上称为顺馈-反馈控制）



本章研究一种最基本的串联校正方法。

【校正的本质】

校正问题，实质上是要求在系统稳定的基础上，在稳态精度（稳态特性）与相对稳定性（瞬态特性）之间取折衷的问题。

【常用的校正方法】

- 控制系统的瞬态和稳态性能，可用时域指标或频域指标来描述。根据给定的性能指标的不同形式，可以采用不同方法对控制系统进行校正。
- 如果性能指标以单位阶跃响应的峰值时间、调整时间、超调量、阻尼系数、稳态误差或闭环主导极点等时域特征给出时，一般采用根轨迹法校正。

- 如果性能指标以系统的相位裕度、幅值裕度、谐振峰值、闭环带宽、静态误差系数等频域指标给出时，一般采用频率法校正。相位裕度、增益裕度、谐振峰值：给出系统阻尼的估计；谐振频率、带宽：给出瞬态响应速度的估计；静态误差系数：给出稳态精度。

- 时域和频域性能指标之间是可以互相转换的，具体采用哪种校正方法，取决于具体情况和设计者的偏好。无论采用根轨迹法校正，还是采用频率法校正，校正装置的基本特性都是相同的，一般有超前校正、滞后校正和滞后—超前校正等。

- 若采用频率设计法，工程上通常使用伯德图法。极坐标法使用较少。

从工程设计的角度看，采用伯德图法的优势:

- 校正装置的伯德图较易叠加到原系统的伯德图中;
- 如果改变开环增益，幅频特性曲线将上升或下降而不改变曲线的形状，且相频特性曲线保持不变。

相位超前、相位滞后、相位滞后-超前校正的基本特性

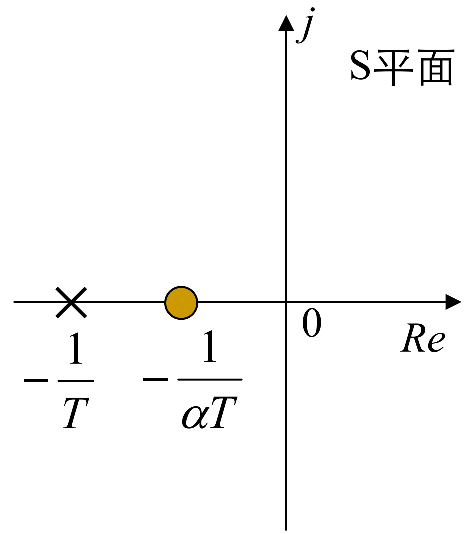
- 相位超前校正：能使瞬态响应得到显著改善，稳态精度的改变则很小，但它可以增强高频噪声效应。（高通）
- 相位滞后校正：能使相对稳定性得到提高，但瞬态响应的时间却随之而增加（降低了带宽）。滞后校正能抑制高频噪声信号的影响。（低通）
- 相位滞后-超前校正：综合了超前和滞后校正两者的特性。

第一节　相位超前校正

一、相位超前校正装置的特性

相位超前校正网络的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts},\quad \alpha>1$$



1. 零极点分布图

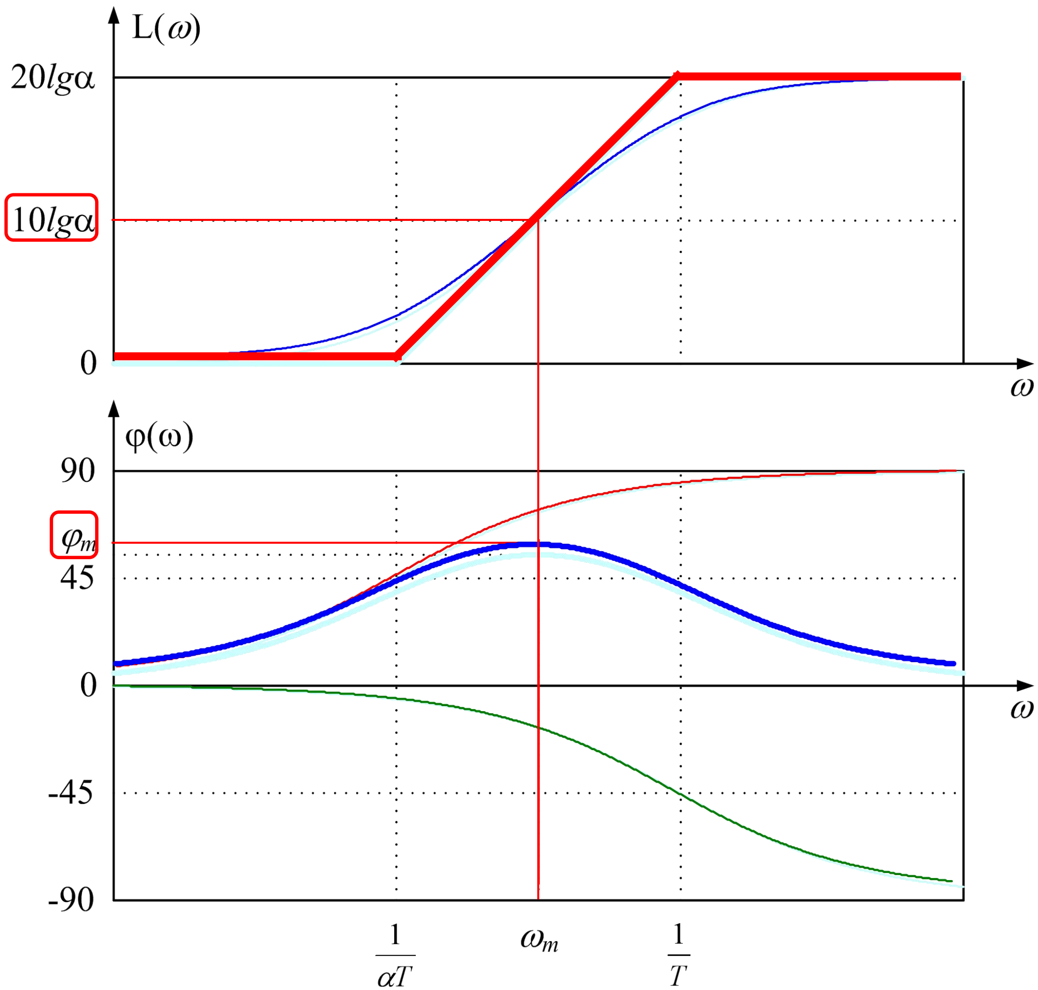
其零点为 $z=-1/\alpha T$，极点为 $p=-1/T$ 。

因 $\alpha>1$ ，所以在复平面上，零点处于极点的右面。由于零点较极点更接近原点，该校正装置具有明显的微分作用。故相位超前校正也称为微分校正。

2. *Bode*图

$$L(\omega)=20\lg\sqrt{1+(\alpha T\omega)^2}-20\lg\sqrt{1+(T\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}\alpha T\omega-\mathrm{tg}^{-1}T\omega$$



超前校正的主要特点：

(1) 所有频率下相频特性为正值，表示其输出信号的相位超前于输入信号。且在频率$\omega=\omega_m$处相频特性$\varphi(\omega)$存在最大相位超前量φ_m。

(2) 当α确定后，在$\omega>1/T$后的幅频特性值确定。在频率$\omega=\omega_m$处的幅频特性值也确定。

① 求ω_m

令$\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=0$，可得$\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=\dfrac{\alpha T}{1+(\alpha T\omega)^2}-\dfrac{T}{1+(T\omega)^2}=0$

化简得：$\alpha+\alpha(T\omega)^2=1+(\alpha T\omega)^2\Rightarrow\alpha(1-\alpha)T^2\omega^2=1-\alpha$

解得：$\omega_m=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}T}$

或由$Bode$图求解：φ_m发生在对数刻度的ω坐标中$1/T$与$1/(\alpha T)$的几何中点。所以ω_m的另一种求法是：

$$\lg\omega_m=\frac{1}{2}(\lg\frac{1}{T}+\lg\frac{1}{\alpha T})=\lg\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

$$\boxed{\text{则：}\ \omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}}$$

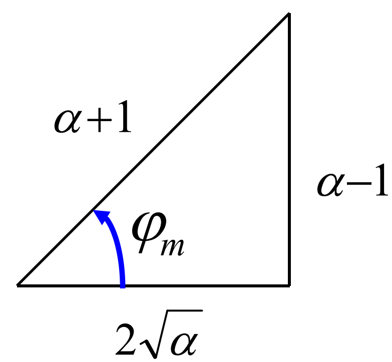
② 求最大相位超前量φ_m

将ω_m代入相频特性有

$$\varphi_m=\left[\mathrm{tg}^{-1}\alpha T\omega-\mathrm{tg}^{-1}T\omega\right]\Big|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{\alpha}T}}=\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\alpha}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_m=\frac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}$$

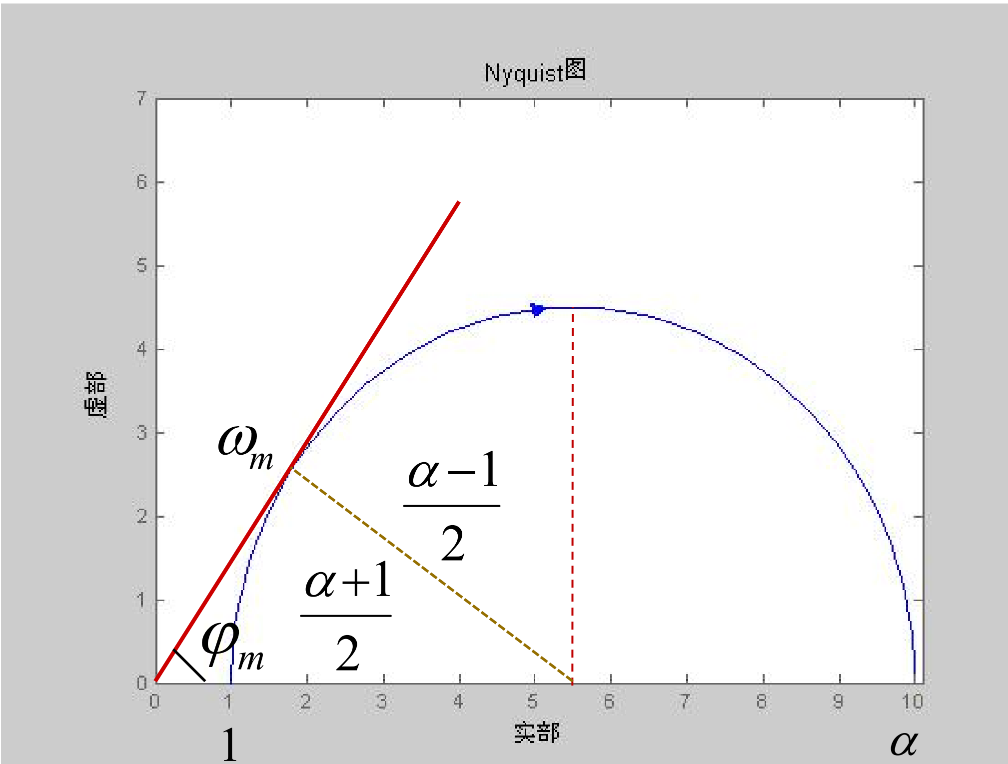
或：$\sin\varphi_m=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$



$$\boxed{\varphi_m=\sin^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}$$

利用极坐标图求φ_m的方法：

极坐标图如下：$G_c(s)=\dfrac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$， $\alpha>1$



$\omega=0$ $\omega=\infty$

对于给定的α值，正实轴与原点到半圆所作切线之间的夹角就是最大相位超前角φ_m，切点处的频率为ω_m。

$$\sin\varphi_m=\frac{\frac{\alpha-1}{2}}{\frac{\alpha+1}{2}}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\cdots(*)$$

超前环节：$G_c(s)=\dfrac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$，$\alpha>1$.

证明其极坐标图为半径 $\dfrac{\alpha-1}{2}$，圆心 $(\dfrac{\alpha+1}{2},0)$ 的圆.

证：$G_c(jw)=\dfrac{1+j\alpha Tw}{1+jTw}=\dfrac{(1+j\alpha Tw)(1-jTw)}{(1+jTw)(1-jTw)}=\dfrac{1+\alpha T^2w^2}{1+T^2w^2}+\dfrac{Tw(\alpha-1)}{1+T^2w^2}j$

$$P(w)=\frac{1+\alpha T^2w^2}{1+T^2w^2}=\frac{1+\alpha A^2}{1+A^2} \qquad ①$$

$$Q(w)=\frac{Tw(\alpha-1)}{1+T^2w^2}=\frac{(\alpha-1)A}{1+A^2} \qquad ②$$

由①式可得：$A^2=\dfrac{P-1}{\alpha-P}$ ③ 记 $P=P(w)$，$Q=Q(w)$

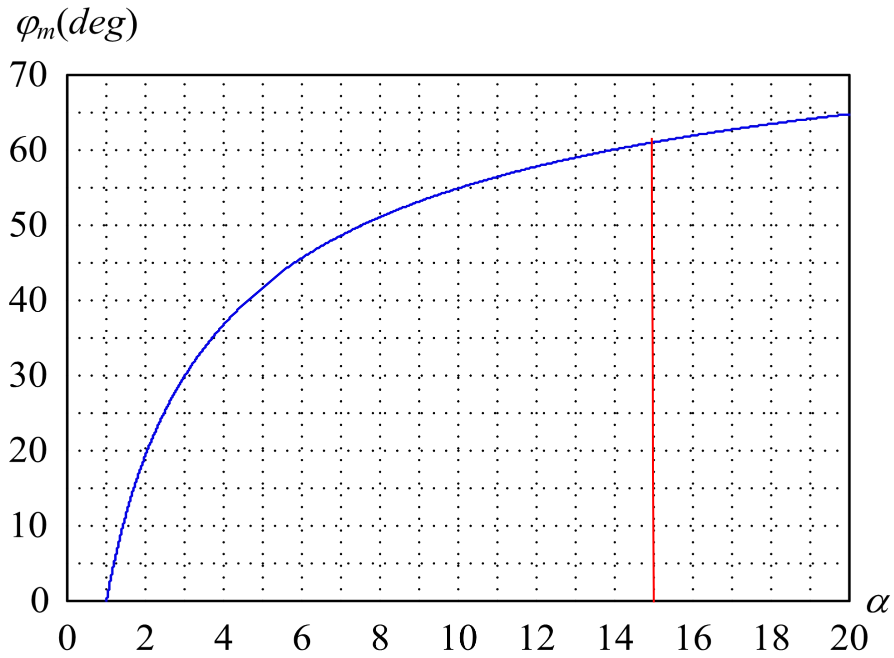
②式平方得：$Q^2=\dfrac{(\alpha-1)^2A^2}{(1+A^2)^2}$ ④

将③代入④可得：$Q^2=\dfrac{\frac{(\alpha-1)^2(P-1)}{(\alpha-P)}}{(1+\frac{P-1}{\alpha-P})^2}$ ⑤

整理式⑤可得：

$$Q^2=(\alpha-P)(P-1)=-(P-\frac{\alpha+1}{2})^2+(\frac{\alpha-1}{2})^2$$

即 $(P-\dfrac{\alpha+1}{2})^2+Q^2=(\dfrac{\alpha-1}{2})^2$.

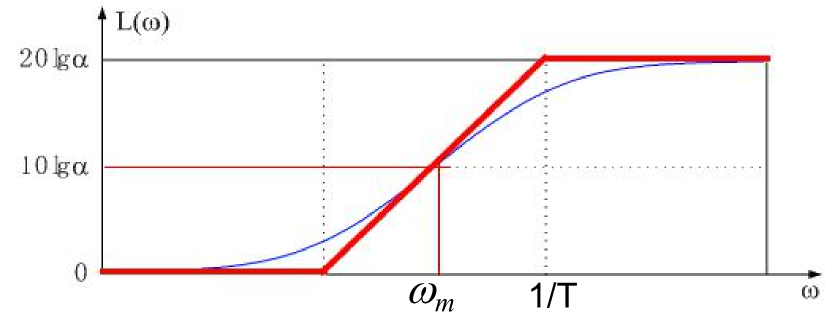


由图：φ_m随α增大而增大，当$\alpha\to\infty$时$\varphi_m\to 90°$，当$\alpha > 15$以后随α增大φ_m增大缓慢。故很少取$\alpha > 15$。

$$\sin\varphi_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$$

只要知道需要提供多大的超前相角φ_m，就可确定参数α的值。

③ ω_m对应的幅值$L(\omega_m)$



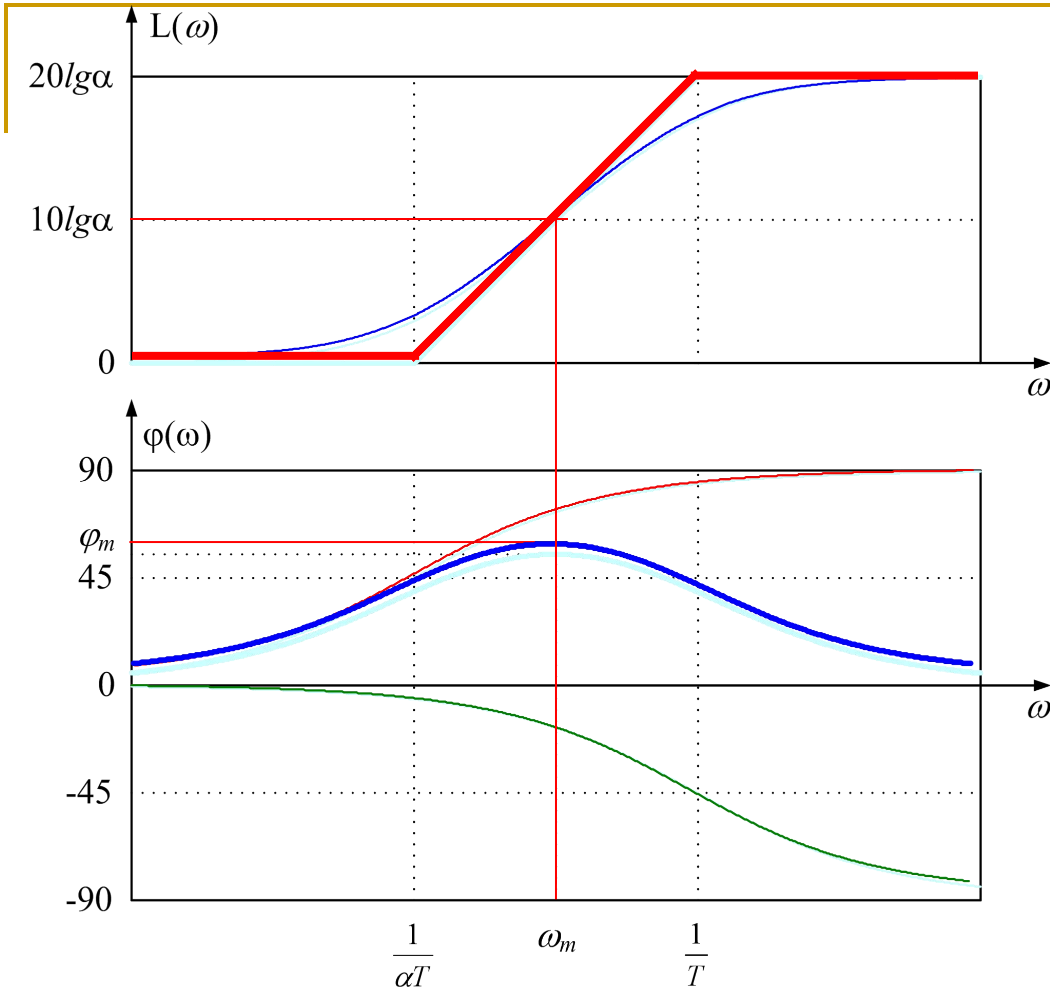
其中：$\omega_m=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha T}}$， 即$T\omega_m=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$

将上式代入对数幅频特性有：

$$
\begin{aligned}
L(\omega_m)&=20\lg\sqrt{1+(\alpha T\omega_m)^2}-20\lg\sqrt{1+(T\omega_m)^2}\\
&=20\lg\sqrt{1+\alpha}-20\lg\sqrt{1+\frac{1}{\alpha}}=20\lg\sqrt{\frac{(1+\alpha)\alpha}{1+\alpha}}\\
&=20\lg\sqrt{\alpha}=\boxed{10\lg\alpha}
\end{aligned}
$$

当$\omega>1/T$后，$L(\omega)=20\lg\alpha$

（即对于折线表示的$L(\omega)$，当$\omega>1/T$后，$L(\omega)=20\lg\alpha$）



最大相角超前处的参数：

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha T}}$$

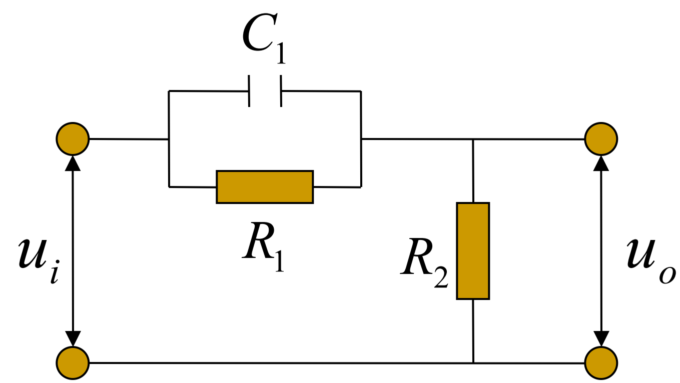
$$\varphi_m = \sin^{-1}\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

$$L(\omega_m) = 10\lg\alpha$$

超前校正网络是一个高通滤波器。将它加入系统，可增大系统的开环截止频率和带宽，提高系统的相位裕度。缺点是较易引入高频噪声。

二、相位超前校正装置实现之例

【无源超前校正装置】



$$G_c(s)=\frac{u_o}{u_i}=\frac{R_2}{R_2+\dfrac{1}{Cs+\dfrac{1}{R_1}}}$$

$$=\frac{R_2+R_1R_2Cs}{R_1+R_2+R_1R_2Cs}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1+R_1Cs}{1+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs}$$

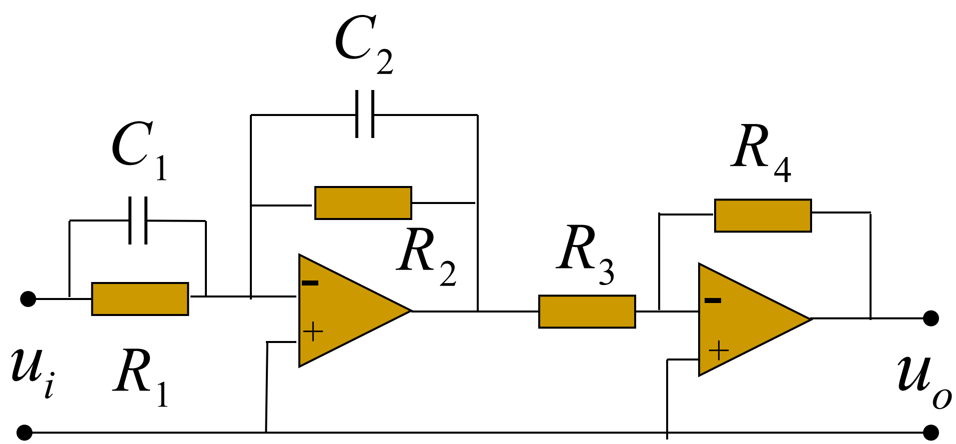
$$=\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{1+\dfrac{R_1+R_2}{R_2}\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs}{1+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}Cs}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}\quad \text{其中：}\ T=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C,\quad \alpha=\frac{R_1+R_2}{R_2}\qquad \alpha>1$$

【有源超前校正装置】

为了避免无源校正装置的负载效应，可用隔离放大器。

可用放大器和RC元件构成有源超前校正装置。



$$G_c(s)=\frac{u_o}{u_i}=\frac{R_4C_1}{R_3C_2}\frac{s+\dfrac{1}{R_1C_1}}{s+\dfrac{1}{R_2C_2}}$$

$$=\frac{R_2R_4}{R_1R_3}\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1}$$

当$R_1C_1> R_2C_2$时，为超前校正网络

当$R_1C_1< R_2C_2$时，为滞后校正网络

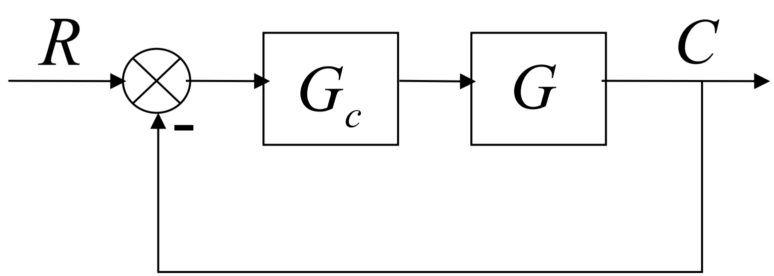
【说明】利用有/无源网络实现超前校正时，要加前置放大器补偿增益损失

三、基于伯德图的相位超前校正

超前校正装置的主要作用是：改变频率响应曲线的形状，产生足够大的相位超前角，以补偿原系统过大的相位滞后。

相位超前网络校正的基本原理：利用其相位超前的特性。为充分利用最大相位超前量φ_m，应将φ_m处对应的ω_m设计在校正后系统的幅值穿越频率ω_c处。

如下图所示的系统。假设性能指标是以相位裕度、增益裕度、静态误差系数等形式给出。

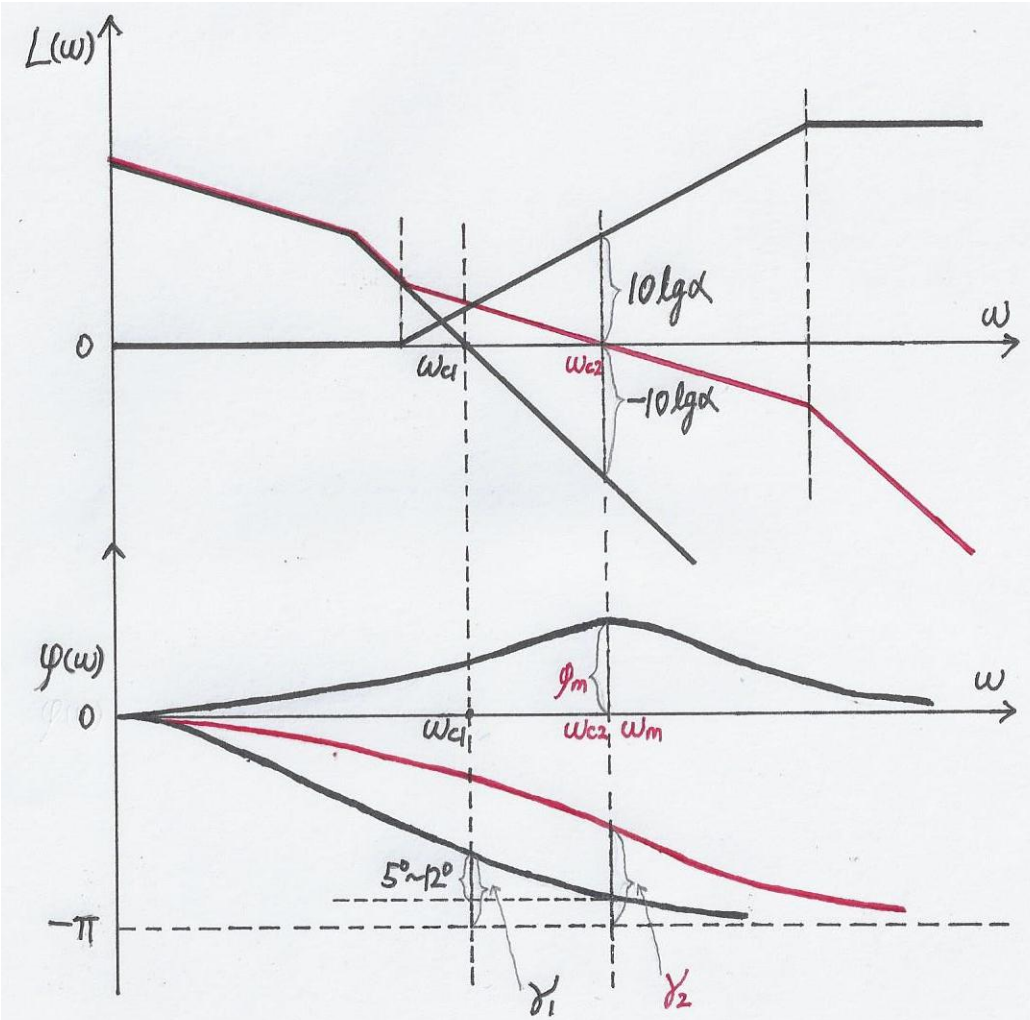


图中，G_c为校正装置，G为被控对象。

主要针对最小相位系统

如何根据性能指标确定校正装置G_c???

【超前校正基本思路】



③ $\begin{cases} \varphi_m = \gamma_2 - \left(\gamma_1 - (5^\circ \sim 12^\circ)\right) \\ \quad \Rightarrow \alpha \end{cases}$

④ $\begin{cases} \omega_{c2} = \omega_m \\ L_1(\omega_{c2}) = -10\lg\alpha \\ \quad \Rightarrow \omega_{c2} = \omega_m \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \alpha, \quad \omega_m \Rightarrow T \\ \Rightarrow G_c(s) = \dfrac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \end{cases}$

⑥ 校验γ_2是否合格，

不合格重做

利用伯德图法设计超前校正装置的步骤如下：

① 求出满足稳态性能指标的开环增益K值；

② 根据求出的K值，画出校正前的$Bode$图，确定此时的幅值穿越频率ω_{c1}和相位裕度γ_1；（①② 为前期工作）

③ 求出为了满足系统对相位裕度的要求，需要相位超前网络提供的最大相位超前量：

$$\varphi_m = \gamma_2 - [\gamma_1 - (5^\circ \sim 12^\circ)]$$

γ_2 为系统期望的相位裕度

γ_1 未校正系统的相位裕度

由于校正后系统的幅值穿越频率ω_{c2}还未知，只知道在ω_{c1}右面。这是因为加入超前校正装置会改变（上翘）未校正系统的幅值曲线，这时穿越频率ω_{c1}将向右移动，ω_{c1}向右移动将引起相位滞后。一般滞后量为$5^\circ \sim 12^\circ$。

④ 根据$\alpha=\dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$，由$\varphi_m$求出$\alpha$值。

⑤ 决定校正后系统的幅值穿越频率ω_{c2}。为了最大限度利用相位超前网络的相位超前量，ω_{c2}应与ω_m相重合。（决定超前网络的位置，ω_{c2}位置在哪？）

由于相位超前网络在ω_m处提供的幅值为 $10\lg\alpha$，所以ω_{c2}应选在未校正系统幅值的$-10\lg\alpha$处。由式$L(\omega_m)=-10\lg\alpha$，可得出ω_m，即ω_{c2}。

⑥ 确定超前网络的时间常数T。当$\omega_{c2}=\omega_m$时，由

$$\omega_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha T}} \Rightarrow T=\frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\omega_m} \Rightarrow \boxed{G_c(s)=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}}$$

⑦ 画出校正后的$Bode$图，确定此时的幅值穿越频率ω_{c2}和相位裕度γ_2，校验系统的性能指标。一定要校验，不满足重做。

【关于超前网络设计位置的说明】

【原则】将超前网络的几何中点置于期望幅值穿越频率处。

该点提供最大的相位超前量。

注：下标为1表示原系统。下标为2表示校正后系统。

【条件1】幅值=0，即$L_1(\omega_{c2})+L_{超前网络}(\omega_{c2})=0$，

$L_1(\omega_{c2})=-10\lg\alpha$

【条件2】相位。$\varphi_2(\omega_{c2})=\varphi_m+\varphi_1(\omega_{c2})=\varphi_m+\varphi_1(\omega_{c1})-(5^\circ\sim12^\circ)$

$=\varphi_m+(-180^\circ+\gamma_1)-(5^\circ\sim 12^\circ)$

又：$\gamma_2=180^\circ+\varphi_2(\omega_{c2})$

整理得：

$$\varphi_m=\gamma_2-\left(\gamma_1-(5^\circ\sim12^\circ)\right)$$

[例]已知一单位反馈系统的开环传递函数为 $G_k(s)=\dfrac{2500K_g}{s(s+25)}$ 。试设计一个相位超前校正装置满足:

(1)相位裕度大于45°；

(2)对单位速度函数输入，输出的稳态误差小于或等于0.01rad。

[解]: ① 对单位速度函数输入：$e_{ss}=1/K_v$（欲确定K_g）

$$K_v=\lim_{s\to 0} sG_k(s)G_c(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{2500K_g}{s(s+25)}G_c(s)=100K_g$$

要求 $e_{ss}=\dfrac{1}{100K_g}\le 0.01$，即 $K_g\ge 1$，取$K_g=1$

$$\therefore G_k(\mathrm{j}\omega)=\frac{100}{\mathrm{j}\omega(1+0.04\omega\mathrm{j})}$$ 写成时间常数的形式

② 画出K_g=1时未校正系统$Bode$图，确定此时的ω_{c1}和γ_1。

$$L(\omega)=20\lg 100-20\lg\omega-20\lg\sqrt{1+(0.04\omega)^2}$$

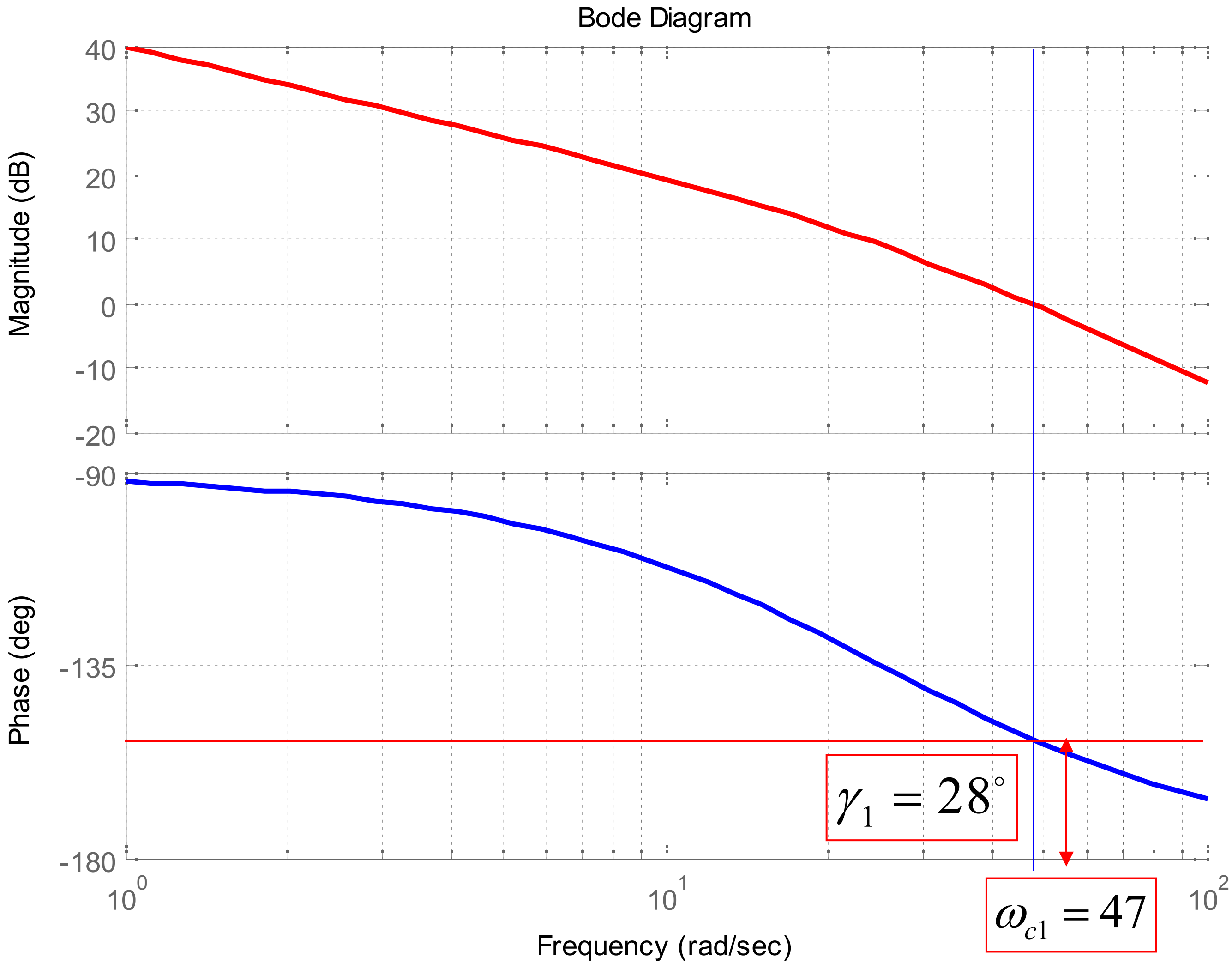
令 $L(\omega)$=0 $\quad L(\omega)=20\lg\dfrac{100}{\omega\sqrt{1+(0.04\omega)^2}}=0$

$$\omega_{c1}\approx 47,\ \varphi(\omega_{c1})=-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}0.04\omega_{c1}=-152^\circ$$

$$\gamma_1=180^\circ+\varphi(\omega_{c1})=180^\circ-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}0.04\omega_{c1}=28^\circ$$

若按渐近线计算：$L(\omega)\approx 20\lg\dfrac{100}{\omega(0.04\omega)}=0,\ \omega_{c1}\approx 50$

$$\gamma_1=180^\circ+\varphi(\omega_{c1})=180^\circ-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}0.04\omega_{c1}=26.6^\circ$$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
40
30
20
10
0
-10
-20
Phase (deg)
-90
-135
-180
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/sec)
$\gamma_1 = 28^\circ$
$\omega_{c1} = 47$

③求出需要相位超前网络提供的最大相位超前量φ_m。

$$\varphi_m = \gamma_2 - \left(\gamma_1 - (5° \sim 12°)\right) = 45° - (28° - 5°) = 22°$$

由于原系统相频特性在ω_{c1}附近较平坦，所以只加5°。

④ 由$\alpha = \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = \dfrac{1+\sin 22°}{1-\sin 22°} = 2.2$

⑤ 决定校正后系统的幅值穿越频率ω_{c2}。为了最大限度利用相位超前网络的相位超前量，ω_{c2}应与ω_m相重合。即ω_{c2}应选在未校正系统的幅值-10lgα处。

$$L(\omega_m) = 20\lg 100 - 20\lg \omega_m \sqrt{1+(0.04\omega_m)^2} = -10\lg \alpha$$

$$20\lg \frac{100\sqrt{\alpha}}{\omega_m \sqrt{1+(0.04\omega_m)^2}} = 0$$

$$\therefore \omega_m = \omega_{c2} \approx 58$$

⑥ 当$\omega_{c2}=\omega_m$时，由$\omega_m=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha T}}$ ➡

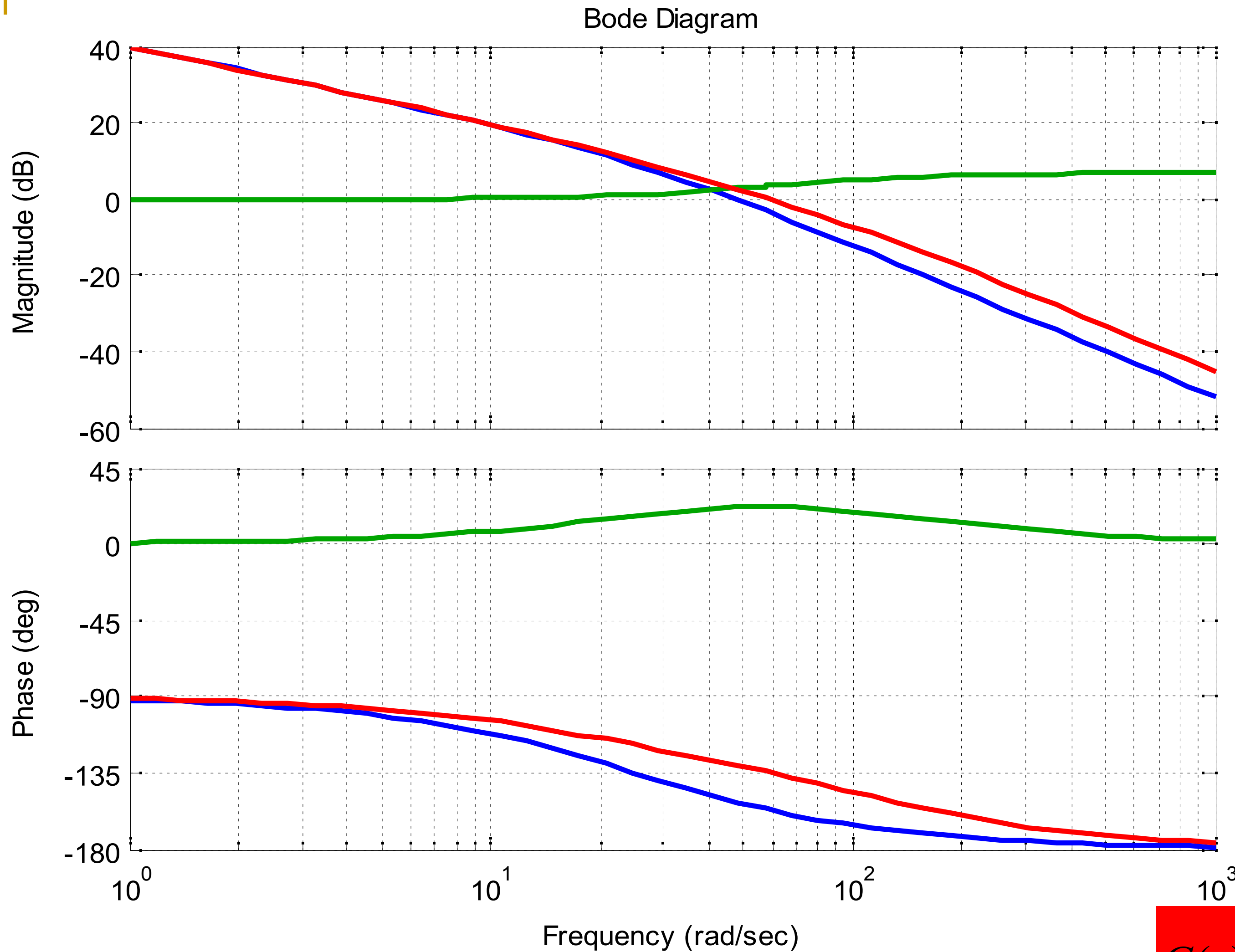
$$T=\frac{1}{\sqrt{\alpha\omega_m}}=\frac{1}{\sqrt{2.2\times 58}}\approx 0.01162,\quad \alpha T\approx 0.02557$$

➡ $$G_c(s)=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}=\frac{1+0.02557\,s}{1+0.01162\,s}$$

⑦ 画出校正后的$Bode$图，确定此时的幅值穿越频率ω_{c2}和相位裕度γ_2，校验系统的性能指标。

$$G(s)=\frac{100(1+0.02557\,s)}{s(1+0.04s)(1+0.01162\,s)}=\frac{2500\times 2.2(s+39)}{s(s+25)(s+86)}$$

$$\gamma_2=180^\circ-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}0.04\omega_{c2}-\mathrm{tg}^{-1}0.01162\omega_{c2}+\mathrm{tg}^{-1}0.02557\omega_{c2}$$
$$=45.35^\circ$$

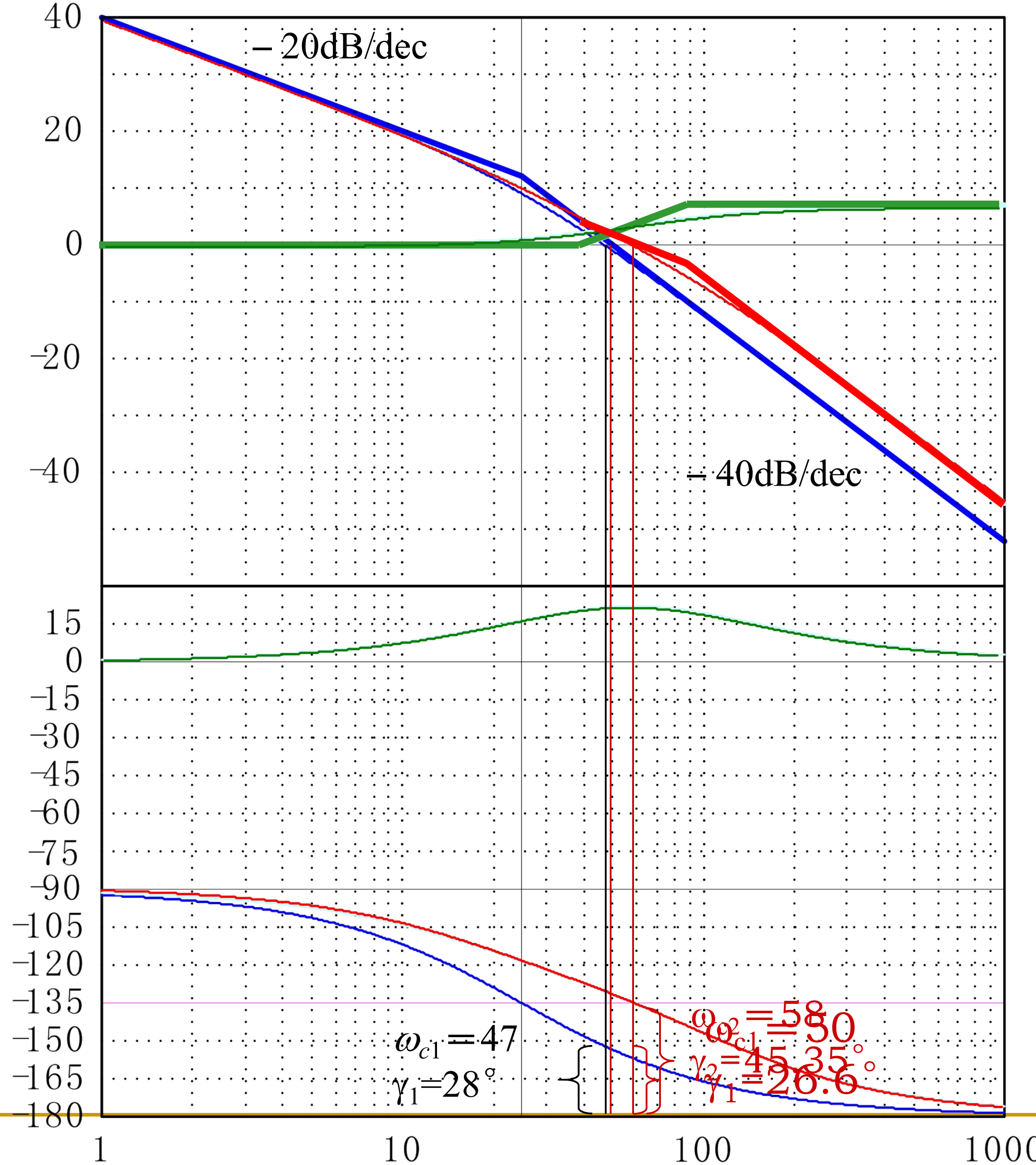


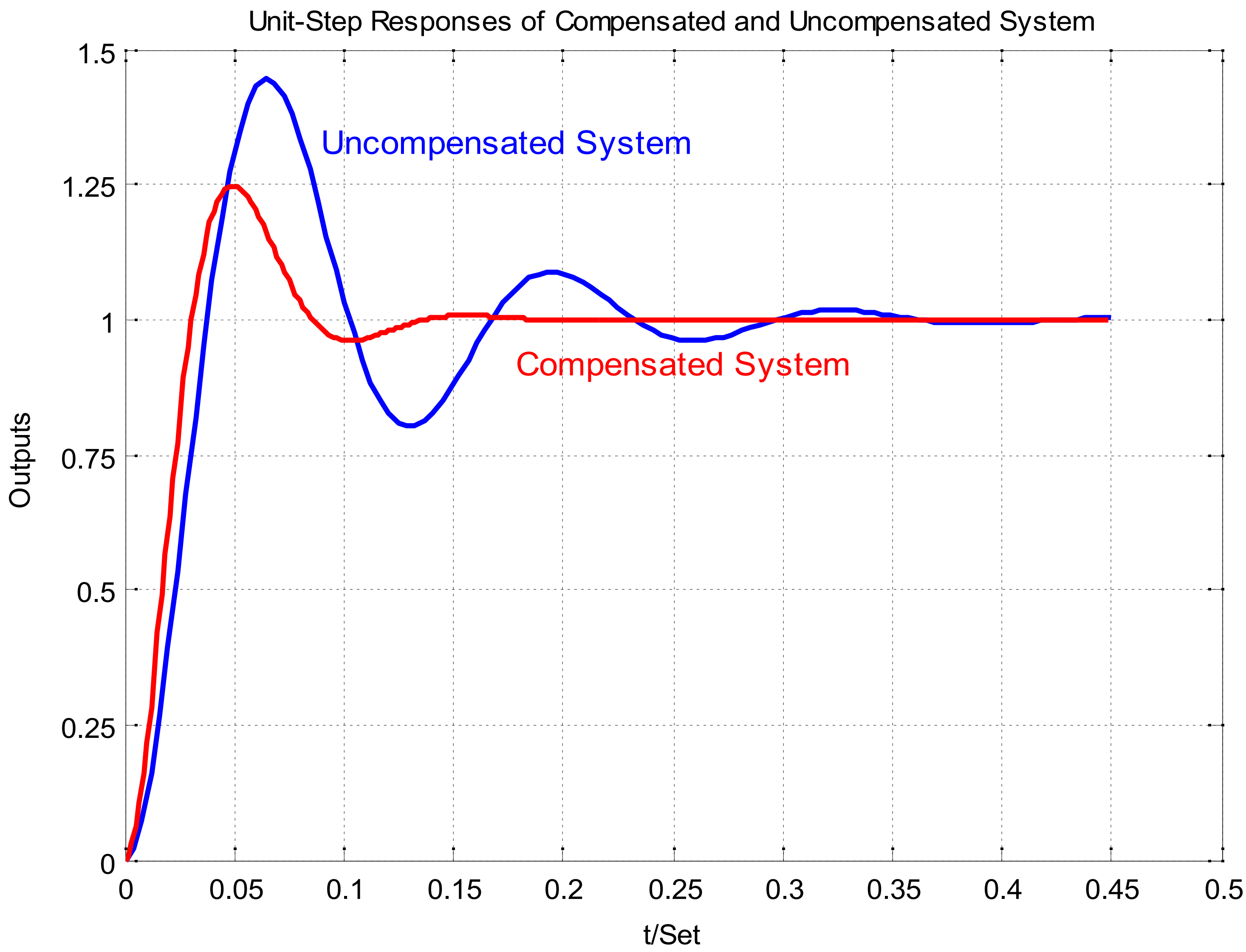
图中，绿线为超前校正环节。蓝线表示未校正时（开环增益调整后）的曲线。红线表示校正后的曲线。

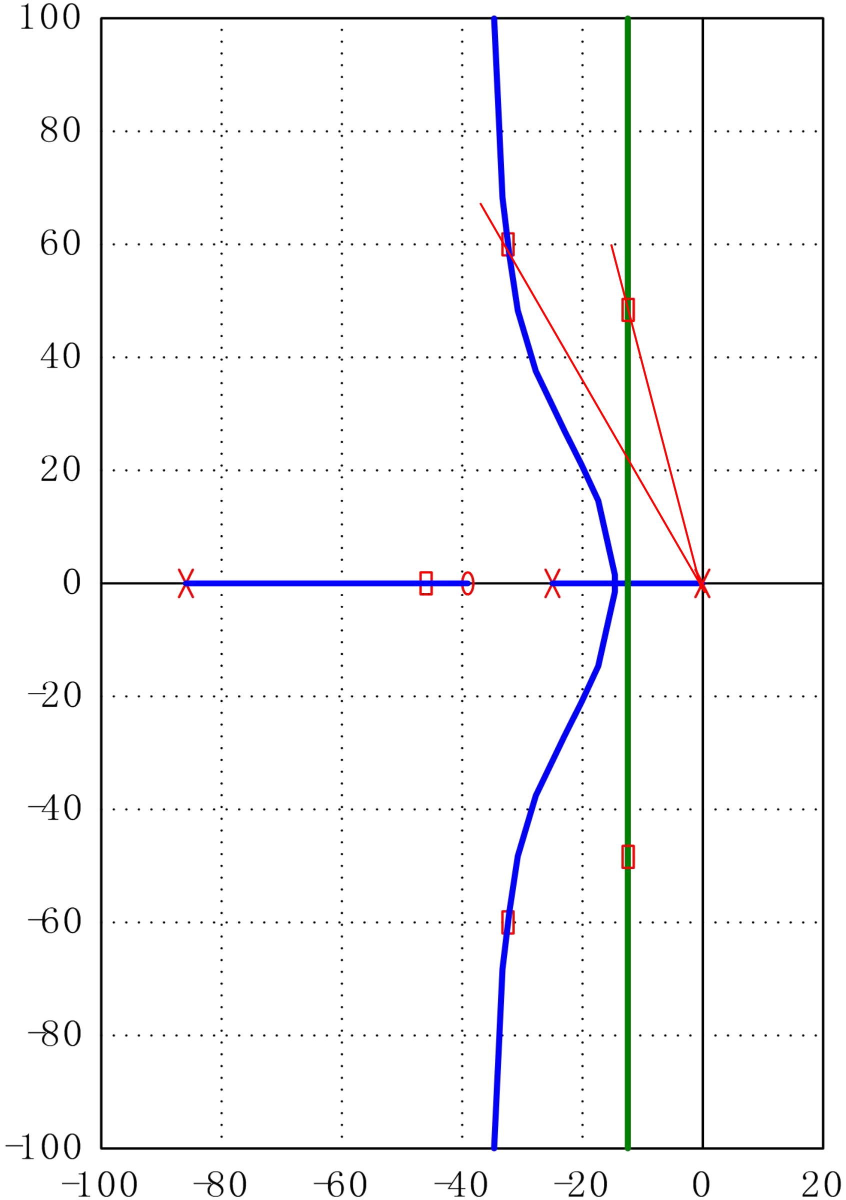
$$G_k(s)=\frac{2500}{s(s+25)}$$

$$G_c(s)=\frac{2.2(s+39)}{s+86}$$

$$G(s)=\frac{2500\times 2.2(s+39)}{s(s+25)(s+86)}$$


40
20
0
-20
-40
15
0
-15
-30
-45
-60
-75
-90
-105
-120
-135
-150
-165
-180
1
10
100
1000
– 20dB/dec
– 40dB/dec
ωc1 = 47
γ1 = 28°
ωc2 = 58
ωc1 = 50
γ2 = 45.35°
γ1 = 26.6


Unit-Step Responses of Compensated and Uncompensated System
Uncompensated System
Compensated System
Outputs
t/Set
1.5
1.25
1
0.75
0.5
0.25
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5



校正前闭环极点为

$s_{1,2}$=-12.5±48.4j

ζ= 0.25

δ%=44.43%

校正后闭环极点为

$s_{1,2}$=- 32.4815±60.0354j

s_3=-46.037

ζ= 0.476

δ%=18.26%（无主导极点，不准确的估算）

四、相位超前校正对系统的影响和限制

1. 影响：

① 从Bode图看系统的幅值穿越频率ω_c增加了，即系统的转折频率右移，意味着增加了闭环系统的带宽，增大了闭环系统的响应速度。

② 幅频特性在ω_c附近的斜率减小了，即曲线平坦了。

③ 改善了系统的相位裕度γ和增益裕度K_g，提高了系统的相对稳定性。

④ 减小了系统的最大超调量、上升时间、调节时间等。

⑤ 超前校正本身对系统的稳态误差没有影响。

2.限制：

①闭环带宽限制。对于校正前不稳定的系统，为了得到期望的相位裕度，超前网络提供很大的相位超前量。这会造成闭环带宽过大，对高频噪音很敏感。

②若在ω_c处的对数幅频特性具有一个陡的负斜率(如斜率为-60dB/dec)，仅采用相位超前校正一般效果不好。(可用两个相位超前校正)。

小结

- 校正的概念
- 相位超前校正及其特性
- 超前校正装置校正控制系统时使用到的有益特性
- 基于伯德图的相位超前校正的方法步骤

作业：7.3（1）