

# 第二章 自动控制系统 的数学模型

# 本章的主要内容

- 控制系统的微分方程---建立和求解
- 控制系统的传递函数
- 控制系统的方块图---等效变换
- 控制系统的信号流图---梅森公式
- 各种数学模型的相互转换

# 概述

**[数学模型]**是描述控制系统中各元件的特性以及各种信号（变量）的传递和转换关系的数学表达式。

使用数学模型可避开系统不同的物理特性，在一般意义下研究控制系统的普遍规律。

- **数学模型的形式（以研究领域分）：**

时域模型：微分方程、差分方程和状态空间模型等；

频域模型：传递函数、方块图、信号流图和频率特性等。

- **数学模型的形式（以变量之间的关系分）：**

输入输出模型：描述系统输入量和输出量之间的关系；

状态空间模型：描述系统输入量与内部状态之间以及内部状态和输出量之间的关系。

- 数学模型的形式（以系统特性分）：

线性系统和非线性系统； 线性定常系统和线性时变系统

**[线性系统]** 线性系统的特点，使线性系统对几个输入量同时作用的响应可以一个一个地处理，然后对每一个输入量响应的结果进行叠加。这正是线性系统分析中的方便性所在。

**[线性定常系统和线性时变系统]** 可以用线性定常（常系数）微分方程描述的系统称为线性定常系统。如果描述系统的微分方程的系数是时间的函数，则这类系统为线性时变系统。

经典控制理论采用的是SISO外部描述方法（**输入输出模型**），针对**线性定常系统**，对此有一套完整的理论和方法。但对于非线性系统和时变系统，其解决问题的能力很有限，可以在一定的近似条件下简化为线性定常系统后进行处理。

## 建立控制系统数学模型的方法（分析法、实验法）

**分析法:**是指当控制系统结构和参数已知时，根据系统各环节所遵循的物理规律来建立相应运动方程的方法。

**实验法:**是根据系统对施加的某种测试信号的响应或其它实验数据，来建立数学模型。--系统辨识（专门课程介绍）

## 模型精度和复杂性之间的矛盾

在满足一定精度要求的前提下，尽量使数学模型简单。因此，在建立数学模型时，常做一些合理的**假设和简化**，最后得到的是具有一定精度的近似数学模型。

# 第一节 控制系统的微分方程

微分方程的编写应根据组成系统各元部件工作过程中所遵循的物理定理来进行。例如：电路中的电路定理，力学中的牛顿定理，热力学中的热力学定理等，这种方法称为用分析法建立系统的数学模型。本节讨论用分析法建立系统的数学模型。

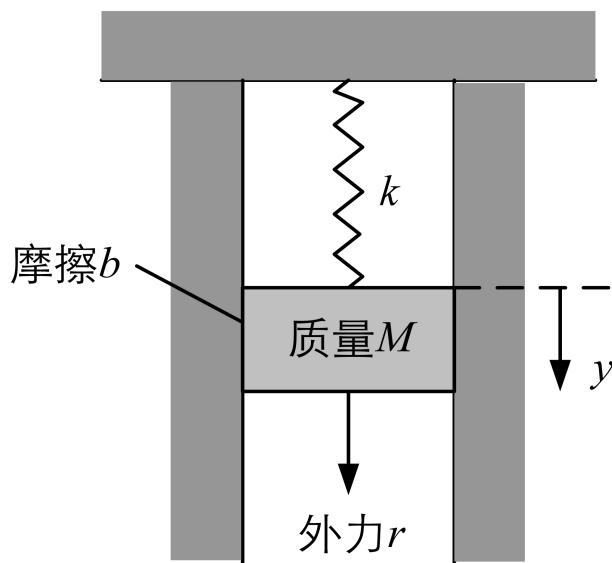
## [建立控制系统微分方程的方法]

- 首先，应对实际的物理系统作一些理想化的假设，忽略一些次要因素。
- 然后，从输入端开始，依次写出控制系统中各元部件的满足的物理微分方程。
- 最后，将各元部件的微分方程联立起来，消去中间变量，得到系统输出量与输入量之间的关系，就是控制系统的微分方程。

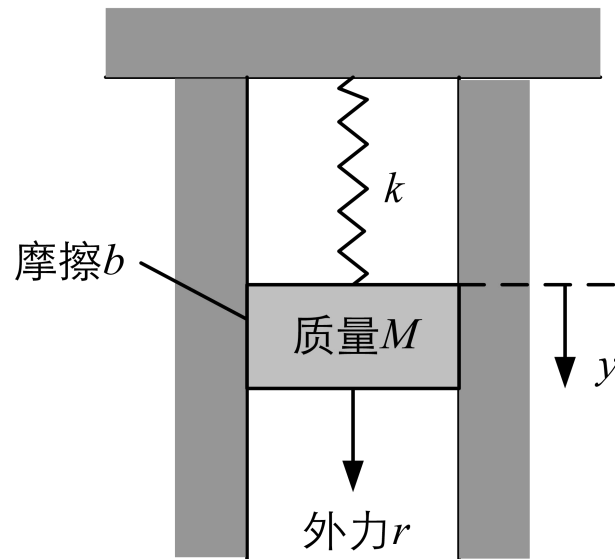
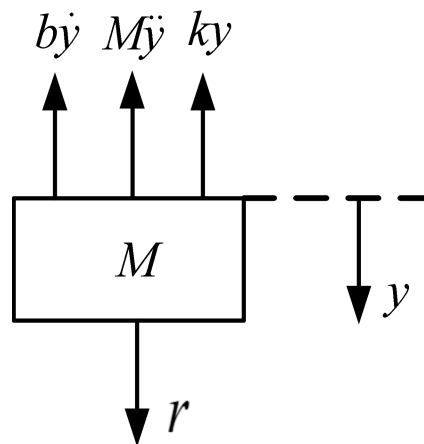
## 【机械系统建模实例】

### 运动学分析；动力学分析

[例2.2.1] 用来表示汽车减震装置的质量、弹簧、阻尼器系统如下图所示，假设壁摩擦为粘性摩擦，试建立该系统的微分方程。力 $r$ 为输入量，质量块位移 $y$ 为输出量。



[解]选择力 $r$ 为输入量，位移 $y$ 为输出量。



则有： 
$$r - M \frac{d^2 y}{dt^2} - b \frac{dy}{dt} - ky = 0$$

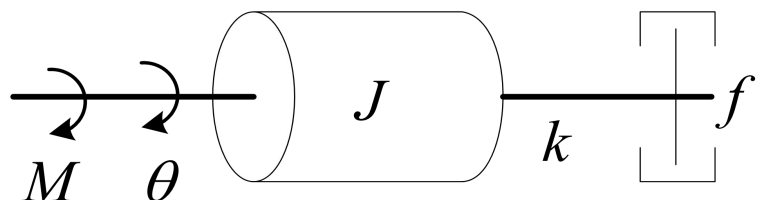
所以，该系统的微分方程为：

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = r$$

是二阶线性常系数微分方程。没有考虑重力？原因？



**[补例]** 机械转动系统的微分方程。设外加转矩 $M$ 为输入量，转角 $\theta$ 为输出量。



**[解]:** 对于转动物体，转动惯量代表惯性负载。根据转矩平衡可列出微分方程：

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M - f \frac{d\theta}{dt} - k\theta \quad \text{整理得} \quad J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} + k\theta = M$$

式中 $f$ 和 $k$ 分别为粘滞阻尼系数和扭转弹性系数。

若忽略扭转弹性系数的影响，方程为：

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = M$$

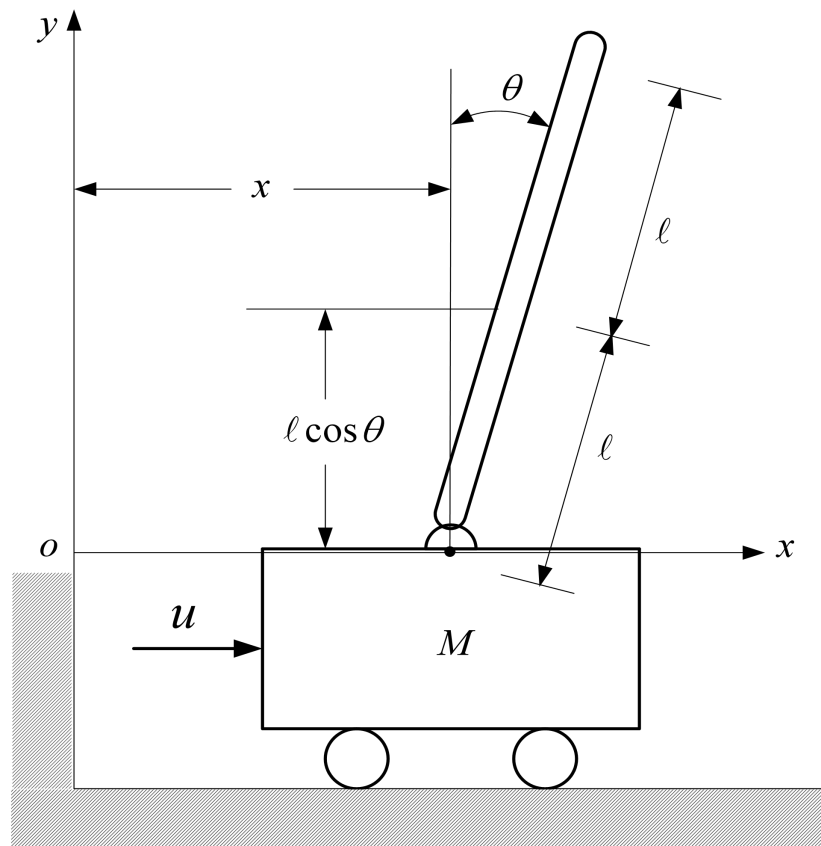
若写为转速的形式， $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ，则方程为：

$$J \frac{d\omega}{dt} + f\omega = M$$

若再忽略粘滞阻尼系数 $f$ ，则方程为：

$$J \frac{d\omega}{dt} = M$$

**[例2.2.2]** 单级倒立摆安装在带有电动机的小车上，如下图所示。控制力 $u$ 作用于小车上，假设摆杆的重心位于其几何中心，试求这个系统的微分方程。小车和摆杆的质量分别为 $M$ 和 $m$ 。力 $u(t)$ 为输入量，角度 $\theta(t)$ 和 $x(t)$ 为输出量。



**[解]**选择力 $u(t)$ 为输入量，角度 $\theta(t)$ 和 $x(t)$ 为输出量。

假设摆杆偏离垂线角度为 $\theta$ ，摆杆重心坐标为 $(x_0, y_0)$ 。分别对摆杆、小车进行力及力矩平衡分析。 $I$ 为摆杆围绕其重心的转动惯量。可得

$$x_0 = x + \ell \sin \theta$$

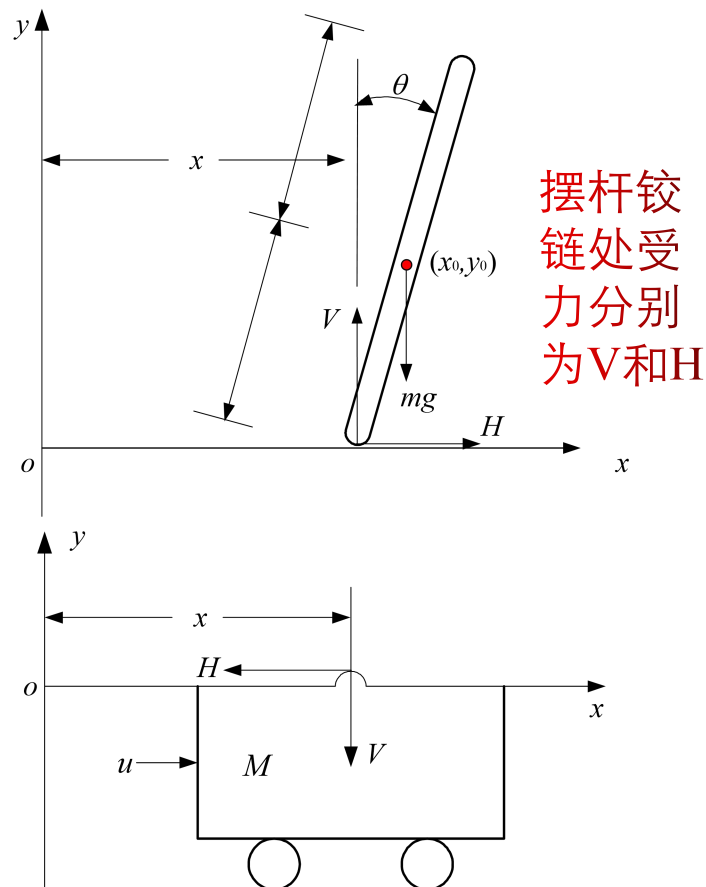
$$y_0 = \ell \cos \theta$$

$$I\ddot{\theta} = V\ell \sin \theta - H\ell \cos \theta$$

$$m \frac{d^2 x_0}{dt^2} = H$$

$$m \frac{d^2 y_0}{dt^2} = V - mg$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H$$



若要保持倒立摆不倒，则 $\theta(t)$ 和 $\theta'(t)$ 的量值很小，也就是说倒立摆工作在平衡点，即 $\theta(t)$ 和 $\theta'(t)$ 在零附近。在平衡点 $\theta(t)=0$ 附近，有：

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots \approx \theta$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots \approx 1$$

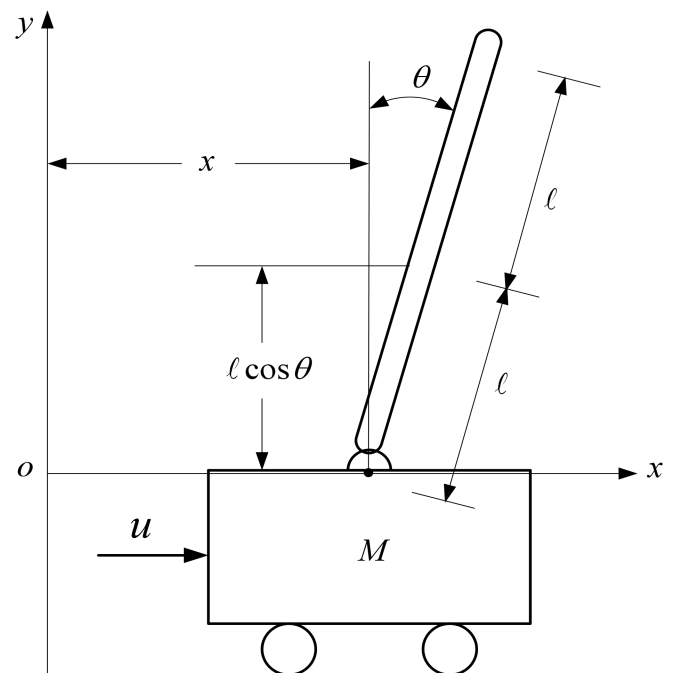
所以：  $I\ddot{\theta} = V\ell\theta - H\ell$

$$m(\ddot{x} + \ell\ddot{\theta}) = H$$

$$V - mg = 0$$

$$M\ddot{x} = u - H$$

消去中间变量 $V$ 和 $H$ ，得到系统的微分方程(单输入两输出)为：



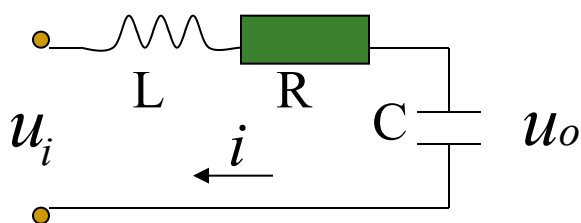
$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} = mg\ell\theta$$

$$(M + m)\ddot{x} + m\ell\ddot{\theta} = u$$

## 【电路系统建模实例】

电阻、电容和电感。电流和电压定律。

[例2.2.3]写出RLC串联电路的微分方程。



$u_i$  — 输入

$u_o$  — 输出

[解]: 根据电路定理:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u_i \quad ①$$

$$u_o = \frac{1}{C} \int i dt \quad ②$$

由②:  $i = C \frac{du_o}{dt}$ , 代入①得:  $LC \frac{d^2 u_o}{dt^2} + RC \frac{du_o}{dt} + u_o = u_i$

这是线性定常二阶微分方程。

**[例2.2.4]** 如图表示一有源电路。试求其输出电压 $e_o$ 与输入电压之间 $e_i$ 的关系。假设为理想运放。

**[解]:** 根据虚短（断）的概念，有

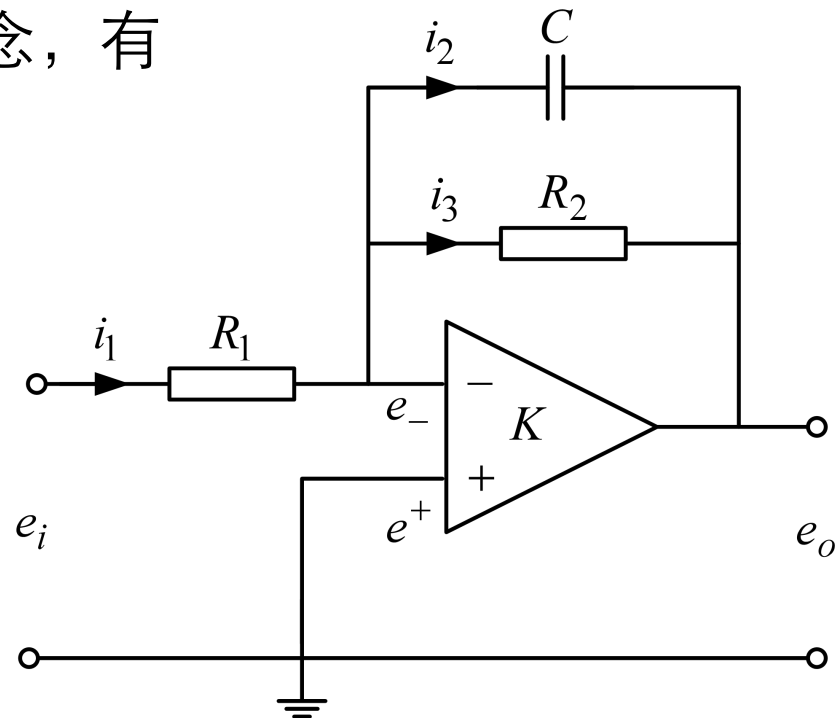
$$e_- = e_+ = 0$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

且： 
$$i_1 = \frac{e_i - e_-}{R_1}$$

$$i_2 = C \frac{d(e_- - e_o)}{dt}$$

$$i_3 = \frac{e_- - e_o}{R_2}$$



得该电路的一阶微分方程为： 
$$-C \frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R_2} = \frac{e_i}{R_1}$$

## 【需要讨论的问题】

### 1、相似系统和相似量

**[注意]**例2.2.1和例2.2.3中，两个不同的物理系统的微分方程形式是完全一样的，均为二阶线性微分方程。

**[定义]**具有相同的数学模型的不同物理系统称为相似系统；对应的物理量称为相似量。

**[说明]**同一物理系统有不同形式的数学模型，而不同类型的系统也可以有相同形式的数学模型。

**[作用]**利用相似系统的概念可以用一个易于实现的系统来模拟相对复杂的系统，实现仿真研究。

### 2、系统中储能元件个数与系统阶数问题

**[说明]**系统独立储能元件个数等于系统阶数。

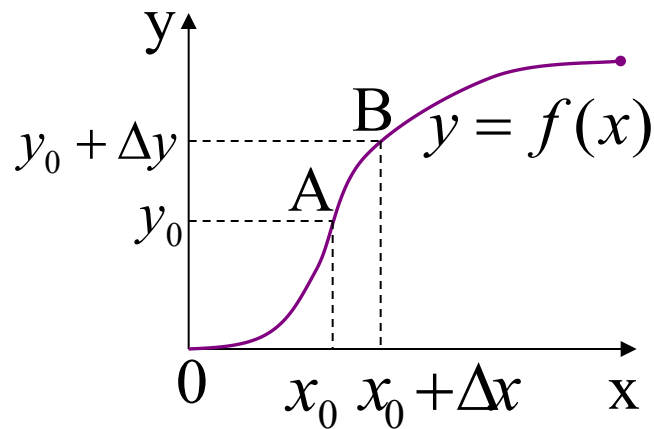


### 3、非线性元件（环节）的线性化

在经典控制领域，主要研究线性定常控制系统。如果描述系统的数学模型是线性常系数微分方程，则称该系统为线性定常系统，其最重要的特性便是可以应用线性叠加原理，即系统的总输出可以由若干个输入引起的输出叠加得到。

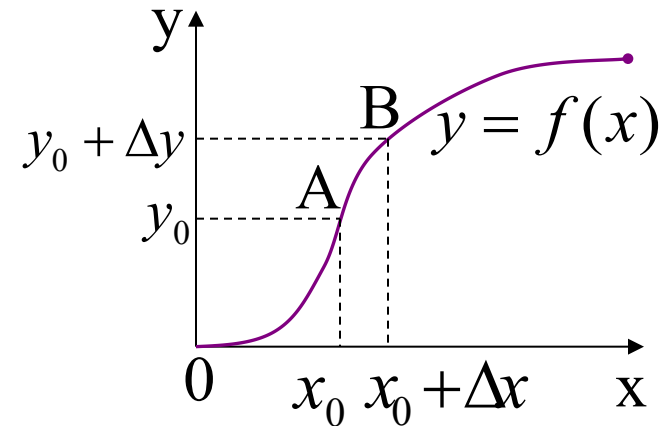
若描述系统的数学模型是非线性方程，则相应的系统称为非线性系统，这种系统不满足线性叠加原理。在经典控制领域，对非线性环节的处理能力是很小的。但在工程应用中，除了含有强非线性环节（典型非线性环节）或系统参数随时间变化较大的情况，一般采用近似的线性化方法。对于非线性方程，可在工作点附近用泰勒级数展开，取前面的线性项。可以得到相对等效的线性环节。

- 设具有连续变化的非线性函数为： $y = f(x)$ ，若取某一平衡状态为工作点，如下图中的A( $x_0, y_0$ )。A点附近有点为B( $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ )，当 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 很小时，AB段可近似看做线性的。



设  $f(x)$  在  $A(x_0, y_0)$  点连续可微，  
则将函数在该点展开为泰勒级数，得：

$$y = f(x_0) + \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \frac{df^2(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$



若  $\Delta x$  很小，则  $y - y_0 \approx \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)$ ，即  $\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} \Delta x = K \Delta x$   
式中， $K$  为与工作点有关的常数，显然，上式是线性方程，  
是非线性方程的线性近似。为了保证近似的精度，只能在工作点附近展开应用。

- 对于具有两个自变量的非线性方程，也可以在静态工作点附近展开。设双变量非线性方程为： $y=f(x_1, x_2)$ ，工作点为 $y_0=f(x_{10}, x_{20})$ 。则可近似为： $\Delta y=K_1\Delta x_1+K_2\Delta x_2$ 。

式中： $\Delta x_1=x_1-x_{10}$ ， $\Delta x_2=x_2-x_{20}$ 。

$$K_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} \bigg|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}}, K_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} \bigg|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} \text{ 为与工作点有关的常数。}$$

**[例子]**薄壁孔流量为： $Q = ck\sqrt{\Delta p}$ ， $c$ 为常数， $k$ 为开度， $\Delta p$ 为两端压差，如何线性化？

**[注意]：**

- (1)上述非线性环节不包括典型非线性特性（如间隙、库仑干摩擦、饱和、磁滞等）。
- (2)实际的工作情况在工作点附近。
- (3)变量的变化必须是小范围的。其近似程度与工作点附近的非线性情况及变量变化范围有关。

## 4、线性系统微分方程的编写步骤

- 确定系统和各元部件的输入量和输出量。
- 对系统中每一个元部件，列写出与其输入、输出量有关的物理方程。
- 对上述方程进行适当的简化，比如略去一些对系统影响小的次要因素，对非线性元部件进行线性化等。
- 在上述元部件方程中消去中间变量，最后得到描述系统输入量和输出量关系的微分方程。通常：输出量写在等号左边，输入量写在等号右边。

## 【机电系统建模实例】

电动机作为控制系统的执行机构，是机电系统的基本要素

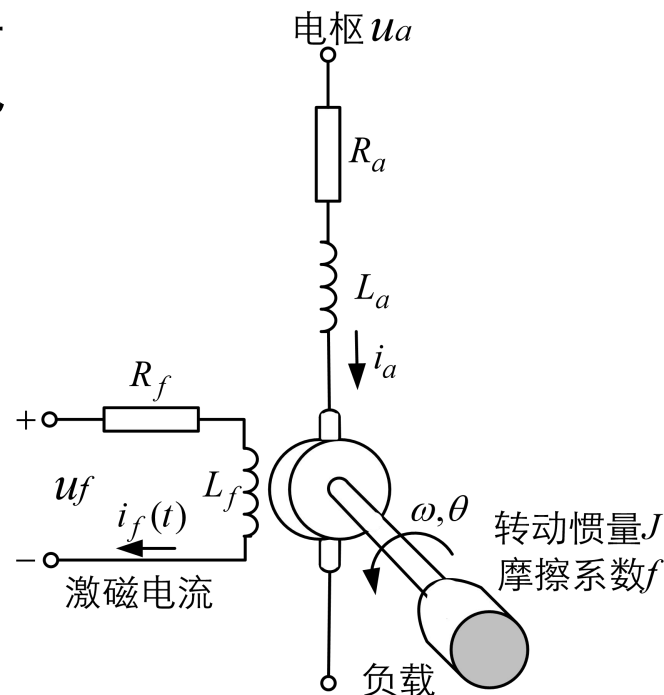
对于右图所示的直流电动机，控制电压可以作用于励磁磁场，也可以作用于电枢两端。当励磁磁场不处于饱和时，气隙磁通 $\phi$ 与励磁电流 $i_f$ 成比例，有：

$$\phi = k_f i_f$$

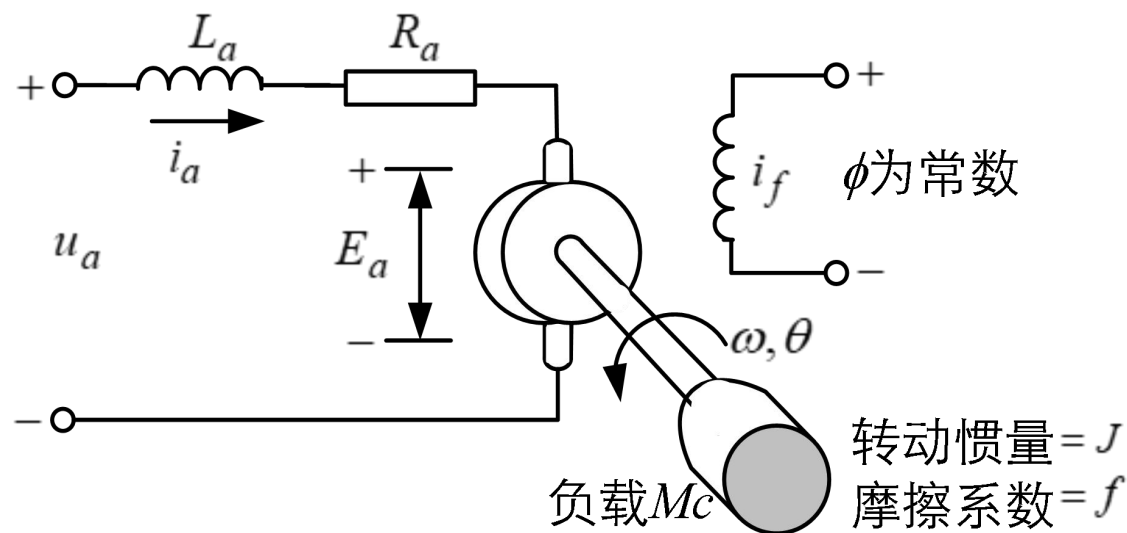
假设电动机的电磁转矩 $M$ 与磁通 $\phi$ 和电枢电流 $i_a$ 之间为线性关系：

$$M = k_1 \phi i_a(t) = k_1 k_f i_f(t) i_a(t)$$

则当其中一个电流保持恒定时，另一个电流便成为输入控制电流。



[例2.2.5] 电枢控制式直流电动机原理图如下图所示。试列写以电枢电压  $u_a(t)$  为输入量，电动机转速  $\omega(t)$  为输出量的直流电动机微分方程。其中励磁磁通  $\phi$  为常数， $R_a$ 、 $L_a$  分别是电枢回路的电阻和电感， $M_c$  是折合到电动机轴上的总负载转矩。



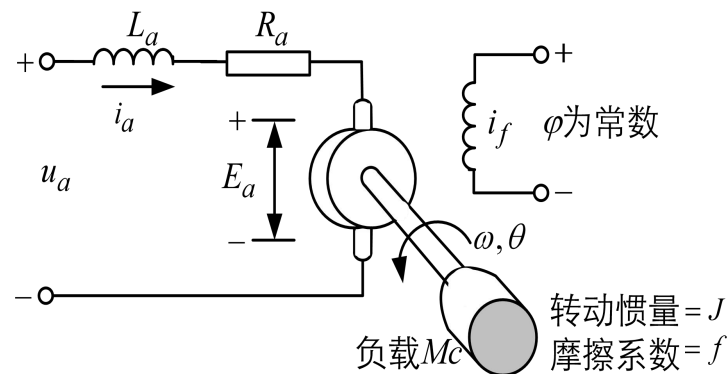
( $i_a(t)$  作为控制电流， $i_f(t)$  为常量)

**[解]:** 电动机的工作实质是将输入的电能转换为机械能。对于如图所示的电枢控制式直流电动机，其工作过程为：输入的电枢电压 $u_a(t)$ 在电枢回路中产生电枢电流 $I_a(t)$ ，流过电枢电流 $I_a(t)$ 的闭合线圈与磁场相互作用产生电磁转矩 $M(t)$ ，从而带动负载转动。因此，电枢控制式直流电动机的运动方程可由以下三部分组成：

1、电枢回路电压平衡方程：

$$u_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a$$

式中 $E_a$ 是电枢反电势，它是电枢旋转时产生的反电势，其大小与励磁磁通及转速成正比，方向与电枢电压 $u_a$ 相反，可表示为 $E_a = C_e \omega(t)$ ， $C_e$ 是反电势系数。



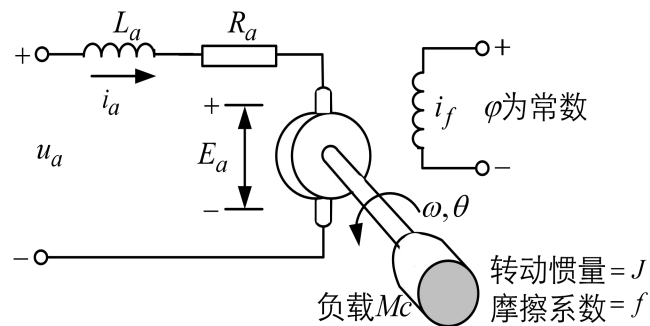


## 2、电磁转矩方程： $M(t) = C_m i_a(t)$

式中： $C_m$ 是电枢控制式电动机转矩系数， $M(t)$ 是电枢电流产生的电磁转矩。

## 3、电动机轴上的转矩平衡方程：

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t) = M(t) - M_c(t)$$



式中： $f$ 是电动机和负载折合到电动机轴上的粘性摩擦系数， $J$ 是电动机和负载折合到电动机轴上的转动惯量， $M_c(t)$ 是负载转矩。略去扭转弹性力。

联立1、2、3式并消去中间变量，便可得到以 $\omega(t)$ 为输出量、 $u_a(t)$ 为输入量的电枢控制式直流电动机微分方程：

$$L_a J \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + (L_a f + R_a J) \frac{d\omega(t)}{dt} + (R_a f + C_m C_e) \omega(t) = C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t)$$

$$L_a J \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + (L_a f + R_a J) \frac{d\omega(t)}{dt} + (R_a f + C_m C_e) \omega(t) = C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t)$$

[化简，可能的话]

- 1、工程应用中，由于电枢回路电感 $L_a$ 较小，通常忽略不计，则上式可简化为（将二阶系统化简为一阶系统）：

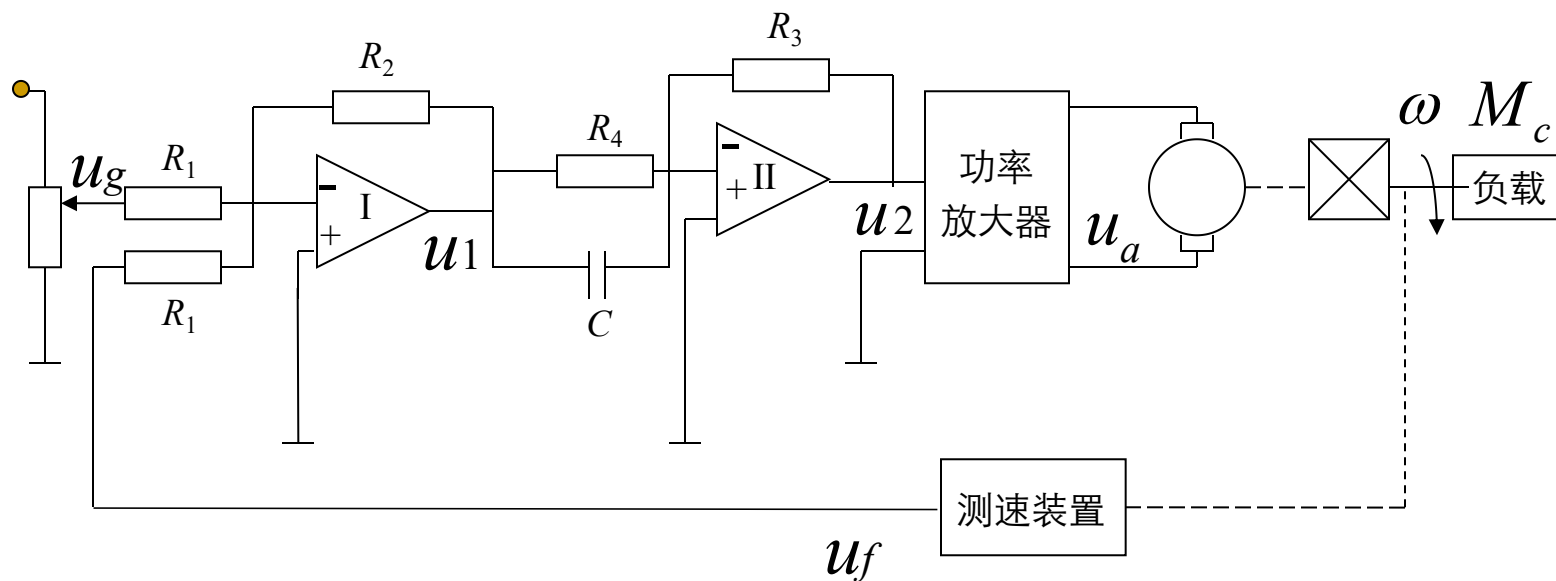
$$T_m \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = K_1 u_a(t) - K_2 M_c(t)$$

- 2、如果电枢电阻 $R_a$ 和电动机的转动惯量都很小，可忽略不计，当忽略负载转矩 $M_c$ 时（空载），则可进一步简化为（将二阶系统化简为比例环节）：

$$C_e \omega(t) = u_a(t)$$

自学：例2.2.6磁场控制式直流电动机微分方程。（ $i_a(t)$ 为常量， $i_f(t)$ 作为控制电流）

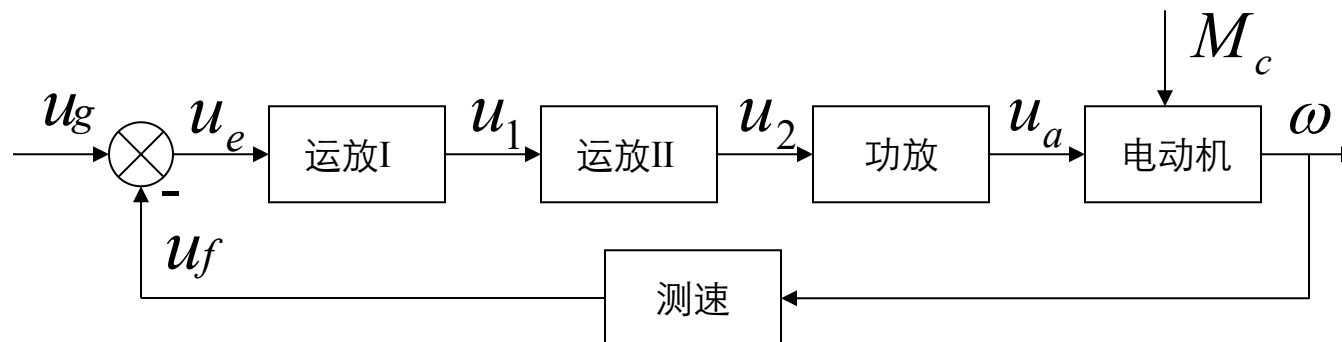
[例2.2.7] 建立下图所示的转速控制系统的微分方程。



[解]: (1)该系统的组成和控制原理?

(2)该系统的输出量是 $\omega$ ，输入量是 $u_g$ ，负载扰动是 $M_c$ 。

## (3) 速度控制系统原理方块图：



## (4) 各环节微分方程（略去减速器）：

①运放I:  $u_1 = k_1(u_g - u_f)$ , 其中:  $k_1 = -R_2 / R_1$

②运放II:  $u_2 = k_2(\tau u_1' + u_1)$ , 其中:  $k_2 = -R_3 / R_4$ ,  $\tau = R_4 C$

③功率放大:  $u_a = k_3 u_2$

④反馈环节:  $u_f = k_f \omega$

## ⑤电动机环节：

$$L_a J \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + (L_a f + R_a J) \frac{d\omega(t)}{dt} + (R_a f + C_m C_e) \omega(t) = C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t)$$

简写为：

$$T_2 \ddot{\omega} + T_1 \dot{\omega} + \omega = k_u u_a - k_m (T_c \dot{M}_c + M_c)$$

其中：

$$T_1 = (L_a f + R_a J) / (R_a f + C_m C_e)$$

$$T_2 = L_a J / (R_a f + C_m C_e)$$

$$k_u = C_m / (R_a f + C_m C_e)$$

$$k_m = R_a / (R_a f + C_m C_e)$$

$$T_c = L_a / R_a$$

(5)联立①~⑤，消去中间变量，得出 $\omega \sim u_g(M_c)$  之间的关系：

$$\frac{T_2}{1+K_0}\ddot{\omega} + \frac{T_1+K_0\tau}{1+K_0}\dot{\omega} + \omega = \frac{K}{1+K_0}(\tau\dot{u}_g + u_g) - \frac{k_m}{1+K_0}(T_c\dot{M}_c + M_c)$$

$$\text{式中： } K_0 = k_1 k_2 k_3 k_u k_f, \quad K = k_1 k_2 k_3 k_u$$

显然，转速 $\omega$ 既与输入量 $u_g$ 有关，也与负载干扰 $M_c$ 有关。

该系统为两输入--单输出系统。

## [增量式分析] (上式等号两端取增量)

• 对于恒值调速系统,  $u_g = \text{常量}$ , 则  $\Delta u_g = 0, \Delta \dot{u}_g = 0$ 。

转速的变化仅由负载干扰引起。增量表达式( $\Delta$ 未注明)为:

$$\frac{T_2}{1+K_0} \ddot{\omega} + \frac{T_1 + K_0 \tau}{1+K_0} \dot{\omega} + \omega = -\frac{k_m}{1+K_0} (T_c \dot{M}_c + M_c)$$

• 对于随动系统, 则  $M_c = \text{常数}$ ,  $\Delta M_c = 0, \Delta \dot{M}_c = 0$ , 故:

$$\frac{T_2}{1+K_0} \ddot{\omega} + \frac{T_1 + K_0 \tau}{1+K_0} \dot{\omega} + \omega = \frac{K}{1+K_0} (\tau \dot{u}_g + u_g)$$

根据上式可以讨论输出转速跟随给定输入电压的变化情况。

• 若  $u_g$  和  $M_c$  都是变化的, 则对于线性系统应用叠加原理分别讨论两种输入作用引起的转速变化, 然后相加。

## [拉氏变换复习]

①定义：如果有一个以时间 $t$ 为自变量的函数 $f(t)$ ，它的定义域 $t>0$ ，那么下式即是拉氏变换式：

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \text{ 式中 } s \text{ 为复数。记作 } F(s) = L[f(t)]$$

一个函数可以进行拉氏变换的充分条件是：

- (1)  $t < 0$  时,  $f(t) = 0$ ;
- (2)  $t \geq 0$  时,  $f(t)$  分段连续;
- (3)  $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt < \infty$ 。

$F(s)$  --像函数,  $f(t)$  --原函数。

记  $f(t) = L^{-1}[F(s)]$  为反拉氏变换。



## ②性质:

(1)线性性质:  $L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$

(2)微分定理:  $L[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$

$$L[\ddot{f}(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

(3)积分定理: (设初值为零)

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

(4)时滞定理:  $L[f(t-T)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t-T) dt = e^{-sT} F(s)$

(5)初值定理:  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

(6)终值定理:  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

(7)卷积定理:  $L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau] = F_1(s)F_2(s)$

### ③常用函数的拉氏变换:

单位阶跃函数:  $f(t) = 1(t), F(s) = 1/s$

单位脉冲函数:  $f(t) = \delta(t), F(s) = 1$

单位斜坡函数:  $f(t) = t, F(s) = 1/s^2$

单位抛物线函数:  $f(t) = t^2 / 2, F(s) = 1/s^3$

正弦函数:  $f(t) = \sin \omega t, F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

其它函数可以查阅相关表格获得。

## [线性方程的求解]

研究控制系统在一定的输入作用下，输出量的变化情况。方法有经典法，拉氏变换法和数字求解。

在自动系统理论中经常使用拉氏变换法。

## [拉氏变换求微分方程解的步骤]

- ①对微分方程两端进行拉氏变换，将时域微分方程转换为 $s$ 域的代数方程。
- ②求拉氏反变换，求得输出函数的时域解。

**[例子]** 求[例2.2.7]转速控制系统微分方程的解。假设没有负载干扰，并且各项初值均为零。

**解：**速度控制系统微分方程为：

$$a_2\ddot{\omega} + a_1\dot{\omega} + a_0\omega = b_1\dot{u}_g + b_0u_g$$

对上式各项进行拉氏变换，得：

$$\Omega(s)(a_2s^2 + a_1s + a_0) = U_g(s)(b_1s + b_0)$$

即：

$$\Omega(s) = \frac{(b_1s + b_0)}{(a_2s^2 + a_1s + a_0)} U_g(s)$$

当输入信号 $U_g(s)$ 已知时，求上式的拉氏反变换，即可求得输出量的时域解 $\omega(t)$ 。

# 小结

- 系统微分方程的列写（分析法）
  - 机械系统、电路系统、电机和机电系统
- 相似量、相似系统
- 非线性环节的线性化
- 线性方程的求解（用拉氏变换法）
- 拉氏变换及性质（复习）

作业： 2.5