第二节 绘制根轨迹的基本规则

通过研究根轨迹和开环零点和极点的关系、根轨迹的特殊点、渐近线和其它性质将有助于减少绘图工作量，能够较迅速地绘制出根轨迹的大致形状和变化趋势。以下的讨论是针对参数k_g的180度根轨迹的性质。

1、根轨迹的连续性：

闭环系统特征方程的某些系数是增益k_g的函数。当k_g从0到无穷变化时，这些系数是连续变化的。故特征方程的根是连续变化的，即根轨迹曲线是连续曲线。

2、根轨迹的对称性：

一般物理系统特征方程的系数是实数，其特征根必为实根或共轭复根。即位于复平面的实轴上或对称于实轴。

3、根轨迹的支数:

当k_g从0到$+\infty$变化时，根轨迹的支数与闭环特征根数目相等。即根轨迹的支数等于闭环系统的阶数（n≥m时）。

$$\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)+k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)=0$$

绘制根轨迹规则1:

根轨迹是对称于实轴的连续曲线，其分支数等于系统开环零点和极点数目中的大者。

4、根轨迹的起点和终点：

定义：k_g=0时为起点，k_g=+∞时为终点。

根轨迹方程为：
$$\frac{k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=-1$$

另写为：
$$\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=-\frac{1}{k_g}$$

（一）$n>m$时：

当k_g=0时，只有$s=-p_i(i=1\sim n)$时，上式才能成立。而$-p_i$是开环极点，所以根轨迹起始于开环极点。n阶系统有n个开环极点，分别是n支根轨迹的起点。

当$k_g=\infty$时，①$s=-z_j(j=1\sim m)$时，(1)式成立。$-z_j$是开环传递函数有限值零点，有m个。故n阶系统有m支根轨迹的终点在m个有限零点处。②因$n>m$，那么剩余的n-m个终点在哪里呢?

[答案]在无穷远处。

由根轨迹方程知：当$k_g\to\infty$且$s\to\infty$时，(1)式也成立，见(2)式。

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=0 \qquad (2)$$

$$\lim_{k_g\to\infty}-\frac{1}{k_g}=0$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=-\frac{1}{k_g} \qquad (1)$$

把无穷远处根轨迹的终点称为无限开环零点，有n-m个。

有限值零点加无穷远零点的个数等于极点数n。

【问题】n-m支根轨迹是如何趋于无限远呢?

（二）$n<m$时：
$$\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = -\frac{1}{k_g}$$

起点(k_g=0)：当$s = -p_i$及$s\to+\infty$时，上式都成立。即：当$n<m$时，必有m-n支根轨迹的起点在无穷远（无限远极点）处。

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = \lim_{k_g\to 0}\frac{1}{k_g} = \infty,\quad n<m$$

终点(k_g=+∞)：当s=-z_j时，上式成立。

绘制根轨迹规则2:

根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点。

5.根轨迹的渐近线：

若开环零点数m小于开环极点数n，则当系统的开环增益$k_g \to \infty$时趋向无穷远处的根轨迹共有n-m条。这n-m条根轨迹趋向无穷远的方位可由渐近线决定。

渐近线包括：渐近线的倾角和渐近线与实轴的交点。

- **倾角**：设根轨迹在无限远处有一点s_k，则s平面上所有的开环有限零点、极点指向s_k的向量都相等。如果渐近线与实轴的交点为$-\sigma$，则与$-\sigma$指向s_k的向量也相等。

即当$s = s_k = \infty$时，有：

$$s + z_1 = \ldots = s + z_m = s + p_1 = \ldots = s + p_n = s + \sigma$$

若渐近线与实轴的倾角为φ，则根据相角条件，当s→无穷大时，有

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s+z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s+p_i)=m\varphi-n\varphi=\pm(2k+1)\pi$$

$$\boxed{\varphi=\pm\frac{(2k+1)\pi}{n-m},(k=0,1,\cdots n-m-1)}$$

[约定]倾角逆时针为正，顺时针为负。

渐近线与实轴的交点-σ

当$s = s_k = \infty$时，有:

$$s+z_1 = \ldots = s+z_m = s+p_1 = \ldots = s+p_n = s+\sigma$$

则根轨迹方程可写为:

$$\frac{k_g}{(s+\sigma)^{n-m}} = -1$$

$$\left|\frac{1}{(s+\sigma)^{n-m}}\right| = \left|\frac{1}{s^{n-m}+(n-m)\sigma s^{n-m-1}+\ldots}\right| = \frac{1}{k_g}$$

又：
$$\left|\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}\right| = \frac{1}{k_g} = \left|\frac{s^m + (\sum_{j=1}^{m} z_j)s^{m-1} + \cdots + \prod_{j=1}^{m} z_j}{s^n + (\sum_{i=1}^{n} p_i)s^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^{n} p_i}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{s^{n-m} + (\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j)s^{n-m-1} + \ldots}\right|$$

比较系数得：$(n-m)\sigma = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j$，当$s \to \infty$时

$$\boxed{-\sigma = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}}$$

绘制根轨迹规则3：如果控制系统的开环极点数n和开环零点数m满足$n>m$，则当根轨迹增益$k_g \to +\infty$时，根轨迹的渐近线共有$n-m$条，这些渐近线在实轴上交于一点，其坐标是：

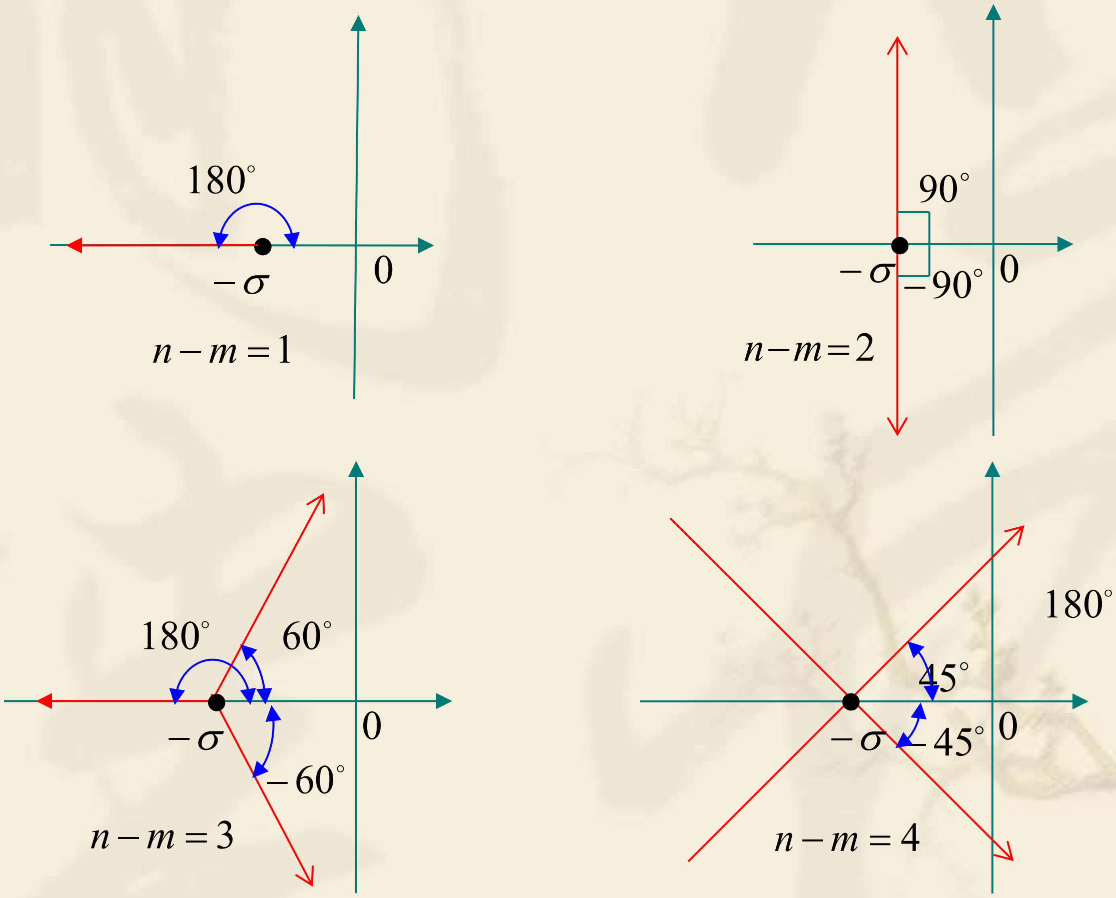
$$\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m},\ j0\right)$$

其倾角（与实轴的夹角）为：

$$\frac{(2k+1)\pi}{n-m}, k = 0,1,2,\ldots,n-m-1$$

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, (k = 0, 1, \cdots n-m-1)$$

$$\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m},\ j0\right)$$



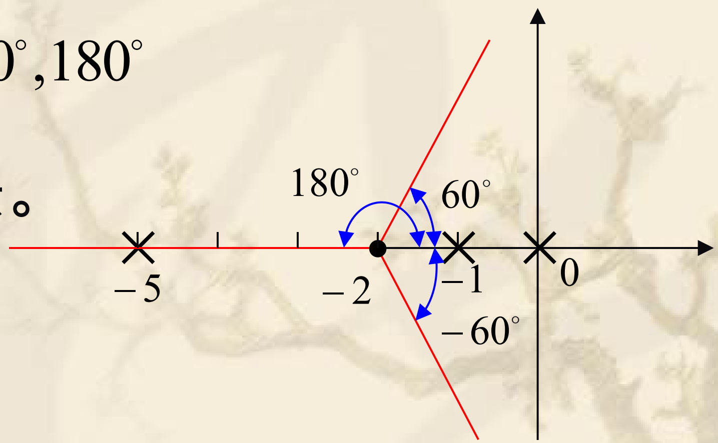
[例4.2.1]系统开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{k_g}{s(s+1)(s+5)}$，试确定根轨迹支数，起点和终点。若终点在无穷远处，求渐近线与实轴的交点和倾角。

[解]：根轨迹有3支。起点为开环极点$-p_{1,2,3}$=0，-1，-5，无有限值零点，所以3支根轨迹都趋向无穷远。

渐近线与实轴的交点：$-\sigma=-\dfrac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=-\dfrac{0+1+5-0}{3-0}=-2$

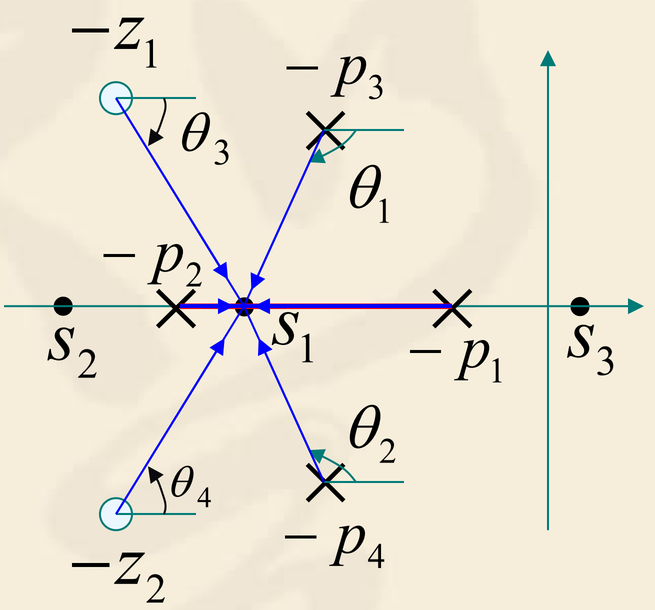
渐近线与实轴的倾角：$\varphi=\dfrac{(2k+1)\pi}{n\text{-}m}=\pm 60^{\circ},180^{\circ}$

零极点分布和渐近线（红线）如图所示。



6、实轴上的根轨迹:

实轴上具有根轨迹的区间是：其右方开环系统的零点数和极点数的总和为奇数。



[证明]: 例如在实轴上有两个开环极点$-p_1$、$-p_2$，复平面上有一对共轭极点$-p_3$、$-p_4$和一对共轭零点$-z_1$、$-z_2$ 。

先看试验点s_1点:

①成对出现的共轭极点$-p_3$、$-p_4$对实轴上任意试探点构成的两个向量的相角之和为0°；

②成对出现的共轭零点$-z_1$、$-z_2$对实轴上任意试探点构成的两个向量的相角之和为0°；

③试探点左边的极点$-p_2$对试探点构成的向量的相角为0°；

④试探点右边的极点$-p_1$对试探点构成的向量的相角为180°；

所以s_1点满足根轨迹相角条件，于是$[-p_2, -p_1]$为实轴上的根轨迹。

再看s_2点：不满足根轨迹相角条件，所以不是根轨迹上的点。

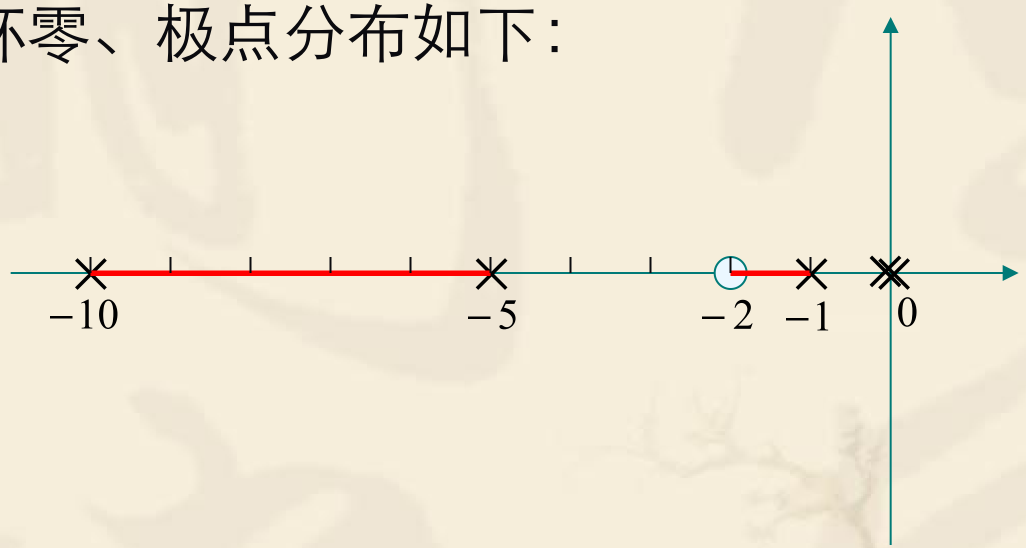
同样s_3点也不是根轨迹上的点。

绘制根轨迹规则4:

若实轴上某点右边的开环零点和开环极点数目之和为奇数，则该点是根轨迹上的点。共轭复数开环零点、开环极点对确定实轴上的根轨迹无影响。

[例]设系统的开环传递函数为: $G_k(s)=\dfrac{k_g(s+2)}{s^2(s+1)(s+5)(s+10)}$ ，试求实轴上的根轨迹。

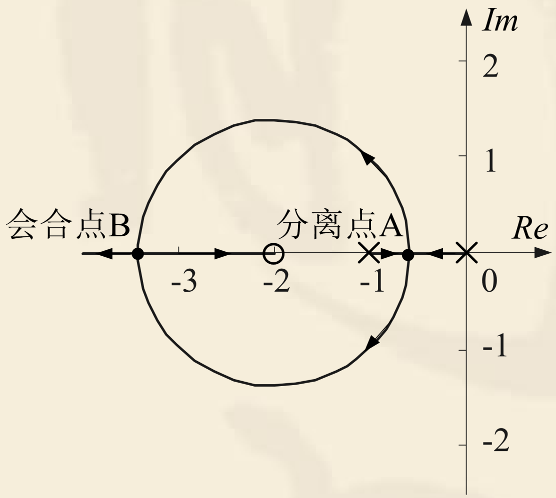
[解]: 开环零、极点分布如下:

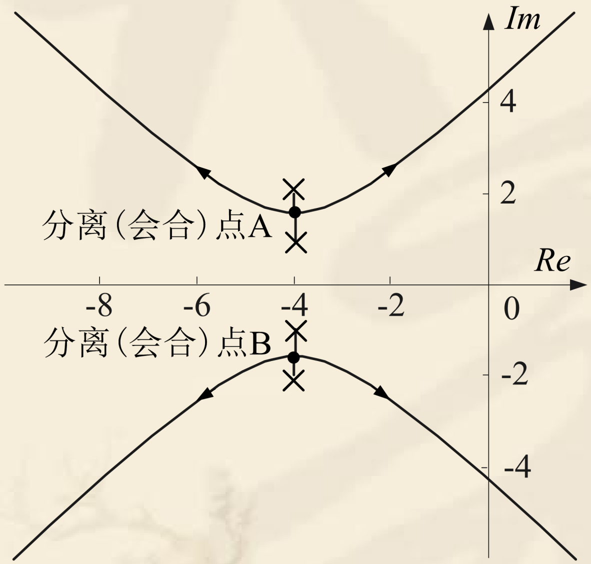


红线所示为实轴上根轨迹，为：[-10，-5]和[-2，-1]。注意在原点有两个极点，双重极点用“⋇”表示。

7、根轨迹的分离(会合)点:

若干支根轨迹在复平面上某一点相遇后又分开，称该点为分离(会合)点。





通常当根轨迹分支在实轴上相交后走向复平面时，习惯上称该相交点为根轨迹的分离点，反之，当根轨迹分支由复平面走向实轴时，它们在实轴上的交点称为会合点。

[分离(会合)点的求法1]:

根轨迹在s平面上的分离(会合)点表示这些点是闭环特征方程的重根点。这时的根轨迹增益设为：$k_g=k_{gd}$

设系统开环传递函数为:

$$G_k(s)=k_g\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=k_g\frac{N(s)}{D(s)}$$

则闭环特征方程为:

$$F(s)=D(s)+k_gN(s)=0$$

若该方程有γ个重根$-\sigma_d$，其余互异根为$-\sigma_1$、$-\sigma_2$、…、$-\sigma_{n-\gamma}$:

$$F(s)=D(s)+k_gN(s)$$

$$=(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)\ldots(s+\sigma_{n-\gamma})(s+\sigma_d)^{\gamma}=0$$

$$F(s)=(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)\ldots(s+\sigma_{n-\gamma})(s+\sigma_d)^{\gamma}=0$$

求导，得:

$$F'(s)=D'(s)+k_g N'(s)$$
$$=(s+\sigma_d)^{\gamma}[(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)\ldots(s+\sigma_{n-\gamma})]'$$
$$+\gamma(s+\sigma_d)^{\gamma-1}[(s+\sigma_1)\ldots(s+\sigma_{n-\gamma})]$$

有: $F(s)|_{s=-\sigma_d}=F'(s)|_{s=-\sigma_d}=0$

或: $\begin{cases} D(s)+k_{gd}N(s)=0 \\ D'(s)+k_{gd}N'(s)=0 \end{cases}$ 当$s=-\sigma_d$时

消去k_{gd}得: $\boxed{\begin{cases} N'(s)D(s)-N(s)D'(s)=0 \\ k_{gd}=-\dfrac{D'(s)}{N'(s)}=-\dfrac{D(s)}{N(s)}\Big|_{s=-\sigma_d} \end{cases}}$

由该式可求得分离(会合)点，以及这些点处的根轨迹增益。

[求分离(会合)点求法2]

设系统开环传递函数为: $G_k(s)=k_g\dfrac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$

闭环特征方程为: $G_k(s)=-1$

即: $F(s)=k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)+\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)=0$

重根时满足: $\dfrac{dF(s)}{ds}=\dfrac{d}{ds}\left[k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)+\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)\right]=0$

$$\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)=-k_g\prod_{j=1}^{m}(s+z_j) \qquad (1)$$

$$\frac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)=-k_g\frac{d}{ds}\prod_{j=1}^{m}(s+z_j) \qquad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \qquad \frac{\dfrac{d}{ds}\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = \frac{\dfrac{d}{ds}\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}$$

$$\frac{d\left[\ln\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)\right]}{ds} = \frac{d\left[\ln\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)\right]}{ds}$$

$$\frac{d\left[\sum_{i=1}^{n}\ln(s+p_i)\right]}{ds} = \frac{d\left[\sum_{j=1}^{m}\ln(s+z_j)\right]}{ds}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\ln(s+p_i)}{ds} = \sum_{j=1}^{m}\frac{d\ln(s+z_j)}{ds}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s+p_i} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{s+z_j}}$$

[求分离(会合)点求法3]

[极值法]若分离会合点处于实轴上，则在分离会合点处，k_g具有实数极值。

$$k_g = -\frac{D(s)}{N(s)}$$

$$\frac{dk_g}{ds} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{D(s)}{N(s)}\right] = -\frac{D'(s)N(s) - N'(s)D(s)}{N^2(s)} = 0$$

$$N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0$$

[说明]

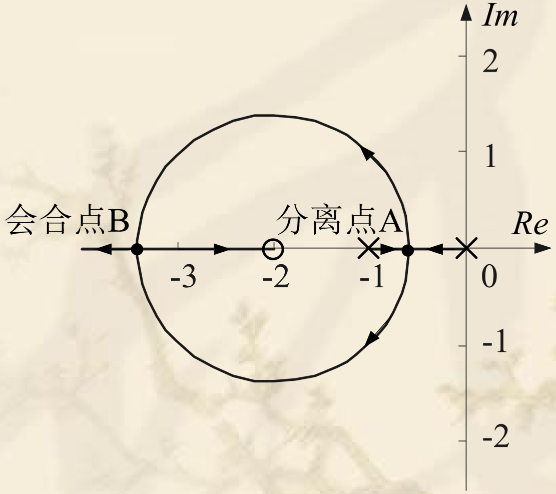
- 按上述方法所求的根可能并非都是实际的分离(会合)点，只有位于根轨迹上的那些点才是实际的分离(会合)点，具体计算时应加以判断。若所求出的增益k_{gd}为大于零的实数，则所求出的点为实际分离(会合)点。

- 一般，若实轴上两相邻开环极点之间有根轨迹，则这两相邻极点之间必有分离点；如果实轴上两相邻开环零点（其中一个是可能是无限大零点）之间有根轨迹，则这相邻零点之间必有会合点。

[分离角]：根轨迹进入分离（会合）点的切线方向与离开分离（会合）点的切线方向之间的夹角。

假设有 l 条根轨迹分支进入并离开分离（会合）点，则分离角为：

$$\theta_d = \frac{(2k+1)\pi}{l}, \quad k = 0,1,2,\cdots, \quad l-1$$



绘制根轨迹规则5: $\boxed{k_g \dfrac{N(s)}{D(s)} = -1}$

根轨迹的分离(会合)点求解公式为:

$$\boxed{\begin{gathered} N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s+p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{s+z_j} \end{gathered}}$$

分离(会合)点对应的根轨迹增益为:

$$\boxed{k_{gd} = -\frac{D'(s)}{N'(s)} = -\frac{D(s)}{N(s)}\bigg|_{s=-\sigma_d}}$$

[例4.2.2]单位反馈系统的开环传递函数为:

$$G_k(s)=\frac{K(0.25s+1)}{(s+1)(0.5s+1)}$$

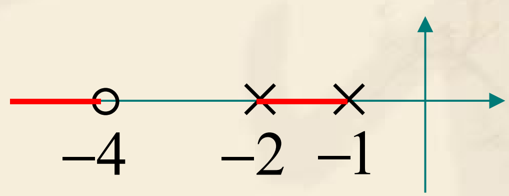
试确定实轴上的根轨迹区间，并计算根轨迹的分离（会合）点和分离角，以及分离（会合）点处的根轨迹增益。

解: 首先将系统的开环传递函数写为零、极点形式:

$$G_k(s)=\frac{k_g(s+4)}{(s+1)(s+2)}$$ ，其中: $k_g=K/2$

画出开环极点和零点分布图，可得实轴上的根轨迹区间应为:

$(-\infty,-4]$和$[-2,-1]$



求根轨迹的分离（会合）点：

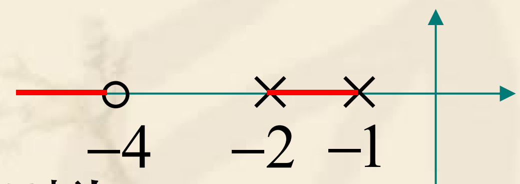
设$G_k(s)=k_g\dfrac{N(s)}{D(s)}$,则：$N(s)=s+4, D(s)=(s+1)(s+2)=s^2+3s+2$

$$N'(s)=1, D'(s)=2s+3,$$

由$N(s)'D(s)-N(s)D'(s)=0$,整理得：$s^2+8s+10=0$

解得：$s_1=-1.55, s_2=-6.45$

根据根轨迹在实轴上的分布，可知s_1是实轴上的分离点，s_2是实轴上的会合点。



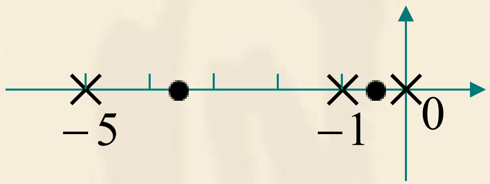
分离点和会合点对应的根轨迹增益分别为：

$$k_{gd1}=-\frac{D'(s)}{N'(s)}=-\frac{2s+3}{1}\Big|_{s=-1.55}=0.1 \quad k_{gd2}=-\frac{D'(s)}{N'(s)}=-\frac{2s+3}{1}\Big|_{s=-6.45}=9.9$$

[例4-4]单位反馈系统的开环传递函数为: $G_k(s)=\dfrac{k_g}{s(s+1)(s+5)}$

试确定实轴上根轨迹的分离会合点的位置。

[解]:



实轴上根轨迹区间是: $(-\infty,-5]$和$[-1,0]$

闭环特征方程为: $1+G_k(s)=1+\dfrac{k_g}{s(s+1)(s+5)}=0$

$$k_g=-s(s+1)(s+5)=-(s^3+6s^2+5s)$$

$$\frac{dk_g}{ds}=-(3s^2+12s+5)=0$$

$$s_{1,2}=-2\pm\sqrt{\frac{7}{3}}=\begin{cases}-0.4725 & k_g=1.12845\\ -3.5275 & k_g=-13.13\end{cases}$$

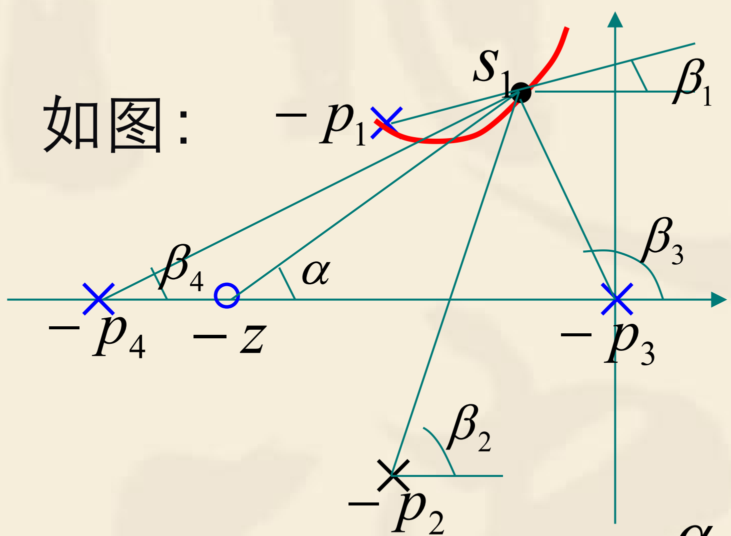
显然，分离会合点为-0.4725，而-3.5275不是分离会合点。

注意：分离会合点也可能出现在复平面上，由于根轨迹对称于实轴，所以，复平面上的分离会合点必对称于实轴。

8、根轨迹的出射角和入射角：

根轨迹离开开环复极点处的切线方向与正实轴的夹角称为出射角；根轨迹进入开环复零点处切线方向与正实轴的夹角称为入射角。

如图：



图中有四个开环极点，一个开环零点。$-p_1$、$-p_2$为共轭极点，现在计算$-p_1$的出射角，设为θ_{1c}。

在离开$-p_1$附近的根轨迹上取一点s_1，则s_1点应满足相角条件：

$$\alpha-\angle(s_1+p_1)-\angle(s_1+p_2)-\angle(s_1+p_3)-\angle(s_1+p_4)=$$

$$\alpha-\beta_1-\beta_2-\beta_3-\beta_4=\pm(2k+1)\pi$$

当$s_1\to -p_1$时，β_1即为离开根轨迹上$-p_1$点的出射角，$\beta_1\to\theta_{1c}$。

$$\theta_{1c} = \mp(2k+1)\pi + \alpha - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 = \mp(2k+1)\pi + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 1c}}^{n}\beta_i$$

式中：β_i为除了$-p_1$以外的所有开环极点指向$-p_1$的矢量的相角；α_j为所有开环零点指向$-p_1$的矢量的相角。

$-p_2$的出射角与$-p_1$的出射角关于实轴对称。

同理，进入复零点$-z_y$的根轨迹入射角θ_{yr}为：

$$\theta_{yr} = \mp(2k+1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq yr}}^{m}\alpha_j + \sum_{i=1}^{n}\beta_i$$

式中：α_j为除了$-z_y$以外的开环零点到$-z_y$的矢量相角；β_i为各开环极点到$-z_y$的矢量相角。

绘制根轨迹规则6：

根轨迹的出射角和入射角分别为：

$$\theta_{pk} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \angle(p_k + z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \angle(p_k + p_i)$$

$$\theta_{zk} = \pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \angle(z_k + z_j) + \sum_{i=1}^{n} \angle(z_k + p_i)$$

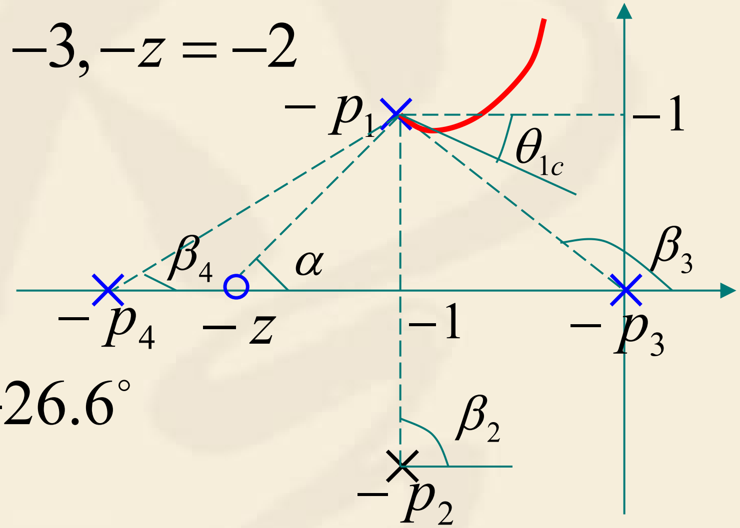
即：

$$\theta_{pk} = \pi + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i = \pi + \sum(\text{从各个零点到该极点的向量辐角}) - \sum(\text{从其他极点到该极点的向量辐角})$$

$$\theta_{zk} = \pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \alpha_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \pi - \sum(\text{从其他零点到该零点的向量辐角}) + \sum(\text{从各个极点到该零点的向量辐角})$$

[例]如图，试确定根轨迹离开复数共轭极点的出射角。

$-p_1=-1+j1, -p_2=-1-j1, -p_3=0, -p_4=-3, -z=-2$



[解]: $\mathrm{tg}\alpha=1, \alpha=45^\circ; \beta_2=90^\circ; \beta_3=135^\circ;$

$\mathrm{tg}\beta_4=0.5, \beta_4=26.6^\circ$

$\therefore \theta_{1c}=\pi+45^\circ-90^\circ-135^\circ-26.6^\circ=-26.6^\circ$

根据对称性，可知$-p_2$点的出射角为：$\theta_{2c}=26.6^\circ$

请根据相角条件自行计算。

[注意]:

- 相角要注意符号；逆时针为正，顺时针为负；
- 注意矢量的方向。$-p_2\rightarrow -p_1, -z\rightarrow -p_1$

[重极点的出射角和重零点的入射角]

$$G_k(s)=\frac{k_g(s+2)}{s^2(s+4)}$$

$$G_k(s)=\frac{k_g(s+4)}{s(s+2)^2}$$

$$\theta_{xc}=\frac{1}{l}\left[(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq x}}^{n}\beta_i\right],\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\theta_{yr}=\frac{1}{l}\left[(2k+1)\pi-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq y}}^{m}\alpha_j+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right],\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

9、根轨迹与虚轴的交点:

根轨迹和虚轴相交时，系统处于临界稳定状态。闭环特征方程至少有一对共轭虚根。这时的增益k_{gp}称为临界根轨迹增益。

根轨迹与虚轴的交点和k_{gp}的求法:

- 在根轨迹方程中令$s=\mathrm{j}\omega$，得到$1+G_k(\mathrm{j}\omega)=0$，整理得:

$$\mathrm{Re}[1+G_k(\mathrm{j}\omega)]+\mathrm{j}\,\mathrm{Im}[1+G_k(\mathrm{j}\omega)]=0$$

即:

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[1+G_k(\mathrm{j}\omega)]=0\\ \mathrm{Im}[1+G_k(\mathrm{j}\omega)]=0\end{cases}$$

可求得根轨迹与虚轴的交点及对应的临界增益$\mathrm{j}\omega$，k_{gp}。

- 由劳斯稳定性判据求解：

在使用劳斯判据时会遇到劳斯阵列的某一行全为零的情况，这种情况表明闭环控制系统存在大小相等且位置径向相反的根。这些根包括大小相等而符号相反的实根对，共轭虚根对以及对称于虚轴的共轭复根对。利用劳斯阵列中系数全为零行的上一行系数组成辅助方程，该辅助方程的根即是这些大小相等且位置径向相反的根。(对闭环特征方程)

绘制根轨迹规则7：根轨迹与虚轴的交点应根据

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[1+G_k(\mathrm{j}\omega)]=0 \\ \mathrm{Im}[1+G_k(\mathrm{j}\omega)]=0 \end{cases}$$

或应用劳斯稳定性判据求解。

[例4] 开环传递函数为: $G_k(s)=\dfrac{k_g}{s(s+1)(s+2)}$，试求根轨迹与虚轴的交点和$k_{gp}$。

❑方法一: 根轨迹方程为:

$$\Phi(s)=s(s+1)(s+2)+k_g=s^3+3s^2+2s+k_g=0$$

将 $s=j\omega$ 代入得: $\Phi(j\omega)=-3\omega^2+k_{gp}+j(-\omega^3+2\omega)=0$

$$\therefore\begin{cases}-3\omega^2+k_{gp}=0\\ -\omega^3+2\omega=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\omega=0,\pm\sqrt{2}\\ k_{gp}=0,6\end{cases}$$

当$k_{gp}=0$时，$\omega=0$，为根轨迹的起点（开环极点）

当 $k_{gp}=6$时，$\omega=\pm\sqrt{2}$，与虚轴的交点为: $\pm j\sqrt{2}$

❑方法二：用劳斯稳定判据确定ω, k_{gp}的值。

$$s^3 + 3s^2 + 2s + k_g = 0$$

劳斯阵列为：

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & k_g \\ s^1 & \dfrac{6-k_g}{3} & 0 \\ s^0 & k_g & 0 \end{array}$$

劳斯阵列中某一行全为零时，特征方程可能出现共轭虚根。劳斯阵列中可能全为零的行有二。

1、令$6-k_g=0$,得临界增益为：$k_{gp}=k_g=6$

共轭虚根为辅助方程$3s^2+k_{gp}=0$的根。

$$3s^2+6=0, s_{1,2}=\pm \mathrm{j}\sqrt{2}$$

2、令$k_g=0$,得$s=0$(开环极点)

10、闭环系统极点之和与之积:

开环传递函数为: $$G_k(s)=k_g\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}=k_g\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}$$

式中: $b_{m-1}=\sum_{j=1}^{m}z_j, b_0=\prod_{j=1}^{m}z_j \qquad a_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}p_i, a_0=\prod_{i=1}^{n}p_i$

闭环系统的特征方程为: $F(s)=1+G_k(s)=0$, 即:

$$F(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0+k_g(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0)=0 \quad (1)$$

设闭环系统的极点为: $-s_1,s_2,\ldots-s_n$, 则

$$F(s)=(s+s_1)(s+s_2)\ldots(s+s_n)=s^n+(\sum_{i=1}^{n}s_i)s^{n-1}+\ldots+\prod_{i=1}^{n}s_i \qquad (2)$$

$$F(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0+k_g(s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0)=0 \quad (1)$$

$$F(s)=(s+s_1)(s+s_2)\ldots(s+s_n)=s^n+(\sum_{i=1}^{n}s_i)s^{n-1}+\ldots+\prod_{i=1}^{n}s_i \quad (2)$$

比较(1)、(2)式得:

- 当n-m>=2时，$a_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{i=1}^{n}p_i$，即:

对于任意的k_g，闭环极点之和等于开环极点之和，为常数。

表明：当k_g变化时，部分闭环极点在复平面上向右移动（变大），则另一些极点必然向左移动(变小)；反之亦然。

- 闭环极点之积为: $\prod_{i=1}^{n}s_i=a_0+k_gb_0=\prod_{i=1}^{n}p_i+k_g\prod_{j=1}^{m}z_j$

绘制根轨迹规则8：当系统满足$n-m\geqslant 2$时，对于任意的根轨迹增益k_g，系统的闭环极点之和为常数，且等于系统的开环极点之和。

根据上述10个性质（或8条准则），可以大致画出根轨迹的形状。为了准确起见，对某些关注点可以用相角条件试探之。

根轨迹作图步骤汇总

一、标注开环极点和零点，纵、横坐标使用相同的比例尺；

二、实轴上的根轨迹；

三、n-m条渐近线；

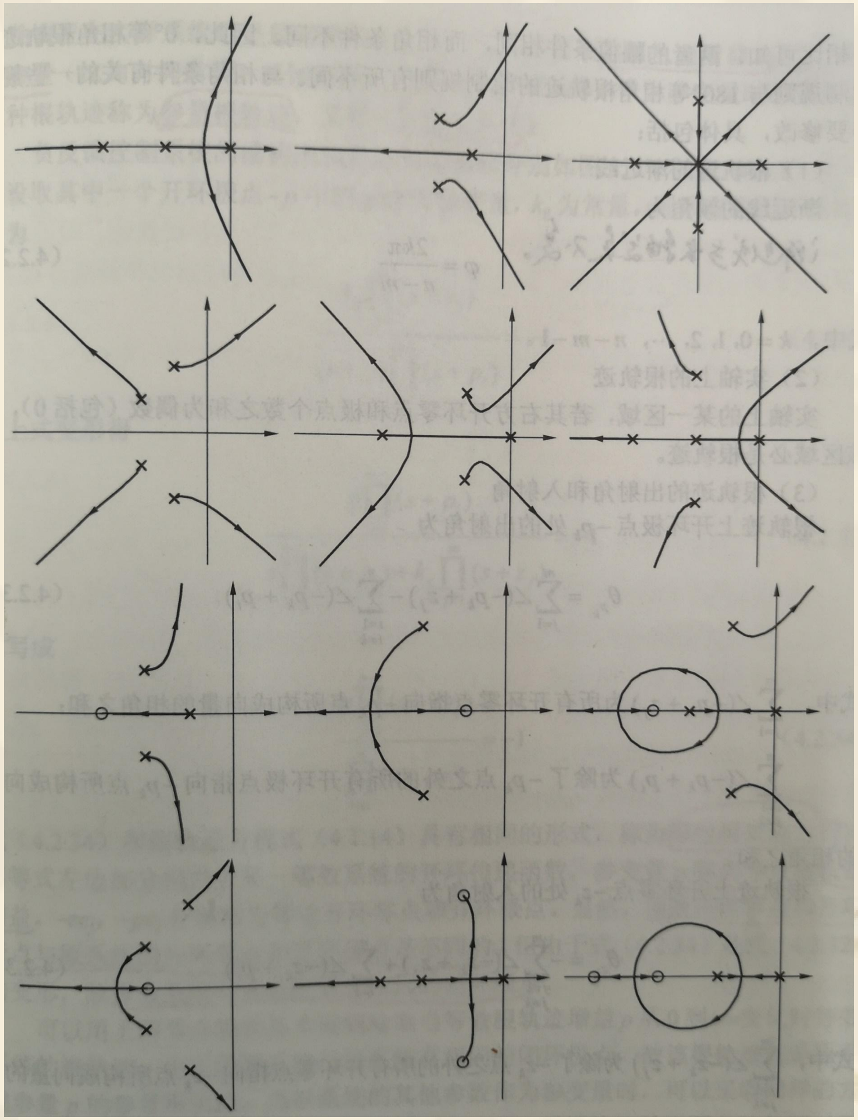
四、根轨迹的出射角、入射角；

五、根轨迹与虚轴的交点；

六、根轨迹的分离点、会合点；

七、结合根轨迹的连续性、对称性、根轨迹的支数、起始点和终点，闭环极点与闭环极点之和及之积等性质画出根轨迹。

右图为常见的开环零、极点分布及根轨迹图，供绘制根轨迹图时参考。



[例]开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{k_g}{s[(s+4)^2+16]}$，画根轨迹。

解:1. 求出开环零极点，即：

$$p_1=0,\quad p_{2,3}=-4\pm4\mathrm{j}$$

2.实轴上的根轨迹：$(-\infty,\ 0]$

3.渐近线

$$-\sigma=\frac{0-4+4\mathrm{j}-4-4\mathrm{j}-0}{3}=-\frac{8}{3}\approx-2.67$$

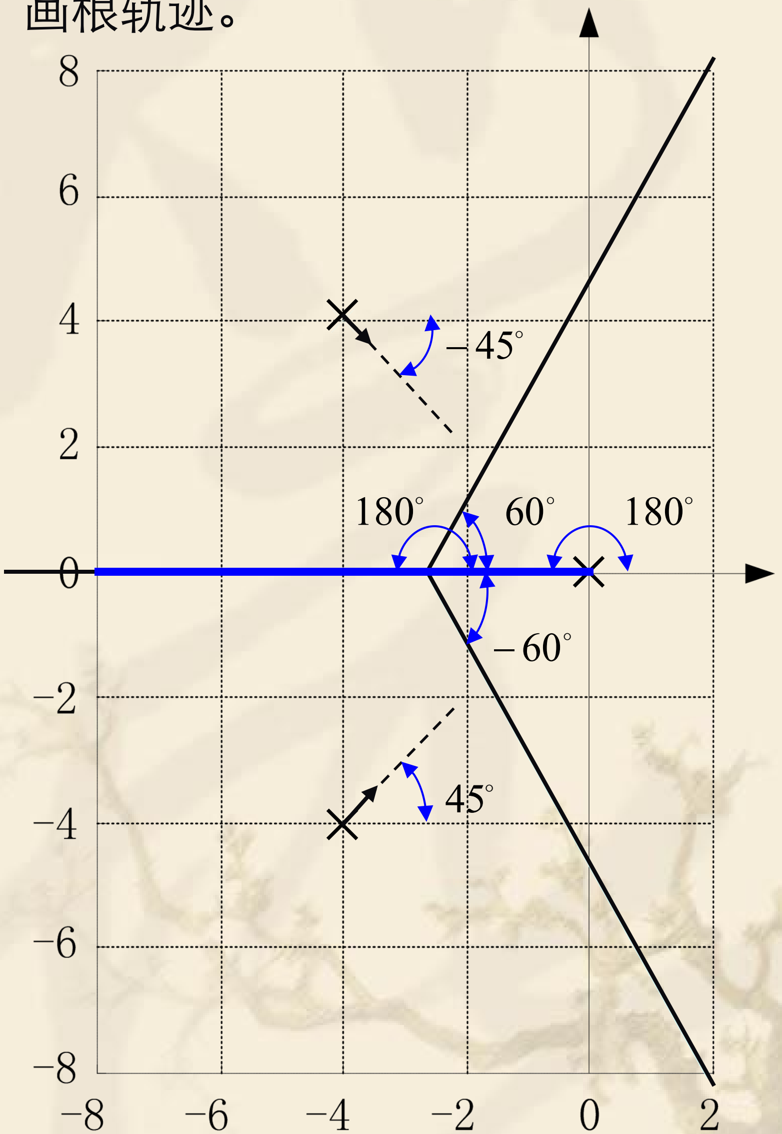
$$\theta=\frac{(2k+1)\pi}{3}=\begin{cases}\pm60^\circ\\180^\circ\end{cases}$$

4.出射角

$$\theta_{1c}=180^\circ-(-45^\circ)-45^\circ=180^\circ$$

$$\theta_{2c}=180^\circ-90^\circ-135^\circ=-45^\circ$$

$$\theta_{3c}=45^\circ$$



5.求与虚轴的交点，此时特征方程为 $s^3+8s^2+32s+k_g=0$

将 $s=\mathrm{j}\omega$ 代入得:

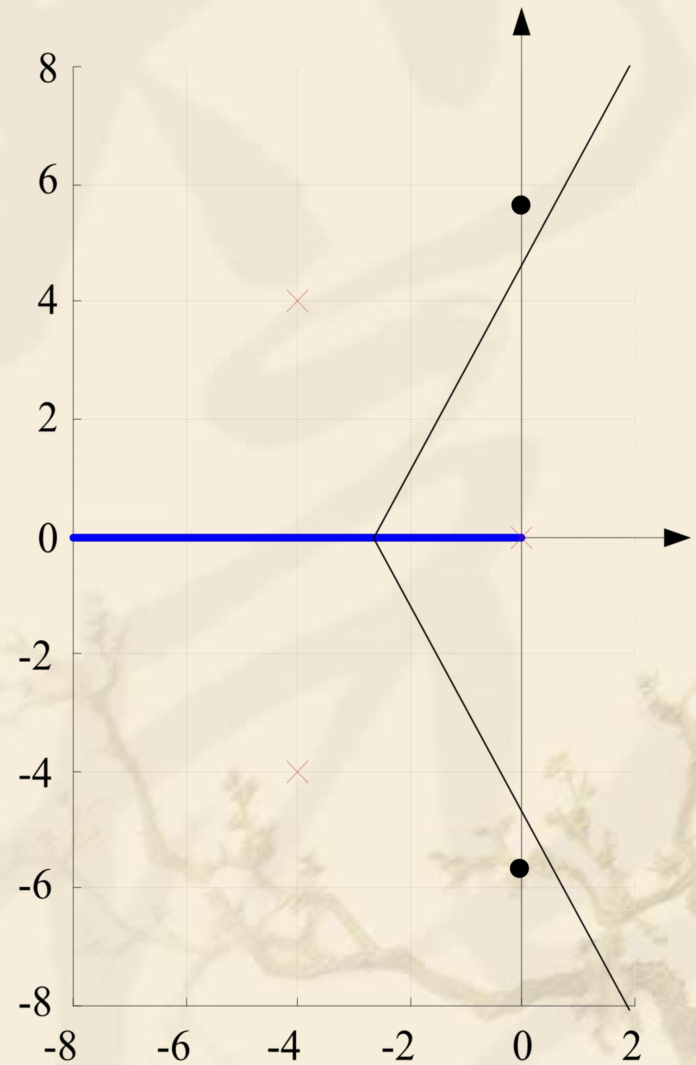
$$-\mathrm{j}\omega^3-8\omega^2+\mathrm{j}32\omega+k_{gp}=0$$

$$-8\omega^2+k_{gp}=0$$

$$-\omega^3+32\omega=0$$

$$\omega=0,\quad \omega=\pm4\sqrt{2}\approx\pm5.657$$

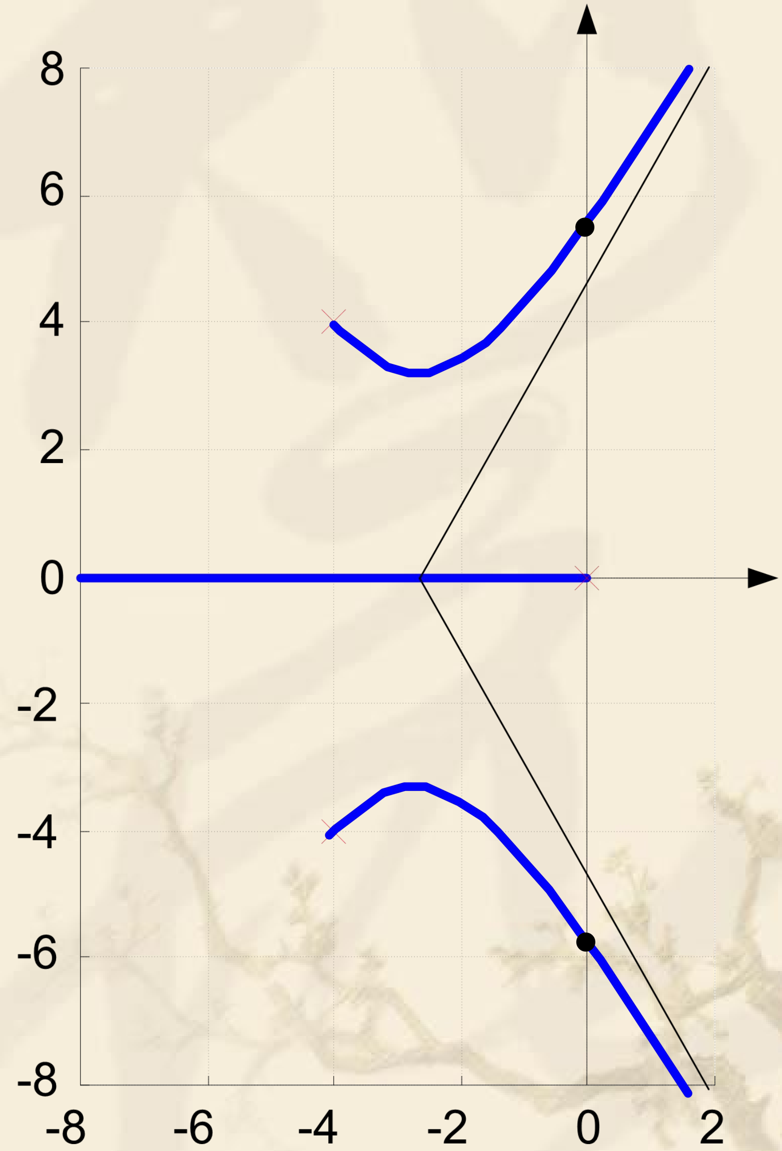
$$k_{gp}=\begin{cases}0 & \omega=0\\ 256 & \omega=\pm4\sqrt{2}\end{cases}$$



6.求分离会合点：无。

可按公式计算，通过验算，得到的点不在根轨迹上。

7.完整的根轨迹图如右。



小结

- 需掌握绘制根轨迹（$k_g > 0$）的性质和准则

- 根轨迹的连续性和对称性；
- 根轨迹的支数、起点、终点和渐近线；
- 根轨迹实轴上的点和根轨迹的分离会合点；
- 根轨迹的出射角、入射角和虚轴的交点；
- 闭环极点之和与之积。

作业：4.1,4.2,4.3