

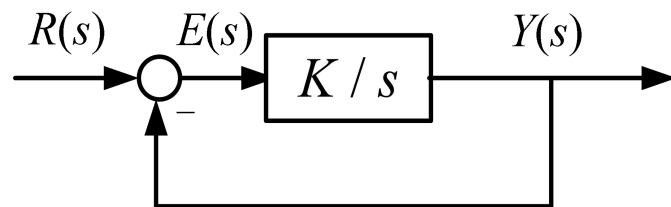
## 第二节 一阶系统的瞬态响应

## 一阶系统的数学模型

由一阶微分方程描述的系统称为一阶系统。其传递函数是 $s$ 的一次有理分式。

一阶系统的微分方程为：

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t)$$



典型的一阶系统的方块图如上图所示。

$$\text{其闭环传递函数为: } \Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K/s}{1 + K/s} = \frac{1}{s/K + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

式中:  $T = 1/K$ ，称为时间常数，开环放大系数 $K$ 越大，时间常数越小。

## 一阶系统的单位脉冲响应：

输入信号为单位脉冲信号  $r(t)=\delta(t)$ ，其拉氏变换为  $R(s)=1$ ，则系统的输出为：

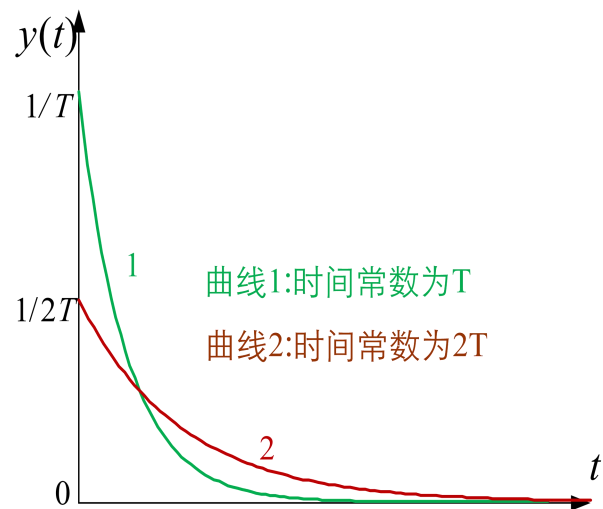
$$Y(s) = \frac{R(s)}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T}$$

其拉氏反变换称为一阶系统的单位脉冲响应：

$$y(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0$$

## 一阶系统的单位脉冲响应曲线：

为单调下降的指数曲线，时间常数  $T$  越大，响应曲线下降越慢，表明系统受到脉冲输入信号作用后，恢复到初始状态的时间越长。单位脉冲响应的终值均趋于零。

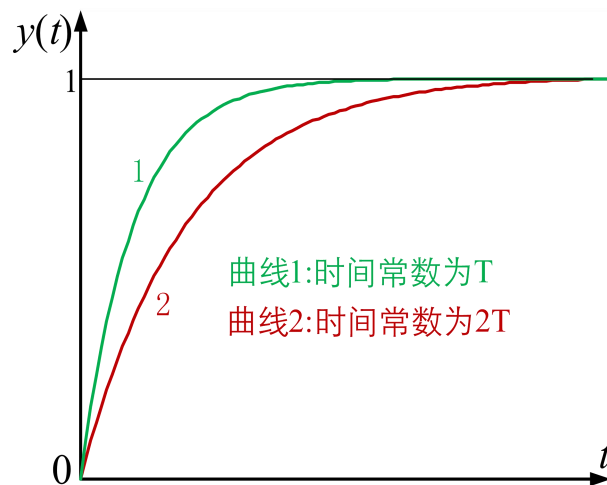


## 一阶系统的单位阶跃响应

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad \text{当 } R(s) = 1/s \text{ 时}$$

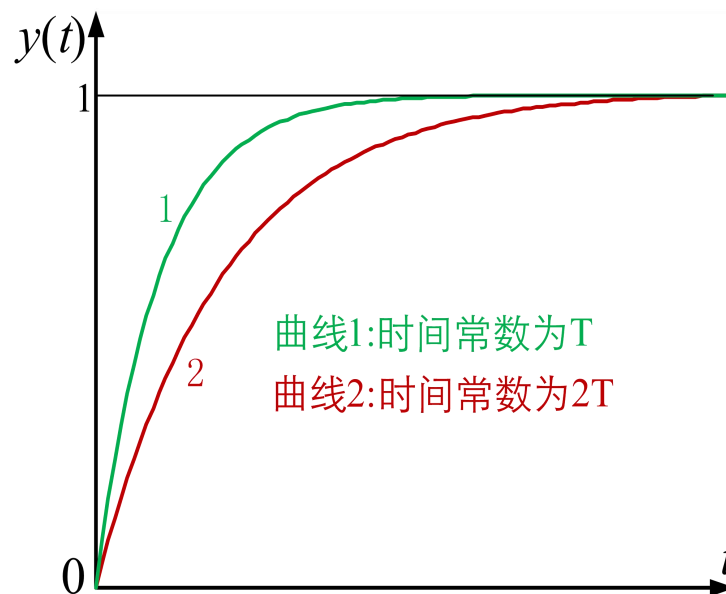
$$Y(s) = \frac{1}{Ts + 1} \times \frac{1}{s}, \quad y(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{Ts + 1} \times \frac{1}{s} \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/T} \right] = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

一阶系统的单位阶跃响应曲线：



一阶系统的单位阶跃响应曲线是一条由零开始按指数规律单调上升并最终趋于1的曲线。

## 一阶系统的单位阶跃响的特点：



- 单位阶跃响应曲线是单调上升的指数曲线，为**非周期响应**。
- 时间常数 $T$ 反映了系统的惯性，时间常数 $T$ 越大，表示系统的惯性越大，响应速度越慢，系统跟踪单位阶跃信号越慢，单位阶跃响应曲线上升越平缓。由于一阶系统具有这个特点，工程上常称一阶系统为**惯性环节**或非周期环节。

■ 单位阶跃响应曲线的斜率为：

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$

$$y'(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

显然在 $t = 0$ 处的斜率为 $1/T$ ，并且随时间的增加斜率变小。  
下表显示了单位阶跃响应曲线上各点的值、斜率与时间常数 $T$ 之间的关系。

时间 $t$	0	$T$	$2T$	$3T$	...	$\infty$
输出量	0	0.632	0.865	0.950	...	1.0
斜率	$1/T$	$0.368/T$	$0.135/T$	$0.050/T$	...	0.0

根据这一特点，可用实验的方法测定一阶系统的时间常数，或测定系统是否属于一阶系统。

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, t \geq 0$$

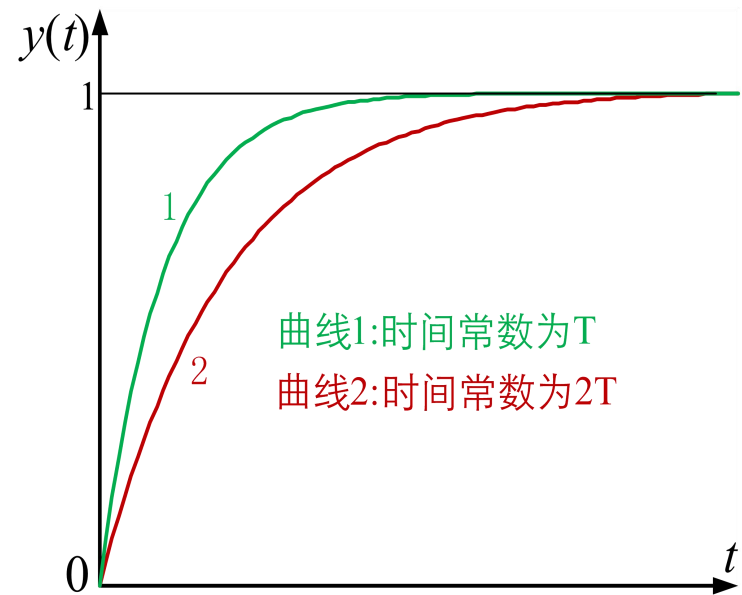
- 一阶系统跟踪单位阶跃信号时，输出量和输入量之间的误差随时间减小，最后趋于零。

输出量和输入量之间的误差：

$$e(t) = 1(t) - y(t) = e^{-\frac{t}{T}}$$

稳态误差：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{T}} = 0$$



## 一阶系统的单位斜坡响应：

当一阶系统的输入信号为单位斜坡信号 $r(t)=t$ 时，其拉氏变换为 $R(s)=1/s^2$ ，则系统的输出为：

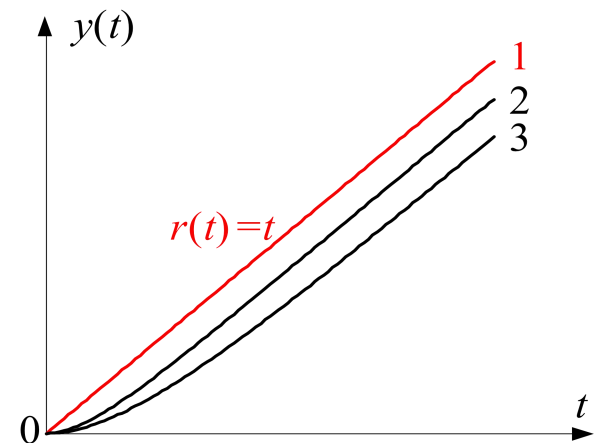
$$Y(s) = \frac{R(s)}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + 1/T}$$

则一阶系统的单位斜坡响应为：

$$y(t) = t - T(1 - e^{-t/T}), \quad t \geq 0$$

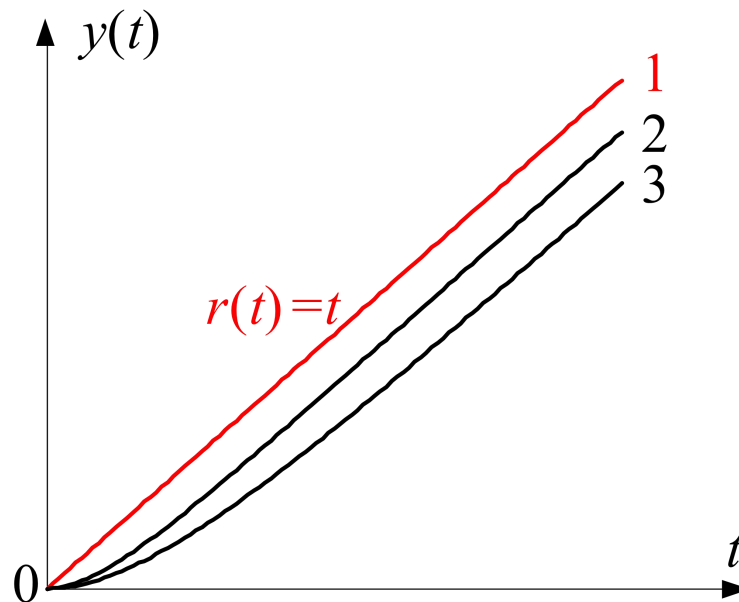
## 一阶系统的单位斜坡响应曲线

曲线1表示单位斜坡输入信号 $r(t)=t$ ，曲线2和曲线3分别表示系统时间常数分别等于 $T$ 和 $2T$ 时的单位斜坡响应曲线。





## 一阶系统的单位斜坡响应特点



■ 单位斜坡响应曲线的斜率为：

$$y'(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

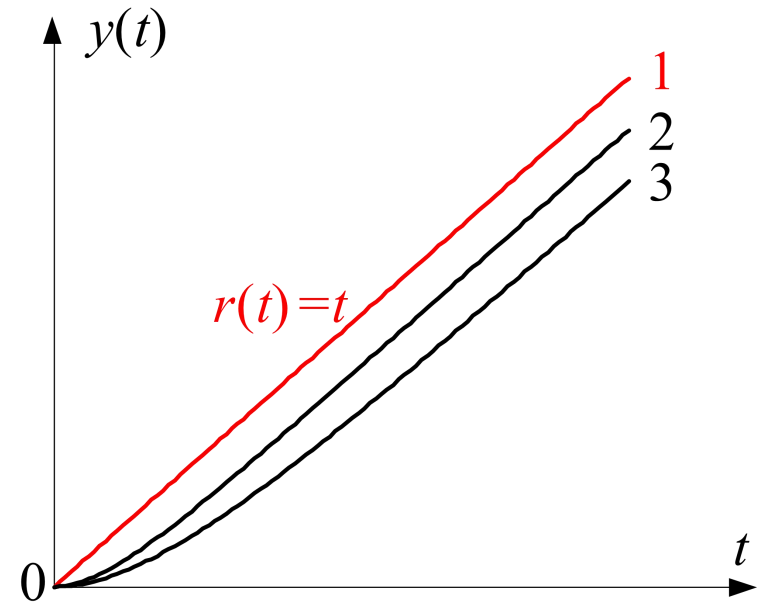
在  $t = 0$  时其斜率为零，并且随着时间的增加斜率变大，最大斜率为1。

## 系统的输入量和输出量之间的误差

$$e(t) = r(t) - y(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

## 系统的稳态误差

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = T$$



- 一阶系统在跟踪单位斜坡信号时，总是存在误差，并且误差的大小随时间而增大，最后趋于常值 $T$ 。误差的大小与系统的时间常数 $T$ 有关， $T$ 越大，误差越大，跟踪精度越低。

## 一阶系统的单位加速度响应

一阶系统的输入信号为单位加速度信号 $r(t)=t^2/2$ ，其拉氏变换为 $R(s)=1/s^3$ ，则系统的输出为：

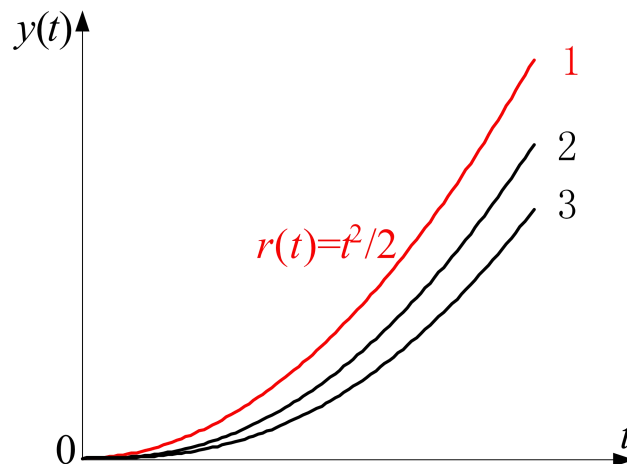
$$Y(s) = \frac{R(s)}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T^2}{s + 1/T}$$

一阶系统的单位加速度响应为：

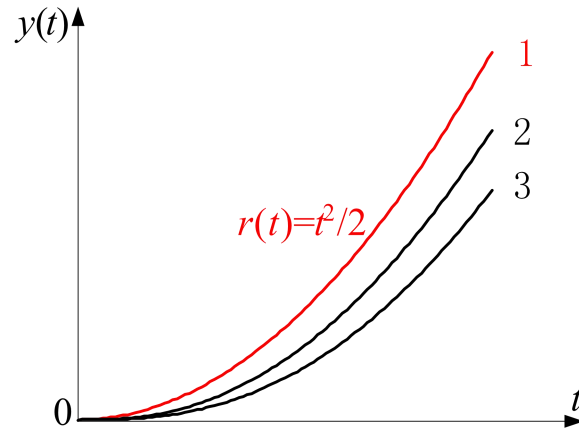
$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad t \geq 0$$

### 一阶系统的单位加速度响应曲线

曲线1表示单位加速度输入信号 $r(t)=t^2/2$ ，曲线2和曲线3分别表示系统时间常数等于 $T$ 和 $2T$ 时的单位加速度响应曲线。



## 一阶系统的单位加速度响应的特点



- 系统的输入量和输出量之间的误差为：

$$e(t) = r(t) - y(t) = Tt - T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

系统的稳态误差为：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [Tt - T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})] = \infty$$

- 一阶系统在跟踪单位加速度信号时，总是存在误差，而且误差的大小随时间而增大，最后趋于无穷大。因此，  
一阶系统不能实现对单位加速度信号的跟踪。

输入信号	输出响应
$\delta(t)$	$e^{-t/T} / T, t \geq 0$
$1(t)$	$1 - e^{-t/T}, t \geq 0$
$t$	$t - T + Te^{-t/T}, t \geq 0$
$t^2 / 2$	$t^2 / 2 - Tt + T^2(1 - e^{-t/T}), t \geq 0$

- 单位脉冲信号与单位阶跃信号的一阶导数、单位斜坡信号的二阶导数和单位加速度信号的三阶导数相等。
- 单位脉冲响应与单位阶跃响应的一阶导数、单位斜坡响应的二阶导数和单位加速度响应的三阶导数也相等。

## 【结论】

一阶系统对输入信号导数的响应，等于一阶系统对该输入信号响应的导数。

这是线性定常系统的一个重要特性，适用于任何阶的线性定常系统，而线性时变系统和非线性系统则不具有这个特性。所以，对于线性定常系统，不必对每种输入信号都进行计算，取其中一种典型输入信号进行研究即可。

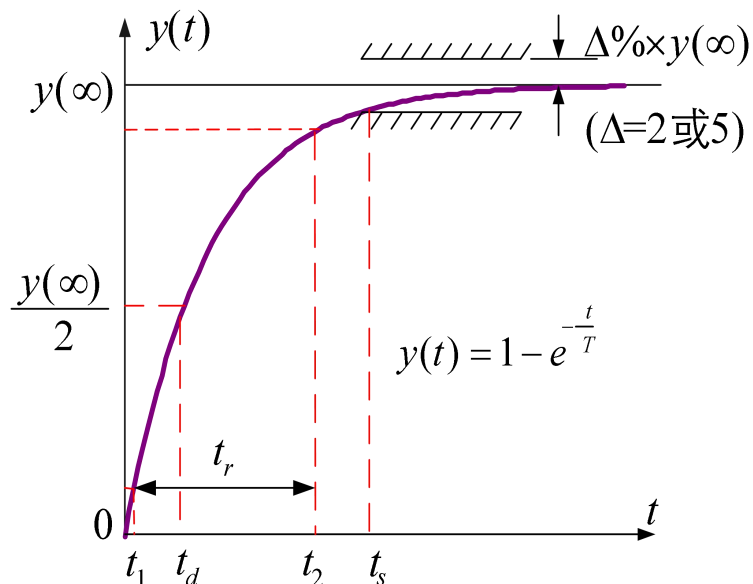
## 一阶系统的瞬态性能指标

--以单位阶跃为输入信号定义性能指标

■ 延迟时间 $t_d$ ：延迟时间定义为输出响应第一次达到稳态值的50%所需的时间。

$$\text{由： } 0.5 = 1 - e^{-\frac{t_d}{T}}$$

$$\text{得： } t_d \approx 0.693T$$



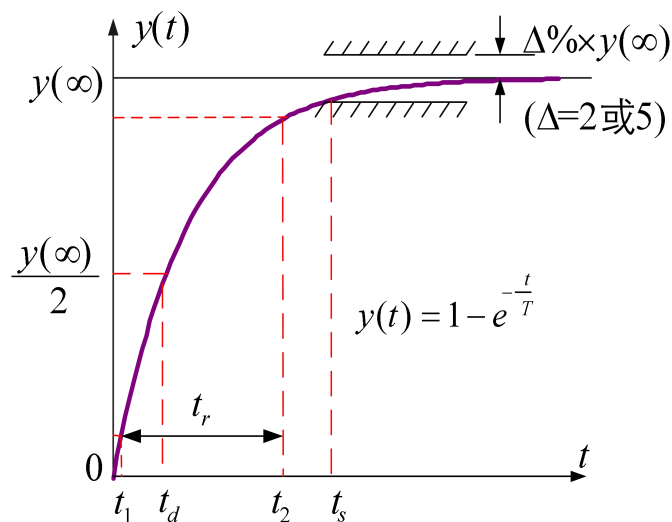
■ 上升时间 $t_r$ : 设一阶系统输出响应达到10%稳态值的时间为 $t_1$ , 达到90%稳态值的时间为 $t_2$ , 则有:

$$0.1 = 1 - e^{-\frac{t_1}{T}} \quad 0.9 = 1 - e^{-\frac{t_2}{T}}$$

解得:  $t_1 \approx 0.10536T$

$$t_2 \approx 2.30259T$$

所以上升时间 $t_r$ 为:  $t_r = t_2 - t_1 \approx 2.197T$

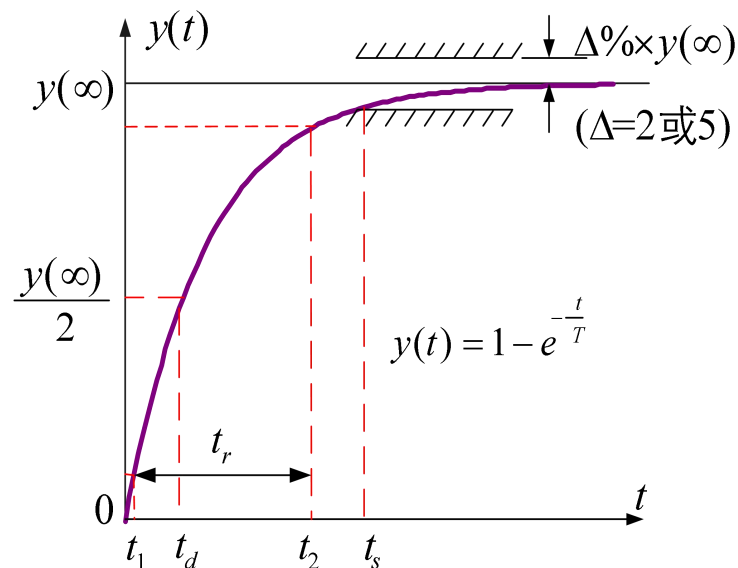




■ 调整时间 $t_s$ ：假设系统的误差带宽度为 $\Delta$ ，则根据调整时间的定义有：

$$1 - e^{-\frac{t_s}{T}} = 1 - \Delta\%$$

$$\text{得： } t_s = -T \ln \Delta\% \approx \begin{cases} 4T, & \Delta = 2 \\ 3T, & \Delta = 5 \end{cases}$$



■ 峰值时间 $t_p$  和超调量 $\delta\%$ ：

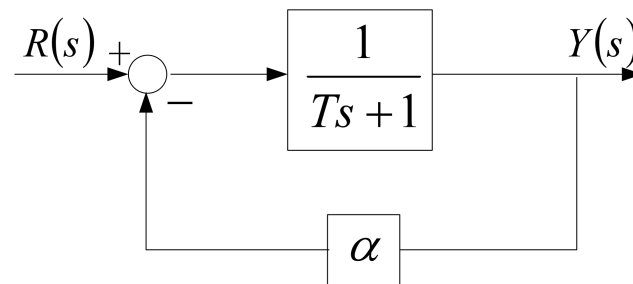
一阶系统的单位阶跃响应曲线为单调上升的指数曲线，没有振荡。所以不存在峰值时间 $t_p$  和超调量 $\delta\%$ 。

## 减小一阶系统时间常数的措施

- 一阶系统的时间常数 $T$ 对系统性能起着非常重要的作用，时间常数 $T$ 不仅影响一阶系统的响应速度，还影响系统跟踪输入信号的精度。
- 对于某个典型输入信号，系统的时间常数 $T$ 越大，系统的响应速度越慢，跟踪精度越低。
- 对于大多数的实际工程系统，通常希望有较小的时间常数 $T$ 。

## [方法一] 通过负反馈减小时间常数 $T$

原系统为： $G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ ，加入负反馈后如下图：

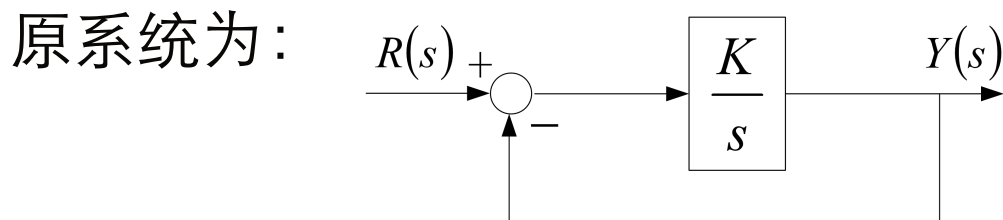


加入负反馈后系统的闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{\frac{1}{Ts + 1}}{1 + \frac{\alpha}{Ts + 1}} = \frac{\frac{1}{1 + \alpha}}{\frac{T}{1 + \alpha}s + 1} = \frac{K'}{T's + 1}$$

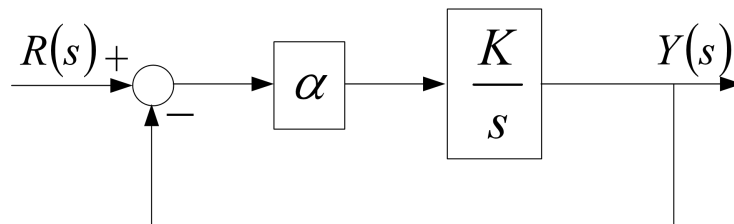
效果如何？

## [方法二] 在系统的前向通道上串联一个比例环节



传递函数为：  $\Phi_0(s) = \frac{1}{Ts + 1}$

改进后系统为：

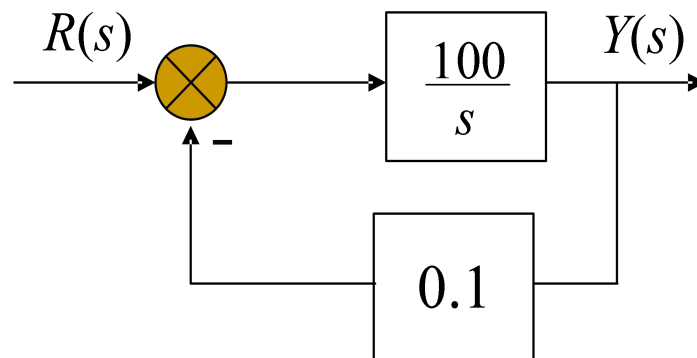


效果？若  $\alpha > 1$ ，则  
减小了时间常数，  
且不改变系统的稳  
态值。

$$T' = \frac{T}{\alpha}$$

$$\Phi(s) = \frac{\frac{\alpha K}{s}}{1 + \frac{\alpha K}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha K} s + 1} = \frac{1}{\frac{T}{\alpha} s + 1} = \frac{1}{T' s + 1}$$

**[例]** 已知一阶系统的方块图如图所示。①试求该系统单位阶跃响应的调整时间 $t_s$ ；②若要求 $t_s \leq 0.1$ 秒，求此时的反馈系数。



**[解]** ① 由系统方块图求出闭环传递函数：

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{s}}{1 + \frac{100}{s} \times 0.1} = \frac{100}{s + 10} = \frac{10}{0.1s + 1}$$

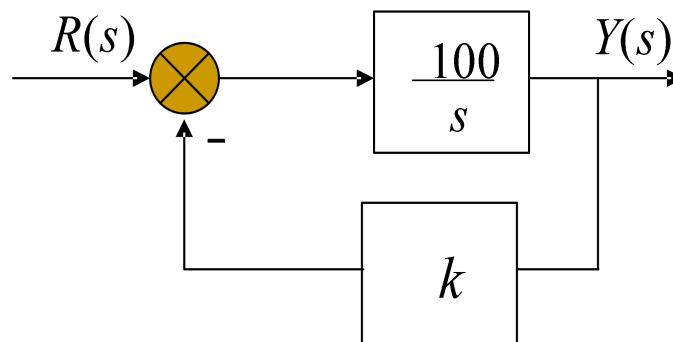
由闭环传递函数知时间常数 $T=0.1$ 秒

所以： $t_s = 3T = 0.3$ 秒（取 $\Delta=0.05$ ）

②若要求 $t_s \leq 0.1$ 秒，求此时的反馈系数。

可设反馈系数为 $k$

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{100}{s}}{1 + \frac{100}{s} \times k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{0.01}{k}s + 1}$$



当  $T = \frac{0.01}{k}$ ，则  $t_s = 3T = \frac{0.03}{k} \leq 0.1$ ，即  $k \geq 0.3$  时， $t_s \leq 0.1$  秒

可知：对一阶系统而言反馈加深可使调节时间 $t_s$ 减小。

有没有不好的地方？

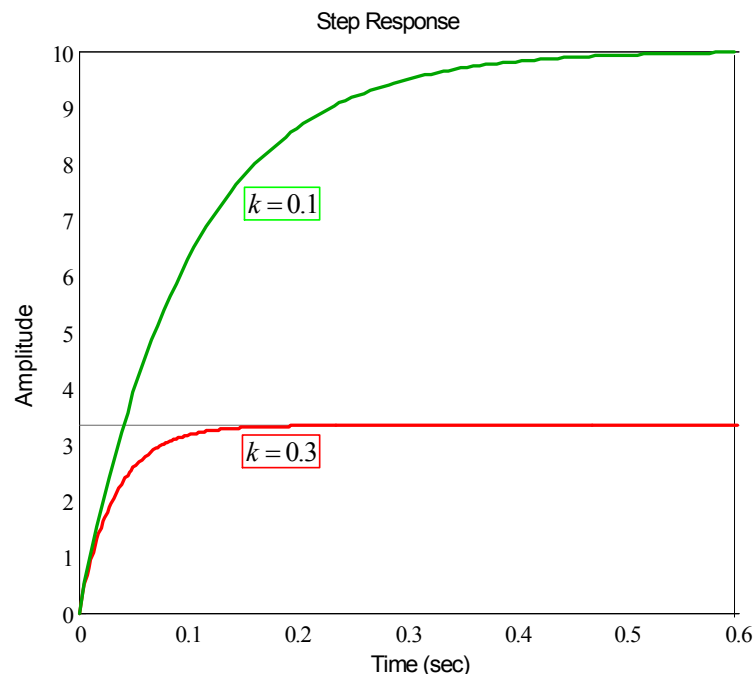
## [讨论]:

### 1、原系统:

$$Y(s) = \frac{10}{0.1s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{10}{s} - \frac{10}{s+10}$$

$$y(t) = 10(1 - e^{-10t}) = 10(1 - e^{-\frac{t}{0.1}}), \quad t \geq 0$$

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} [10(1 - e^{-10t})] = 10$$



### 2、反馈加深后的系统:

$$Y(s) = \frac{\frac{100}{s}}{1 + \frac{100}{s} \times 0.3} \times \frac{1}{s} = \frac{100}{s+30} \times \frac{1}{s} = \frac{10}{3} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+30} \right)$$

$$y(t) = \frac{10}{3} (1 - e^{-30t}), \quad t \geq 0$$

$$y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{10}{3} (1 - e^{-30t}) = \frac{10}{3}$$

[结论]: 反馈加深将使输出幅值 (稳态值) 减小。

# 小结

- 一阶系统的传递函数和典型方块图
- 一阶系统的单位阶跃响应(单调上升曲线，瞬态性能指标常用调整时间)
- 系统对输入信号导数的响应等于对输入信号响应的导数
- 减小一阶系统时间常数的方法(为什么要减小时间常数)

作业：3.1，3.2