概率论与数理统计期末考试模拟题(四) 解答

一、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1. 设A,B互不相容，$P(A)=0.3,P(B)=0.5$，则$P(\bar{B}|\bar{A})=$___2/7___.

2. 设 X 服从二项分布 $B(2,p)$，Y 的分布律为 $P\{Y=k\}=(1-p)^{k-1}p$，$k=1,2,\cdots$，

   若已知$P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$，则$D(Y)=$___6___.

3. 设随机变量(X,Y)服从区域$G=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$上的均匀分布，则
   $P\left(\min(X,Y)\geq -\frac{1}{2},\max(X,Y)\leq \frac{1}{2}\right)=$___$\frac{1}{\pi}$___.

4. 若X_1,X_2,X_3独立同分布，$P(X_n=1)=\frac{1}{4},P(X_n=-1)=\frac{3}{4},Y_n=X_nX_{n+1},n=1,2$，则$P(Y_2=1|Y_1=1)=$___0.7___.

5. 若有一个容量为 11 的样本，其样本均值为 2，样本二阶原点矩为 10，则样本方差为___6.6___.

6. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_5)$是取自总体$N(0,1)$的样本，统计量$T=\frac{X_1+X_2}{\sqrt{C(X_3+X_4)^2+X_5^2}}$，则当

   $C=$___0.5___时，T服从$t(2)$分布.

二、单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设随机变量X的分布函数$F(x)=0.4\Phi(x)+0.6\Phi(x-1)$，$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$E(X)=$(　D　).

   (A) 0　　(B) 0.4　　(C) 0.5　　(D) 0.6

2. 将长为 1 米的木棍随机截成两段，则此两段长度的相关系数等于(　A　).

   (A) -1　　(B) 0　　(C) 0.5　　(D) 1

3. 设随机变量$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix},i=1,2$，且满足$P(X_1+X_2=0)=1$，则$P(X_1=X_2)=$(　C　).

   (A) 0　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) 1

4. 设$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$独立同分布于 Poisson 分布$P(\lambda)$，$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，记$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则有（　C　）.

   (A) $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\lambda}{n\lambda}\leq x\right)=\Phi(x)$　　(B) $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n}\lambda}\leq x\right)=\Phi(x)$

   (C) $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right)=\Phi(x)$　　(D) $\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leq x\right)=\Phi(x)$

5 下面说法中正确的是（ A ）.

① 样本均值是总体期望的无偏估计

② 样本 k 阶原点矩是总体 k 阶原点矩的无偏估计

③ 样本方差是总体方差的无偏估计

④ 样本 k 阶中心矩是总体 k 阶中心矩的无偏估计

（A）①②③　　（B）①③④　　（C）①②④　　（D）①②③④

三、（10 分）设某地区移动、电信、联通的用户比例为 4:3:2，一份对运营商的抽样调查数据表明：移动、电信、联通的好评率分别为 80%、60%、70%. 现从这些数据资料中任取一位用户的评价，

（1）求该评价为好评的概率；

（2）若该评价是好评，求该用户是电信用户的概率.

解 记$A_1=\{移动用户\},A_2=\{电信用户\},A_3=\{联通用户\},B=\{好评\}$,

（1）由全概率公式，$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{4}{9}\times 0.8+\frac{3}{9}\times 0.6+\frac{2}{9}\times 0.7=\frac{32}{45}$.

（2）由 Bayes 公式,$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{9}\times 0.6}{\frac{32}{45}}=\frac{9}{32}$.

四、（10 分）设 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a+b\arcsin x, & -1\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$

（1）a,b满足什么条件时，$F(x)$为某随机变量的分布函数？

（2）若$F(x)$为连续型随机变量的分布函数，求a,b.

解 (1)由定义，$F(x)$已满足右连续性和$F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$,还需要满足单调不减性，所以 $b\ge 0,a-\frac{\pi}{2}b\ge 0,a+\frac{\pi}{2}b\le 1$.

(2)若$F(x)$为连续型随机变量的分布函数，则$a-\frac{\pi}{2}b=0,a+\frac{\pi}{2}b=1$，$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{\pi}$.

五、（10 分）设X服从参数为λ的指数分布，$Y=[X]+1$, $[x]$为不超过x的最大整数.（1）求Y的分布；　（2）求在已知$Y=2$的条件下，X的条件概率密度.

解（1） Y 的取值为自然数，对$k=1,2,\cdots$,

$$P(Y=k)=P(k-1\le X<k)=\int_{k-1}^{k}\lambda e^{-\lambda x}dx=\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}\left(1-e^{-\lambda}\right),$$

所以，$Y\sim G(1-e^{-\lambda})$.

（2）在已知$Y=2$的条件下，X取值于区间$[1,2)$, 对$x\in[1,2)$,

$P(X\le x|Y=2)=\frac{P(1\le X\le x)}{P(Y=2)}=\frac{e^{-\lambda}-e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda}-e^{-2\lambda}}$,

$\therefore f(x|Y=2)=\begin{cases}\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda}-e^{-2\lambda}}, & x\in[1,2),\\ 0, & 其它.\end{cases}$

六、（12 分）设随机变量ξ,η独立同分布，$\xi\sim U\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

（1）求$\xi+\eta$的概率密度；　（2）若$X=\xi\cos\eta\,,Y=\xi\sin\eta$, 问$X,Y$是否不相关？

解（1）由 $f_{\xi+\eta}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(x)f_\eta(z-x)dx$,

要使 $f_\xi(x)f_\eta(z-x)\neq 0$, 必须$-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}<z-x<\frac{\pi}{3}$, 所以

对于$z<-\frac{2\pi}{3}$ 或$z>\frac{2\pi}{3},f_{\xi+\eta}(z)=0$,

对于$-\frac{2\pi}{3}\le z\le 0,f_{\xi+\eta}(z)=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{z+\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2dx=\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2\left(z+\frac{2\pi}{3}\right)$,

对于$0<z\le\frac{2\pi}{3},f_{\xi+\eta}(z)=\int_{z-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2dx=\left(\frac{3}{2\pi}\right)^2\left(\frac{2\pi}{3}-z\right)$.

（2）因为$E(X)=E(\xi)E(\cos\eta)=0$，所以

$cov(X,Y)=E(XY)=E(\xi^2)E\left(\frac{1}{2}\sin 2\eta\right)=\frac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2}{12}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\sin 2x\frac{3}{2\pi}dx=0$,

所以X,Y不相关.

七、（10 分）设总体X的密度

$$f(x)=\begin{cases}a|x-\mu|, & \mu-\theta\le x\le\mu+\theta，\\ 0， & 其它，\end{cases}$$ ，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体X的样本.

（1）求a；　　　　　（2）若μ已知，求θ的矩估计量.

解（1）由$\int_{\mu-\theta}^{\mu+\theta}a|x-\mu|dx=a\int_0^\theta 2xdx=a\theta^2=1$，有$a=\frac{1}{\theta^2}$.

（2）μ已知，$E(X)=\mu,D(X)=\int_{\mu-\theta}^{\mu+\theta}(x-\mu)^2\frac{1}{\theta^2}|x-\mu|dx=\frac{\theta^2}{2}$,

令$\tilde{S}^2=\frac{\theta^2}{2}$，得$\theta$的矩估计　$\hat{\theta}_M=\sqrt{2}\tilde{S}=\sqrt{\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}$.（注：估计不唯一）

八、（15 分）设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$的样本.

（1）若μ已知,σ^2未知，求σ^2的极大似然估计量；

（2）若μ已知，由（1）构造σ的置信水平为 95%的双侧置信区间；

（3）若已知$\sigma=2$, 考虑如下的假设检验问题,

$$H_0:\mu=2\quad \text{vs}\quad H_1:\mu=3$$

检验由拒绝域$W=\{\bar{x}\ge 2.8\}$确定，当$n=36$时，求检验犯两类错误的概率.(用$\Phi(\cdot)$表示，不用计算)

解（1）μ已知，极大似然函数

$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2\right\}$,

对数极大似然函数 $\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

求导 $\frac{d(\ln L(\sigma^2))}{d(\sigma^2)} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

令 $\frac{d(\ln L(\sigma^2))}{d(\sigma^2)} = 0$, 得$\sigma^2$的极大似然估计 $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$,

所以，σ^2的极大似然估计量 $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

（2）因为 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$,

所以，$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right) = 1-\alpha$，有

$$P\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}}\right) = 1-\alpha,$$

σ的置信水平为 95%的双侧置信区间$\left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{0.025}(n)}}, \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{0.975}(n)}}\right]$.

（3） 在H_0成立的条件下，$\bar{X} \sim N(2, \frac{4}{36})$, 检验犯第一类错误的概率

$$\alpha = P(\bar{X} \ge 2.8 | H_0) = P\left(\frac{\bar{X}-2}{\sqrt{\frac{4}{36}}} \ge \frac{2.8-2}{\sqrt{\frac{4}{36}}}\right) = 1-\Phi(2.4),$$

在H_1成立的条件下，$\bar{X} \sim N(3, \frac{4}{36})$, 检验犯第二类错误的概率

$$\beta = P(\bar{X} < 2.8 | H_1) = P\left(\frac{\bar{X}-3}{\sqrt{\frac{4}{36}}} < \frac{2.8-3}{\sqrt{\frac{4}{36}}}\right) = \Phi(-0.6) = 1-\Phi(0.6).$$