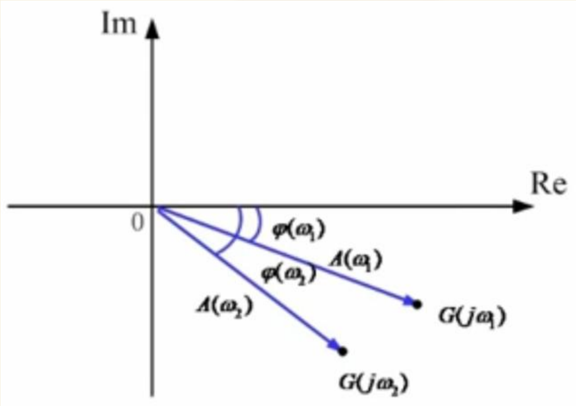
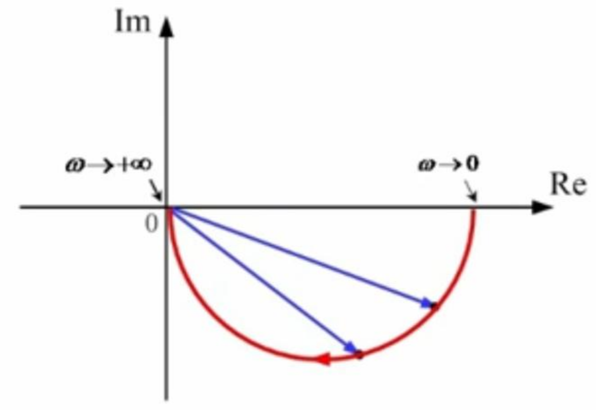
第3节　极坐标图

一、极坐标图又称为奈奎斯特（*Nyquist*）图或幅相频率特性。

若将频率特性表示为复指数形式，即$G(\mathrm{j}\omega) = A(\omega)\cdot e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$，则极坐标图是在复平面上当参变量频率$\omega$从$0\rightarrow\infty$变化时，矢量$G(\mathrm{j}\omega)$的端点轨迹形成的几何图形。该矢量的幅值为$|G(\mathrm{j}\omega)|$，相角为$\varphi(\omega)$。规定相角从正实轴开始按逆时针方向为正。

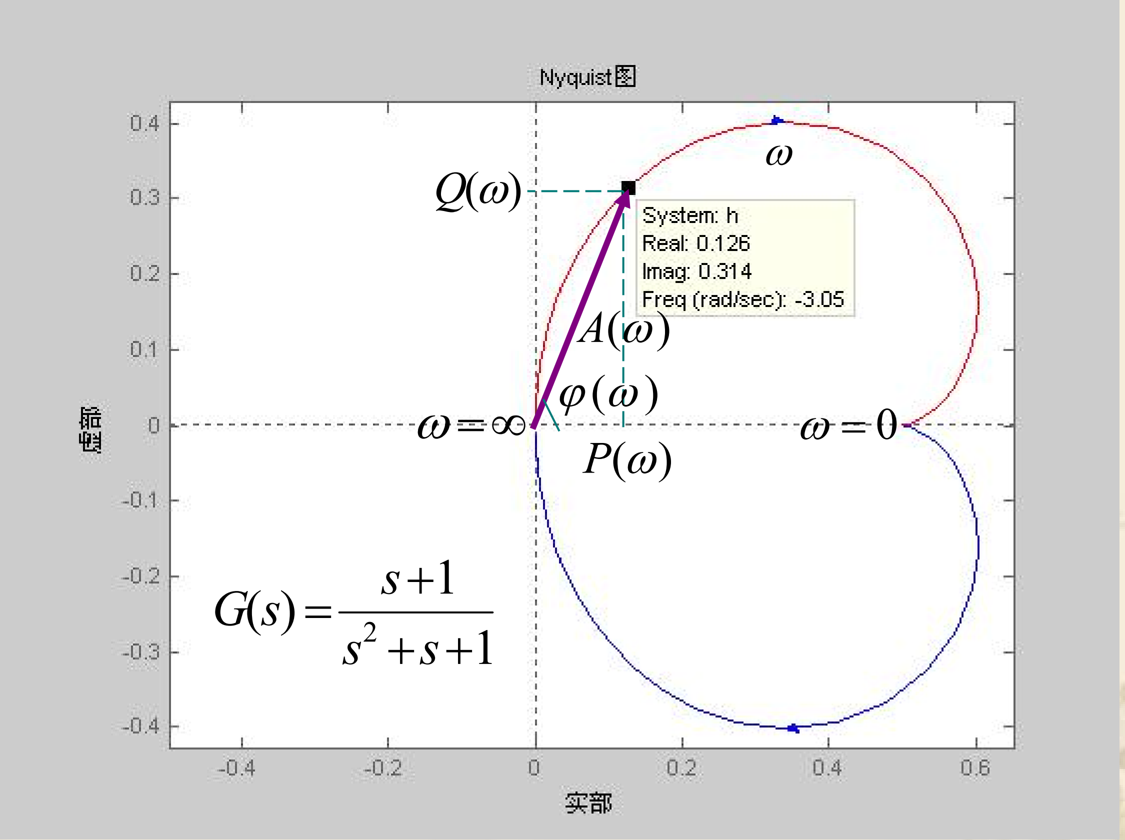
若将频率特性表示为实频特性和虚频特性之和的形式，则极坐标图是以实部为直角坐标的横坐标，虚部为纵坐标，以ω为参变量的幅值与相位之间的关系。





由于幅频特性是ω的偶函数，而相频特性是ω的奇函数，所以当ω从$0\to+\infty$的频率特性曲线和ω从$-\infty\to0$的频率特性曲线是对称于实轴的。

极坐标图的优点是可在一张图上绘出整个频率域的频率响应特性；缺点是不能明显地表示出开环传递函数中每个典型环节的作用。

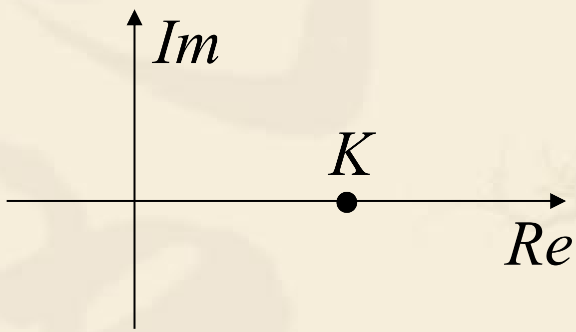


二、典型环节的极坐标图

1、比例环节: $G(s)=K, K>0 \qquad G(\mathrm{j}\omega)=K$

实频特性 :$P(\omega)=K$； 虚频特性: $Q(\omega)=0$；

幅频特性:$A(\omega)=K$； 相频特性: $\varphi(\omega)=0$



比例环节的极坐标图为实轴上的K点。

$K<0$，如何?

2、积分环节: $G(s)=\dfrac{1}{s}$

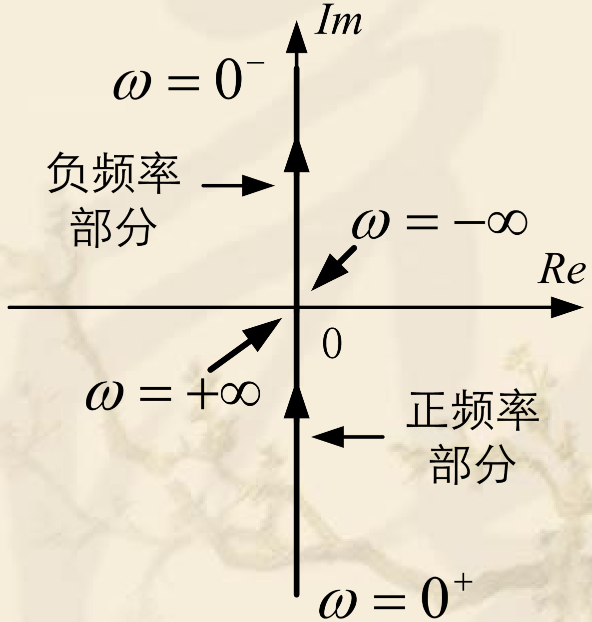
频率特性: $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}=-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{j}}$

$A(\omega)=\dfrac{1}{\omega}$, $\varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}(-\dfrac{1}{\omega}\Big/0)=-\dfrac{\pi}{2}$

$P(\omega)=0$, $Q(\omega)=-\dfrac{1}{\omega}$

积分环节的极坐标图为虚轴。频率ω从$0^+\to+\infty$，特性曲线由虚轴的$-\infty$趋向原点。

若考虑负频率部分，当频率ω从$-\infty\to 0^-$，特性曲线由虚轴的原点趋向$+\infty$ 。

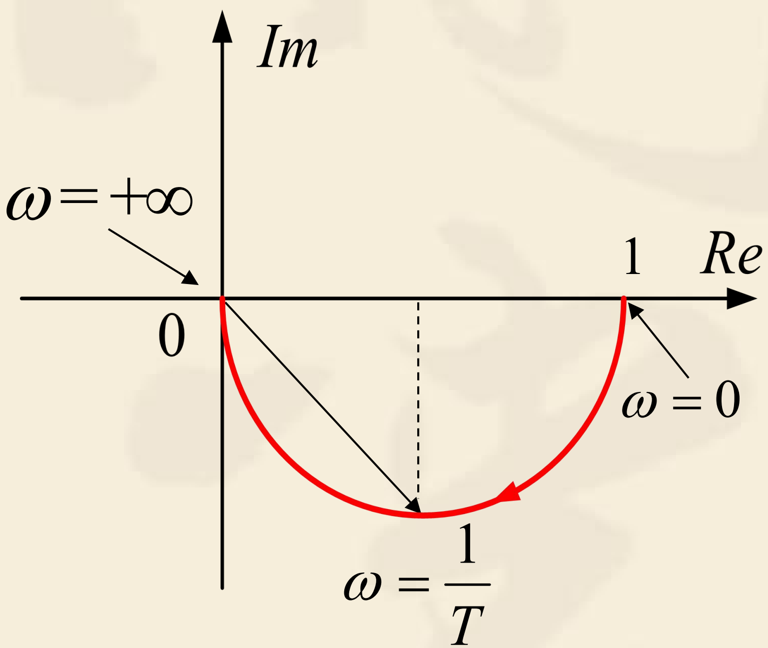


3、惯性环节的频率特性:

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}, \quad G(j\omega)=\frac{1}{T\omega j+1}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}, \quad \varphi(\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}T\omega$$

$$P(\omega)=\frac{1}{1+T^2\omega^2}, \quad Q(\omega)=\frac{-T\omega}{1+T^2\omega^2}$$



$\omega=0$时: $A(0)=1$, $\varphi(0)=0$

$P(0)=1$, $Q(0)=0$

$\omega=1/T$时: $A(1/T)=1/\sqrt{2}$, $\varphi(1/T)=-45°$

$P(1/T)=1/2$, $Q(1/T)=-1/2$

$\omega=+\infty$时: $A(\infty)=0$, $\varphi(\infty)=-90°$

$P(\infty)=0$, $Q(\infty)=0$

惯性环节的极坐标图是一个圆，对称于实轴。

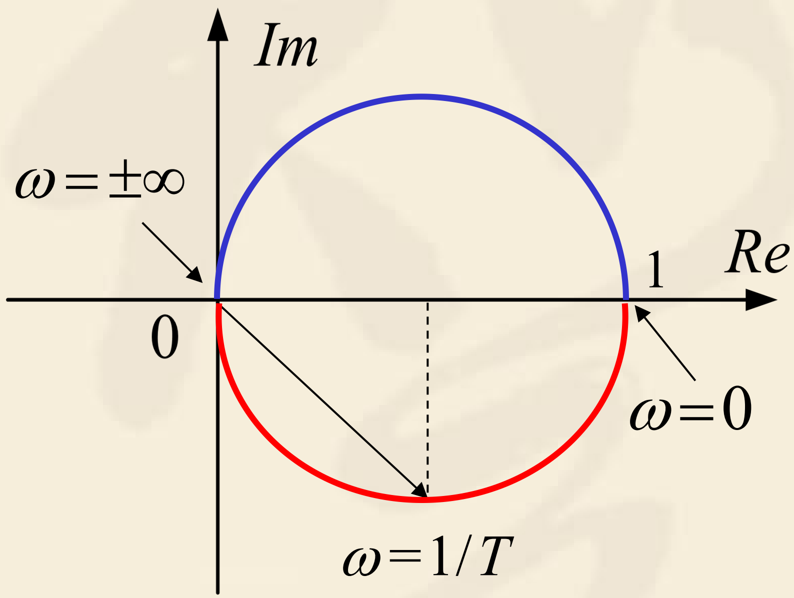
$$P(\omega)=\frac{1}{1+T^2\omega^2}$$

$$Q(\omega)=\frac{-T\omega}{1+T^2\omega^2}$$

$$\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=-T\omega$$

$$\therefore P=\frac{1}{1+T^2\omega^2}=\frac{1}{1+(\frac{Q}{P})^2}$$

整理得：$(P-\frac{1}{2})^2+Q^2=(\frac{1}{2})^2$



下半个圆对应于正频率部分，而上半个圆对应于负频率部分。

4、振荡环节的频率特性: $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}$

讨论 $0<\zeta<1$时的情况。频率特性为:

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(1-T^2\omega^2)+\mathrm{j}2\zeta\omega T}$$

实频、虚频、幅频和相频特性分别为:

$$P(\omega)=\frac{1-T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2},\qquad Q(\omega)=\frac{-2\zeta\omega T}{(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}$$

$$A(\omega)=\sqrt{P(\omega)^2+Q(\omega)^2}=\frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}=-\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\zeta\omega T}{1-T^2\omega^2}$$

$$P(\omega)=\frac{1-T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}$$

$$Q(\omega)=\frac{-2\zeta\omega T}{(1-T^2\omega^2)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\zeta\omega T}{1-T^2\omega^2}$$

当$\omega=0$时， $A(\omega)=1,\quad \varphi(\omega)=0$

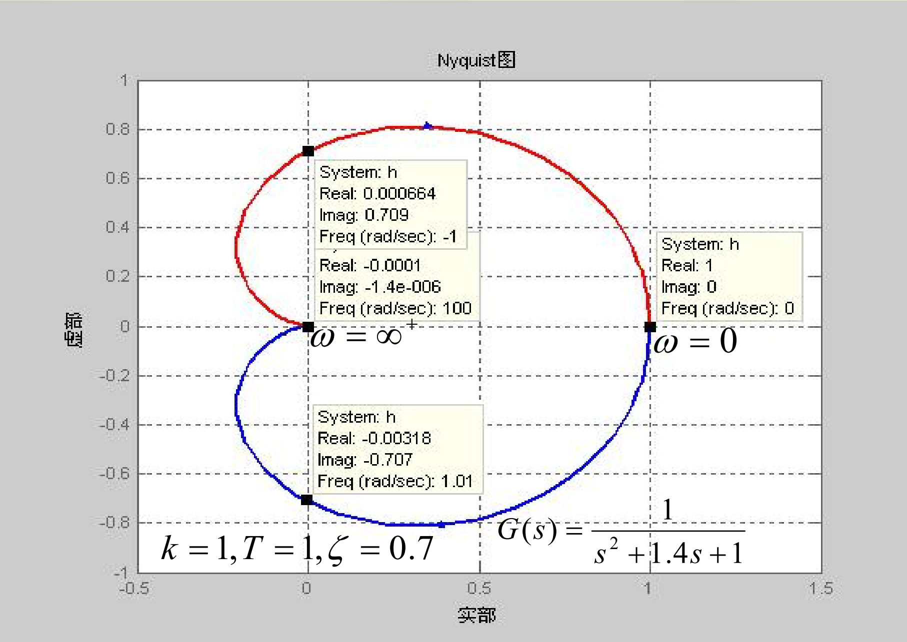
$P(\omega)=1,\quad Q(\omega)=0$

当$\omega=1/T$时， $A(\omega)=1/2\zeta,\quad \varphi(\omega)=-\pi/2$

$P(\omega)=0,\quad Q(\omega)=-1/2\zeta$

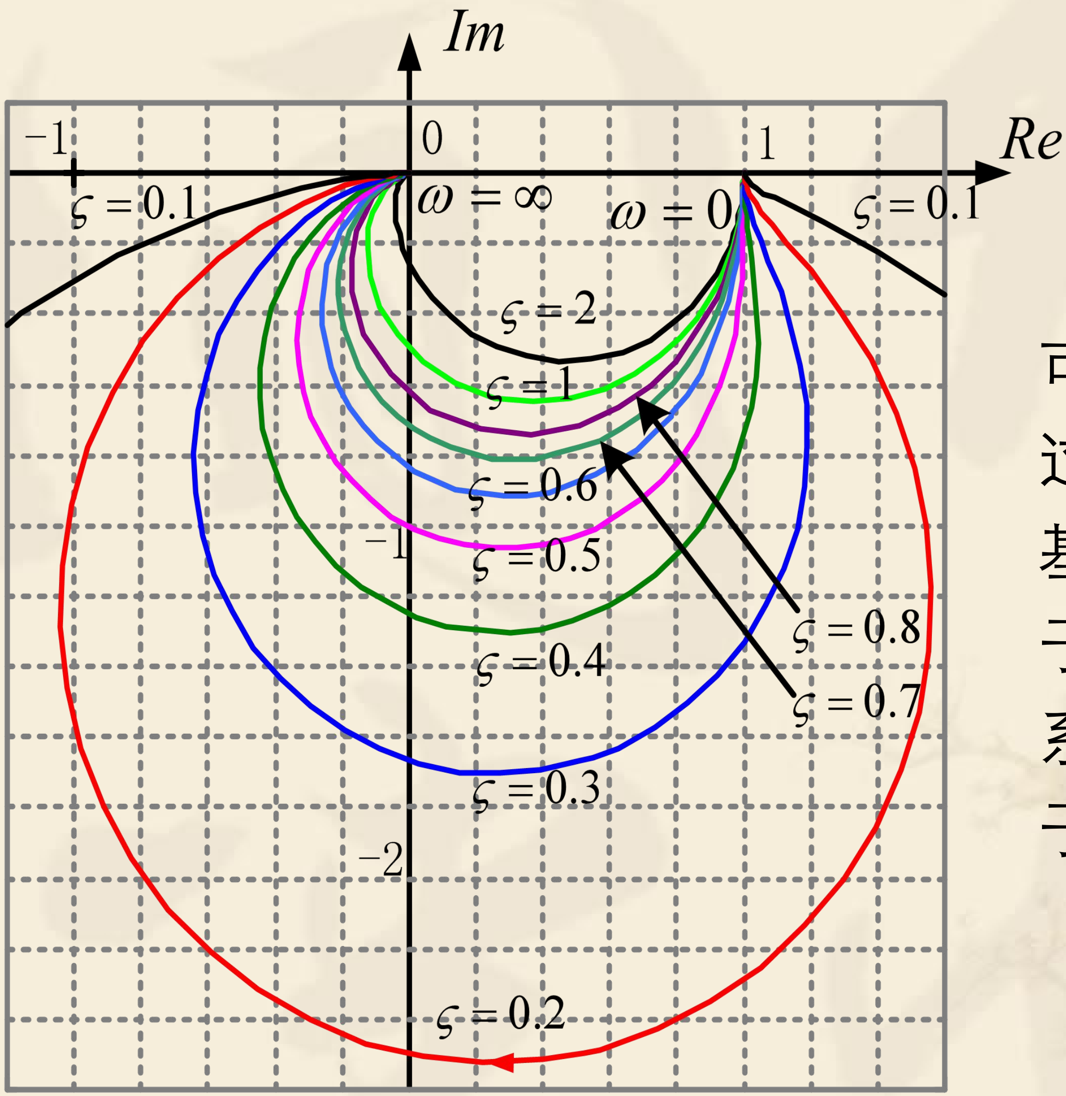
当$\omega=\infty$时，$A(\omega)=0,\quad \boxed{\varphi(\omega)=-\pi}$

$P(\omega)=0,\quad Q(\omega)=0$



当$\omega\geq 0$时，$Q(\omega)\leq 0$，曲线在3，4象限；当 $\omega<0$ 时，与之对称于实轴。

频率特性曲线还与阻尼系数有关。



可见无论是欠阻尼还是过阻尼系统，其图形的基本形状是相同的。对于过阻尼的情况，阻尼系数越大其图形越接近于圆。

5、微分环节的频率特性:

微分环节有三种：纯微分、一阶微分和二阶微分。

传递函数分别为:

$$G(s) = s$$

$$G(s) = 1 + Ts$$

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$$

频率特性分别为:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega$$

$$G(\mathrm{j}\omega) = 1 + \mathrm{j}T\omega$$

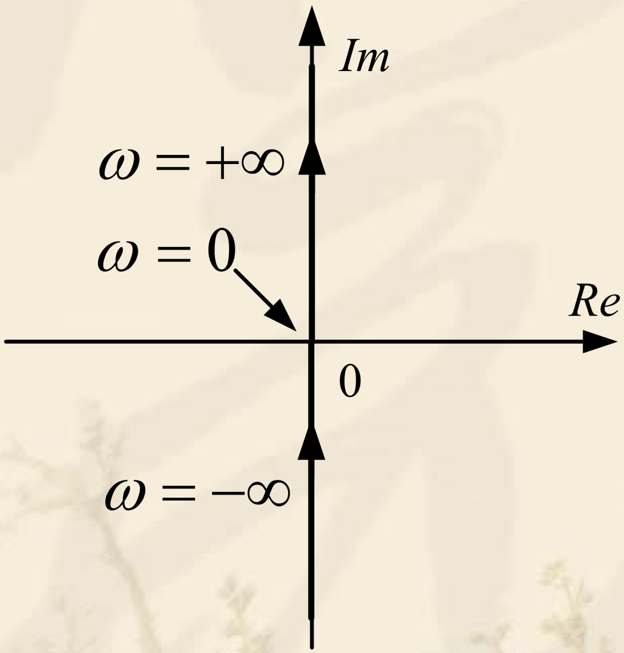
$$G(\mathrm{j}\omega) = 1 - T^2\omega^2 + \mathrm{j}2\zeta\omega T$$

① 纯微分环节：$G(j\omega)=j\omega$

$$A(\omega)=\omega,\qquad \varphi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2},\omega\ge 0\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2},\omega<0\end{cases}$$

$$P(\omega)=0,\ \ Q(\omega)=\omega$$

微分环节的极坐标图为虚轴。
频率ω从0→+∞特性曲线由原点趋向虚轴的+∞。

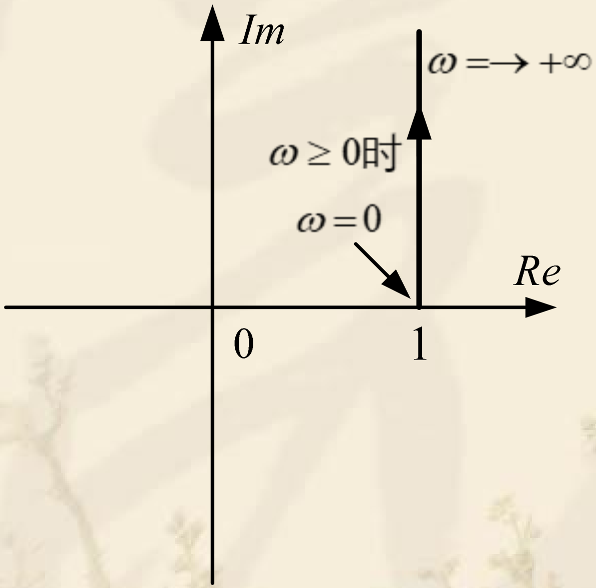


② 一阶微分：$G(j\omega)=1+jT\omega$

$$A(\omega)=\sqrt{1+T^2\omega^2},\quad \varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}T\omega$$

$$P(\omega)=1,\quad Q(\omega)=T\omega$$

一阶微分环节的极坐标图为平行于虚轴的直线。频率ω从$0\to\infty$特性曲线相当于纯微分环节的特性曲线向右平移一个单位。

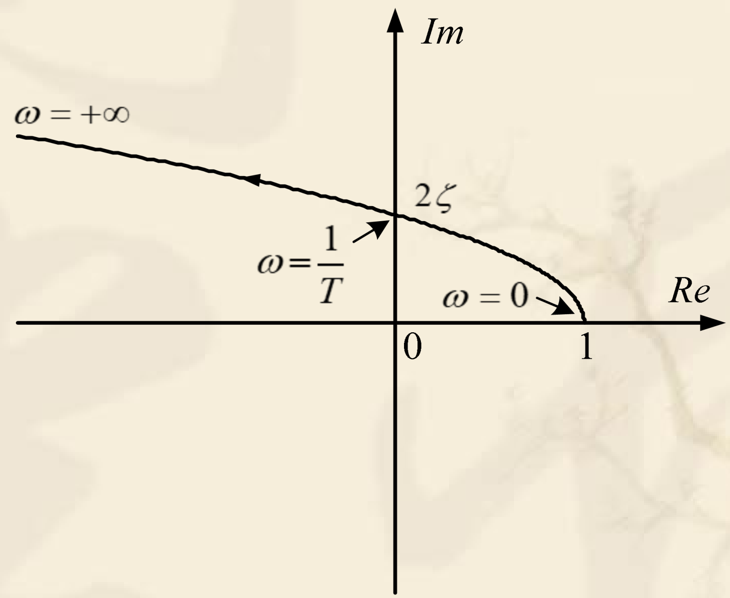


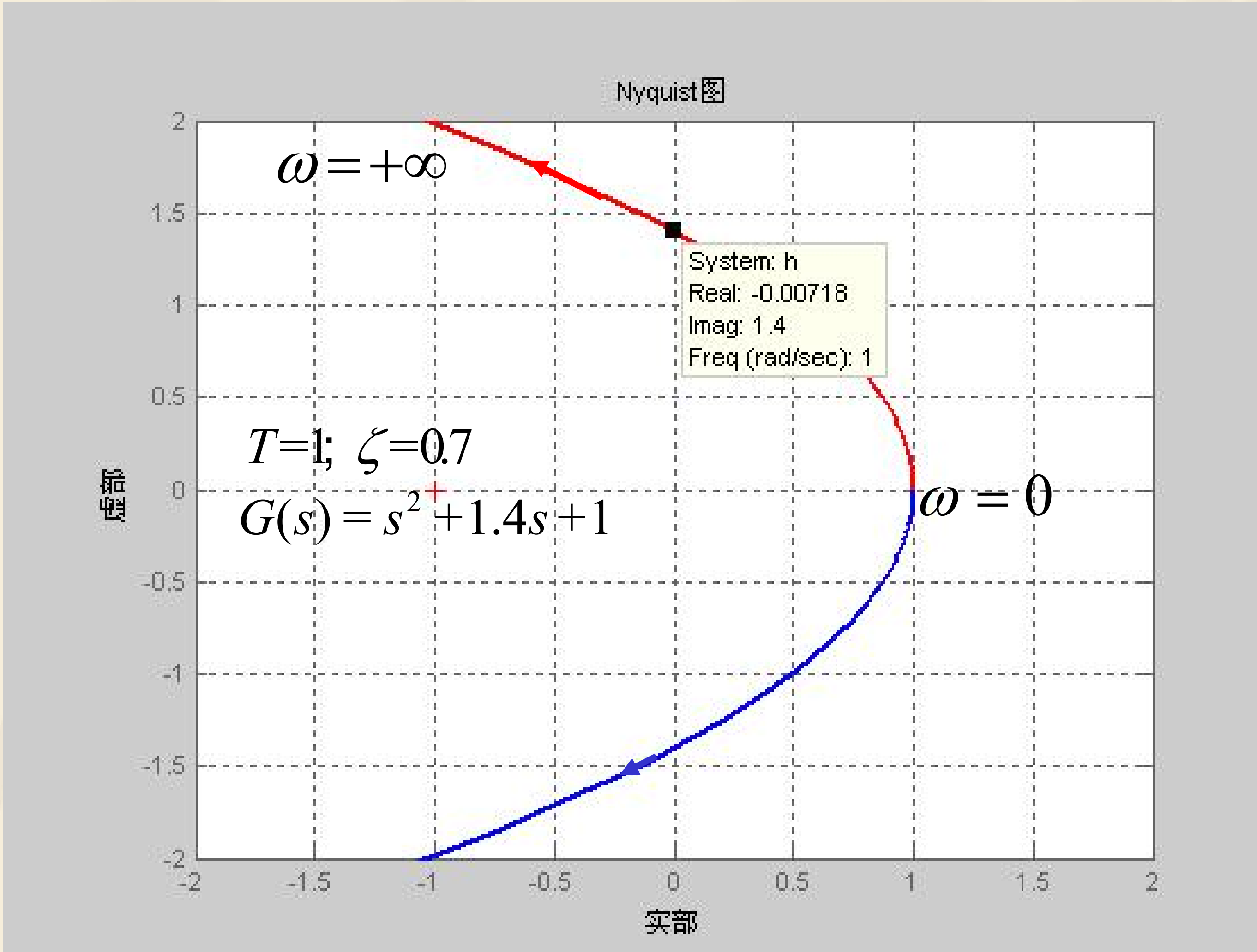
③ 二阶微分环节：$G(j\omega)=1-T^2\omega^2+j2\zeta\omega T$

幅频和相频特性为：

$$A(\omega)=\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\zeta\omega T)^2},\quad \varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\zeta\omega T}{1-T^2\omega^2}$$

$$P(\omega)=1-T^2\omega^2,\qquad Q(\omega)=2\zeta\omega T$$




Nyquist图
$\omega = +\infty$
System: h
Real: -0.00718
Imag: 1.4
Freq (rad/sec): 1
$T=1;\ \zeta=0.7$
$G(s) = s^2 + 1.4s + 1$
$\omega = 0$
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
虚部
实部

6、延迟环节的频率特性:

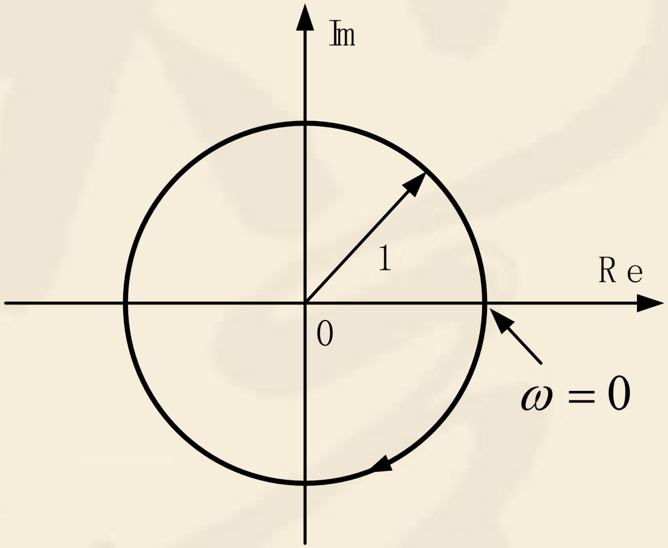
传递函数: $G(s)=\mathrm{e}^{-\tau s}$

频率特性: $G(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau\omega}$

幅频特性: $A(\omega)=1$

相频特性:

$$\varphi(\omega)=-\omega\tau(rad)$$
$$=-57.3\omega\tau(\mathrm{deg})$$



极坐标图是一个圆心在原点，半径为1的圆。

小结

- 比例环节的极坐标图
- 积分环节的极坐标图
- 惯性环节的极坐标图--极坐标图为圆(圆心不在原点)
- 振荡环节的极坐标图
- 微分环节的极坐标图--纯微分、一阶微分和二阶微分
- 延迟环节的极坐标图—极坐标图为单位圆(圆心在原点)
- 注意相角特性的计算(本节只涉及到了最小相位环节)