第4节　开环系统极坐标图的绘制

一、开环系统极坐标频率特性的绘制步骤（绘制奈氏图）

开环频率特性或由典型环节的频率特性组合而成，或是有理分式形式。

[绘制方法]:

- 手工绘制：将开环频率特性写成$P(\omega)+jQ(\omega)$或$A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$的形式，根据不同的$\omega$算出$P(\omega)$、$Q(\omega)$或$A(\omega)$、$\varphi(\omega)$，可在复平面上得到不同的点并连之为曲线。

手工绘制的是近似曲线。具体来讲是根据幅频特性和相频特性确定起点(对应$\omega=0$)和终点(对应$\omega=+\infty$)；根据实频特性和虚频特性确定与坐标轴的交点；然后按ω从小到大的顺序用光滑曲线连接即可。必要时可再求一些中间的点帮助绘图。

- 使用MATLAB工具绘制（精确曲线）。

[例]设开环系统的频率特性为: $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{K}{(1+\mathrm{j}T_1\omega)(1+\mathrm{j}T_2\omega)}$

试列出实频和虚频特性的表达式。当$K=1$, $T_1=1$, $T_2=5$，绘制奈氏图。

[解] $$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{K(1-\mathrm{j}T_1\omega)(1-\mathrm{j}T_2\omega)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}=\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$-\mathrm{j}\frac{K(T_1+T_2)\omega}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}=P(\omega)+\mathrm{j}Q(\omega)$$

当 $K=1$, $T_1=1$, $T_2=5$ 时,

$$P(\omega)=\frac{1-5\omega^2}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)},\quad Q(\omega)=\frac{-6\omega}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)}$$

找出几个特殊点（比如$\omega=0,+\infty$，与实、虚轴的交点等），可大致勾勒出奈氏图。为了相对准确，可以再算几个点。

$$P(\omega)=\frac{1-5\omega^2}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)},\quad Q(\omega)=\frac{-6\omega}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)}$$

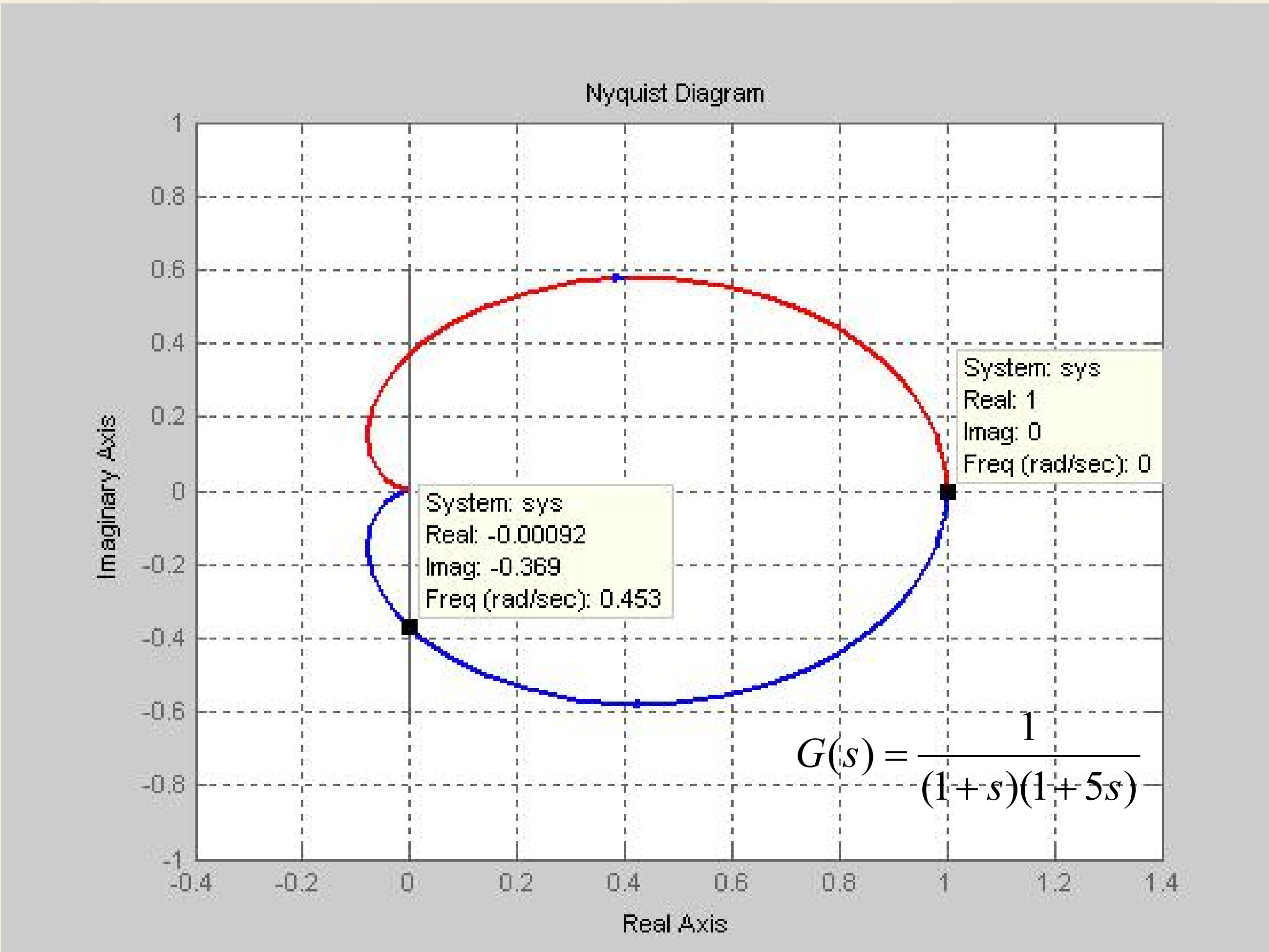
ω	0	0.2	$1/\sqrt{5}$	0.8	∞
$P(\omega)$	1	3.85	0	-0.79	0
$Q(\omega)$	0	-5.77	$-\sqrt{5}/6$	-1.72	0

相角: $\varphi(\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}\omega-\mathrm{tg}^{-1}5\omega$

ω	0	0.2	$1/\sqrt{5}$	0.8	∞
$\varphi(\omega)$	0	-56.31	-90	-114.62	-180

用上述信息可以大致勾勒出奈氏图。

用 Matlab工具绘制的奈氏图



$$G(s)=\frac{1}{(1+s)(1+5s)}$$

$$P(\omega)=\frac{1-5\omega^2}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{6\omega}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)}$$

```
num=[0 1];
den=[5 6 1];
nyquist(num,den);
```

[例]设开环系统的频率特性为：$G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{K}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}T_1\omega)(1+\mathrm{j}T_2\omega)}$

试绘制极坐标特性曲线。

[解] $$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{-K(T_1+T_2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}-\mathrm{j}\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$=P(\omega)+\mathrm{j}Q(\omega)$$

$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega$$

[分析] 1、当$\omega=0$时，$P(0)=-K(T_1+T_2)$，$Q(0)=-\infty$，$\varphi(0)=-\pi/2$

显然，当$\omega\to 0$时，$G(\mathrm{j}\omega)$的渐近线是一条通过实轴$-K(T_1+T_2)$点，且平行于虚轴的直线。

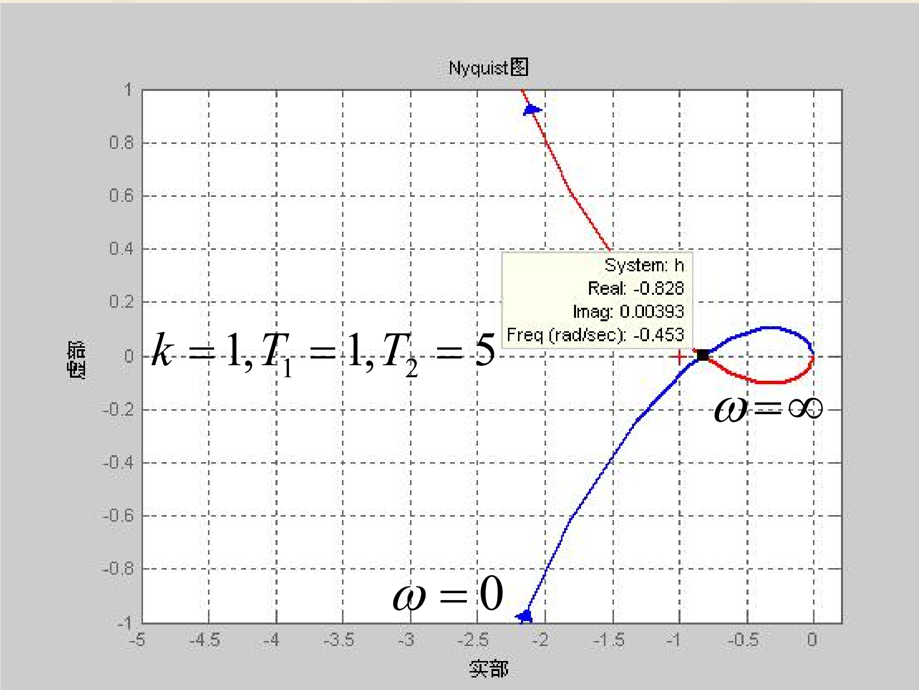
$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{-K(T_1+T_2)}{(1+T_1{}^2\omega^2)(1+T_2{}^2\omega^2)}-\mathrm{j}\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{\omega(1+T_1{}^2\omega^2)(1+T_2{}^2\omega^2)}$$
$$=P(\omega)+\mathrm{j}Q(\omega)$$

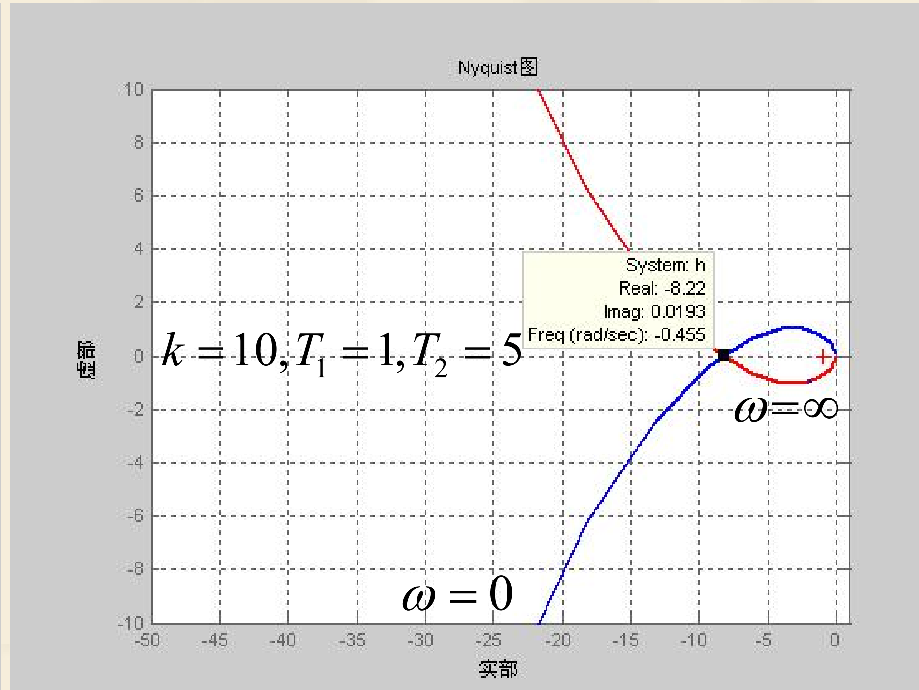
$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega$$

2、与实轴的交点。令: $Q(\omega)=0$，解得: $\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$，这时:

$$P(\omega_1)=\frac{-KT_1T_2}{T_1+T_2}$$

3、当 $\omega\to\infty$ 时, $P(\infty)=0$，$Q(\infty)=0$，$\varphi(\infty)=-3\pi/2$，渐近线方向向下。





$$G(s)=\frac{1}{s(1+s)(1+5s)}$$

$$G(s)=\frac{10}{s(1+s)(1+5s)}$$

除增益以外的部分决定极坐标图的形状，增益决定图形的大小

二、手工绘制最小相位系统极坐标图的方法

第一步：根据最小相位系统频率特性的特点确定极坐标图的低频和高频部分位置和形状。设系统含有v个积分环节，则其相应的频率特性为：

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{(\mathrm{j}\omega)^{v}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\mathrm{j}\tau_i\omega+1)\prod_{k=1}^{m_2}\left[\tau_k^2(\mathrm{j}\omega)^2+2\zeta_k\tau_k(\mathrm{j}\omega)+1\right]}{\prod_{j=1}^{n_1}(\mathrm{j}T_j\omega+1)\prod_{l=1}^{n_2}\left[T_l^2(\mathrm{j}\omega)^2+2\zeta_l T_l(\mathrm{j}\omega)+1\right]}$$

- 当$\omega\to 0$时，频率特性的低频段表达式为：$G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{K}{(\mathrm{j}\omega)^{v}}$

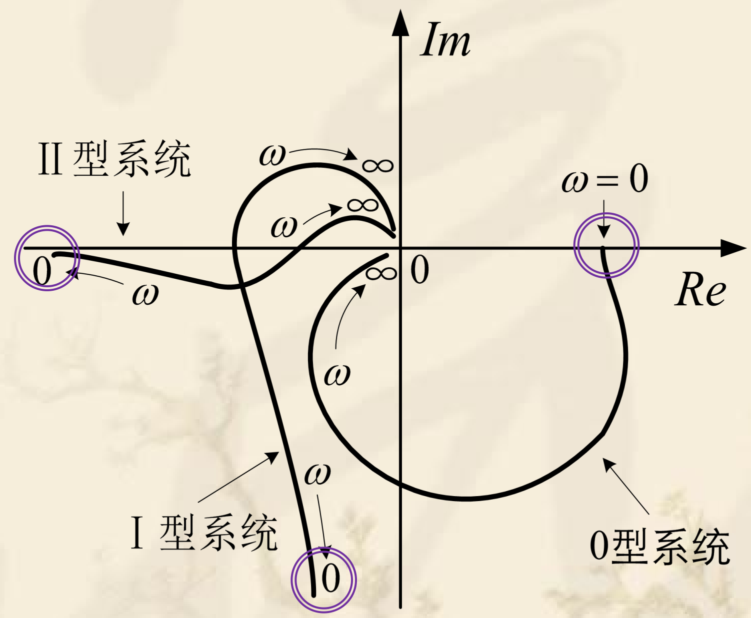
  幅频、相频特性分别为：

$$A(\omega)=\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=\frac{K}{\omega^{v}}\qquad\qquad \varphi(\omega)=-v\frac{\pi}{2}$$

当$\omega \to 0$时，$\varphi(0) \to -\nu\dfrac{\pi}{2}$，$A(0) = |G(0\mathrm{j})| = \left|\dfrac{K}{(\mathrm{j}\omega)^{\nu}}\right|_{\omega=0}$

① **低频段**的频率特性与系统的型（积分环节个数ν）有关。

- 0型系统，极坐标图起始于s平面正实轴的某点处；
- 对Ⅰ型系统，极坐标图起始于s平面负虚轴的无穷远处；
- 对Ⅱ型系统，极坐标图起始于s平面负实轴的无穷远处。



0型系统起始于正实轴的某点处，Ⅰ型及以上系统起始于无穷远处

② 高频段：与n-m有关

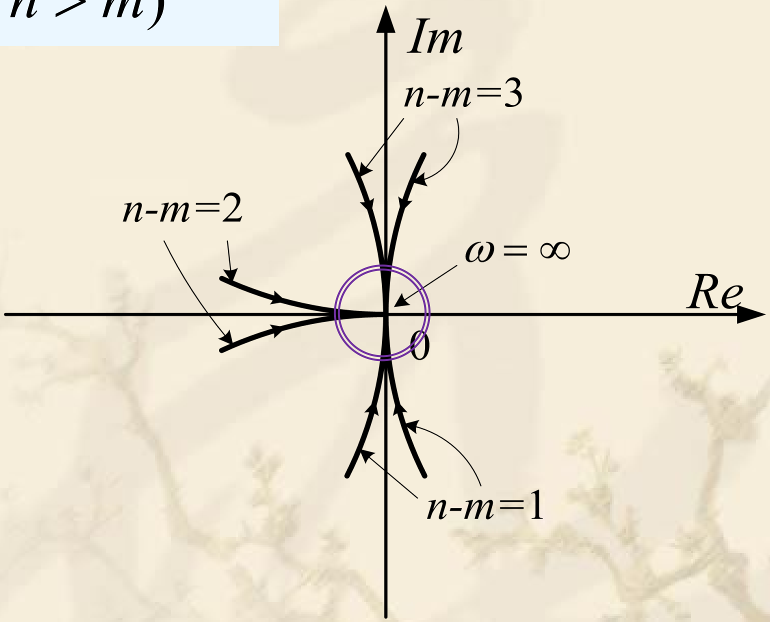
$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^{v}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(j\tau_i\omega+1)\prod_{k=1}^{m_2}\left[\tau_k^2(j\omega)^2+2\zeta_k\tau_k(j\omega)+1\right]}{\prod_{j=1}^{n_1}(jT_j\omega+1)\prod_{l=1}^{n_2}\left[T_l^2(j\omega)^2+2\zeta_l T_l(j\omega)+1\right]}$$

- 当$\omega\to+\infty$时，

$$\varphi(\infty)\to m\frac{\pi}{2}-n\frac{\pi}{2}=-(n-m)\frac{\pi}{2}$$

$$|G(j\omega)|_{\omega=\infty}=0，\quad(若n>m)$$

- 当n-m=1时，极坐标图沿负虚轴趋向原点；
- 当n-m=2时，极坐标图沿负实轴趋向原点；
- 当n-m=3时，极坐标图沿正虚轴趋向原点。



沿实轴或虚轴趋于原点（注意角度）

第二步：对于极坐标图的中频部分，应根据实频特性、虚频特性（或幅频特性、相频特性），确定其与坐标轴（横轴或虚轴）的交点。

第三步：按频率ω从小到大的顺序用光滑曲线将频率特性的低频、中频和高频部分连接起来即可。

最小相位系统频率特性的特点：

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{K}{(\mathrm{j}\omega)^{\nu}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{m_1}(\mathrm{j}\tau_i\omega+1)\prod_{k=1}^{m_2}\left[\tau_k^2(\mathrm{j}\omega)^2+2\zeta_k\tau_k(\mathrm{j}\omega)+1\right]}{\prod_{j=1}^{n_1}(\mathrm{j}T_j\omega+1)\prod_{l=1}^{n_2}\left[T_l^2(\mathrm{j}\omega)^2+2\zeta_l T_l(\mathrm{j}\omega)+1\right]}$$

相角为：

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{m_1}\mathrm{tg}^{-1}\tau_i\omega+\sum_{k=1}^{m_2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\zeta_k\tau_k\omega}{1-(\tau_k\omega)^2}-\nu\frac{\pi}{2}$$

$$-\sum_{j=1}^{n_1}\mathrm{tg}^{-1}T_j\omega-\sum_{l=1}^{n_2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\zeta_l T_l\omega}{1-(T_l\omega)^2}$$

当$\omega=0$时：$\varphi(0)=-\nu\frac{\pi}{2}$， $G(0)=\frac{K}{(\mathrm{j}\omega)^{\nu}}\Big|_{\omega=0}$

当$\omega=+\infty$时：$\varphi(\infty)=-(n-m)\frac{\pi}{2}$，　$(m=m_1+2m_2,\ n=\nu+n_1+2n_2)$

$G(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega=\infty}=0$，　(若$n>m$)

低频段频率特性与系统型数有关，高频段频率特性与n-m有关。

三、非最小相位系统的极坐标图的绘制

非最小相位系统的频率特性可表示为

$$G(j\omega)=\pm\left.\frac{N(s)\prod_{i=1}^{k_1}(1-\tau_i s)}{D(s)\prod_{j=1}^{k_2}(1-T_j s)}\right|_{s=j\omega}$$

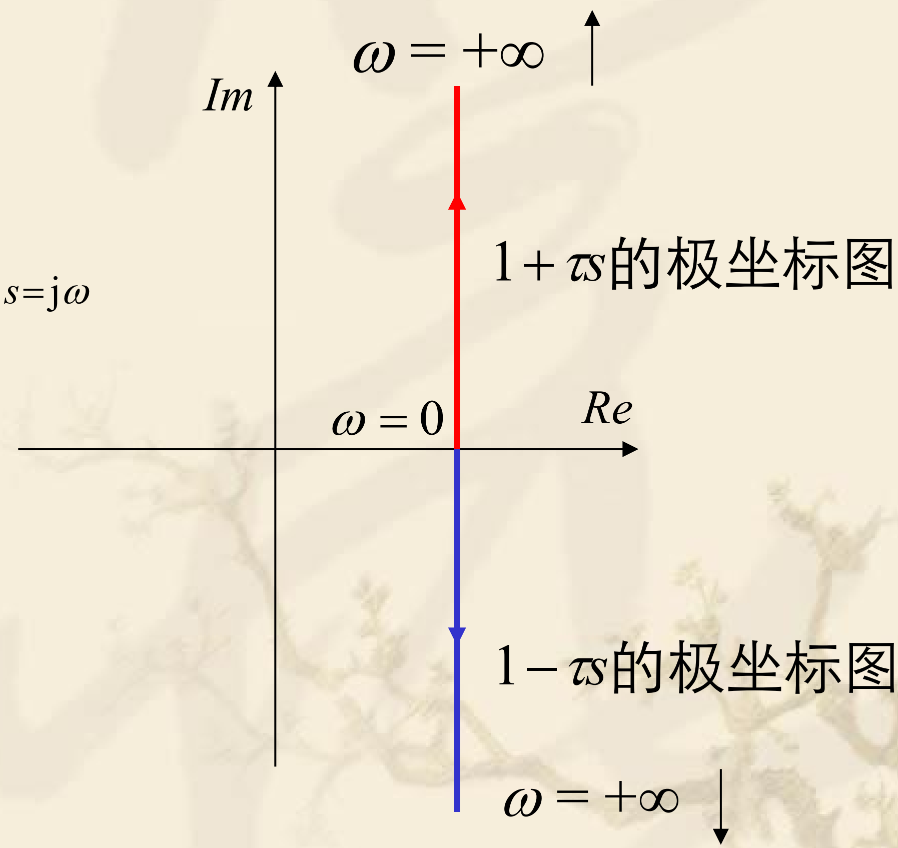
- $G(j\omega)=1-j\omega\tau$的频率特性:

$$P(\omega)=1$$

$$Q(\omega)=-\omega\tau$$

$$A(\omega)=\sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

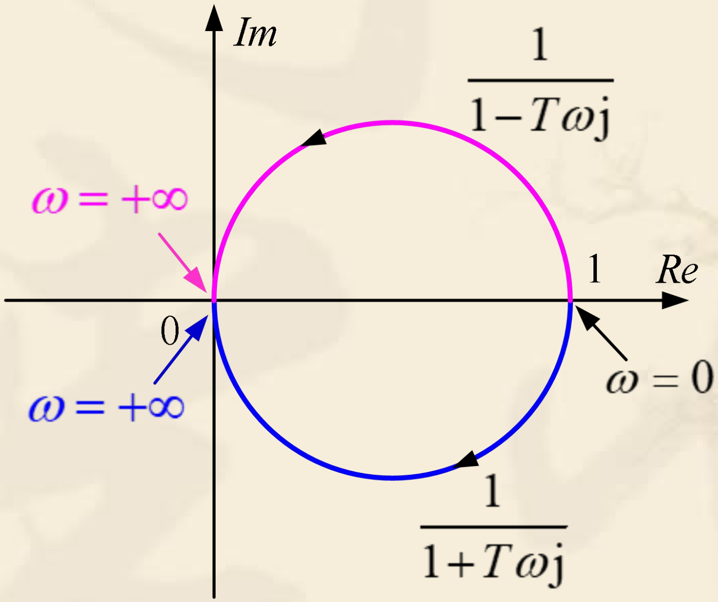
$$\varphi(\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}\omega\tau$$



■ $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{1-\mathrm{j}\omega T}$ 的频率特性:

$$P(\omega)=\frac{1}{1+\omega^2T^2}\qquad Q(\omega)=\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\qquad \varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}\omega T$$



但是。。。

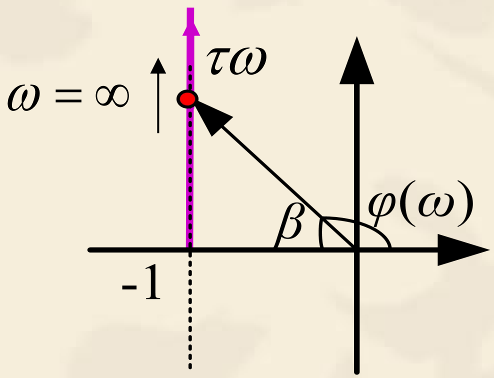
非最小相位系统的相角之特点(常数项为负时)

遇到环节的常数项为负数时，应注意相角的计算

$\tau s-1$的极坐标图：

$$P(\omega)=-1,\quad Q(\omega)=\tau\omega$$

处于第二象限

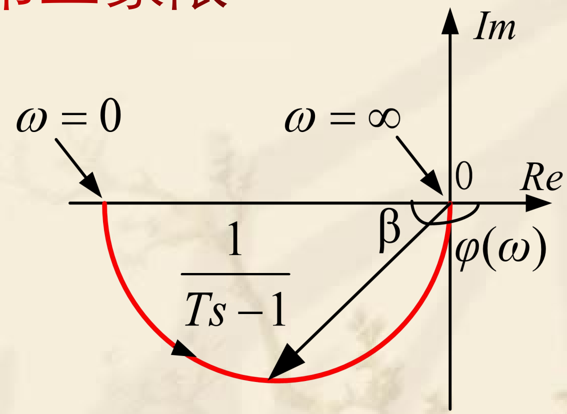


$$\varphi(\omega)=180^\circ-\beta=180^\circ-\mathrm{tg}^{-1}\omega\tau$$

$\dfrac{1}{Ts-1}$的极坐标图：

$$P(\omega)=-\frac{1}{1+\omega^2T^2},\quad Q(\omega)=-\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}$$

处于第三象限



$$\varphi(\omega)=-180^\circ+\beta=-180^\circ+\mathrm{tg}^{-1}\omega\tau$$

[例5.4.1] 已知系统的开环传递函数分别如下，试绘制下述三个系统的极坐标图。

$$G_1(s)=\frac{1-T_2s}{s(1+T_1s)}，\quad G_2(s)=\frac{1+T_2s}{s(1+T_1s)}，\quad G_3(s)=\frac{T_2s-1}{s(1+T_1s)}$$

[解]（1）由开环传递函数可得到第一个系统的开环频率特性:

$$G(\mathrm{j}\omega)=\frac{1-\mathrm{j}\omega T_2}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega T_1)}=\frac{-\omega(T_1+T_2)+\mathrm{j}(\omega^2T_1T_2-1)}{\omega(1+\omega^2T_1^2)}$$

$$P(\omega)=\frac{-(T_1+T_2)}{1+\omega^2T_1^2},\quad Q(\omega)=\frac{\omega^2T_1T_2-1}{\omega(1+\omega^2T_1^2)}$$

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{1+\omega^2T_2^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2T_1^2}}，\quad \varphi(\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega$$

$$P(\omega)=\frac{-(T_1+T_2)}{1+\omega^2T_1^2},\quad Q(\omega)=\frac{\omega^2T_1T_2-1}{\omega(1+\omega^2T_1^2)}$$

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{1+\omega^2T_2^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2T_1^2}},\quad \varphi(\omega)=-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega$$

当ω=0时，$P(\omega)=-(T_1+T_2)$

$$Q(\omega)=-\infty$$

$$A(\omega)=\infty$$

$$\varphi(\omega)=-90^\circ$$

当ω=∞时，$P(\omega)=0$

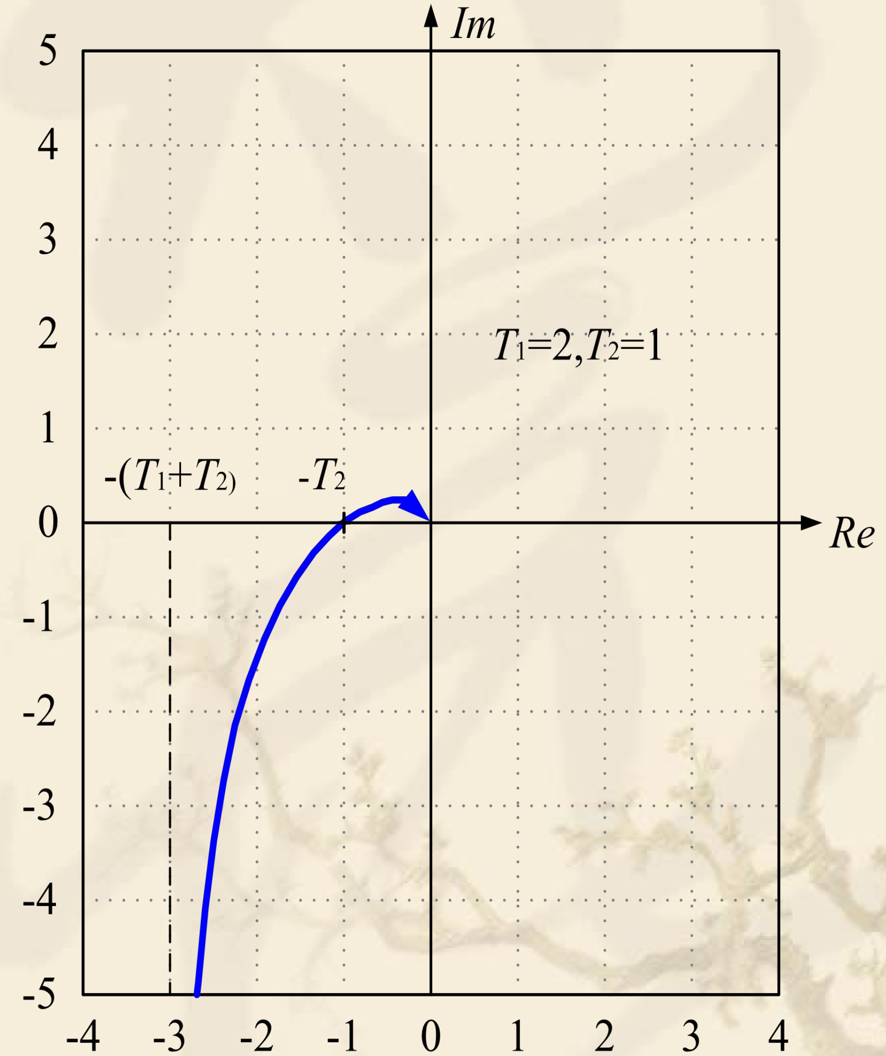
$$Q(\omega)=0$$

$$A(\omega)=0$$

$$\varphi(\omega)=-270^\circ$$

令$Q(\omega)=0$，可计算出极坐标图与实轴交点和频率为:

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}},\quad P(\omega)=-T_2$$



（2）$G_2(s)=\dfrac{1+T_2 s}{s(1+T_1 s)}$，略（最小相位系统，自行练习）

（3）由开环传递函数可得到第三个系统的开环频率特性为：

$$G_3(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega T_2-1}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega T_1)}=\frac{\omega(T_1+T_2)-\mathrm{j}(\omega^2 T_1 T_2-1)}{\omega(1+\omega^2 T_1^2)}$$

$$P(\omega)=\frac{(T_1+T_2)}{1+\omega^2 T_1^2},\quad Q(\omega)=-\frac{\omega^2 T_1 T_2-1}{\omega(1+\omega^2 T_1^2)}$$

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{1+\omega^2 T_2^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2 T_1^2}}$$

$$G_3(s)=\frac{T_2 s-1}{s(1+T_1 s)}$$

$$\varphi(\omega)=\boxed{(180^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega)}-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega$$

$$P(\omega)=\frac{(T_1+T_2)}{1+\omega^2T_1^2},\quad Q(\omega)=-\frac{\omega^2T_1T_2-1}{\omega(1+\omega^2T_1^{\ 2})}$$

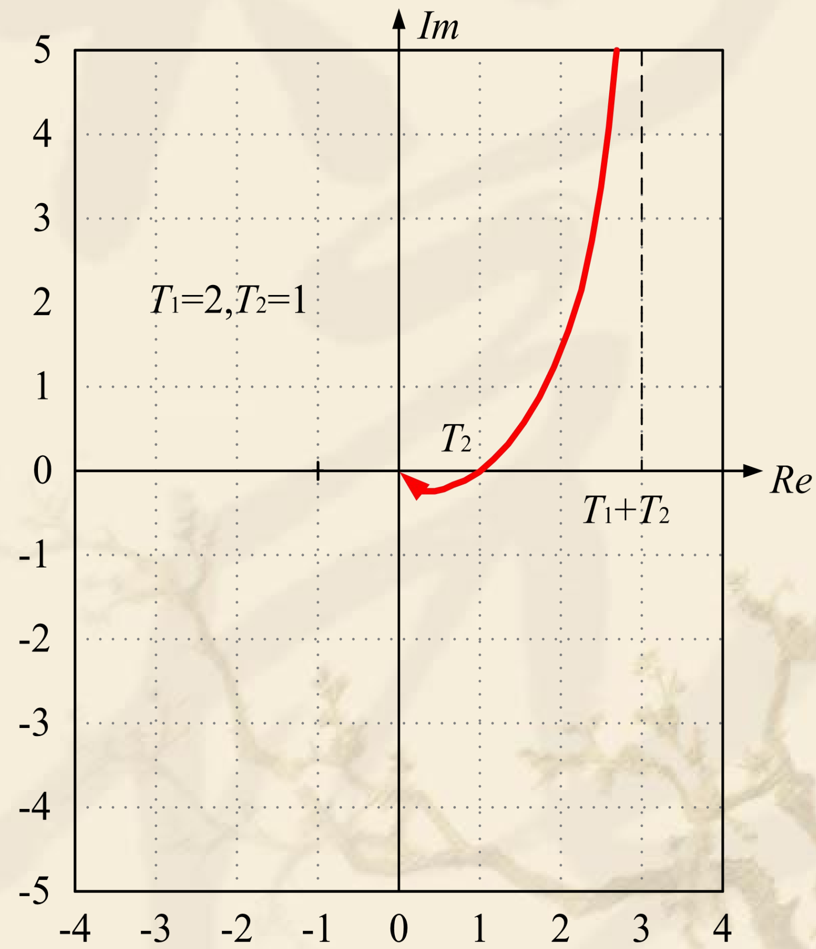
$$A(\omega)=\frac{\sqrt{1+\omega^2T_2^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2T_1^2}},\quad \varphi(\omega)=(180^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega)-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega$$

当ω=0时，
$$P(\omega)=(T_1+T_2)$$
$$Q(\omega)=+\infty$$
$$A(\omega)=\infty$$
$$\varphi(\omega)=+90^\circ$$

当ω=∞时，
$$P(\omega)=0$$
$$Q(\omega)=0$$
$$A(\omega)=0$$
$$\varphi(\omega)=-90^\circ$$

令$Q(\omega)=0$，可计算出极坐标图与实轴的交点和频率：

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}\qquad P(\omega)=T_2$$



3、增加零、极点对极坐标图形状的影响

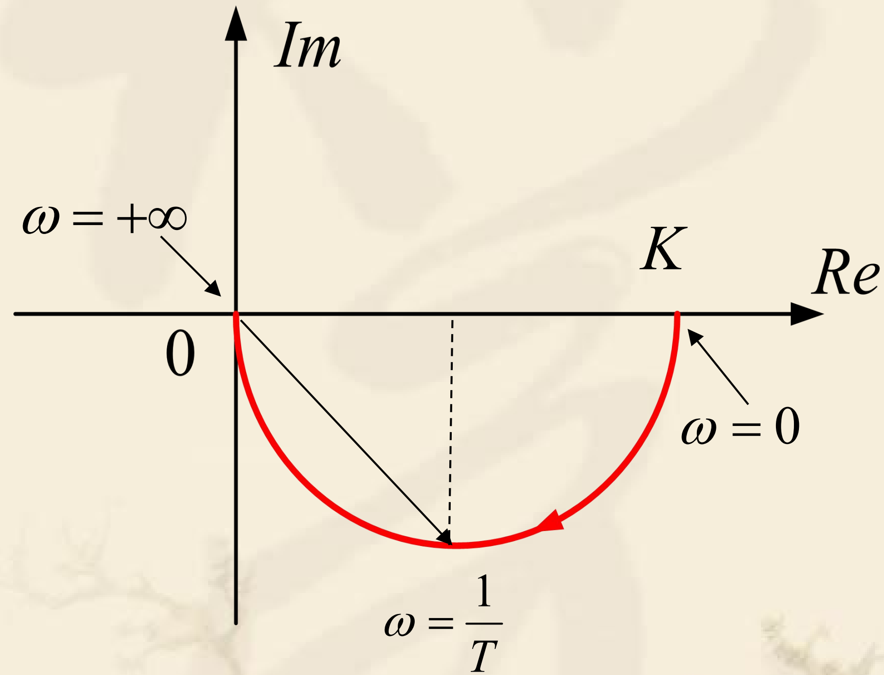
设 $G_1(s)=\dfrac{K}{T_1 s+1}$

幅频特性：$A(\omega)=\dfrac{K}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}$

相频特性：$\varphi(\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega$

实频特性：$P(\omega)=\dfrac{K}{1+T_1^2\omega^2}$

虚频特性：$Q(\omega)=\dfrac{-KT_1\omega}{1+T_1^2\omega^2}$



当$\omega=0$时，$A(\omega)=K$，$\varphi(\omega)=0$，$P(\omega)=K$，$Q(\omega)=0$

当$\omega=+\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-90^{\circ}$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

（1）增加有限值极点

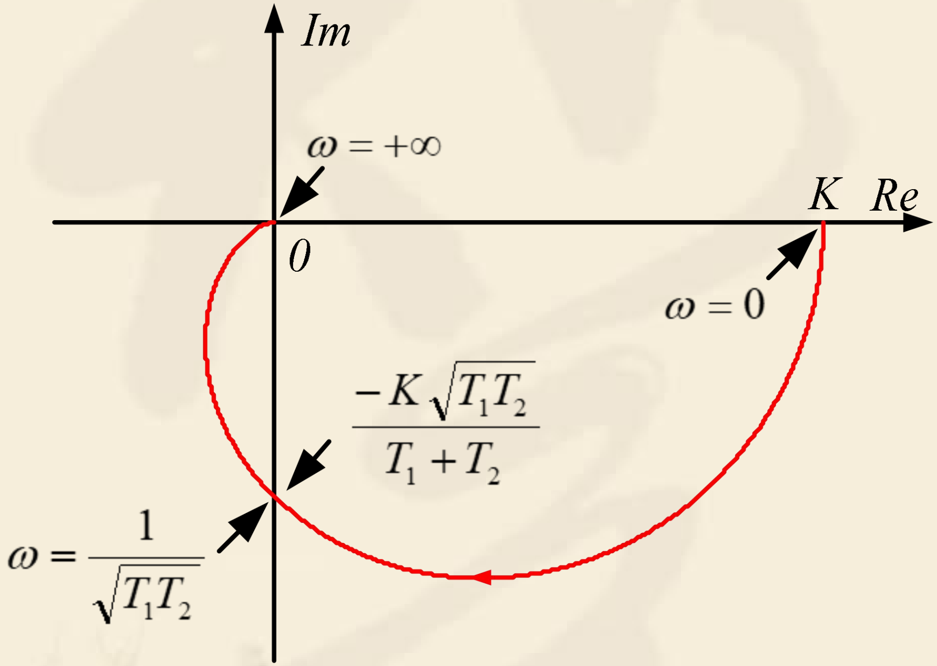
设 $$G_2(s)=\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega$$

$$P(\omega)=\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{-K\omega(T_1+T_2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$



当$\omega=0$时，$A(\omega)=K$，$\varphi(\omega)=0$，$P(\omega)=K$，$Q(\omega)=0$

当$\omega=+\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-180^\circ$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

令$P(\omega)=0$，解得 $\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$，此时 $Q(\omega)=\frac{-K\sqrt{T_1T_2}}{T_1+T_2}$

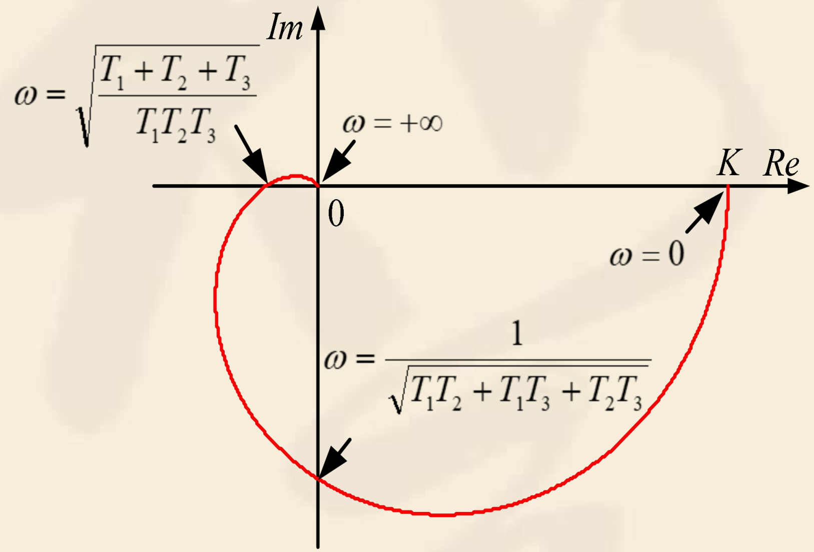
设 $G_3(s)=\dfrac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$

$$A(\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}\sqrt{1+T_3^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega-\mathrm{tg}^{-1}T_3\omega$$

$$P(\omega)=\frac{K[1-\omega^2(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)]}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)(1+T_3^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{K\omega(\omega^2T_1T_2T_3-T_1-T_2-T_3)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)(1+T_3^2\omega^2)}$$

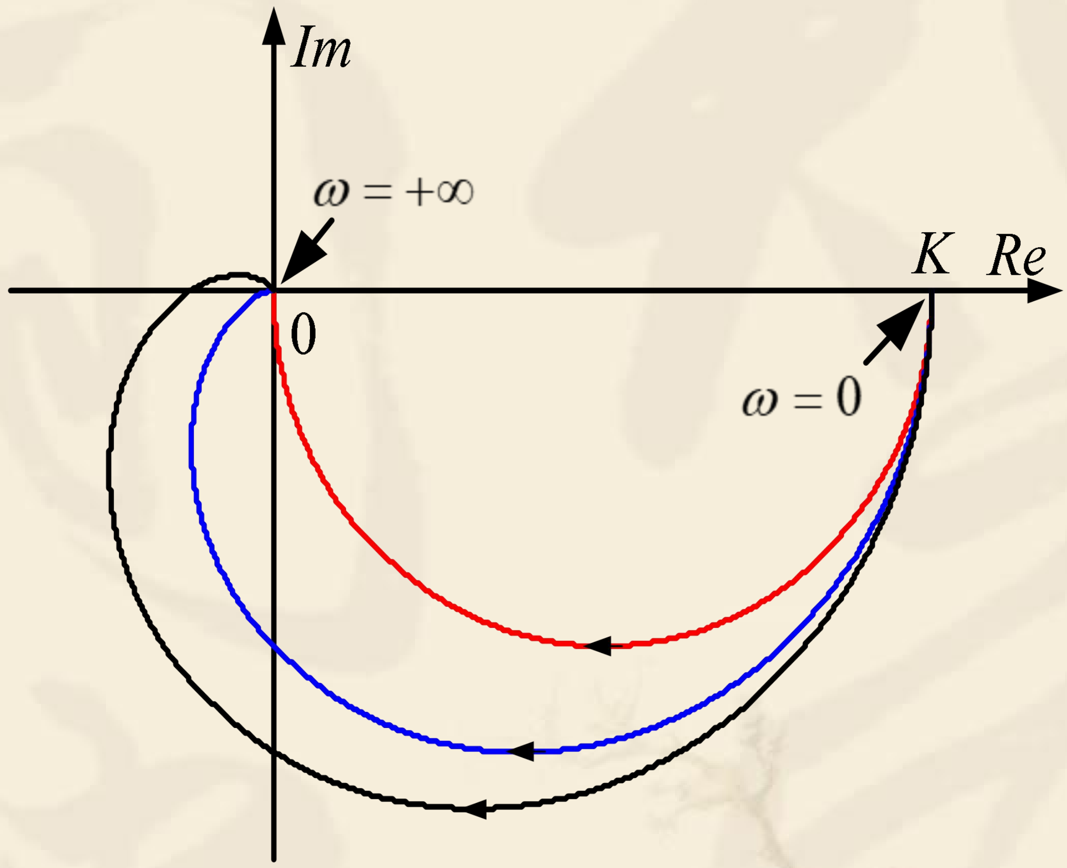


当 $\omega=0$ 时，$A(\omega)=K$，$\varphi(\omega)=0$，$P(\omega)=K$，$Q(\omega)=0$

当 $\omega=+\infty$ 时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-270^{\circ}$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

令 $P(\omega)=0$，解得 $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3}}$，此时与虚轴相交；

令 $Q(\omega)=0$，解得 $\omega=0$ 和 $\omega=\sqrt{\dfrac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}}$，此时与实轴相交；



[结论]假如$G(s)$增加n个有限负极点(时间常数形式)，则$G(j\omega)$的极坐标图在ω=0时幅值不变；在$\omega\rightarrow+\infty$时相角顺时针增加$n\pi/2$ (弧度)。

(2) 增加在原点处的极点

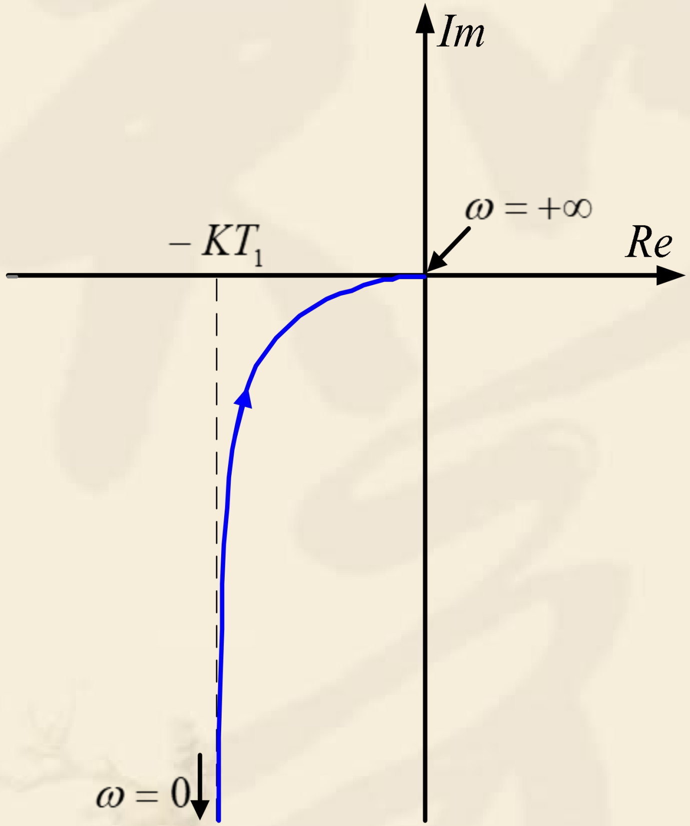
设 $G_4(s)=\dfrac{K}{s(T_1 s+1)}$

$$A(\omega)=\frac{K}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega$$

$$P(\omega)=\frac{-KT_1}{1+T_1^2\omega^2}$$

$$Q(\omega)=\frac{-K}{\omega(1+T_1^2\omega^2)}$$

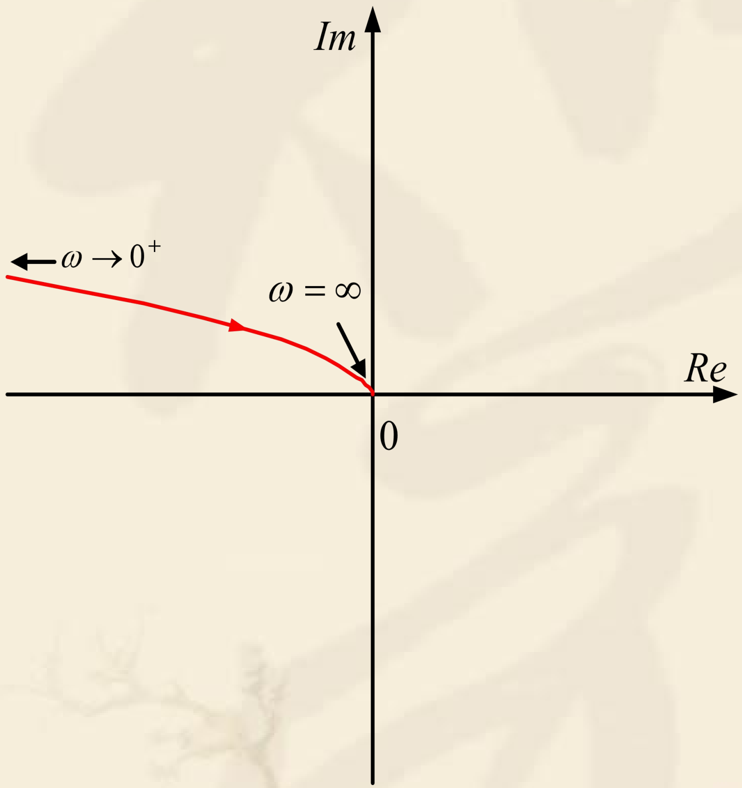


当$\omega=0$时，$A(\omega)=\infty$，$\varphi(\omega)=-90^{\circ}$，$P(\omega)=-KT_1$，$Q(\omega)=-\infty$

当$\omega=+\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-180^{\circ}$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

在ω取有限值时与坐标轴无交点。

设 $G_5(s)=\dfrac{K}{s^2(T_1s+1)}$



$$A(\omega)=\frac{K}{\omega^2\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-180^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega$$

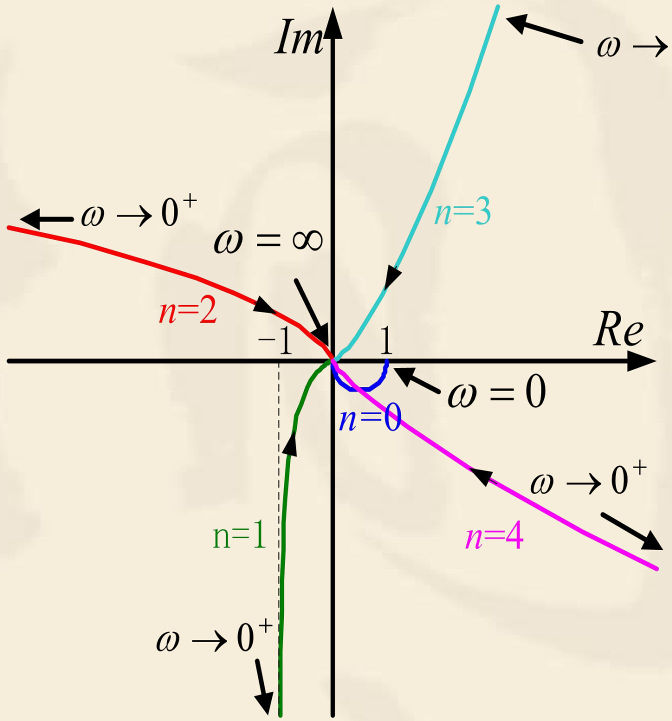
$$P(\omega)=\frac{-K}{\omega^2(1+T_1^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{KT_1}{\omega(1+T_1^2\omega^2)}$$

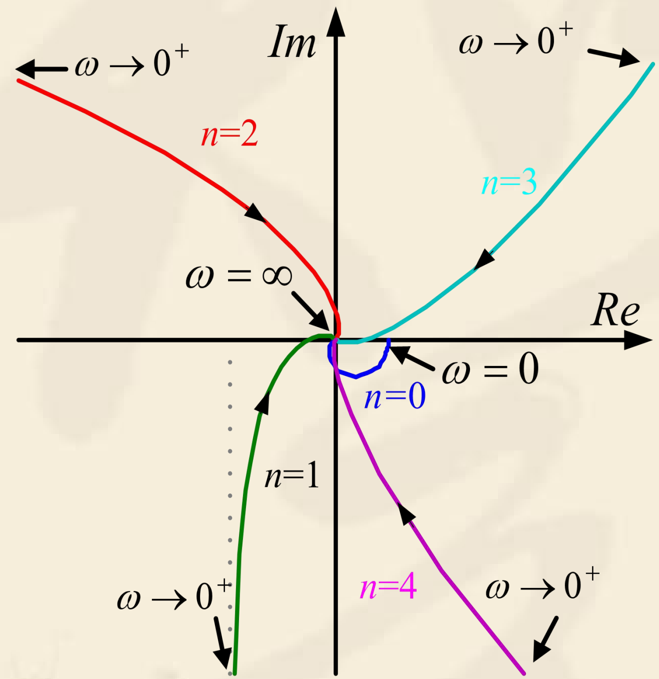
当$\omega=0$时，$A(\omega)=\infty$，$\varphi(\omega)=-180^\circ$，$P(\omega)=-\infty$，$Q(\omega)=\infty$

当$\omega=+\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-\dfrac{3\pi}{2}$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

在ω取有限值时与坐标轴无交点。



$\dfrac{K}{s^n(s+1)}$的极坐标图



$\dfrac{K}{s^n(s+1)^2}$的极坐标图

[结论]假如$G(s)$乘上因子$1/s^n$，则$G(j\omega)$的极坐标图顺时针转过$n\pi/2$(弧度)。并且只要在原点处存在极点，极坐标图在$\omega=0$的幅值就为无穷大。

（3）增加有限零点

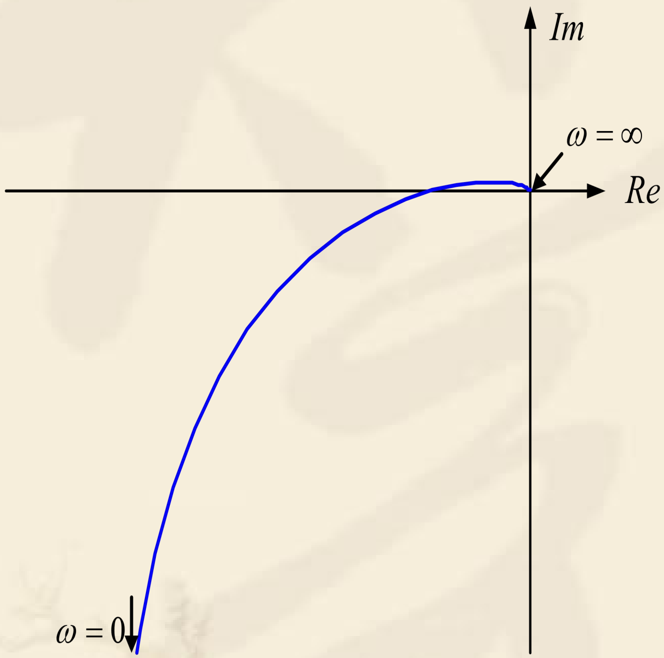
设 $G_5(s)=\dfrac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$

$$A(\omega)=\frac{K}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega$$

$$P(\omega)=\frac{-K(T_1+T_2)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{-K(1-T_1T_2\omega^2)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$



当$\omega=0$时，$A(\omega)=\infty$，$\varphi(\omega)=-90^\circ$，$P(\omega)=-K(T_1+T_2)$，$Q(\omega)=-\infty$

当$\omega=+\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-270^\circ$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

令$Q(\omega)$=0，可解得与实轴的交点。$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$，　$P(\omega)=-\dfrac{KT_1T_2}{T_1+T_2}$

设 $G_6(s)=\dfrac{K(T_d s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$

$$A(\omega)=\frac{K\sqrt{1+T_d^2\omega^2}}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}T_d\omega-90^\circ-\mathrm{tg}^{-1}T_1\omega-\mathrm{tg}^{-1}T_2\omega$$

$$P(\omega)=\frac{-K(T_1+T_2-T_d+\omega^2T_1T_2T_d)}{(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{-K[1-\omega^2(T_1T_2-T_1T_d-T_2T_d)]}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

当$\omega=0$时，$A(\omega)=\infty$，$\varphi(\omega)=-90^\circ$，$P(\omega)=-K(T_1+T_2-T_d)$，$Q(\omega)=-\infty$

当$\omega=+\infty$时，$A(\omega)=0$，$\varphi(\omega)=-180^\circ$，$P(\omega)=0$，$Q(\omega)=0$

令$Q(\omega)=0$，解得与实轴交点$\omega^2=\dfrac{1}{T_1T_2-T_1T_d-T_2T_d}$

注意与实轴有交点的条件为：$T_1T_2-T_1T_d-T_2T_d>0$

$$T_d(T_1+T_2)<T_1T_2 \quad \Rightarrow \quad T_d<\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}$$

设$T_1>T_2$，可令$T_1=aT_2$，$a>1$

$$\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}=\frac{aT_2^2}{(1+a)T_2}=\frac{a}{1+a}T_2 \qquad \because \frac{a}{1+a}<1 \qquad \therefore \frac{a}{1+a}T_2<T_2$$

即满足$T_1>T_2>T_d$时，与实轴有交点，交点为

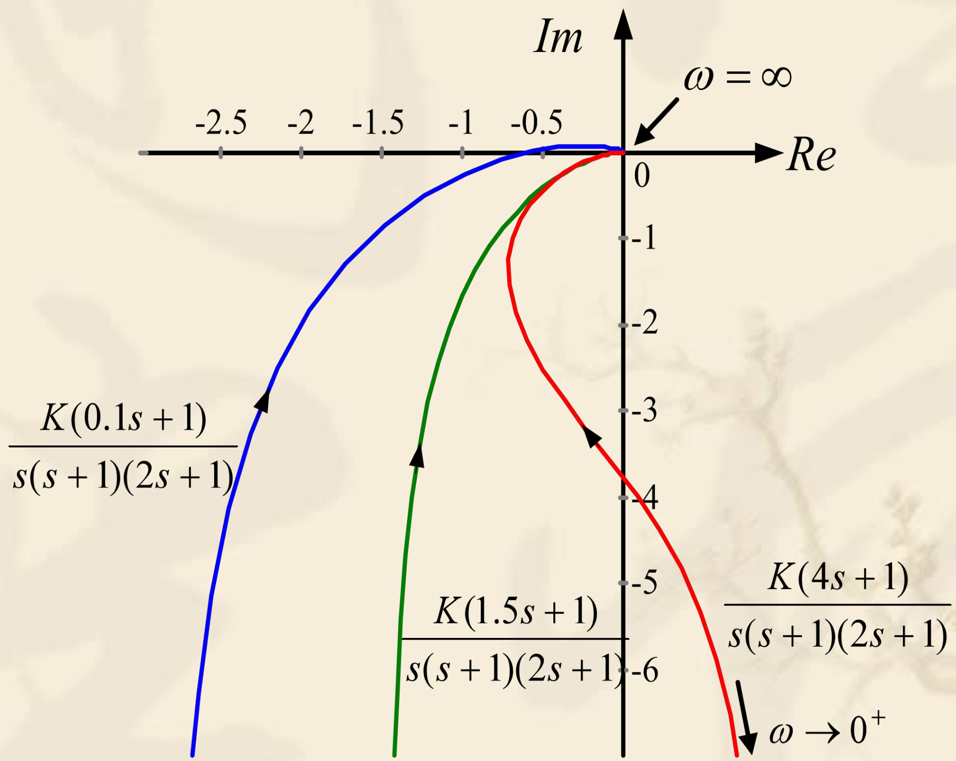
$$P(\omega)=-K\left(\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}-T_d\right)$$

与没有零点的极坐标图比较知：与实轴的交点更靠近原点，且当$\omega\to\infty$时，极坐标图趋于原点时的相角为-180°。而原系统趋于原点时的相角为-270°。

若$T_d \geq \dfrac{T_1T_2}{T_1+T_2}$，则极坐标图与实轴无交点。

另外令$P(\omega)=0$，解得虚轴交点处有$\omega^2 = \dfrac{T_d-(T_1+T_2)}{T_1T_2T_d}$

即当$T_d \geq (T_1+T_2)$时极坐标图将与虚轴相交。



总结

- 开环系统极坐标频率特性的绘制（最小相位系统）

  --手工绘制和使用*Matlab*绘制

  --具有积分环节系统的频率特性特点，低频和高频特性
- 最小相位系统和非最小相位系统
- 增加零、极点对极坐标图形状的影响

作业：5.8(1)、(4)