

第六节 线性控制系统的稳态性能分析

控制系统的稳态性能指的是系统的稳态误差。稳态误差表示系统对某种典型输入信号响应的准确程度，在控制系统设计中，稳态误差是一项重要的性能指标。

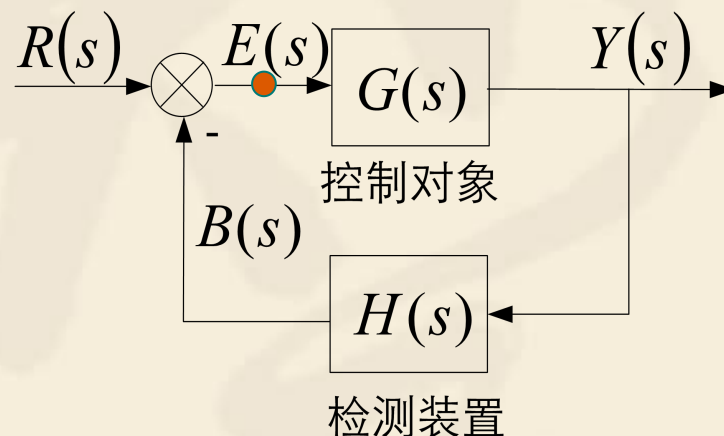
先从系统的误差开始讨论！

一、控制系统的误差:

反馈控制系统的典型结构图如右图所示。

定义:参考输入量 $R(s)$ 与被控量 $Y(s)$ 间的差为控制系统的误差信号。

记做 $E(s)$ ，即： $E(s)=R(s)-Y(s)$ 。



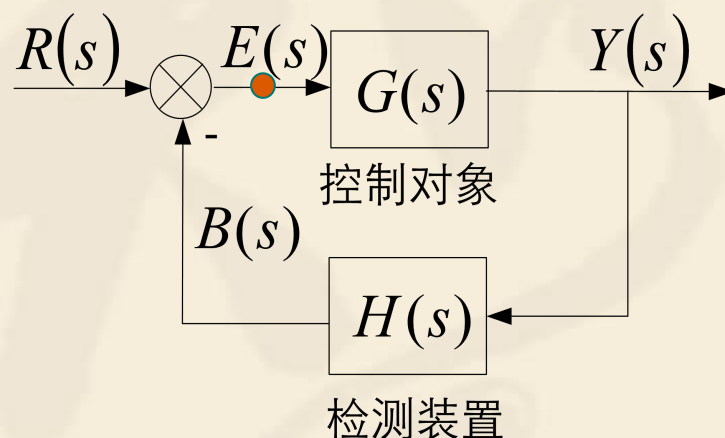
但是系统的参考输入量 $R(s)$ 与被控量 $Y(s)$ 有时为不同量纲或量程的物理量，在这种情况下，系统的误差不能直接用它们之间的差值来表示，应该将 $R(s)$ 和 $Y(s)$ 转换为相同量纲或量程后方能进行相减。假设将 $Y(s)$ 转换为与 $R(s)$ 相同的量纲或量程的转换系数为 $\alpha(s)$ ，则系统的误差有两种定义方式。

从输入端定义:

$$E_1(s) = R(s) - \alpha(s)Y(s)$$

从输出端定义:

$$E_2(s) = \frac{R(s)}{\alpha(s)} - Y(s)$$

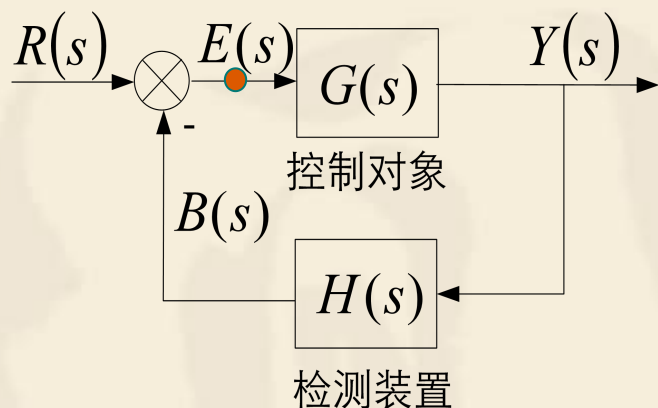


当 $R(s)$ 和 $Y(s)$ 的量纲和量程相同时，即在单位反馈的情况下，转换系数 $\alpha(s)=1$ 。在一般情况下，转换系数 $\alpha(s)$ 与系统反馈通路传递函数 $H(s)$ 相等。

则系统误差可以定义为:

$$E_1(s) = R(s) - H(s)Y(s) \quad e_1(t) = L^{-1}[R(s) - H(s)Y(s)]$$

$$E_2(s) = \frac{R(s)}{H(s)} - Y(s) \quad e_2(t) = L^{-1}\left[\frac{R(s)}{H(s)} - Y(s)\right]$$

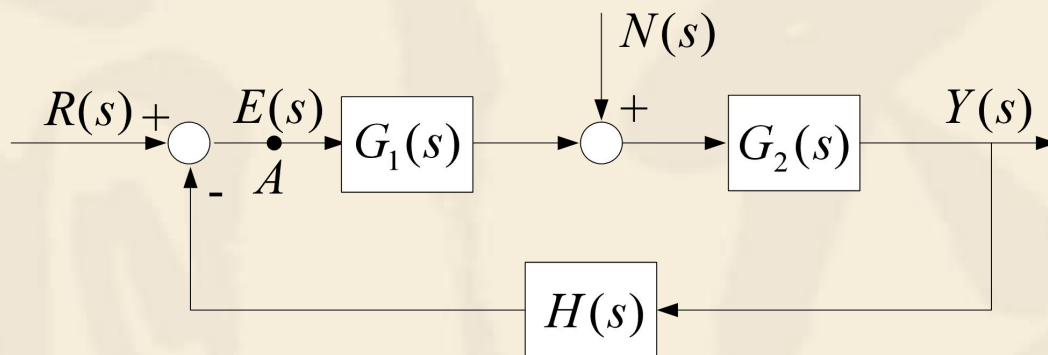


在本课程中，采用从输入端定义误差。

$$E_1(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

[例]一调速系统，输入电压 $r(t)$ 范围 $0\sim 5V$ ，对应输出转速 $y(t)$ 范围 $0\sim 5000rpm$ ，检测装置是量程为 $0\sim 5000rpm$ （对应输出电压 $0\sim 5V$ ）的线性转速传感器。用以转换输入电压 $r(t)$ 与输出转速 $y(t)$ 之间的系数 $1/1000rpm$ 便是转换系数 α 。在某一时刻，输入电压 $r(t)=2V$ ，对应的输出转速应是 $y(t)=2000rpm$ 。若在干扰的作用下，实际输出转速为 $1900rpm$ ，则其误差为 $e_1(t)=0.1V$ （从输入端定义），或 $e_2(t)=100rpm$ （从输出端定义）。

参考输入信号和扰动信号同时作用的线性控制系统误差



误差为 $E(s)=E_1(s)+E_2(s)$ ，分别由参考输入信号和扰动信号引起的误差。误差定义在输入端，即定义在图中的 A 点处。

令 $N(s)=0$ ， $E_1(s)$ 对 $R(s)$ 的传递函数： **$[R(s)]$ 引起的误差**

$$\Phi_R(s) = \frac{E_1(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$E_1(s) = \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

令 $R(s)=0$ ， $E_2(s)$ 对 $N(s)$ 的传递函数：[$N(s)$ 引起的误差]

$$\Phi_N(s) = \frac{E_2(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

注意误差的位置A!

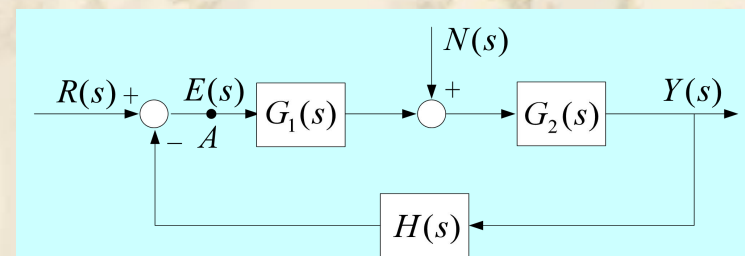
$$E_2(s) = -\frac{G_2(s)H(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

根据线性系统的叠加原理，可求得该系统的总误差为

$$E(s) = E_1(s) + E_2(s)$$

$$= \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} - \frac{G_2(s)H(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$e(t) = L^{-1}[E(s)]$$



二、控制系统的稳态误差：

[定义] 误差信号 $e(t)$ 在时间 t 趋于无穷大时的数值，定义为系统的稳态误差，记为 e_{ss} 。

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

由系统误差的讨论和稳态误差的定义，可知稳态误差不仅和系统的**特性**（系统的类型和结构）有关，而且和系统的**输入**（参考输入和扰动输入）信号的特性有关。

需要指出的是，只有当系统稳定时，研究稳态误差才有意义。因此，在计算系统的稳态误差之前，**必须判断系统是否稳定**。对于不稳定的系统，计算稳态误差是没有意义的。

对于实际的控制系统，由于其结构、输入作用的类型（给定量或扰动量）、输入作用的形式（阶跃、斜坡或加速度）不同，控制系统的稳态输出不可能在任何情况下都与输入量一致或相当，也不可能在任何形式的扰动作用下都能准确地恢复到原平衡位置。这类由于系统结构、输入作用形式和类型所产生的稳态误差称为**原理性稳态误差**。

此外，控制系统中不可避免地存在摩擦、间隙、不灵敏区等非线性因素，都会造成附加的稳态误差。这类由于非线性因素所引起的系统稳态误差称为**附加稳态误差**或**结构性稳态误差**。

本节只讨论**原理性稳态误差**（简称稳态误差），不讨论**结构性稳态误差**。

控制系统的稳态误差是不可避免的，控制系统设计的任务之一，是尽量消除系统的稳态误差，或者使稳态误差小于某一允许值。（提高控制精度）

[强调]只有当系统稳定时，研究稳态误差才有意义；对于不稳定的系统而言，研究稳态误差是没有意义的。

[问题]对于稳定的系统，其稳态误差或为常数，或无穷大。
对吗？

三、稳定系统稳态误差的计算

1、 $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ —— 定义

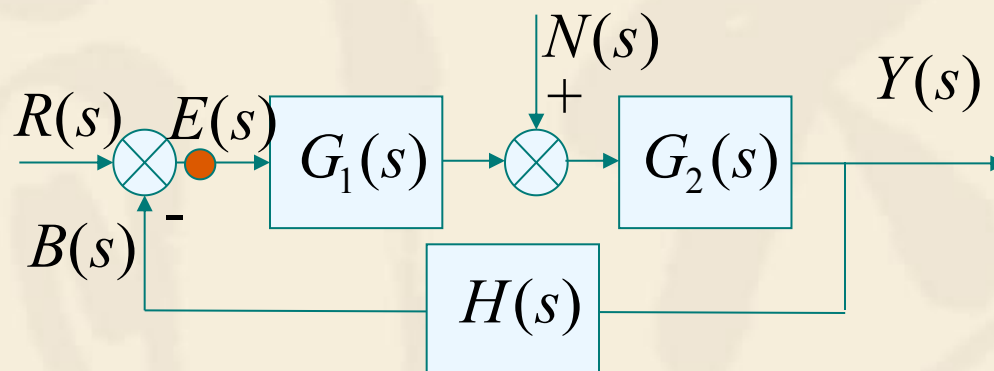
2、 稳态误差可以借助拉氏变换的**终值定理**计算：

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

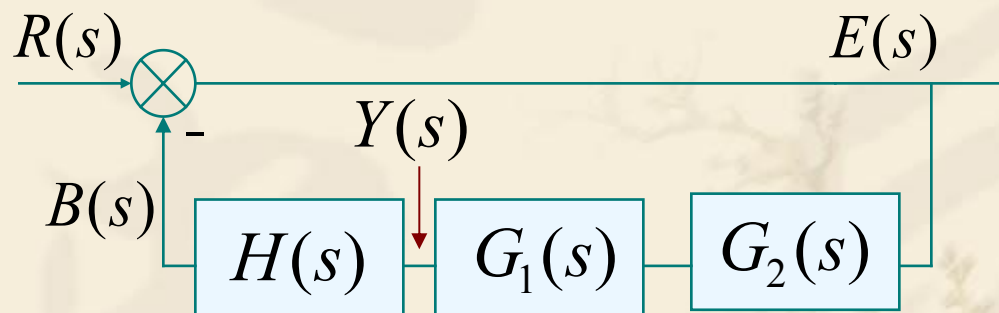
使用终值定理的条件是有理函数 $sE(s)$ 在 s 的右半平面和虚轴上解析，即 $sE(s)$ 的全部极点都必需分布在 s 左半平面（包括坐标原点）。（终值定理要求 $e(t)$ 的极限存在）

由于根据终值定理算出的稳态误差是误差信号在 t 趋于无穷时的数值，故有时称为**终值误差**。它不能反映误差随时间 t 的变化规律。（**非动态误差**）

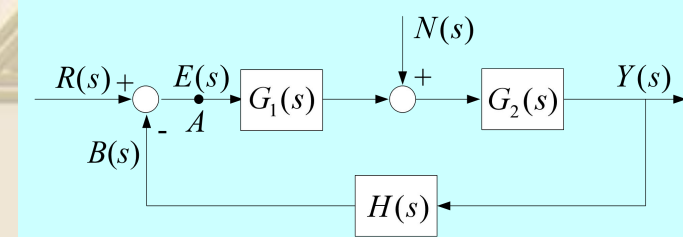
[给定和干扰作用下稳态误差的计算]



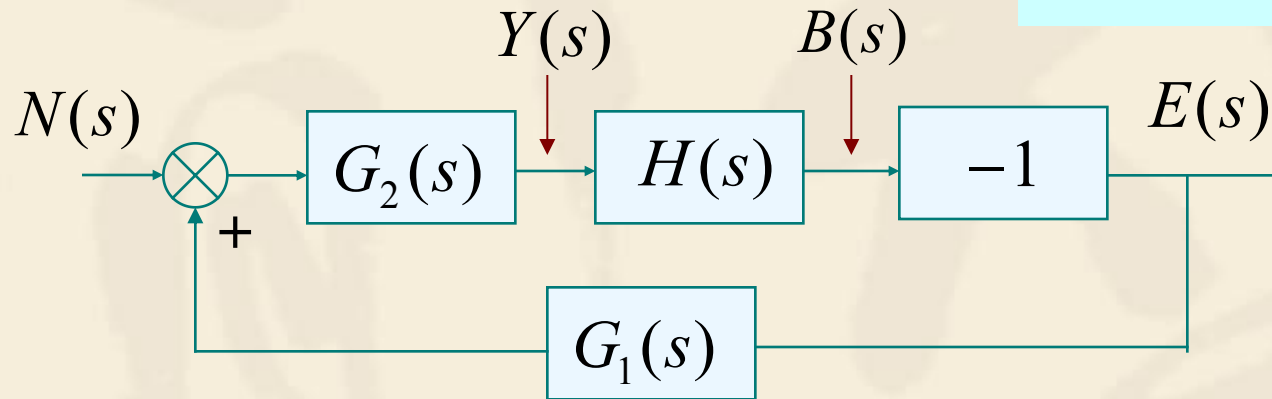
■ 给定作用 $[R(s)]$ 下的误差传递函数



$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



■ 扰动作用 $[N(s)]$ 下的误差传递函数



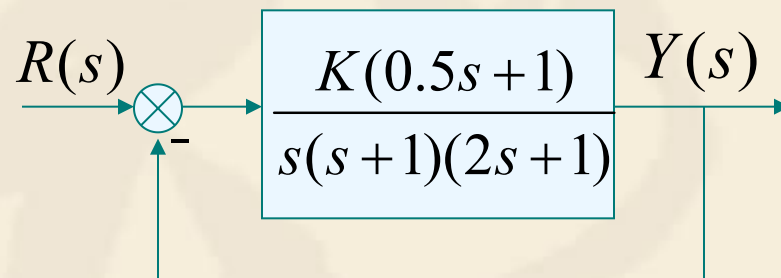
$$\Phi_{NE}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

■ 给定和扰动同时作用下的误差表达式

$$\begin{aligned} E(s) &= \Phi_E(s)R(s) + \Phi_{NE}(s)N(s) \\ &= \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} + \frac{-G_2(s)H(s)N(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \end{aligned}$$

[例3.6.1] 系统方块图如图所示，

当输入为单位斜坡函数时，求系统在输入信号作用下的稳态误差；调整 K 值能使稳态误差小于0.1吗？



解：只有稳定的系统计算稳态误差才有意义，所以先判稳：

系统特征方程为： $2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$

由劳斯判据知稳定的条件为： $0 < K < 6$

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)}$$

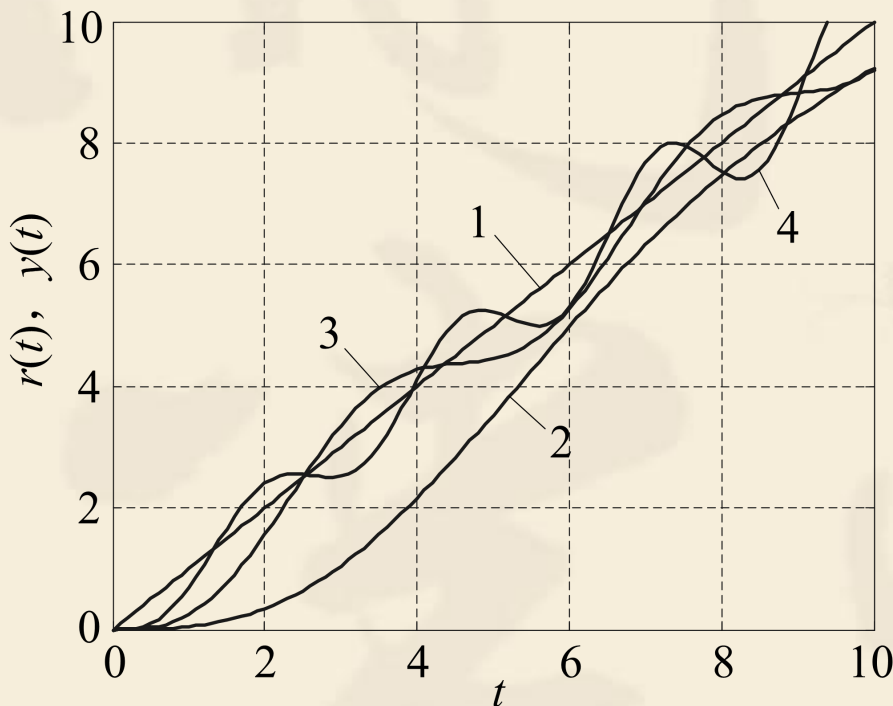
输入为： $R(s) = 1/s^2$

$$\text{误差为： } E(s) = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

稳态误差为：

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

由稳定的条件知($K < 6$): $e_{ss} > 1/6$ 。不能满足 $e_{ss} < 0.1$ 的要求。

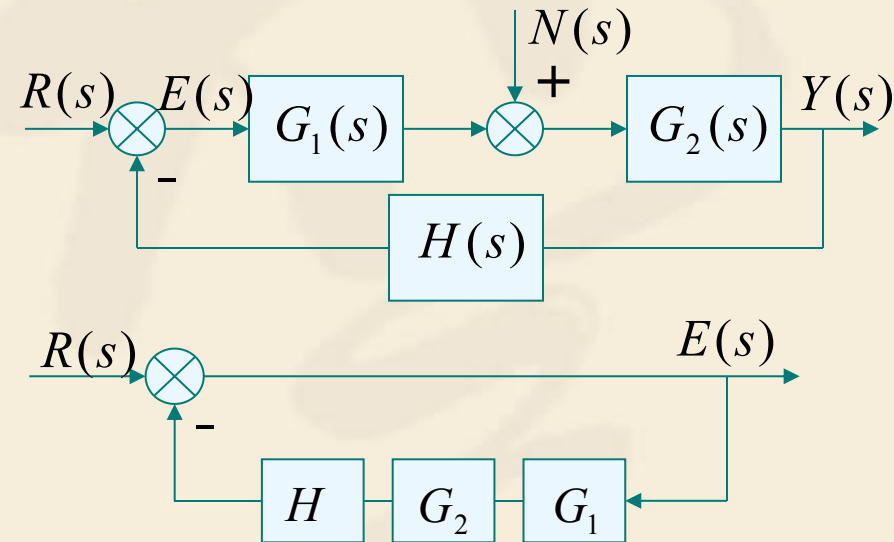


$K=1$ 时，系统稳定，系统存在有限稳态误差。 $K=6$ 时，系统处于临界稳定状态，输出响应曲线围绕作等幅振荡。当 $K>6$ 时，系统不稳定，输出响应曲线发散。

四、由参考输入信号引起的稳态误差分析与静态误差系数

不考虑扰动的影响。可以写出随动系统的误差 $E(s)$ 为：

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1 G_2 H} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)}$$

式中， $G_k(s) = G_1(s)G_2(s)H(s)$ 称开环传递函数。

显然， e_{ssr} 与输入和开环传递函数有关。

假设开环传递函数 $G_k(s)$ 的形式如下：

$$G_k(s) = \frac{k}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} = \frac{k}{s^\nu} \cdot G_0(s)$$

式中： k ---开环放大系数， ν ---积分环节的个数；

$G_0(s)$ ---开环传递函数去掉积分和比例环节剩余部分。

$$G_0(0)=1, \quad m_1+2m_2=m, \quad \nu+n_1+2n_2=n$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + G_k(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + \frac{k}{s^\nu} G_0(s)}$$

给定作用下的稳态误差与输入信号有关；与时间常数形式的开环增益 k 有关；与积分环节的个数 ν 有关。

系统的无差度阶数 v （开环传递函数的型）

称开环传递函数中积分的个数 v 为系统的无差度阶数，并将系统按无差度阶数 v 进行分类。

当 $v=0$ ，无积分环节，称为0型系统

当 $v=1$ ，有一个积分环节，称为 I 型系统

当 $v=2$ ，有二个积分环节，称为 II 型系统

当 $v \geq 3$ 时，使系统稳定是相当困难的。因此除特殊系统外，III型及III型以上的系统较少使用。

之所以按照积分环节个数 v 对系统进行分类，是由于 v 反映了系统跟踪参考输入的能力，另外，可以根据已知的输入信号形式，迅速判断系统是否存在稳态误差及稳态误差的大小。

□ 当输入为 $R(s)=1/s$ 时（单位阶跃信号）

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^\nu} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

式中： $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)$ 称为静态位置误差系数；

$$\text{当 } \nu = 0 \text{ 时, } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} kG_0(s) = k, \therefore e_{ssr} = \frac{1}{1 + k}$$

$$\text{当 } \nu \geq 1 \text{ 时, } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^\nu} G_0(s) = \infty, \therefore e_{ssr} = 0$$

K_p 的大小反映了系统在阶跃输入下的稳态精度。 K_p 越大， e_{ssr} 越小。所以说 K_p 反映了系统跟踪阶跃输入的能力。

稳态误差为零的系统称为无差系统，为有限值的称为有差系统。在单位阶跃作用下 $\nu=0$ 的系统为有差系统， $\nu \geq 1$ 的系统为无差系统。

□ 当输入为 $R(s)=1/s^2$ 时（单位斜坡函数/速度阶跃函数）

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^{\nu-1}} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{K_v}$$

式中： $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)$ 称为静态速度误差系数；

当 $\nu = 0$ 时， $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} skG_0(s) = 0, \therefore e_{ssr} = \infty$

当 $\nu = 1$ 时， $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} kG_0(s) = k, \therefore e_{ssr} = \frac{1}{k}$

当 $\nu \geq 2$ 时， $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s} G_0(s) = \infty, \therefore e_{ssr} = 0$

K_v 的大小反映了系统在斜坡输入下的稳态精度。 K_v 越大， e_{ssr} 越小。所以说 K_v 反映了系统跟踪斜坡输入的能力。根据 K_v 计算的稳态误差是系统在跟踪速度阶跃输入时位置上的误差。（虽然称为速度误差系数，只表示输入信号的特点）

□ 当输入为 $R(s)=1/s^3$ 时（单位抛物线函数/加速度阶跃函数）

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^{\nu-2}} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{K_a}$$

式中： $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s)$ 称为静态加速度误差系数；

当 $\nu = 0, 1$ 时， $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^{(1,2)} k G_0(s) = 0, \therefore e_{ssr} = \infty$

当 $\nu = 2$ 时， $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} k G_0(s) = k, \therefore e_{ssr} = \frac{1}{k}$

当 $\nu \geq 3$ 时， $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s} G_0(s) = \infty, \therefore e_{ssr} = 0$

K_a 反映了系统在抛物线输入下的稳态精度。 K_a 越大， e_{ssr} 越小。
所以说 K_a 反映了系统跟踪抛物线输入的能力。

根据 K_a 计算的稳态误差是系统在跟踪加速度阶跃输入时位置上的误差。

□ 当系统的输入信号由位置、速度和加速度信号组成时，即

$$r(t) = A + Bt + \frac{Ct^2}{2}$$

有：

$$e_{ssr} = \frac{A}{1 + K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$$

减小或消除由参考输入信号引起的稳态误差的有效方法是：提高系统的开环放大系数或提高系统的型数。但是这两种方法都影响甚至破坏系统的稳定性，因而取值受到系统稳定性的影响。

典型输入作用下的稳态误差

系统 类型 别	静态误差系数			阶跃输入 $r(t) = A \cdot 1(t)$	斜坡输入 $r(t) = Bt$	抛物线输入 $r(t) = \frac{1}{2}Ct^2$
	K_p	K_v	K_a	位置误差 $e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$	速度误差 $e_{ss} = \frac{B}{K_v}$	加速度误差 $e_{ss} = \frac{C}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{A}{1 + K}$	∞	∞
I	∞	K	0	0	$\frac{B}{K}$	∞
II	∞	∞	K	0	0	$\frac{C}{K}$

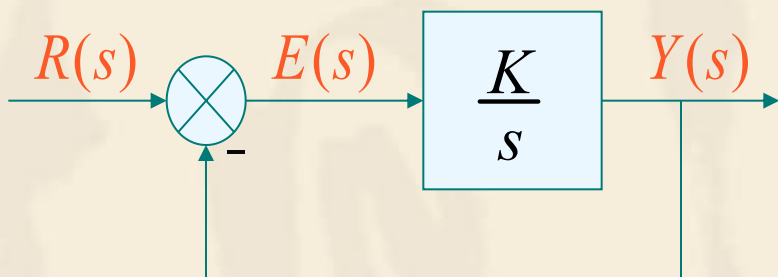
上表中， K 为开环放大系数（开环传递函数写成时间常数形式时的开环增益）

小结

- ✚ 稳态误差与输入信号有关。对同一系统加入不同的输入，稳态误差不同。
- ✚ 稳态误差与开环增益 k 有关；对有差系统， $k\uparrow$ ，稳态误差 \downarrow ，但同时系统的稳定性和瞬态特性变差。
- ✚ 稳态误差与积分环节的个数 v 有关。积分环节的个数 \uparrow ，稳态误差 \downarrow ，但同时系统的稳定性和瞬态特性变差。

可见对稳态误差的要求往往与系统的稳定性和瞬态特性的要求是矛盾的。在进行系统设计时，应该折衷选择系统的参数和结构，使系统的瞬态特性和稳态性能都能满足要求。

典型一阶系统的稳态误差



开环传递函数为：

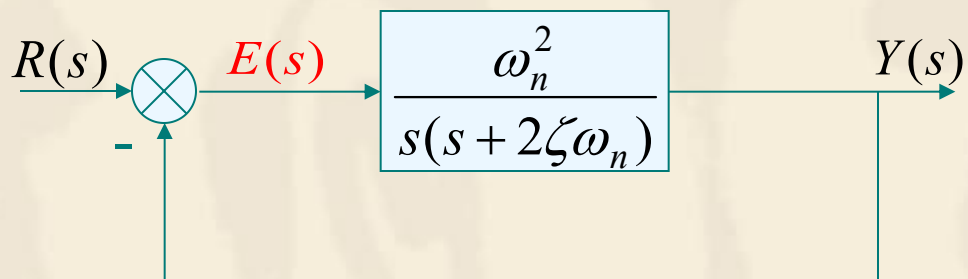
$$G_k(s) = \frac{K}{s}$$

$$\nu = 1, K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \text{ 阶跃输入时, } e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_k(s) = K, \text{ 斜坡输入时, } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \text{ 抛物线输入时, } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

典型二阶系统的稳态误差：



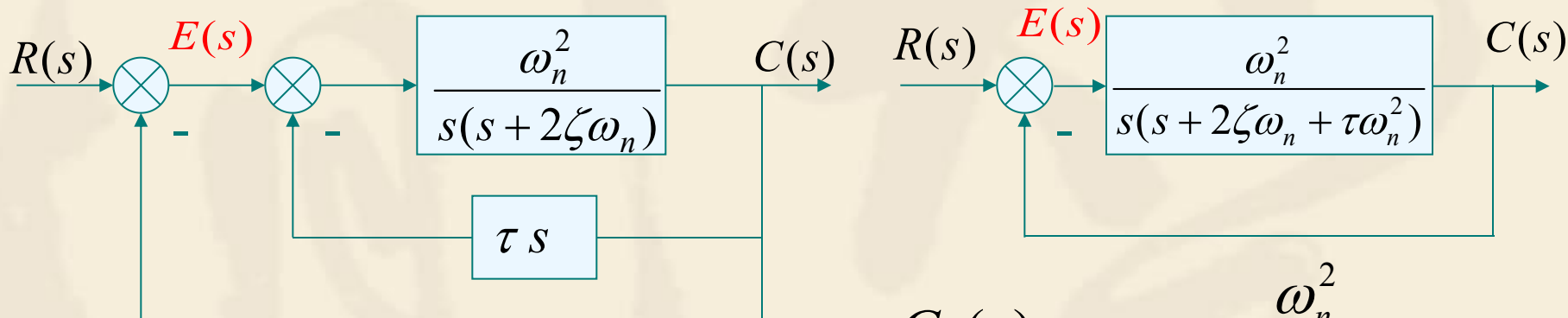
$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$\nu = 1, \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \quad \text{阶跃输入时, } e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \frac{\omega_n}{2\zeta}, \quad \text{斜坡输入时, } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \quad \text{抛物线输入时, } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

二阶系统引入速度反馈控制时的稳态误差：



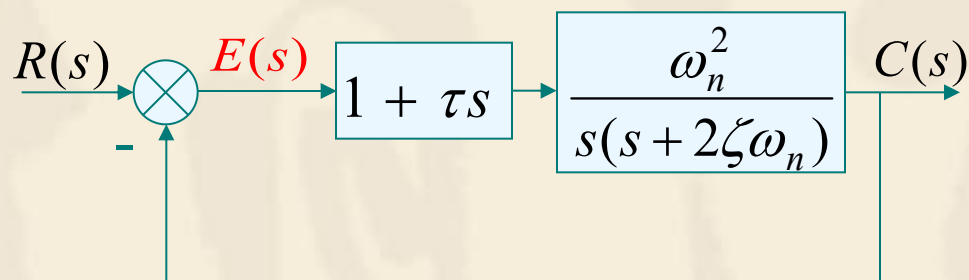
$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n + \tau\omega_n^2)}$$

$$\nu = 1, \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \quad \text{阶跃输入时, } e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_k(s) = \frac{\omega_n^2}{2\zeta\omega_n + \tau\omega_n^2}, \quad \text{斜坡输入时, } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \tau + \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \quad \text{抛物线输入时, } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

二阶系统引入比例微分控制时的稳态误差：



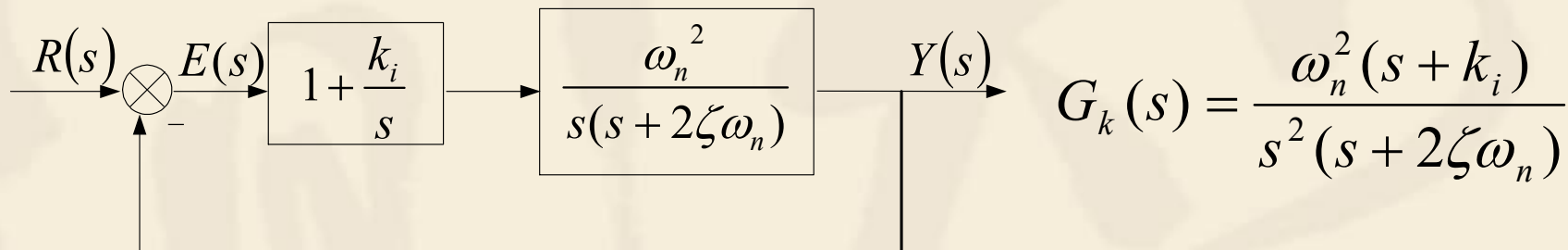
$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2(1 + \tau s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

$$\nu = 1, \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \quad \text{阶跃输入时, } e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_k(s) = \frac{\omega_n}{2\zeta}, \quad \text{斜坡输入时, } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = 0, \quad \text{抛物线输入时, } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

二阶系统引入比例积分控制时的稳态误差：



$$\nu = 2, \quad K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty, \quad \text{阶跃输入时, } e_{ssr1} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_k(s) = \infty, \quad \text{斜坡输入时, } e_{ssr2} = \frac{1}{K_v} = 0$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = \frac{\omega_n k_i}{2\zeta}, \quad \text{抛物线输入时, } e_{ssr3} = \frac{1}{K_a} = \frac{2\zeta}{\omega_n k_i}$$

原二阶系统

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

速度反馈

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n} + \tau$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

比例微分

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

比例积分

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_a} = \frac{2\zeta}{\omega_n k_i}$$

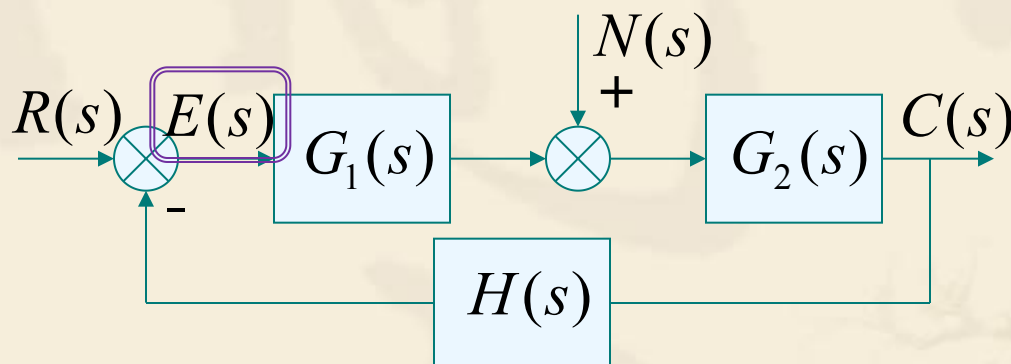
[稳态误差比较]

- 引入速度反馈环节后，稳态误差比原二阶系统**要大(或不变)**。
- 引入比例微分环节后**不改变**原二阶系统的稳态误差。
- 引入比例积分环节后将**减小**原二阶系统的稳态误差。
- 一般来说，这个结论也适用于高阶系统。

五、扰动输入作用下系统的误差分析

通常，给定输入作用产生的误差称为系统的给定误差，扰动作用产生的误差为扰动误差。

$R(s) = 0, N(s) \neq 0$ 时产生的 $-C(s)H(s)$ 称为扰动误差。



[可见] e_{ssn} 不仅与 $G_k(s)$, $N(s)$ 有关，还与 $G_2(s)$ 和 $H(s)$ 有关（扰动点到偏差之间通道的传递函数）。

$$E(s) = -C(s)H(s) = -\frac{G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} N(s)$$

$$\therefore e_{ssn} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2 H}{1 + G_1 G_2 H} N(s)$$

[例子]: 考虑下面两个系统。

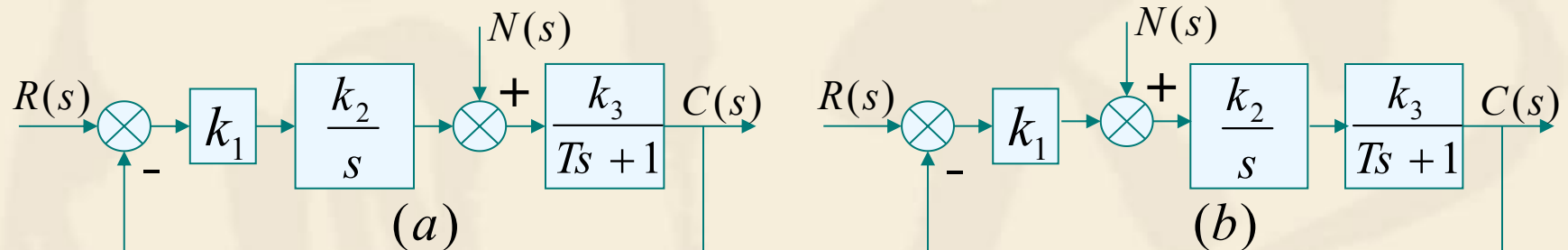
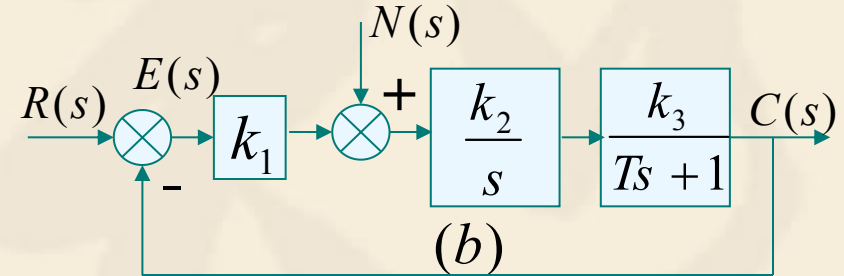
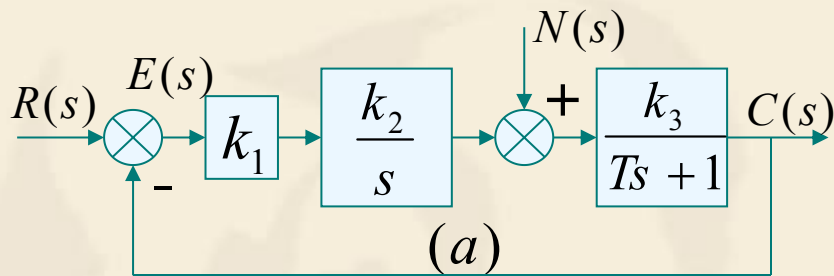


图 a 和图 b 的开环传递函数是一样的。 $G_k(s) = \frac{k_1 k_2 k_3}{s(Ts + 1)}$

对于给定输入，其稳态误差是一样的（假设输入为阶跃信号）。

$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)} = 0$$

但对于扰动作用，由于扰动点不同，扰动前向通道不同，其扰动误差是不一样的。



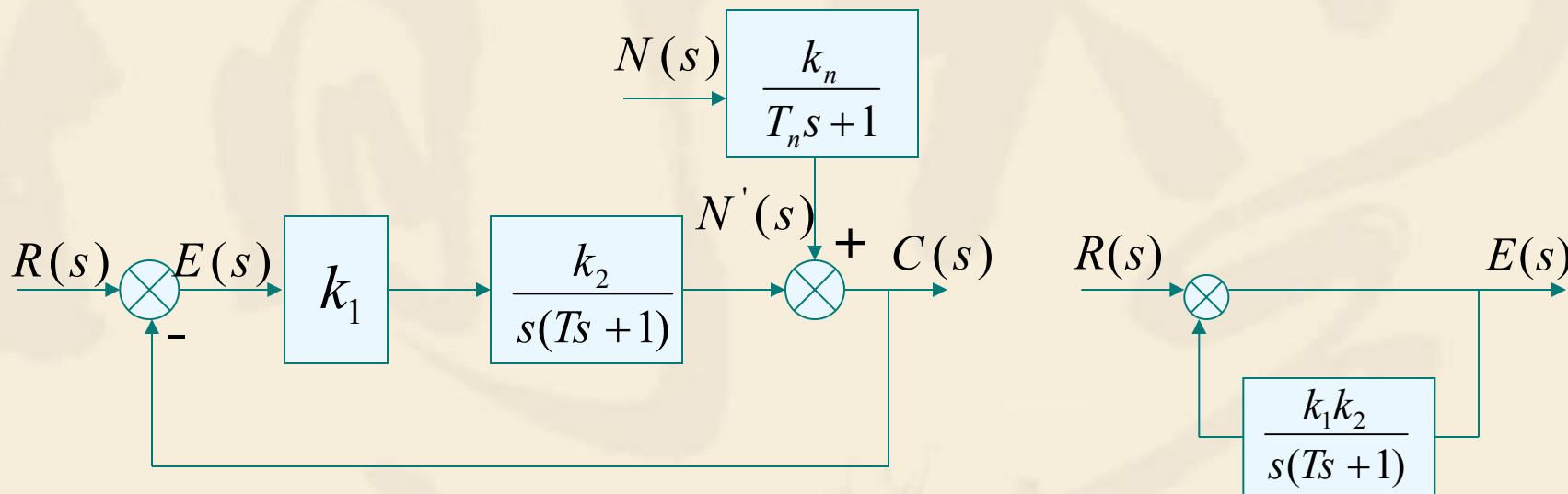
设 $N(s) = 1/s$, $R(s) = 0$, 由图(a)得:
$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_3(s)}{1 + G_k(s)} N(s) = 0$$

由图(b)得:
$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + G_k(s)} N(s) = -\frac{1}{k_1}$$

若在偏差点和扰动作用点之间增加一个积分环节, 可减小或消除由扰动引起的稳态误差。

对于给定输入和扰动作用同时存在的系统, 系统的总稳态误差等于给定误差和扰动误差的迭加 (误差点定义在同一点)。

[例3.6.5]速度控制系统的方块图如下所示。给定输入和扰动作用均为单位斜坡函数。求系统的稳态误差。



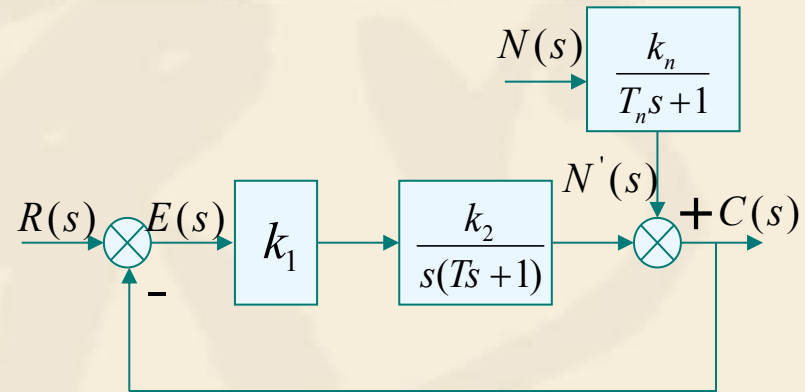
[解]:1、先令 $n(t) = 0$, $r(t) = t$, 即 $R(s) = 1/s^2$,

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1k_2}, \quad E(s) = \Phi_E(s) \cdot R(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1k_2} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ts + 1}{Ts^2 + s + k_1k_2} = \frac{1}{k_1k_2}$$

2、再令 $R(s)=0$, $N(s)=1/s^2$

$$\frac{C(s)}{N'(s)} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 k_2}{s(Ts + 1)}} = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2}$$



$$C(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} N'(s) = \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} \cdot \frac{k_n}{T_n s + 1} \cdot N(s)$$

$$e_{ssn} = -\lim_{s \rightarrow 0} s C(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Ts^2 + s}{Ts^2 + s + k_1 k_2} \cdot \frac{k_n}{T_n s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = -\frac{k_n}{k_1 k_2}$$

3、总稳态误差为： $e_{ss} = \frac{1}{k_1 k_2} - \frac{k_n}{k_1 k_2} = \frac{1 - k_n}{k_1 k_2}$

六、减小或消除稳态误差的措施：

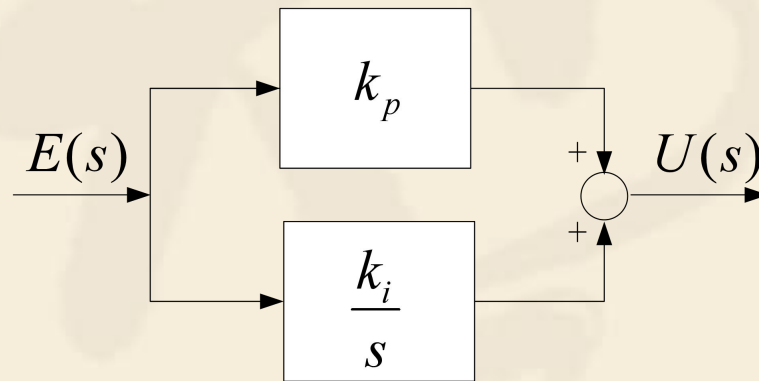
- 为了减少给定误差，可以在前向通道中增加积分环节的个数（即增加系统的型别）或增大系统的开环放大系数。
- 为了减小扰动误差，可以在误差点到扰动作用点之间增加积分环节个数或放大系数。
- 这两种方法都将影响系统的稳定性，降低系统的瞬态性能。
- 开环放大系数不能任意增大，积分环节也不能太多（一般少于2个），否则将会影响系统的稳定性。

比例积分 (PI) 控制:

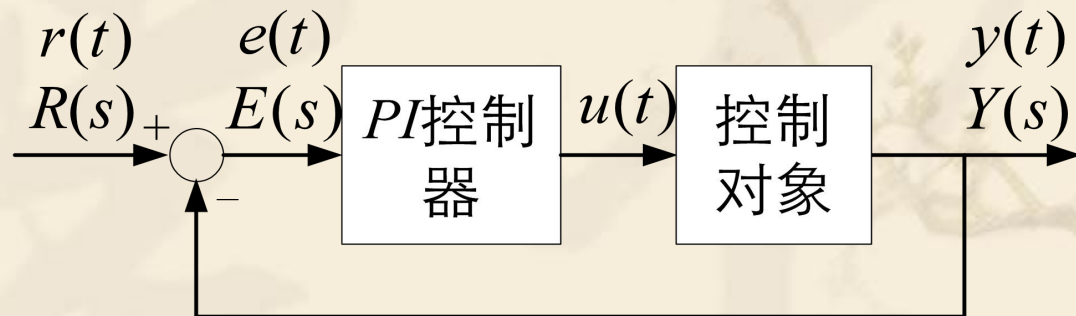
比例积分控制器的时域表达式为

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt$$

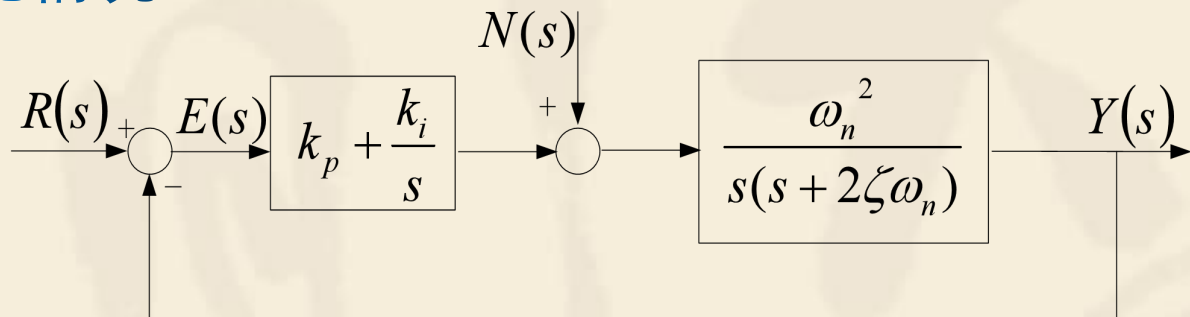
传递函数为
$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s}$$



工程上最常用的方法是将比例积分控制器串联在系统的前向通道上。积分系数越大，积分作用越强。积分控制作用可以消除系统的稳态误差；但积分作用太大，会使系统的稳定性下降。



以典型二阶系统为例，讨论系统引入比例积分控制后稳态误差的变化情况



先讨论给定误差。令 $N(s)=0$ ，为突出讨论积分的作用，可假设比例系数 $K_p=1$ 。系统的开环传递函数为

$$G_k(s) = \frac{\omega_n^2 (s + k_i)}{s^2 (s + 2\zeta\omega_n)}$$

该系统为 II 型系统，系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 (s + k_i)}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + \omega_n^2 k_i}$$

由劳斯判据知，当 $0 < k_i < 2\zeta\omega_n$ 时，该系统是稳定的。其静态误差系数分别为

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s) = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_k(s) = \infty$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s) = \frac{\omega_n k_i}{2\zeta}$$

其给定误差分别为：
$$e_{ssr} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_v} = 0$$

$$e_{ssr} = \frac{1}{K_a} = \frac{2\zeta}{\omega_n k_i}$$

[可知]引入比例积分控制后将减小或消除系统给定稳态误差。

再讨论扰动误差。令 $R(s)=0$ ，同样假设比例系数 $K_p=1$ 。系统的扰动误差传递函数为：

$$\Phi_{NE}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{\omega_n^2 s}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + \omega_n^2 k_i}$$

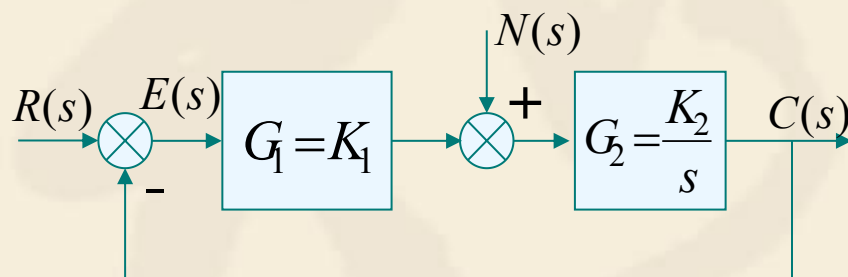
误差为：

$$E_N(s) = -\frac{\omega_n^2 s}{s^3 + 2\zeta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s + \omega_n^2 k_i} N(s)$$

当扰动信号分别为单位阶跃、单位斜坡和单位加速度信号时，由上式可求得系统的扰动稳态误差分别为0， $-1/k_i$ ， ∞ 。而原系统在相同扰动作用下的稳态误差分别为-1， ∞ ， ∞ 。

- 引入比例积分控制后可减小系统的扰动稳态误差。
- 控制系统引入比例积分控制后，只要比例系数和积分系数选择**恰当**，就能很好地减小或者消除系统的给定和扰动稳态误差。

[例3.6.6] 系统结构图如图所示。当 $r(t) = n(t) = 1(t)$ 时，求系统的稳态误差 e_{ss} ；若要求稳态误差为零，如何改变系统结构。



解：该系统对给定输入而言属于 I 型系统。所以当给定输入为单位阶跃函数时的稳态误差 $e_{ssr} = 0$

但该系统对于扰动输入为单位阶跃函数时的稳态误差 e_{ssn} 并不等于零。

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_{NE} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2}{s + K_1 K_2} = -\frac{1}{K_1}$$

系统总稳态误差为：

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = -\frac{1}{K_1}$$

若想使稳态误差为零，则可在 G_1 中加入积分环节，可令

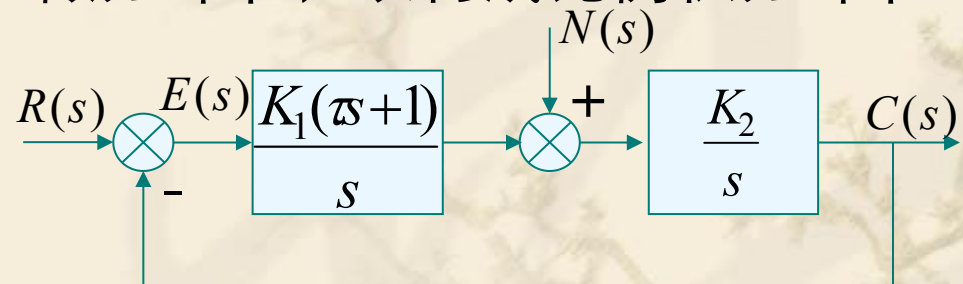
$$G_1 = \frac{K_1}{s}$$

此时 $e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-K_2/s}{1 + K_1 K_2 / s^2} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-K_2 s}{s^2 + K_1 K_2} = 0$ 可行吗?

不行。系统的稳定性遭到破坏，成为结构不稳定系统，直接加一个积分环节是**不行**的。若要使系统稳定，可再在加入积分的基础上，再引入比例+微分环节，以构成比例积分环节：

$$G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$$

$$\Phi = \frac{K_1 K_2 (\tau s + 1)}{s^2 + K_1 K_2 \tau s + K_1 K_2} = 0$$



当 $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $\tau > 0$ 时系统稳定

由此可见当用 $G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$ 时，才能在保证稳定的前提下使系统在给定作用和扰动作用下的总稳态误差为零。

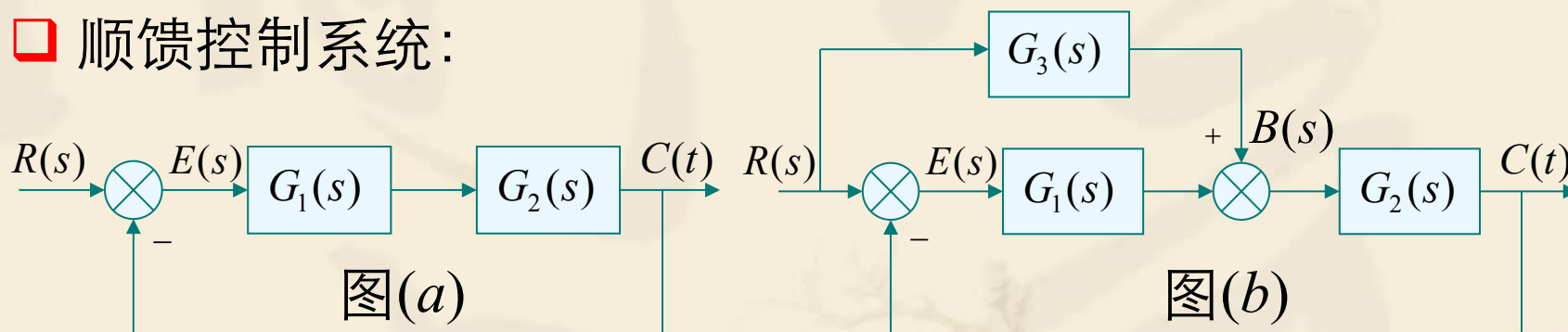
$$G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s} = K_1\left(\tau + \frac{1}{s}\right) = K_1\tau + \frac{K_1}{s}$$

这个环节就是比例+积分环节或比例+积分控制器(PI控制器)。

复合控制系统的误差分析

[复合控制系统] 在控制系统中引入与给定作用和扰动作用有关的附加控制可构成复合控制，可进一步减小给定误差和扰动误差。

□ 顺馈控制系统：

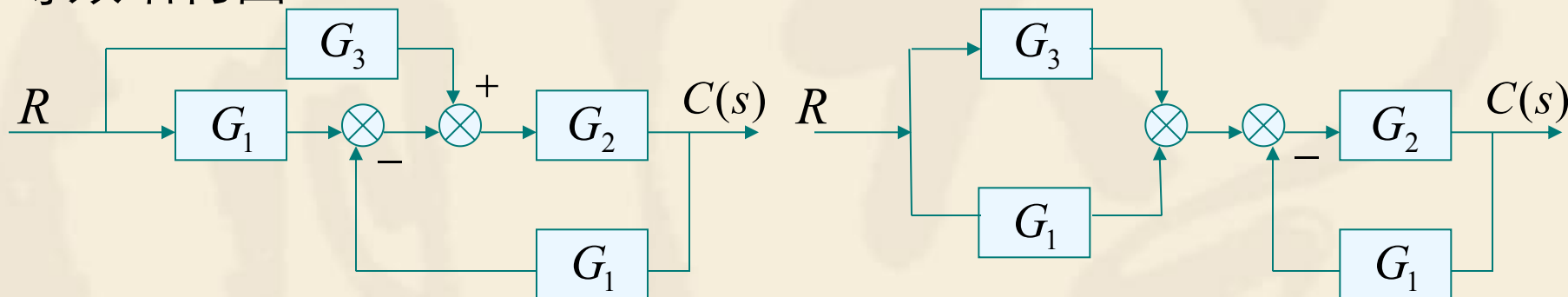


在图(a)的基础上加上环节 $G_3(s)$ ，就构成了顺馈控制系统。

图(a)的误差：
$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot R(s)$$

再来计算图(b)的误差函数 $E'(s)$ 。

等效结构图：



$$\therefore \Phi(s) = (G_1 + G_3) \cdot \frac{G_2}{1 + G_1 G_2} = \frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{1 + G_1 G_2}$$

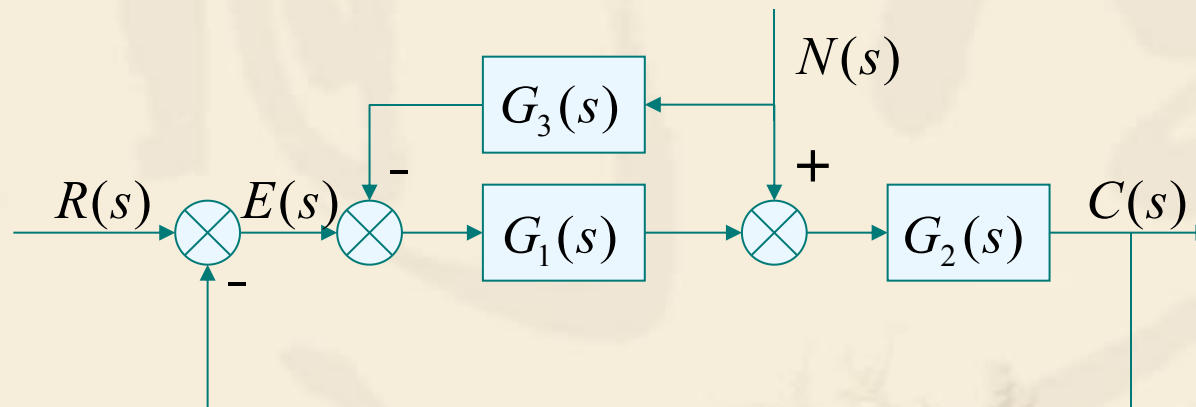
$$\text{设 } \Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)}, \quad E'(s) = R(s) - C(s) = R(s)(1 - \Phi(s))$$

$$\therefore E'(s) = \left(1 - \frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{1 + G_1 G_2}\right) \cdot R(s) = \frac{1 - G_2 G_3}{1 + G_1 G_2} \cdot R(s)$$

显然： $E'(s) < E(s)$

若满足 $G_3 = 1/G_2$ ，则 $E'(s) = 0$ ，即无给定稳态误差，输出完全复现输入。该式称为给定作用实现完全不变性的条件。

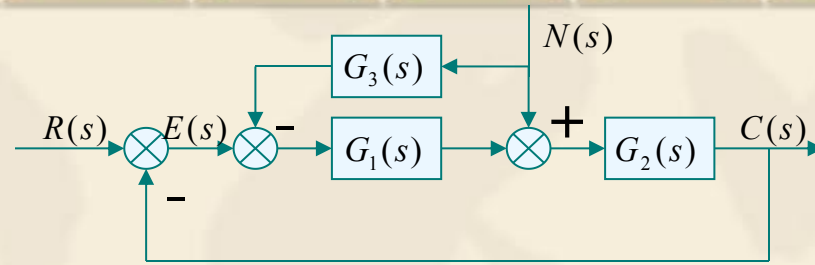
□ 前馈控制系统（按扰动作用的完全不变性条件设计）



令 $R(s) = 0$ ，由于是单位反馈系统，所以误差 $E(s) = -C(s)$ 。

未加前馈时，

$$\Phi_N(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2}, \therefore E(s) = -C(s) = -\frac{G_2}{1 + G_1 G_2} \cdot N(s)$$



加入前馈后，有：

$$C'(s) = N(s)G_2(s) - N(s)G_3(s)G_1(s)G_2(s) - C'(s)G_1(s)G_2(s)$$

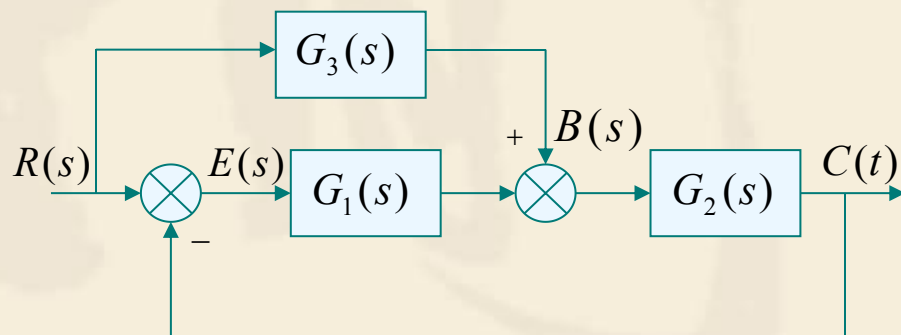
$$\text{求得： } E'(s) = -C'(s) = -\frac{G_2(s) - G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} \cdot N(s)$$

显然， $E'(s) < E(s)$

若 $G_3(s) = 1/G_1(s)$ ，则 $E'(s) = 0$ ，这个条件就是对扰动作用实现完全补偿的条件。

实现前馈控制的条件是扰动信号可测量。另外前馈控制的不足之处是一条前馈通道只能补偿一个扰动信号对系统的影响。

[例3.6.7]如下图所示的复合系统。 $G_1(s) = \frac{k_1}{T_1s + 1}$, $G_2(s) = \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}$
 顺馈补偿环节 $G_3(s) = \tau_d s$ 。试求位置误差和速度误差。并讨论
 位置误差、速度误差与 τ_d 的关系。



[解]: 闭环传递函数为:

$$\Phi(s) = \frac{(G_1 + G_3)G_2}{1 + G_1G_2}$$

$$\text{误差为: } E(s) = \frac{1 - G_2G_3}{1 + G_1G_2} R(s)$$

□ 位置误差: $r(t) = A \cdot 1(t)$, $R(s) = A/s$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{k_1}{T_1s + 1} \cdot \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}} \cdot \frac{A}{s} = 0$$

无顺馈时:

$$\text{有顺馈时: } e_{ssr}' = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1 - \frac{k_2}{s(T_2s + 1)} \tau_d s}{1 + \frac{k_1}{T_1s + 1} \cdot \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}} \cdot \frac{A}{s} = 0$$

□ 速度误差: $r(t) = Bt$, $R(s) = B/s^2$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1 - \frac{k_2}{s(T_2s + 1)} \tau_d s}{1 + \frac{k_1}{T_1s + 1} \cdot \frac{k_2}{s(T_2s + 1)}} \cdot \frac{B}{s^2} = \frac{(1 - k_2 \tau_d)B}{k_1 k_2}$$

[分析]

- 当 $\tau_d = 0$ 时, 没有顺馈补偿, 速度误差等于 $e_{ssr} = B/k_1 k_2$ 。
- 当 $0 < \tau_d < 1/k_2$ 时, 还有速度误差, 但比补偿前要小。
- 当 $\tau_d = 1/k_2$ 时, 速度误差为零, 实现了完全补偿。
- 当 $\tau_d > 1/k_2$ 时, 速度误差为负, 过度补偿。表示输出量大于输入值。

七、用动态误差系数表示系统的稳态误差

前面讨论了控制系统的静态误差系数（静态位置、速度和加速度误差系数）以及使用静态系数如何计算给定稳态误差，它们分别是针对阶跃、斜坡和抛物线输入信号而言的。用静态误差系数求出的稳态误差是一个数值，或为有限值，或为无穷大，它不能表示稳态误差随时间变化的规律。

下面介绍的动态误差系数法，利用动态误差系数法，可以研究输入信号为任意时间函数时系统的稳态误差随时间变化的规律

其误差传递函数为:

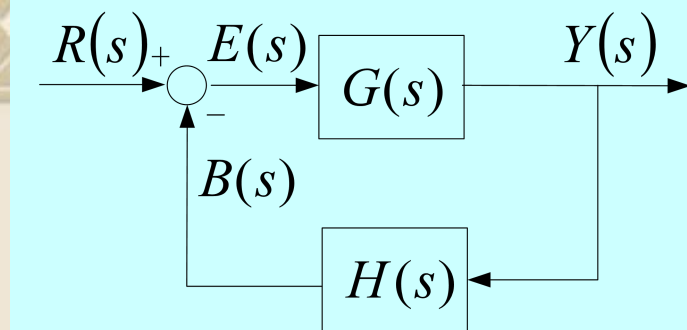
$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

考虑到 $t \rightarrow \infty$ 时的情况，也就是 $s \rightarrow 0$ 的情况。将误差传递函数在 $s=0$ 的邻域内展开成泰勒级数

$$\Phi_E(s) = \Phi_E(0) + \dot{\Phi}_E(0)s + \frac{1}{2!}\ddot{\Phi}_E(0)s^2 + \dots$$

误差信号可表示为

$$E(s) = \Phi_E(0)R(s) + \dot{\Phi}_E(0)sR(s) + \frac{1}{2!}\ddot{\Phi}_E(0)s^2R(s) \\ + \dots + \frac{1}{i!}\Phi_E^{(i)}(0)s^iR(s) + \dots$$



$$E(s) = \Phi_E(0)R(s) + \dot{\Phi}_E(0)sR(s) + \frac{1}{2!}\ddot{\Phi}_E(0)s^2R(s) + \cdots + \frac{1}{i!}\Phi_E^{(i)}(0)s^iR(s) + \cdots$$

稳态误差的时域表达式

$$e_{ss}(t) = \Phi_E(0)r(t) + \dot{\Phi}_E(0)\dot{r}(t) + \frac{1}{2!}\ddot{\Phi}_E(0)\ddot{r}(t) + \cdots + \frac{1}{i!}\Phi_E^{(i)}(0)r^{(i)}(t) + \cdots$$

若令 $C_i = \frac{1}{i!}\Phi_E^{(i)}(0)$, $i = 0, 1, 2, \dots$

稳态误差的时域表达式可以改写为： $e_{ss}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^{(i)}(t)$

$C_i (i=0, 1, 2, \dots)$ 称为动态误差系数。可见，稳态误差函数表达式既与动态误差系数有关，又与输入信号及其各阶导数有关。习惯上称 C_0 为动态位置误差系数， C_1 为动态速度误差系数， C_2 为动态加速度误差系数。

所谓“动态”两字的含义是指这种方法可以完整描述系统稳态误差 $e_{ss}(t)$ 随时间变化的规律，而不是指误差信号中的瞬态分量 $e_{ts}(t)$ 随时间变化的情况，即不应包含的误差信号中随时间趋于零的分量。此外上面给出的误差级数仅在 $t \rightarrow \infty$ 时成立，因此如果输入信号 $r(t)$ 中包含有随时间趋于零的分量，则这些分量不应包含在稳态误差级数表达式中的输入函数及其各阶导数之内。

动态误差系数法特别适用于输入信号和扰动信号是时间 t 的有限项幂级数的情况。此时稳态误差函数的幂级数也只需取有限几项就足够了。

动态误差系数的另一种求法

将误差传递函数写成 s 有理分式形式（升幂形式），利用长除法得到各动态误差系数。

$$G_k(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{s^\nu} \cdot \frac{1 + b_1s + b_2s^2 + \cdots + b_ms^m}{1 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_{n-\nu}s^{n-\nu}}$$

误差传递函数可写为

$$\Phi_E(s) = \frac{s^\nu (a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + 1)}{s^\nu (a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + 1) + K(b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + 1)}$$

分母多项式除分子多项式，可得到关于 s 的升幂级数：

$$\Phi_E(s) = C_0 + C_1s + C_2s^2 + C_3s^3 + \cdots$$

误差为： $E(s) = \Phi_E(s)R(s) = (C_0 + C_1s + C_2s^2 + C_3s^3 + \cdots)R(s)$

这是一个无穷级数，其收敛域是 $s = 0$ 的邻域。显然， $C_i (i=0,1,2,\dots)$ 就是动态误差系数。

$$\Phi_E(s) = \frac{s^v (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1)}{s^v (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1) + K (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1)}$$

0型系统（ $v=0$ ）的各动态误差系数：

$$\Phi_E(s) = \frac{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}{(1 + K) + (a_1 + b_1 K)s + (a_2 + b_2 K)s^2 + \dots}$$

分子分母长除： $C_0 = \frac{1}{1 + K}$

$$C_1 = \frac{K(a_1 - b_1)}{(1 + K)^2}$$

$$C_3 = \frac{(a_2 - b_2)K}{(1 + K)^2} + \frac{a_1(b_1 - a_1)K}{(1 + K)^3} + \frac{b_1(b_1 - a_1)K^2}{(1 + K)^3}$$

和静态位置误差系数 k_p 的关系：

$$C_0 = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$\Phi_E(s) = \frac{s^v (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1)}{s^v (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1) + K (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1)}$$

I 型系统 ($v=1$) 的各动态误差系数:

$$\Phi_E(s) = \frac{s + a_1 s^2 + a_2 s^3 + \dots + a_{n-1} s^n + a_n s^{n+1}}{K + (b_1 K + 1)s + (b_2 K + a_1)s^2 + \dots}$$

分子分母长除:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{K}$$

$$C_3 = \frac{a_1 - b_1}{K} - \frac{1}{K^2}$$

和静态位置误差系数 k_v 的关系:

$$C_1 = \frac{1}{K_v}$$

$$\Phi_E(s) = \frac{s^v (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1)}{s^v (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1) + K (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1)}$$

II 型系统 ($v=2$) 的各动态误差系数:

$$\Phi_E(s) = \frac{s^2 + a_1 s^3 + a_2 s^4 \dots + a_{n-1} s^{n+1} + a_n s^{n+2}}{K + b_1 K s + (b_2 K + 1) s^2 + \dots}$$

分子分母长除:

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{K}$$

和静态位置误差系数 k_a 的关系:

$$C_2 = \frac{1}{K_a}$$

小结

- ❑ 系统误差、稳态误差的定义
- ❑ 给定输入作用下系统的误差分析
 - 系统的型
 - 静态位置、速度、加速度误差系数
- ❑ 扰动作用下系统的误差分析—减小扰动误差的方法
- ❑ 给定和扰动作用同时存在系统的误差分析
 - 系统的总稳态误差等于给定误差和扰动误差的迭加（误差点定义在同一点）
- ❑ 复合控制系统的误差分析--顺馈控制和前馈控制
- ❑ 稳态误差与瞬态性能的关系

作业：3.15, 3.32

第三章总结

❖ 稳定性

与闭环极点位置有关，相当于与系统的结构和参数有关；与输入无关。

❖ 瞬态响应及瞬态性能指标

与闭环传递函数的极点和零点的位置有关，输入一般为阶跃函数。

❖ 稳态性能

与时间常数形式开环传递函数中的积分环节个数及增益有关；与输入作用的类型有关。