Mineur Finance 1

December 6, 2016

Contents

1 Cadre de valorisation des produite devive

1.1 Introduction

1.2 Hypothese

1.3 Propriete

1.4 Options americaines

Option américaine similaire aux options europeens mais l'exercise du droit pourra se faire à toute date t avant maturité T.

On note $CallAmer_t(T, K)$ et $PutAmer_t(T, K)$ les prix des calls et puts américains au t.

On a

$$CallAmer_t(T, K) >= Call_t(T, K) \tag{1}$$

$$PutAmer_t(T, K) >= Put_t(T, K) \tag{2}$$

Propriété: En l'absence de divident, on a:

$$CallAmer_t(T, K) = Call_t(T, K) \tag{3}$$

Preuve:

$$Call_t(T, K) >= (S_t - K)_+ \tag{4}$$

Il n'est pas optimal d'exercer avant la maturité. Donc $CallAmer_t(T, K) = Call_t(T, K)$

Remarque: Pour le Put, la propriété n'est pas vraie.

$$Put_t(T, K) <= KB(t, T) \tag{5}$$

Pour un certain scenario, le prix de put est inferieur au prix d'exercise. $Put_t(T, K) < (S_t - K)_+$.

Pour S_t tel que $KB_t(T) < K - S_t <=> S_t < (1 - B_t(T))K$ Donc, on a

$$Put_t(T, K) < K - S_t \tag{6}$$

2 Théorie de la valorisation dans le cas discrèt à une période

2.1 Introduction

Nous avons vu que les contrats à termes peuvent être valorisés par le principe de non arbitrage alors que ce principe ne donne que des bornes sur les prix des options. La valorisation de ces produits assez complexes nécessite l'introduction des modeles probabilistes pour décrire les scenarios possibles du marché.

Dans ce marche, si on trouve une strategie qui réplique le payoff de l'option, alors la portefeuille construite par cette strategie réplique l'option.

Par l'absence de opportunite d'arbitrage, la valeur de ce portefeuille est la même que celui de l'option. Cependant, ce prix est dépendant du modèle qui doit etre proche de la réalité.

2.2 Modèle à une période

On consirère qu'il y a $d + 1$ actifs financiers et 2 dates,: $t = 0, t = 1$. L'aléa du modèle est representé par K états dans $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$.

En $t = 1$, avec des probabilités $\{p_1, \ldots, p_K\}, (p_i > 0)$.

Le prix de l'actif i au t est noté $S_t^i, 0 \leq i \leq d$. S^0 represente l'actif saus risque ($S_0^0 = 1, S_1^0 = e^R \approx 1 + R$) Une strategie $\theta \in \mathbb{R}^{d+1}$ est le vecteur contenant le nombre d'unité de chaque actif dans ce portefeuille V entre $t = 0$ et $t = 1$.

La valeur de V en t

$$V_t = V_t^\theta = \sum_{i=0}^{d} \theta_i S_t^i \tag{7}$$

Le gain est defini par

$$G = V_1 - V_0 = \sum_{i=0}^{d} \theta_i (S_1^i - S_0^i) = \sum_{i=0}^{d} \theta_i \Delta S^i \tag{8}$$

On note $\tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}$, $\tilde{V}_t = \frac{V_t}{S_t^0}$ et $\tilde{G}_t = \frac{G}{S_t^0}$, alors

$$\begin{cases} \tilde{V}_t = \theta_0 + \sum_{i=0}^{d} \theta_i \tilde{S}_t^i \\ \tilde{G} = \tilde{V}_1 - \tilde{V}_0 = \sum_{i=1}^{d} \theta_i (\tilde{S}_1^i - \tilde{S}_0^i) = \sum_{i=1}^{d} \theta_i \Delta \tilde{S}^i \end{cases} \tag{9}$$

2.3 Résultats de non-arbitrage

2.3.1 Définition

Une opportunite d'arbitrage est une strategie θ tel que

1. $V_0^\theta = 0$
2. $P(V_1^\theta >= 0) = 1$ et $P(V_1^\theta > 0) > 0$

où

1. $P(G >= 0) = 1$
2. $P(G > 0) > 0$

Commencer avec une état avec valeur 0, et la probabilite de gagner de l'argent est superierue à 0.

2.3.2 Définition 2

Une mesure de probabilité Q est dite risque neutre si:

1. $Q \sim P$, c'est a dire, $Q(\omega_i) > 0, \forall 1 <= i <= K$
2. $E^Q[\tilde{S}_1^i] = \tilde{S}_0^i, \forall i$

2.3.3 Théorème

Le marché n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement s'il existe au moins une mesure de probabilité risque neutre.

Preuve:

(=>) Supposons qu'il existe une mesure de probabilité risque neutre. Supposons qu'il existe une opportunité d'arbitrage, donc

$$Q(G^\theta >= 0) = 1, Q(G^\theta > 0) > 0 \tag{10}$$

$$E^Q[\tilde{G}^\theta] = 0 \tag{11}$$

contradiction.

(<=) Supposons qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage

$$\mathcal{E} = \{(q_1, \ldots, q_K) | \sum_{i=1}^{K} q_i, q_i > 0\} \tag{12}$$

$$C = \{E^Q[\Delta\tilde{S}] | Q \in \mathcal{E}\}, \Delta\tilde{S} = (\Delta\tilde{S}^1, \ldots, \Delta\tilde{S}^d)^T \tag{13}$$

Il faut démontrer que $0 \in C$.

Supposons $0 \notin C$, puisque C est convexe, d'après le theoreme de separation des convexes, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^d, \alpha^t >= 0, \forall x \in C \tag{14}$$

$$\exists x_0 \in C, \alpha^t x_0 > 0 \tag{15}$$

$$x_0 = E^{Q_0}[\Delta\tilde{S}] \tag{16}$$

Soit α_0 arbitraire, on considère la strategie $\theta = (\alpha_0, \alpha)$ On a $\forall \theta \in \mathcal{E}, Q(\tilde{G}^\theta >= 0) = 1, Q_0(\tilde{G}^\theta > 0) > 0$ On a $\forall Q \in \mathcal{E}, E^Q[\tilde{G}^Q] >= 0, E^Q[\tilde{G}^Q] > 0$

S'il existe ω_i tel que $G^Q(\omega_i) < 0$, on va construire une mesure Q^t:

$$\begin{aligned} Q^\epsilon(\omega) =& 1 - \frac{K-1}{K}\epsilon, \omega = \omega_i \\ & \frac{\epsilon}{K} \omega \neq \omega_i \end{aligned} \tag{17}$$

on peut choisir ϵ suffisamment actif tel que $E^{Q_\epsilon}[\tilde{G}^\theta] < 0$. Donc $\forall i, G^\theta(\omega_i) >= 0 => Q^0(G^\theta >= 0) = 1$ mais puisque $E^{Q_0}[\tilde{G}^\theta] > 0$, alors $Q^0(\tilde{G}^t heta) > 0$

=> Il y a arbitrage. Contradition, donc $0 \in C => \exists$ une mesure de proba risque neutre.

Exemple:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \mathbb{P} = \{0.3, 0.3, 0.2, 0.2\} \tag{18}$$

$R = 0.25$, S^0: Actif sans risque vaux 1 en $t = 0$. S^1: une action qui vaut 1 en $t = 0$. S^2: un call sur S^1 de strike $K = 1$ qui vaut 0.3 en $t = 0$.

	S_0^i	w_1	w_2	w_3	w_4
$i = 0$	1	1.25	1.25	1.25	1.25
$i = 1$	1	0.5	1	1.5	2
$i = 2$	0.3	0	0	0.5	1

Un actif vaut toujours la même valeur peu importe l'état.

Exemple:

1. Avec la strategie $\theta = (0.7, -1, 1)$, calculer la gain G de V^t
2. Est-ce qu'il y a une opportunité d'arbitrage dans ce marché?

$$G^\theta(\omega_i) = V_1(\omega_i) - V_0, V_0 = 1 * 0.7 - 1 + 0.3 = 0 \tag{19}$$

$$G^\theta(\omega_1) = 0.375, G^\theta(\omega_{2,3,4}) = -0.125 \tag{20}$$

Cherchons $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ tel que $0 < q_i$ et

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 & = 1 \\ \frac{0.5}{1.25}q_1 + \frac{1}{1.25}q_2 + \frac{1}{1.25}q_3 + \frac{2}{1.25}q_4 & = 1 \\ \frac{0.5}{1.25}q_3 + \frac{1}{1.25}q_4 & = 0.3 \end{cases} \tag{21}$$

Et on a

$$\begin{cases} q_1 & = \frac{1}{4} \\ q_2 & = q_4 \\ q_3 & = \frac{3}{4} - 2q_4 \end{cases} \tag{22}$$

l'ensemble des mesures risque neutre est :

$$\{(\frac{1}{4}, \lambda, \frac{3}{4} - 2\lambda) | 0 < \lambda < \frac{3}{8}\} = empty => AOA \tag{23}$$

3 Marché complet et valorisation d'actif conditionnel

On suppose que le marché est sans arbitrage.

1. Def 1

   Un actif conditionnel est une variable aléatoire H dans (Ω, F, P).

2. Def 2

   Un actif conditionnel est réalisable s'il existe une stratégie θ tel que $H = V_1^\theta$

3. Remarque

   Par AOA, on a prix de l'actif conditionnel est $P(H) = V_0^\theta$.

Proposition: Le juste prix d'un actif conditionnel réalisable H est:

$$P(H) = E^Q[\tilde{H}] = E^Q[\frac{H}{S_1^\theta}] = E^Q[\frac{H}{1+R}] \tag{24}$$

où Q est une mesure de proba risque neutre.

preuve: θ est une stratégie tel que $V_1^\theta = H$

$$\begin{aligned} E^Q[\tilde{H}] &= E^Q[\tilde{V}_1^\theta] \\ &= E^Q[\tilde{V}_0^\theta + \sum_{i=1}^{d} \theta_i \Delta \tilde{S}^i] \\ &= V_0^\theta + \sum_{i=1}^{d} \theta_i E^Q[\Delta \tilde{S}^i] \\ &= V_0^\theta = P(H) \end{aligned} \tag{25}$$

3.0.4 Def 3

Un marché est complet si tout actif conditionnel est réalisable.

Remarque: A: matrice des payoff: $A_{(i,k)}(S_1^i(w_k))$. Un actif conditionnel est réalisable si $\exists \theta$ tel que $\theta^T A = H$. Et donc le marché est complet si $\theta^T A = H$ a une solution pour tout $H \in \mathbb{R}^K$.

Donc il faut que A a au moins K lignes linéairement indédendantes.[une condition nécessaire est donc $d + 1 >= K$]

Théorème: Un marché sans arbitrage est complet ssi il existe une seule mesure de probabilité risque neutre.

Preuve: Supposons que le marché est complet. Prenons l'actif conditionnel $\nVdash_{\{w_k\}}(1 <= k <= K)$. Donc pour toute mesure de proba risque neutre q on a:

$$P_k = P(\nVdash_{\{w_k\}}) = E^Q[\frac{\nVdash_{\{w_k\}}}{1+R}] = \frac{1}{1+R}Q(\{w_k\}) \tag{26}$$

=¿ Unicité de Q.

Supposons que la mesure risque neutre est unique. Démontrer que le marché est complet.

Si le marché n'est pas complet

$$\exists z \in \mathbb{R}^{d+1}, z \neq 0 \tag{27}$$

tel que $z^t A0$. Soit

$$Q_i|Q_2 = \frac{Q(w_k) + \epsilon z_k}{1 + \epsilon \sum z_k} \tag{28}$$

. Il suffit de prendre ϵ suffisamment petit, $0 < Q_2(w_k) < 1$.

$$\begin{aligned}
E^{Q_\epsilon} &= \frac{\sum_{k+1}^{K}(Q(w_k) + \epsilon z_k \tilde{S}^i(w_k))}{1+\epsilon \sum z_k} \\
&= \sum_{k=1}^{K} Q(w_k)\tilde{S}_1^i(w_k) \times \epsilon \sum_{k} \mathbb{1}^K z_k \tilde{S}_1^i(w_k) \\
&= E^Q[\tilde{S}_1^i] \\
&= \tilde{S}_0^i
\end{aligned} \tag{29}$$

Exercise 1. $\Omega = \{w_1, w_2\}$, on cherche le modele suivant:

$S_0^0 = 1- > 1 + \Omega(1 = 10\%)$

$S_0^1 0- > 12, w_1, P_1 - > 11, w_2, P_2$

Est-ce que le marché est sans abritrage? Si ce n'est pas le cas, mettre au cas une strategie d'arbitrage.

Cherchons les mesures proba risque neutre

	S_0^1	w_1	w_2
$i = 0$	1	1.1	1.1
$i = 1$	10	12	11

Cherchons P_1, P_2 tel que

$$P_1 > 0, P_2 > 0, E[\tilde{S_1}^0] = \tilde{S}_0^0, E[\tilde{S}_1^1] = \tilde{S}_0^1 \tag{30}$$

$$P_1 * \frac{1.1}{1.1} + P_2 \frac{1.1}{1.1} = \frac{1}{1} and P_1 \frac{12}{1.1} + P_2 \frac{11}{1.1} = \frac{10}{1} \tag{31}$$

=¿

$$P_1 = 0, P_2 = 1 \tag{32}$$

$P_1 > 0$ n'est pas vérifié, donc il existe opportunité d'arbitrage. On veut 10 de S^0 et on achète 1 de S^1, $V_0 = 10S_0^0 + S_0^1 = 0$

Donc

$$V_1 - > -10(1+R) + 12 = 1 \tag{33}$$

$$- > -10(1+R) + 11 = 0 \tag{34}$$

2. $\Omega = \{w_1, w_2\}$, on cherche le modele suivant:
$S_0^0 = 1 - > 1 + \Omega(1 = 10\%)$
$S_0^1 0 - > 12, w_1, P_1 \; - > 8, w_2, P_2$

1. Est-ce que le marche est sans arbitrage(complet)?

2. Calculer le prix d'un call de strike 10

3. Calculer de deux façons le prix d'un put de strike 10

Solution:$P_1 = \frac{3}{4}, P_2 = \frac{1}{4}$, donc il existe unique mesure probabilite risque neutre. Donc le marché est sans arbitrage(complet).

2) Puisque le marché est complet et sans arbitrage, alors:

$$Call_0(1,10) = E^Q[\frac{(S_1^1 - 10)_+}{1+R}] = \frac{\frac{3}{4} * 2 + \frac{1}{4} * 0}{1.1} = \frac{15}{11} \tag{35}$$

3)

$$c(1,10) - P(1,10) = S_0^1 - \frac{K}{1+R} = \frac{10}{11} \tag{36}$$

$$=> P(1,10) = \frac{5}{11} \tag{37}$$

$$P(1,10) = E^Q[\frac{(10 - S_1^1)_+}{1+R}] = 0 \times \frac{3}{4} + \frac{2}{1.1} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{11} \tag{38}$$

4 Le modèle binominale à une période

$T = 1, \Omega = \{w_u, w_d\}, F = P(\Omega)$,$P$ mesure de proba dans $(\Omega, F), (0 < P(w_u) < 1)$

$$S_0^0 = 1- > 1 + R \tag{39}$$

$$S_0^1 = s- > us, w_u, P_1(u >= d) \tag{40}$$

$$- > ds, w_d, P_2 \tag{41}$$

4.0.5 Proposition

1. Le modèle est viable (sans arbitrage), ssi

$$d < 1 + R < u \tag{42}$$

(condition de non-arbitrage)

2. Le prix d'un actif conditionnel H est:

$$P(H) = E^Q[\frac{H}{1+R}] \tag{43}$$

où

$$Q(w) = \begin{cases} \frac{1+R-d}{u-d} & siw = w_d \\ \frac{u-1-R}{u-d} & siw_u \end{cases} \tag{44}$$

En plus, ;a portefeuille de couverture est donnée par (θ_0, θ_1) où

$$\theta_1 = \frac{H(w_u) - H(w_d)}{us - ds} \tag{45}$$

et

$$\theta_0 = P(H) - \theta_1 s \tag{46}$$

Preuve

1. Cherchons des mesures de proba risque neutre $Q = \{q_u, q_d\}(q_u = Q(w_u), q_d = Q(w_d))$

$$\begin{cases} q_u + q_d & = 1 \\ \frac{q_u us + q_d ds}{1+R} & = s \end{cases} <=> \begin{cases} q_d & = 1 - q_u \\ q_u s(u-d) & = s(1+R) - ds \end{cases} \tag{47}$$

$<=>$

$$q_d = \frac{u-1-R}{u-d} q_u = \frac{1+R-d}{u-d} \tag{48}$$

Donc $\exists !$ mesure de proba risque neutre ssi $d < 1 + R < u$

2. Le marché est sous arbitrage et complet

$$=> P(H) = E^Q[\frac{H}{1+R}] \tag{49}$$

Cherchons (θ_0, θ_1) tel que $\theta_0 S_1^0 + \theta_1 S_1^1 = H$

$$\begin{cases} \theta_0(1+R) + \theta_1(us) & = H(w_u) \\ \theta_0(1+R) + \theta_1(ds) & = H(w_d) \end{cases} \tag{50}$$

$$=> \theta_1(us - ds) = H(w_u) - H(w_d) \tag{51}$$

$$=> \theta_1 = \frac{H(w_u) - H(w_d)}{us - ds} \tag{52}$$

$$\theta_0 \times 1 + \theta_1 s = P(H) \tag{53}$$

$$=> \theta_0 = P(H) - \theta_1 s \tag{54}$$

La strategie de couverture est noté (θ_0, θ_1) ou $(P(H), \theta_1)$ $=>$ le prix à definir pour l'acheter si le vendeur veut eliminer tout risque.

5 Théorèm de Valorisation dans le cas discrète multi-période

5.1 Modèle

On considère qu'il y a n périodes et $n+1$ dates $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n = T$. L'al'ea est représenté par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pour spécifier l'information disponible en t, on introduit la filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n\}$.

On suppose $\mathcal{F}_0 = \{, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \mathcal{F} = P(\Omega)$. LEs actifsrisqué sont modélisés par d processus stocastiques $(S_j^i)_{j=0,\ldots,n}^{i=1,\ldots,d}$ comme $\mathbb{F}$-adapté. L'actif sans risque est défini $(S_j^0)_{j=0,\ldots,n}$

$$S_0^0 = 1, S_j^0 = (0+R)S_{j-1}^0 \tag{55}$$

R_j est le taux d'intérêt pour la période $[t_{j-1}, t^j]$.

5.1.1 Def 1

Une stratégie d'investissement admissible est un processus stochastique $(\theta_j^i)_{j=0,\ldots,n}^{i=0,\ldots,d}$ où θ_j^i est la quantité investie dans l'actif i entre t_{j-1} et t_j qui doit être connu en t_{j-1}.(θ est prévisible).

Remarque: La valeur d'un portefeuille peut varier par deux possibilités

$->$ possibilité 1: variation des prix d'actifs $->$ possibilité 2: versement/retrait d'argent

On va introduire la possibilité 2 aux stratégies.

5.1.2 Def 2

Une stratégie θ est dite audofinancée si

$$\sum_{i=0}^{d} \theta_j^i S_j^i = \sum_{i=0}^{d} \theta_{j-1}^i S_j^i, \forall j = 1, \ldots, n-1 \tag{56}$$

5.1.3 Def 3

Le processus de gain d'une stratégie est un processus stocastique qui décrit le changement de valeur duportefeuille associé suite aux variation des prix d'actif.

On va le noter G

$$G_0 = 0, G_t = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=0}^{d} \theta_j^i \Delta S_j^i, \Delta_j^i = S_j^i - S_{j-1}^i \tag{57}$$

pour une stratégie auto-financée,

$$V_t = V_0 + G_t \tag{58}$$

Comme dans le cas d'une période, on note:

$$\tilde{S}_j^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}, \tilde{V}_t = \frac{V_t}{S_t^0} = \tilde{V}_0 + \tilde{G}_t \tag{59}$$

$$\tilde{G}_t = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} \theta_j^i \Delta \tilde{S}_j^i \tag{60}$$

5.2 Résultats de marché viable et complet

5.2.1 Def 1

Une opportunité d'arbitrage est une stratégie audo-financée θ tel que:

$$\begin{cases} V_0^\theta = 0 \\ P(V_n^\theta >= 0) = 1 et P(V_n^\theta > 0) > 0 \end{cases} \tag{61}$$

ou

$$\begin{cases} P(\tilde{G}_n^\theta >= 0) = 1 \\ P(\tilde{G}_n^\theta > 0) > 0 \end{cases} \tag{62}$$

5.2.2 Théorème

Un marché financé à n période est viable ssi il existe une mesure de probabilité risque neutre Q. C'est-à-dire,

$$\begin{cases} Q(w) > 0, \forall w \in \Omega \\ E^Q[\tilde{S_{t+1}^i}|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^i, \forall 0 <= i <= d, 0 <= t <= n-1 \end{cases} \tag{63}$$

(Les prix actualisés sont de Q-martingale).

5.2.3 Proposition

Le juste prix d'un actif conditionnel réalisable H à la date t est(l'actif verse H en T):

$$P_t(H) = S_t^0 E^Q[\frac{H}{S_t^0}|\mathcal{F}_t] \tag{64}$$

(Q est la mesure risque neutre)

Preuve: Il existe une stratégie θ tel que

$$H = \sum_{i=0}^{d} \theta_i S_t^i \tag{65}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_t E^Q[\frac{H}{S_n^0}|\mathcal{F}_t] &= S_t E^Q[\frac{\sum \theta_i S_n^i}{S_n^0}|\mathcal{F}_t] \\ &= S_t \sum_{i=0}^{d} \theta_i E^Q[\tilde{S}_n^i|\mathcal{F}_t] \\ &= S_t \sum_{i=0}^{d} \theta_i \tilde{S}_t^i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \theta_i S_t^i = V_t = P_t(H) \end{aligned} \tag{66}$$

5.3 Théorème

Un marché viable est complet ssi la moyenne de probabilité risque neutre est unique.

5.4 Modèle binomiale multi-période(Modèle de Lex-Ross-Robinstein)

$$\Omega = \{-1, 1\}^n, \mathcal{F} = P(\Omega) \tag{67}$$

Soit $(z_k)_{k>=0}$ une suite de variable aléatoires indépendantes tel que $P(z_k = 1) = P(z_k = -1) = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{F}_0 = \{, \Omega\}, \mathcal{F}_k = \sigma(z_0, \dots, z_k), \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_n\} \tag{68}$$

$T > 0, t_i = \frac{iT}{n}$: diviser $[0, T]$ en n parties.

On définit:

$$\begin{cases} b_n = b\frac{T}{n} \\ \sigma_n = \sigma\frac{T}{n} \end{cases}, b, \sigma > 0 \tag{69}$$

$$S_0^0 = 1, S_j^0 = e^{\Omega\frac{T}{n}} S_{j-1}^0, (R = e^{\Omega\frac{T}{n}} - 1\frac{tT}{n}) = (1+R)S_{j-1}^0 \tag{70}$$

$$\begin{aligned} S_0^1 = s, S_j^1 &= se^{jb_n + \sigma_n \sum k=1^j z_k} \\ &= S_{j-1}^1 e^{b_n + \sigma_n z_j}, j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{71}$$

Ainsi, pour chaque $n >= 1$, on a definit un marché à n périodes de pas constant $\frac{T}{n}$.

5.4.1 Proposition

Le marché est sans arbitrage ssi

$$d_n < 1 + R_n < u_n avec \begin{cases} u_n = e^{b_n + \sigma_n} \\ d_n = e^{b_n - \sigma_n} \end{cases} \tag{72}$$

Dans ce cas, il existe une unique mesure de probabilité risque neutre Q^n définie par:

$$Q^n(z_i = 1) = q_n = \frac{1 + R_n - d_n}{u_n - d_n} \tag{73}$$

En plus, le marché est complet.

5.5 Valorisation dans le modèle de Cor-Ross-Robinstein

On considère un actif conditionnel $H_n = g(S_n^1)$

$$P_0(H_n) = S_0^0 E^{Q^n}[\frac{H_n}{S_n^0}] \tag{74}$$

$$S_0^0 = 1, S_n^0 = (1+R)S_{n-1}^0 = \ldots = (1+R)^n = (e^{\Omega \frac{T}{n}})^n = e^{nT} \tag{75}$$

$$P_0(H_n) = \frac{1}{(1+R_n)^n} E^{Q_n}[H_n] = e^{-\Omega T} E^{Q_n}[H_n] = e^{-\Omega T} E^{Q_n}[g(S_n^1)] \tag{76}$$

Sous Q^n, $(\frac{z_j+1}{2})$ est une suite de V.A. de Bernouille de paramètre $q_n = \frac{1+R_n-d_n}{u_n-d_N}$

$$Q^n(\sum_{i=1} n \frac{1+z_i}{2} = j) = C_n^j (q_n)^j (1-q_n)^{n-j}, (0 <= j <= n) \tag{77}$$

$$P_0(H_n) = e^{-RT} \sum_{i=0}^{n} C_n^i (q_n)^i (1-q_n)^{n-i} g(i(u_n)^i (d_n)^{n-i}) \tag{78}$$

$$P_k(H_n) = e(-R(1-\frac{k}{n})T) \sum_{i=0}^{n-k} C_n^i q_n^i (1-q_n)^{n-k-i} g(S_k^i u_n^i d_n^{n-k-i}) \tag{79}$$

5.5.1 Proposition

$$\begin{aligned} P_k(H_n) &= e^{-R\frac{T}{n}} E^{Q_n}[P_{k+1}(H_n)|\mathcal{F}_k], k = 0, \ldots, n-1 \\ &= e^{-\frac{RT}{n}}[q_n P_{k+1}(H_n)_{u_n} + (1-q_n)P_{k+1}(H_n)_{d_n}] \end{aligned} \tag{80}$$

$$E^{Q_n}[P_{k+1}(H_n)|\mathcal{F}_k] = E^{Q_n}[S^0_{k+1}E^{Q_n}[\frac{H_n}{S^0_n}|\mathcal{F}_{k+1}]|\mathcal{F}_k]$$

$$= S^0_{k+1}E^{Q_n}[\frac{H_n}{S^0_n}|\mathcal{F}_k] \quad (81)$$

$$= e^{R\frac{T}{n}}P_k[H_n]$$

Remarque: La valorisation et la couverture dans le cas multi-période se réduit à une séquence de valorisation/couverture dans le cas d'une seule période.

En effet, $P_k(H_n)$ est le juste prix de l'actif conditionnel $P_{k+1}(H_n)$.

$$\begin{array}{ll} \frac{kT}{n} & \frac{(k+1)T}{n} \\ \text{Actif risqué: } S^1_k & -> u_n S^1_k \\ & -> d_n S^n_k \end{array}$$

Actif conditionnel:

$$\begin{array}{ll} \frac{kT}{n} & \frac{(k-1)T}{n} \\ P_k(H_n) & -> P_{k+1}(H_n) \\ & -> P_{k+1}(H_n)_{d_n} \end{array}$$

La stratégie de couverture s'écrit donc

$$\theta^1_{k+1} = \frac{P_{k+1}(H_n)_{u_n} - P_{k+1}(H_n)_{d_n}}{u_n S^i_k - d_n S^i_k} \quad (82)$$

On la tracte $(P_k(H_n), \theta^1_{k+1})$.

5.5.2 Exercise

On considr̀e le modèle suivant:

$$S^0_0 = 1 -> S^0_1 = 1 + R -> S^0_2 = (1+R)^2 \quad (83)$$

$$S^1_0 = 2 \quad \begin{array}{l} -> 4 \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases} \\ -> 1 \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \end{array} \quad (84)$$

1) Est-ce que le marché est viable/complet? 2) Calculer le prix d'un call sur l'actif risqué S^1 de maturité 2 et de strike 1.

1)

$$u_1 = u_2 = 2, d_1 = d_2 = \frac{1}{2} \tag{85}$$

$$d_i = \frac{1}{2} < 1 + R = 1.25 << 2 = u_i \tag{86}$$

=> le marché est viable

2)

$$P_k(H_n) = \frac{1}{1+R}[q_k P_{k+1}(H_n) + (1-q_n)P_k(H_n)]e^{-R} \approx= frac11 + R \tag{87}$$

$Q_k = \{q_k, 1-q_k\}$ est la mesure de proba risque neutre.

$$P_2(H_2) = \begin{cases} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \tag{88}$$

$$H_2 = (S_2^1 - 1)_+ \tag{89}$$

pour $S_1^1 = 4$:

$$q_2 = \frac{1.25 - 0.5}{2 - 0.5} = \frac{0.75}{1.5}\frac{1}{2} \tag{90}$$

$$P_1(H_2) = \frac{1}{1.25}[\frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times 1] = \frac{16}{5} \tag{91}$$

pour $S_1^1 = 1$:$q_2 = \frac{1}{2}$

$$P_1(H_2) = \frac{4}{5} \times [\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0] == \frac{2}{5} \tag{92}$$

et en $t = 0$: $q_1 = \frac{1}{2}$

$$P_0(H_2) = \frac{4}{5} \times [\frac{1}{2} \times \frac{16}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}] = \frac{36}{25} \tag{93}$$

5.5.3 Théorèm

Le juste prix $P_0(H_n)$ ($H_n = (S_n^1 - K)_+$) converge quand $n->\infty$ au prix Black Scholes.

$$P_0(S,T,K) = S\mathcal{N}(d_1(S,K,\sigma^2 T)) - Ke^{\Omega T}\mathcal{N}(d_2(S,K,\sigma^2 T)) \tag{94}$$

$$d_1(S,K,v) - \frac{ln(\frac{S}{Ke^{\Omega t}})}{Nv} + + \frac{1}{v}Sv \quad (95)$$

$$d_2(S,K,v) = d_1 - \frac{1}{2}Sv \quad (96)$$

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (97)$$

est la fonction de répartition de la loi normale standarde.

6 Valorisation dans un cadre continue: Le modèle de Black-Scholes

6.1 Introduction

Notre objectif est de donner dans un modèle probabiliste continue un prix à une option et généralement à tout contrat de flox terminale en T de la forme$g(S_T)$ avec S_t est un titre négociable.

Nous traitons dans ce chapître un modèle de base en finance, qui est le modèle de Black Scholes.

6.2 Modèle de Black Scholes

L'aléa du marché financier est modélisé via un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_t), \mathbb{P}), 0 <= t <= T$

Ω: L'ensemble des scenarii possibles $\mathcal{F}$: est une tribu quiréprésente l'information globale disponible sur le marché.

Les aléas sont générés par un mouvement brownien standard $(W_t)_{0<=t<=T}$ qui engendre le filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{0<=t<=T}$

$\mathbb{P}$ est la probabilité historique.

Rappel:

Un mouvement brownien etandard est un processus stochastique $(W_t)_{t>0}$

$$\begin{cases} W_0 = 0(\text{standard})\ \text{et} W_t \text{est continu} \\ \text{accroissements indépendants} : \forall t_1 <= \ldots <= t_n, (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}), \ldots, (W_{t_2} - W_{t_1})\text{sont indépendants.} \\ W_t - W_s estdeloi \mathcal{N}(0, t-s), \forall t > s \end{cases} \quad (98)$$

6.2.1 Definition

Le modèle de Black & Scholes est défini sous forme de rendement instantané par

$$\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma dW_t, dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (99)$$

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u du + \int_0^t \sigma S_u dW_u \quad (100)$$

$$\int_0^t X_u dW_u = lim_{\Delta t->0} \sum_{i=1}^{n} X_{t_i}(W_{t+1} - W_t) \quad (101)$$

avec $S_0 = x$ et W_t est un M¿B¿S sous $\mathbb{P}$ Ainsi

$$S_t = S_0 e^{(b - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (102)$$

On suppose que l'on a un actif sans risque S^0 sont la valeur $S^0_t = e^{Rt}$ Remarque: Définissons le rendement de l'actif S en $t = 1$ et t_i

$$t_i(\Delta t_i = t_i - t_{i-1}) \quad (103)$$

$$\begin{aligned} R_{t_i} = \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} &= \frac{S_{t_{i-1}} e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} \\ &= e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - 1 \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} E[R_{t-1}] &= E[e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - 1] \\ &= e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i} E[e^{\sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}] - 1 \\ &= e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i} \times e^{\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t_i} - 1 \\ &= e^{b\Delta t_i} - 1 \approx b\Delta t_i + o(\Delta t_i^2) \end{aligned} \quad (105)$$

$$
\begin{aligned}
Var(R_{t_i}) &= E[(R_{t_i} - E[R_{t_i}])^2] \\
&= E[(e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - e^{b\Delta t_i})^2] \\
&= e^{2b\Delta t_i} E[(e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - 1)^2] \\
&= e^{2b\Delta t_i}(e^{-\sigma^2\Delta t_i} E[e^{2\sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}] - 2e^{-\frac{1}{2}sigma^2\Delta t_i} E[e^{\sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}] + 1) \\
&= e^{2b\Delta t_i}(e^{-\sigma^2\Delta t_i e^{\frac{1}{2}(2\sigma)^2\Delta t_i}} - 1) \\
&= e^{2b\Delta t_i}(e^{\sigma^2\Delta t_i} - 1) \\
&\approx \sigma^2 \Delta t_i + o(\Delta t_i^2)
\end{aligned}
\tag{106}
$$

=>

$$
\sigma \approx \sqrt{\frac{Var(R_{t_i})}{\Delta t_i}} \tag{107}
$$

σ est donc l'écart type normalisé du rendement, appllée volatilité. b est l'espérance du standatd (normalisé) sur une courte période Δt_i.

$$
dS_t = b_t S_t dt + \sigma S_t dW_t => S_t = S_0 e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2 t)+\sigma W_t} \tag{108}
$$

$$
\begin{aligned}
ln(S_t) &= ln(S_0) + \int_0^u (\frac{\partial ln}{\partial S}(S_t) dS_t) + \int_0^u \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 ln}{\partial S^2}(S_t) d < S >_t) \\
&= ln(S_0) + \int_0^u \frac{1}{S_t} dS_t - \int_0^u \frac{1}{S_t^2}(\sigma S_t)^2 dt \\
&= ln(S_0) - \frac{1}{2}\int_0^u \sigma^2 dt + \int_0^u \frac{1}{S_t}(b_t S_t + dt) + \int_0^u \frac{1}{S_t}\sigma S_t dW_t \\
&= ln(S_0) - \frac{1}{2}\sigma^2 u + bu + \int_0^u \sigma dW_t \\
&= ln(S_0) + (b - \frac{1}{2}\sigma^2)u + \sigma W_u
\end{aligned}
\tag{109}
$$

$$
=> S_u = S_0 e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)u + \sigma W_u} \tag{110}
$$

Supposons que le prix d'une option en t est $u(t,S_t)=P_t$

$$dP_t = du(t,S_t)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(t,S_t)dt + \frac{\partial u}{\partial S}(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(t,S_t)d < S >_t$$

$$= (\frac{\partial u}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2}(t,S_t))dt + \frac{\partial u}{\partial S}(t,S_t)(bS_t d$$

$$= (\frac{\partial u}{\partial t} + + \frac{1}{2}$$

$$sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + bS_t \frac{\partial u}{\partial S})dt + \sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S} dW_t \quad (111)$$

Ainsi la volatilité de l'option en t est:

$$\frac{\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S}(t,S_t)}{u(t,S_t)} \quad (112)$$

6.3 Dynamique d'un portefeuille auto-finançant

On considère un portefeuille financier contenant une centaine S_t de l'actif risqué S et le reste dansl'actif sans risque S^0. On suppose que ce portefeuille est audo-finançant.(Il n'y a pas d'argent ou de retrait d'argent),, Soit V_t sa valeur en t.

Si l'ajustement de fait à des dates discrère $t_1,\ldots,t_n$, alors

$$\begin{aligned} V_{t_{i+1}} - V_{t_i} &= \delta_{t_i}(S_{t_i+1} - S_{t_i}) + \frac{V_{t_i} - \delta_{t_i}S_{t_i}}{S^2_{t_i}}(S^0_{t_{i+1}} - S^0_{t_i}) \\ &= \delta_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + (V_{t_i} - \delta_{t_i}S_{t_i})(e^{R(t_{i+1}-t_i)} - 1) \end{aligned} \quad (113)$$

$$\tilde{V}_{t_{i+1}} - \tilde{V}_{t_i} = \delta_{t_i}(\tilde{S}_{t_{i+1}-\tilde{S}_{t_i}}) \quad (114)$$

En faisant tendre le pas d'ajustement $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ vers 0, on obtient

$$d\tilde{V}_t = \delta_t d\tilde{S}_t \quad (115)$$

$$dV_t = \delta_t dS_t + (V_t - \delta_t S_t)Rdt \quad (116)$$

ce qui est l'équation du portefeuille auto-finançant en temps continue.

6.4 Construction du portefeuille de replication

Rapplons que notre objectif est de valoriser ainsi que de couvrir une option de payoff $g(S_T)$ à échéance T. Soit $v(t,S) : [0,T]\times]0,\infty[$ une fonction dans $C^{1,2}$. Nous cherchons les conditions que doit vérifier v pour qu'elle soit le prix de l'option. D'abord, nous cherchons un portefeuille auto-finançant V qui réplique v, c'est-à-dire

$$V_t = v(t,S_t) en tout t \tag{117}$$

$$f(t,X_t) = f(0,X_0)+\int_0^t f'(u,X_u)dX_u+\int_0^t f'(u,X_u)dX_u+\int_0^t f''(u,X_u)d<X>_u \tag{118}$$

Rappel

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t \tag{119}$$

$$dY_t = c_t dt + d_t dW_t \tag{120}$$

$$d<X,Y>_t = (b_t d_t)dt \tag{121}$$

$$d<X>_t = d<X,X>_t = b_t^2 dt \tag{122}$$

$$\begin{aligned} v(t,S_t) &= v(0,S_0) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial S}(u,S_u)du + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial S}(u,S_u)dS_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(u,S_u)d<S>_u \\ &= v(0,S_0) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial u}(u,S_u)du + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S}(u,S_u)du + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial S}(u,S_u)dS_u \\ &= v(0,S_0) + \int (\frac{\partial v}{\partial u}(u,S_u) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(u,S_u))du + \int \frac{\partial v}{\partial S}(u,S_u)dS_u \end{aligned} \tag{123}$$

$$dV_t = S_t dS_t + (V_t - \delta_t S_t)rdt \tag{124}$$

$$V_t = V_0 + \int S_u dS_u + \int (V_u - \delta_u S_u)rdu \tag{125}$$

Prenons v solution de l'EDP,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(t,,S) = (v(t,S_t) - \frac{\partial v}{\partial S}(u,S)S)R \tag{126}$$

Donc

$$v(t,S_t) = v(0,S_0) + \int \frac{\partial v}{\partial S}(u,S_u)dS_u + \int (v(u,S_u) - S_u \frac{\partial v}{\partial S})Rdt \tag{127}$$

Si je choisis

$$V_0 = v(0, S_0), S_t = \frac{\partial v}{\partial S}(t, S_t) \tag{128}$$

alors

$$V_t = v(t, S_t) \tag{129}$$

en tout t et en particulier $V_T = v(T, S_T)$