Mineur Finance 1

December 11, 2016

Contents

1 Cadre de valorisation des produite devive

1.1 Introduction

1.2 Hypothèse

1.3 Propriété

Théorème 1.1. *Parité Call-Put*

$$C(t) - P(t) = S(t) - KB(t,T) \tag{1}$$

où

- $C(t)$ prix du call
- $P(t)$ prix du put
- $S(t)$ prix de l'actif
- K prix strike
- $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$ valeur of a zero-coupon bond that matures to 1 at T

Put-Call Parity on Wikipedia

Explication:

Par principe de AOA, 2 portefeuilles de la même payoff au strike ont la même valeur à tout instant.

Donc on constrire 2 portefeuilles:

1. Acheter une option Call sur l'actif S et vendre une option Put avec strike K.
2. Acheter un actif S et vendre K bonds $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$

Ces deux portefeuilles donne la même valeur au strike.

1.4 Options américaines

Option américaine similaire aux options europeens mais l'exercise du droit pourra se faire à toute date t avant maturité T.

On note $CallAmer_t(T,K)$ et $PutAmer_t(T,K)$ les prix des calls et puts américains au t.

On a

$$CallAmer_t(T,K) \geq Call_t(T,K) \tag{2}$$

$$PutAmer_t(T,K) \geq Put_t(T,K) \tag{3}$$

Propriété: En l'absence de divident, on a:

$$CallAmer_t(T,K) = Call_t(T,K) \tag{4}$$

Meilleure explication sur Stackoverflow

Stackoverflow question link

Preuve:

$$Call_t(T,K) \geq (S_t - K)_+ \tag{5}$$

Il n'est pas optimal d'exercer avant la maturité. Donc $CallAmer_t(T,K) = Call_t(T,K)$

Remarque: Pour le Put, la propriété n'est pas vraie.

$$Put_t(T,K) \leq KB(t,T) \tag{6}$$

Pour un certain scenario, le prix de put est inferieur au prix d'exercise. $Put_t(T,K) < (S_t - K)_+$.

Pour S_t tel que $KB_t(T) < K - S_t \Leftrightarrow S_t < (1 - B_t(T))K$ Donc, on a

$$Put_t(T,K) < K - S_t \tag{7}$$

2 Théorie de la valorisation dans le cas discrèt à une période

2.1 Introduction

Nous avons vu que les contrats à termes peuvent être valorisés par le principe de non arbitrage alors que ce principe ne donne que des bornes sur le prix des options. La valorisation de ces produits assez complexes nécessite l'introduction des modèles probabilistes pour décrire les scénarios possibles du marché.

Dans ce marché, si l'on trouve une stratégie qui réplique le payoff de l'option, alors la portefeuille construite par cette stratégie réplique l'option.

Par l'absence d'opportunite d'arbitrage, la valeur de ce portefeuille est la même que celle de l'option. Cependant, ce prix est dépendant du modèle qui doit être proche de la réalité.

2.2 Modèle à une période

On consirère qu'il y a $d+1$ actifs financiers et 2 dates,: $t=0, t=1$. L'aléa du modèle est representé par K états dans $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$.

En $t=1$, avec des probabilités $\{p_1, \dots, p_K\}, (p_i > 0)$.

Le prix de l'actif i au t est noté $S_t^i, 0 \leq i \leq d$. S^0 represente l'actif sans risque $(S_0^0 = 1, S_1^0 = e^R \approx 1+R)$ Une strategie $\theta \in \mathbb{R}^{d+1}$ est un vecteur contenant le nombre d'unité de chaque actif dans ce portefeuille V entre $t=0$ et $t=1$.

La valeur de V en t

$$V_t = V_t^\theta = \sum_{i=0}^{d} \theta_i S_t^i \tag{8}$$

Le gain est defini par

$$G = V_1 - V_0 = \sum_{i=0}^{d} \theta_i (S_1^i - S_0^i) = \sum_{i=0}^{d} \theta_i \Delta S^i \tag{9}$$

On note

$$\tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}, \tilde{V}_t = \frac{V_t}{S_t^0}, \tilde{G}_t = \frac{G}{S_t^0} \tag{10}$$

alors

$$\begin{cases} \tilde{V}_t = \theta_0 + \sum_{i=1}^d \theta_i \tilde{S}_t^i \\ \tilde{G} = \tilde{V}_1 - \tilde{V}_0 = \sum_{i=1}^d \theta_i (\tilde{S}_1^i - \tilde{S}_0^i) = \sum_{i=1}^d \theta_i \Delta \tilde{S}^i \end{cases} \tag{11}$$

2.3 Résultats de non-arbitrage

2.3.1 Définition

Une opportunite d'arbitrage est une strategie θ tel que

1. $V_0^\theta = 0$
2. $P(V_1^\theta >= 0) = 1$ et $P(V_1^\theta > 0) > 0$

où

1. $P(G \geq 0) = 1$
2. $P(G > 0) > 0$

Commencer avec un état avec valeur 0, et la probabilite de gagner de l'argent est superierue à 0.

2.3.2 Définition 2

Une mesure de probabilité Q est dite risque neutre si:

1. $Q \sim P$, c'est a dire, $Q(\omega_i) > 0, \forall 1 \leq i \leq K$

   Q réplique P

2. $E^Q[\tilde{S}_1^i] = \tilde{S}_0^i, \forall i$

   Valeur relative des actifs ne change pas.

2.3.3 Théorème

Le marché n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement s'il existe au moins une mesure de probabilité risque neutre.

Preuve:

($\Rightarrow$) Supposons qu'il existe une mesure de probabilité risque neutre. Supposons qu'il existe une opportunité d'arbitrage, donc

$$Q(G^\theta \geq 0) = 1, Q(G^\theta > 0) > 0 \tag{12}$$

Mais

$$E^Q[\tilde{G}^\theta] = E^Q[\tilde{S}_1^\theta] - \tilde{S}_0^\theta = 0 \tag{13}$$

ce qui est en contradiction avec (12).

($\Leftarrow$) Supposons qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage. Soient

$$\mathcal{E} = \{(q_1, \ldots, q_K) | \sum_{i=1}^{K} q_i, q_i > 0\} \tag{14}$$

$$C = \{E^Q[\Delta\tilde{S}] | Q \in \mathcal{E}\}, \Delta\tilde{S} = (\Delta\tilde{S}^1, \ldots, \Delta\tilde{S}^d)^T \tag{15}$$

Il faut démontrer que $0 \in C$. Dans ce cas là, il existe une mesure de probabilité de sorte que la valeur espérée est 0, c'est-à-dire, pas d'arbitrage.

Supposons $0 \notin C$, puisque C est convexe, d'après le théorème de séparation des convexes, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^d, \alpha^t \geq 0, \forall x \in C, \exists x_0 \in C, \alpha^t x_0 > 0 \tag{16}$$

$$x_0 = E^{Q_0}[\Delta\tilde{S}] \tag{17}$$

Soit α_0 arbitraire, on considère la stratégie $\theta = (\alpha_0, \alpha)$ On a

$$\forall \theta \in \mathcal{E}, Q(\tilde{G}^\theta \geq 0) = 1, Q_0(\tilde{G}^\theta > 0) > 0 \tag{18}$$

Et

$$\forall Q \in \mathcal{E}, E^Q[\tilde{G}^Q] \geq 0, E^Q[\tilde{G}^Q] > 0 \tag{19}$$

S'il existe ω_i tel que $G^Q(\omega_i) < 0$, on va construire une mesure Q^t:

$$\begin{aligned} Q^\epsilon(\omega) =& 1 - \frac{K-1}{K}\epsilon, \omega = \omega_i \\ & \frac{\epsilon}{K}\omega \neq \omega_i \end{aligned} \tag{20}$$

on peut choisir ϵ suffisamment actif tel que $E^{Q_\epsilon}[\tilde{G}^\theta] < 0$. Donc

$$\forall i, G^\theta(\omega_i) \geq 0 \geq Q^0(G^\theta \geq 0) = 1 \tag{21}$$

mais puisque $E^{Q_0}[\tilde{G}^\theta] > 0$, alors $Q^0(\tilde{G}^\theta) > 0$

$\Rightarrow$ Il y a arbitrage. Contradition, donc $0 \in C \Rightarrow \exists$ une mesure de proba risque neutre.

Exemple:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \mathbb{P} = \{0.3, 0.3, 0.2, 0.2\} \tag{22}$$

$R = 0.25$, S^0: Actif sans risque vaux 1 en $t = 0$. S^1: une action qui vaut 1 en $t = 0$. S^2: un call sur S^1 de strike $K = 1$ qui vaut 0.3 en $t = 0$.

	S_0^i	w_1	w_2	w_3	w_4
$i = 0$	1	1.25	1.25	1.25	1.25
$i = 1$	1	0.5	1	1.5	2
$i = 2$	0.3	0	0	0.5	1

Un actif vaut toujours la même valeur peu importe l'état.

Exemple:

1. Avec la strategie $\theta = (0.7, -1, 1)$, calculer la gain G de V^t

2. Est-ce qu'il y a une opportunité d'arbitrage dans ce marché?

$$G^\theta(\omega_i) = V_1(\omega_i) - V_0, V_0 = 1 * 0.7 - 1 + 0.3 = 0 \tag{23}$$

$$G^\theta(\omega_1) = 0.375, G^\theta(\omega_{2,3,4}) = -0.125 \tag{24}$$

Cherchons $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ tel que $0 < q_i$ et

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 & = 1 \\ \frac{0.5}{1.25} q_1 + \frac{1}{1.25} q_2 + \frac{1}{1.25} q_3 + \frac{2}{1.25} q_4 & = 1 \\ \frac{0.5}{1.25} q_3 + \frac{1}{1.25} q_4 & = 0.3 \end{cases} \tag{25}$$

Et on a

$$\begin{cases} q_1 & = \frac{1}{2} - 2q_4 \\ q_2 & = 3q_4 - \frac{1}{4} \\ q_3 & = \frac{3}{4} - 2q_4 \end{cases} \tag{26}$$

l'ensemble des mesures risque neutre est :

$$\{(\frac{1}{2} - 2\lambda, 3\lambda - \frac{1}{4}, \frac{3}{4} - 2\lambda) | q_i > 0, i \in \{1, 2, 3, 4\}\} \neq \emptyset \Rightarrow AOA \tag{27}$$

Is the above correct ?

3 Marché complet et valorisation d'actif conditionnel

On suppose que le marché est sans arbitrage.

Définition 3.1. Un actif conditionnel est une variable aléatoire H dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 3.2. Un actif conditionnel est réalisable s'il existe une stratégie θ tel que $H = V_1^\theta$

Remarque 3.3. Par AOA, on a prix de l'actif conditionnel $P(H) = V_0^\theta$.

Proposition 3.4. Le juste prix d'un actif conditionnel réalisable H est:

$$P(H) = E^Q[\tilde{H}] = E^Q[\frac{H}{S_1^\theta}] = E^Q[\frac{H}{1+R}] \tag{28}$$

où Q est une mesure de probabilité risque neutre.

preuve: θ est une stratégie tel que $V_1^\theta = H$

$$\begin{aligned} E^Q[\tilde{H}] &= E^Q[\tilde{V}_1^\theta] \\ &= E^Q[\tilde{V}_0^\theta + \sum_{i=1}^d \theta_i \Delta \tilde{S}^i] \\ &= V_0^\theta + \sum_{i=1}^d \theta_i E^Q[\Delta \tilde{S}^i] \\ &= V_0^\theta = P(H) \end{aligned} \tag{29}$$

Pourquoi pas V_0^θ sur la 3e et 4e ligne?

Définition 3.5. Un marché est complet si tout actif conditionnel est réalisable.

Remarque 3.6. A: matrice des payoff: $A_{(i,k)}(S_1^i(w_k))$. Un actif conditionnel est réalisable si $\exists\theta$ tel que $\theta^T A = H$. Et donc le marché est complet si $\theta^T A = H$ a une solution pour tout $H \in \mathbb{R}^K$.

Donc il faut que A a au moins K lignes linéairement indédendantes.[une condition nécessaire est donc $d+1 \geq K$]

Théorème 3.7. *Un marché sans arbitrage est complet ssi il existe une seule mesure de probabilité risque neutre.*

Preuve: Supposons que le marché est complet. Prenons l'actif conditionnel $\mathbb{1}_{\{w_k\}}(1 \leq k \leq K)$. Donc pour toute mesure de probabilité risque neutre q on a:

$$P_k = P(\mathbb{1}_{\{w_k\}}) = E^Q[\frac{\mathbb{1}_{\{w_k\}}}{1+R}] = \frac{1}{1+R} Q(\{w_k\}) \tag{30}$$

$\Rightarrow$ Unicité de Q. Pourquoi?

Supposons que la mesure risque neutre est unique. Démontrer que le marché est complet.

Si le marché n'est pas complet

$$\exists z \in \mathbb{R}^{d+1}, z \neq 0, \text{t.q. } z^t A = 0 \tag{31}$$

Soit

$$Q_i | Q_2 = \frac{Q(w_k) + \epsilon z_k}{1 + \epsilon \sum z_k} \tag{32}$$

. Il suffit de prendre ϵ suffisamment petit, $0 < Q_2(w_k) < 1$.

$$\begin{aligned} E^{Q_\epsilon} &= \frac{\sum_{k+1}^K (Q(w_k) + \epsilon z_k \tilde{S}^i(w_k)}{1 + \epsilon \sum z_k} \\ &= \sum_{k=1}^K Q(w_k)\tilde{S}_1^i(w_k) \times \epsilon \sum_k \mathbb{1}^K z_k \tilde{S}_1^i(w_k) \\ &= E^Q[\tilde{S}_1^i] \\ &= \tilde{S}_0^i \end{aligned} \tag{33}$$

Exercise 1. $\Omega = \{w_1, w_2\}$, on cherche le modele suivant:

$$S_0^0 = 1 \to 1 + \Omega (= 10\%) \tag{34}$$

$$S_0^1 = 10 \rightarrow \begin{cases} 12, & w_1, P_1 \\ 11, & w_2, P_2 \end{cases} \tag{35}$$

Est-ce que le marché est sans abritrage? Si ce n'est pas le cas, mettre au cas une stratégie d'arbitrage.

Cherchons les mesures proba risque neutre

	S_0^1	w_1	w_2
$i = 0$	1	1.1	1.1
$i = 1$	10	12	11

Cherchons P_1, P_2 tel que

$$P_1 > 0, P_2 > 0, E[\tilde{S}_1^{\ 0}] = \tilde{S}_0^0, E[\tilde{S}_1^1] = \tilde{S}_0^1 \tag{36}$$

$$P_1 \frac{1.1}{1.1} + P_2 \frac{1.1}{1.1} = \frac{1}{1} \tag{37}$$

and

$$P_1 \frac{12}{1.1} + P_2 \frac{11}{1.1} = \frac{10}{1} \tag{38}$$

Et on a

$$P_1 = 0, P_2 = 1 \tag{39}$$

$P_1 > 0$ n'est pas vérifié, donc il existe opportunité d'arbitrage. On veut 10 de S^0 et on achète 1 de S^1. Ainsi, la valeur initiale du portefeuille est

$$V_0 = -10S_0^0 + S_0^1 = 0 \tag{40}$$

Donc au $t = 1$

$$V_1 \rightarrow \begin{cases} -10(1+R) + 12 = 1 \\ -10(1+R) + 11 = 0 \end{cases} \tag{41}$$

2. $\Omega = \{w_1, w_2\}$, on cherche le modele suivant:

$$S_0^0 = 1 \rightarrow 1 + \Omega(= 10\%) \tag{42}$$

$$S_0^1 = 10 \rightarrow \begin{cases} 12, w_1, P_1 \\ 8, w_2, P_2 \end{cases} \tag{43}$$

1. Est-ce que le marche est sans arbitrage(complet)?

2. Calculer le prix d'un call de strike 10

3. Calculer de deux façons le prix d'un put de strike 10

Solution:

1) $P_1 = \frac{3}{4}, P_2 = \frac{1}{4}$, donc il existe unique mesure probabilite risque neutre. Donc le marché est sans arbitrage(complet).

2) Puisque le marché est complet et sans arbitrage, alors:

$$\begin{aligned} Call_0(1,10) &= E^Q[\tilde{H}] \\ &= E^Q[\frac{V_1^\theta}{1+R}] \\ &= E^Q[\frac{(S_1^1-10)_+}{1+R}] \\ &= \frac{\frac{3}{4}*2+\frac{1}{4}*0}{1.1} = \frac{15}{11} \end{aligned} \tag{44}$$

3) D'abord, on utilise la parité Call-Put

$$c(1,10) - P(1,10) = S_0^1 - \frac{K}{1+R} = \frac{10}{11} \tag{45}$$

$$\Rightarrow P(1,10) = \frac{5}{11} \tag{46}$$

$$P(1,10) = E^Q[\frac{(10-S_1^1)_+}{1+R}] = 0 \times \frac{3}{4} + \frac{2}{1.1} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{11} \tag{47}$$

4 Le modèle binominale à une période

$T = 1, \Omega = \{w_u, w_d\}, F = \mathbb{P}(\Omega), \mathbb{P}$ mesure de probabilité dans $(\Omega, \mathcal{F}), (0 < P(w_u) < 1)$

$$S_0^0 = 1 \to 1+R \tag{48}$$

$$S_0^1 = s \to \begin{cases} us, & w_u, P_1 \\ ds, & w_d, P_2 \end{cases} \tag{49}$$

où $u \geq d$

Proposition 4.1. Le modèle est viable (sans arbitrage), ssi

$$d < 1 + R < u \tag{50}$$

(condition de non-arbitrage)

Proposition 4.2. Le prix d'un actif conditionnel H est:

$$P(H) = E^Q[\frac{H}{1+R}] \tag{51}$$

où

$$Q(w) = \begin{cases} \frac{1+R-d}{u-d} & ,\text{si} \quad w = w_d \\ \frac{u-1-R}{u-d} & ,\text{si} \quad w = w_u \end{cases} \tag{52}$$

En plus, le portefeuille de couverture est donnée par (θ_0, θ_1) où

$$\begin{cases} \theta_0 = P(H) - \theta_1 s \\ \theta_1 = \frac{H(w_u)-H(w_d)}{us-ds} \end{cases} \tag{53}$$

Preuve

1. Cherchons des mesures de probabilité risque neutre telles que

$$Q = \{q_u, q_d\}(q_u = Q(w_u), q_d = Q(w_d)) \tag{54}$$

$$\begin{cases} q_u + q_d & = 1 \\ \frac{q_u us + q_d ds}{1+R} & = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_d & = 1 - q_u \\ q_u s(u-d) & = s(1+R) - ds \end{cases} \tag{55}$$

Ainsi

$$\begin{cases} q_u = \frac{u-1-R}{u-d} \\ q_d = \frac{1+R-d}{u-d} \end{cases} \tag{56}$$

Donc $\exists!$ mesure de probabilité risque neutre ssi $d < 1 + R < u$

2. Si le marché est sans arbitrage et complet

$$P(H) = E^Q[\frac{H}{1+R}] \tag{57}$$

Cherchons (θ_0, θ_1) tel que $\theta_0 S_1^0 + \theta_1 S_1^1 = H$

$$\begin{cases} \theta_0(1+R) + \theta_1 us & = H(w_u) \\ \theta_0(1+R) + \theta_1 ds & = H(w_d) \end{cases} \tag{58}$$

Ainsi

$$\theta_1(us - ds) = H(w_u) - H(w_d) \tag{59}$$

$$\theta_1 = \frac{H(w_u) - H(w_d)}{us - ds} \tag{60}$$

Au temps $t = 0$, on a

$$\theta_0 \times 1 + \theta_1 s = P(H) \tag{61}$$

Donc,

$$\theta_0 = P(H) - \theta_1 s \tag{62}$$

La stratégie de couverture est noté (θ_0, θ_1) ou $(P(H), \theta_1)$ qui donne le prix à definir pour l'acheter si le vendeur veut eliminer tout risque.

5 Théorèm de Valorisation dans le cas discrète multi-période

5.1 Modèle

On considère qu'il y a n périodes et $n+1$ dates $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n = T$. L'aléa est représenté par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pour spécifier l'information disponible en t, on introduit la filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n\}$.

On suppose $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \mathcal{F} = P(\Omega)$. Les actifs risqués sont modélisés par d processus stocastiques $(S_j^i)_{j=0,\ldots,n}^{i=1,\ldots,d}$ comme $\mathbb{F}$-adapté. L'actif sans risque est défini $(S_j^0)_{j=0,\ldots,n}$

$$S_0^0 = 1, S_j^0 = (1 + R_j)S_{j-1}^0 \tag{63}$$

R_j est le taux d'intérêt pour la période $[t_{j-1}, t^j]$.

Définition 5.1. Une stratégie d'investissement admissible est un processus stochastique $(\theta_j^i)_{j=0,\ldots,n}^{i=0,\ldots,d}$ où θ_j^i est la quantité investie dans l'actif i entre t_{j-1} et t_j qui doit être connu en t_{j-1}.(θ est prévisible).

Remarque 5.2. La valeur d'un portefeuille peut varier par deux possibilités

1. variation des prix d'actifs

2. versement/retrait d'argent

On va introduire la possibilité 2 aux stratégies.

Définition 5.3. Une stratégie θ est dite auto-financée si

$$\sum_{i=0}^{d} \theta_j^i S_j^i = \sum_{i=0}^{d} \theta_{j-1}^i S_j^i, \forall j = 1, \dots, n-1 \quad (64)$$

où le changement de la stratégie d'investissement ne change pas la valeur totale du portefeuille pour un instant donné.

Définition 5.4. Le processus de gain d'une stratégie est un processus stocastique qui décrit le changement de valeur du portefeuille associé suite aux variation des prix d'actif.

On va le noter G

$$G_0 = 0, G_t = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=0}^{d} \theta_j^i \Delta S_j^i, \Delta S_j^i = S_j^i - S_{j-1}^i \quad (65)$$

pour une stratégie auto-financée,

$$V_t = V_0 + G_t \quad (66)$$

Comme dans le cas d'une période, on note:

$$\tilde{S}_j^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}, \tilde{V}_t = \frac{V_t}{S_t^0} = \tilde{V}_0 + \tilde{G}_t \quad (67)$$

$$\tilde{G}_t = \sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{d} \theta_j^i \Delta \tilde{S}_j^i \quad (68)$$

5.2 Résultats du marché viable et complet

Définition 5.5. Une opportunité d'arbitrage est une stratégie auto-financée θ tel que:

$$\begin{cases} V_0^\theta = 0 \\ P(V_n^\theta \geq 0) = 1 \\ P(V_n^\theta > 0) > 0 \end{cases} \quad (69)$$

ou

$$\begin{cases} P(\tilde{G}_n^\theta \geq 0) = 1 \\ P(\tilde{G}_n^\theta > 0) > 0 \end{cases} \tag{70}$$

Théorème 5.6. *Un marché financé à n période est viable ssi il existe une mesure de probabilité risque neutre Q. C'est-à-dire,*

$$\begin{cases} Q(w) > 0, \forall w \in \Omega \\ E^Q[\tilde{S^i_{t+1}}|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}^i_t \end{cases} \forall 0 \leq i \leq d, 0 \leq t \leq n-1 \tag{71}$$

(Les prix actualisés sont de Q-martingale).

C'est quoi martingale?

Proposition 5.7. Le juste prix d'un actif conditionnel réalisable H à la date t est(l'actif verse H en T):

$$P_t(H) = S_t^0 E^Q[\frac{H}{S_t^0}|\mathcal{F}_t] \tag{72}$$

(Q est la mesure risque neutre)

Preuve: Il existe une stratégie θ tel que

$$H = \sum_{i=0}^{d} \theta_i S_t^i \tag{73}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_t E^Q[\frac{H}{S_n^0}|\mathcal{F}_t] &= S_t E^Q[\frac{\sum \theta_i S_n^i}{S_n^0}|\mathcal{F}_t] \\ &= S_t \sum_{i=0}^{d} \theta_i E^Q[\tilde{S}_n^i|\mathcal{F}_t] \\ &= S_t \sum_{i=0}^{d} \theta_i \tilde{S}_t^i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \theta_i S_t^i = V_t = P_t(H) \end{aligned} \tag{74}$$

Pourquoi E^Q disparait sur la 3e ligne?

Théorème 5.8. *Un marché viable est complet ssi la moyenne de probabilité risque neutre est unique.*

5.3 Modèle binomiale multi-période(Modèle de Lex-Ross-Robinstein)

$$\Omega = \{-1, 1\}^n, \mathcal{F} = P(\Omega) \tag{75}$$

Soit $(z_k)_{k>=0}$ une suite de variable aléatoires indépendantes telles que $P(z_k = 1) = P(z_k = -1) = \frac{1}{2}$

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_k = \sigma(z_0, \ldots, z_k), \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n\} \tag{76}$$

$T > 0, t_i = \frac{iT}{n}$: diviser $[0, T]$ en n parties.

On définit:

$$\begin{cases} b_n = b\frac{T}{n} \\ \sigma_n = \sigma\frac{T}{n} \end{cases}, b, \sigma > 0 \tag{77}$$

$$S_0^0 = 1, S_j^0 = e^{\Omega\frac{T}{n}} S_{j-1}^0, (R = e^{\Omega\frac{T}{n}} - 1\frac{tT}{n}) = (1+R)S_{j-1}^0 \tag{78}$$

Comprends pas...

$$\begin{aligned} S_0^1 = s, S_j^1 &= se^{jb_n + \sigma_n \sum k=1^j z_k} \\ &= S_{j-1}^1 e^{b_n + \sigma_n z_j}, j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{79}$$

Ainsi, pour chaque $n >= 1$, on a definit un marché à n périodes de pas constant $\frac{T}{n}$.

5.3.1 Proposition

Le marché est sans arbitrage ssi

$$d_n < 1 + R_n < u_n \tag{80}$$

avec

$$\begin{cases} u_n = e^{b_n + \sigma_n} \\ d_n = e^{b_n - \sigma_n} \end{cases} \tag{81}$$

Dans ce cas, il existe une unique mesure de probabilité risque neutre Q^n définie par:

$$Q^n(z_i = 1) = q_n = \frac{1 + R_n - d_n}{u_n - d_n} \tag{82}$$

En plus, le marché est complet.

5.4 Valorisation dans le modèle de Cor-Ross-Robinstein

On considère un actif conditionnel $H_n = g(S_n^1)$

$$P_0(H_n) = S_0^0 E^{Q^n}[\frac{H_n}{S_n^0}] \tag{83}$$

$$\begin{cases} S_0^0 = 1 \\ S_n^0 = (1+R)S_{n-1}^0 = \ldots = (1+R)^n = (e^{R\frac{T}{n}})^n = e^{nT} \end{cases} \tag{84}$$

$$\begin{aligned} P_0(H_n) &= \frac{1}{(1+R_n)^n} E^{Q_n}[H_n] \\ &= e^{-RT} E^{Q_n}[H_n] \\ &= e^{-RT} E^{Q_n}[g(S_n^1)] \end{aligned} \tag{85}$$

C'est quoi $g()$?

Sous Q^n, $(\frac{z_{j+1}}{2})$ est une suite de V.A. de Bernouille de paramètre $q_n = \frac{1+R_n-d_n}{u_n-d_N}$

Valeur moyenne de Bernouille:

$$Q^n(\sum_{i=1} n\frac{1+z_i}{2} = j) = C_n^j (q_n)^j (1-q_n)^{n-j}, (0 \leq j \leq n) \tag{86}$$

$$P_0(H_n) = e^{-RT} \sum_{i=0}^{n} C_n^i (q_n)^i (1-q_n)^{n-i} g(i(u_n)^i (d_n)^{n-i}) \tag{87}$$

$$P_k(H_n) = e(-R(1-\frac{k}{n})T) \sum_{i=0}^{n-k} C_n^i q_n^i (1-q_n)^{n-k-i} g(S_k^i u_n^i d_n^{n-k-i}) \tag{88}$$

Proposition 5.9.

$$\begin{aligned} P_k(H_n) &= e^{-R\frac{T}{n}} E^{Q_n}[P_{k+1}(H_n)|\mathcal{F}_k] \\ &= e^{-\frac{RT}{n}}[q_n P_{k+1}(H_n)_{u_n} + (1-q_n)P_{k+1}(H_n)_{d_n}] \end{aligned} \tag{89}$$

où , $k = 0, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} E^{Q_n}[P_{k+1}(H_n)|\mathcal{F}_k] &= E^{Q_n}[S_{k+1}^0 E^{Q_n}[\frac{H_n}{S_n^0}|\mathcal{F}_{k+1}]|\mathcal{F}_k] \\ &= S_{k+1}^0 E^{Q_n}[\frac{H_n}{S_n^0}|\mathcal{F}_k] \\ &= e^{R\frac{T}{n}} P_k[H_n] \end{aligned} \tag{90}$$

Remarque: La valorisation et la couverture dans le cas multi-période se réduit à une séquence de valorisation/couverture dans le cas d'une seule période.

En effet, $P_k(H_n)$ est le juste prix de l'actif conditionnel $P_{k+1}(H_n)$.

$$\begin{array}{lll} & \frac{kT}{n} & \frac{(k+1)T}{n} \\ \text{Actif risqué: } & S_k^1 & \to u_n S_k^1 \\ & & \to d_n S_k^n \end{array}$$

Actif conditionnel:

$$\begin{array}{ll} \frac{kT}{n} & \frac{(k-1)T}{n} \\ P_k(H_n) & \to P_{k+1}(H_n)_{u_b} \\ & \to P_{k+1}(H_n)_{d_n} \end{array}$$

La stratégie de couverture s'écrit donc

$$\theta_{k+1}^1 = \frac{P_{k+1}(H_n)_{u_n} - P_{k+1}(H_n)_{d_n}}{u_n S_k^i - d_n S_k^i} \tag{91}$$

On la tracte $(P_k(H_n), \theta_{k+1}^1)$.

5.4.1 Exercise

On considr̀e le modèle suivant:

$$S_0^0 = 1 \to S_1^0 = 1 + R \to S_2^0 = (1+R)^2 \tag{92}$$

$$S_0^1 = 2 \begin{cases} \to 4 \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases} \\ \to 1 \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \tag{93}$$

1) Est-ce que le marché est viable/complet?

2) Calculer le prix d'un call sur l'actif risqué S^1 de maturité 2 et de strike 1.

Solution:

1)

$$u_1 = \frac{4}{2} = u_2 = \frac{8}{4} = 2 \tag{94}$$

$$d_1 = \frac{1}{2} = d_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \tag{95}$$

$$d_i = \frac{1}{2} < 1 + R = 1.25 < 2 = u_i \tag{96}$$

Ainsi, le marché est viable car la condition $d < 1 + R < u$ est satisfaite.

Note:

Marché viable $\rightarrow$ AOA

Marché complet:

Toute option peut être couverte (répliquée) parfaitement par un portefeuille auto-financé.

2)

$$P_k(H_n) = \frac{1}{1+R}[q_k P_{k+1}(H_n) + (1 - q_n)P_k(H_n)]e^{-R} \approx= \frac{1}{1+R} \tag{97}$$

$Q_k = \{q_k, 1 - q_k\}$ est la mesure de proba risque neutre.

$$P_2(H_2) = \begin{cases} 7 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{cases} \tag{98}$$

$$H_2 = (S_2^1 - 1)_+ \tag{99}$$

pour $S_1^1 = 4$:

$$q_2 = \frac{1.25 - 0.5}{2 - 0.5} = \frac{0.75}{1.5}\frac{1}{2} \tag{100}$$

$$P_1(H_2) = \frac{1}{1.25}[\frac{1}{2} \times 7 + \frac{1}{2} \times 1] = \frac{16}{5} \tag{101}$$

pour $S_1^1 = 1$:$q_2 = \frac{1}{2}$

$$P_1(H_2) = \frac{4}{5} \times [\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 0] = \frac{2}{5} \tag{102}$$

et en $t = 0$: $q_1 = \frac{1}{2}$

$$P_0(H_2) = \frac{4}{5} \times [\frac{1}{2} \times \frac{16}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}] = \frac{36}{25} \tag{103}$$

Théorème 5.10. *Le juste prix $P_0(H_n)$ ($H_n = (S_n^1 - K)_+$) converge quand $n- > \infty$ au prix Black Scholes.*

$$P_0(S,T,K) = S\mathcal{N}(d_1(S,K,\sigma^2 T)) - Ke^{RT}\mathcal{N}(d_2(S,K,\sigma^2 T)) \tag{104}$$

$$d_1(S,K,v) = \frac{ln(\frac{S}{Ke^{Rt}})}{Nv} + \frac{1}{v}Sv \tag{105}$$

$$d_2(S,K,v) = d_1 - \frac{1}{2}Sv \tag{106}$$

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{107}$$

est la fonction de répartition de la loi normale standard.

6 Valorisation dans un cadre continue: Le modèle de Black-Scholes

6.1 Introduction

Notre objectif est de donner dans un modèle probabiliste continue un prix à une option et généralement à tout contrat de flux terminale en T de la forme $g(S_T)$ avec S_t un titre négociable.

Nous traitons dans ce chapître un modèle de base en finance, qui est le modèle de Black Scholes.

6.2 Modèle de Black Scholes

L'aléa du marché financier est modélisé via un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_t), \mathbb{P}), 0 \leq t \leq T$

Ω: L'ensemble des scenarii possibles $\mathcal{F}$: est une tribu qui réprésente l'information globale disponible sur le marché.

Les aléas sont générés par un mouvement brownien standard $(W_t)_{0<=t<=T}$ qui engendre le filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{0 \leq t \leq T}$

$\mathbb{P}$ est la probabilité historique.

Rappel:

Un mouvement brownien standard est un processus stochastique $(W_t)_{t>0}$

$$\begin{cases} W_0 = 0(\text{standard}) \text{ et } W_t \text{ est continu} \\ \text{accroissements indépendants :} \\ \forall t_1 \leq \ldots \leq t_n, (W_{t_n} - W_{t_{n-1}}), \ldots, (W_{t_2} - W_{t_1}) \text{ sont indépendants.} \\ W_t - W_s \text{ est de loi } \mathcal{N}(0, t-s), \forall t > s \end{cases} \tag{108}$$

Définition 6.1. Le modèle de Black & Scholes est défini sous forme de rendement instantané par

$$\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma dW_t, dS_t = bS_tdt + \sigma S_t dW_t \tag{109}$$

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_u du + \int_0^t \sigma S_u dW_u \tag{110}$$

$$\int_0^t X_u dW_u = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} X_{t_i}(W_{t+1} - W_t) \tag{111}$$

avec $S_0 = x$ et W_t est un M.B.S(Mouvement Brownien Stocastique) sous $\mathbb{P}$

Ainsi

$$S_t = S_0 e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t} \tag{112}$$

On suppose que l'on a un actif sans risque S^0 dont la valeur $S_t^0 = e^{Rt}$

Remarque 6.2. Définissons le rendement de l'actif S en $t = 1$ et t_i

$$t_i(\Delta t_i = t_i - t_{i-1}) \tag{113}$$

$$\begin{aligned} R_{t_i} &= \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} = \frac{S_{t_{i-1}} e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} \\ &= e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - 1 \end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned} E[R_{t-1}] &= E[e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - 1] \\ &= e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i} E[e^{\sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}] - 1 \\ &= e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i} \times e^{\frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t_i} - 1 \\ &= e^{b\Delta t_i} - 1 \approx b\Delta t_i + o(\Delta t_i^2) \end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
Var(R_{t_i}) &= E[(R_{t_i} - E[R_{t_i}])^2] \\
&= E[(e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - e^{b\Delta t_i})^2] \\
&= e^{2b\Delta t_i} E[(e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_i + \sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})} - 1)^2] \\
&= e^{2b\Delta t_i}(e^{-\sigma^2\Delta t_i} E[e^{2\sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}] - 2e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t_i} E[e^{\sigma(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}] + 1) \\
&= e^{2b\Delta t_i}(e^{-\sigma^2\Delta t_i} e^{\frac{1}{2}(2\sigma)^2\Delta t_i} - 1) \\
&= e^{2b\Delta t_i}(e^{\sigma^2\Delta t_i} - 1) \\
&\approx \sigma^2 \Delta t_i + o(\Delta t_i^2)
\end{aligned} \tag{116}$$

Ainsi,

$$\sigma \approx \sqrt{\frac{Var(R_{t_i})}{\Delta t_i}} \tag{117}$$

σ est donc l'écart type normalisé du rendement, appllée volatilité. b est l'espérance du standard (normalisé) sur une courte période Δt_i.

$$dS_t = b_t S_t dt + \sigma S_t dW_t \Rightarrow S_t = S_0 e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2 t)+\sigma W_t} \tag{118}$$

$$\begin{aligned}
ln(S_t) &= ln(S_0) + \int_0^u (\frac{\partial ln}{\partial S}(S_t)dS_t) + \int_0^u \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 ln}{\partial S^2}(S_t)d < S >_t) \\
&= ln(S_0) + \int_0^u \frac{1}{S_t} dS_t - \int_0^u \frac{1}{S_t^2}(\sigma S_t)^2 dt \\
&= ln(S_0) - \frac{1}{2}\int_0^u \sigma^2 dt + \int_0^u \frac{1}{S_t}(b_t S_t + dt) + \int_0^u \frac{1}{S_t}\sigma S_t dW_t \\
&= ln(S_0) - \frac{1}{2}\sigma^2 u + bu + \int_0^u \sigma dW_t \\
&= ln(S_0) + (b - \frac{1}{2}\sigma^2)u + \sigma W_u
\end{aligned} \tag{119}$$

Ainsi,

$$S_u = S_0 e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)u + \sigma W_u} \tag{120}$$

Supposons que le prix d'une option en t est $u(t,S_t)=P_t$

$$\begin{aligned}
dP_t &= du(t,S_t)\\
&= \frac{\partial u}{\partial t}(t,S_t)dt + \frac{\partial u}{\partial S}(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(t,S_t)d<S>_t\\
&= (\frac{\partial u}{\partial t}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2}{\partial S^2}(t,S_t))dt + \frac{\partial u}{\partial S}(t,S_t)(bS_tdt+\sigma S_t dW_t)\\
&= (\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + bS_t\frac{\partial u}{\partial S})dt + \sigma S_t\frac{\partial u}{\partial S}dW_t
\end{aligned} \tag{121}$$

Ainsi la volatilité de l'option en t est:

$$\frac{\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S}(t,S_t)}{u(t,S_t)} \tag{122}$$

6.3 Dynamique d'un portefeuille auto-finançant

On considère un portefeuille financier contenant une centaine S_t de l'actif risqué S et le reste dansl'actif sans risque S^0. On suppose que ce portefeuille est audo-finançant.(Il n'y a pas d'argent ou de retrait d'argent). Soit V_t sa valeur en t.

Si l'ajustement de fait à des dates discrère $t_1,\ldots,t_n$, alors

$$\begin{aligned}
V_{t_{i+1}} - V_{t_i} &= \delta_{t_i}(S_{t_i+1} - S_{t_i}) + \frac{V_{t_i} - \delta_{t_i}S_{t_i}}{S_{t_i}^2}(S^0_{t_{i+1}} - S^0_{t_i})\\
&= \delta_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + (V_{t_i} - \delta_{t_i}S_{t_i})(e^{R(t_{i+1}-t_i)} - 1)
\end{aligned} \tag{123}$$

$$\tilde{V}_{t_{i+1}} - \tilde{V}_{t_i} = \delta_{t_i}(\tilde{S}_{t_{i+1}-\tilde{S}_{t_i}}) \tag{124}$$

En faisant tendre le pas d'ajustement $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ vers 0, on obtient

$$d\tilde{V}_t = \delta_t d\tilde{S}_t \tag{125}$$

$$dV_t = \delta_t dS_t + (V_t - \delta_t S_t)Rdt \tag{126}$$

ce qui est l'équation du portefeuille auto-finançant en temps continue.

6.4 Construction du portefeuille de replication

Rapplons que notre objectif est de valoriser ainsi que de couvrir une option de payoff $g(S_T)$ à échéance T. Soit $v(t,S):[0,T]\times]0,\infty[$ une fonction dans $C^{1,2}$

Nous cherchons les conditions que doit vérifier v pour qu'elle soit le prix de l'option. D'abord, nous cherchons un portefeuille auto-finançant V qui réplique v, c'est-à-dire

$$V_t = v(t, S_t) entoutt \tag{127}$$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'(u, X_u) dX_u + \int_0^t f'(u, X_u) dX_u + \int_0^t f''(u, X_u) d < X >_u \tag{128}$$

Rappel

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t \tag{129}$$

$$dY_t = c_t dt + d_t dW_t \tag{130}$$

$$d < X, Y >_t = (b_t d_t) dt \tag{131}$$

$$d < X >_t = d < X, X >_t = b_t^2 dt \tag{132}$$

$$\begin{aligned} v(t, S_t) &= v(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial S}(u, S_u) du + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial S}(u, S_u) dS_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(u, S_u) dS_u \\ &= v(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial u}(u, S_u) du + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S}(u, S_u) du + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial S}(u, S_u) dS_u \\ &= v(0, S_0) + \int (\frac{\partial v}{\partial u}(u, S_u) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(u, S_u)) du + \int \frac{\partial v}{\partial S}(u, S_u) dS_u \end{aligned} \tag{133}$$

$$dV_t = S_t dS_t + (V_t - \delta_t S_t) r dt \tag{134}$$

$$V_t = V_0 + \int S_u dS_u + \int (V_u - \delta_u S_u) r du \tag{135}$$

Prenons v solution de l'EDP,

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(t, , S) = (v(t, S_t) - \frac{\partial v}{\partial S}(u, S) S) R \tag{136}$$

Donc

$$v(t, S_t) = v(0, S_0) + \int \frac{\partial v}{\partial S}(u, S_u) dS_u + \int (v(u, S_u) - S_u \frac{\partial v}{\partial S}) R dt \tag{137}$$

Si je choisis

$$V_0 = v(0, S_0), S_t = \frac{\partial v}{\partial S}(t, S_t) \tag{138}$$

alors

$$V_t = v(t, S_t) \tag{139}$$

en tout t et en particulier $V_T = v(T, S_T)$

Pour A.O.A. On a

valeur de l'option = valeur du portefeuille de couverture

6.4.1 Theorème

Dans le modèle de Black Scholes, le prix en t d'une option européenne de payoff $g(S_T)$ en T est $v(t, S_t)$ où la fonction v est la solution de l'EDP

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = r(v - S\frac{\partial v}{\partial S}) \tag{140}$$

$$v(T, S) = g(S) \tag{141}$$

Cette option peut-êtrte couverte par un portefeuille auto-finançant de valeur initiale $v(0, S_0) = V_0$ et qui contient à tout t $\frac{\partial v}{\partial S}(t, S_t)$ d'unité d'actif risqué.

Remarque: Pour répliquer une option européenne dans le modéle B&S, on peut utiliser la procédure suivante:

1. Calculer la fonction $v(t, S)$ résolvant l'EDP
2. Calculer la dérivée $\frac{\partial v}{\partial S}$ pour obtenir le ratio de couverture.

Pour que cette démarche fonctionne, il faut que l'EDP admet une unique solution. D'oú le théoréme suivant :

Théorème 6.3. *Soit g une fonction à croissance polynomiale.*

$$\exists p, \forall x, |g(x)| <= c(1 + |x|^p) \tag{142}$$

Alors l'EDP de B&S admet une solution dans la classe des fonctions de croissance polynomiale, appartenant à $C^0([0,T]\times]0,\infty[) and C^{1,2}([0,T)\times]0,\infty[)$ donnée par:

$$v(t, S) = E[e^{-r(T-t)} g(Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T - W_t)})] \tag{143}$$

6.5 Formule de Black-Scholes

Théorème 6.4. *Le prix d'une option europeene payoff*

$$g(S) = (S-K)_+ \tag{144}$$

dans le modèle de B&S est donnée par

$$\begin{aligned} v(t,S) &= C_{BS}(t,S) \\ &= S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \end{aligned} \tag{145}$$

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{V\bar{\epsilon}\pi} dy \tag{146}$$

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{Ke^{-r(T-t)}}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{147}$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{Ke^{-r(T-t)}}) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{148}$$

Le ratio de couverture (delta) est donnée par

$$\Delta_{BS}(t,S) = \mathcal{N}(d_1) \tag{149}$$

preuve:

$$\begin{aligned} C_{BS}(t,S) &= E[e^{-r(T-t)}(Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K)_+] \\ &= E[e^{-r(T-t)}(Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K)\mathbb{1}_{Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}>K}] \\ &= P_1 - P_2 \end{aligned} \tag{150}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= Ke^{-r(T-t)}E[\mathbb{1}_{\{Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}>K\}}] \\ &= Ke^{-r(T-t)}P((r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T-W_t) > ln(\frac{K}{S})) \\ &= Ke^{-r(T-t)}P(\frac{W_T-W_t}{\sqrt{T-t}}) > \frac{ln(\frac{K}{S}) - (r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= Ke^{-r(T-t)}P(\frac{W_T-W_t}{\sqrt{T-t}}) > \frac{ln(\frac{Ke^{-r(T-t)}}{S}) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= Ke^{-r(T-t)}P(\frac{W_T-W_t}{\sqrt{T-t}} < d_2) \\ &= Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \end{aligned} \tag{151}$$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= E[e^{-r(T-t)}Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\mathbb{1}_{\{Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}>K\}}] \\
&= E[Se^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\mathbb{1}_{\{Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}>K\}}]
\end{aligned}
\tag{152}
$$

$$
W_T - W_t \sim \mathcal{N}(0, T-t) \tag{153}
$$

$$
W_T - W_t = \sqrt{T-t}Z \tag{154}
$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \int_{\mathbb{R}} Se^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\mathbb{1}_{\{Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}>K\}} \times \frac{e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz \\
&= \int_{\{Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}>K\}} Se^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\frac{e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz \\
&= \int_{\{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}>ln(\frac{K}{S})\}} S\frac{e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dz
\end{aligned}
\tag{155}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= -\sigma\sqrt{T-t} \\
&= S\int_{\{\sigma\sqrt{T-t}(y+\sigma\sqrt{T-t})+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)>ln(\frac{K}{S})\}} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{2\pi}}dy \\
&= S\int_{\{y>\frac{ln(\frac{Ke^{-r(T-t)}}{S})-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\}} \\
&= S\mathcal{N}(d_1)
\end{aligned}
\tag{156}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t,S) &= \frac{\partial}{\partial S}E[e^{-r(T-t)}(Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K)_+] \\
&= E[e^{-r(T-t)}\mathbb{1}_{\{Se^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}>K\}}] \\
&= \mathcal{N}(d_1)
\end{aligned}
\tag{157}
$$

6.5.1 Corrollaire

Le prix d'un put européen de payoff $g(S) = (K-S)_+$ dans le modèle de B&S est donné par:

$$
P_{BS}(t,S) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S\mathcal{N}(-d_1) \tag{158}
$$

Le ratio de couverture (delta du put) est donné par:

$$\frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(t,S) = \mathcal{N}(d_1) - 1 \tag{159}$$

Parité Call-Put:

$$\begin{aligned} &Call(t,S,K,T) - Put(t,S,K,T) \\ =&S - Ke^{-r(T-t)} \\ =&S - KB(t,T) \end{aligned} \tag{160}$$

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(r,S) - \frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(r,S) = 1 - 0 = 1 \tag{161}$$

$$\frac{\partial P_{BS}}{\partial S} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} - 1 = \mathcal{N}(d_1) - 1 \tag{162}$$

$$P_{BS}(t,S) = -S + Ke^{-r(T-t)} + S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) \tag{163}$$

$$1 - \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(-x) \tag{164}$$

Donc

$$P_{BS}(t,S) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S\mathcal{N}(-d_1) \tag{165}$$

Remarque:

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1) \tag{166}$$

et

$$\frac{\partial P_{BS}}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1) - 1 \tag{167}$$

Ainsi, C_{BS} est croissant et P_{BS} est décroissant par rapport à S.

6.6 Les grecques

Pour comprendre le comportement des options en fonction des différents propriétés du modèle, on calcule les subtilités du prix Black Scholes par rapport à ces propriétés:

1. Delta

   Le delta est la sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle de l'actif sous-jacent.

$$\Delta^c = \frac{\partial C_{BS}}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1) \tag{168}$$

$$\Delta^p = \frac{\partial P_{BS}}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1) - 1 \tag{169}$$

2. Gamma Le gamma est défini comme la dérivée du prix au b, en la dérivée du delta.

$$\Gamma^c = \Gamma_p = \frac{\partial^2 C_{B,S}}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial S^2} = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \tag{170}$$

$$n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \tag{171}$$

   Puisque Γ est positif, le prix du call et du put est convexe en S.. Le Gamma est grand quand l'option est à la monnaie au proche de l'échéance

3. le Vega

   Le vega est la sensibilité du prix par rapport à la volatilité:

$$\nu = \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} = Sn(d_1)\sqrt{T-t} \tag{172}$$

   Le prix du put et du call est croissant par rapport à la volatilité. Le Vega est plus grande à la monnaie mais décroit pour les options proches de la maturité.

4. Théta

   Le théta est la sensibilité par rapport au temps.

$$\Theta^c = \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} = -\frac{Sn(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) < 0 \tag{173}$$

$$\Theta^p = \frac{\partial P_{BS}}{\partial t} = -\frac{Sn(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) \tag{174}$$

   Ainsi, Le prix du call est décroissant par rapport au temps

5. Rho

Le Rho est la sensibilité par rapport au taux d'intérêt r

$$\rho^c_{BS} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2) > 0 \tag{175}$$

$$\rho^p_{BS} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial r} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) < 0 \tag{176}$$

Ainsi, call est croissant et le put est décroissant par rapport au taux d'intérêt.