

Mineur Finance 1

November 3, 2016

Contents

1	Cadre de valorisation des produits dérivés	2
1.1	Introduction	2
1.2	Hypothèse	2
1.3	Propriété	2
1.4	Options américaines	2
2	Théorie de la valorisation dans le cas discret à une période	3
2.1	Introduction	3
2.2	Modèle à une période	3
2.3	Résultats de non-arbitrage	4
2.3.1	Définition	4
2.3.2	Définition 2	4
2.3.3	Théorème	5
3	Marché complet et valorisation d'actif conditionnel	7
4	Le modèle binomial à une période	9

1 Cadre de valorisation des produits de devise

1.1 Introduction

1.2 Hypothèse

1.3 Propriété

1.4 Options américaines

Option américaine similaire aux options européens mais l'exercice du droit pourra se faire à toute date t avant maturité T .

On note $CallAmer_t(T, K)$ et $PutAmer_t(T, K)$ les prix des calls et puts américains au t .

On a

$$CallAmer_t(T, K) \geq Call_t(T, K) \quad (1)$$

$$PutAmer_t(T, K) \geq Put_t(T, K) \quad (2)$$

Propriété: En l'absence de dividende, on a:

$$CallAmer_t(T, K) = Call_t(T, K) \quad (3)$$

Preuve:

$$Call_t(T, K) \geq (S_t - K)_+ \quad (4)$$

Il n'est pas optimal d'exercer avant la maturité. Donc $CallAmer_t(T, K) = Call_t(T, K)$

Remarque: Pour le Put, la propriété n'est pas vraie.

$$Put_t(T, K) \leq KB(t, T) \quad (5)$$

Pour un certain scénario, le prix de put inférieur au prix d'exercice. $Put_t(T, K) < (S_t - K)_+$.

Pour S_t tel que $KB_t(T) < K - S_t \Leftrightarrow S_t < (1 - B_t(T))K$ Donc, on a

$$Put_t(T, K) < K - S_t \quad (6)$$

2 Théorie de la valorisation dans le cas discrèt à une période

2.1 Introduction

Nous avons vu que les contrats à termes peuvent etre valorise par la principe de non arbitrage alors que ce principe ne donne que des bornes sur les prix des options. La valorisation de ces produits assez complexes necessite l'introduction des modeles probabilistes pour decrire les scenarios possibles du marché.

Dans ce marche, si on trouve une strategie qui réplique le payoff de l'option, alors la portefeuille construite par cette strategie réplique l'option.

Par l'absence de opportunité d'arbitrage, la valeur de ce portefeuille est la meme que celui de l'option. Cependant, ce prix est dépendant du modèle qui doit etre proche de la réalité.

2.2 Modèle à une période

On consirère qu'il y a $d + 1$ actifs financiers et 2 dates, $t = 0, t = 1$. L'aléa du modèle est represente par K états dans $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$.

En $t = 1$, avec des probabilités $\{p_1, \dots, p_K\}, (p_i > 0)$.

Le prix de l'actif i au t est noté $S_t^i, 0 \leq i \leq d$. S^0 represente l'actif sous risque ($S_0^0 = 1, S_1^0 = e^R \approx 1 + R$) Une strategie $\theta \in \mathbb{R}^{d+1}$ est le vecteur contenant le nombre d'unité de chaque actif dans ce portefeuille V entre $t = 0$ et $t = 1$.

La valeur de V en t

$$V_t = V_t^\theta = \sum_{i=0}^d \theta_i S_t^i \quad (7)$$

Le gain est defini par

$$G = V_1 - V_0 = \sum_{i=0}^d \theta_i (S_1^i - S_0^i) = \sum_{i=0}^d \theta_i \Delta S^i \quad (8)$$

On note $\tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_0^i}$, $\tilde{V}_t = \frac{V_t}{S_0^0}$ et $\tilde{G}_t = \frac{G}{S_0^0}$, alors

$$\{\tilde{V}_t = \theta_0 + \sum_{i=0}^d \theta_i \tilde{S}_t^i \quad (9)$$

$$\tilde{G} = \tilde{V}_1 - \tilde{V}_0 = \sum_{i=1}^d \theta_i (\tilde{S}_1^i - \tilde{S}_0^i) = \sum_{i=1}^d \theta_i \Delta \tilde{S}^i \quad (10)$$

2.3 Résultats de non-arbitrage

2.3.1 Définition

Une opportunité d'arbitrage est une strategie θ tel que

1. $V_0^\theta = 0$
2. $P(V_1^\theta \geq 0) = 1$ et $P(V_1^\theta > 0) > 0$

où

1. $P(G \geq 0) = 1$
2. $P(G > 0) > 0$

Commencer avec une état avec valeur 0, et la probabilité de gagner de l'argent est superieure   0.

2.3.2 Définition 2

Une mesure de probabilité Q est dite risque neutre si:

1. $Q \sim P$, c'est   dire, $Q(\omega_i) > 0, \forall 1 \leq i \leq K$
2. $E^Q[\tilde{S}_1^i] = \tilde{S}_0^i, \forall i$

2.3.3 Théorème

Le marché n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement s'il existe au moins une mesure de probabilité risque neutre.

Preuve:

(\Rightarrow) Supposons qu'il existe une mesure de probabilité risque neutre. Supposons qu'il existe une opportunité d'arbitrage, donc

$$Q(G^\theta \geq 0) = 1, Q(G^\theta > 0) > 0 \quad (11)$$

$$E^Q[\tilde{G}^\theta] = 0 \quad (12)$$

contradiction.

(\Leftarrow) Supposons qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage

$$\mathcal{E} = \{(q_1, \dots, q_K) \mid \sum_{i=1}^K q_i, q_i > 0\} \quad (13)$$

$$C = \{E^Q[\Delta \tilde{S}] \mid Q \in \mathcal{E}, \Delta \tilde{S} = (\Delta \tilde{S}^1, \dots, \Delta \tilde{S}^d)^T\} \quad (14)$$

Il faut démontrer que $0 \in C$.

Supposons $0 \notin C$, puisque C est convexe, d'après le theoreme de separation des convexes, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^d, \alpha^t \geq 0, \forall x \in C \quad (15)$$

$$\exists x_0 \in C, \alpha^t x_0 > 0 \quad (16)$$

$$x_0 = E^{Q_0}[\Delta \tilde{S}] \quad (17)$$

Soit α_0 arbitraire, on considère la strategie $\theta = (\alpha_0, \alpha)$ On a $\forall \theta \in \mathcal{E}, Q(\tilde{G}^\theta \geq 0) = 1, Q_0(\tilde{G}^\theta > 0) > 0$ On a $\forall Q \in \mathcal{E}, E^Q[\tilde{G}^\theta] \geq 0, E^Q[\tilde{G}^\theta] > 0$

S'il existe ω_i tel que $G^Q(\omega_i) < 0$, on va construire une mesure Q^t :

$$Q^\epsilon(\omega) = 1 - \frac{K-1}{K} \epsilon, \omega = \omega_i \quad (18)$$

$$\frac{\epsilon}{K} \omega \neq \omega_i$$

on peut choisir ϵ suffisamment actif tel que $E^{Q^\epsilon}[\tilde{G}^\theta] < 0$. Donc $\forall i, G^\theta(\omega_i) \geq 0 \Rightarrow Q^0(G^\theta \geq 0) = 1$ mais puisque $E^{Q_0}[\tilde{G}^\theta] > 0$, alors $Q^0(\tilde{G}^\theta > 0) > 0$

=> Il y a arbitrage. Contradiction, donc $0 \in C \Rightarrow \exists$ une mesure de proba risque neutre.

Exemple:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \mathbb{P} = \{0.3, 0.3, 0.2, 0.2\} \quad (19)$$

$R = 0.25$, S^0 : Actif sans risque vaut 1 en $t = 0$. S^1 : une action qui vaut 1 en $t = 0$. S^2 : un call sur S^1 de strike $K = 1$ qui vaut 0.3 en $t = 0$.

(table ici)

Un actif vaut toujours la meme valeur peu importe l'état.

Exemple:

1. Avec la strategie $\theta = (0.7, -1, 1)$, calculer la gain G de V^t
2. Est-ce qu'il y a une opportunité d'arbitrage dans ce marché?

$$G^\theta(\omega_i) = V_1(\omega_i) - V_0, V_0 = 1 * 0.7 - 1 + 0.3 = 0 \quad (20)$$

$$G^\theta(\omega_1) = 0.375, G^\theta(\omega_{2,3,4}) = -0.125 \quad (21)$$

Cherchons $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ tel que $0 < q$ et

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 &= 1 \\ \frac{0.5}{1.25}q_1 + \frac{1}{1.25}q_2 + \frac{1}{1.25}q_3 + \frac{2}{1.25}q_4 &= 1 \\ 0.5/1.25q_3 + 1/1.25q_4 &= 0.3 \end{cases} \quad (22)$$

Et on a

$$\begin{cases} q_1 &= \frac{1}{4} \\ q_2 &= q_4 \\ q_3 &= \frac{3}{4} - 2q_4 \end{cases} \quad (23)$$

l'ensemble des mesures risque neutre est :

$$\{(\frac{1}{4}, \lambda, \frac{3}{4} - 2\lambda) | 0 < \lambda < \frac{3}{8}\} = \text{empty} \Rightarrow AOA \quad (24)$$

3 Marché complet et valorisation d'actif conditionnel

On suppose que le marché est sans arbitrage.

1. Def 1

Un actif conditionnel est une variable aléatoire H dans (Ω, F, P) .

2. Def 2

Un actif conditionnel est réalisable s'il existe une stratégie θ tel que $H = V_1^\theta$

3. Remarque

Par AOA, on a prix de l'actif conditionnel est $P(H) = V_0^\theta$.

Proposition: Le juste prix d'un actif conditionnel réalisable H est:

$$P(H) = E^Q[\tilde{H}] = E^Q\left[\frac{H}{S_1^\theta}\right] = E^Q\left[\frac{H}{1+R}\right] \quad (25)$$

où Q est une mesure de proba risque neutre.

preuve: θ est une stratégie tel que $V_1^\theta = H$

$$E^Q[\tilde{H}] = E^Q[\tilde{V}_1^\theta] = E^Q[\tilde{V}_0^\theta + \sum_{i=1}^d \theta_i \Delta \tilde{S}^i] = V_0^\theta + \sum_{i=1}^d \theta_i E^Q[\Delta \tilde{S}^i] = V_0^\theta = P(H) \quad (26)$$

Def 3:

Un marché est complet si tout actif conditionnel est réalisable.

Remarque: A : matrice des payoff: $A_{(i,k)}(S_1^i(w_k))$. Un actif conditionnel est réalisable si $\exists \theta$ tel que $\theta^T A = H$. Et donc le marché est complet si $\theta^T A = H$ a une solution pour tout $H \in \mathbb{R}^K$.

Donc il faut que A a au moins K lignes linéairement indépendantes.[une condition nécessaire est donc $d+1 \geq K$]

Théorème: Un marché sans arbitrage est complet ssi il existe une seule mesure de probabilité risque neutre.

Preuve: Supposons que le marché est complet. Prenons l'actif conditionnel $\mathbb{K}_{\{w_k\}}(1 \leq k \leq K)$. Donc pour toute mesure de proba risque neutre q on a:

$$P_k = P(\mathbb{K}_{\{w_k\}}) = E^Q[\frac{\mathbb{K}_{\{w_k\}}}{1+R}] = \frac{1}{1+R}Q(\{w_k\}) \quad (27)$$

=> Unicité de Q .

Supposons que la mesure risque neutre est unique. Démontrer que le marché est complet.

Si le marché n'est pas complet $\exists z \in \mathbb{R}^{d+1}, z \neq 0$ tel que $z^t A 0$. Soit $Q_i | Q_2 = \frac{Q(w_k) + \epsilon z_k}{1 + \epsilon \sum z_k}$. Il suffit de prendre ϵ suffisamment petit, $0 < Q_2(w_k) < 1$.

$$E^{Q_\epsilon} = \frac{1}{\sum_{k=1}^K (Q(w_k) + \epsilon z_k \tilde{S}_1^i(w_k))} \sum_{k=1}^K (Q(w_k) + \epsilon z_k \tilde{S}_1^i(w_k)) = \frac{1}{\sum_{k=1}^K 1} \sum_{k=1}^K Q(w_k) \tilde{S}_1^i(w_k) = E^Q[\tilde{S}_1^i] = \tilde{S}_0^i \quad (28)$$

Exercice 1. $\Omega = \{w_1, w_2\}$, on cherche le modele suivant:

$$S_0^0 = 1, \quad S_0^1 = 1.1$$

$$S_1^0 = 1.05, \quad S_1^1 = 1.15$$

Est-ce que le marché est sans arbitrage? Si ce n'est pas le cas, mettre au cas une strategie d'arbitrage.

		S_0^1	w_1	w_2	
Cherchons les mesures proba risque neutre	$i = 0$	1	1.1	1.1	Cher-
	$i = 1$	10	12	11	chons P_1, P_2 tel que

$$P_1 > 0, P_2 > 0, E[\tilde{S}_1^0] = \tilde{S}_0^0, E[\tilde{S}_1^1] = \tilde{S}_0^1 \quad (29)$$

$$P_1 * \frac{1.1}{1.1} + P_2 \frac{1.1}{1.1} = \frac{1}{1} \text{ and } P_1 \frac{12}{1.1} + P_2 \frac{11}{1.1} = \frac{10}{1} \quad (30)$$

=>

$$P_1 = 0, P_2 = 1 \quad (31)$$

$P_1 > 0$ n'est pas vérifié, donc il existe opportunité d'arbitrage. On veut 10 de S^0 et on achète 1 de S^1 , $V_0 = 10S_0^0 + S_0^1 = 0$

Donc

$$V_1 = 10(1 + R) + 12 = 1 \quad (32)$$

$$- > -10(1 + R) + 11 = 0 \quad (33)$$

2. $\Omega = \{w_1, w_2\}$, on cherche le modele suivant:

$$S_0^0 = 1 - > 1 + \Omega(1 = 10\%)$$

$$S_0^1 0 - > 12, w_1, P_1 - > 8, w_2, P_2$$

1. Est-ce que le marche est sans arbitrage(complet)?

2. Calculer le prix d'un call de strike 10

3. Calculer de deux façons le prix d'un put de strike 10

Solution: $P_1 = \frac{3}{4}, P_2 = \frac{1}{4}$, donc il existe unique mesure probabillite risque neutre. Donc le marché est sans arbitrage(complet).

2) Puisque le marché est complet et sans arbitrage, alors:

$$Call_0(1, 10) = E^Q[\frac{(S_1^1 - 10)_+}{1 + R}] = \frac{\frac{3}{4} * 2 + \frac{1}{4} * 0}{1.1} = \frac{15}{11} \quad (34)$$

3)

$$c(1, 10) - P(1, 10) = S_0^1 - \frac{K}{1 + R} = \frac{10}{11} \quad (35)$$

$$\Rightarrow P(1, 10) = \frac{5}{11} \quad (36)$$

$$P(1, 10) = E^Q[\frac{(10 - S_1^1)_+}{1 + R}] = 0 \times \frac{3}{4} + \frac{2}{1.1} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{11} \quad (37)$$

4 Le modèle binominale à une période

$T = 1, \Omega = \{w_u, w_d\}, F = P(\Omega), P$ mesure de proba dans $(\Omega, F), (0 < P(w_u) < 1)$

$$S_0^0 = 1 - > 1 + R \quad (38)$$

$$S_0^1 = s - > us, w_u, P_1(u >= d) \quad (39)$$

$$- > ds, w_d, P_2 \quad (40)$$

Proposition:

1. Le modèle est viable (sans arbitrage), ssi

$$d < 1 + R < u \quad (41)$$

(condition de non-arbitrage)

2. Le prix d'un actif conditionnel H est:

$$P(H) = E^Q\left[\frac{H}{1+R}\right] \quad (42)$$

où

$$Q(w) = \begin{cases} \frac{1+R-d}{u-d} & \text{si } w = w_d \\ \frac{u-1-R}{u-d} & \text{si } w = w_u \end{cases} \quad (43)$$

En plus, la portefeuille de couverture est donnée par (θ_0, θ_1) où

$$\theta_1 = \frac{H(w_u) - H(w_d)}{us - ds} \quad (44)$$

et

$$\theta_0 = P(H) - \theta_1 s \quad (45)$$

Preuve

1. Cherchons des mesures de proba risque neutre $Q = \{q_u, q_d\}$ ($q_u = Q(w_u), q_d = Q(w_d)$)

$$\begin{cases} q_u + q_d = 1 \\ \frac{q_u us + q_d ds}{1+R} = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_d = 1 - q_u \\ q_u s(u-d) = s(1+R) - ds \end{cases} \quad (46)$$

\Leftrightarrow

$$q_d = \frac{u-1-R}{u-d} q_u = \frac{1+R-d}{u-d} \quad (47)$$

Donc $\exists!$ mesure de proba risque neutre ssi $d < 1 + R < u$

2. Le marché est sous arbitrage et complet

$$\Rightarrow P(H) = E^Q\left[\frac{H}{1+R}\right] \quad (48)$$

Cherchons (θ_0, θ_1) tel que $\theta_0 S_1^0 + \theta_1 S_1^1 = H$

$$\begin{cases} \theta_0(1+R) + \theta_1(us) &= H(w_u) \\ \theta_0(1+R) + \theta_1(ds) &= H(w_d) \end{cases} \quad (49)$$

$$\Rightarrow \theta_1(us - ds) = H(w_u) - H(w_d) \quad (50)$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{H(w_u) - H(w_d)}{us - ds} \quad (51)$$

$$\theta_0 \times 1 + \theta_1 s = P(H) \quad (52)$$

$$\Rightarrow \theta_0 = P(H) - \theta_1 s \quad (53)$$

La strategie de couverture est noté (θ_0, θ_1) ou $(P(H), \theta_1) \Rightarrow$ le prix à définir pour l'acheter si le vendeur veut eliminer tout risque.