Mineur Finance 1

October 27, 2016

Contents

1 Cadre de valorisation des produite devive

1.1 Introduction

1.2 Hypothese

1.3 Propriete

1.4 Options americaines

Option américaine similaire aux options europeens mais l'exercise du droit pourra se faire à toute date t avant maturité T.

On note $CallAmeric_t(T,K)$ et $PutAmeric_t(T,K)$ les prix des calls et puts americain au t.

On a

$$CallAmer_t(T,K) >= Call_t(T,K) \tag{1}$$

$$PutAmer_t(T,K) >= Put_t(T,K) \tag{2}$$

Propriété: En l'absence de divident, on a:

$$CallAmer_t(T,K) = Call_t(T,K) \tag{3}$$

Preuve:

$$Call_t(T,K) >= (S_t - K)_+ \tag{4}$$

Il n'est pas optimal d'exercer avant la maturité. Donc $CallAmer_t(T,K) = Call_t(T,K)$

Remarque: Pour le Put, la propriété n'est pas vraie.

$$Put_t(T,K) <= KB(t,T) \tag{5}$$

Pour un certain scenario, le prix de put inferieur au prix d'exercise. $Put_t(T,K) < (S_t - K)_+$.

Pour S_t tel que $KB_t(T) < K - S_t <=> S_t < (1 - B_t(T))K$ Donc, on a

$$Put_t(T, K) < K - S_t \tag{6}$$

2 Théorie de la valorisation dans le cas discrèt à une période

2.1 Introduction

Nous avons vu que les contrats à termes peuvent etre valorise par la principe de non arbitrage alors que ce principe ne donne que des bornes sur les prix des options. La valorisation de ces produits assez complexes necessite l'introduction des modeles probabilistes pour decrire les scenarios possibles du marché.

Dans ce marche, si on trouve une strategie qui réplique le payoff de l'option, alors la portefeuille construite par cette strategie réplique l'option.

Par l'absence de opportunite d'arbitrage, la valeur de ce portefeuille est la meme que celui de l'option. Cependant, ce prix est dépendant du modèle qui doit etre proche de la réalité.

2.2 Modèle à une période

On consirère qu'il uy a $d + 1$ actifs financiers et 2 dates,: $t = 0, t = 1$. L'aléa du modèle est represente par K etats dans $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$.

En $t = 1$, avec des probabilités $\{p_1, \ldots, p_K\}, (p_i > 0)$.

Le prix de l'actif i au t est noté $S_t^i, 0 <= i <= d$. S^0 represente l'actif sous risque ($S_0^0 = 1, S_1^0 = e^R \approx 1 + R$) Une strategie $\theta \in \mathbb{R}^{d+1}$ est le vecteur contenant le nombre d'unité de chaque actif dans ce portefeuille V entre $t = 0$ et $t = 1$.

La valeur de v en t

$$V_t = V_t^\theta = \sum_{i=0}^{d} \theta_i S_t^i \tag{7}$$

* Le gain est defini par

$$G = V_1 - V_0 = \sum_{i=0}^{d} \theta_i (S_1^i - S_0^i) = \sum_{i=0}^{d} \theta_i \Delta S^i \tag{8}$$

On note $\tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}$, $\tilde{V}_t \frac{V_t}{S_t^0}$ et $\tilde{G}_t = \frac{G}{S_t^0}$, alors

$$\{\tilde{V}_t = \theta_0 + \sum_{i=0}^{d} \theta_i \tilde{S}_t^i \tag{9}$$

$$\tilde{G} = \tilde{V}_1 - \tilde{V}_0 = \sum_{i=1}^{d} \theta_i (\tilde{S}_1^i - \tilde{S}_0^i) = \sum_{i=1}^{d} \theta_i \Delta \tilde{S}^i \tag{10}$$

2.3 Résultats de non-arbitrage

2.3.1 Définition

Une opportunite d'arbitrage est une strategie θ tel que

1. $V_0^\theta = 0$
2. $P(V_1^\theta >= 0) = 1$ et $P(V_1^\theta > 0) > 0$

où

1. $P(G >= 0) = 1$
2. $P(G > 0) > 0$

Commencer avec une etat avec valeur 0, et la probabilite de gagner de l'argent est superierue à 0.

2.3.2 Définition 2

Une mesure de probabilité Q est dite risque neutre si:

1. Q P, c'est a dire, $Q(\omega_i) > 0, \forall 1 <= i <= K$
2. $E^Q[\tilde{S}_1^i] = \tilde{S}_0^i, \forall i$

2.3.3 Théorème

Le marché n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement s'il existe au moins une mesure de probabilité risque neutre.

Preuve:

(=¿) Supposons qu'il existe une mesure de probabilité risque neutre. Supposons qu'il existe une opportunité d'arbitrage, donc

$$Q(G^{\theta} >= 0) = 1, Q(G_{\theta} > 0) > 0 \tag{11}$$

$$E^{Q}[\tilde{G}^{\theta}] = 0 \tag{12}$$

contradiction.

(¡=) Supposons qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage

$$\mathcal{E} = \{(q_1, \ldots, q_K) | \sum_{i=1}^{K} q_i, q_i > 0\} \tag{13}$$

$$C = \{E^{Q}[\Delta\tilde{S}] | Q \in \mathcal{E}\}, \Delta\tilde{S} = (\Delta\tilde{S}^1, \ldots, \Delta\tilde{S}^d)^T \tag{14}$$

Il faut demontrer que $0 \in C$.

Supposons $0 \notin C$, puisque C est convexe, d'après le theoreme de separation des convexes, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^d, \alpha^t >= 0, \forall x \in C \tag{15}$$

$$\exists x_0 \in C, \alpha^t x_0 > 0 \tag{16}$$

$$x_0 = E^{Q_0}[\Delta\tilde{S}] \tag{17}$$

Soit α_0 arbitraire, on considère la strategie $\theta = (\alpha_0, \alpha)$ On a $\forall \theta \in \mathcal{E}, Q(\tilde{G}^{\theta} >= 0) = 1, Q_0(\tilde{G}^{\theta} > 0) > 0$ On a $\forall Q \in \mathcal{E}, E^{Q}[\tilde{G}^{Q}] >= 0, E^{Q}[\tilde{G}^{Q}] > 0$

S'il existe ω_i tel que $G^{Q}(\omega_i) < 0$, on va construire une mesure Q^t:

$$\begin{aligned} Q^{\epsilon}(\omega) =& 1 - \frac{K-1}{K}\epsilon, \omega = \omega_i \\ & \frac{\epsilon}{K}\omega \neq \omega_i \end{aligned} \tag{18}$$

on peut choisir ϵ suffisamment actif tel que $E^{Q_\epsilon}[\tilde{G}^\theta] < 0$. Donc $\forall i, G^\theta(\omega_i) >= 0 => Q^0(G^\theta >= 0) = 1$ mais puisque $E^{Q_0}[\tilde{G}^\theta] > 0$, alors $Q^0(\tilde{G}^t heta) > 0$

=¿ Il y a arbitrage. Contradition, donc $0 \in C =>$ $\exists$ une mesure de proba risque neutre.

Exemple:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \mathbb{P} = \{0.3, 0.3, 0.2, 0.2\} \tag{19}$$

$R = 0.25$, S^0: Actif sans risque vaux 1 en $t = 0$. S^1: une action qui vaut 1 en $t = 0$. S^2: un call sur S^1 de strike $K = 1$ qui vaut 0.3 en $t = 0$.

(table ici)

Un actif vaut toujours la meme valeur peu importe l'état.

Exemple:

1. Avec la strategie $\theta = (0.7, -1, 1)$, calculer la gain G de V^t

2. Est-ce qu'il y a une opportunité d'arbitrage dans ce marché?

$$G^\theta(\omega_i) = V_1(\omega_i) - V_0, V_0 = 1 * 0.7 - 1 + 0.3 = 0 \tag{20}$$

$$G^\theta(\omega_1) = 0.375, G^\theta(\omega_{2,3,4}) = -0.125 \tag{21}$$

Cherchons $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ tel que $0 < q$ et

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 &= 1 \\ 0.5/1.25q_1 + 1/1.25q_2 + 1/1.25q_3 + 2/1.25q_4 &= 1 \\ 0.5/1.25q_3 + 1/1.25q_4 &= 0.3 \end{cases} \tag{22}$$

Et on a

$$\begin{cases} q_1 &= \frac{1}{4} \\ q_2 &= q_4 \\ q_3 &= \frac{3}{4} - 2q_4 \end{cases} \tag{23}$$

l'ensemble des mesures risque neutre est :

$$\{(\frac{1}{4}, \lambda, \frac{3}{4} - 2\lambda) | 0 < \lambda < \frac{3}{8}\} = empty => AOA \tag{24}$$