江苏大学
硕士研究生入学考试样题

科目代码： 601

科目名称： 数学分析　　　　满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、填空题（4*5=20 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$ ________.

2. $\int \sec^3 x dx=$ ______________________.

3. 函数 $I(x)=\int_1^x t(1+2\ln t)dt$ 在 $[1,e]$ 上的最大值为______.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ 的和函数及其收敛域为____________.

5. 椭球体 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\},a>0,b>0,c>0$ 的体积为_____.

二、（10 分）(1) 简述数集 $E\subseteq R$ 的性质；(2) 若函数 $f(x)$ 在数集 E 上连续，问 $f(x)$ 在 E 上是否一定具有最大值和最小值，是否一定具有介值性？是否一定具有一致连续性？对你的论断进行必要论证。当数集 E 具有哪些性质时，上述问题的回答都是肯定的。

三、（15 分）(1) 设 $x_{i,j}(t)$ 为定义在 $[a,b]$ 上且具有一阶连续导数函数，$i,j=1,2$，一元函数 $X(t)$ 由如下行列式定义 $X(t)=\begin{vmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t)\end{vmatrix}$，计算 $\dfrac{d}{dt}X(t)$；

(2) 若 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$ 均满足方程 $x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=0$，

其中 $x'(t)=\dfrac{dx}{dt},x''(t)=\dfrac{d^2x}{dt^2}$. 证明：$\Phi(t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \varphi_2(t)\\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t)\end{vmatrix}$ 满足方程

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}=-p(t)\Phi(t).$$

四、（20 分）(1) 证明黎曼函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}, p,q\text{互素}，q>p \\ 0, & x=0,1,\text{以及}(0,1)\text{内无理数}\end{cases}$ 在区间 $[0,1]$ 上可积，并求其定积分 $\int_0^1 f(x)dx$；记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, x\in[a,b]$，求导数 $F'(x)$.

(2) 设 $\phi(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上非负连续，且在 $[a,b]$ 不全为零，证明 $\int_a^b \phi(x)dx>0$；并结合(1)结果说明黎曼函数在(0,1)上所有有理点都不连续.

五、（20 分）(1) 现用仪器测量某个工件的长度，假设无操作错误测量 n 次得到结果分别为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，请写出这 n 个测量值的平均值 $\overline{c}$；若记 c 表示工件长度，$f(c)=\sum_{i=1}^{n}(c-c_i)^2$，证明 $c=\overline{c}$ 是函数 $f(c)$ 的最小值点。

(2) 设 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上连续函数，现对 $[a,b]$ 作等距分划 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，其中 $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}, i=1,2,\cdots,n$，证明 $f(x_1)$，$f(x_2)$，…，$f(x_n)$ 这 n 个数的平均值，当 $n\to\infty$ 趋于函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上平均值 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

(3) 假设某个小岛上生活着狐狸和兔子，在时刻 t 狐狸的数量记为 $x(t)$，兔子数量记为 $y(t)$，设函数 $x(t)$，$y(t)$ 为满足 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(-a+by)-kx, \\ \dfrac{dy}{dt}=y(\alpha-\beta x)-ky,\end{cases}$ 的正的周期函数，且周期都为 $T>0$，其中 a,b,α,β,k 都是正常数. 请求出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在一个周期 $[0,T]$ 上平均值；若参数 k 表示猎人捕猎狐狸和兔子收获率($0<k<\alpha$)，请说明捕获率 k 增加时，对狐狸和兔子平均数量的影响.

六、（20 分）(1) $\sqrt{2}$ 是无理数，为了得到 $\sqrt{2}$ 的近似值，一般视 $\sqrt{2}$ 为 $f(x)=x^2-2$ 的零点，运用牛顿迭代法得到如下递推式：$x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{1}{x_n}$，$x_0=3$. 请证明数列 $\{x_n\}$ 收

敛且极限为$\sqrt{2}$.

(2) 考察定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数列$\{f_n(x)\}$，设存在常数$M>0$，$L>0$和x_0使得对任一自然数n都有 $|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\le\dfrac{ML^n(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$. 证明：函数列$\{f_n(x)\}$在任一有界闭区间$[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$上都一致收敛.

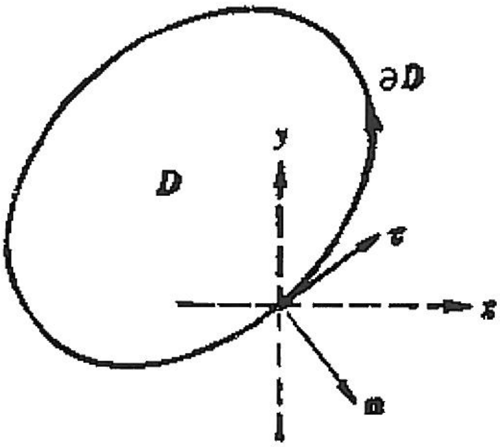
七、(10 分) 设有一个半径为$a>0$的均匀球体（密度为常数$\delta>0$），具有单位质量的质点 A 到球心的距离为$b\ge a$. 附：万有引力定律，两质点的引力大小与这两个质点的质量乘积成正比，与它们之间距离的平方成反比，引力方向在两质点连线上，假设万有引力常数为G. 试用微元法给出球体对质点 A 的引力表达式，并证明球体对质点 A 的引力等效于整个球体质量$\dfrac{4\pi a^3}{3}\delta$全部集中在球心时，球心对质点 A 的引力。

八、(10 分) 在方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$中作变量代换$u=x+y$，$v=x-y$，$w=xy-z$，并将$w$看作$u,v$的函数，证明变换后函数$w=w(u,v)$满足方程 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\dfrac{1}{2}$.

九、(15 分) (1) 给出$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx, n=0,1,2,\cdots$的表达式;

(2) 证明对每个自然数n，存在唯一的$x_n\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$满足$\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\sin^n x_n$，并证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

十、(10 分) 设函数$u(x,y),v(x,y)$具有二阶连续偏导数，记$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，运用 Green 定理证明：



$\iint_D v\Delta u dxdy+\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds$，其中 D 为有界闭区域，光滑曲线 ∂D 是 D 的边界，∂D 的方向关于 D 是正向的，$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ 是函数 u 沿 ∂D 的外法向量 $\vec{n}$（即法向量朝外）的方向导数。