# 江苏大学

## 硕士研究生入学考试样题

科目代码： 601
科目名称： 数学分析

满分： 150 分

1. 填空（本题共 24 分，每一空格 3 分）

1)）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{22n+1}}{2n(2n+1)}$ 的收敛半径和和函数分别是____________

和______________________；

2）函数 $u=e^{xyz}$ 在点 $A(0,-1,1)$ 处沿点 $B(1,0,-1)$ 到 A 的方向 $\overrightarrow{BA}$ 的方向导数是________；

3）曲线： $x=a\sin^2 t$ ， $y=b\sin t\cos t$ ， $z=c\cos^2 t$ 在点 $\left(\frac{a}{2}\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 处的切线方程为：________，法平面方程是：____________；

4）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{1+n^2x^2}f(x)dx=$________________；

5）极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\sin x\arcsin x}=$________；极限 $\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\sqrt{n^2-n}\pi\right)=$________ 。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足方程 $f(x^\alpha)=f(x)$，且 $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$，则当 $\alpha$ 满足何值时 $f(x)\equiv f(1)$, $x\in(0.+\infty)$，证明之。（10 分）

3. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，并据理说明其逆命题是否成立？（10 分）

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任何 $x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\le\frac{1}{2}|f(x)|$，求证：存在 $x_0\in[a.b]$，满足 $f(x_0)=0$。（10 分）

5. 证明 $f(x)=x^2$ 在 $[a,b]$ 上一致连续但是在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续。（10 分）

6. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，且对任意 $x,y\in R$，成立 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。求证：（1） $f(x)$ 在 $R$ 上连续；（2） $f(x)=f(1)x$。（12 分）

7. 证明不等式：当 $x>0$ 时，$\frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$。（8 分）

8. 设点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 $F(x,y,z)=1$ 的非奇异点，$F$ 在 $U(P_0)$ 可微，且为 $n$ 次齐次函数，证明：此曲面在 $P_0$ 处的切平面方程是 $xF_x(P_0)+yF_y(P_0)+zF_z(P_0)=n$。（10 分）

9. 设 $f$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数。且具有二阶连续导数，证明：$f$ 的傅立叶级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f$。（10 分）

10. 若 $f(x)$ 为区间 $[0,1]$ 上的单调函数，且 $\int_0^1 x^a f(x)dx$ 存在（这里 $a$ 是非负实数），证明：$\lim\limits_{x\to 0}x^{a+1}f(x)=0$。（10 分）

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有二阶导数，且 $|f''(x)|\le M$，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值，求证：$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$。（8 分）

12. 证明可微函数 $F(x,y,z)$ 是 $k$ 次齐次函数的充要条件是：$xF_x+yF_y+zF_z=kF$。（10 分）

13. 假设 $f(x)$ 是 $(0,\infty)$ 单调递减连续正函数，又 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$，求证数列 $\{a_n\}$ 收敛。（10 分）

14. 计算 $I=\iint\limits_S xydydz+yzdzdx+zxdxdy$，其中 $S$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 在 $-1\le z\le 1$，$z>0$ 的部分，曲面正向为内法方向。（8 分）