江苏大学

2012年硕士研究生入学考试初试试题（ A卷 ）

科目代码：853
科目名称：高等代数　　　　　　　　　　　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一（20分）设$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&3&2\end{bmatrix}$

求：1）A的特征多项式

2）A的不变因子、行列式因子、初等因子；

3）A的Jordan标准形．

二（15分）设P是数域，$A=\begin{bmatrix}-2&1\\0&-2\end{bmatrix}\in P^{2\times 2}$，$f(x)=x^2+3x+2$，

对$\forall X\in P^{2\times 3}$，$T:X\to f(A)X$

1）证明：T是数域P上线性空间$P^{2\times 3}$的线性变换；

2）求T在基$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$E_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，$E_{13}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$E_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，

$E_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，$E_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$下的矩阵$B$．

三（20分）设W是数域P上n维线性空间V的一个m维子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$W$的一组基.则这组向量必定可扩充为整个空间的一组基。即在V中必定可找到$n-m$个向量$\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$，使得$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$是$V$的一组基．

四（20分）证明：如果$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_t$是一线性方程组的解，那么$u_1\eta_1+u_2\eta_2+\ldots+u_t\eta_t$（其中$u_1+u_2+\ldots+u_t=1$）也是一个解．

五（20分）$m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 Q，使 $A=PQ$.

六（20分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一实对称阵，若 A 的一切主子式 $|A_k|$ 全大于或等于零

其中

$$A_k=\begin{bmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{bmatrix} \qquad \text{其中} 1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n,$$

则 A 是半正定的 .

七（20分）证明：第二类正交变换一定以 -1 为它的一个特征值 .

八（15分）设 $A\in P^{m\times n}$，$B\in P^{n\times t}$，试证：

$$R(A)+R(B)-n\le R(AB)\le \min\left\{R(A),R(B)\right\} .$$