江苏大学

2012年硕士研究生入学考试初试试题（ A卷 ）

科目代码: 601

科目名称: 数学分析

满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

1. 填空题（本大题共 5 小题，每空 4 分，计 20 分）

（1）当$a=$______时，命题 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|a| \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 成立.。

（2）当$a=$______时，x^a 为 $x\to 0$ 时与 $\sin 2x-2\sin x$ 为同阶无穷小。

（3）当$a=$___ _时，x^a 为 $x\to+\infty$ 时与 $\prod\limits_{k=`}^{n}(1+x^k)$ 为同阶无穷大。

（4）曲线 $y=\ln x$ 上点__ ___处的切线平行于直线 $y=x-1$。

（5）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+(-1)^n)^n}{n}x^n$ 的收敛半径是______。

2. 选择题（下列各题中只有一项是正确答案，每小题 4 分，计 8 分）

（1）以下表述正确的是 （ ）

A 狄里克雷函数是单调有界的周期函数;

B 狄里克雷函数是单调无界界的周期函数;

C 狄里克雷函数是单调有界的非周期函数;

D．狄里克雷函数是有界非单调的周期函数。

（2）考虑二元函数的下面四个性质: ① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续; ② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数连续; ③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微; ④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在。则有 （ ）

A ②⇒③⇒①; B ③⇒ ②⇒①; C ③⇒ ④⇒①; D ③⇒ ①⇒;④

3. 已知 $a,b,c\in R^+$，证明 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\le[b-c[$，并说明其几何意义。（8 分）

4. 已知 $f(x)$ 为区间 I 上的有界函数，记 $M=\sup\limits_{x\in I} f(x)$，$m=\inf\limits_{x\cup I} f(x)$，证明:

$$\sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)|=M-m$$ 。（8 分）

5 证明对任意 $x_0\in[0,1]$，$\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$，其中 $R(x)$ 为 Riemann 函数。（8 分）

6 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内满足方程 $f(x)=f(3x)$，且 $\lim\limits_{x+\infty}f(x)=A$，证明：$f(x)\equiv A$，$x\in(0,+\infty)$。（8 分）

7 证明在区间 I 上的单调函数 $f(x)$ 至多只有第一类间断点。（8 分）

8 已知 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 的递增函数，且其值域为 $[f(a),f(b)]$，证明 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 的连续函数。（10 分）

9 已知 $f\in C[a,b]$，且对 $\forall x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$，使得 $f(y)\leq\frac{1}{2}|f(x)|$，求证：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$。（8 分）

10 证明;对任一多项式 $p(x)$，一定存在 x_1,x_2，使得 $p(x)$ 分别在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上严格单调。（10 分）

11 证明：（1）假设 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于有界函数 $f(x)$，则 $\{f_n(x)\}$ 除至多有限项外。在 I 上是一致有界的；（2）假设 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $f(x)$，且对任意正整数 n，函数 $f_n(x)$ 在区间 I 上有界，则 $\{f_n(x)\}$ 在 I 上是一致有界的。（10 分）

12. 设 $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$，其中 n 为正整数，$\varphi(x)$ 在 x_0 处连续。试讨论 1）$f(x)$ 在 x_0 处是否可导？

2）当 $\varphi(x_0)\neq 0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处是否取得极值？（10 分）

13.假设 $f(x)$ 为连续函数，证明：1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$；

2）$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$。(8 分)

14. 已知 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，证明：若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。（10 分）

15. 数咧 $\{u_n(x)\}$ 如下定义：$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}.x=\frac{1}{n}\\ 0,x\neq\frac{1}{n}\end{cases}$，其中 $n=1,2,\cdots$。证明级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛但不存在优级数。(8 分)

16. 假设 $f(x,y)$ 在 $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$ 上连续，且恒取正值，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_D(f(x,y))^{\frac{1}{n}}\sin xd\sigma$。（8 分）