江苏大学

硕士研究生入学考试样题

科目代码： 853　　　　　　　　　　满分： 150 分

科目名称： 高等代数

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一（20 分）　设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$，

求：（1）A 的不变因子、行列式因子、初等因子；

（2）A 的 Jordan 标准形.

二（15 分）　设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 是一对称矩阵，且 $|A_{11}| \neq 0$ ，证明：存在 $B=\begin{bmatrix} E & X \\ O & E \end{bmatrix}$，

使得 $B^T AB=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & * \end{bmatrix}$ ，其中*表示一个阶数与 A_{22} 相同的矩阵.

三（20 分）　设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，$W=\left\{B\in P^{3\times 3} \middle| AB=BA\right\}$，求 W 的维数和一组基.

四（20 分）　设 σ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换，$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ 分别是 σ 的属于互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ 的特征向量（$1\le k\le n$），则 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ 线性无关.

五（20 分）　设 V 是复数域上的 n 维线性空间，而线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 下的矩阵是一 Jordan 块，证明：

1. V 中包含 ε_1 的 σ 的不变子空间只有 V 自身；

2. V 自身任一非零的 σ 的不变子空间都包含 ε_n；

3. V 不能分解成两个非平凡的 σ 的不变子空间的直和.

六（20 分） 若实对称阵 A 半正定，则 A 的一切主子式全大于或等于零.

七（20 分） 设 T 为上三角的正交矩阵. 则 T 必为对角矩阵，且对角线上的元素为+1和-1.

八（15 分） 设 A 为数域 F 上 n 阶方阵且 $A^2 = A$. 证明：n 元齐次线性方程组 $AX = 0$ 与 $(A-E)X = 0$ 的解空间的直和是 F^n.