江苏大学
硕士研究生入学考试样题

科目代码：853　　　　　　　　　　　　　　　满分：150　分
科目名称：高等代数

一（15 分）在 $R^{2\times2}$ 中，设 $M=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{bmatrix}$，令 $\sigma(X)=XM-MX,\forall X\in R^{2\times2}$

1）试证：σ 是 $R^{2\times2}$ 的一个线性变换。

2）求 σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ 的维数和一组基。

二（20分）设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\3 & -3 & 6\\2 & -2 & 4\end{bmatrix}$

求：1）A 的特征多项式；

2）A 的不变因子、行列式因子、初等因子；

3）A 的Jordan标准形 .

三（20 分）若 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间，

试证：　维（V_1）+维（V_2）= 维（V_1+V_2）+维（$V_1\cap V_2$）

四（20 分）已知向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与向量组 B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 具有相同的秩，且 A 组可被 B 组线性表示，证明：A 组与 B 组等价.

五（20 分）设 A 是 $n\times n$ 矩阵（$n\geq 2$），A^* 是 A 的伴随矩阵.

试证明：当 $R(A)=n$ 时，$R(A^*)=n$；而当 $R(A)\leq n-1$ 时，$R(A^*)=0$ 或1.

六（20 分）设 A 是 n 级实对称矩阵，证明：存在一正实数 c，使得对任一实 n 维向量 X 都有

$$\left|X^T AX\right| \le cX^T X.$$

七（20 分）设 V_1 ，V_2 是欧氏空间 V 的两个子空间.证明：

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp},$$

$$(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}.$$

八（15 分）设 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)$，且 $(f(\lambda), f'(\lambda))=d(\lambda)$，

$h(\lambda)=f(\lambda)/d(\lambda)$，证明：$A$ 相似于对角阵的充要条件是 $h(A)=0$.