江苏大学
硕士研究生入学考试样题

科目代码： 601
科目名称： 数学分析

满分： 150 分

一、填空（4*5=20 分）

1.极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$=________________。

2.定积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx$=________________。

3.级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛半径是________________。

4.已知 $f(x)=x^4e^x$，则 $f^{(100)}(0)$=________________。

5.函数 $\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$ 的一个原函数是________________。

二、设 $a_n\geq 0, n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$ 。（10 分）

三、已知 S 为有界数集，且 $\sup S=a\notin S$，证明：存在严格单调递增数列 $\{x_n\}\subset S$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 。（10 分）

四、叙述并证明 Heine-Borel 有限覆盖定理。（12 分）

五、证明区间 $[a,b]$ 上的单调函数必是可积函数。（10 分）

六、证明：函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上一致收敛于 f 的充要条件是 $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$ 。（10 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，证明下列不等式成立

$\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\leq\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$，其中 a_0,a_n,b_n 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数。（10 分）

八、证明：若二元函数二阶混合偏导数连续。则二阶混合偏导数相等。（10 分）

九、已知函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上连续，证明：若 $I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$ 在 $\{[a,b]$ 上一致收敛，则 $I(x)$ 在 $\{[a,b]$ 上连续。（10 分）

十、已知连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx$$ 。（10 分）

十一、证明：若 a,b,c 均为正数，不等式 $(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\le a^a b^b c^c$ 恒成立。（10 分）

十二、证明 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 。（8 分）

十三、 计算二次积分 $\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}dy$ 。（10 分）

十四、已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 为有界函数。（10 分）