第九章 习题

习题 1 a)有一个一维系统, 其哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2},$$

证明它有一个运动常数

$$D = \frac{pq}{2} - Ht.$$

b) 作为 (a) 部分情况的推广, 设有一平面运动, 其哈密顿量为

$$H = |\boldsymbol{p}|^n - ar^{-n},$$

$\boldsymbol{p}$ 是共轭于笛卡尔坐标的动量矢量, 证明它有一运动常数

$$D = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{n} - Ht.$$

习题 2 根据任意方法证明下列变换是正则的:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 + P_2),\\
p_x &= \frac{\alpha}{2}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 - Q_2),\\
y &= \frac{1}{\alpha}(\sqrt{2P_1}\cos Q_1 + Q_2),\\
p_y &= -\frac{\alpha}{2}(\sqrt{2P_1}\sin Q_1 - P_2),
\end{aligned}$$

式中的 α 是某个固定参量. 把这一变换应用于电荷为 q 并在垂直于恒定磁场 $\boldsymbol{B}$ 的平面内运动的质点问题, 令参量 α 所取得形式为

$$\alpha^2 = qB.$$

用 (Q_i, P_i) 坐标表示这个问题的哈密顿量. 根据这一哈密顿量来求作为时间函数的质点运动.

习题 3 a) 证明变换

$$Q = p + iaq, \quad P = \frac{p - iaq}{2ia}.$$

是正则的, 并寻找生成函数.

b) 利用此变换求解线性谐振子问题.

习题 4 a) 某个系统的哈密顿量的形式为

$$H = \frac{1}{2}(\frac{1}{q^2} + p^2q^4).$$

求 q 的运动方程.

b) 求出把 H 化为谐振子形式的正则变换. 证明变换后的变量的解能够满足 (a) 部分所求得的运动方程.