第一章 习题

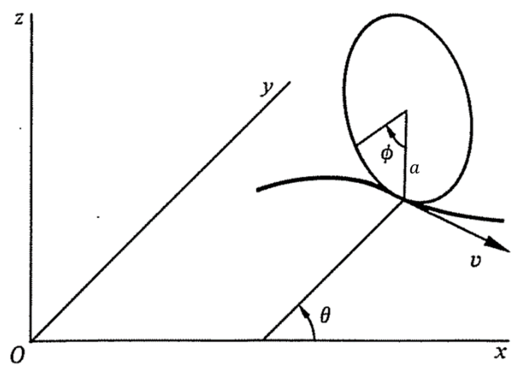
习题 1 证明, 对于有着不变质量的单个质点, 其运动方程可表示为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v},$$

但当质量随时间变化时, 则相应的方程为

$$\frac{\mathrm{d}(mT)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p}.$$

习题 2 在水平面上滚动的竖直圆盘如图所示, 其中 a 为圆盘的半径.



其约束方程

$$\mathrm{d}x - a\sin\theta \mathrm{d}\phi = 0,$$

$$\mathrm{d}y + a\cos\theta \mathrm{d}\phi = 0.$$

是如下形式的一般线性微分约束方程

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_i = 0,$$

的特殊情况. 如果要求这种约束条件是完全的, 就得找到一个能将其化成全微分的积分函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$. 显然, 对于所有 $i \neq j$ 的情况来讲, 这样的函数必须保证

$$\frac{\partial(fg_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(fg_j)}{\partial x_i}.$$

证明, 对于在水平面上滚动的竖直圆盘的约束方程, 不可能找到这样的积分因子.

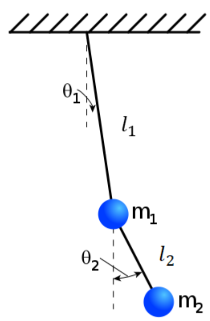
习题 3 火箭是靠从尾部排出的燃烧废气的动量反作用推进的. 由于这些气体是火箭所带燃料的反应产物, 所以火箭质量不是常数, 它将随着燃料的消耗而减少. 证明, 如果略去大气阻力, 则在均匀引力场中垂直向上发射的火箭的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v'\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - mg,$$

式中 m 是火箭质量, v' 是逸出气体相对于火箭的速度. 假定质量的时间损失率是一个常数, 试求解这个方程, 将 v 表示为 m 的函数. 再证明, 对于原先一个从静止开始发射的火箭, 如果 v' 等于 2.1km/s, 每秒的损失质量等于原先质量的 1/60, 则为了达到逃逸速度, 燃料重量与空火箭重量之比应约等于 300.

习题 4 质量分别为 m_1 和 m_2 的两个质点, 由一根穿过光滑桌面上小孔的弦线相连接, m_1 静止在桌面上, m_2 悬挂着. 假设 m_2 仅在垂直线上运动, 试问系统的广义坐标是什么? 列出系统的拉格朗日方程, 并讨论具有的物理意义. 把问题归结为一个简单的二阶微分方程, 求出这个方程的初次积分. 它的物理意义又如何?(只需考虑 m_1 和 m_2 都不穿过这个小孔的运动.)

习题 5 试求图中所示的复摆的拉氏函数和运动方程, 摆的长度为 l_1 和 l_2, 相应的质量为 m_1 和 m_2.



习题 6 电磁场在矢势和标势的规范变换下不变, 这两个变换为

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \nabla\psi(\boldsymbol{r}, t), \quad \phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

式中 ψ 是任意(但却是可微的)函数. 这种规范变换对电磁场内运动质点的拉氏函数有何影响? 运动是否会受到影响?