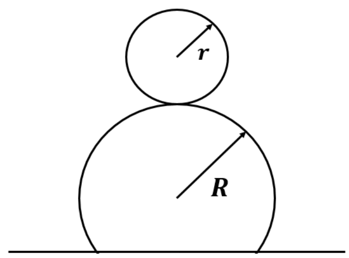
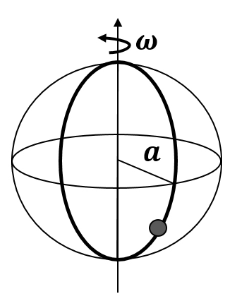
第二章 习题

习题 1 试验证, 球面上的大圆(即圆心与球心重合的圆)是其短程线.

习题 2 一质量为 m, 半径为 r 的均匀圆环在半径为 R 的固定圆筒上无滑动地滚动, 如图所示. 仅有的外力是重力. 如果圆环在圆筒顶端从静止开始滚动, 用拉格朗日乘子法求圆环跌离圆筒的那个点.



习题 3 一质点被约束在半径为 a 的无质量圆环上运动, 而圆环则固定在一个竖直平面内, 该平面又以不变的角速度 ω 绕竖直轴旋转. 假设唯一的外力是重力, 求拉格朗日运动方程. 运动常数是什么? 证明, 如果 ω 大于某一临界值 ω_0 时, 就能得到一个解, 该解表明, 质点不是在环底而是在环上某点处保持稳定, 但若 $\omega < \omega_0$, 则质点的唯一稳定点是在环底. 试解出 ω_0 的值.



习题 4 一维谐振子的拉氏函数为 $L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}$. 假设不知道运动的解, 但知道运动一定是周期性的, 因而可用傅里叶级数来描述. 该级数形式为

$$x(t)=\sum_{j=0} a_j \cos j\omega t,$$

(在转向点处 $t=0$)式中 ω 是运动的(未知)角频率. $x(t)$ 给出了系统在位形空间内的某条多参量路径. 考虑相隔一个周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 的两个点 t_1 与 t_2 的作用量积分 I. 证明, 系统路径采用这种形式时, 只有当 $a_j=0(j\neq 1)$ 以及 $\omega^2=k/m$ 时, I 才是关于非零 x 的极值.