第四章 习题

习题 1 如果 $\mathbf{A}$ 是绕任何轴转过 180° 的转动矩阵, 证明: 如果

$$\mathbf{P}_{\pm}=\frac{1}{2}(1\pm\mathbf{A}),$$

则 $\mathbf{P}_{\pm}^2=\mathbf{P}_{\pm}$. 试选取合适转轴，建立坐标系, 求出 $\mathbf{P}_{\pm}$ 的矩阵元, 并就 $\mathbf{P}_{+},\mathbf{P}_{-}$ 对任何矢量 $\mathbf{F}$ 的运算作出几何解释.

习题 2 证明: 角速度沿空间轴系各轴的分量是用欧拉角标识的，它们的形式为

$$\omega_x=\dot{\theta}\cos\phi+\dot{\psi}\sin\theta\sin\phi,$$

$$\omega_y=\dot{\theta}\sin\phi-\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi,$$

$$\omega_z=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\phi}.$$

习题 3 有一均匀正圆锥, 高度为 h, 半角为 α, 密度为 ρ. 它的一条边在一均匀水平面上无滑动地滚动, 在 τ 时间后回到它原来的位置. 求该锥体的动能和角动量分量表达式.

习题 4 一平面摆由一均匀杆构成. 杆的长度为 l, 质量为 m, 厚度则可略去不计, 悬其一端使之位于铅锤平面内. 它的另一端则系一半径为 a, 质量为 M 的均匀圆盘, 该圆盘能在自己的平面即铅锤面内自由转动. 试以拉格朗日表述建立运动方程.

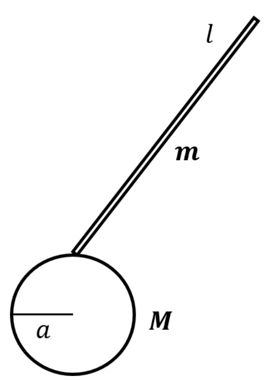

Figure 1 第四题图

习题 5 a) 用欧拉角表示在平坦水平面上无滑动地滚动的均匀球的约束条件. 证明: 这些约束是非完全约束. b) 用拉格朗日乘子法建立这一问题的拉格朗日方程. 证明: 平动和

转动部分的动能是单独守恒的. 还有别的运动常数吗?

习题 6 根据绕各主轴的转动的微小偏差来检验一般非对称刚体的欧拉方程的解, 从而用解析方法分析一般非对称刚体分别绕长轴、短轴和中间轴转动的稳定性. 假定 ω 的方向与某一主轴的差别极为微小, 以致 ω 沿该轴的分量可以取作常数, 而与该轴垂直的各分量的乘积则可略去不计. 试就三个主轴中每一个轴来讨论合运动的有界性质.