二分查找算法

2019.5.8

◆引入：

- 1. **yt1242：网线主管（poj1064）**
- 2. **yt1433：【例题1】愤怒的牛（poj2456，sp297）**

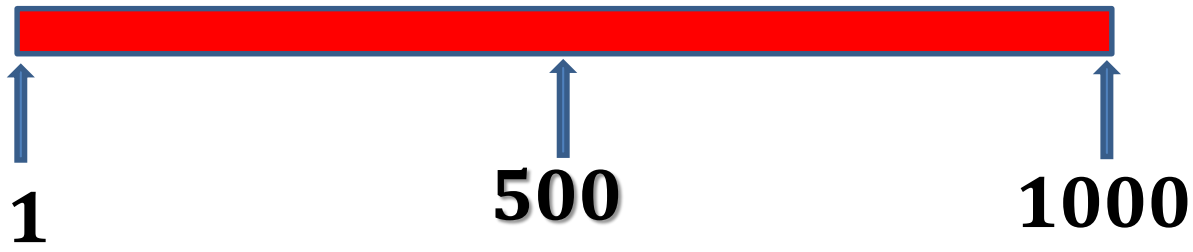
◆中国人民银行发行2019年版第五套人民币50元、20元、10元、1元纸币及1元、5角、1角硬币

1.找假币:

12个硬币中1个是假的，已知假的比真的轻。有一个天平。
问：最少称几次能找出假币？

2.猜数字:

可能的答案1-1000



情况1：正确

情况2：小了

情况3：大了

只要每次询问区间的**正中间**，无论反馈哪种结果，都能使存在答案的区间长度减半。

3.你能举起杠铃的最大重量是多少？

- 能举起的范围[0,500]公斤
- 让你举试

龙清泉，2008年北京第29届奥运会56公斤级，抓举132公斤，挺举160公斤，总成绩292公斤夺得冠军

二分的本质：

- 每一次的查找或询问的结果:
- 找到
- 如果找不到，答案所在的范围能缩小为原来的一半;
- 在答案所在的范围内继续用同样的方法查找或询问
- ....

◆查找算法

- 在数据集合中寻找给定关键字的位置或判断其有无。
- 集合数列{10,20,15,21,31}中
- 15是第几个数?
- 100是第几个数?
- 查找最大值，最小值等
- 查找算法：线性查找；二分查找

◆顺序查找

- 用for循环实现：
- 在n个元素的序列中a[0],a[1]...a[n-1]查找x：
- 找到输出下标i，找不到输出-1.
- 输入：
- 5
- 10,20,15,21,31
- 15
- 输出：2

◆输出x在序列中第一次出现的位置（0开始）,没有输出-1

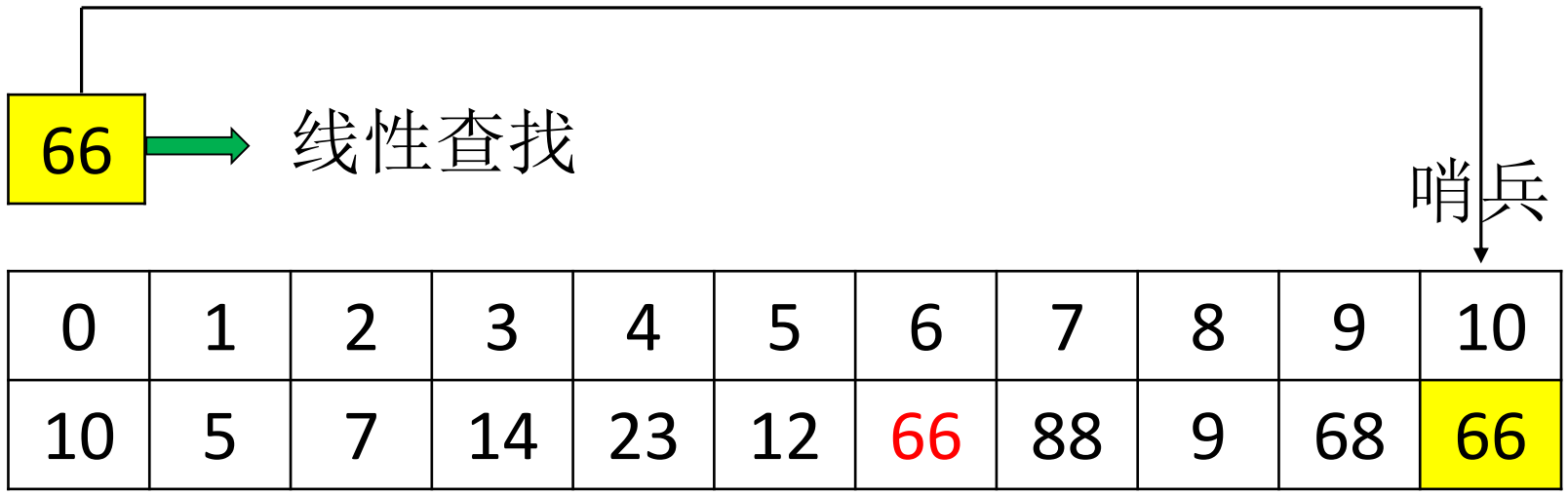
```
cin>>n;
for(int i=0;i<n;i++)cin>>a[i];
int x;
cin>>x;
int k=-1;
for(int i=0;i<n;i++)
    if(a[i]==x){
        k=i;
        break;
    }
cout<<k<<endl;
```

自定义线性查找函数：

```
int Find(int x){//a[0]...a[n-1]
    for(int i=0;i<n;i++)
        if(a[i]==x)return i;
    return -1;
}
```

每次循环：两次判断，一次加法

线性查找的常数优化：效率提高常数倍（循环次数不变，循环体运算次数减少或者加快运算效率）



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	5	7	14	23	12	66	88	9	68	66

“哨兵”：设置一个特殊元素，借助编程技巧，达到简化控制循环的目的。

查找的元素放在数组末尾，当做“哨兵”，用作查找控制终点。

n个元素：a[0] ,a[1],…,a[n-1]

初始：i=0开始向后找：找到（i<n);找不到(i==n)

```
int Find(int x){//a[0]...a[n-1]
    a[n]=x;
    int i=0;
     while(a[i]!=x)i++;
     return x!=n;
}
```

每次循环：一次判断，一次加法。少用一次判断i是否越界，因为一定能找到x。

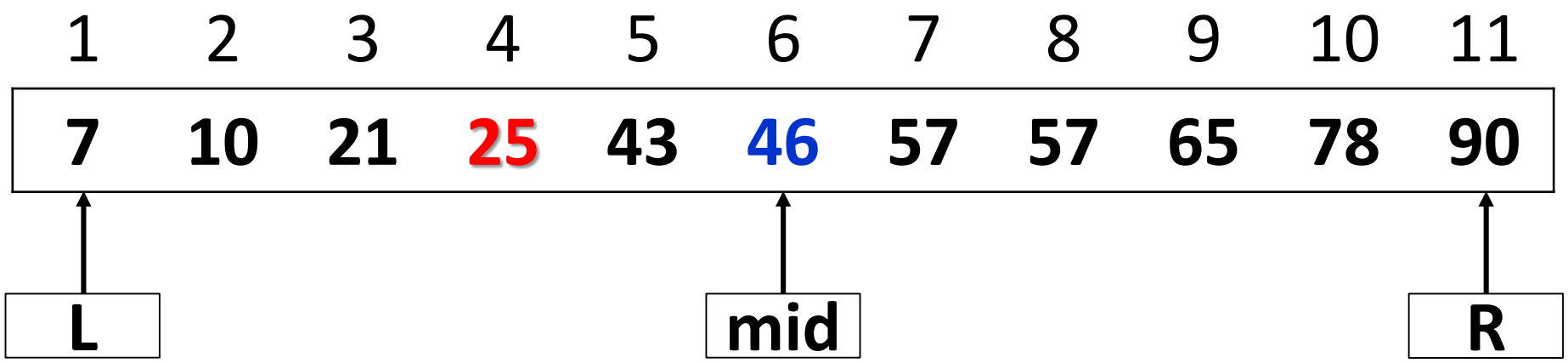
- **长度为n的线性表上线性查找的时间复杂度：O(n)**
- **如果q次查询则时间复杂度：O(q*n)**
- **q<=10000,n<=100000？**

有序（递增或递减）表上的查询：除了线性查找，还可以用二分！

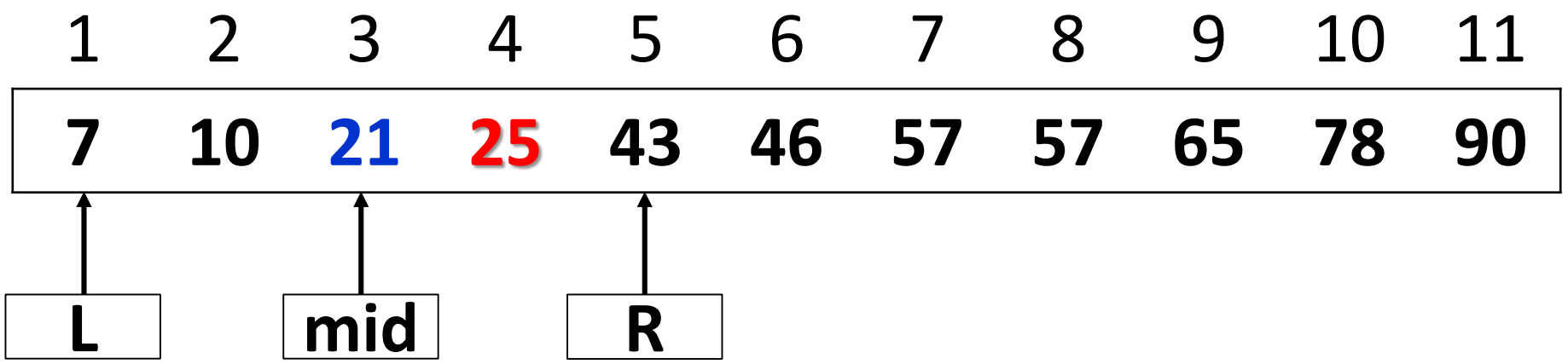
查找25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7	**10**	**21**	**25**	**43**	**46**	**57**	**57**	**65**	**78**	**90**

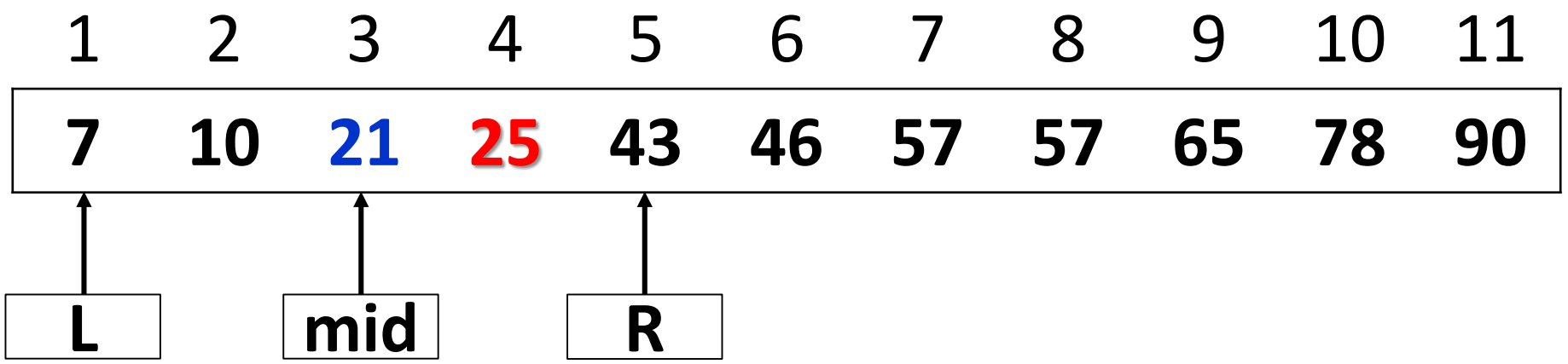
查找25



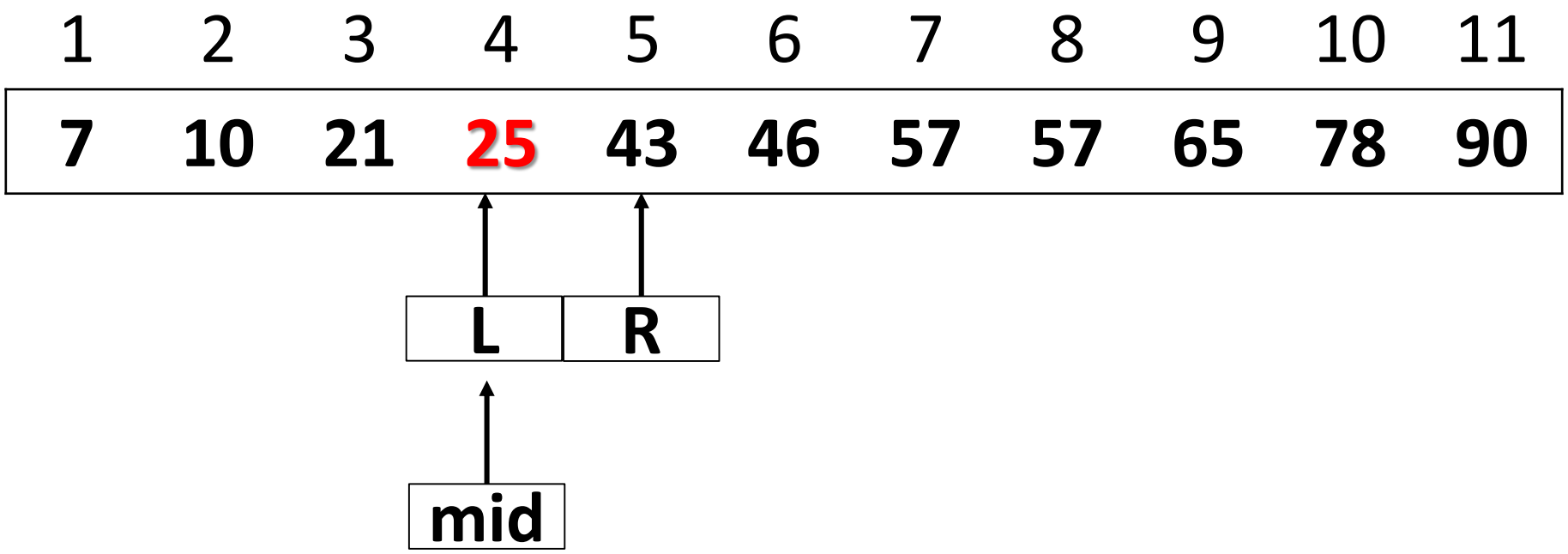
查找25



查找25



查找25



◆上述进行的前提：

- 查找的序列是有序的
- 如果无序可以先排序

查找60

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7	**10**	**21**	**25**	**43**	**46**	**57**	**57**	**65**	**78**	**90**

◆实现：

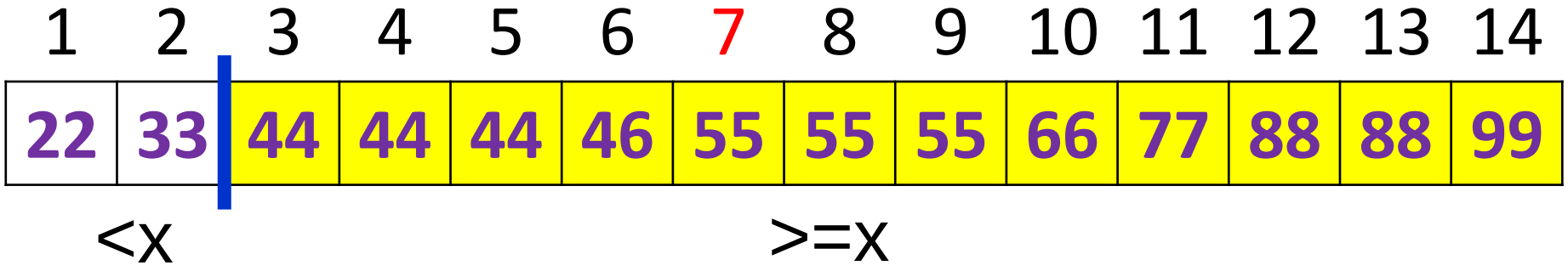
```
//a[1..n]中查找是否有x，找到返回下标，找不到返回-1
int Find(int x){
    int l=1,r=n,mid;
    while(l<=r){
        mid=(l+r)/2;
        if(a[mid]==x)return mid;
        else
            if(a[mid]>x)r=mid-1;//[l,mid-1]
            else l=mid+1;          //[mid+1,r]
    }
    return -1;//No Found
}
```

◆思考下列问题：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
22	33	44	44	44	46	55	55	55	66	77	88	88	99

- 1. 大于等于x的最小值(如果多个和x相等，返回第一个)是哪个？大于等于x的有多少个？
- 2. 小于等于x中最大值(如果多个和x相等，返回最后一个)是哪个？小于等于x的有多少个？
- 3.如果多个值和x相等，有多少个？
- 4.如果找不到x，与x最接近的是几？

1. 大于等于x的最小值(如果多个和x相等，返回第一个)是哪个？
大于等于x的有多少个？



x=44，L=3（找到）
x=40，L=3（没找到）

- **L=min(i|a[i]>=x)**
- **满足a[i]>=x条件的最小的i。**

- **查找方法1：**

```
int l,r,mid;
l=1;r=n;
while(l<r){
        mid=(l+r)/2;
        if(a[mid]>=x) r=mid;
        else l=mid+1;
}
return l;
```

2. 小于等于x中最大值(如果多个和x相等，返回最后一个)是哪个？小于等于x的有多少个？

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
22	33	44	44	44	46	55	55	55	66	77	88	88	99

<=x　　>x

x=55，L=9

x=60，L=9

- L=mxn(i|a[i]<=x)
- 满足a[i]<=x条件的最大的i。

- 查找方法2：

```
l=1;r=n;
while(l<r){
        mid=(l+r+1)/2;
        if(a[mid]<=x) l=mid;
        else r=mid-1;
}
return l;
//if a[l]==x找到
```

总结：

- 答案保证在区间[l,r]以内；循环l=r时结束；

查找≥x的数中最小的一个（x，或x后继）:用于就最小值

```
while(l<r){
    mid=(l+r)/2;
    if(a[mid]>=x)r=mid;//答案区间[l,mid]
    else l=mid+1;      //答案区间[mid+1,r]
}
return l;
```

查找≤x的数中最大的一个（x，或x前驱）：用于求最大值

```
int l=1,r=n,mid;
while(l<r){
    mid=(l+r+1)/2;
    if(a[mid]<=x)l=mid;//答案区间[mid,r]
    else r=mid-1;      //答案区间[l,mid-1]
}
return l;
```

查找x也可以用上述两种方法，最后检查a[l]是否等于x即可。

3.如果多个值和x相等，有多少个？
4.如果找不到x，与x最接近的是几？

◆作用：不只是查找

- 1.查找元素是否存在（位置或值）
- 2.求满足条件的最值（最大值/最小值）

二分查找算法：

- 在一个单调有序(递增或递减)的区间[a_1,a_n]中查找元素x，每次将区间分为左右长度相等的两部分，判断解在哪个区间中并调整区间上下界，重复直至找到x。
- 找不到有时候更有用。
- 一次查找的时间复杂度：O (logn)优于顺序查找O(n)
- q次查找的时间复杂度： O (q*logn)
- q<=10000,n<=100000 问题完美解决

- 一.实数区间上的二分查找
- 二.整数区间上的二分查找及其应用

整数区间上的二分查找:

1.有序序列上的二分查找(分的下标标号)

2.查找最终有两种结果：

1.找到了。（如果有多个，找的是哪一个？）

2.没有找到。（找不到，最终停在那里？）

*3.求最优值问题（最大值最小，最小值最大）重点：

二分答案转换为判定问题

- **训练题目：**
- 1. yt1244：和为给定数
- 2. 查找最接近的元素（oj 1.11.01）

整数二分答案（最值问题转化为判定性问题）

- 有些问题，如求最大值最小值问题（最大值最小，最小值最大），直接求不容易，可以确定答案范围，然后用二分答案的方法，转为为判断性问题。

你能举起杠铃的最大重量是多少？

- [0,500]公斤
- 令：
  - 条件check(x)=能举起重量为x的杠铃。
- 问题转化：
  - 求满足条件check(x)成立的最大x。

```
L=0; r=500;
While (l<r){
    mid=(l+r+1) div 2;
    if check(mid) then  l=mid;
    else  r=mid-1;
  }  //l=r停止查找
return l;
```

主要任务：**check(x)=能举起重量为x的杠铃。**
1:能；0:不能

◆求最值的两种模板（二分答案）：

- 1.求满足条件的最小值：

```
答案所在的范围[l,r]
While (l<r){
    mid=(l+r) div 2;
    if check(mid) then  r=mid; //[l,mid]
    else  l=mid+1;             //[mid+1,r]
}  //l=r停止二分,l就是答案
//return l;
```

- check(mid):mid满足条件返回1，不满足返回0.

- 2.求满足条件的最大值：
  - 答案所在的范围[l,r]
  - While (l<r){
  - mid=(l+r+1) div 2;
  - if check(mid) then l=mid; //[mid,r]
  - else r=mid-1; //[l,mid-1]
  - } //l=r停止二分,l就是答案
  - //return l;
  - check(mid):mid满足条件返回1，不满足返回0.

二分最容易出现问题：

1.确定答案所在区间 [l,r]

2.循环条件：while(l<r)

3.注意两种配套写法：最容易死循环。二分的关键

最小值：r=mid,l=mid+1,mid=(l+r)/2

最大值：l=mid,r=mid-1,mid=(l+r+1)/2

4.l==r时结束，注意找不到的情况,最后判断a[l]是否等于x

5.check(mid)一般用贪心实现。

6.如果查找的范围是[1,n]:

尤其注意最后查找结果l=1或者l=n的情况

◆训练：：

- 1.Cable master(poj1064,yt1242)：求最大值。

  整数二分或实数二分

实数二分
也可转化为整数二分
精度问题,不能四舍五入
%.2f %.2lf(poj上这里用2f？？？)
yt1242第4个数据需考虑精度，读入时调整+0.5

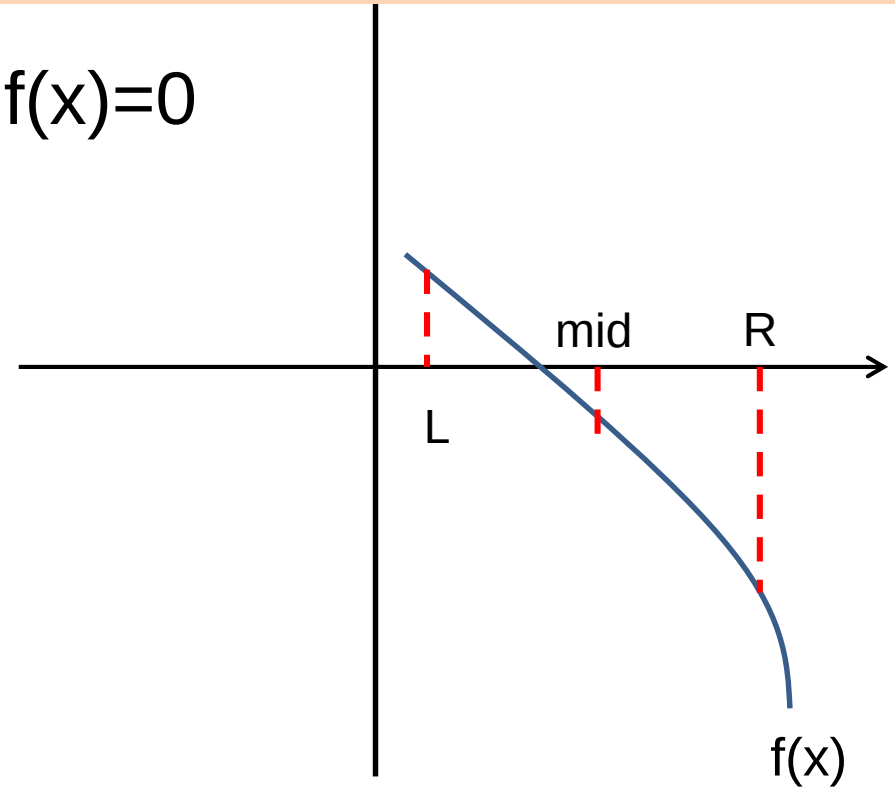
二分答案

```
int l=0,r=10000000,mid;
while(l<r){
    mid=(l+r+1)/2;
    if(check(mid)==1)l=mid;
    else r=mid-1;
}
printf("%.2f\n",l/100.0);
```

- 2. Aggressive cows 愤怒的牛(poj2456,sp297,yt1433)
- 最小值最大：最大值

实数区间上的二分查找:

函数f(x)图像在区间[l,r]与x轴的交点,f(x)=0
前提：f(x)在该区间 [l,r]内单调



- L=1.5;
- R=2.4;
- f(L)*f(R)<=0
- 解的区间：[1.5,2.4]
- 当区间 [l,r]足够小，满足精度要求即可停止。

1.二分法求函数的零点 (一本通1241) （noi1.11.02）

有函数：

$f(x) = x^5 - 15 * x^4 + 85 * x^3 - 225 * x^2 + 274 * x - 121$

已知 f(1.5) > 0 , f(2.4) < 0

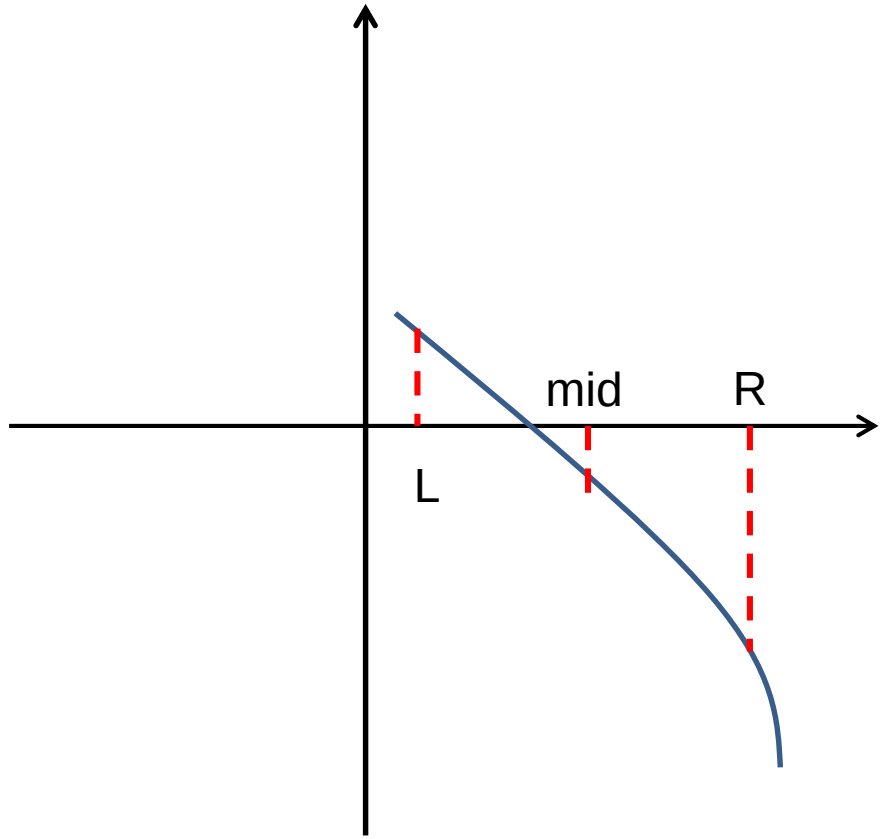
且方程 f(x) = 0 在区间 [1.5,2.4] 有且只有一个根.

求出这个根。

要求四舍五入到小数点后6位

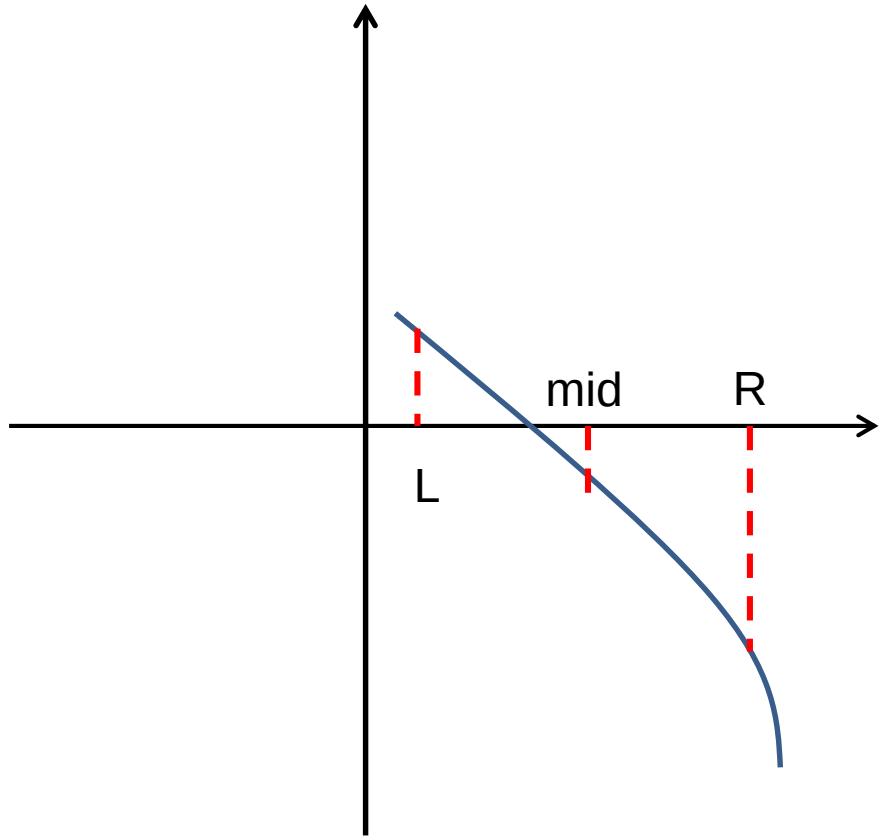
L=1.5;

- R=2.4;
- f(L)*f(R)<=0
- 解的区间：[1.5,2.4]
-
-



L=1.5;

- R=2.4;
- f(L)*f(R)<=0
- 解的区间：[1.5,2.4]
-
- mid=(L+R)/2;
- If f(mid)*f(R)<=0
- 答案在[mid,R]
- Else
- 答案在[L,mid]



```
double mid,l=1.5,r=2.4;
double eps=1e-8;//至少比精度要求多1位，2位最好
while (l+eps<r){
    mid=(l+r)/2;
    if(f(l)*f(mid)<=0)  r=mid;
    else l=mid;
}
printf("%.6lf\n",mid);
```

一般要求保留k位有效小数时， 所需精度eps=1e-(k+2)即可
就是区间范围距离（越小精度越高）

如果精度不好确定时，干脆直接使用固定循环次数的二分，精度一般比设置了eps的更高，更好理解。

```
double mid,l=1.5,r=2.4;
for(int i=0;i<100;i++){
    mid=(l+r)/2;
    if(f(l)*f(mid)<=0) r=mid;
    else l=mid;
}
printf("%.6lf\n",mid);
```

2. P1024 一元三次方程求解（NOIP2001）

- 形如：$ax^3+bx^2+cx+d=0$这样的一个一元三次方程。
- 给出该方程中各项的系数(a，b，c，d均为实数)，并约定该方程存在三个不同实根(根的范围在-100至100之间)，且根与根之差的绝对值≥1。
- 要求由小到大依次在同一行输出这三个实根(根与根之间留有空格)，并精确到小数点后2位。
- 提示：记方程f(x)=0，若存在2个数x1和x2，且x1<x2，f(x1)×f(x2)<0，则在(x1,x2)之间一定有一个根。
- **【输入样例】**
- 1.0 -5.0 -4.0 20.0
- **【输出样例】**
- -2.00 2.00 5.00

◆注意事项：

- 整点不要计算重复

3. Cable master(poj1064,yt1242)

有n条电缆，他们的长度分别为l[i]。如果从n条电缆中切割出K条长度相同的电缆的话，这k条电缆每条最长能多长？答案小数点后保留两位有效数字。

输入：

n， k

n行：l[i]

Sample Input

4 11

8.02

7.43

4.57

5.39

Sample Output

2.00

二分答案

```
double l=0,r=100000,mid;
for(int i=0;i<100;i++){
    mid=(l+r)/2;
    if(check(mid)==1)l=mid;
    else r=mid;
}
printf("%.2f\n",floor(100*l)/100);
```

4. Best Cow Fences poj2018，yt1343

- 没做？