国家工科数学课程教学基地系列教材

概率论与数理统计

电子科技大学应用数学学院
徐全智　吕恕　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是作者在多年使用的教材《概率论与数理统计》的基础上作进一步修改而成。在内容上较‘高等学校工科本科概率论与数理统计课程教学基本要求’有所加深和扩充，并广泛、密切地联系实际应用。

全书内容包括概率论的基本概念、随机变量的分布、多维随机变量、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析及试验设计。各章有习题，书末附有习题答案。

本书强调基本理论和基本运算，着重于概率统计思想方法的阐述，概念准确、条理清晰、简明易懂，可作为高等学校工科、理科（非数学专业）、管理等各专业的教材，也可供工程技术人员和自学者参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/徐全智，吕恕主编．—北京：高等教育出版社，2004.7

ISBN 7-04-014400-X

Ⅰ．概…　Ⅱ．①徐…②吕…　Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 047389 号

策划编辑　李艳馥　　责任编辑　丁鹤龄　　封面设计　于文燕
责任绘图　黄建英　　版式设计　张　岚　　责任校对　杨凤玲
责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月第 1 版
印　　张	20	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	370 000	定　　价	21.10 元

前　　言

本书是在 1999 年 6 月我校自编教材《概率论与数理统计》的基础上修改而成的。

内容包括概率论及数理统计两部分，有如下特色：力求做到两者并重和有机结合；在作为工科教材的条件下，尽量使概念准确、系统、完整；强调基本理论和基本运算，着重对概率统计思想方法的阐述；强调概率论与数理统计的客观背景和实际应用（每章最后一节均是对应知识的应用和实例）；例题、习题与教材内容紧密结合；书后附有习题答案和有关图表，便于查阅。

全书讲授需 68 学时，根据不同学时和不同层次的要求，讲授内容酌情取舍。

本书由徐全智主编并负责统稿，编写第 1 章至第 5 章，吕恕编写第 6 章至第 10 章。

该书自 1991 年开始编写至今再次出版，四易其稿，我校的朱济生教授、朱宏教授曾参与编写。本次编写过程中得到我校国家工科数学教学基地和有关老师的大力支持和帮助，我们表示衷心的感谢，也感谢多年使用该教材授课的全体教师和用该教材学习的全体学生。

全稿经陈良均教授仔细审阅。由于编者水平所限，缺点和不当之处在所难免，恳请同行专家和读者批评指正。

编者

2004 年 2 月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

§1.1　随机事件与随机变量

一、随机现象及其统计规律

在自然科学和社会科学的研究中，随着人们认识的不断发展，发现客观现象大体可分为两大类：确定性现象和非确定性现象.

确定性现象的共同特点是在准确重复某些条件时，它的结果总是确定的；或者根据它过去的状态，在一定条件下完全可以预言将来的发展情况. 例如，同性电荷必然相互排斥；在 101 325 帕（标准大气压）下纯水在 100℃ 时必沸腾，在 0℃ 时必结冰；在恒力作用下的质点作等加速运动等等. 研究确定性现象的规律性，可借助于诸如数学分析，几何、代数、微分方程等我们熟悉的数学工具.

非确定性现象具有事前不可预言性，即在相同条件下对其做重复试验，每次结果未必相同，或者知道它过去的状态，事前却不能预知未来的情况，比如：

(1) 抛一枚均匀硬币若干次，每次抛之前都不知是否会出现正面（国徽面）.

(2) 仪器上某种型号的电子元件使用时间已达 300 h，该元件还能使用多少小时？

(3) 一名炮手，使用同一门炮，按同样射击条件（初始速度 v_0，发射角 θ 与弹道系数 C）进行射击，但射击前无法预测每次弹着点的确切位置.

上面各例所涉及的非确定现象普遍存在，我们称这种不确定现象为随机现象.

为什么在随机现象中，在相同的基本条件下，试验或观测结果会不完全一样呢？这是因为除了基本条件之外，客观上还存在许多变化着的偶然因素，它们中每一个对试验或观测的结果影响均很小，但它们的综合影响就会使得试验或观测的结果产生差异. 譬如，在大炮射击时，炮弹的飞行条件、弹药的成分以及射手的发射状态都不可能完全一致，诸多因素的影响，造成了弹着点的偶然性偏差.

对于随机现象，虽然人们事先无法预料个别试验的确切结果，但人们经过长期试验和深入研究后发现，在大量重复试验和观察下，随机现象的结果会呈现出

某种规律性，历史上不少的科学试验验证了这种规律性十分明显和稳定. 例如，抛一枚均匀硬币，无法肯定一次抛掷会出现正面，但多次重复抛同一硬币，就会发现明显的规律性，即出现正面的次数约占抛掷总数的一半. 表 1.1.1 是历史上几位著名学者的试验记录.

表 1.1.1

实验者	抛掷次数 n	出现正面次数 m	m/n
德 · 摩根	2 048	1 061	0.518 1
德 · 摩根	2 048	1 048	0.511 7
德 · 摩根	2 048	1 017	0.496 6
德 · 摩根	2 048	1 039	0.507 3
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

由上述试验记录可以看出，随着抛掷次数的增多，比值 m/n 在 0.5 附近摆动. 随机现象在个别试验中其结果呈现不确定性，在大量重复试验中其结果又具有规律性，我们称大量同类随机现象所呈现的固有规律为随机现象的统计规律性.

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科.

二、随机试验与随机事件

我们将对社会现象和自然现象进行观察和各种科学实验统称为试验.

具有以下特征的试验称为随机试验：

（1）它可在相同条件下重复进行；

（2）试验的全部可能结果，是在试验前就明确的；

（3）一次试验结束之前，不能准确预知哪一个结果会出现.

例 1.1.1　抛一枚质地均匀的硬币一次，观察出现正反面情况，这是随机试验，记为 E_1.

试验 E_1 的可能结果有两个：正面向上和正面向下，试验前不知会出现正面向上还是正面向下，并且重复抛掷同一硬币，使 E_1 可以在相同条件下重复进行.

例 1.1.2　任意抽取 100 只同一型号的晶体管，记录其中的不合格品个数. 这也是随机试验，记为 E_2.

在 100 只晶体管中的不合格品个数可能是 0，或 1，或 2，……，或 100，但完成测试前，不能肯定究竟有多少个不合格品，而且试验 E_2 也可在相同条件下重复进行.

类似地，以下各试验均为随机试验：

E_3 检查一条生产线在 24 h 期间生产出的次品个数.

E_4 在一批晶体管中任取一只，测试它的电流放大系数.

E_5 观察一枚新发射的导弹，记录这枚导弹在时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 距地面的高度.

E_6 测量某团体人员的身高.

我们通过研究随机试验来研究随机现象，本书中所讨论的试验都是指随机试验. 进行一次试验，有这样或那样的事情发生，它们各有不同的特性，彼此之间又有一定的联系，称随机试验中可能发生也可能不发生的事情为随机事件，简称事件，通常用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.

例 1.1.3 在 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任意选取一个，可有十种不同的结果：

$$A_i = \{\text{取得的数是 } i\}, i=0,1,2,\cdots,9.$$

还有其他的可能结果，例如

$B=\{$取得的数是奇数$\}$，$C=\{$取得的数大于 5$\}$，$D=\{$取得的数是 3 的倍数$\}$，$B, C, D, A_i, i=0,1,2,\cdots,9$ 都是随机事件.

例 1.1.4 测试电视显像管的使用寿命，用 X 表示其寿命（单位：h），对任意实数 $x>0$，$A=\{X=x\}$ 表示随机事件"显像管的寿命为 x"，另外 $B=\{X<6\,000\}$，$C=\{X>5\,500\}$ 分别表示"显像管寿命不到 6 000 h"和"显像管寿命超过 5 500 h"，B 和 C 也是随机事件.

在随机试验中必然发生的事件称为必然事件，用符号 Ω 表示. 在随机试验中必然不发生的事件称为不可能事件，用符号 $\varnothing$ 表示. 譬如，例 1.1.4 中，若 $x<0$，则 $\{X=x\}$ 是不可能事件，而 $\{X\geqslant 0\}$ 是必然事件，把必然事件和不可能事件看作随机事件，对于我们研究问题是有益的.

三、样本空间与随机变量

让我们分析例 1.1.3 中的诸事件，事件 B 可看成由事件 A_1, A_3, A_5, A_7, A_9 组合而成，C 和 D 也是由部分 A_i 组成，而 $A_i, i=0,1,2,\cdots,9$ 这十个事件具有"最简单"的"不可分"形式. 另外每做一次例 1.1.3 中的试验，十个事件 $A_i, i=0,1,2,\cdots,9$ 中必有一个发生，且不可能有两个同时发生. 类似地，例 1.1.4 中的事件 $\{X=x\}$ 也是形式最简单的事件，并且每测试一只显像管，它的实际使用寿命只能取一个确定的数.

称在随机试验 E 中必发生一个且仅发生一个的最简单事件为试验 E 的基本事件，由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件.

例 1.1.3 中的 $A_i, i=0,1,2,\cdots,9$ 和例 1.1.4 中的 $\{X=x\}, x>0$ 都是基本事件，其他事件则是复合事件.

一个事件是否为基本事件是相对于试验目的而言的. 如试验 E_6，若试验的目的仅是测量人的身高，对任意实数 $x>0$，事件"测得人的身高是 x"都是基本事件，这时试验 E_6 有无穷多个基本事件. 若测量人的身高是为了判断乘客乘车是否需购全票、半票或免票，这时仅有三个基本事件.

我们用集合表示事件，对于随机试验 E 的每一基本事件，用一个只包含一个元素 ω 的单元素 $\{\omega\}$ 表示；由若干基本事件组成的复合事件，则用对应的若干个元素所组成的集合表示；由全体基本事件所对应的全部元素所组成的集合，称为随机试验 E 的样本空间，称样本空间的每一个元素 ω 为样本点. 若 $\omega\in A$，表示事件 A 发生.

样本空间看作事件是必然事件，样本空间仍用 Ω 表示. 试验 E 的任一事件都是样本空间的子集，记为 $A\subset\Omega$.

试验 E_1 有两个基本事件

$$\{\omega_1\}=\{\text{正面}\},\ \{\omega_2\}=\{\text{反面}\},$$

则 E_1 的样本空间 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2\}=\{\text{正面},\text{反面}\}$.

例 1.1.3 中的试验 E 有十个基本事件：$A_i=\{\omega_i\}, \omega_i=i, i=0,1,2,\cdots,9$，则 E 的样本空间为

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots,9\},$$

而且随机事件

$$B=\{1,3,5,7,9\}, C=\{6,7,8,9\}, D=\{3,6,9\}$$

都是样本空间 Ω 的子集.

其他试验 E_i 的样本空间 Ω_i 分别是：

$\Omega_2=\{0,1,2,\cdots,100\}$；

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots,N\}$，其中 N 为 24 h 内所生产的产品总数；

$\Omega_4=\{\mu:\mu>0\}$，μ 为电流放大系数；

$\Omega_5=\{(h_1,h_2,\cdots,h_n):\ h_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n\}$；

$\Omega_6=\{x:x>0\}$.

样本空间这个概念能使我们更好地把握随机现象的本质，使研究结果更具广泛性. 例如，仅包含两个样本点的样本空间能作为抛硬币出现正反面的模型，也可用来描述射击是否"中靶"，产品检验出现"合格品"及"不合格品"等等类似问题，尽管问题的实际内容各色各异，但应用样本空间后却能归结为相同的概率模型.

例 1.1.3 和例 1.1.4 中随机试验的结果直接对应一个数值，但有些随机试验的结果不一定是数值，如抛一枚均匀硬币的结果是"正面"和"反面". 为了深入研究随机现象，需要将随机试验的结果数量化，即用一个变量来描述试验结果，从而用量化分析方法来研究随机现象的统计规律.

例 1.1.5　将一枚均匀硬币连续抛两次，用 H、T 分别表示硬币的正、反面，其样本空间为 $\Omega=\{HH,HT,TH,HH\}$，可令

$$X(TT)=0, X(HT)=X(TH)=1, X(HH)=2.$$

X 的实际意义是两次抛掷中正面出现的次数，它是定义在样本空间 Ω 上的变量，称 X 是一个随机变量，X 完整地描述了该试验的全部结果.

例 1.1.6　某射手连续向一目标射击，直至命中为止，令

$$\{\omega_i\}=\{\text{前 } i-1 \text{ 次均未命中，第 } i \text{ 次命中目标}\}, i=1,2,\cdots,$$

则试验的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$，射击次数 Y 为

$$Y=Y(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=\omega_1,\\ 2, & \omega=\omega_2,\\ & \\ i, & \omega=\omega_i,\\ & \end{cases}$$

它是样本点 ω 的函数，此函数的取值取决于试验的结果. Y 也是一个随机变量.

通常对随机变量 X，记

$$\{X\leqslant x\}=\{\omega:X(\omega)\leqslant x\},\quad \{X=x\}=\{\omega:X(\omega)=x\},$$

它们都是随机事件. 如例 1.1.5 中的随机变量 X 有

$$\{X=0\}=\{TT\},\quad \{X=2\}=\{HH\}.$$

四、事件的关系与运算

事件是样本空间的子集，因而事件间的关系与运算可按集合论中集合之间的关系和运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法和含义.

设试验的样本空间为 Ω，而事件 $A,B,A_k,k=1,2,\cdots$ 是 Ω 的子集.

1. 包含关系：$A\subset B$，即事件 A 发生必然导致事件 B 发生，称事件 B 包含事件 A. 在试验 E_2 中，考虑事件

$A=\{100$ 只晶体管中恰有 3 只不合格$\}$，$B=\{100$ 只晶体管中不合格品不超过 5 只$\}$，则有 $A\subset B$.

对例 1.1.4 中电子显像管的使用寿命 X，当实数 $x_1<x_2$，则 $\{X\leqslant x_1\}\subset\{X\leqslant x_2\}$.

对任一事件 A，都有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

2. 和事件 事件

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\},$$

称为事件 A 与事件 B 的和,即当且仅当 A 和 B 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生.

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

例 1.1.7　在试验 E_3 中,令

$$A = \{\text{产品中有次品}\}, \quad A_k = \{\text{产品中有 } k \text{ 件次品}\}, k = 1, 2, \cdots, N,$$

则

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k.$$

若将此试验改为在生产线上不限时地进行检查,直到检查出一件次品为止.设

$$B = \{\text{检查出次品}\}, \quad B_k = \{\text{第 } k \text{ 次检查到次品}\},$$

则显然有

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

3. 积事件 事件

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\},$$

称为事件 A 与事件 B 的积,即当且仅当 A 和 B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 也记为 AB.

类似地,称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A_1 A_2 \cdots A_n$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;

称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

在例 1.1.3 中有

$$B \cap C = \{\text{取得的数是奇数}\} \cap \{\text{取得的数大于 } 5\} = \{7, 9\},$$

$$B \cap D = \{\text{取得的数是奇数}\} \cap \{\text{取得 } 3 \text{ 的倍数}\} = \{3, 9\},$$

例 1.1.4 中的电子显像管的使用寿命 X,有

$$\{X > 5\ 500\} \cap \{X \leqslant 6\ 000\} = \{5\ 500 < X \leqslant 6\ 000\}.$$

4. 互不相容事件 若 $A \cap B = \varnothing$,称事件 A 与 B 互不相容(或称它们是互斥的). 即指事件 A 与 B 不能同时发生.

任意事件 A 与不可能事件 $\varnothing$ 互不相容.

例 1.1.4 中的事件 $\{X = 5\ 500\}$ 与 $\{X = 6\ 000\}$ 是互不相容事件,而事件 $\{X > 6\ 000\}$ 和 $\{X < 5\ 500\}$ 也是互斥的.

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 任意两个事件都互不相容(互斥),则称 n 个事件 $A_1, A_2,$

$\cdots, A_n$ 互不相容(两两互斥).

事件 $A_k, k=1,2,\cdots$ 互不相容是指事件列的任意有限个事件互不相容.

例 1.1.3 中的十个事件 $A_i=\{$抽得数"i"$\}$是互不相容的.

一般地,根据基本事件的定义可知,同一随机试验的基本事件都是互不相容的.

5. 对立事件 若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或称它们互为逆事件). 这是指对每次试验而言,事件 A 与 B 必有一个发生,并且仅有一个发生.

事件 A 的对立事件记为 $\bar{A}$,即做一次试验"A 不发生"这一事件.

在例 1.1.3 中,事件 $B=\{$取得奇数$\}$,其对立事件为 $\bar{B}=\{$取得偶数$\}$.

例 1.1.4 中,因为

$$\{X>6\ 000\}\cap\{X\leqslant 6\ 000\}=\varnothing,\text{且}\ \{X>5\ 500\}\cup\{X\leqslant 6\ 000\}=\Omega.$$

它们互为对立事件,即有

$$\overline{\{X>6\ 000\}}=\{X\leqslant 6\ 000\},\quad \overline{\{X\leqslant 6\ 000\}}=\{X>6\ 000\}.$$

6. 差事件 事件 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A\ \text{且}\ \omega\notin B\}$ 称为 A 与 B 的差事件,当且仅当 A 发生而同时 B 不发生.

按照对立事件的概念,有 $A-B=A\bar{B}, \bar{A}=\Omega-A$.

在例 1.1.4 中,对实数 $x_1<x_2$,有

$$\{X\leqslant x_2\}-\{X\leqslant x_1\}=\{X\leqslant x_2\}\cap\overline{\{X\leqslant x_1\}}=\{x_1<X\leqslant x_2\}.$$

在上述概念中,我们将样本空间看作全集,事件的各种关系和运算对应样本空间子集间的相应关系和运算,故我们可以用集合论中文氏图(Venn 图)来表示事件的关系和运算,如图 1.1 所示.

在进行事件运算时,常用到下述运算规律:

1. 交换律:$A\cup B=B\cup A, AB=BA$;
2. 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A(BC)=(AB)C$;
3. 分配律:$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$,

   $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

   $A(B-C)=(AB)-(AC)$;
4. 吸收律:若 $A\subset B$,则 $AB=A, A\cup B=B$;
5. 德·摩根(De Morgan)公式:$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

它们可以推广到有限个或可列无穷个事件的情形,如

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k},\quad \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k},\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k},\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}.$$

例 1.1.8 证明:$A-B=A-AB, (A\cup B)-B=A-B$.

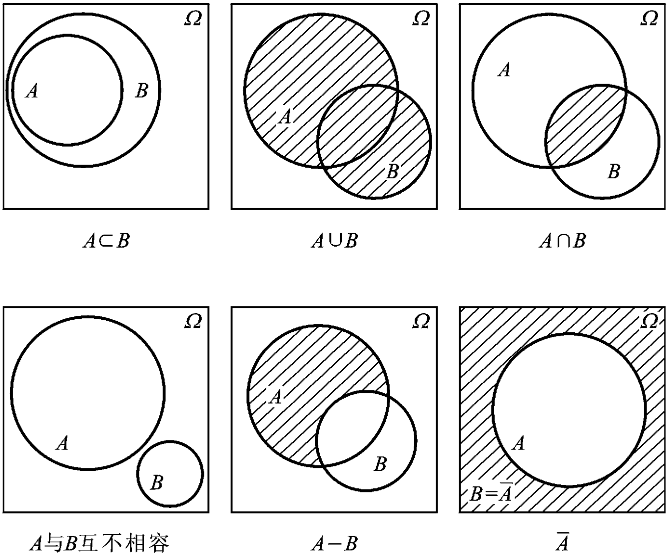


图 1.1

证　$A-B=A\overline{B}=A(\Omega-B)=A\Omega-AB=A-AB$,

$(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=(A-B)\cup\varnothing=A-B.$

例 1.1.9　**某射手向一目标射击** 3 **次,令**

$A_i=$ {**第** i **次命中目标**} ,$i=1,2,3.$

$B_j=$ {**在** 3 **次射击中,恰命中** j **次**} ,$j=0,1,2,3$,

则　$B_0=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$,$B_1=A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3$,

$B_2=A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$,　$B_3=A_1A_2A_3.$

若　$C_j=$ {**在** 3 **次射击中,至少命中** j **次**} $j=1,2,3$,**则有**

$C_1=A_1\cup A_2\cup A_3$,　$C_2=A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$,　$C_3=B_3=A_1A_2A_3.$

例 1.1.10　**某电子系统由** n **个元件** $e_1,e_2,\cdots,e_n$ **组成,令**

$A_k=$ {**元件** e_k **正常工作**} ,$k=1,2,\cdots,n.$

$S=$ {**系统正常工作**} ,

则在并联系统(如图 1.2(a)**所示)中,系统工作正常的事件为**

$$S=\{\text{元件 } e_1,e_2,\cdots,e_n \text{ 中至少有一个正常工作}\}=\bigcup_{k=1}^{n}A_k.$$

$$\overline{S}=\{\text{系统工作失效}\}=\{e_1,e_2,\cdots,e_n \text{ 全部工作失效}\}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k.$$

在串联系统(如图 1.2(b)**所示)中,系统工作正常的事件为**

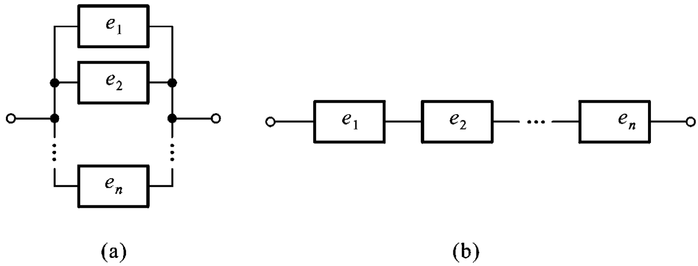


图 1.2

$$S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\text{都正常工作}\}=\bigcap_{k=1}^{n}A_k.$$

整个系统工作失效的事件是

$$\overline{S}=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\text{至少有一个工作失效}\}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k.$$

§ 1.2 概　　率

一、概率

概率是什么？人们对于概率这个数学术语不一定清楚，却往往有意无意地使用它. 对问题"明天是否会下雨？"，有人会说："我有 80% 把握断定明天不会下雨. "每个购买福利彩票的人都关心投入一定的资金，获得头等奖的可能性有多大，这些问题实际上都涉及随机事件的概率.

随机试验中的随机事件，有可能发生，也有可能不发生，人们不能事前预知，但它们发生的可能性大小却是客观存在的，不依人们的主观意识为转移. 例如，掷一颗骰子，出现偶数点的可能性大于恰出现 6 点的可能性；购买福利彩票获得头等奖的可能性远远小于获得尾奖的可能性. 随机事件发生的可能性大小是一个客观存在的量. 概率是对随机事件发生可能大小的一个客观度量. 事件 A 的概率记为 $P(A)$.

在概率论的发展过程中，人们针对不同的问题，从不同的角度给出了定义概率和计算概率的各种方法.

二、频率

人们容易接受这种说法：当一个事件发生的可能性大（小），在相同条件下重复进行若干次试验，该事件发生的次数就多（少），因而，下面引进的数量指标

能在一定程度上反映事件发生的可能性大小.

定义 1.2.1　设在相同条件下,进行 n 次试验,事件 A 发生了 m 次,称比值

$$f_n(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2.1}$$

为事件 A 发生的频率.

回顾 §1.1 节的表 1.1.1,表中列出了各个试验者对于"抛掷硬币出现正面"这一事件所算得的频率值. 从表中可观察到不同试验者所得的频率是不同的,甚至同一试验者所做不同序号的试验,所得的频率也是相异的. 一个事件发生的可能性大小是确定的,因此频率虽然能在一定程度反映事件发生的可能性大小,却不是客观量度,就是说频率不是概率. 另一方面,从表中我们也可以观察出,随着抛掷次数的增多,"出现正面"这一事件的频率在 1/2 附近摆动,渐趋稳定.

例 1.2.1　检查一大批同型号的产品,其结果如表 1.2.1 所示.

表 1.2.1

抽取数 n	5	10	50	150	200	1 800	3 600
合格数 m	5	8	46	132	179	1 630	3 241
频率 $\frac{m}{n}$	1	0.8	0.92	0.88	0.895	0.906	0.900 2

从表中数据可见,虽然抽到合格品的件数是随机的,但随着抽取件数的增多,"抽得合格品"的频率值逐渐稳定于数 0.9.

一般来讲,在相同的条件下重复进行试验,随着试验次数增多,事件的频率总在某一常数的附近摆动,并且出现较大偏差的可能性很小,我们称频率的这一性质为频率的稳定性. 第五章的大数定律将揭示频率稳定性的确切含义,并且可知事件 A 的频率就稳定于事件 A 的概率 $P(A)$,因而在工程实用中,常进行较多次数的重复试验,算得的频率作为概率的近似值.

三、古典概率

定义 1.2.2　设 E 是一个随机试验,若它满足以下两个条件:

(1) 仅有有限个基本试验;

(2) 每个基本事件发生的可能性相等,

则称 E 为古典概型的试验.

古典概型试验的样本空间仅有有限个样本点.

抛一枚均匀硬币试验 E_1 是古典概率型试验;例 1.1.3 中的抽取数字试验也是古典概型试验,而例 1.1.2 中抽取 100 只晶体管进行检查,观察其中的不合格

品数，此试验则不是古典概型试验，因为它虽仅有有限基本事件，但每个基本事件出现的可能性不均等.

定义 1.2.3　设试验 E 为古典概率型试验，A_i，$i=1,2,\cdots,n$ 是全体基本事件，则由

$$P(A)=\frac{A\text{ 所含基本事件个数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1.2.2}$$

所确定的概率称为事件 A 的古典概率.

例 1.2.2　将两颗均匀骰子掷一次，设

$A=\{$两颗骰子的点数之和不小于 6$\}$，　$B=\{$两颗骰子的点数相同$\}$.

求各事件 $A,\bar{A},A\cup B,A\cap B$ 的概率.

解　此试验的样本空间 Ω 由 36 个样本点组成，用 (i,j) 代表第一颗骰子的点数为 i，同时第二颗骰子的点数为 j.

$$\Omega=\begin{bmatrix}(1,1)&(1,2)&(1,3)&(1,4)&(1,5)&(1,6)\\(2,1)&(2,2)&(2,3)&(2,4)&(2,5)&(2,6)\\(3,1)&(3,2)&(3,3)&(3,4)&(3,5)&(3,6)\\(4,1)&(4,2)&(4,3)&(4,4)&(4,5)&(4,6)\\(5,1)&(5,2)&(5,3)&(5,4)&(5,5)&(5,6)\\(6,1)&(6,2)&(6,3)&(6,4)&(6,5)&(6,6)\end{bmatrix},$$

即试验有 36 个基本事件，且各基本事件出现的可能性是均等的，经计算各事件所含基本事件数，可得

$$P(A)=\frac{26}{36},\quad P(\bar{A})=\frac{10}{36},\quad P(B)=\frac{6}{36},\quad P(A\cup B)=\frac{28}{36},$$

$$P(A\cap B)=\frac{4}{36}.$$

例 1.2.3　某城市的电话号码是 6 位数码，并且每一个 6 位数码都对应于一部电话机. 如果从电话号码簿中随意指定一个电话号码，求：

(1) 号码的头两位是“55”的概率；

(2) 头两位号码都不超过 5 的概率；

(3) 六位号码全不相同的概率.

解　设基本事件为

$$A_k=\{\text{指电话簿中第 } k \text{ 个电话号码}\},k=1,2,\cdots,n,$$

其中 $n=10^6$ 为不同的电话号码的总数. 并假定各个电话号码被指定的可能性相等，这是一个古典概型试验.

(1) 由于已指定头两位为“55”，而“0,1,2,⋯,9”十个数码可任意填写在后面 4 个位置，故

$$P(B_1)=\frac{10^4}{10^6}=0.01.$$

(2) 头两位不超过"5"表明只能用(0,1,2,3,4,5)填写在头两个位置上,有 6^2 种不同的方式,后 4 个位置仍可从十个数码中任意选择,故

$$P(B_2)=\frac{6^2\times10^4}{10^6}=0.36.$$

(3) 六位数码全不相同相当于不允许重复的不完全排列,有

$$P(B_3)=\frac{\mathrm{P}_{10}^6}{10^6}=\frac{151\ 200}{10^6}=0.151\ 2.$$

例 1.2.4　设有 n 个人,每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的任意一间去住($n\leqslant N$),求下列事件的概率.

(1) 指定的 n 个房间各有一个人住;

(2) 恰好有 n 个房间,每间各住一人.

解　设 $A=$ {指定的 n 间房各住一人},$B=$ {恰有 n 个房间,每间各住一人},显然基本事件的总数为 N^n,指定的房间各住一个人,有 $n!$ 种不同的住法,故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

从房间中任意选出 n 间住人,并且每间各住一人,有 $\mathrm{C}_N^n\cdot n!$ 种不同的方式,故

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

例 1.2.5　盒中装有 10 个同样的小球,分别写上号码 1,2,…,10,从盒中任取 3 个球,试求 3 个球的第二大的号码恰是 4 这一事件 A 的概率.

解　试验相当于从十个号码中任取 3 个,即有 C_{10}^3 个基本事件.

事件 A 发生,即第二大的号码恰是 4,则最小的号码在"1,2,3"中取出,有 C_3^1 种不同的取法;最大的号码在"5,6,7,8,9,10"中取出,有 C_6^1 种不同的取法,故

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_1^1\mathrm{C}_6^1}{\mathrm{C}_{10}^3}=\frac{3}{20}.$$

在此例中,实际上是将 10 个球分成三类,再从每一类中各取一个. 此例的更一般的提法是:袋中有 n 个球,第一类有 n_1 个,第 2 类有 n_2 个,…,第 M 类有 n_M 个,并且 $n_1+n_2+\cdots+n_M=n$,从袋中取出 $d(d\leqslant n)$ 个球,求其中恰有 d_i 个第 i 类球($i=1,2,\cdots,M$)的概率,其中 $d_1+d_2+\cdots+d_M=d,d_i\leqslant n_i$.

用类似的解法,求得概率为

$$P=\frac{\mathrm{C}_{n_1}^{d_1}\mathrm{C}_{n_2}^{d_2}\cdots\mathrm{C}_{n_M}^{d_M}}{\mathrm{C}_n^d}.\tag{1.2.3}$$

性质 1.2.1　古典概率满足：

(1) 对任意事件 A，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

证　(1)和(2)显然成立，现在证明(3).

设 A_i 含有 $k_i(k_i \leqslant n)$ 个基本事件，$i=1,2,\cdots,m$，基本事件总数为 n，则有

$$P(A_i)=\frac{k_i}{n}, i=1,2,\cdots,m.$$

由于 $A_i, i=1,2,\cdots,m$ 互不相容，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ 含有 $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i$ 个不同的基本事件，因此

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} k_i=\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} k_i=\sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

四、概率的公理化定义与性质

古典概率仅对古典概型试验给出概率定义，有着不可避免的理论上的缺陷和应用上的局限性. 这里采用数学抽象化的方法，建立概率的公理化定义.

定义 1.2.4　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，若对于 E 的每一事件 A 都对应一个实数 $P(A)$，其对应规则满足以下三条：

1. (非负性)对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；
2. (规范性) $P(\Omega)=1$；
3. (可列可加性)对 E 的互不相容事件列 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \tag{1.2.4}$$

则称 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

由概率的公理化定义，可以推得概率的部分重要性质.

性质 1.2.2　概率具有以下性质：

1. $P(\varnothing)=0$；
2. (有限可加性)若试验 E 的事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i);$$

3. 对任何事件 A 有 $P(A)+P(\overline{A})=1$；
4. (单调性)若事件 A 和 B 满足 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$ 和 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ 成立.

证　1. 因$\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,由概率的可列可加性,有

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

故 $P(\varnothing)=0$.

2. 在公式(1.2.4)中,令 $A_{m+1}=A_{m+2}=\cdots=\varnothing$,注意到 $P(\varnothing)=0$,得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i).$$

3. 因 $A\cup\overline{A}=\Omega,A\overline{A}=\varnothing$,由概率的有限可加性得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

4. 如图 1.3 所示,有　　$B=A\cup(B-A)$ 且 $A\cap(B-A)=\varnothing$,

根据概率的有限可加性

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

又因 $P(B-A)\geqslant 0$,故 $P(A)\leqslant P(B)$.

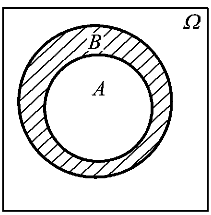


图 1.3

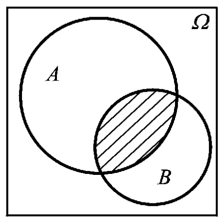


图 1.4

例 1.2.6　证明对试验 E 的两个事件 A 和 B 有

(1) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$;

(2) $P(A-B)=P(A\cup B)-P(B)$.

证　在例 1.1.8 中已证得

$$A-B=A-AB,\quad A-B=(A\cup B)-B.$$

注意到 $AB\subset A,B\subset A\cup B$ 均成立,利用概率的单调性可得

$$P(A-B)=P(A)-P(AB),\quad P(A-B)=P(A\cup B)-P(B),$$

此例中的结论也可利用概率性质另行证明.

性质 1.2.3(概率加法定理)　对试验 E 的任意两个事件 A 和 B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),\tag{1.2.5}$$

证　由图 1.4 可见,$A\cup B=A\cup[B-(AB)]$,A 与 $[B-(AB)]$ 互不相容,并且 $AB\subset B$,故

$$P(A\cup B)=P(A)+P[B-(AB)]=P(A)+P(B)-P(AB).$$

用数学归纳法可将概率加法定理推广到任意有限个事件的情形:

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\\
=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+\\
&(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

概率的公理化定义及性质,为概率的计算提供了更完善的理论依据和极大的便利.

例 1.2.7　古典概率定义是公理化定义的特例.

设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 是古典概型试验 E 的样本空间,其基本事件组 $A_i=(\omega_i),i=1,2,\cdots,n$ 是互不相容的,各个基本事件发生的可能性是均等的. 根据概率的有限可加性,有

$$1=P(\Omega)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=nP(A_i),$$

故
$$P(A_i)=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

若事件 A 包含 k 个基本事件,再由概率的有限可加性,有 $P(A)=\dfrac{k}{n}$.

例 1.2.8　从 1 ~ 2 000 中任取一整数,求取到的整数能被 6 或者 8 整除的概率.

解　设 $A=\{$取得的整数能被 6 整除$\}$,$B=\{$取得的整数能被 8 整除$\}$,则所求概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

因
$$333<\frac{2\ 000}{6}<334,\quad \frac{2\ 000}{8}=250,$$

故 A 与 B 所含基本事件数分别为 333 和 250,同时能被 6 和 8 整除的数,也就是能被 24 整除的数,由于

$$83<\frac{2\ 000}{24}<84,$$

得 AB 的基本事件数为 83.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{333}{2\ 000}+\frac{250}{2\ 000}-\frac{83}{2\ 000}=\frac{1}{4}.$$

例 1.2.9　盒中装有 50 块固体组件,其中有 15 块次品,从中任取 10 块,求:(1)最多有两块次品的概率 p_1;(2)至少有一块次品的概率 p_2.

解　设 $A_i=\{$取出的 10 块中恰有 i 块次品$\}$,$i=0,1,2,\cdots,10$,这 11 个事件互不相容,故

$$\begin{aligned}p_1&=P(A_0\cup A_1\cup A_2)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)\\
&=\frac{C_{35}^{10}}{C_{50}^{10}}+\frac{C_{15}^{1}C_{35}^{9}}{C_{50}^{10}}+\frac{C_{15}^{2}C_{35}^{8}}{C_{50}^{10}}\end{aligned}$$

$$=0.0179+0.1031+0.2406=0.3616.$$

$$p_2=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10})=P(\overline{A_0})=1-P(A_0)$$

$$=1-\frac{C_{35}^{10}}{C_{50}^{10}}=1-0.0179=0.9821.$$

例 1.2.10　有十张分别标有 1,2,…,10 的卡片,从中任意取出两张,求两张卡片上的数之和等于 10 的概率.

解　用 X 和 Y 分别表示抽取出的卡片上的两个数,两数之和为 10 的事件为

$$\{X+Y=10\}=\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq5}}^{9}\{X=i,Y=10-i\}.$$

事件组

$$\{X=i,Y=10-i\}=\{X=i\}\cap\{Y=10-i\},i=1,2,\cdots,9,i\neq5,$$

是互不相容的. 故所求概率为

$$P\{X+Y=10\}=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq5}}^{9}P\{X=i,Y=10-i\}=\frac{8}{10\times9}=\frac{4}{45}.$$

§1.3　条件概率

一、条件概率

条件概率是一个重要的概念,它是在已知事件 B 发生的条件下,事件 A 发生可能性大小的客观度量,记为 $P(A|B)$. 由于诸事件之间往往有一定联系,因而事件 B 发生以后,事件 A 的概率可能会发生变化.

例 1.3.1　检验某种元件的两个指标 I_α 和 P_M,两个指标必须均合格才认为元件合格. 现有 100 件产品,其中合格品有 30 件,而 I_α 指标合格的有 50 件. 从 I_α 指标合格品中任意取出一件,求它是合格品的概率.

解　设 $A=$ {抽出合格产品},$B=$ {抽出的产品 I_α 指标合格},

有

$$P(A)=P(AB)=\frac{30}{100},$$

所求概率为

$$P(A|B)=\frac{30}{50}=\frac{30/100}{50/100}=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

例 1.3.2　两位工人加工同一种零件共 100 个,甲加工了 40 个,其中 35 个是合格品;乙加工了 60 个,其中有 50 个合格. 设

$A=$ {从 100 个零件中任取一个是合格品},$B=$ {从 100 个零件中任取一个,

取到甲生产的},求概率:$P(A)$,$P(B)$,$P(AB)$,$P(A|B)$和 $P(A|\bar{B})$.

解 $P(A)=\dfrac{85}{100}$,$P(B)=\dfrac{40}{100}$,$P(AB)=\dfrac{35}{100}$,

$$P(A|B)=\frac{35}{40}=\frac{35/100}{40/100}=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(A|\bar{B})=\frac{50}{60}=\frac{50/100}{60/100}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}.$$

如果不顾及上述两例的具体内容,可引出条件概率的定义.

定义 1.3.1 设 A,B 是随机试验 E 的两个随机事件,且 $P(B)>0$,称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.3.1}$$

为在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的条件概率.

条件概率 $P(A|B)$一般不等于概率 $P(A)$.

性质 1.3.1 设随机事件 E 的样本空间是 Ω;$A,B,A_1,A_2,\cdots\cdots$都是 E 的事件,若 $P(B)>0$,则

(1) 对每一事件 A,有 $0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega|B)=1$;

(3) 若事件 $A_1,A_2,\cdots\cdots$互不相容,有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i|B\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$.

证 (1)与(2)请自证.

(3) 因 $A_1,A_2,\cdots\cdots$互不相容,事件列 $A_1B,A_2B,\cdots\cdots$也互不相容,由概率的可列可加性,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right)=\frac{P\left[\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)\cap B\right]}{P(B)}=\frac{P\left[\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_iB)\right]}{P(B)}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_iB)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B).$$

性质 1.3.1 说明条件概率满足概率定义中的三条公理,类似于§1.2 节,可以证明关于概率的一系列性质同样适用于条件概率.

例 1.3.3 证明:(1) $P(A|B)+P(\bar{A}|B)=1$;

(2) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$.

证 (1) $P(A|B)+P(\bar{A}|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}+\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(AB\cup\bar{A}B)}{P(B)}$

$$=\frac{P(\Omega B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1;$$

(2) $P(A_1\cup A_2|B)=\dfrac{P[(A_1\cup A_2)\cap B]}{P(B)}=\dfrac{1}{P(B)}\cdot P[(A_1B)\cup(A_2B)]$

$$= \frac{1}{P(B)} \cdot P[(A_1B) + (A_2B) - P(A_1A_2B)]$$
$$= P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B).$$

在例 1.3.1 中，若求'从 I_α 合格品中任取一个，它是不合格品'的概率为

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{30}{50} = \frac{20}{50}.$$

例 1.3.4　设袋中装有编号为 1 至 10 的 10 个小球，从中抽取两次，一次一球(看后放回)，第一个球号记为 X_1，第二个球号记为 X_2，令

$$A = \{X_1 = 4\}, \quad B = \{X_1 + X_2 = 7\},$$

计算 $P(A|B)$ 和 $P(B|A)$.

解　$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P\{X_1 = 4, X_1 + X_2 = 7\}}{P(X_1 + X_2 = 7)}$$
$$= \frac{P\{X_1 = 4, X_2 = 3\}}{P\{X_1 + X_2 = 7\}} = \frac{1}{100}\Big/\frac{6}{100} = \frac{1}{6},$$
$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P\{X_1 = 4, X_2 = 3\}}{P\{X_1 = 4\}} = \frac{1}{100}\Big/\frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

注意此例中有 $P(A|B) \neq P(A)$，并且 $P(A|B) \neq P(B|A)$.

二、乘法公式

从条件概率的定义直接可得下面的定理.

定理 1.3.1(乘法公式)

设 $P(B) > 0$，则有　　$P(AB) = P(B)P(A|B)$；　　(1.3.2)

若 $P(A) > 0$，有　　$P(AB) = P(A)P(B|A)$.　　(1.3.3)

上两式可用来计算两个事件乘积的概率. 概率乘法公式可以推广到任意有限个事件之积的情形，即

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是试验 E 的 n 个事件，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.3.4}$$

证　因为 $A_1 \supset A_1A_2 \supset \cdots \supset A_1A_2\cdots A_{n-1}$，则由概率的单调性有

$$P(A_1) > P(A_1A_2) > \cdots > P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0,$$

式(1.3.4)右端各个条件概率均有意义，有条件概率的定义，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})}$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例 1.3.5　从装有 10 个白球和 20 个红球的盒子，第一次取出 5 个红球后，第二次又取出 10 个球，令

$A=\{$第一次取出 5 个红球$\}$， $B=\{$第二次取出 5 个红球和 5 个白球$\}$，

则
$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{C_{20}^{5}}{C_{30}^{5}}\cdot\frac{C_{10}^{5}C_{15}^{5}}{C_{25}^{10}}=0.0252.$$

例 1.3.6 袋中有 a 只白球，b 只黑球，任意取出一球，看后放回，并加入与抽取的球同色的 c 只球，如此进行了四次. 问前两次出现黑球、后两次出现白球的概率是多少？

解 设 $A_j=\{$第 j 次取到黑球$\}$，$j=1,2,3,4$，所求概率为
$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})=P(A_1)P(A_2|A_1)P(\overline{A_3}|A_1A_2)P(\overline{A_4}|A_1A_2\overline{A_3})$$
$$=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b+c}{a+b+c}\cdot\frac{a}{a+b+2c}\cdot\frac{a+c}{a+b+3c}.$$

例 1.3.7 对一种产品进行三种破坏性试验，产品没通过第一种试验的概率为 0.3，通过了第一种试验而未通过第二种试验的概率为 0.2，通过了前两种试验而未通过第三种试验的概率为 0.1，试求产品没通过这三种试验的概率.

解 设 $A=\{$产品没通过这三种试验$\}$，$A_i=\{$产品没通过第 i 种试验$\}$，$i=1,2,3$，则有 $A=A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $\overline{A}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.
$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2}),$$

依题意知 $$P(A_1)=0.3,P(A_2|\overline{A_1})=0.2,P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})=0.1,$$

从而 $$P(A)=1-0.7\times0.8\times0.9=0.496.$$

另解 $A=A_1\cup\overline{A_1}A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，显然 $A_1,\overline{A_1}A_2,\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，互不相容，故
$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$
$$=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})$$
$$=0.3+0.7\times0.2+0.7\times0.8\times0.1=0.496.$$

三、全概率公式

在概率的计算中，我们希望从已知简单事件的概率去求较复杂事件的概率，全概率公式是重要的公式. 先看以下例子.

例 1.3.8 设甲盒中装有编号 1，2，…，15 的 15 张红色卡片；乙盒中有编号 1，2，…，10 的 10 张白色卡片. 现任意挑选一盒，并从中任取一张卡片，求卡片号码是偶数的概率.

解 观察抽出的卡片，有两类结果，一类是"抽到红色卡片"，另一类是"抽到白色卡片"，令

$A=\{$抽到偶数号码卡片$\}$，$B_1=\{$抽到红色卡片$\}$，$B_2=\{$抽到白色卡片$\}$，

显然有 $B_1\cup B_2=\Omega$，$B_1\cap B_2=\varnothing$，事件 A 可"分解"为
$$A=\{\text{抽到红色偶数卡片}\}\cup\{\text{抽到白色偶数卡片}\}=AB_1\cup AB_2,$$

利用概率的有限可加性和乘法公式，有

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$
$$=\frac{15}{25}\cdot\frac{7}{15}+\frac{10}{25}\cdot\frac{5}{10}=\frac{12}{25}.$$

此例中,求 $P(A)$ 的关键一步是将事件 A“分解”成互不相容的两个事件.

对于每一个随机试验 E,都可设法将其样本空间“分解”成若干“部分”,即对全体基本事件进行“分类”,进而“分解”任何一个复合事件. 下面给出这种“分解”的确切定义.

定义 1.3.2　设 Ω 为随机试验 E 的样本空间,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件,若

(1) $B_i\cap B_j=\varnothing, i\neq j$;

(2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$,

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个有限划分.

例 1.3.8 的事件组 B_1 和 B_2 构成了样本空间的划分.

样本空间 Ω 的划分不唯一,但若划分确定后,做一次试验 E,事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中必有一个且仅有一个发生.

定理 1.3.2(全概率公式)　设随机试验 E 的样本空间为 Ω,$A\subset\Omega$,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个有限划分,且 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$,则有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i). \tag{1.3.5}$$

从式(1.3.5)的证明中可见,实际上是借助于样本空间的一个划分:$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 将事件 A 分解成互不相容的部分 $AB_1,AB_2,\cdots,AB_n$,进而将“全”概率 $P(A)$ 分成若干部分,分别进行计算再求和,这就是将式(1.3.5)称为“全概率公式”的缘由. 它的理论和实际意义在于:在较复杂的情况下直接计算 $P(A)$ 不容易,但适当地构造划分 $B_i, i=1,2,\cdots,n$ 可以简化计算.

例 1.3.9　某系统中Ⅰ类元件占 10%,Ⅱ类元件占 40%,Ⅲ类元件占 50%. t 小时以后各类元件的损坏率分别为:30%,25%,10%,试求 t 小时以后,任意抽取该系统的一个元件,发现它已损坏的概率.

解　设 $A=\{$抽出的元件已损坏$\}$,　$B_1=\{$所抽元件是Ⅰ类$\}$,

$B_2=\{$所抽元件是Ⅱ类$\}$,　$B_3=\{$所抽元件是Ⅲ类$\}$.

B_1,B_2,B_3 构成样本空间的划分,且 $P(B_i)>0, i=1,2,3$,由全概率公式

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$
$$=0.1\times0.3+0.4\times0.25+0.5\times0.1=0.18.$$

例 1.3.10　某通信系统的发端以 0.7 和 0.3 的概率发出信号“0”和“1”,由于信道有干扰,当发出信号“0”时,接收端以概率 0.8 和 0.2 收到信号“0”和“1”,当发出信号“1”时,接收端以概率 0.9 和 0.1 收到信号“1”和“0”,计算接

收到信号"0"的概率.

解 令 $A_0=\{$发端发出信号"0"$\}$, $A_1=\{$发端发出信号"1"$\}$,

$B=\{$接受到信号"0"$\}$,

A_0,A_1构成样本空间的一个划分,由全概率公式

$$P(B)=P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1)$$
$$=0.7\times0.8+0.3\times0.1=0.59.$$

例 1.3.11 10 个人依次抽签,10 张签中有 5 张幸运签可得到一张球票,另 5 张是空签. 试求第 1 人,第 2 人以及第 10 人抽到幸运签的概率.

解 令 $A_i=\{$第 i 人抽到幸运签$\}$, $i=1,2,\cdots,10$,

则
$$P(A_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},$$

由全概率公式

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{2},$$

再考虑事件 $B=\{$前 9 人已抽完 5 张幸运签$\}$,则

$$P(A_{10})=P(B)P(A_{10}|B)+P(\overline{B})P(A_{10}|\overline{B})$$
$$=\frac{C_5^5\cdot C_5^4}{C_{10}^9}\cdot 0+\frac{C_5^4\cdot C_5^5}{C_{10}^9}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

类似地,利用全概率公式可得

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\cdots=P(A_{10})=\frac{1}{2},$$

即抽签的结果与抽签次序无关,这称为抽签的"公平性".

四、贝叶斯公式

借助于样本空间的一个适当划分,可利用全概率公式计算某个事件 A 的概率,但我们常常遇到另一类问题.

在例 1.3.9 中,若 t 小时以后系统确有一个元件发生损坏,问查换元件应从哪一类开始?已知元件发生损坏,即事件 A 已发生,此元件是Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ类的条件概率分别为

$$P(B_1|A), P(B_2|A), P(B_3|A),$$

比较这三个概率的大小,自然应从其中最大者所对应的一类查找起.

在例 1.3.10 中,收到信号"0",人们会追问发端确实发出信号"0"的概率有多大?

利用乘法公式和全概率公式可得以下定理:

定理 1.3.3(贝叶斯公式)　设随机试验 E 的样本空间为 Ω,$A\subset\Omega$,$B_i(i=1,2,\cdots,n)$是 Ω 的一个有限划分,而且 $P(A)>0$,$P(B_i)>0$,则有

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}. \tag{1.3.6}$$

证　由条件概率定义和乘法公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}.$$

本定理的条件满足全概率公式的条件,故

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}.$$

贝叶斯公式是概率论中的一个著名公式,从形式推导来看,它是将乘法公式和全概率公式用于条件概率的计算中,它的重要性是在于它的实际意义. 如果将事件 A 看成"结果",把事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 看成导致该结果的"原因". 现在"结果"发生了,是"原因"B_i 导致该结果发生的概率即 $P(B_i|A)$,贝叶斯公式告诉我们,此概率与"原因"B_i 发生的可能性大小 $P(B_i)$ 有关.

现有一个"结果"A 发生了,在众多可能"原因"中,究竟是哪一个导致了这一结果?这是一个在日常生活和科学技术开发中常常遇到的问题. 例如在例 1.3.9 中,已经算出 $P(A)=0.8$,由贝叶斯公式可得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.1\times0.3}{0.18}\approx0.17,$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.4\times0.25}{0.18}\approx0.55,$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{0.5\times0.1}{0.18}\approx0.28.$$

若系统运转 t 小时以后有一个元件发生损坏,应从第Ⅱ类元件开始查找系统故障,因第Ⅱ类元件损坏造成系统故障的可能性最大.

例 1.3.12　学生中优等生占 25%,中等生占 50%,较差生占 25%,已知优等生通过一项测验的概率为 0.8,中等生通过这项测验的概率为 0.6,而较差生通过测验的概率为 0.3. 现从学生中随机挑选一名进行测验,他通过了测验,求他是优等生的概率和他是较差生的概率.

解　设 $A=\{$选出的学生通过了测验$\}$,

$H_1=\{$选出一名优等生$\}$,$H_2=\{$选出一名中等生$\}$,$H_3=\{$选出一名较差生$\}$,

H_1,H_2,H_3 构成样本空间的一个划分,由贝叶斯公式

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(A \mid H_1)P(H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A \mid H_i)}$$
$$= \frac{0.8 \times 0.25}{0.8 \times 0.25 + 0.6 \times 0.5 + 0.3 \times 0.25} \approx 0.35,$$
$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(A \mid H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.3 \times 0.25}{0.575} \approx 0.13.$$

例 1.3.13 设某种病菌在人口中的带菌者为 0.03,进行检查时,由于技术和操作的不完善以及种种原因,使带菌者未必呈阳性反应,而不带菌者也可能呈阳性反应. 假定带菌者检查结果呈阳性反应的概率为 0.99,不带菌者检查结果呈阳性反应的概率为 0.05. 现设某人检查结果呈阳性,问他确是带菌者的概率是多少?

解 设 $A=$ {检查结果呈阳性},$B=$ {此人是带菌者},
由已知条件有

$$P(A \mid B) = 0.99, \quad P(A \mid \overline{B}) = 0.05,$$

且 $P(B)=0.03$,所求概率为 $P(B \mid A)$,根据贝叶斯公式

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(B)P(A \mid \overline{B})}$$
$$= \frac{0.03 \times 0.99}{0.03 \times 0.99 + 0.97 \times 0.05} = 0.380.$$

§1.4 事件的独立性

一、两个事件的独立性

一般情况下,$P(A \mid B)$ 与 $P(A)$ 不相等,这反映了这两个事件之间存在一定的关联,譬如在例 1.3.1 中,

$$P(A) = \frac{30}{100}, \quad P(A \mid B) = \frac{30}{50} > P(A),$$

即事件 B 的发生使 A 发生的可能性增大了,若有

$$P(A \mid B) = P(A) \tag{1.4.1}$$

成立,即事件 A 发生的可能性完全不受事件 B 的影响. 换言之,一个事件发生与否不影响另一个事件发生的概率,我们说事件 A 与事件 B 是相互独立的. 将式(1.4.1)代入概率乘法公式有

$$P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(A)P(B).$$

定义 1.4.1 设 A, B 是随机试验 E 的事件,若满足

$$P(AB)=P(A)P(B), \tag{1.4.2}$$

则称事件 A 与 B 相互独立.

将例 1.3.5 中的试验改为第一次取 5 个球,若看完以后放回,第二次取 10 个球,对原例中的事件 A 和 B,有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{C_{20}^{5}}{C_{30}^{5}}\cdot\frac{C_{10}^{5}C_{20}^{5}}{C_{30}^{10}}=P(A)P(B),$$

故 A 与 B 是相互独立的.

实际上,第二次抽取前,盒中的红色球和白色球已恢复原状,因此第二次抽取不受第一次抽取的影响,因而可直接判断 A 与 B 是相互独立的. 一般而言,我们往往是依据式(1.4.1)从实际角度去分析判断事件的独立性,然后利用式(1.4.2)进行概率计算. 例如,两名工人分别在两台机床上进行生产,彼此各不相干,则他们各自是否生产出废品或多少件废品这类事件应是相互独立的.

定理 1.4.1　若事件 A 与 B 相互独立,则下列三对事件:

$$A \text{ 与 } \overline{B},\quad \overline{A} \text{ 与 } B,\quad \overline{A} \text{ 与 } \overline{B}$$

也分别相互独立.

证　因 $P(AB)=P(A)P(B)$,且

$$P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB),$$

故

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A)-P(A)P(B)=P(A)[1-P(B)]\\&=P(A)P(\overline{B}).\end{aligned}$$

由定义 1.4.1 知 A 与 $\overline{B}$ 相互独立,同理可证得 $\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别相互独立.

例 1.4.1　甲乙两名工人在两台机床上独立加工零件,他们的废品率分别是 0.05 和 0.04,现从他们生产的产品中各取一件,试求:

(1) 两件产品均是废品的概率 p_1;

(2) 至少有一件产品是废品的概率 p_2;

(3) 恰有一件产品是废品的概率 p_3.

解　令 $A=$ {抽出的甲工人的产品是废品},$B=$ {抽出的乙工人的产品是废品},如前分析,A 与 B 是相互独立的,从而 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B 及 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别相互独立,但 A 与 B 并不是互不相容的.

$$p_1=P(AB)=P(A)P(B)=0.05\times0.04=0.002.$$

$$p_2=P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-0.95\times0.96=0.088.$$

$$\begin{aligned}p_3&=P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)\\&=0.05\times0.96+0.95\times0.04=0.086.\end{aligned}$$

二、n 个事件的独立性

在定义 n 个事件的独立性之前,我们先讨论一个例子.

例 1.4.2 设同时掷两个均匀的正四面体一次,每一四面体的四面分别标有 1,2,3,4,令

$A=\{$第一个四面体向下一面出现偶数$\}$,

$B=\{$第二个四面体向下一面出现奇数$\}$,

$C=\{$两个正四面体向下一面同时出现奇数,或者同时出现偶数$\}$.

试验的样本空间为

$$\begin{array}{cccc}(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4)\\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4)\\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4)\\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4)\end{array}$$

由古典概率定义,可得下述概率：

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4},$$

$$P(ABC)=P(\varnothing)=0.$$

可验证下列关系成立

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(AC)=P(A)P(C),\\ P(BC)=P(B)P(C),\end{cases}\tag{1.4.3}$$

有 A,B,C 中任意两个都是相互独立的,即对 A,B,C 中任意两个,譬如 A 与 B,一个事件发生的可能性大小不受另一事件影响. 我们进一步问,A 事件发生的可能性大小是否不受 B 和 C 的"联合"影响呢？即是否有 $P(A|BC)=P(A)$ 成立？在该例中

$$P(A|BC)=0\neq 1/2=P(A),$$

对于试验 E 的三个事件 A,B,C,若式(1.4.3)和 $P(A|BC)=P(A)$ 同时成立,则有

$$P(ABC)=P(A|BC)P(BC)=P(A)P(B)P(C).$$

定义 1.4.2 对于试验 E 的三个事件 A,B,C,若下面四个等式同时成立

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(AC)=P(A)P(C),\\ P(BC)=P(B)P(C),\\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C),\end{cases}\tag{1.4.4}$$

则称 A,B,C 所组成的事件组相互独立. 若仅有前三个等式同时成立,则称此事

件组是两两独立的.

由定义 1.4.2 知 A,B,C 相互独立,则可推出它们两两独立;反之,由例 1.4.2 知仅有 A,B,C 两两独立不能得到它们相互独立的结论.

例 1.4.3　设事件组 A,B,C 相互独立,证明

(1) A 与 BC 相互独立;(2) A 与 $B\cup C$ 相互独立;(3) A 与 $B-C$ 相互独立.

证　(1) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)$.

(2)
$$
\begin{aligned}
P(A\cap(B\cup C)) &= P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)\\
&= P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)\\
&= P(A)[P(B)+P(C)-P(BC)]\\
&= P(A)P(B\cup C).
\end{aligned}
$$

(3) 由(1)的结果可知 AB 与 C 相互独立,根据定理 1.4.1 得 AB 与 $\overline{C}$ 相互独立,故
$$
\begin{aligned}
P(A\cap(B-C)) &= P(AB\overline{C})=P(AB)P(\overline{C})=P(A)P(B)[1-P(C)]\\
&= P(A)[P(B)-P(BC)]=P(A)P(B-C).
\end{aligned}
$$

例 1.4.4　我方地面炮火向一架敌机射击,飞机有两部发动机,由一名驾驶员驾驶. 已知炮火击毙驾驶员的概率为 p_0,击毁两部发动机的概率分别为 p_1 和 p_2,试求击落这架飞机的概率.

解　令 $A=\{$击落飞机$\}$,$B_1=\{$击毁第一部发动机$\}$,$B_2=\{$击毁第二部发动机$\}$,则有 $A=B_0\cup B_1B_2$,并且 B_0,B_1,B_2 相互独立.
$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(B_0)+P(B_1B_2)-P(B_0B_1B_2)\\
&= P(B_0)+P(B_1)P(B_2)-P(B_0)P(B_1)P(B_2)\\
&= p_0+p_1p_2-p_0p_1p_2.
\end{aligned}
$$
或者,因 $\overline{B_0}$ 和 $\overline{B_1B_2}$ 相互独立,有
$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B_0}\cap\overline{B_1B_2})=1-P(\overline{B_0})P(\overline{B_1B_2})\\
&= 1-[1-P(B_0)][1-P(B_1B_2)]=1-(1-p_0)(1-p_1p_2)\\
&= p_0+p_1p_2-p_0p_1p_2.
\end{aligned}
$$

定义 1.4.3　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为随机试验 E 的事件,若对任意的 $s(1<s\leqslant n)$ 及 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$,有
$$
P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_n})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n}), \tag{1.4.5}
$$
则称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

式(1.4.5)对于任意的 $s=2,3,\cdots,n$ 均成立,即共有
$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^3+\cdots+\mathrm{C}_n^n &= (\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n)-\mathrm{C}_n^1-\mathrm{C}_n^0\\
&= (1+1)^n-n-1=2^n-n-1
\end{aligned}
$$
个等式同时成立,才能称事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

这里不予证明给出下述定理.

定理 1.4.2　若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍然相互独立.

例 1.4.5　设一次射击命中的概率为 $p(0<p<1)$，不断地进行射击，假定各次射击独立进行，令

$B_k=\{$射击进行到第 k 次才命中$\}$，$C_k=\{$前 k 次射击中，至少命中一次$\}$，

试求 B_k, C_k 发生的概率$(k\geqslant 2)$.

解　令 $A_j=\{$第 j 次射击命中目标$\}$，$j=1,2,\cdots,k$，由于各次射击独立进行，故 $A_j, j=1,2,\cdots,k$ 相互独立.

$$P(B_k)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k)$$
$$=(1-p)^{k-1}p,$$
$$P(C_k)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}\overline{A}_k)$$
$$=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(\overline{A}_k)=1-(1-p)^k.$$

注意到对任意 $0<p<1$，有

$$\lim_{k\to\infty}P(C_k)=\lim_{k\to\infty}[1-(1-p)^k]=1.$$

我们可以得到结论：若试验 E 的某事件 A 发生的概率 $p>0$，则不论 p 如何小，不断独立地重复试验，事件 A 迟早会出现的概率为 1.

例 1.4.6　元件能正常工作的概率称为此元件的可靠性，由多个元件构成的系统能正常工作的概率称为该系统的可靠性. 设各元件能否正常工作是相互独立的，且各个元件的可靠性均为 $r(0<r<1)$. 试求如图 1.5 所示各系统的可靠性，并比较它们的优劣.

解　记 $A_k=\{$元件 a_k 能正常工作$\}$，$B_k=\{$元件 b_k 能正常工作$\}$，

由题设条件 $P(A_k)=P(B_k)=r, k=1,2,\cdots,n$.

系统 Ⅰ 的可靠性为

$$R_1=P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=r^n.$$

当 n 越大（即元件越多），系统的可靠性越低.

系统 Ⅱ 的可靠性为

$$R_2=P(A_1A_2\cdots A_n)\cup(B_1B_2\cdots B_n)$$
$$=P(A_1A_2\cdots A_n)+P(B_1B_2\cdots B_n)-P(A_1A_2\cdots A_nB_1B_2\cdots B_n)$$
$$=r^n+r^n-r^{2n}=r^n(2-r^n)=1-(1-r^n)^2.$$

系统 Ⅲ 的可靠性为

$$R_3=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_3})$$
$$=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=1-(1-r)^n.$$

系统 Ⅲ 的可靠性将随元件个数的增多而提高.

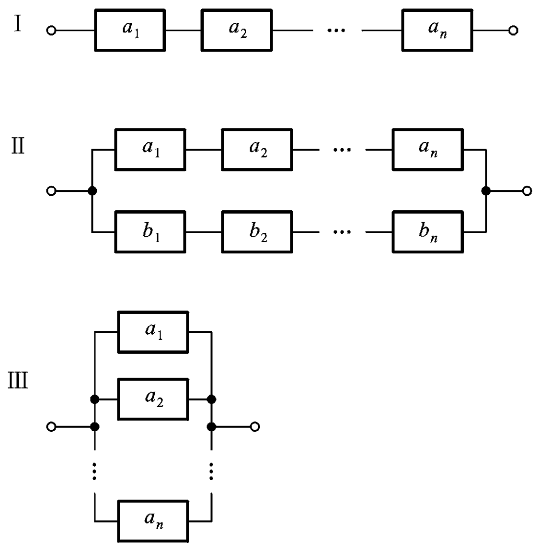


图 1.5

现比较各系统可靠性的大小，注意到因 $0<r<1$，故 $0<r^n<r<1$，从而

$$R_1=r^n<r^n(2-r^n)=R_2,$$

$$R_2=1-(1-r^n)^2<1-(1-r)^2<1-(1-r)^n=R_3,$$

综合得 $R_1<R_2<R_3$. 上述三种系统中，并联系统Ⅲ的可靠性最大，串联系统Ⅰ的可靠性最差.

§1.5 应用实例

一、某种疾病患者

某城市对一种严重疾病进行统计，有如下的统计数据：在得病的 1 000 人中有 200 人幸存，幸存者有 120 人是经手术后活下来的，其余 80 人是没有经过手术存活的，并且做过手术的患者共 360 名.

现有一名患者对自己是否进行手术犹豫不决，我们对此问题进行分析，帮助他做出选择. 将上述数据用矩阵表示如下：

$$\begin{array}{ccc} & \text{幸存数} & \text{死亡数} \\ S = & \left[\begin{array}{cc} 120 & 240 \\ 80 & 560 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{动手术人数} \\ \text{未动手术人数} \end{array} \end{array}$$

令 $A=\{$患者幸存下来$\}$，$B=\{$患者动手术$\}$，

根据数据矩阵 S，对动过手术的患者而言，可计算以下频率：

$$f(A)=\frac{120}{360}=\frac{1}{3}, \quad f(\bar{A})=\frac{240}{360}=\frac{2}{3},$$

对未做手术的患者而言，有

$$W(A)=\frac{80}{640}=\frac{1}{8}, \quad W(\bar{A})=\frac{560}{640}=\frac{7}{8}.$$

我们知道事件的频率具有稳定性（第五章将予以详细讨论），因此可将事件的频率权且作为其概率的估计，亦即可假定

$$P(A|B)=\frac{1}{3}, \quad P(\bar{A}|B)=\frac{2}{3},$$

$$P(A|\bar{B})=\frac{1}{8}, \quad P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{7}{8}.$$

可见患者动过手术的存活率超过不动手术的存活率. 另一方面，一名患者幸存下来，是动手术使他存活的可能性有多大呢？需要计算条件概率 $P(B|A)$，用贝叶斯公式

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})},$$

同前理，可假定 $P(B)=\dfrac{360}{1\ 000}=\dfrac{9}{25}$，从而

$$P(B|A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{25}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{25}+\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}>\frac{2}{5}=P(\bar{B}|A).$$

若把历史数据作为预测未来的数据，我们得到的结果说明对生存欲望强烈的患者而言，动手术是最佳的选择.

许多人曾有过这样的实际经历，进行一次检查，结果呈阳性提示此人患病，但实际上却虚惊一场. 这往往是检查的技术水平等原因造成错误诊断所致. 现有以下数据矩阵

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{cc}\text{有病人数} & \text{无病人数}\end{array} & \\ \boldsymbol{T}= & \begin{bmatrix} 360 & 120 \\ 40 & 480 \end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{正确诊断的人数} \\ \text{错误诊断的人数}\end{array} \end{array}$$

请你代一位诊断为患病的人分析一下，他确实患病的可能性有多大？若在相同条件再重复检查一次，分析他确实患病的可能性大小.

二、常染色体遗传模型

在常染色体遗传中，后代是从每个亲体的基因对中各继承一个基因，形成自己的基因对，基因对也称基因型.

植物园中某种植物的基因型为 AA，Aa 和 aa. 计划将 AA 型的植物与各种基因型植物随机相结合的方案培育植物后代，经过若干年以后，这种植物的第 n 代这一代的三种基因型分布会发生什么变化？

设 a_n，b_n 和 c_n 分别表示第 n 代植物中基因型 AA，Aa 和 aa 的植物占植物总数的百分率.

记
$$\boldsymbol{x}^{(n)}=\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, n=0,1,2,\cdots$$

称 $\boldsymbol{x}^{(n)}$ 为第 n 代植物的基因型分布，显然有

$$a_0+b_0+c_0=1.$$

设第 $n-1$ 代的基因型分布与第 n 代基因型分布的关系由表 1.5.1 给出.

表 1.5.1

		父体 – 母体的基因型		
		AA – AA	AA – Aa	AA – aa
后代	A	1	$\frac{1}{2}$	0
	A	0	$\frac{1}{2}$	1
	a	0	0	0

先考虑第 n 代中的 AA 型,由于第 $n-1$ 代中基因型为 AA,Aa,aa 的概率分别可看成 $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$,且第 $n-1$ 代的 AA 型结合,后代全为 AA 型;AA 型与 Aa 型结合,后代是 AA 型的概率为 1/2;AA 型与 aa 型结合,后代不能是 AA 型.由全概率公式有

$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot b_{n-1} + 0 \cdot c_{n-1},$$

即

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}.$$

同理可得

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1}, \quad c_n = 0.$$

将上三式相加,有

$$a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1},$$

递推得

$$a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

采用矩阵形式,可将三个公式简记为

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(n-1)}, n = 1, 2, \cdots \tag{1.5.1}$$

其中

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

由式(1.5.1)经过递推运算,给出第 n 代基因型分布与初始分布的关系:

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{(n-1)} = \boldsymbol{M}^2\boldsymbol{x}^{(n-2)} = \cdots = \boldsymbol{M}^n\boldsymbol{x}^{(0)}. \tag{1.5.2}$$

利用线性代数知识,求出矩阵 M 的特征值和特征向量,将 M 对角化得:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

代入式(1.5.2),得

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{M}^n\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix},$$

从而

$$\begin{cases} a_n = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} c_0, \\ b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} c_0, \\ c_n = 0. \end{cases} \tag{1.5.3}$$

当 $n\to\infty$ 时,$a_n\to 1$,$b_n\to 0$,$c_n = 0$,即在极限情况下,培育的植物都是 AA 型,选用这种培育方式,可以起到纯化品种的作用.

习　题　一

1. 设 A,B,C 为随机试验的三个随机事件,试将下列各事件用 A,B,C 表示出来.

(1) 仅仅 A 发生;

(2) 所有三个事件都发生;

(3) A 与 B 均发生,C 不发生;

(4) 至少有一个事件发生;

(5) 至少有两个事件发生;

(6) 恰有一个事件发生;

(7) 恰有两个事件发生;

(8) 没有一个事件发生;

(9) 不多于两个事件发生.

2. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 同时掷三颗骰子,记录三颗骰子的点数之和;

(2) 将一枚硬币抛三次,观察出现正反面的各种可能结果;

(3) 对一目标进行射击,且到击中 5 次为止,记录射击的次数;

(4) 将一单位长的线段分为三段,观察各段的长度;

(5) 从分别标有号码 1,2,…,10 的十个球中任意取两球,记录球的号码.

3. 将 12 个球随机地放入 20 个盒子,试求每个盒子中的球不多于 1 个的概率.

4. 将 10 本书任意地放在书架上,其中有一套 4 卷成套的书,求下列事件的概率:

(1) 成套的书放在一起;

(2) 成套的书按卷次顺序排好放在一起.

5. 一辆公共汽车出发前载有 5 名乘客,每一位乘客独立地在七个站中的任一个站离开,试求下列事件的概率:

(1) 第七站恰有两位乘客离去;

(2) 没有两位及两位以上乘客在同一站离去.

6. 有一个随机数发生器,每一次等可能地产生 0,1,2,…,9 十个数字,由这些数字随机编成的 n 位数码(各数字允许重复),从全部 n 位数码中任意选取一个,其最大数字不超过 k

($k\leqslant 9$)的概率.

7. 一元件盒中有 50 个元件,其中 25 件一等品,15 件二等品,10 件次品,从中任取 10 件,求:

(1) 恰有两件一等品,两件二等品的概率;

(2) 恰有两件一等品的概率:

(3) 没有次品的概率.

8. 有 10 个人分别佩戴着标号从 1 号到 10 号的纪念章,任意选出 3 人,记下其纪念章的号码,试求:

(1) 最小的号码为 5 的概率;

(2) 最大的号码为 5 的概率.

9. 设事件 A,B 及 $A\cup B$ 的概率分别为 p,q 和 r,试求:$P(AB)$,$P(\bar{A}B)$,$P(A\bar{B})$,$P(\bar{A}\bar{B})$.

10. 一批产品共 100 件,其中 5 件不合格. 若抽检的 5 件产品中有产品不合格,则认为整批产品不合格,试问该批产品被拒绝接收的概率是多少?

11. 设 A 与 B 是试验 E 的两个事件,且 $P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{1}{2}$,在下述各种情况下计算概率 $P(B\bar{A})$:

(1) $A\subset B$;(2) A 与 B 互不相容;(3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

12. 现有两种报警系统 A 与 B,每种系统单独使用时,系统 A 有效的概率为 0.92,系统 B 有效的概率为 0.93. 装置在一起后,至少有一系统有效的概率则为 0.988,试求装置后:

(1) 两个系统均有效的概率;

(2) 两个系统中仅有一个有效的概率.

13. 10 把钥匙上有 3 把能打开门,今任取 1 把,求能打开门的概率.

14. 一个盒子中有 24 个灯泡,其中有 4 个次品,若甲从盒中随机取走 10 个,乙取走余下的 14 个,求 4 个次品灯泡被一人全部取走的概率.

15. 设将 5 个球随意地放入 3 个盒子中,求每个盒子内至少有一个球的概率.

16. 已知 A_1 和 A_2 同时发生,则 A 必发生,证明:$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)-1$.

17. 掷一枚均匀硬币直到出现三次正面才停止,问正好在第六次停止的情况下,第五次也是正面的概率是多少?

18. 证明:$P(A|B)>P(A)>0$,则 $P(B|A)>P(B)$.

19. 设事件 A,B 互不相容,且 $P(\bar{B})>0$,试证:$P(A|\bar{B})=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}$.

20. 将两颗均匀骰子同时掷一次,已知两个骰子的点数之和是奇数,求两个骰子的点数之和小于 8 的概率.

21. 设 10 件产品中有 4 件次品,从中任取两件,试求在所取得的产品中发现有一件是次品后,另一件也是次品的概率.

22. 10 件产品有 6 件是正品,4 件次品,对它们逐一进行检查,问下列事件的概率是多少?

(1) 最先两次抽到的都是正品;

（2）第一、三次抽到正品，第二、四次抽到次品；

（3）在第五次检查时发现最后一个次品.

23. 某人忘记电话号码的最后一个数字，他仅记得最末一位数字是偶数. 现在他试着拨最后一个号码，求他拨号不超过三次而接通电话的概率.

24. 某型号的显像管主要由三个厂家供货，甲、乙、丙三个厂家的产品分别占总产品和的 25%、50% 和 25%，甲、乙、丙三个厂的产品在规定时间内能正常工作的概率分别是 0.1、0.2、0.4，求一个随机选取的显像管能在规定时间内正常工作的概率.

25. 两批同类产品各自有 12 件和 10 件，在每一批产品中有一件次品，无意中将第一批的一件产品混入第二批，现从第二批中取出一件，求第二批中取出次品的概率.

26. 在一盒子中装有 15 个乒乓球，其中有 9 个新球，在第一次比赛时任意取出三个球，比赛后仍放回原盒中，第二次比赛时，同样任意地取出三个球，求第二次取出三个新球的概率.

27. 仓库中存有从甲厂购进的产品 30 箱，从乙厂购进的同类产品 25 箱，甲厂的每箱装 12 个，废品率为 0.04，乙厂的每箱装 10 个，废品率 0.05，求：

（1）任取一箱，从此箱中任取一个为废品的概率；

（2）将所有产品开箱后混放，任取一个为废品的概率.

28. 已知一批产品中 96% 是合格品，用某种检验方法辨认出合格品为合格品的概率是 0.98，而误认废品为合格品的概率是 0.05，求检查合格的一件产品确系合格的概率.

29. 已知 5% 的男人和 0.25% 的女人是色盲者，现随机地挑选一人，此人恰为色盲者，问此人是男人的概率为多少（假设男人女人各占总人数的一半）？

30. 设某种病菌在人口中的带菌率为 0.03，由于检验手段不完善，带菌者呈阳性反应的概率为 0.99，而不带菌者呈阳性反应的概率是 0.05，若某人检查结果是呈阳性反应，他是带菌者的概率是多少？

31. 证明 如果 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$，则事件 A 与 B 相互独立.

32. 设一个 n 位二进制数是由 n 个“0”或“1”数字组成，每一位出现错误数字的概率是 p，各位数字出现错误与否是独立的，问组成一个不正确的这类二进制数的概率是多少？

33. 设事件 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{2}$，试求：

（1）三个事件都不发生的概率；

（2）三个事件中至少有一事件发生的概率；

（3）三个事件中恰有一个发生的概率；

（4）至多有两个事件发生的概率.

34. 甲袋中有 3 只白球，7 只红球，15 只黑球；乙袋中有 10 只白球，6 只红球，9 只黑球. 从两袋中各取一球，试求两球颜色相同的概率.

35. 两部机床独立地工作，每部机床不需要工人照管的概率分别为 0.9 和 0.85，试求：

（1）两部均不需照管的概率；

（2）恰有一部需要照管的概率；

（3）两部同时需要照管的概率.

36. 求下列系统（图 1.6）能正常工作的概率，其框图的字母代表组件，字母相同，下标不

同的均为同一类组件,只是装配在不同的位置,A 类组件正常工作的概率为 r_a,B 类组件正常工作的概率为 r_b,C 类为 r_c.

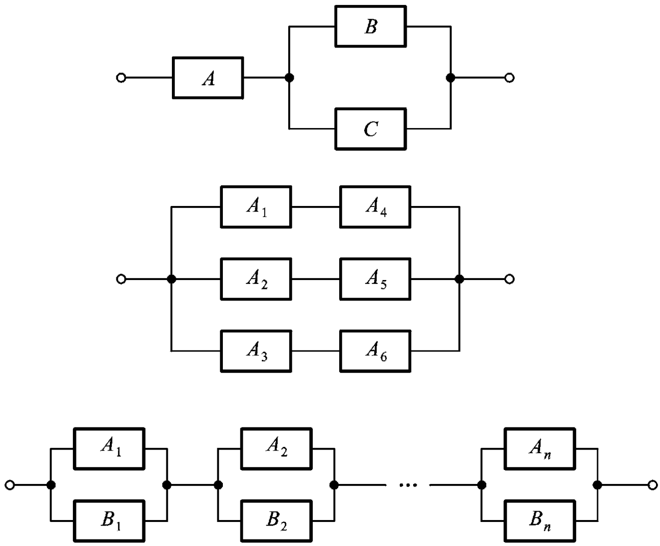


图 1.6

第 2 章　随机变量的分布

§2.1　随机变量的分布函数

在第 1 章中,我们仅讨论了随机事件及其概率,只是孤立地研究随机试验的一个或几个事件,不能从整体去深入把握它的统计性质. 例如,测试电子显像管的寿命,我们固然关心如‘显像管的寿命不到 6 000 小时’这类事件的概率,我们更关心显像管寿命的整体变化规律.

为了深入地研究随机现象,需要把随机试验的结果数量化,即用一个变量来描述试验结果,从数量关系来研究随机现象的统计规律性.

例 2.1.1　将一枚均匀硬币连续抛两次,用 H、T 分别表示硬币的正、反面,其样本空间为

$$\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}.$$

用 X 表示两次抛掷中正面 H 出现的次数,则

$$X(TT)=0,X(HT)=X(TH)=1,X(HH)=2.$$

例 2.1.2　某射手每次命中目标的概率为 $p(0<p<1)$,若连续向这一目标射击,直到命中为止. 令

$$\{\omega_i\}=\{\text{前 } i-1 \text{ 次未命中,第 } i \text{ 次命中}\},i=1,2,\cdots$$

所以试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}.$$

射击次数 Y

$$Y=Y(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=\omega_1;\\ 2, & \omega=\omega_2;\\ \quad\vdots & \\ i, & \omega=\omega_i;\\ \quad\vdots & \end{cases}$$

上述两例中的变量 X 与 Y 都是样本点的函数,它们将随机试验的试验结果数值化.

定义 2.1.1　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间,若对于每一个样本点 $\omega\in\Omega$,都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应,且对于任意实数 x,都有确定的概率

$P\{X(\omega)\leqslant x\}$ 与之对应，则称 $X(\omega)$ 为随机变量，简记为 X.

可验证变量 X,Y 均为定义在样本空间上的随机变量.

例 2.1.3 一个电话呼唤是在时间区间 $(0,T)$ 内随机出现，记呼唤时刻为 t，试验的样本空间为 $\Omega=\{t:\ t\in(0,T)\}$，定义随机变量 X 为

$$X(t)=t, t\in\Omega,$$

于是 t 有双重意义，它既是该试验的试验结果，又是随机变量 X 的取值.

另外，取 $(t_1,t_2)\subset(0,T)$，定义

$$Y(t)=\begin{cases}1, & t_1\leqslant t\leqslant t_2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$Y(t)$ 是定义在 Ω 上的另一个随机变量.

必须强调指出，随机变量不同于普通意义下的变量，它们具有如下的特点：

(1) 它们是由随机试验的结果所决定的量；

(2) 随机变量取各值的可能性大小有确定的统计规律性.

随机变量概念是近代概率论与数理统计学中最重要的基本概念之一. 引进随机变量后，使我们可以借助于现代数学工具，更好地描述、处理与解决各种联系于随机现象的理论和应用问题.

引进分布函数来描述随机变量的统计规律.

定义 2.1.2 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，x 是任意实数，称函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{\omega:\ X(\omega)\leqslant x\} \tag{2.1.1}$$

为随机变量 X 的分布函数，$F(x)$ 也可记为 $F_x(x)$.

可将随机变量 X 看成实数轴上随机点的坐标，称为随机点 X.

分布函数 $F(x)$ 的函数值表示事件"随机点 X 落在 $(-\infty,x]$ 内"的概率，而"随机点 X 落在 $(a,b]$ 内"的概率为

$$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a), \tag{2.1.2}$$

这是由于

$$\{a<X\leqslant b\}=\{X\leqslant b\}-\{X\leqslant a\},$$

且
$$\{X\leqslant a\}\subset\{X\leqslant b\},$$

故有
$$P\{a<X\leqslant b\}=P\{X\leqslant b\}-P\{X\leqslant a\},$$

即式 (2.1.2) 成立.

例 2.1.4 将一枚均匀硬币连续抛两次，试写出出现正面次数 X 的分布函数及概率 $P\{0<X\leqslant 1\}$，$P\{1<X\leqslant 2\}$.

解 首先可得

$$P\{X=0\}=P\{TT\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=1\}=P(\{HT\}\cup\{TH\})=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=2\}=P\{HH\}=\frac{1}{4}.$$

当 $x<0$，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P(\varnothing)=0$，

当 $0\leqslant x<1$，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}=\dfrac{1}{4}$，

当 $1\leqslant x<2$，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{x=0\}+P\{X=1\}=\dfrac{3}{4}$，

当 $2\leqslant x$，$F\{x\}=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}=1.$

即有

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<1;\\ \dfrac{3}{4}, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & 2\leqslant x.\end{cases}$$

$F(x)$ 的图形如图 2.1 所示，它是阶梯形的，在 $x=0,1,2$ 处有阶跃，而跃变值恰好是随机变量 X 在这些点处取值的概率.

所求概率为

$$P\{0<X\leqslant 1\}=F(1)-F(0)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}P\{1\leqslant X\leqslant 2\}&=P\{X=1\}+P\{1<X\leqslant 2\}\\&=P\{X=1\}+F(2)-F(1)=\frac{1}{2}+1-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

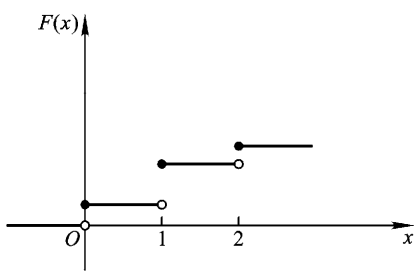


图 2.1

例 2.1.5　一电话呼唤在时间区间 $(0,T)$ 内随机出现，呼唤时刻记为 t，事件 $\{t_1<t\leqslant t_2\}$ 的概率为

$$P\{t_1<t\leqslant t_2\}=\frac{1}{T}(t_2-t_1),\quad (t_1,t_2)\subset(0,T)$$

试求随机变量 $X(t)=t$ 的分布函数.

解 若 $x<0$,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P(\varnothing)=0$,

若 $x\geqslant T$,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P(\Omega)=1$,

若 $0\leqslant x<T$,$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{0<t\leqslant x\}=\dfrac{x}{T}$,于是

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x}{T}, & 0\leqslant x<T;\\ 1, & T\leqslant x.\end{cases}$$

图 2.2 即为随机变量 X 的分布函数的图形,$F(x)$ 是一个单调不降处处连续的函数.

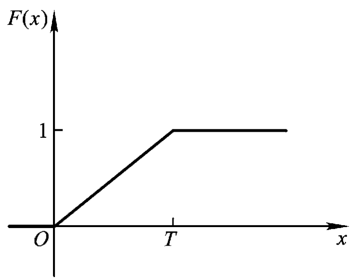


图 2.2

例 2.1.6 某系统的寿命为 T,系统在 t 时刻尚正常运行的条件下,其失效率总保持为某个常数 $\lambda>0$,即有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P\{t<T\leqslant t+h\mid T>t\}=\lambda,$$

试写出 T 的分布函数.

解 当 $t<0$ 时,$F(t)=0$,

当 $t>0$,$h>0$ 时,因

$$\{t<T\leqslant t+h\}=\{t<T\leqslant t+h\}\cap\{t<T\},$$

故

$$P\{t<T\leqslant t+h\mid T>t\}=\frac{P\{t<T\leqslant t+h\}}{P\{T>t\}}=\frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)}.$$

由题设条件可知,有

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}\Big/[1-F(t)]=\lambda,$$

得到关于 $F(t)$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda[1-F(t)],$$

满足其初值条件 $F(0)=0$ 的解为 $F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}$,系统寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geqslant 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

分布函数具有以下基本性质.

定理 2.1.1　设 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数,则

(1) $F(x)$ 为单调不降函数,即若 $x_1<x_2$,则有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$;

(2) $0\leqslant F(x)\leqslant 1$,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$;

(3) $F(x)$ 是右连续函数,即 $F(x+0)=F(x)$.

证略.

容易验证 $F(x)$ 的单调不降性:取 $x_1<x_2$,有

$$F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<X\leqslant x_2\}\geqslant 0,$$

$0\leqslant F(x)\leqslant 1$ 成立是因为分布函数值实际是随机事件的概率.而(2)中的两个极限式可以从几何上加以说明.

在图 2.3 中,若变量 x 沿数轴无限向左移动(即 $x\to-\infty$),则随机事件"随机点 X 落在 $(-\infty,x]$ 内"趋于不可能事件,从而其概率趋于 0,亦即 $F(-\infty)=0$;又若将点无限右移(即 $x\to+\infty$),则"随机点 X 落在 $(-\infty,x]$ 内"这一事件趋于必然事件,从而其概率趋于 1,即有 $F(+\infty)=1$.

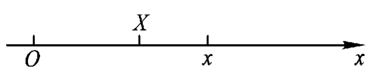


图 2.3

在引进分布函数之前,我们只能孤立地研究随机试验的一个或数个事件,不能从整体去深入研究随机试验.分布函数是一种分析性质良好的函数,便于处理,利用它可将许多概率论问题得以量化分析和简化处理.

§2.2　离散型随机变量

一、离散型随机变量及其分布律

按照随机变量的可能取值,可以从中分出两种基本类型,即离散型随机变量与连续型随机变量.

定义 2.2.1　如果随机变量 X 只取有限个或可列无穷多个数值:$x_1,x_2,\cdots$,

x_n,…,记 $P\{X=x_i\}=p_i$,它满足

(1) $p_i \geqslant 0$;

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$,

则称 X 为离散型随机变量,并称

$$P\{X=x_i\}=p_i, i=1,2,\cdots \tag{2.2.1}$$

为 X 的分布律.

以后我们常用如下表格

X	x_1	x_2	…	x_n	…
$P\{X=x_i\}$	p_1	p_2	…	p_n	…

来表示离散型随机变量 X 的分布律.

例 2.2.1　某射手一次射击命中目标的概率为 p,$0<p<1$,射击进行到第一次命中目标为止,试求射击次数 X 的分布律.

解　设 $A_i=\{$第 i 次射击命中目标$\}$,$i=1,2,\cdots$,则

$$\begin{aligned} P\{X=k\} &= P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_k) \\ &= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k) \\ &= (1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots \end{aligned}$$

且
$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{X=k\} = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

故 X 的分布律为

X	1	2	…	k	…
$P\{X=k\}$	p	$(1-p)p$	…	$(1-p)^{k-1}p$	…

例 2.2.2　某种产品在生产过程中的废品率为 $p(0<p<1)$,对产品逐个进行检查,直到检查出 5 个不合格品为止,试写出停止检查时已检查的产品个数.

解　检查 k 件产品,指定的 5 件不合格(其余 $k-5$ 件产品合格)的概率为

$$p^5(1-p)^{k-5}.$$

随机事件 $\{X=k\}$ 发生相当于第 k 次检查的必为不合格品,而前 $k-1$ 次检查中查出 4 件不合格品,共有 C_{k-1}^4 种不同的方式,故

$$P\{X=k\}=C_{k-1}^4 p^5(1-p)^{k-5},\quad k=5,6,\cdots$$

例 2.2.3　100 个产品中有 5 个次品,从中抽一件进行检查,设 X 是抽到的合格品数,试写出 X 的分布律.

解　设 $A=\{$抽到合格品$\}$,则 $\{X=1\}=A$, $\{X=0\}=\overline{A}$,且

$$P\{X=0\}=\frac{5}{100},P\{X=1\}=\frac{95}{100},$$

X 的分布律为

X	0	1
$P\{X=x\}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{95}{100}$

例 2.2.3 是一个典型例题,题中试验的样本空间仅含两个样本点,即试验只有两个结果:“抽到合格品”和“抽到不合格品”. 这类试验大量存在,如抛一枚硬币,仅有“出现正面”和“出现反面”两个结果;向一目标射击,关心“命中目标”和“未命中目标”.

若一个试验的样本空间只有两个样本点,即只有两个可能结果:A 和 $\overline{A}$,则称之为伯努利试验.

在伯努利试验中,A 为伯努利试验的基本事件,若 $P(A)=p,0<p<1$,令

$$X=\begin{cases}1, & A \text{ 发生;}\\ 0, & A \text{ 不发生.}\end{cases}$$

则 X 的分布律为

X	0	1
$P\{X=x\}$	$1-p$	p

或者　$P\{X=x\}=p^{x}(1-p)^{1-x},x=0,1$ 两种,

则称 X 服从(**0-1**)分布(或两点分布).

设 X 是离散型随机变量,其分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2\cdots$$

由于 $\{X\leqslant x\}=\bigcup\limits_{x_k\leqslant x}\{X=x_k\}$,由概率的可列可加性得

$$P\{X\leqslant x\}=P\Big[\bigcup_{x_k\leqslant x}\{X=x_k\}\Big]=\sum_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\},$$

即有

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k. \tag{2.2.2}$$

二、伯努利试验与二项分布

随机现象的统计规律,往往是通过相同条件下进行大量重复试验和观察而

得以揭示. 这种在相同条件下重复试验的数学模型在概率论中占有重要地位.

定义 2.2.2　将一个试验在相同条件下重复进行 n 次,如果在每次试验中,任一事件出现的概率与其他各次试验结果无关,则称这 n 次试验是 n 次重复独立的试验.

n 次重复独立的伯努利试验称为 n 重伯努利试验,或称伯努利概型.

一个 n 重伯努利试验包含 n 次试验,每次试验中基本事件 A 发生的概率保持不变. 我们往往感兴趣的是 n 重伯努利试验中事件 A 出现的总次数 X 及其分布律,显然 X 的可能取值为整数 $0,1,2,\cdots,n$,记

$$P_n(k)=P\{X=k\},k=1,2,\cdots,n.$$

例 2.2.4　某书店开设新书征订业务,每位顾客在一周内收到书店回单的概率是 0.2,有四位外地顾客预订新书,求一周内收到回单的顾客数 X 的分布律.

解　将每位顾客预订新书,观察一周内是否收到回单看作一次试验,四位预订者是各不相干的,可认为这四次试验是独立的,因此这是一个 4 重伯努利试验.

令　$A_i=\{$第 i 位顾客收到回单$\}$,$i=1,2,3,4$,则 A_1,A_2,A_3,A_4 相互独立,且

$$P(A_i)=P(A)=0.2,$$

因
$$\{X=0\}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4,$$

故
$$P\{X=0\}=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)=0.8^4.$$

而
$$\{X=1\}=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4.$$

由事件的独立性和概率的有限可加性

$$P\{X=1\}=4\times0.2\times0.8^3=\mathrm{C}_4^1(0.2)(0.8)^3.$$

由

$$\begin{aligned}\{X=2\}=&A_1A_2\overline{A}_1\overline{A}_2\cup A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\\&\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\cup\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4\\&\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4,\end{aligned}$$

有
$$P\{X=2\}=\mathrm{C}_4^2(0.2)^2(0.8)^2.$$

类似地

$$P\{X=3\}=\mathrm{C}_4^3(0.2)^3(0.8).$$

$$P\{X=4\}=\mathrm{C}_4^2(0.2)^4.$$

记 $p=0.2$,把上述各概率统一改写为

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_4^kp^k(1-p)^{4-k},k=0,1,2,3,4.$$

一般地,n 重伯努利试验中,A 在指定的 k 次试验中发生的概率为

$$p^k(1-p)^{n-k},$$

而 n 次试验中选出 k 次试验有 C_n^k 种不同的方式,故 n 重伯努利试验中事件 A 发

生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

我们可证得下述定理.

定理 2.2.1　在 n 重伯努利试验中,事件 A 在每次试验中发生的概率为 p,$0<p<1$,则 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\tag{2.2.3}$$

其中 $k=0,1,2,\cdots,n$.

注意到 $0<p<1$,显然 $P_n(k)>0$,并由二项式定理有

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=[p+(1-p)]^n=1.$$

若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

则称 X 服从二项分布,记为 $X\sim B(n,p)$.

特别若 $X\sim B(1,p)$,其分布律为

$$P\{X=k\}=C_1^k p^k(1-p)^{1-k}=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1.$$

即 X 服从(0-1)分布.

例 2.2.5　某学生参加一项测验,对其中 20 道是非题纯粹是随机地选择"是"和"非",试计算该生至少做对 14 道题目的概率.

解　此学生随机地选择"是"和"非",他答对每道题目的概率是 $p=0.5$,判断 20 道题目相当于做 20 重伯努利试验.

设 X 是该生答对的题目数,则 $X\sim B(20,0.5)$,所求概率为

$$P\{X\geqslant 14\}=\sum_{k=14}^{20} P\{X=k\}=\sum_{k=14}^{20} C_{20}^k\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=0.0577.$$

如果要求学生至少做对 14 道才能通过测量,这位学生通过测验的概率仅为 0.0577.

例 2.2.6　一位工人同时看管 n 部机床,设每部机床在每一分钟内需修理的概率为 $p(0<p<1)$,试求

(1) n 部机床在同一分钟内有 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 部机床需要修理的概率 p_k;

(2) 若要求此工人不能及时修理机床的概率底于 1%,问他最多能看管几台机床?

解　在一分钟内观察 n 部机床是否需要修理,相当于是做 n 重伯努利试验,用 X 表示同一分钟内需要修理的机床部数,则 $X\sim B(n,p)$,且

(1) n 部机床在同一分钟内有 k 部机床需要看管的概率为

$$p_k=P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

特别 n 部机床在同一分钟内均不需要修理的概率为

$$p_0 = P\{X=0\} = (1-p)^n,$$

恰有一部需修理的概率为

$$p_1 = P\{X=1\} = np(1-p)^{n-1}.$$

（2）由于一名工人在同一时刻只能修理一部机床，当一分钟内有一部以上机床需要修理时，他无法及时修理，其概率为

$$P\{X>1\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} = 1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1}.$$

令 $n_0 = \max\{n: 1-(1-p)^n - np(1-p)^{n-1} \leqslant 1\%\}$，则 n_0 即所求的机床部数.

例 2.2.7　设某种数字传输器以每秒 512×10^3 个 0 或 1 的序列传送信息（即每秒传送 0 或 1 的总个数为 512×10^3）. 由于各种干扰在传送过程中会出现将 0 误为 1 或将 1 误为 0 的情况，这两种情况均称为“误码”，设出现一个误码的概率 $p=10^{-7}$，求在 10 秒钟内出现一个误码的概率.

解　将传输一个数字 0 或 1 看作一个试验，关心是否产生误码，这个问题可看成重数为 $n=512\times10^3\times10$ 的伯努利试验，所求概率为

$$P_{512\times10^4}(1) = C_{512\times10^4}^1 \times 10^{-7} \times (1-10^{-7})^{512\times10^4-1}.$$

显然，要直接计算此概率较困难.

三、泊松分布

设随机变量 X 的分布律为

$$\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots;\quad \lambda>0,$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布（S. D. Poisson），记为 $X\sim P(\lambda)$.

一种分布之所以重要，通常是由于两种原因：或者它直接产生于许多实际问题中，或者它作为某些重要分布的极限而出现，因而在理论上有重要意义，泊松分布两者都具备.

泊松分布的实际应用很广，例如，在单位时间内，某电话交换台接到的电话呼叫次数；某服务台到达的顾客数；放射性物质放射出的粒子到达计数器的个数；某自动控制系统中损坏的元件个数等等，都服从泊松分布.

下面的定理说明泊松分布可视为二项分布的极限分布.

定理 2.2.2（泊松）　设随机变量序列 $X_n, n=1,2,\cdots$，有 $X_n\sim B(n,p_n)$，即

$$P\{X_n=k\} = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

若满足

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n=k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{2.2.4}$$

证　略.

分析定理成立的条件$\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$**，说明参数列** $\{p_n\}$ **是与数列**$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$**同阶的无穷小数列. 在实用中，当事件** A **在每次试验中** $P(A)=p$ **很小，试验的次数** n **又很大时，在** n **次试验中** A **发生的频数就近似服从泊松分布，从而当** n **很大，**p **很小时，可用泊松定理近似计算二项分布的概率**

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-1} \approx \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{2.2.5}$$

其中 $\lambda = np$.

例 2.2.8　收到一批 100 **个零件的订货，设每一个零件是次品的概率等于** 0.01**，该批零件验收合格的条件是次品数不超过** 3 **件，试求这批订货合格的概率.**

解　设 X **是这批订货中的次品数，则** $X \sim B(100, 0.01)$**，所求概率为**

$$P\{X \leqslant 3\} = \sum_{k=0}^{3} C_{100}^{4} (0.01)^k (0.99)^{100-k}$$
$$= 0.981\ 6.$$

可认为 X **近似服从参数为** $\lambda = np = 1$ **的泊松分布**

$$P\{X \leqslant 3\} \approx \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} e^{-\lambda} = 0.981\ 0.$$

例 2.2.9　（合理配备维修工人问题）有独立工作的同类设备 90 **台，每台发生故障的概率为** 0.01**，现配备三个修理工人，每人分别包修** 30 **台，求设备发生故障而无人修理的概率，若三人共同负责维修** 90 **台，求设备发生故障而无人修理的概率是多少？**

解　设 X_i **表示第** i **人包修的** 30 **台设备中同时出现故障的台数，则** $X_i \sim B(30, 0.01)$，$i = 1, 2, 3$.

$A_i = \{$**第** i **个人负责的** 30 **台设备出现故障无人修理**$\}$，

$$P(A_i) = P\{X_i \geqslant 2\} = 1 - P\{X \leqslant 1\}$$
$$\approx 1 - e^{-0.3} - 0.3e^{-0.3} = 0.036\ 9, \quad i = 1, 2, 3.$$

90 **台设备中有故障不能及时修理的事件是** $A_1 \cup A_2 \cup A_3$，

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P\{\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3\}$$
$$= 1 - P(\overline{A}_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{A}_3)$$
$$= 1 - (1 - 0.036\ 9)^3 = 0.106\ 7.$$

三个工人共同负责时，设 X **为** 90 **台设备中同时发生故障的台数，则** $X \sim B(90, 0.01)$**，这时设备发生故障无人修理的概率为**

$$P\{X \geqslant 4\} = 1 - P\{X \leqslant 3\}$$

$$\approx 1-\sum_{k=0}^{3}\frac{(0.9)^k}{k!}e^{-0.9}=0.0135.$$

可见,共同负责比分别负责的维修效率更高.

例 2.2.10 (平安保险问题)有 2 500 **名小学生参加了保险公司举办的平安保险,每个参加保险的小学生一年交付保险费** 24 **元,若在一年内出现意外伤害事故,保险公司一次性赔付** 2 000 **元. 设一年内每名小学生出事故的概率为** 0.002**,求**

(1)保险公司亏本的概率;

(2)保险公司获利不少于 10 000 **元的概率.**

解 设 $A=\{$**公司出现亏本**$\}$,$B=\{$**公司获利不少于** 10 000 **元**$\}$,**设** X **为一年内出现意外事故的学生人数,则** $X\sim B(2\,500,0.002)$.

(1)若一年内有 X **名学生出事故,则保险公司因赔付** $2\,000X$ **元,事件发生的概率为**

$$\begin{aligned}P(A)&=P\{2\,000X>2\,500\times12\}=P\{X>15\}\\&=\sum_{k=16}^{2\,500}p_{2\,500}(k)=1-\sum_{k=0}^{15}p_{2\,500}(k)\\&=1-\sum_{k=0}^{15}C_{2\,500}^{k}(0.002)^k(0.998)^{2\,500-k}\\&\approx1-\sum_{k=0}^{15}\frac{5^k}{k!}e^{-5}=0.000\,069.\end{aligned}$$

由此可见,该保险公司在一年内亏本的概率极小.

(2) $P(B)=P\{30\,000-2\,000X>10\,000\}=P\{X\leqslant10\}=\sum_{k=0}^{10}p_{2\,500}(k)$

$$\approx\sum_{k=0}^{10}\frac{5^k}{k!}e^{-5}=1-\sum_{k=11}^{\infty}\frac{5^k}{k!}e^{-5}=1-0.013\,695=0.986\,305.$$

此保险公司获利不少于 10 000 **元的概率达** 98% **以上.**

§2.3 连续型随机变量

一、概率密度函数

离散型随机变量至多只取可列无穷个数值,还有一类随机变量的取值却充满某个有限区间或无穷区间. 如电话的呼叫时间;测量电源电压的误差值;测试电子管的寿命,等等. 非离散型随机变量中重要的一类是连续型随机变量.

定义 2.3.1 设 $F(x)$ **是随机变量** X **的分布函数,若存在非负函数** $f(x)$,**对任意实数** x,**有**

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u, \tag{2.3.1}$$

则称 X 是连续型随机变量,称 $f(x)$ 为 X 的概率密度.

如例 2.1.5 中随机变量 X(电话呼唤时间)的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x}{T}, & 0\leqslant x<T;\\ 1, & T\leqslant x.\end{cases}\qquad \text{取 } f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}, & 0<x<T;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可验证得 $f(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u$,且 $f(u)\geqslant 0$.

例 2.1.6 中系统的寿命 T 的分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geqslant 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}(\lambda>0)$$

取 $f(t)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geqslant 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$ 则有 $f(t)\geqslant 0$,并且 $F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$ 成立.

由定义 2.3.1 知 X 和 T 都是连续型随机变量.

概率密度所对应的平面曲线称为随机变量 X 的概率曲线,根据积分的几何意义可知,分布函数值 $F(x)$ 是概率曲线下从 $-\infty$ 到 x 的一块面积,如图 2.4 所示.

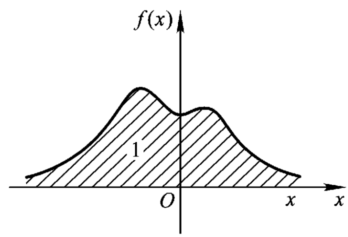


图 2.4

连续型随机变量的概率密度具有如下性质:

性质 2.3.1　$f(x)\geqslant 0$.

性质 2.3.2　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$.

证　由定义 2.3.1 可知 $f(x)$ 非负,且由概率密度的定义和分布函数的性质有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

反之,若给出一个非负函数 $f(x)$,如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$$

成立,则 $f(x)$ 一定是个随机变量 X 的概率密度. 因此,验证性质 2.3.1 和性质 2.3.2 是判定一个函数是否为概率密度的方法.

性质 2.3.3　$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证　$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

以上三条性质的几何意义是：

（1）概率曲线不在横轴的下方；

（2）概率曲线与横轴所围成的区域总面积为 1；

（3）随机点 X 落在 $(x_1, x_2]$ 内的概率等于区间 $(x_1, x_2]$ 以上，概率曲线下方的曲边梯形面积（见图 2.5）.

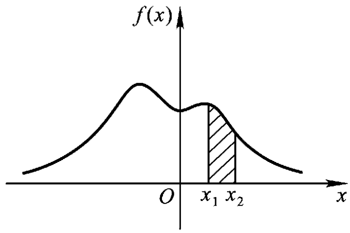


图 2.5

性质 2.3.4　若 $f(x)$ 在点 x 处连续，则 $F'(x) = f(x)$.

证　由对变上限积分的求导定理，有

$$F'(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u\right)' = f(x).$$

性质 2.3.5　变续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.

证　$F(x)$ 具有右连续性，仅需证明它的左连续性，对 $\Delta x > 0$，

$$0 \leqslant F(x) - F(x - \Delta x) = P\{x - \Delta x < X \leqslant x\} = \int_{x-\Delta x}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u,$$

令 $\Delta x \to 0^+$，右端极限为 0，即有

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} F(x - \Delta x) = F(x).$$

故 $F(x)$ 具有左连续性.

性质 2.3.6　设 X 为连续型随机变量，则对任一指定实数 x_0，有

$$P\{X = x_0\} = 0, \quad x_0 \in \mathbf{R}.$$

证　取 $\Delta x > 0$，由 $\{X = x_0\} \subset \{x_0 - \Delta x < X \leqslant x_0\}$ 可得

$$0 \leqslant P\{X = x_0\} \leqslant P\{x_0 - \Delta x < X \leqslant x_0\} = F(x_0) - F(x - \Delta x),$$

令 $\Delta x \to 0^+$，根据性质 2.3.5，上式右端的极限为 0，从而 $P\{X = x_0\} = 0$.

性质 2.3.6 告诉我们两点：

（1）对于连续型随机变量 X，有

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X < x_2\} &= P\{x_1 \leqslant X < x_2\} = P\{x_1 < X \leqslant x_2\} \\ &= P\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

（2）连续型随机变量 X 取任意数值的概率均为 0，这与离散型随机变量截然不同.

这里需要特别指出：对于连续型随机变量，由 $P\{X = a\} = 0$，不能推断出 $\{X = a\}$ 是不可能事件. 实际上 $\{X = a\}$ 是一个可能发生的事件. 譬如对前述系统

的寿命 T，随机事件 $\{T=500\}$（单位：小时）是可能发生的，然而 T 是一个连续型随机变量，由性质 2.3.6 知 $P\{T=500\}=0$. 我们得到一个重要结论：概率为零的事件不一定是不可能事件. 同样，概率为 1 的事件不一定是必然事件.

二、几种连续型分布

1. 均匀分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布，记为 $X\sim U(a,b)$.

可得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b;\\ 1, & b\leqslant x.\end{cases}$$

$f(x)$ 和 $F(x)$ 的图形如图 2.6 和图 2.7 所示.

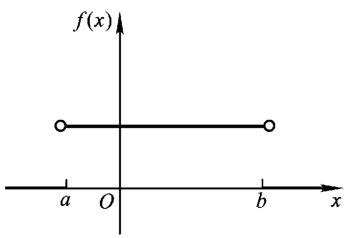


图 2.6

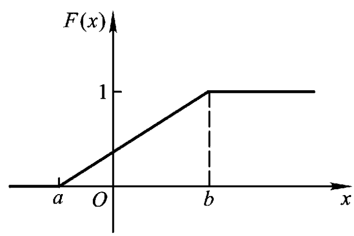


图 2.7

例 2.3.1　例 2.1.5 中的电话呼唤时间 X 服从 $(0,T)$ 上的均匀分布.

解　我们已求得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{x}{T}, & 0\leqslant x<T;\\ 0, & T<x.\end{cases}$$

由于连续型随机变量 X 取个别值的概率为 0，改变 $f(x)$ 在个别点处的值，不影响其有关事件的概率，不妨补充定义：

$$f(x)=0,\quad x=0 \quad 或 \quad x=T,$$

即得 T 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{T}, & 0<x<T;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

若随机变量 $X\sim U(a,b)$,则对任意长度为 l 的子区间 $(c,c+l)\subset(a,b)$,有

$$P\{c<X\leqslant c+l\}=\int_c^{c+l}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^{c+l}\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{l}{b-a}, \tag{2.3.2}$$

即 X 落在 (a,b) 的子区间内的概率只依赖于子区间的长度,而与子区间的位置无关.

例 2.3.2 一电阻器的电阻值 R 是一个在 900Ω 和 $1\ 100\Omega$ 之间(额定值 $1\ 000\Omega$ 带有 $\pm10\%$ 的最大误差)均匀分布的随机变量,求 R 落在 950Ω 至 $1\ 050\Omega$ 之间的概率.

解 R 的概率密度为

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{1\ 100-900}, & 900<r<1\ 100;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

有
$$P\{950<R\leqslant1\ 050\}=\int_{950}^{1\ 050}\frac{1}{200}\mathrm{d}r=0.5.$$

2. 指数分布

例 2.3.3 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}K\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>\alpha;\\ 0, & x\leqslant\alpha.\end{cases}\quad(\theta>0)$$

试确定常数 K.

解 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$,有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}K\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathrm{d}x=K\theta\mathrm{e}^{-\alpha/\theta},$$

可得 $K=\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{\alpha/\theta}$,$X$ 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-(x-\alpha)/\theta}, & x>\alpha;\\ 0, & x\leqslant\alpha.\end{cases}\quad(\theta>0)$$

取 $\alpha=0$,$\theta=\dfrac{1}{\lambda}$,有

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant0.\end{cases}\quad(\lambda>0), \tag{2.3.3}$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布.

指数分布在工程上有广泛用途,可参见§2.4"应用实例"中的寿命问题.

作为一个例子,这里证明服从指数分布的随机变量的一个有趣性质——"无后效性".

例 2.3.4　设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,对任意 $s>0$ 和 $t>0$,有

$$P\{X>t+s \mid X>t\}=P\{X>s\}.$$

证　当 $x>0$,有 $P\{X>x\}=\int_x^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u=\int_x^{+\infty}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u$

$$=-\mathrm{e}^{-\lambda u}\Big|_x^{+\infty}=\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

$$\begin{aligned}P\{X>t+s \mid X>t\}&=\frac{P\{X>t,X>t+s\}}{P\{X>t\}}\\&=\frac{P\{X>t+s\}}{P\{X>t\}}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\mathrm{e}^{-\lambda s}\\&=P\{X>s\}.\end{aligned}$$

无后效性又称"无记忆性",在电子工程中,指数分布常用来描述处于稳定工作状态的元器件寿命.

三、正态分布

正态分布在概率论中起着非常重要的作用,在各种分布中,它居于首要的地位,这是因为在实际问题中,许多随机变量都服从或近似服从正态分布,第 5 章的中心极限定理将阐明其缘由.

定义 2.3.2　若连续型随机变量 X 的概率密度为

$$\varphi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\},x\in\mathbf{R}, \tag{2.3.4}$$

其中 μ,σ 均为实数,且 $\sigma>0$,则称 X 服从参数为 μ,σ^2 的正态分布(或高斯分布),记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

特别当 $\mu=0,\sigma=1$,即 $X\sim N(0,1)$,则称 X 服从标准正态分布,其概率密度简记为

$$\varphi(x)=\varphi(x;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},x\in\mathbf{R}. \tag{2.3.5}$$

下面验证 $\varphi(x;\mu,\sigma^2)$ 是一个概率密度.

首先,对任意实数 x,有 $\varphi(x;\mu,\sigma^2)>0$,作代换 $t=\frac{1}{\sigma}(x-\mu)$,并令

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t,$$

而

$$I^2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}dr\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=1.$$

由于 I 非负,故 $I=1$,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x;\mu,\sigma^2)dx=1.$$

正态概率密度 $\varphi(x;\mu,\sigma^2)$ 具有以下性质:

(1) $\varphi(x;\mu,\sigma^2)$ 处处大于 0,而且具有各阶连续的导函数;

(2) $\varphi(x;\mu,\sigma^2)$ 在 $(-\infty,\mu)$ 内单调增加,在点 $x=\mu$ 达到最大值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$,在 $(\mu,+\infty)$ 单调减少,当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时,$\varphi(x;\mu,\sigma^2)\to0$;

(3) $\varphi(x;\mu,\sigma^2)$ 关于直线 $x=\mu$ 是对称的,即对任意实数 x,有

$$\varphi(\mu-x;\mu,\sigma^2)=\varphi(\mu+x;\mu,\sigma^2),$$

从而

$$P\{\mu-x<X\leqslant\mu\}=P\{\mu<X\leqslant\mu+x\}.$$

根据以上性质并应用函数作图法,可以绘出正态概率曲线,见图 2.8 和图 2.9.

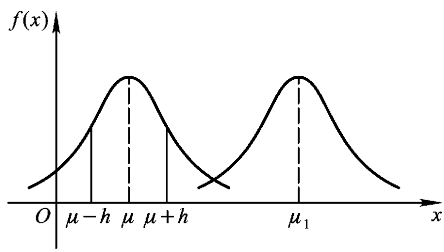


图 2.8

从图形中可以看出,正态分布中的两个参数 μ 和 σ 有非常重要的意义:

如果固定 σ,改变 μ 的值,则图形沿着 x 轴平移,不改变其形状(如图 2.8 所示)参数 μ 确定了正态概率曲线的中心位置,称 μ 为位置参数.

如果固定 μ,改变 σ 的值,当 σ 越小时,$\varphi(x;\mu,\sigma^2)$ 的最大值越大,其曲线越陡(如图 2.9 所示),因而 X 落在 μ 附近的概率越大,即参数 σ 反映了随机变量 X 取值的分散程度.

若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其分布函数为

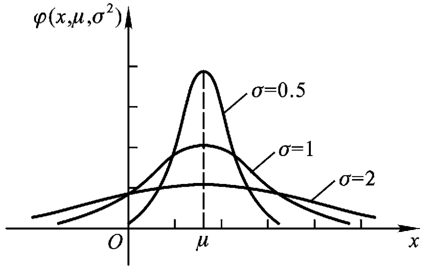


图 2.9

$$\Phi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}t, x\in\mathbf{R}. \tag{2.3.6}$$

若 X 服从标准正态分布,其分布函数记为

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t, X\in\mathbf{R}. \tag{2.3.7}$$

为计算方便,人们编制了《标准正态分布表》(见附表 2)以供查阅. 易知

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x), \tag{2.3.8}$$

故附表 2 仅对 $x\geqslant0$ 给出 $\Phi(x)$ 的函数值.

正态分布随机变量的概率计算都能归结为标准正态分布随机变量的概率计算,有如下常用计算式:

(1) 若 $X\sim N(0,1)$,则

$$P\{a<X\leqslant b\}=\Phi(b)-\Phi(a). \tag{2.3.9}$$

(2) 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则

$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right). \tag{2.3.10}$$

事实上,在式(2.3.6)中,令 $y=\dfrac{t-\mu}{\sigma}$,有 $\mathrm{d}t=\sigma\mathrm{d}y$,则

$$\Phi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).$$

例 2.3.5　设 $X\sim N(0,1)$,试求:

(1) $P\{1<X\leqslant2\}$;

(2) $P\{-2<X\leqslant-1\}$;

(3) $P\{|X|>1.5\}$.

解　(1) $P\{1<X\leqslant2\}=\Phi(2)-\Phi(1)=0.977\,2-0.841\,3=0.135\,9$.

(2) $P\{-2<X\leqslant-1\}=P\{1<X\leqslant2\}=0.135\,9$.

(3) $P\{|X|>1.5\}=1-P\{|X|\leqslant1.5\}$

$$=1-[\Phi(1.5)-\Phi(-1.5)]=2-2\Phi(1.5)$$
$$=2-2\times 0.9332=0.1336.$$

例 2.3.6　设 $X\sim N(1,4)$，试求：

(1) $P\{X\leqslant -3\}$；

(2) $P\{1\leqslant X\leqslant 3\}$；

(3) $P\{|X|>1\}$；

(4) $P\{0<X\leqslant 1.6\}$.

解　(1) $P\{X\leqslant -3\}=\Phi\left(\dfrac{-3-1}{2}\right)=\Phi(-2)$
$$=1-\Phi(2)=1-0.977=0.022.$$

(2) $P\{1\leqslant X\leqslant 3\}=\Phi\left(\dfrac{3-1}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{1-1}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(0)$
$$=0.8413-0.5=0.3413.$$

(3) $P\{|X|>1\}=1-P\{|X|\leqslant 1\}=1-\left[\Phi\left(\dfrac{1-1}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{-1-1}{2}\right)\right]$
$$=1-\Phi(0)+\Phi(-1)=2-\Phi(0)-\Phi(1)$$
$$=2-0.5-0.8413=0.6587.$$

(4) $P\{0<X\leqslant 1.6\}=\Phi\left(\dfrac{1.6-1}{2}\right)-\Phi\left(\dfrac{0-1}{2}\right)=\Phi(0.3)-\Phi(-0.5)$
$$=\Phi(0.3)-1+\Phi(0.5)=0.6179-1+0.6915$$
$$=0.3094.$$

例 2.3.7　设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 X 落在区间 $(\mu-k\sigma,\mu+k\sigma)$ 内的概率，$k=1,2,3$.

解　$P\{\mu-\sigma<X<\mu+\sigma\}=\Phi\left(\dfrac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right)$
$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6826.$$

$P\{\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544.$

$P\{\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974.$

由此可见，正态随机变量 X 在以位置参数 μ 为中心，半径为 3σ 的对称区间内取值的概率达 99% 以上，而 X 几乎不在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外取值.

例 2.3.8　设 $X\sim N(0,1)$，若

$$P\{X>u_\alpha\}=\int_{u_\alpha}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\alpha,$$

则称 u_α 是标准正态分布的上侧分位数(见图 2.10).

因　　$P\{X>u_\alpha\}=1-P\{X<u_\alpha\}=1-\Phi(u_\alpha)=\alpha,$

得

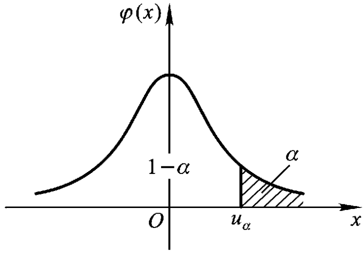


图 2.10

$$\Phi(u_\alpha)=1-\alpha.$$

可利用标准正态分布表查得上侧分位数，如果 $\alpha=0.05$，有 $\Phi(u_{0.05})=1-0.05=0.95$，查得 $u_{0.05}=1.645$.

例 2.3.9　某人需乘车到飞机场搭乘飞机，现有两条路线可供选择. 走第一条路线所需时间为 X_1，$X_1\sim N(50,100)$；走第二条路线所需时间为 X_2，$X_2\sim N(60,16)$. 问

（1）若有 70 分钟，应选择哪一条路线？

（2）若有 65 分钟，应选择哪一条路线？

解　（1）若有 70 分钟可用，两条线路可及时赶到机场的概率分别为

$$P\{0<X_1\leqslant 70\}=\Phi\left(\frac{70-50}{10}\right)-\Phi\left(\frac{0-50}{10}\right)=\Phi(2)-\Phi(-5)\approx\Phi(2);$$

$$P\{0<X_2\leqslant 70\}=\Phi\left(\frac{70-60}{4}\right)-\Phi\left(\frac{0-60}{4}\right)=\Phi(2.5)-\Phi(-15)$$
$$\approx\Phi(2.5);$$

由于 $\Phi(2.5)$ 大于 $\Phi(2)$，所以选择第二条路线为好.

（2）若有 65 分钟可用时，有

$$P\{0<X_1\leqslant 65\}=\Phi\left(\frac{65-50}{10}\right)-\Phi\left(\frac{0-50}{10}\right)\approx\Phi(1.5);$$

$$P\{0<X_2\leqslant 65\}=\Phi\left(\frac{65-60}{4}\right)-\Phi\left(\frac{0-60}{4}\right)\approx\Phi(1.25);$$

由于 $\Phi(1.5)$ 大于 $\Phi(1.25)$，所以应选择第一条路线.

§2.4　应用实例

随着现代科技的发展，各种设备系统的结构日趋复杂，诸如卫星、火箭、飞机、导航系统等各类系统的可靠性被提上了科学研究的日程. 提高系统的工作可靠性，可从两方面着手：一是提高每一组成元件的可靠性. 二是研究系统的最佳

设计、使用与维修方案等. 这里介绍两个利用概率论对系统可靠性进行量化分析的例子.

一、元件的寿命

考虑某个元件,假定它在 $t=0$ 时开始正常工作,一直持续到时刻 T,在 T 时刻发生故障,则称 T 为首次故障时刻,或称它为元件的寿命.

记随机变量 T 的分布函数为 $F(t)$,称

$$R(t)=P\{T>t\}=1-F(t)$$

为此元件的可靠性函数. $R(t)$ 为元件在 $[0,t]$ 中正常工作的概率,由分布函数的性质易知

(1) $0\leqslant R(t)\leqslant 1, R(0)\leqslant 1, R(+\infty)=0$;

(2) 当 $t<0, R(t)=1$ 当 $t>0, R(t)$ 是严格单降函数;

(3) $P\{t<T\leqslant t+\Delta t\}=R(t)-R(t+\Delta t), t>0, \Delta t>0.$

设 T 是元件的寿命,称

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P\{T\leqslant t+\Delta t\mid T>t\}$$

为 T 的瞬时失效率(故障率).

$\lambda(t)$ 是元件在 t 时刻以前正常工作,在 t 时刻失效的条件概率.

元件的寿命 T 的分布函数 $F(t)$,可靠性函数 $R(t)$,以及瞬时失效率 $\lambda(t)$ 有下述关系成立:

(1) $R(t)=1-F(t)$; (2.4.1)

(2) $\lambda(t)=-\dfrac{R'(t)}{R(t)}, t>0$; (2.4.2)

(3) $R(t)=\exp\{-\int_0^t\lambda(s)\,\mathrm{d}s, t>0.$ (2.4.3)

证明 (1) 式显然成立.

(2) 当 $t>0$, $P\{T\leqslant t+\Delta t\mid T>t\}=\dfrac{P\{t<T<t+\Delta t\}}{P\{T>t\}}$

$$=\frac{R(t)-R(t+\Delta t)}{R(t)},$$

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}\frac{R(t)-R(t+\Delta t)}{R(t)}=\frac{1}{R(t)}\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{-[R(t+\Delta t)-R(t)]}{\Delta t}$$

$$=-\frac{R'(t)}{R(t)}.$$

(3) 若设初值条件 $R(0)=1$,求解微分方程

$$\begin{cases}\lambda(t) = -\dfrac{1}{R(t)}R'(t), \\ R(0) = 1.\end{cases}$$

得
$$R(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

由瞬时失效率的定义知 $\lambda(t)$ 是非负函数，且由函数增量公式

$$R(t+\Delta t) - R(t) = R'(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

以及
$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)},$$

可得
$$P\{T < t+\Delta t \mid T > t\} = \frac{R(t) - R(t+\Delta t)}{R(t)} = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

很多种类的元器件在稳定工作的情形，其寿命在 t 时刻的瞬时失效率可看成常数

$$\lambda(t) = \lambda, \lambda > 0,$$

即有

$$P\{T < t+\Delta t \mid T > t\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

代入式(2.4.1)～(2.4.3)，得

$$R(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda\,\mathrm{d}t\right\} = \mathrm{e}^{-\lambda t}, t > 0,$$

$$F(t) = 1 - R(t) = \begin{cases}1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t > 0; \\ 0, & t \leqslant 0.\end{cases}$$

元器件工作相当长时间以后，会产生老化现象，若瞬时失效率与时间增长成正比，设

$$\lambda(t) = \lambda^2 t, \lambda > 0,$$

得

$$R(t) = \exp\left\{-\int_0^t \lambda^2 s\,\mathrm{d}s\right\} = \exp\left(-\frac{\lambda^2 t^2}{2}\right),$$

$$F(t) = \begin{cases}1 - \exp\left(-\dfrac{t^2\lambda^2}{2}\right), & t > 0; \\ 0, & t \leqslant 0.\end{cases}$$

利用前面的结果，我们还可以讨论更复杂的情形.

二、计算的可靠性

用三台计算机独立地并行工作，每次的计算结果采用三台机器‘少数服从多数’的原则进行判决，以期提高计算的可靠性. 另一方面，使用的机器多了，元件总数增多，出错的机会也增多. 那么，这种三台机器按多数表决的工作方式是

否一定会提高可靠性？在什么条件下最有利？可靠性的"效率"最大可提高多少？下面我们对这些问题做初步的定量分析.

假定三台机器是同类型的，记每台计算机的寿命为 ξ，其分布函数为

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

可靠性函数为

$$R(t)=P\{\xi>t\}=e^{-\lambda t}, t>0.$$

通常把 $\beta=\lambda t$ 称为规格化时间，令 $A=\{$在 β 时间内单机正常工作$\}$，则

$$P(A)=e^{-\beta}. \tag{2.4.4}$$

由于三台机器独立地工作，可考虑为伯努利概型，用 η 表示 A 出现的次数，则

$$\eta\sim B(3,e^{-\beta}).$$

三台机器并行工作，执行正确，就表明 A 至少出现两次，其概率为

$$\begin{aligned}P\{\eta\geqslant 2\}&=P_3(2)+P_3(3)=C_3^2(e^{-\beta})^2(1-e^{-\beta})+C_3^3(e^{-\beta})^3\\&=3e^{-2\beta}(1-e^{-\beta})+e^{-3\beta}.\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

所谓三台表决比单机可靠，表明以下不等式成立：

$$P\{\eta\geqslant 2\}\geqslant P(A),$$

即

$$3e^{-2\beta}(1-e^{-\beta})+e^{-3\beta}\geqslant e^{-\beta},$$

解得

$$e^{-\beta}(3e^{-\beta}-2e^{-2\beta}-1)\geqslant 0.$$

因 $e^{-\beta}>0$，有

$$3e^{-\beta}-2e^{-2\beta}-1\geqslant 0. \tag{2.4.6}$$

令

$$f(\beta)=3e^{-\beta}-2e^{-2\beta}-1, \beta>0.$$

由高等数学知识可知 $f(\beta)$ 在 $\beta=-\ln\frac{3}{4}=0.228$ 处有一极大值，且 $f(\beta)$ 的函数图像如图 2.11 所示. 当规格化工作时间 β 在 0.7 以下，式(2.4.6)才成立，且当 $0.2<\beta<0.4$ 时才比较明显地表示出三机协同工作比单机工作优越；当 $\beta>0.7$ 时，三机协同工作的可靠性反而不如单机.

记

$$E=\frac{P(\eta\geqslant 2)-P(A)}{P(A)},$$

E 表示三机协同工作相对单机工作所能改善的可靠性的"效率". 将式(2.4.4)和(2.4.5)代入上式，得

$$\begin{aligned}E&=\frac{3e^{-2\beta}(1-e^{-\beta})+e^{-3\beta}-e^{-\beta}}{e^{-\beta}}=3e^{-\beta}(1-e^{-\beta})+e^{-2\beta}-1\\&=3e^{-\beta}-2e^{-2\beta}-1=f(b).\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

前面引进的函数 $f(\beta)$ 即提高的可靠性的效率. 因此三机协同工作最大可能

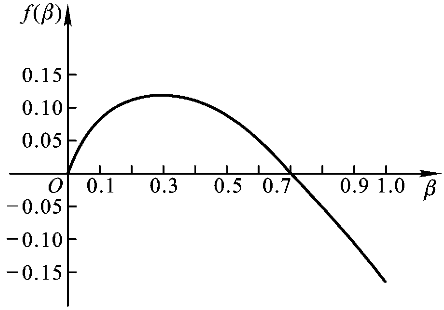


图 2. 11

提高的效率为

$$E_{\max}=f\left(-\ln\frac{3}{4}\right)=12.5\%.$$

应考虑到，这里提高的 12. 5% 的可靠性效率是由多用两台机器设备为代价取得的.

习　题　二

1. 一批晶体管中有 9 个合格品和 3 个不合格品，从中任取一个安装在电子设备上，如果取出不合格品不再放回，求在取得合格品以前已取出的不合格品数的分布律.

2. 做一系列独立试验，每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，求：

（1）首次成功时试验次数 Y 的分布律；

（2）在 n 次成功之前已经失败次数 X 的分布律.

3. 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k, k=1,2,3.$$

求 C 的值.

4. 随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=(1-a)a^k, k=0,1,2,\cdots$$

（1）a 可取何值？

（2）证明对于任意两个正整数 s 和 t，有

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X\geqslant t\}.$$

5. 一批产品共有 25 件，其中 5 件次品，从中随机地一个一个取出检查，共取 4 次，设 X 是其中的次品数，若

（1）每次取出的产品仍放回；

（2）每次取出的产品不再放回.

写出 X 的分布律.

6. 某射手每次射击击中目标的概率为 0.8,现连续射击 30 次,写出击中目标的次数 X 的分布律,并求出 30 次射击未击中目标的概率.

7. 一放射源放射出的任一粒子穿透某一屏蔽的概率是 0.01,现放射出 100 个粒子,求至少有两个粒子穿透屏蔽的概率.

8. 设随机变量 X 服从泊松分布,且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$,计算 $P\{X=4\}$.

9. 在一个周期内,从一个放射源放射出的粒子数 X 是服从泊松分布的随机变量,如果无粒子放射出的概率为 1/3,试求:

(1) X 的分布律;

(2) 放射出一个以上粒子的概率.

10. 一个口袋中有六个球,在这六个球上标明的数字分别为 $-3,-3,1,1,1,2$,从袋中任取一个球,试求取得的球上标明的数字 X 的分布律及分布函数.

11. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,用 $F(x)$ 表示下述概率:

(1) $P\{X\leqslant a\}$;(2) $P\{X=a\}$;(3) $P\{X\geqslant a\}$;(4) $P\{X>a\}$.

12. (柯西分布)随机变量 X 的分布函数是

$$F(x)=A+B\arctan x,\ -\infty<x<+\infty,$$

试求:

(1) 系数 A 和 B;

(2) X 落在区间 $(-1,1)$ 内的概率;

(3) X 的概率密度.

13. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-(1+x)\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

试求 X 的概率密度,并计算 $P\{X\leqslant 1\}$ 和 $P\{X>3\}$.

14. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=A\mathrm{e}^{-2|x|},\ -\infty<x<+\infty,$$

试求:(1) 系数 A;(2) X 的分布函数.

15. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 X 的分布函数;

(2) 确定满足 $P\{X\leqslant b\}=P\{X>b\}$ 的 b.

16. 从一批子弹中任意抽出 5 发试射,如果没有一发子弹落在靶心 200 m 以外,则整批子弹将被接受. 设弹着点与靶心的距离 X(cm)的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ax\mathrm{e}^{-x^2}, & 0<x<3;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求:(1) 系数 A;(2) 该批子弹被接受的概率.

17. 在长为 l 的线段上随机地选取一点,将其分为两段,短的一段与长的一段之比小于 1/4 的概率是多少?

18. 设随机变量 Y 服从 $(0,5)$ 上的均匀分布，求方程

$$4x^2+4xY+Y+2=0$$

有实根的概率.

19. 一电子信号在 $(0,T)$ 时间内随机地出现，设 $0<t_0<t_1<T$，求：

（1）信号出现在区间 (t_0,t_1) 内的概率.

（2）信号在 t_0 时刻前不出现，在 (t_0,t_1) 内出现的概率.

20. 若随机变量 $X\sim N(0,1)$，试求：

（1）$P\{X\leqslant 2.5\}$；　（2）$P\{|X|>1.58\}$.

21. 若随机变量 $X\sim N(2,0.16)$，试求：

（1）$P\{X\geqslant 2.3\}$；　（2）$P\{1.8\leqslant X\leqslant 2.1\}$.

22. 设某城市男子的身高 $X\sim N(170,36)$（单位：cm），问应如何选择公共汽车门的高度，使男子乘车时与车门碰头的机会小于 0.01？

23. 两台电子仪器的寿命分别为 X_1,X_2，且 $X_1\sim N(40,36)$，$X_2\sim N(45,9)$，若要在 45 小时的期间内使用这种仪器，问选用哪一台仪器较好？若在 52 小时内使用呢？

24. 某工厂生产的电子管寿命 X（单位：小时）服从正态分布 $N(1\ 600,\sigma^2)$，如果要求电子管的寿命在 1 200 小时以上的概率达到 0.96，求 σ 值.

25. 设随机变量 $X\sim N(60,3^2)$，求分点 x_1,x_2，使 X 分别落在 $(-\infty,x_1)$，(x_1,x_2)，$(x_2,+\infty)$ 的概率之比为 3∶4∶5.

第 3 章　多维随机变量

在实际问题中常需要同时考虑两个或两个以上的随机变量. 例如,为研究某一地区学龄前儿童的身体发育情况,对该地区的儿童进行抽查,对每个儿童都能观察他的身高、体重等身体指标. 又如,当一个确定的正弦信号经过信道随机干扰后,输出信号的振幅、相位和角频率都是随机变量.

§3.1　二维随机变量及其分布

一、联合分布函数

定义 3.1.1　设随机试验 E 的样本空间为 Ω,对于每一个样本点 $\omega\in\Omega$,有 n 个实数 $X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$ 与之对应,则称它们构成的有序组 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为 n 维随机变量,或称 n 维随机向量.

前述儿童身体健康抽样试验中,样本空间为

$$\Omega=\{\text{该地区的全体儿童}\},$$

记儿童们的身高为 H 和体重为 W,则 (H,W) 构成定义在 Ω 上的二维随机变量.

由于二维随机变量与 n 维随机变量没有本质的区别,为讨论简单和便于理解起见,下面着重讨论二维随机变量.

二维随机变量 (X,Y) 中的 X,Y 是定义在同一样本空间 Ω 上的随机变量,将它们的分布函数分别记为

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\},\quad F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}.$$

定义 3.1.2　设 (X,Y) 是二维随机变量,(x,y) 是任意实数对,记

$$\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\{X\leqslant x\}\cap\{Y\leqslant y\},$$

称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\} \tag{3.1.1}$$

为 (X,Y) 的联合分布函数;X 与 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别称为 (X,Y) 关于 X,Y 的边缘分布函数.

因

$$P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y<+\infty\},$$
$$P\{Y\leqslant y\}=P\{X<+\infty,Y\leqslant y\},$$

可得联合分布函数与边缘分布函数之间的关系如下:

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y),\quad F_Y(y)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y). \tag{3.1.2}$$

若将二维随机变量 (X,Y) 看成平面上随机点的坐标,则联合分布函数

$F(x,y)$ 就是随机点 (X,Y) 落在以 (x,y) 为顶点，位于该点左下部阴影部分内的概率，如图 3.1 所示.

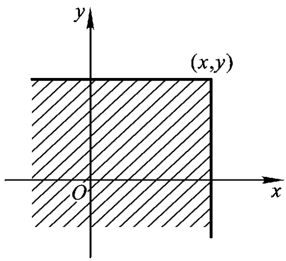


图 3.1　分布函数 $F(x,y)$ 的几何意义

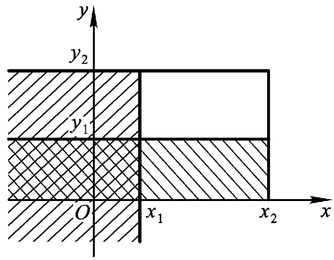


图 3.2　二维概率计算

由图 3.2 不难看出，随机点 (X,Y) 落入矩形

$$D=\{(x,y):\ x_1<x\leqslant x_2,y_1<y\leqslant y_2\}$$

内的概率为

$$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1). \tag{3.1.3}$$

二维联合分布函数 $F(x,y)$ 具有以下性质：

(1) $F(x,y)$ 分别对 x,y 单调下降，即有

当 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y)$ 对一切 $y\in\mathbf{R}$ 成立；

当 $y_1<y_2$ 时，$F(x,y_1)\leqslant F(x,y_2)$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

(2) 对每一个变量 $F(x,y)$ 是右连续的，即有

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x,y)=F(x_0,y)\text{，对一切 } y\in\mathbf{R} \text{ 成立；}$$

$$\lim_{y\to y_0^+}F(x,y)=F(x,y_0)\text{，对一切 } x\in\mathbf{R} \text{ 成立.}$$

(3) $F(x,y)$ 是非负有界函数 $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，而且有

$$\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0,\quad \lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,\quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

(4) 对于任意实数 $x_1\leqslant x_2,y_1\leqslant y_2$，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geqslant 0.$$

容易证明以上性质. 需指出，若二元函数 $F(x,y)$ 满足上述四条性质，则一定存在二维随机变量 (X,Y) 以 $F(x,y)$ 为联合分布函数.

例 3.1.1　二元函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\geqslant 0;\\ 0, & x+y<0.\end{cases}$$

具有性质(1)、(2)、(3)，但有

$$F(1,1)-F(1,-1)-F(-1,1)+F(-1,-1)=1-1-1+0=-1,$$

即不满足分布函数的性质(4)，故 $F(x,y)$ 不是联合分布函数.

例 3.1.2　二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，以及概率 $P\{1<X\leqslant 2,3<Y\leqslant 5\}$.

解　$F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-y}, & y\geqslant 0;\\ 0, & y<0.\end{cases}$

$$\begin{aligned}P\{1<X\leqslant 2,3<Y\leqslant 5\}&=F(2,5)-F(2,3)-F(1,5)+F(1,3)\\&=(1-2^{-2}-2^{-5}+2^{-7})-(1-2^{-2}-2^{-3}+2^{-5})-(1-2^{-1}-2^{-5}+2^{-6})\\&\quad+(1-2^{-1}-2^{-3}+2^{-4})=\frac{3}{128}.\end{aligned}$$

n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数定义为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\},\qquad(3.1.4)$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个任意实数.

由 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数，可确定其中任意 k 个 $(1\leqslant k\leqslant n)$ 分量的联合分布函数，称为 k 维边缘分布函数，例如

$(x_1)=F(x_1.$ TIF ;E $+\infty,\cdots.$ TIF ;E $+\infty)$，$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=F(x_1,x_2+\infty,\cdots.$ TIF ;E $+\infty$

是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 分别关于 X_1，(X_1,X_2) 的边缘分布函数.

n 维联合分布函数有类似于二维联合分布函数的性质.

二、联合分布律

定义 3.1.3　二维随机变量 (X,Y) 所有可能取值为有限对或可列无穷对：(x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，记

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad(i,j=1,2,\cdots)\qquad(3.1.5)$$

满足以下条件：

(1) $p_{ij}\geqslant 0$，$(i,j=1,2,\cdots)$；　　(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$，

则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量. 称等式(3.1.5)为 (X,Y) 的联合分布律.

关于 (X,Y) 的联合分布律，有如下性质：

性质 3.1.1　随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\leqslant x}\sum_{y_j\leqslant y}p_{ij}.\qquad(3.1.6)$$

性质 3.1.2　随机变量 X 与 Y 的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},\quad (j=1,2,\cdots) \tag{3.1.7}$$

$$P\{Y=y_i\}=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij},\quad (i=1,2,\cdots). \tag{3.1.8}$$

证　$P\{X=x_i\}=P\left(\{X=x_i\}\cap\left[\bigcup_{j=1}^{\infty}\{Y=y_j\}\right]\right)$

$$=P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\left[\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\}\right]\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}.$$

同理
$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}.$$

人们习惯用表 3.1.1 的形式给出二维离散型随机变量的联合分布律.

表 3.1.1

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

由表 3.1.1 可见,将表格中的各行的元素相加,置于最后一列,构成随机变量 X 的分布律;将表格中各列的元素相加,排在最下一行,构成了随机变量 Y 的分布律,通常称为 X 和 Y 的边缘分布律.

例 3.1.3(有放回摸球试验)　袋子中装有 2 只白色球和 3 只黑色球,现从中有放回地摸球,每次摸一个,用 X 表示第一次摸出的白球数,用 Y 表示第二次摸出的白球个数,表 3.1.2 给出了(X,Y)的联合分布律以及关于 X、Y 的边缘分布律.

表 3.1.2　有放回摸球

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

例 3.1.4（无放回摸球试验）　将上例中的试验改为无放回摸球，则 (X,Y) 的联合分布律，关于 X、Y 的边缘分布律由表 3.1.3 给出.

表 3.1.3　无放回摸球

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

根据式(3.1.7)和式(3.1.8)，由 (X,Y) 的联合分布律可以完全确定 X，Y 的边缘分布律. 例 3.1.3 和例 3.1.4 中 X、Y 的边缘分布律都相同，但两个例子却有完全不同的联合分布律. 应认识到：二维随机变量的分布不仅与两个分量有关，还与各分量间的联系有关.

例 3.1.5（二维两点分布）　设随机变量 (X,Y) 的联合分布律如表 3.1.4 所示，其中 $0<p<1$，称 (X,Y) 服从二维两点分布，写出 (X,Y) 的联合分布律.

表 3.1.4

$X \backslash Y$	0	1
0	$1-p$	0
1	0	p

解　当 $x<0$ 或 $y<0$，　　$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=0$；

当　$0\leqslant x<1$ 且 $0\leqslant y$，　　$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=p_{00}=1-p$；

当　$0\leqslant y<1$ 且 $1\leqslant x$，　　$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=p_{00}=1-p$；

当　$1\leqslant x$ 且 $1\leqslant y$，　　$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=p_{00}+p_{11}=1$；

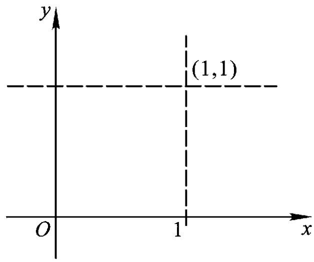


图 3.3

综合得(见图 3.3)

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0；\\ 1-p, & 0\leqslant x<1 \text{ 或 } 0\leqslant y<1,1\leqslant x；\\ 1, & 1\leqslant x,1\leqslant y.\end{cases}$$

三、联合概率密度

定义 3.1.4　二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为 $F(x,y)$，如果存在函数 $f(x,y)\geqslant 0$，使得对于任意实数(x,y)有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3.1.9}$$

则称(X,Y)是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为(X,Y)的联合概率密度.

类似于一维的情形，联合概率密度 $f(x,y)$ 具有以下性质：

(1) $f(x,y)\geqslant 0$ 处处成立；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$；

凡是满足性质(1)和(2)的二元函数 $f(x,y)$ 必为某个二维随机变量的联合概率密度.

(3) 若 $G\subset\mathbf{R}^2$，则有

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{3.1.10}$$

(4) 随机变量 X,Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad x\in\mathbf{R}, \tag{3.1.11}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x,\quad y\in\mathbf{R}, \tag{3.1.12}$$

则称$f_X(x)$、$f_Y(y)$为(X,Y)关于X,Y的边缘概率密度.

因为

$$F_X(x)=F(x.\ TIF\ ;E+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u,$$

$$f_X(x)=F'_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)\,\mathrm{d}v,$$

即
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

同理可证得公式(3.1.12).

例 3.1.6 已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}K\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求:(1) 常数K;

(2) 边缘概率密度$f_X(x)$;

(3) 概率$P\{Y\leqslant X\}$;

(4) 联合分布函数$F(x,y)$和边缘分布函数$F_X(x)$.

解 (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}K\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=K\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\right)=K\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{K}{2},$$

故$K=2$.

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

$$=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(3) 令$G=\{(x,y):\ y\leqslant x\}$

$$P\{Y\leqslant X\}=P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

(4) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=\begin{cases}\int_0^x\int_0^y\mathrm{e}^{-(2u+v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

可验证有 $F'_X(x)=f_X(x)$.

例 3.1.7　二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^2y}, & 1\leqslant x<+\infty,\dfrac{1}{x}\leqslant y\leqslant x;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求关于 Y 的边缘概率密度 $f_Y(x)$，并检验所得 $f_Y(x)$ 是否为概率密度.

解

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty}\frac{1}{2x^2y}dx, & 0\leqslant y<1;\\ \displaystyle\int_{y}^{+\infty}\frac{1}{2x^2y}dx, & 1\leqslant y<+\infty;\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant y<1;\\ \dfrac{1}{2y^2}, & 1\leqslant y<+\infty;\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

对所有 y 值(见图 3.4)，均有 $f_X(y)>0$ 成立，而且

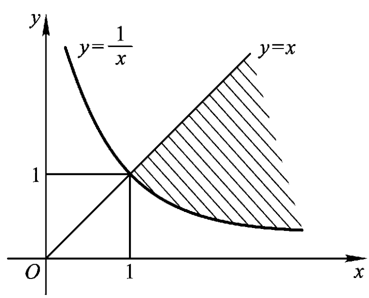


图 3.4

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{0}0dy+\int_0^1\frac{1}{2}dy+\int_1^{+\infty}\frac{1}{2y^2}dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

四、二维均匀分布(几何概率)

设 $G\subset\mathbf{R}^2$,其面积记为 $S(G)$,若二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(G)}, & (x,y)\in G;\\ 0, & (x,y)\notin G,\end{cases}$$

则称 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布.

设 D 是 G 的子域($D\subset G$),则有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D\frac{1}{S(G)}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{S(G)}\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\frac{D\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}.\qquad(3.1.13)$$

此公式表明,若二维随机变量 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布,它落在 G 的任意子域中的概率仅与该子域的面积有关,而与其位置无关,从而 (X,Y) 落在 G 的等面积子域上的概率保持不变,这正是均匀分布的‘均匀’含义.

若随机变量 X 在 (a,b) 上服从均匀分布,对任意 $(c,d)\subset(a,b)$,有

$$P\{a<X\leqslant b\}=\frac{d-c}{b-a}=\frac{(c,d)\text{ 的长度}}{(a,b)\text{ 的长度}}.\qquad(3.1.14)$$

根据式(3.1.13)、(3.1.14)以及类似公式,人们借助于几何度量(长度、面积、体积等)来计算概率,将这种概率称为几何概率.

例 3.1.8　在时间间隔 $[0,T]$ 内的任意时刻,两个不相干的信号都等可能地进入信号接收机,如果当这两个信号进入接收机的时间间隔不大于 t,则会产生干扰. 试求信号接收机受到干扰的概率.

解　以 X 和 Y 分别表示两个信号进入接收机的时刻,由题设条件知 (X,Y) 在矩形区域

$$G=\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T\}$$

上服从均匀分布.

信号接收机受到干扰的充分必要条件是 (X,Y) 落入

$$D=\{(x,y):\ |x-y|\leqslant t\}$$

内,根据几何概率公式(3.1.13),如图 3.5 所示,所求概率为

$$p=\frac{D\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2.$$

例 3.1.9　在区间 $[-1,2]$ 上随机选取两点,其坐标分别记为 X 和 Y,求两坐标之和大于 1 而两坐标之积小于 1 的概率.

解　显然二维随机变量 (X,Y) 在矩形(如图 3.6)

$$G=\{(x,y):\ -1\leqslant x\leqslant 2,-1\leqslant y\leqslant 2\}$$

上服从均匀分布,所求概率为

$$p=\frac{D\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}.$$

其中 D 的面积是

$$S(D)=3\cdot\frac{1}{2}+2\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+2\ln 2,$$

故

$$p=\frac{S(D)}{S(G)}=\frac{2}{9}\ln 2+\frac{1}{6}.$$

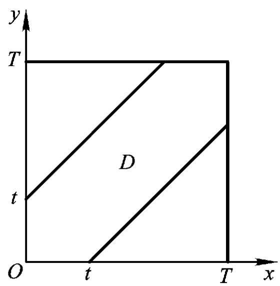


图 3.5

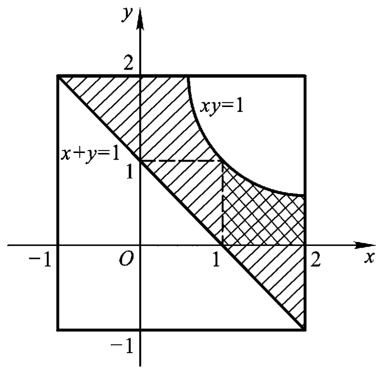


图 3.6

五、二维正态分布

二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R} \tag{3.1.15}$$

式中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1$，则称 (X,Y) 服从二维正态分布，记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$.

例 3.1.10　设 $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;\rho)$，即 (X,Y) 具有概率密度.

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x^2-2\rho xy+y^2]\right\},(x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

求 X,Y 的边缘概率密度 $\varphi_X(x)$ 和 $\varphi_Y(y)$.

解　$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x^2-2\rho xy+y^2]\right\}\mathrm{d}y,$$

积分式中

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x^2-2\rho xy+y^2]=\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(y-\rho x)^2+x^2(1-\rho^2)]$$
$$=\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}+\frac{x^2}{2},$$

作代换 $\dfrac{(y-\rho x)}{\sqrt{1-\rho^2}}=t, \mathrm{d}y=\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}t$，则

$$\varphi_X(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in\mathbf{R}.$$

此例的结果是：若 $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;\rho)$，则 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$. 更一般地有：

命题 3.1.1 若二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

二维正态随机变量的边缘分布仍为正态分布，二维联合概率密度完全确定了边缘概率密度. 反之，由两个边缘概率密度 $\varphi_X(x)$ 和 $\varphi_Y(y)$ 却不能确定 (X,Y) 的联合概率密度 $\varphi(x,y)$.

§3.2 随机变量的独立性

由随机事件的独立性概念可引进随机变量的独立性概念.

定义 3.2.1 设 (X,Y) 是二维随机变量，若对于任意实数 x 和 y，有

$$P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}\tag{3.2.1}$$

成立，则称随机变量 X 和 Y 相互独立.

二维随机变量 (X,Y) 相互独立的意义是对所有的实数对 (x,y)，随机事件 $\{X\leqslant x\}$ 与随机事件 $\{Y\leqslant y\}$ 相互独立.

用分布函数表示式(3.2.1)，定义 3.2.1 等价于对于一切实数对 (x,y)，有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\tag{3.2.2}$$

成立. 其中 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$、$F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数和边缘分布函数.

例 3.2.1 证明：若随机变量 X 和 Y 相互独立，则有

$$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}=P\{x_1<X\leqslant x_2\}P\{y_1<Y\leqslant y_2\}$$

成立.

证 由公式(3.2.2)

$$P\{x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$$
$$=F_X(x_2)F_Y(y_2)-F_X(x_1)F_Y(y_2)-F_X(x_2)F_Y(y_1)+F_X(x_1)F_Y(y_1)$$
$$=[F_X(x_2)-F_X(x_1)][F_Y(y_2)-F_Y(y_1)]=P\{x_1<X\leqslant x_2\}P\{y_1<Y\leqslant y_2\}.$$

例 3.2.2 设随机变量 X 与 Y 相互独立,证明随机变量 X^2 和 Y^2 也相互独立.

证 当 $x\geqslant 0$ 且 $y\geqslant 0$,

$$F(x,y)=P\{X^2\leqslant x,Y^2\leqslant y\}=P\{-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant\sqrt{x},-\sqrt{y}\leqslant Y\leqslant\sqrt{y}\}$$
$$=P\{-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant\sqrt{x}\}P\{-\sqrt{y}\leqslant Y\leqslant\sqrt{y}\}$$
$$=P\{X^2\leqslant x\}P\{Y^2\leqslant y\}=F_{X^2}(x)F_{Y^2}(y).$$

当 $x<0$ 或 $y<0$,

$$F(x,y)=P\{X^2\leqslant x,Y^2\leqslant y\}=0=P\{X^2\leqslant x\}P\{Y^2\leqslant y\}=F_{X^2}(x)F_{Y^2}(y).$$

同理可证在其他情形也有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ 成立,故 X^2 和 Y^2 相互独立.

定理 3.2.1 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量,则 X,Y 相互独立的充分必要条件是对 (X,Y) 的任意一对取值 (x_i,y_j) 均有

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}. \tag{3.2.3}$$

按照定理 3.2.1,可以验证例 3.1.3 中随机变量 X 与 Y 相互独立,在例 3.1.4 中,因

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\neq\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=P\{X=0\}P\{Y=0\},$$

故 X 与 Y 不相互独立.

例 3.2.3 将一枚均匀硬币连续抛两次,令

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次出现正面;}\\ 0, & \text{第一次出现反面.}\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次出现正面;}\\ 0, & \text{第二次出现反面.}\end{cases}$$

验证 X 与 Y 相互独立.

证 (X,Y) 的所有可能取值对为 $(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$ 和 $(1,1)$,而且取得每一对数值的概率相等,均为

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{4}\quad(i=1,2;j=1,2).$$

而 $$P\{X=i\}=\frac{1}{2},\quad i=1,2;\quad P\{Y=j\}=\frac{1}{2},\quad(j=1,2).$$

从而 $$P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{4}=P\{X=i\}P\{Y=j\}\quad(i=1,2;j=1,2).$$

故 X 与 Y 相互独立.

定理 3.2.2 设 (X,Y) 是连续型随机变量,其联合概率密度和边缘概率密度分别是 $f(x,y)$,$f_X(x)$,$f_Y(y)$,则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件是

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{3.2.4}$$

在平面上除去‘面积’为零的集合外成立.

例 3.2.4 二维随机变量(X,Y)在区域G上服从均匀分布,其中G是图 3.7 中的阴影部分,讨论X与Y是否相互独立.

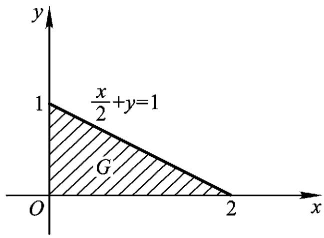


图 3.7

解 区域G的面积为 1,故(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G;\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

当$0\leqslant x\leqslant 2$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1-\frac{x}{2}}\mathrm{d}y+\int_{1-\frac{x}{2}}^{+\infty}0\mathrm{d}y=1-\frac{x}{2},$$

当$x<0$或$x>0$时,$f(x)=0$,综合而得

$$f_X(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理可得

$$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2(1-y)}\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2(1-y), & 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$(x,y)\in G$时,$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,故X与Y不相互独立.

例 3.2.5 二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,证明$X$与$Y$相互独立的充分必要条件是$\rho=0$.

证 (X,Y)的联合概率密度是

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$,若$\rho=0$,则

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}=\varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y),$$

因此 X 与 Y 相互独立.

反之,若 X 与 Y 相互独立,$\varphi(x,y)=\varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y)$ 对一切 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 成立,令 $x=\mu_1,y=\mu_2$,有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2},$$

故有 $\rho=0$.

定义 3.2.2　设 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,若对所有实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 均有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_1(x_1)F_2(x_2)\cdots F_n(x_n) \tag{3.2.5}$$

成立,式中 $F_k(x_k)$ 是关于 X_k 的边缘分布函数,则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

若 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 n 维连续型随机变量,则式(3.2.5)可改写为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n). \tag{3.2.6}$$

(参见定理 3.2.2).

例 3.2.6　设 n 个同类电子元件并联使用,每个元件的寿命 X_i 的概率密度为

$$f_{X_i}(x_i)=\begin{cases}x_i\mathrm{e}^{-x_i}, & x_i>0;\\ 0, & x_i\leqslant 0.\end{cases}$$

试求整个系统正常工作的时间超过 $L(L>0)$ 的概率.

解　由题设条件可知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,系统不能正常工作时所有元件均已失效,所求概率为

$$\begin{aligned}p&=P\{X_1<L,X_2<L,\cdots,X_n<L\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i<L\}=\prod_{i=1}^{n}\left[\int_0^L x_i\mathrm{e}^{-x_i}\mathrm{d}x_i\right]\\&=\left[\int_0^L x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right]^n=[1-\mathrm{e}^{-L}-L\mathrm{e}^{-L}]^n.\end{aligned}$$

类似于例 3.2.1 和例 3.2.2,可以证明 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,则 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 也相互独立.

更一般地有下述定理.

定理 3.2.3　若 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 相互独立,则

(1) 其中任意 m 个 $(2\leqslant m\leqslant n)$ 随机变量 $X_{k1},X_{k2},\cdots,X_{km}$ 也相互独立;

(2) 若随机变量的函数 $g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)$ 是随机变量,则它们也相互独立;

(3) 若 $(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 与 $(X_{m+1},X_{m+2},\cdots,X_n)$ 相互独立,而且 h,g 是连续函数,则 $h(X_1,X_2,\cdots,X_m)$ 和 $g(X_{m+1},X_{m+2},\cdots,X_n)$ 也相互独立.

§3.3 条件分布

一、条件分布律

设离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots),$$

若$P\{Y=y_j\}>0$,在事件$\{Y=y_j\}$已发生的条件下,事件$\{X=x_i\}$的条件概率为

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots$$

此概率数列具有分布律的性质:

(1) $P\{X=x_i \mid Y=y_j\}>0,\quad i=1,2,\cdots$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{1}{p_{\cdot j}}\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_{ij}=1.$

于是引进下述定义.

定义3.3.1 设(X,Y)是离散型随机变量,对固定的j,若$P\{Y=y_j\}>0$,则称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\quad (i=1,2,\cdots)\tag{3.3.1}$$

为在$Y=y_j$的条件下,随机变量X的条件分布律.

对固定的i,若$P\{X=x_i\}>0$,则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad (j=1,2,\cdots)\tag{3.3.2}$$

为在$X=x_i$的条件下,随机变量Y的条件分布律.

例3.3.1 某射手进行射击,击中目标两次则停止射击,而且每次射击的命中率为$p(0<p<1)$,令X表示第一次命中目标时的射击次数,Y是第二次命中目标时的射击次数,求条件分布律.

(1) $P\{X=i \mid Y=j\}$, (2) $P\{Y=j \mid X=i\}$.

解 (X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=p^2(1-p)^{j-2}\quad (1\leqslant i<j=2,3,\cdots).$$

(1) $P\{X=i \mid Y=j\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{Y=j\}}=\frac{p^2(1-p)^{j-2}}{(j-1)p^2(1-p)^{j-2}}=\frac{1}{j-1}$

$(i=1,2,\cdots,j-1)$.

(2) $P\{X=i\}=\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}P\{X=i,Y=j\}=\sum\limits_{j=i+1}^{\infty}p^2(1-p)^{j-2}=p(1-p)^{i-1}\quad (i=$

$1,2,\cdots)$.

当 $i=1,2,\cdots$时,

$$P\{Y=j|X=i\}=\frac{P\{X=i,Y=j\}}{P\{X=i\}}=\frac{p^2(1-p)^{j-2}}{p(1-p)^{i-1}}$$
$$=p(1-p)^{j-i-1}\quad(j=i+1,i+2,\cdots).$$

这里,显然 $p(1-p)^{j-i-1}>0$,且

$$\sum_{j=i+1}^{\infty}p(1-p)^{j-i-1}=p\cdot\frac{1}{1-(1-p)}=1.$$

同理,$P=\{X=i,Y=j\}=\dfrac{1}{j-1}\quad(i=1,2,\cdots,j-1)$,也满足条件分布律的两条基本性质.

例 3.3.2　某矿山一年内发生的事故总数 $X\sim P(\lambda)$,一个事故是致命的概率为 p,设一年内发生致命事故的次数为 Y,试写出 Y 的分布律.

解　X 的分布律为　$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots,$

在发生 k 次事故的条件下,即"$X=k$"的条件下,随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=m|X=k\}=C_k^m p^m(1-p)^{k-m},m=0,1,2,\cdots,k,$$

故(X,Y)的联合分布律为

$$P=\{X=k,Y=m\}=P\{X=k\}P\{Y=m|X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}C_k^m p^m(1-p)^{k-m}$$
$$(0\leqslant m\leqslant k=1,2,\cdots).$$

关于 Y 的分布律为

$$P=\{Y=m\}=\sum_{m}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{k!}{m!(k-m)!}p^m(1-p)^{k-m}$$
$$=\frac{(\lambda p)^m}{m!}\sum_{k=m}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{[\lambda(1-p)]^{k-m}}{(k-m)!}$$
$$=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda p}\quad(m=0,1,2,\cdots).$$

二、条件概率密度

对一般随机变量(X,Y)而言,不能保证 $P\{X=x\}\neq 0$ 或 $P\{Y=y\}\neq 0$,因此对于非离散型随机变量,不能用条件概率的概念引入"条件分布函数",我们采用极限的方法来处理.

定义 3.3.2　对于给定的实数 y 及任意的 $\Delta y>0$,若 $P\{y<Y\leqslant y+\Delta y\}>0$,且对任意实数 x,极限

$$\lim_{\Delta y\to 0^+}P\{X\leqslant x|y<Y\leqslant y+\Delta y\}=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{P\{X\leqslant x,y<Y\leqslant y+\Delta y\}}{P\{y<Y\leqslant y+\Delta y\}}\quad(3.3.3)$$

存在,则称此极限为在"$Y=y$"的条件下,随机变量 X 的条件分布函数,记为 $F_{X|Y}(x|y)$.

对二维离散型随机变量(X,Y),若 $P\{Y=y_j\}>0$,则在"$Y=y_j$"的条件下,随机变量 X 的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x|y)=\sum_{x_i\leqslant x}P\{X=x_i|Y=y_j\}=\sum_{x_i\leqslant x}\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}.\tag{3.3.4}$$

设(X,Y)是连续型随机变量,其联合概率密度为$f(x,y)$,式(3.3.3)可改写为

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y}^{y+\Delta y}f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\int_{y}^{y+\Delta y}f_Y(v)\,\mathrm{d}v}.$$

若$f(x,y)$,$f_Y(y)$在(x,y)及其附近连续,并且$f_Y(y)>0$,由积分中值定理可得

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y+\theta_1\Delta y)\,\mathrm{d}u}{f_Y(y+\theta_2\Delta y)},\quad 0<\theta_i<1,\quad i=1,2,$$

从而

$$F_{X|Y}(x|y)=\frac{\int_{-\infty}^{x}f(u,y)\,\mathrm{d}u}{f_Y(y)}=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}u.$$

若记$f_{X|Y}(x|y)$为在"$Y=y$"的条件下,随机变量 X 的条件概率密度,则

$$f_{X|Y}(x|y)=F'_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.\tag{3.3.5}$$

类似地,在"$X=x$"的条件下,随机变量 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=F'_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.\tag{3.3.6}$$

在"$X=c$"的条件下,随机事件$\{a<Y\leqslant b\}$的条件概率由下面公式计算

$$P\{a<Y\leqslant b|X=c\}=\int_a^b f_{Y|X}(y|c)\,\mathrm{d}y.\tag{3.3.7}$$

例 3.3.3 二维随机变量(X,Y)在圆域 $D=\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 4\}$上服从均匀分布,试求$f_{Y|X}(y|x)$和概率 $P\{0\leqslant Y\leqslant 3|X=1\}$.

解 (X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}, & x^2+y^2\leqslant 4;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\frac{1}{4\pi}\mathrm{d}y, & |x|\leqslant 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, & |x| \leqslant 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $-2<x<2$ 时，$f_X(x)>0$，从而

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}, & -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $x \in (-2,2)$，在"$X=c$"的条件下，随机变量 Y 在 $(-\sqrt{4-x^2}, \sqrt{4-x^2})$ 上服从均匀分布；当 $x \notin (-2,2)$，随机变量 Y 的条件概率密度不存在.

有　$$P\{0 \leqslant Y \leqslant 3 | X=1\} = \int_0^3 f_{Y|X}(y|1)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{3}}^3 0\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

例 3.3.4　已知二维随机变量 (X,Y) 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (0<y<1),$$

和
$$f_Y(y) = \begin{cases} 5y^4, & 0<y<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

计算概率 $P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}$.

解　由公式(3.3.5)可得

$$f(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = \begin{cases} 15x^2 y, & 0<x<y, 0<y<1; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \displaystyle\int_x^1 15x^2 y\,\mathrm{d}y, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{15}{2}(x^2 - x^4), & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{15}{2}(x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{47}{64}.$$

例 3.3.5　二维随机变量 $(X,Y) \sim N(0,1;0,1;\rho)$，求条件概率密度 $\varphi_{X|Y}(x|y)$.

解　(X,Y) 的联合概率密度为

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[x^2 - 2\rho xy + y^2]\right\}, (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Y 的概率密度为

$$\varphi_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\qquad y\in\mathbf{R},$$

得

$$\varphi_{X|Y}(x|y)=\frac{\varphi(x,y)}{\varphi_Y(y)}=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{y^2}{2}\right\}\Big/\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right\},\qquad x\in\mathbf{R}.$$

在‘$Y=y$’的条件下,随机变量 $X\sim N(\rho y,1-\rho^2)$,即二维正态分布的条件分布仍是正态分布.

§3.4　随机变量的函数及其分布

无论从应用或理论方面都需要考虑随机变量的函数问题,需要研究随机变量的函数的分布,譬如:

已知在 $t=t_0$ 时刻,热噪声的电压 X 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$,热噪声的功率 $Y=X^2/R$(R 是电阻值)服从什么分布?

对靶子上的点目标 O 进行射击,弹着点的坐标(X,Y)服从二维均匀分布,点(X,Y)与点 O 的距离 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$服从什么分布?

某放射源在$[0,T_1]$时间内放射的 α 粒子数 $X\sim P(\lambda_1)$,在(T_1,T_2)时间内放射的 α 粒子数 $Y\sim P(\lambda_2)$,问该放射源在$[0,T_2]$时间内放射的 α 粒子数 $Z=X+Y$ 的分布如何?

一般地,设 X、(X,Y)是已知其分布的随机变量,$g(x)$ 和 $G(x,y)$ 是连续函数,则 X、(X,Y)的函数 $g(X)$ 和 $G(X,Y)$ 也是随机变量. 我们将讨论如何由已知随机变量的分布去求它的函数的分布.

一、离散型随机变量的函数及其分布律

离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i\quad(i=1,2,\cdots),$$

若它的函数 $Y=g(X)$ 仍是离散型随机变量,则其分布律为

$$P\{Y=y_j\}=P\{g(X)=y_j\}=\sum_{x_i\in S_j}P\{X=x_i\}\quad(j=1,2,\cdots),\tag{3.4.1}$$

其中 $S_j=\{x_i:g(x_i)=y_j\}$.

例 3.4.1　设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$
$P\{X=x_i\}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

试求:(1) $X-1$ 的分布律;(2) X^2 的分布律.

解 (1) 设 $Y=X-1$ 的取值为 y_i,则 $x_i=y_i+1$,

$$P\{Y=y_i\}=P\{X-1=y_i\}=P\{X=y_i+1\}=P\{X=x_i\},$$

故 $X-1$ 的分布律为

$X-1$	-2	-1	0	1	$\frac{3}{2}$
$P\{X-1=y_j\}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

(2) X^2 的可能取值有 $0,1,4,\frac{25}{4}$,而且

$$P\{X^2=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{10}, \qquad P\{X^2=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10},$$

$$P\{X^2=4\}=P\{X=2\}=\frac{1}{10}, \quad P\left\{X^2=\frac{25}{4}\right\}=P\left\{X=\frac{5}{2}\right\}=\frac{3}{10},$$

故 X^2 的分布律为

X^2	0	1	4	$\frac{25}{4}$
$P\{X^2=y_j\}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

设离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots),$$

(X,Y) 的函数 $Z=G(X,Y)$ 仍是离散型随机变量,其分布律为

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{(x_i,y_j)\in T_k}P\{X=x_i,Y=y_j\} \quad (k=1,2,\cdots),$$

其中

$$T_k=\{(x_i,y_j):\ G(x_i,y_j)=z_k\}. \tag{3.4.2}$$

例 3.4.2 设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	2
-1	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

1	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	0

试求:(1) $X-Y$ 的分布律;(2) $\max(X,Y)$ 的分布律.

解 (1) $X-Y$ 的可能取值有 $-2,-1,0,1,3$,

$P\{X-Y=-2\}=P\{X=-1,Y=1\}=\frac{1}{15}$, $P\{X-Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{15}$,

$P\{X-Y=0\}=P\{X=-1,Y=-1\}=\frac{4}{15}$, $P\{X-Y=1\}=P\{X=0,Y=-1\}=\frac{1}{3}$,

$P\{X-Y=3\}=P\{X=2,Y=-1\}=\frac{1}{5}$.

得到 $X-Y$ 的分布律为

$X-Y$	-2	-1	0	1	3
$P\{X-Y=z_k\}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

(2) $\max(X,Y)$ 的可能取值有 $-1,0,2,1$.

$P\{\max(X,Y)=-1\}=P\{X=-1,Y=-1\}=\frac{4}{15}$, $P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=-1\}=\frac{1}{3}$,

$P\{\max(X,Y)=1\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$,

$P\{\max(X,Y)=2\}=P\{X=2,Y=-1\}=\frac{1}{5}$.

$\max(X,Y)$ 的分布律为

$\max(X,Y)$	-1	0	1	2
$P\{\max(X,Y)=z_k\}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

定理 3.4.1 设离散型随机变量 X 和 Y 相互独立,其分布律分别为

$$P\{X=k\}=p(k)\quad(k=0,1,2,\cdots),$$
$$P\{Y=r\}=q(r)\quad(r=0,1,2,\cdots),$$

则它们的和 $X+Y$ 的分布律为

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=0}^{m}p(k)q(m-k)\quad(m=0,1,2,\cdots).\tag{3.4.3}$$

例 3.4.3 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim P(\lambda_1)$,$Y\sim P(\lambda_2)$,求 $X+Y$ 的分布律.

解　由公式(3.4.3)

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=0}^{m}P\{X=k\}P\{Y=m-k\}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_1^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{m-k}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\quad(m=0,1,2,\cdots),$$

推证过程中用到二项式定理.

$X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布,即两个相互独立的泊松分布随机变量之和仍服从泊松分布,而且其参数为相应的参数之和.称泊松分布具有可加性(再生性).

利用式(3.4.3),类似地可证得二项分布也具有可加性:$X\sim B(n_1,p)$,$Y\sim B(n_2,p)$,而且X,Y相互独立,则它们的和$X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$.

可以归纳地证出:若$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立,且$X_i\sim B(1,p)$,则

$$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim B(n,p).$$

换言之,若随机变量$Y\sim B(n,p)$,则Y可以表示成为n个相互独立的(0-1)分布随机变量之和.

二、连续型随机变量的函数及其概率密度

这里仅考虑两种情形:

(1) X是连续型随机变量,函数$Y=g(X)$也是连续型随机变量,求其概率密度;

(2) (X,Y)是连续型随机变量,函数$Z=G(X,Y)$是一维连续型随机变量,求其概率密度.

首先介绍求连续型随机变量函数的概率密度的基本方法.

设X的概率密度为$f_X(x)$,则$Y=g(X)$的分布函数为

$$F_Y(x)=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{\{x:g(x)\leqslant y\}}f_X(x)\,\mathrm{d}x,\tag{3.4.4}$$

Y的概率密度为

$$f_Y(x)=\begin{cases}F'_Y(x), & \text{在} f_X(x) \text{的连续点};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设(X,Y)的联合概率密度是$f(x,y)$,则$Z=G(X,Y)$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{G(X,Y)\leqslant z\}=\iint_{\{(x,y):G(x,y)\leqslant z\}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{3.4.5}$$

Z的概率密度为

$$f_Z(x)=\begin{cases}F'_Z(x), & \text{在} f_Z(z) \text{的连续点};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.4.4 已知随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=|X|$ 的概率密度.

解 Y 的分布函数是

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{|X|\leqslant y\}=\begin{cases}P\{-y\leqslant Y\leqslant y\}, & y\geqslant 0;\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^y e^{-x}\mathrm{d}x, & y\geqslant 0;\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

从而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\left[\int_0^y e^{-x}\mathrm{d}x\right]'_y,\\ 0,\end{cases}=\begin{cases}e^{-y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

例 3.4.5 对一个圆片的直径进行测量,测量结果 $X\sim U(5,6)$,求圆片面积 Y 的概率密度.

解 圆片面积 $Y=\pi\left(\dfrac{X}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{4}X^2$,当 $y>0$,得 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\left\{\frac{\pi}{4}X^2\leqslant y\right\}=P\left\{X^2\leqslant\frac{4}{\pi}y\right\}=P\left\{-\sqrt{\frac{4}{\pi}y}\leqslant Y\leqslant\sqrt{\frac{4}{\pi}y}\right\},$$

由于 $X\sim U(5,6)$,且 Y 的可能取值范围是 $\left(\dfrac{25}{4}\pi,9\pi\right)$,故

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<\dfrac{25}{4}\pi;\\ \sqrt{\dfrac{4}{\pi}y}-5, & \dfrac{25}{4}\pi<y<9\pi;\\ 1, & 9\pi\leqslant y.\end{cases}$$

从而

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi y}}, & \dfrac{25}{4}\pi<y<9\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.4.6 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(0,1)$,求点 (X,Y) 与点 O 的距离 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度.

解 当 $z<0$,$F_Z(z)=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z\}=0$;

当 $z \geqslant 0$, $F_Z(z) = P\{\sqrt{X^2+Y^2} \leqslant z\} = \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z} \frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}},$$

综合得

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, & z \geqslant 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

从而

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}, & z \geqslant 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

利用上述求随机变量函数的分布函数的方法,可以证明下述定理.

定理 3.4.2　设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, $-\infty < x < +\infty$,又设函数 $y = g(x)$ 处处可导而且恒有 $g'(x) > 0$(或恒有 $g'(x) < 0$),则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量,其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{3.4.6}$$

其中 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$, $x = h(y)$ 是 $y = g(x)$ 的反函数.

证　设 $g'(x) > 0$,由反函数存在定理知,$y = g(x)$ 的反函数 $x = h(y)$ 存在并处处可导,在 (α, β) 上单调增加,有 $h'(y) > 0$.

因 $y = g(x)$ 在 (α, β) 内取值,当 $y < \alpha$, $F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = 0$;

当 $y \geqslant \beta$ 时, $F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = 1$;

当 $\alpha \leqslant y < \beta$ 时,

$$F_Y(y) = P\{g(X) \leqslant y\} = P\{X \leqslant h(y)\} = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)\mathrm{d}x.$$

得到 Y 的概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,h'(y), & \alpha < y < \beta; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

类似地可以证明,当 $g'(x) < 0$ 时有

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,[-h'(y)], & \alpha < y < \beta; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注意到此时 $h'(y) < 0$,将两式合并证得公式(3.4.6).

例 3.4.7　设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,证明 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \neq 0)$ 也服从正态分布.

证 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\quad(-\infty<x<+\infty),$$

令 $y=g(x)=ax+b$,其反函数是

$$x=h(y)=\frac{y-b}{a},\quad h'(y)=\frac{1}{a},$$

由式(3.4.6)知 $Y=aX+b$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|}\exp\left\{-\frac{[y-(b+a\mu)]^2}{2(a\sigma)^2}\right\}\quad(-\infty<y<+\infty).$$

正态随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,其线性函数 $Y=aX+b\ (a\neq0)$ 也服从正态分布,而且 $Y\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$.

特别取 $a=\frac{1}{\sigma}$,$b=-\frac{\mu}{\sigma}$,有 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$.

例 3.4.8 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{81}, & -3<x<6;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求随机变量 $Y=\frac{1}{3}(12-X)$ 的概率密度.

解 令 $y=g(x)=\frac{1}{3}(12-x)$,它是单调减小函数,其反函数为 $x=h(y)=3(4-y)$,有 $h'(y)=-3$,当 $x=-3$,$y=g(-3)=5$ 当 $x=6$,$y=g(6)=2$,代入式(3.4.6),得

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & 2<y<5;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}3\times\frac{(12-3y)^2}{81}, & 2<y<5;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{(4-y)^2}{3}, & 2<y<5;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

应用公式(3.4.6)时,必须仔细验证是否满足条件"函数 $y=g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$(或恒有 $g'(x)<0$)".这是比较强的条件,有许多函数不满足此条件,可考虑采用先求分布函数的基本方法.

三、几种特殊函数的分布

下面讨论几种特殊函数的分布问题.

1. **极值分布**

最大值与最小值的分布称为极值分布.

设随机变量 X 与 Y 相互独立,已知其分布函数分别为 $F_X(x)$,$F_Y(y)$,则最大值 $Z_1=\max(X,Y)$ 和最小值 $Z_2=\min(X,Y)$ 的分布函数分别为

$$\begin{aligned}F_{Z_1}(z)&=P\{\max(X,Y)\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}\\&=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}=F_X(z)F_Y(z),\quad z\in\mathbf{R}.\end{aligned}\tag{3.4.7}$$

$$\begin{aligned}F_{Z_2}(z)&=P\{\min(X,Y)\leqslant z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}=1-P\{X>z,Y>z\}\\&=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}=1-[1-P\{X\leqslant z\}][1-P\{Y\leqslant z\}]\\&=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)],\quad z\in\mathbf{R}.\end{aligned}\tag{3.4.8}$$

例 3.4.9　设系统 L 由两个独立运行的子系统 L_1 和 L_2 连接而成,已知 L_1 的寿命 X 服从参数为 α 的指数分布,L_2 的寿命 Y 服从参数为 β 的指数分布,其中 $\alpha>0,\beta>0,\alpha\neq\beta$. 现假设连接方式为(1)并联;(2)串联. 试写出这两种连接方式下 L 的寿命 Z 的概率密度.

解　(1)并联. 由于当且仅当 L_1 和 L_2 同时损坏时,系统 L 才停止工作,所以 L 的寿命为 $Z=\max(X,Y)$. 将

$$F_X(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\alpha z}, & z>0;\\0, & z\leqslant 0.\end{cases}\quad \text{和}\quad F_Y(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\beta z}, & z>0;\\0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

代入式(3.4.7),得

$$F_{Z_1}(z)=P\{\max(X,Y)\leqslant z\}=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\alpha z})(1-\mathrm{e}^{-\beta z}), & z>0;\\0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\alpha\mathrm{e}^{-\alpha z}+\beta\mathrm{e}^{-\beta z}-(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0;\\0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

(2)串联. L_1、L_2 中有一个损坏时,系统停止工作,所以 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$,根据式(3.4.8),得

$$F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0;\\0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

从而

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0;\\0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

即 $Z=\min(X,Y)$ 服从参数为 $\alpha+\beta$ 的指数分布.

2. **和的分布**

设(X,Y)的联合概率密度是$f(x,y)$,则和 $Z=X+Y$ 的分布函数是

$$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

积分区域如图 3.8 所示,是位于直线 $x+y=z$ 的左下方的半平面,将其化成累次积分

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

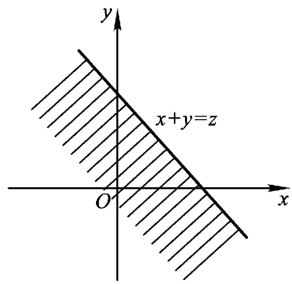


图 3.8

固定 z 与 y,令 $x=u-y$,则

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

于是 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y. \tag{3.4.9}$$

由 X 与 Y 的对称性,又得

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.4.10}$$

例 3.4.10 在例 3.4.9 中,将 L 系统中的子系统 L_1 作为 L_2 的备用系统(即当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 立即开始工作),求 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 L 的寿命是系统 L_1 和系统 L_2 的寿命之和,即 $Z=X+Y$. 按照公式(3.4.9),注意到 X 和 Y 相互独立,当 $z>0$ 时,$Z=X+Y$ 的概率密度是

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^z \alpha\mathrm{e}^{-\alpha(z-y)}\beta\mathrm{e}^{-\beta y}\,\mathrm{d}y=\alpha\beta\mathrm{e}^{-\alpha z}\int_0^z \mathrm{e}^{-(\beta-\alpha)y}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha z}-\mathrm{e}^{-\beta z}).\end{aligned}$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$f_Z(z)=0$，从而

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha z}-\mathrm{e}^{-\beta z}], & z>0;\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

例 3.4.11　设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解　由公式(3.4.10)，并因 X 与 Y 相互独立，故有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

令 $t=x-\dfrac{z}{2}$，

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}},\quad z\in\mathbf{R}.$$

即 $Z\sim N(0,2)$.

一般地，若 X 与 Y 相互独立，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，则 $X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，即正态分布具有可加性.

利用有关公式求随机变量的函数的概率密度时，计算上的困难是定积分的限. 对以下的例子，我们借助于作图使求解过程变得更清晰.

例 3.4.12　设随机变量 X 与 Y 相互独立，并且都在 $[-a,a]$ 上服从均匀分布. 求它们的和 $X+Y$ 的概率密度.

解　X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |x|\leqslant a;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |y|\leqslant a;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

利用公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x.$$

考虑 xOz 平面的子域：$G=\{(x,z):\ |x|\leqslant a,|z-x|\leqslant a\}$，

则

$$f(x)f(z-x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4a^2}, & (x,z)\in G;\\ 0, & (x,z)\notin G.\end{cases}$$

如图 3.9 所示，G 是一个平行四边形区域，于是

当 $0\leqslant z\leqslant 2a$ 时，

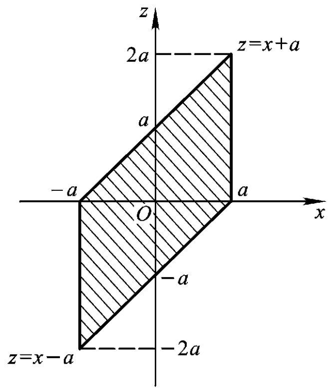


图 3.9

$$f_Z(z)=\frac{1}{4a^2}\int_{z-a}^{a}\mathrm{d}x=\frac{2a-z}{4a^2};$$

当 $-2a\leqslant z<0$ 时,

$$f_Z(z)=\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{z+a}\mathrm{d}x=\frac{2a+z}{4a^2};$$

当 $|z|>2a$ 时,$f_Z(z)=0$.

综合以上结果得到 $Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2a+z}{4a^2}, & -2a\leqslant z<0;\\ \dfrac{2a-z}{4a^2}, & 0\leqslant z\leqslant 2a;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

称 Z 服从辛普森分布或三角分布.

3. 商的分布

设 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$,则它们商 $Z=X/Y$ 的分布函数是

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=\iint\limits_{x/y\leqslant z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{G_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{G_2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

积分区域 G_1、G_2 如图 3.10 所示,将其化为二次积分得

$$\iint\limits_{G_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{yz}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

固定 z,y,令 $u=x/y$(注意 $y>0$),则 $x=uy$,$\mathrm{d}x=y\mathrm{d}u$,得

$$\iint\limits_{G_1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}yf(uy,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_0^{+\infty}yf(uy,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u.$$

类似地,

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

令 $u=x/y$（注意现有 $y<0$），有

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{z}^{-\infty} yf(uy,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y$$

$$= -\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{0} yf(uy,y)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}y,$$

故有

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z\leqslant z\} \\ &= \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{0}^{+\infty} yf(uy,y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} yf(uy,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

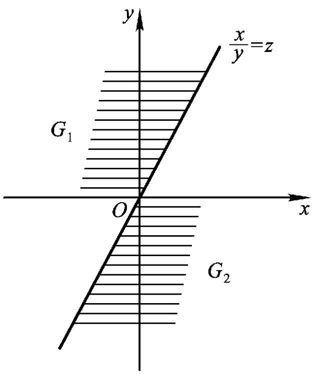


图 3.10

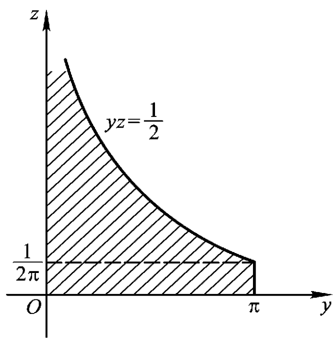


图 3.11

根据连续型随机变量的定义，即可得到 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{0}^{+\infty} yf(zy,y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} yf(zy,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy,y)\,\mathrm{d}y. \tag{3.4.11}$$

例 3.4.13　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin y, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2},0\leqslant y\leqslant \pi; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z=X/Y$ 的概率密度.

解　令 $G=\left\{(z,y):\ 0\leqslant y\leqslant \pi,0\leqslant zy\leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$，则

$$|y|f(zy,y) = \begin{cases} y\sin y, & (z,y)\in G; \\ 0, & (z,y)\notin G. \end{cases}$$

区域 G 如图 3.11 所示，有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}yf(zy,y)\,\mathrm{d}y.$$

当 $0\leqslant z\leqslant\frac{1}{2\pi}$，　$f_Z(z)=\int_0^{\pi}y\sin y\,\mathrm{d}y=\pi$；

当 $\frac{1}{2\pi}<z$，　$f_Z(z)=\int_0^{\frac{1}{2z}}y\sin y\,\mathrm{d}y=\sin\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z}\cos\frac{1}{2z}$；

当 $z<0$，　$f_Z(z)=0.$

综上可得

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \pi, & 0\leqslant z\leqslant\frac{1}{2\pi};\\ \sin\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z}\cos\frac{1}{2z}, & \frac{1}{2\pi}<z.\end{cases}$$

§3.5 应用实例

一、强干扰背景下微弱信号的提取

经过传输的信号往往会受到各种随机干扰，而且有时干扰信号的能量远远强于传输信号的能量，达到数十倍，甚至上万倍. 如何在强干扰背景下提取微弱信号，已是一门专门的理论——信号检测理论，这里考虑一种简单的情形.

设 s 是已知的非随机确定信号，n 是随机干扰信号，经过传输通路以后，在接收端收到的信号为

$$X=n+s,\tag{3.5.1}$$

同步累积法是从 X 中提取微弱信号 s 的一种简单有效的方法.

可将干扰信号 n 看成服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量，其中 σ^2 代表干扰信号的平均功率，n 的线性函数 $X=n+s$ 也服从正态分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2}\right],\qquad x\in\mathbf{R},$$

假设每间隔一段时间重复发一次信号，则可以收到一个信号序列：

$$X_k=n_k+s,\qquad k=1,2,\cdots,m\tag{3.5.2}$$

并假定每次发信号的时间间隔足够大，使 $\{X_k\}$，$k=1,2,\cdots,m$ 可看成相互独立的，同服从正态分布 $N(s,\sigma^2)$ 的随机变量. 将它们叠加起来，令

$$Y=\sum_{k=1}^{m}X_k,$$

则 Y 仍服从正态分布 $N(ms, m\sigma^2)$，式中 ms 代表 m 次叠加后的有用信号的电平，而 $m\sigma^2$ 代表了累加后干扰的平均功率.

用 $\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2$ 表示 X_s 的信噪比（信号噪声比），则累加后的信噪比变为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_m^2 = \left(\frac{ms}{\sqrt{m}\sigma}\right)^2 = m\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2.$$

累积前后信噪比的改善为

$$SNR = 10\lg\frac{(S/N)_m^2}{(s/\sigma)^2} = 10\lg m. \tag{3.5.3}$$

这样，随着 m 的增大就可以识别出信号 s 来.

历史上，曾用这种简单的方法实现了回收从月球反射回来的微弱无线电信号. 近年来，生理科学中关于大脑电生理的研究中，常采用这一种方法提取十分微弱的脑电信息.

二、随机变量的模拟

随着计算机应用的日益广泛，计算机模拟技术的使用是继理论分析法、科学试验法之后发展起来的又一有效科研方法，这是因为现实研究对象的内部机理复杂，受众多因素的影响，特别是随机因素的影响. 借助于计算机对现实对象的模拟，使科研范畴更为广泛和深入.

对具有某种分布的随机变量进行模拟是计算机模拟的基础工作. 在现有计算机软硬设置或数学软件中有产生 $(0,1)$ 区间均匀分布随机数（RND）的功能，我们可以将其变换为具有特定分布的随机数，一串随机数 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可看成具有相同分布的简单随机样本的样本值（参见第 6 章）.

对于连续型随机变量可采用反函数法进行模拟.

设随机变量 Y 的分布函数 $F(y)$ 连续且严格单调增加，而随机变量 X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，令 $Z = F^{-1}(X)$，则，Z 与 Y 有相同分布，因

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{F^{-1}(X) \leqslant z\} = P\{X \leqslant F(z)\} = G(F(z)) = F(z).$$

其中，$G(x)$ 是随机变量 X 的分布函数：

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & 1 \leqslant x. \end{cases}$$

若已知 Y 的概率密度为 $f(y)$，由 $Y = F^{-1}(X)$ 可得

$$X = F(Y) = \int_{-\infty}^{Y} f(y)\,\mathrm{d}y, \tag{3.5.4}$$

因此对于 $(0,1)$ 上均匀分布随机数 r_i，则具有给定分布的随机数 y_i 可由方程

$$r_i = \int_{-\infty}^{y_i} f(y)\,\mathrm{d}y \tag{3.5.5}$$

解出.

例 3.5.1 模拟服从参数为 λ 的指数分布的随机数.

解 若 Y 服从参数为 λ 的指数分布，其概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}, & y > 0; \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

代入式(3.5.5)，有

$$r_i = \int_0^{y_i} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y_i},$$

解得

$$y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i),$$

因为$(1 - r_i)$和 r_i同为$(0,1)$上的均匀分布随机数，故上式可简化为

$$y_i = -\frac{1}{\lambda}\ln r_i. \tag{3.5.6}$$

工程上常用来模拟元件寿命等随机变量.

例 3.5.2 模拟概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 0.5\sin x, & 0 < x < \pi; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

的随机数.

解 令 $r_i = \int_0^{x_i} 0.5\sin x\,\mathrm{d}x$，得 $r_i = 0.5(1 - \cos x_i)$，从而

$$x_i = \arccos(1 - 2r_i).$$

反函数法是一种普通的方法，我们还可以采用舍选法等其他方法. 根据概率论知识，也能对离散型随机变量进行模拟.

习　题　三

1. 二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数是

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right),\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

试求：(1) 系数 A、B、C；(2) 边缘分布函数.

2. 将两个元件并联组成一个电子部件，两个元件的寿命分别为 X 与 Y（单位：小时），已知 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-0.01x}-\mathrm{e}^{-0.01y}+\mathrm{e}^{-0.01(x+y)}, & x\geqslant 0,y\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：(1) 关于 X、Y 的边缘分布函数；(2) 此电子部件正常工作 120 小时以上的概率.

3. 对一个目标独立地射击两次，每次命中的概率为 1/2，若 X 表示第一次射击时的命中次数，Y 表示为第二次射击时的命中次数，试求 X 和 Y 的联合分布律以及联合分布函数.

4. 一个袋子中装有 4 个球，依次标有数字 1，2，2，3，从中任意取出 1 个后（不放回），记下球上标的数字 X，再取出 1 个球，记下其上的数字 Y. 试写出 (X,Y) 的联合分布律和关于 X、Y 的边缘分布律.

5. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律如下：

X \ Y	0	1	2	3	4
0	0.08	0.07	0.06	0.01	0.01
1	0.06	0.10	0.12	0.05	0.02
2	0.05	0.06	0.09	0.04	0.03
3	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04

计算以下概率：

(1) $P\{X=2\}$；　(2) $P\{X\leqslant 2,Y\leqslant 2\}$；　(3) $P\{Y\geqslant 2\}$；

(4) $P\{X=Y\}$；　(5) $P\{X>Y\}$.

6. 二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cx^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

确定常数 C 并计算概率 $P\{X\geqslant Y\}$；

7. 设二元函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin x\cos y, & 0\leqslant x\leqslant \pi,C\leqslant y\leqslant \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

问 C 取何值时，$f(x,y)$ 是二维随机变量的概率密度？

8. 随机变量 (X,Y) 的联合概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}C(x^2+y), & 0\leqslant y\leqslant 1-x^2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：(1) 常数 C；(2) $P\left\{0<X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$；(3) $P\{X=Y^2\}$.

9. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12\mathrm{e}^{-(3x+4y)}, & 0<x,0<y;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：(1) $P\{0<X\leqslant 1,0<Y<2\}$；(2) (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$.

10. 设甲船在 24 小时内随机到达码头，并停留 2 小时；乙船也在 24 小时内独立地随机到达，并停留 1 小时，试求：

(1) 甲船先到达的概率 p_1；(2) 两船相遇的概率 p_2.

11. 两个人约定在下午 1 时到 2 时之间的任何时刻到达某车站乘公共汽车，并且分别独立到达车站. 这段时间内有 4 班公共汽车，它们的开车时间分别为 1:15，1:30，1:45，2:00，如果他们约定：(1) 见车就上；(2) 最多等一辆车. 求在两种情形他们同乘一辆车的概率分别是多少？

12. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;0)$，计算概率 $P\{X^2+Y^2<r\}$，其中 $r>0$.

13. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Cxy^2, & 0<x<1,0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

确定常数 C，并讨论 X 与 Y 是否相互独立.

14. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度如下，问 X 与 Y 是否相互独立？

(1) $f(x,y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}\dfrac{1}{(1+x)^2}, & 0<x,0<y;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

15. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

问 α 和 β 取什么值时，X 与 Y 相互独立？

16. 某射手进行射击，击中目标两次就停止射击，而且每一次的命中率为 $p(0<p<1)$. 令 X 表示第一次命中目标时的射击次数，令 Y 表示第二次命中目标时的射击次数，试求：

(1) Y 的分布律；(2) 条件分布律 $P\{X=i\mid Y=j\}$ 和 $P\{Y=j\mid X=i\}$.

17. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant 3;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$.

18. 设随机变量 Y 服从指数分布,其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}\quad(\lambda>0)$$

而且随机变量 X 关于 Y 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}y\mathrm{e}^{-xy}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\quad(y>0)$$

求 X 的概率密度.

19. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\quad(\lambda_1>0),$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}\quad(\lambda_2>0),$$

令随机变量

$$Z=\begin{cases}1, & X\leqslant Y;\\ 0, & X>Y.\end{cases}$$

试求:(1) 条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$;(2) 随机变量 Z 的分布律和分布函数.

20. 已知离散型随机变量 X 的分布律为

X	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$P\{X=x_i\}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

试求 $Y=\dfrac{2}{3}X+2$ 和 $Z=\cos X$ 的分布律.

21. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 $X\sim B(n_1,p)$,$Y\sim B(n_2,p)$,证明:$Z=X+Y$ 服从参数为 n_1+n_2,p 的二项分布.

22. 设 X 与 Y 是相互独立同分布的随机变量,其分布律为

$$P\{X=n\}=P\{Y=n\}=\frac{1}{2^n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

求 $Z=X+Y$ 的分布律.

23. 科学家观察某个放射物的情况,发现在(0,7.5)(单位:秒)内放射出的 α - 质点个数 $X\sim P(3.87)$. 共做了 2 608 次测试,试求:整个过程中放射出的 α - 质点个数 Y 的分布律.

24. 设二维连续型随机变量$(X,Y)\sim N(0,10;0,10;0)$,计算概率 $P\{X<Y\}$.

25. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right],\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

计算概率 $P\{-\sqrt{2}<X+Y<2\sqrt{2}\}$.

26. 设随机变量 X 是电路的电压振幅,已知其分布函数为 $F_X(x)$. 试求经过半波整流后的电压振幅 $Y=(X+|X|)/2$ 的分布函数. 若假设 $X\sim N(0,1)$,讨论 Y 是否是连续型随机变量.

27. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,写出:(1) $Y=\mathrm{e}^X$;(2) $Y=|X|$的概率密度.

28. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

写出 $Y=1-X^2$ 的概率密度.

29. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X(2-X)$,写出 Y 的分布函数及概率密度.

30. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & 0<x,0<y;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数和概率密度.

31. 已知随机变量 X、Y 相互独立,X 服从参数为 λ 的指数分布,Y 服从区间 $(0,h)$ $(h>0)$ 上的均匀分布,写出 $X+Y$ 的概率密度.

32. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

33. 设随机变量 X 与 Y 相互独立,$X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(0,1)$,求 $Z=X/Y$ 的概率密度.

第 4 章　随机变量的数字特征

随机变量的分布函数完整地描述了随机变量的统计特性，但是对于更一般的随机变量，要确定其分布函数却不容易，并且对于许多实际问题，并不需要确定随机变量的分布函数，只要知道它的某些特征就足够了. 例如，在测量电源电压时，测量结果是一个随机变量，在实际工作中往往用测量电压的平均值来表示电源电压的大小；又如在测试电子元件的寿命指标时，要知道其平均寿命的大小，还要考虑其偏离平均寿命的离散程度. 这些特征可以用数字来表示.

随机变量的数字特征及其有关运算，在概率论与数理统计中有着重要作用.

§4.1　数学期望

一、随机变量的数学期望

先分析一个简单的例子.

某射手进行实弹射击，每次射击的命中环数是随机变量 X，现在他进行了 100 次射击，结果如下：

命中环数 x_i	10	9	8	7	6	5
频数 μ_i	20	30	15	10	15	10

应如何评价他的射击水平呢？计算各次射击结果的算术平均为

$$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{6} x_i\mu_i = \sum_{i=1}^{6} x_i\frac{\mu_i}{100}$$
$$=10\times0.2+9\times0.3+8\times0.15+7\times0.1+6\times0.15+5\times0.1=8\text{（环）}.$$

注意式子中的$\frac{\mu_i}{100}$是随机事件 $\{X=x_i\}$ 发生的频率，我们已经知道随机事件的频率具有稳定性. 在第 5 章将介绍的极限定理中有：当 n 很大时，频率$\frac{\mu_i}{n}$接近于事件发生的概率 $P\{X=x_i\}=p_i$，从而 $\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\mu_i}{n}$稳定于 $\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$. 称 $\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$是随机变量 X 的数学期望或均值，有下述定义.

定义 4.1.1　设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i \quad (i=1,2,\cdots),$$

若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i<+\infty$,则称

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i \tag{4.1.1}$$

为随机变量 X 的数学期望或均值.

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,若 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,dx<+\infty$,则称

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx \tag{4.1.2}$$

为随机变量 X 的数学期望或均值.

例 4.1.1 一台机器生产某种产品,这类产品中一等品的利润是 5 元,二等品的利润是 4 元,而生产出一件次品则亏损 2 元,已知这台机器生产出一等品、二等品和次品的概率分别是 0.6、0.3 和 0.1,试求:每件产品的平均利润.

解 以 X 表示每件产品的利润(单位:元),则 X 的分布律如下

X	-2	4	5
$P\{X=x_i\}$	0.1	0.3	0.6

每件产品的平均利润即 $E(X)$,由公式(4.1.1)可得

$$E(X)=(-2)\times0.1+4\times0.3+5\times0.6=4(\text{元}).$$

例 4.1.2 设随机变量 X 的分布律为

$$P\left\{X=(-1)^k\frac{2^k}{k}\right\}=\frac{1}{2^k} \quad (k=1,2,\cdots),$$

有
$$\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k}{k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}=-\ln 2,$$

但是 X 的数学期望不存在,因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k|x_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty.$$

例 4.1.3 设随机变量 X 服从辛普森分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x<0;\\ 1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求:数学期望 $E(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)\,dx+\int_{0}^{1}x(1-x)\,dx$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=0.$$

实际上,注意到 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的偶函数,从而 $xf(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的奇函数,立即可知 $E(X)=0$.

例 4.1.4　设随机变量 X 服从柯西分布,其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

X 的数学期望不存在,因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{+\infty}\to+\infty.$$

二、随机变量的函数的数学期望

工程应用中经常需要计算随机变量的函数的数学期望.

例 4.1.5　由自动生产线加工的某种零件的内径为 X(单位:m),内径小于 10 或大于 12 的为不合格品,其余是合格品. 已知 $X\sim N(11,1)$,并且销售利润 T(单位:元)与零件内径 X 有以下关系:

$$T=\begin{cases}-1 & X<10;\\ 20, & 10\leqslant X\leqslant 12;\\ -5, & X>12.\end{cases}$$

试求销售一个零件的平均利润.

解　利润 T 是内径 X 的函数,可求得 T 的分布律为

T	-1	20	-5
$P\{T=t_i\}$	$P\{X<10\}$	$P\{10\leqslant X\leqslant 12\}$	$P\{X>12\}$

从而平均利润为

$$\begin{aligned}E(T)&=\sum_{i=1}^{3}t_iP\{T=t_i\}=20P\{10\leqslant X\leqslant 12\}-P\{X<10\}-5P\{X>12\}\\&=20[\Phi(12-11)-\Phi(10-11)]-\Phi(10-11)-5[1-\Phi(12-11)]\\&=25\Phi(1)-21\Phi(-1)-5=46\Phi(1)-26=46\times0.841\,3-26\approx12.7(\text{元}).\end{aligned}$$

一般的情形,可以利用下面的定理来确定随机变量的函数的数学期望.

定理 4.1.1　设 Y 是随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$($g(x)$ 是连续函数),

(1) 若 X 是离散型随机变量,其分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i\quad(i=1,2,\cdots),$$

如果 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$ 绝对收敛,则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i. \tag{4.1.3}$$

(2) 若 X 是连续型随机变量,其概率密度是 $f_X(x)$,如果

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|f_X(x)\,\mathrm{d}x<+\infty,$$

则

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1.4}$$

例 4.1.6 已知随机变量 X 的分布律为

X	0	1	2	3
$P\{X=k\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

试求 数学期望 $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

解 $E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{1}{1+0}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{1+1}\times\frac{1}{2^2}+\frac{1}{1+2}\times\frac{1}{2^3}+\frac{1}{1+3}\times\frac{1}{2^3}=\frac{67}{96}.$

例 4.1.7 已知球的直径 $D\sim U(a,b)$,试求 球的体积 $V=\frac{1}{6}\pi D^3$ 的数学期望.

解 由公式(4.1.4)可得

$$E(V)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{6}y^3f_D(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{\pi}{6}y^3\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{24}\cdot\frac{1}{b-a}(b^4-a^4).$$

利用定理 4.1.1,可不必求出随机变量函数 $Y=g(X)$ 的分布(分布律或概率密度),直接利用随机变量 X 的已知分布即可.

定理也可以推广到多个随机变量的情形.

定理 4.1.2 设 (X,Y) 是二维随机变量,$Z=G(X,Y)$ 也是随机变量.

(1) 若 (X,Y) 是离散型随机变量,其联合分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\quad(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots),$$

则当 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|G(x_i,y_j)|p_{i,j}<+\infty$ 时,

$$E(Z)=E[G(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}G(x_i,y_j)p_{i,j}; \tag{4.1.5}$$

(2) 若 (X,Y) 是连续型随机变量,其联合概率密度为 $f(x,y)$,则当

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|G(x,y)|f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty,$$

有

$$E(Z)=E[G(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{4.1.6}$$

例 4.1.8 设平方检波器的输入噪声信号为

$$N(t)=X\cos t-Y\sin t,$$

试求噪声 $N(t)$ 的振幅 $A=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的数学期望，其中 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$.

解　(X,Y) 的联合概率密度是

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2}\right],\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

由公式(4.1.6)

$$E(A)=E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{x^2+y^2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

例 4.1.9　二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：(1) $E(X)$；(2) $E(X+Y)$；(3) $E(XY)$.

解　$E(X)=\int_0^1\int_0^1 x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{7}{12}$；$E(X+Y)=\int_0^1\int_0^1(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{7}{6}$；

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

例 4.1.10　在长为 l 的线段上任意选取两点，试求两点间的平均距离.

解　设两点的坐标分别为随机变量 X、Y，则它们相互独立，都在 $(0,l)$ 上服从均匀分布，故 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{l^2}, & 0\leqslant x\leqslant l,0\leqslant y\leqslant l;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

两点间的距离为 $Z=|X-Y|$，其平均距离为

$$E(Z)=E[|X-Y|]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^l\mathrm{d}x\int_0^x(x-y)\frac{1}{l^2}\mathrm{d}y+\int_0^l\mathrm{d}y\int_0^y(y-x)\frac{1}{l^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{l^2}\int_0^l\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\frac{l}{3}.$$

例 4.1.11　设 $X(n)=\sin nW$，$X(m)=\sin mW$，式中 W 是 $[0,2\pi]$ 上均匀分布的随机变量，试求 $E(X(n))$ 和 $E(X(n)X(m))$.

解　$E(X(n))=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nw\mathrm{d}w=0$，

$$
\begin{aligned}
E(X(n)X(m)) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin mw \sin nw \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\cos(n-m)w - \cos(n+m)w]\mathrm{d}w \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}, & m=n; \\ 0, & m\neq n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

三、数学期望的性质

随机变量的数学期望具有以下重要性质(下面所论及的随机变量的数学期望都存在):

(1) 设 C 是常数,则有 $E(C)=C$;

(2) 设 X 是随机变量,C 是常数,则 $E(CX)=CE(X)$;

(3) 设 X、Y 是两个随机变量,则有 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$;

(4) 设 X、Y 是相互独立的随机变量,则有 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

证　请读者证明性质(1)与(2),对性质(3)及(4)仅证明离散型的情形. 由公式(4.1.1)

$$
\begin{aligned}
E(X+Y) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i+y_j)p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_ip_{ij} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}y_jp_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}x_i\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij} + \sum_{j=1}^{\infty}y_j\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}x_ip_{i\cdot} + \sum_{j=1}^{\infty}y_jp_{\cdot j} = E(X)+E(Y).
\end{aligned}
$$

若 X 与 Y 相互独立,有 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$　$(i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$,故有

$$
E(XY) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i\cdot y_jp_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_i\cdot y_jp_{i\cdot}p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty}x_ip_{i\cdot}\sum_{j=1}^{\infty}y_jp_{\cdot j} = E(X)E(Y).
$$

性质(3)可以推广到任意有限个随机变量之和的情况.

$$
E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}E(X_i). \tag{4.1.7}
$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,则有

$$
E\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right) = \prod_{i=1}^{n}E(X_i). \tag{4.1.8}
$$

例 4.1.12　设随机变量 $X\sim B(n,p)$,试求 $E(X)$.

解　由二项分布的可加性知,X 可以表示为 n 个相互独立(0－1)分布随机变量之和 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$,且

$$
E(X_i)=0\times(1-p)+1\times p=p\quad(i=1,2,\cdots,n),
$$

从而

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np.$$

例 4.1.13　抛一枚均匀硬币直到出现 k 次正面为止，试求抛掷次数 X 的数学期望.

解　令 X_i 表示出现第 $i-1$ 次正面以后，到出现第 i 次正面的抛掷次数，则

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_k,$$

而且

X_i	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$
$P\{X_i=m\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2^m}$	$\cdots$

$$E(X_i)=\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}mx^{m-1}\right]_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}x^m\right]'_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1-x}\right]'_{x=\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}=2,$$

从而

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_k)=2k.$$

§4.2　随机变量的方差

数学期望刻画了随机变量取值的“平均数”，我们还需要了解随机变量取值的离散程度. 先看下面的例子.

例 4.2.1　甲、乙两名射手射击一次所得分数分别是随机变量 X 和 Y，其分布律分别如下：

X	0	1	2	3	4
$P\{X=x_k\}$	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2

Y	0	1	2	3	4
$P\{Y=y_j\}$	0.1	0.1	0.3	0.3	0.2

问哪一位射手的技术水平更高一些？

解　首先对他们的平均得分进行分析，有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{4}kP\{X=k\}=0\times0.1+1\times0.1+2\times0.2+3\times0.4+4\times0.2=2.5(\text{分})；$$

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{4}jP\{Y=j\}=0\times0.1+1\times0.1+2\times0.3+3\times0.3+4\times0.2=2.4(\text{分}).$$

运算结果表明，从平均得分这个角度来看，甲射手的射击水平略胜一筹. 另外，我们还关心他们每射击一次的得分与平均得分的偏离程度，作如下运算：

$$E\{[X-E(X)]^2\}=\sum_{k=0}^{4}[k-2.5]^2P\{X=k\}=1.45,$$

$$E\{[Y-E(Y)]^2\}=\sum_{j=0}^{4}[j-2.4]^2P\{Y=j\}=1.44,$$

结果表明，乙射手的技术水平要比甲射手的技术水平更稳定.

定义 4.2.1　设 X 是随机变量，若 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 存在，则称

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\} \tag{4.2.1}$$

为 X 的方差，称 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差（或均方差）.

方差 $D(X)$ 是随机变量 X 的函数的数学期望，当 X 是离散型随机变量，式(4.2.1)的形式为

$$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}[x_i-E(X)]^2P\{X=x_i\}, \tag{4.2.2}$$

当 X 是连续型随机变量，则

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.2.3}$$

方差的常用计算公式为：

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2. \tag{4.2.4}$$

证　$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E\{X^2-2X\cdot E(X)+[E(X)]^2\}$

$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2=E(X^2)-[E(X)]^2.$

例 4.2.2　设随机变量 X 具有(0－1)分布，其分布律为

$$P\{X=0\}=1-p,P\{X=1\}=p\quad(0<p<1),$$

计算方差 $D(X)$.

解　因为　$E(X)=p,E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p,$

故　$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$

例 4.2.3　设随机变量 $X\sim U(0,\pi)$，$Y=\sin X$，试求 $D(Y)$.

解　$E(Y)=E(\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xf_X(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2xf_X(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

故

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2=\frac{\pi^2-8}{2\pi^2}.$$

例 4.2.4　续例 4.1.8，计算平方检波器的输入噪声信号 $N(t)=X\cos t-Y\sin t$ 的振幅 A 的方差.

解　已得到 $E(A)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，

$$E(A^2)=E(X^2+Y^2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^3\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=\int_0^{+\infty}r^3\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\mathrm{d}r=2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=2,$$

故
$$D(A)=E(A^2)-[E(A)]^2=2-\frac{\pi}{2}.$$

根据方差的定义可知，方差只取非负的数值. 可以证明方差有以下重要性质：

(1) 设 C 是常数，则 $D(C)=0$；

(2) 若随机变量 X 的方差存在，C 是常数，有 $D(CX)=C^2D(X)$；

(3) 设随机变量 X 和 Y 的方差存在，有

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\},\quad(4.2.5)$$

又若 X 与 Y 相互独立，则

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y);$$

(4) 随机变量 X 的方差为零的充分必要条件是 X 以概率为 1 取常数 $E(X)$，即

$$D(X)=0\Leftrightarrow P\{X=E(X)\}=1.$$

证　请读者自证性质(1)、(2)及(4)，现证明性质(3).

$$D(X\pm Y)=E\{[(X\pm Y)-E(X\pm Y)]^2\}=E\{[(X-E(X))\pm(Y-E(Y))]^2\}$$
$$=E\{[X-E(X)]^2\}+E\{[Y-E(Y)]^2\}\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\},$$

若 X 与 Y 相互独立，则 $X-E(X)$ 与 $Y-E(Y)$ 也相互独立，根据数学期望的性质，有

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]$$
$$=[E(X)-E(X)][E(Y)-E(Y)]=0,$$

从而

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y).$$

更进一步，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，方差都存在，有

$$D\left(\sum_{i=1}^n C_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n C_i^2D(X_i).\quad(4.2.6)$$

例 4.2.5　随机变量 $X\sim B(n,p)$，求 $D(X)$.

解　二项分布随机变量 X 可以表示为 n 个相互独立(0－1)分布随机变量的和

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

已知 $D(X_i)=p(1-p)$，从而

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)=np(1-p).$$

例 4.2.6　设随机变量 X 的数学期望存在,方差 $D(X)>0$,令

$$X^{*}=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}},$$

则称 X^{*} 为随机变量 X 的标准化随机变量. 试证明:$E(X^{*})=0$,$D(X^{*})=1$.

证

$$E(X^{*})=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right]=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}E[X-E(X)]=0,$$

$$D(X^{*})=D\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right]=\frac{1}{D(X)}D[X-E(X)]=\frac{D(X)}{D(X)}=1.$$

例 4.2.7　在相同条件下对某种零件的长度进行 n 次独立测量,第 k 次的测量结果是随机变量 X_k,且 $E(X_k)=\mu$,$D(X_k)=\sigma^2$,求 n 次测量结果的平均长度$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$的数学期望和方差.

解

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(X_k)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu,$$

由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,故

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(X_k)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2.$$

此例的结果说明测量过程中若无系统测量误差,对零件长度进行 n 次独立测量,将其测量结果取算术平均不会改变测量值的数学期望,但测量产生的偏差随测量次数的增多而减小. 在工程上常采用这种方法提高测量精度.

§4.3　几种常见分布的数学期望和方差

一、二项分布

设随机变量 $X\sim B(n,p)$,由例 4.1.12 和例 4.2.5 已得到

$$E(X)=np,\quad D(X)=np(1-p).\tag{4.3.1}$$

二、泊松分布

随机变量 $X\sim P(\lambda)$,则有 $E(X)=D(X)=\lambda$.

证　X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=\lambda,$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda^2,$$

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda,$$

从而

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

三、均匀分布

随机变量 $X \sim U(a,b)$，则 $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$，$D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

证　$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2),$$

故

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

四、指数分布

随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0; \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

则有 $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$，$D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

证　$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} u e^{-u}du = \frac{1}{\lambda},$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} (\lambda x)^2 e^{-\lambda x}d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u}du$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} u^2 de^{-u} = \frac{2}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} u e^{-u}du = \frac{2}{\lambda^2},$$

故

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

回想例 2.1.6 中电子管的寿命 T 服从参数为 λ 的指数分布，其中参数 λ 为瞬时失效率，现在可知平均寿命 $E(T)$ 恰为失效率的倒数 $\dfrac{1}{\lambda}$.

五、正态分布

设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其概率密度是

$$\varphi(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad -\infty < x < +\infty,$$

则有

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

证 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x;\mu,\sigma)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \qquad \left(\text{其中 } t = \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t + \sigma\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \mu,$$

$$D(X) = E\{[X-E(X)]^2\} = E\{[X-\mu]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \sigma^2.$$

例 4.3.1 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-(x-\mu)/\theta}, & x \geqslant \mu; \\ 0, & x < \mu.\end{cases} \quad (\theta > 0)$$

试求原点矩 $E(X)$ 和 $E(X^2)$.

解 $E(X) = \int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}(y+\mu)\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\mathrm{d}y$ （式中 $y = x-\mu$）

$$= \int_0^{+\infty}\frac{y}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\mathrm{d}y + \mu\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\mathrm{d}y = E(Y) + \mu = \theta + \mu,$$

其中 Y 是服从参数为 $\frac{1}{\theta}$ 的指数分布随机变量.

$$E(X^2) = \int_{\mu}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}(y+\mu)^2\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\mathrm{d}y \quad (\text{式中 } y = x-\mu)$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{y^2}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\mathrm{d}y + \int_0^{+\infty}2y\mu\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\mathrm{d}y + \mu^2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{y}{\theta}}\mathrm{d}y$$

$$= E(Y^2) + 2\mu E(Y) + \mu^2 = 2\theta^2 + 2\mu\theta + \mu^2.$$

§4.4 协方差、相关系数与矩

一、协方差

我们知道多维随机变量的统计规律不仅与每个分量的个别性质有关，还与分量之间的联系有关. 现介绍描述两个随机变量之间关系的数字特征.

定义 4.4.1 若关于随机变量 (X,Y) 的数学期望 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 存在，则称

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \tag{4.4.1}$$

为随机变量 X 与 Y 的协方差.

特别有

$$D(X)=\operatorname{cov}(X,X). \tag{4.4.2}$$

现可将公式(4.2.5)改写为

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y).$$

协方差有下述性质：

(1) 对称性：$\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$；

(2) 齐性：$\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(Y,X)$，$a,b$ 是常数；

(3) 可加性：$\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$.

常利用下述公式

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y). \tag{4.4.3}$$

例 4.4.1 二维随机变量的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求:协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)$.

解 $E(X)=\int_0^1\left(\int_0^x 2x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$， $E(Y)=\int_0^1\left(\int_0^x 2y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，

$$E(XY)=\int_0^1\left(\int_0^x 2xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

故
$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36}.$$

定义 4.4.2 设 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的协方差均存在，称矩阵

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.4.4}$$

为 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的协方差矩阵.

协方差矩阵 $C=(C_{ij})_{n\times n}$满足：

(1) $C_{ii}=D(X_i)$，　$i=1,2,\cdots,n$；

(2) $C_{ij}=C_{ji}$，　$i\neq j$，　$i,j=1,2,\cdots,n$.

可知协方差矩阵是一个对角阵.

二、相关系数

定义 4.4.3　若随机变量(X,Y)的协方差及方差均存在,而且 $D(X)>0$,$D(Y)>0$,则称

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} \tag{4.4.5}$$

为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

ρ_{XY}是量纲为 1 的量.

公式(4.4.5)可以写成下面的形式

$$\rho_{XY}=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\cdot\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right]=E(X^*Y^*)=\operatorname{cov}(X^*,Y^*). \tag{4.4.6}$$

即相关系数 ρ_{XY}是 X 与 Y 相应的标准化随机变量的协方差.

例 4.4.2　续例 4.4.1,已求得协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)$,现计算相关系数 ρ_{XY}.

解　因 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^1\left(\int_0^x 2x^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}>0$,

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\int_0^1\left(\int_0^x 2y^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}>0,$$

故 ρ_{XY}存在,而且

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{2}.$$

例 4.4.3　设随机变量 $X\sim P(2)$,随机变量 $Y\sim U(0,6)$,而且它们的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{\sqrt{6}}$,记 $Z=3X-2Y$,试求 $E(Z)$和 $D(Z)$.

解　因　$E(X)=D(X)=2$,$E(Y)=3$,$D(Y)=3$,

$$E(Z)=3E(X)-2E(Y)=3\times2-2\times3=0,$$
$$\begin{aligned}D(Z)&=D(3X-2Y)=D(3X)+D(2Y)-2\mathrm{cov}(3X,2Y)\\&=9D(X)+4D(Y)-12\mathrm{cov}(X,Y)\\&=9D(X)+4D(Y)-12\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\rho_{XY}\\&=9\times2+4\times3-12\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{6}}=18.\end{aligned}$$

定理 4.4.1　设 X 与 Y 两个随机变量的相关系数 ρ_{XY} 存在，则有

(1) $|\rho_{XY}|\leqslant1$；

(2) $|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是 X 与 Y 依概率为 1 线性相关，即存在常数 b 和 $a\neq0$，使

$$P\{Y=aX+b\}=1.$$

证　因　$\rho_{XY}=\mathrm{cov}(X^*,Y^*)$，则

$$0\leqslant D(X^*\pm Y^*)=D(X^*)+D(Y^*)\pm2\mathrm{cov}(X^*,Y^*)=2\pm2\rho_{XY}=2(1\pm\rho_{XY}),\tag{4.4.7}$$

从而 $1\pm\rho_{XY}\geqslant0$，有

$$-1\leqslant\rho_{XY}\leqslant1.$$

证得结论(1)成立，下面证明结论(2).

若 $P\{Y=aX+b\}=1$，$a\neq0$，则

$$E(Y)=aE(X)+b,\quad D(Y)=a^2D(X),$$
$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][aX+b-E(aX+b)]\}=aE\{[X-E(X)]^2\}=aD(X),$$

从而

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{aD(X)}{|a|D(X)}=\pm1.$$

反之，若 $|\rho_{XY}|=1$，由公式(4.4.7)可得

$$D(X^*\pm Y^*)=0,\quad E(X^*\pm Y^*)=0,$$

根据方差性质(4)，有

$$P\{X^*\pm Y^*=0\}=1,$$

或者

$$P\left\{Y=\pm\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}X\mp\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}E(X)+E(Y)\right\}=1.$$

定理 4.4.1 的结果表明，数字特征相关系数 ρ_{XY} 是两个随机变量 X 与 Y 线性相关程度的衡量指标.

定义 4.4.4　若随机变量 (X,Y) 相关系数存在，且 $\rho_{XY}=0$，则称 X,Y 不相关；若 $\rho_{XY}=1$，则称 X,Y 正相关；若 $\rho_{XY}=-1$，则称 X,Y 负相关.

需要特别指出：称随机变量 X 与 Y 不相关，仅指它们不存在线性相关关系，

见下例.

例 4.4.4 设随机变量 $\theta \sim U(0,2\pi)$，$X=\cos\theta$，$Y=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$，有

$$E(X)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta=0,\quad E(Y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\theta=0,$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\theta=0,$$

$$D(X)=E(X^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2},$$

$$D(Y)=E(Y^2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2},$$

得到

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0.$$

即有 X 与 Y 不相关，因

$$X^2+Y^2=\cos^2\theta+\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

同时，X 与 Y 又有确定的函数关系.

定理 4.4.2 如果随机变量 X 与 Y 相互独立，则 X 与 Y 不相关.

证 当 X 与 Y 相互独立时，有 $E(XY)=E(X)E(Y)$，从而

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=0.$$

此定理的逆定理不存在.

例 4.4.5 二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明：X 与 Y 不相关，但 X 与 Y 不相互独立.

证 X 与 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & |y|\leqslant 1;\\ 0, & |y|>1.\end{cases}$$

显然 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，因此 X 与 Y 不相互独立. 但因

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{+1} \frac{2}{\pi} x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{+1} \frac{2}{\pi} y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y = 0,$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{1}{\pi}xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r = 0.$$

可以验证 $D(X)>0$，$D(Y)>0$，故 $\rho_{XY}=0$，即 X 与 Y 不相关.

例 4.4.6　二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,1;0,1;\rho)$，试求 ρ_{XY}.

解　因 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，故 $E(X)=E(Y)=0$，$D(X)=D(Y)=1$，

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = E(XY)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xy}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\sqrt{1-\rho^2}+\rho x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \quad \left(\text{其中},t=\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho x^2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = -\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \rho.$$

若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1;\mu_2,\sigma_2;\rho)$，类似可得 $\rho_{XY}=\rho$.

在第三章的例 3.2.5 中已经证明，二维正态随机变量相互独立的充分必要条件是 $\rho=0$，亦即它们相互独立等价于它们不相关.

三、矩

随机变量更一般的数字特征是矩.

定义 4.4.5　设 X 为随机变量，若有 $E(|X|^k)<+\infty$，则称

$$\gamma_k = E(X^k) \quad (k=1,2,\cdots), \tag{4.4.8}$$

为 X 的 k 阶原点矩. 称

$$\alpha_k = E(|X|^k) \quad (k=1,2,\cdots), \tag{4.4.9}$$

为 X 的 k 阶绝对原点矩.

随机变量 X 的数学期望即一阶原点矩.

定义 4.4.6　设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 存在，且 $E(|X-E(X)|^k)<+\infty$，则称

$$\mu_k = E\{[X - E(X)]^k\} \quad (k = 1,2,\cdots), \tag{4.4.10}$$

为 X 的 k 阶中心矩. 称

$$\beta_k = E\{|X - E(X)|^k\}, \quad (k = 1,2,\cdots) \tag{4.4.11}$$

为 X 的 k 阶绝对中心矩.

注意一阶中心矩 $\mu_1 = 0$,二阶中心矩 μ_2 即方差,而且有 $\mu_2 = \gamma_2 - \gamma_1^2$,随机变量的方差等于二阶原点矩减去一阶原点矩的平方.

可以证明,随机变量的高阶矩存在,则低阶矩一定存在.

例 4.4.7 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,试求 X 的各阶中心矩.

解 $\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^n \varphi(x;\mu,\sigma)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^n \exp\left[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}x$

$$= \frac{(\sqrt{2}\sigma)^n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \quad \left(\text{式中 } t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

当 n 为奇数时,$\mu_n = 0 \quad (n = 1,3,5,\cdots)$.

当 n 为偶数时,利用分部积分法可得递推公式如下：

$$\mu_n = (n-1)\sigma^2\mu^{n-2} \quad (n = 2,4,6,\cdots),$$

将 $\mu_2 = E\{[X - E(X)]^2\} = \sigma^2$ 代入,得

$$\mu_n = \sigma^n (n-1)(n-3)\cdots 1 \quad (n = 2,4,6,\cdots),$$

如 $\mu_4 = 1 \times 3\sigma^4 = 3\sigma^4, \mu_6 = 1 \times 3 \times 5\sigma^6 = 15\sigma^6$.

§4.5 n 维正态随机变量

对于理论和应用而言,正态分布都是重要分布之一. 现在从二维联合正态分布出发,引进 n 维正态分布的概念以及部分性质.

若 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,其联合概率密度为

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}. \tag{4.5.1}$$

引入矩阵记号：

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

由于 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$,故 $\boldsymbol{C}$ 的行列式：$\det \boldsymbol{C} = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2) > 0$,并且

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{C}}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

最后,二维正态随机变量 (X,Y) 的联合概率密度可用矩阵形式表示为

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{2\pi(\det C)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\},\qquad(4.5.2)$$

其中矩阵 C 是 (X,Y) 的协方差矩阵，它是一个正定对称矩阵.

定义 4.5.1　设 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的协方差矩阵 $\boldsymbol{C}=(C_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵，联合概率密度为

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det \boldsymbol{C})^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right\},\qquad(4.5.3)$$

其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\ \\\mu_n\end{bmatrix},$$

则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布.

关于 n 维正态随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 具有以下重要性质：

(1) 相互独立的正态随机变量的有限线性组合仍然服从正态分布；

(2) n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布的充分必要条件是：$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的任意非零线性组合

$$l_1X_1+l_2X_2+\cdots+l_nX_n$$

服从正态分布，其中 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 不全为零.

(3) 若 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布，设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$ 分别是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的非零线性组合，则 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)$ 是 m 维正态分布随机变量.

特别当 $m\leqslant n$ 时 $(X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_m})$ 是 m 维正态随机变量，而 X_i 均为一维正态随机变量.

(4) $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 相互独立的充分必要条件是其协方差矩阵是对角阵：

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}C_{11}&&&\\&C_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&C_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2&&&\\&\sigma_2^2&&\\&&\ddots&\\&&&\sigma_n^2\end{bmatrix},$$

等价地，n 维正态随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 相互独立的充分必要条件是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两不相关.

§4.6　应用实例

一、风险决策问题

人们在处理一个问题时,往往面临若干种自然状态,存在多种方案可供选择,这就构成了决策. 自然状态是客观存在的不可控因素,供选择的行动方案称为策略,这是可控因素,选择哪种方案由决策者确定. 依据概率的决策称为风险决策.

例 4.6.1 某捕鱼队面临下个星期是否出海捕鱼的选择,如果出海遇到好天气,就可以得到 50 000 元的收益 如果出海后天气变坏,则将损失 20 000 元;如果不出海,则无论天气如何,都要承受 10 000 元的损失费. 已知下个星期天气好的概率为 0.6,为获取较高的收益,应该如何选择最佳方案?

称出海方案为 B 方案,不出海方案为 C 方案. 记 X_B,X_C 分别是两个方案的效益值,则其均值为

$$E(X_B)=50\,000\times0.6+(-20\,000)\times0.4=22\,000(\text{元}),E(X_C)=-10\,000(\text{元}).$$

所以判断出海捕鱼是最佳方案,其效益期望值为 22 000 元.

由于两种天气状态以一定的概率出现,因此两种方案的平均效益是预估值,选定方案 B 必定会承受一定风险. 我们还需要考虑天气概率变动对方案选择的影响,换言之,需要讨论最佳方案的稳定性.

首先变动天气状态出现的概率,设出现好天气的概率为 0.8,比较方案:

$$E(X_B)=50\,000\times0.8+(-20\,000)\times0.2=36\,000(\text{元}),E(X_C)=-10\,000(\text{元}).$$

出海方案仍是最佳方案,两个方案的平均效益值之差达到 46 000 元. 若出现坏天气的概率为 0.9,则有

$$E(X_B)=50\,000\times0.1+(-20\,000)\times0.9=-13\,000(\text{元}),E(X_C)=-10\,000(\text{元}).$$

不出海是最佳方案.

我们关心在什么条件下,两个决策方案有相同的平均效益值. 设出现好天气的概率为 α,则出现坏天气的概率为 $1-\alpha$,令

$$50\,000\times\alpha+(-20\,000)\times(1-\alpha)=(-10\,000)\times\alpha+(-10\,000)\times(1-\alpha),$$

解得 $\alpha=\dfrac{1}{7}$,即当出现好天气的概率大于 $\dfrac{1}{7}$ 时,出海是最佳方案,否则不出海是最佳方案. 当 $\alpha=\dfrac{1}{7}$ 时,两个方案具有相同的平均效益值.

类似地,我们还可以对出海效益的不同估计值,分析最佳方案的稳定性.

二、报童问题

一位报童每天从邮局购进报纸零售,当天卖不出的报纸则退回邮局. 报纸每份售出价为 a,购进价为 b,退回价为 c,有 $c<b<a$,由于退回报纸份数过多会赔

本，报童应如何确定购进报纸的份数？

报童每天的报纸的销售量 R 是随机变量，其分布律为

$$P\{R=r\}=p(r)\quad (r=0,1,2,\cdots),$$

假设他每天购进 n 份报纸，获得的利润为

$$L=L(r)=\begin{cases}(a-b)r-(b-c)(n-r), & r\leqslant n;\\ (a-b)n, & r>n.\end{cases}$$

平均利润为

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-b)r-(b-c)(n-r)]p(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)np(r),$$

现在应求 n 使 $G(n)$ 达到最大值.

通常销售量 r 的取值和购进量 n 都相当大，为便于分析，将 r 和 n 视为连续变量，将 $p(r)$ 视为概率密度 $f(r)$，上式改写为

$$G(n)=\int_0^n[(a-b)r-(b-c)(n-r)]f(r)\,\mathrm{d}r+\int_n^{+\infty}(a-b)nf(r)\,\mathrm{d}r,$$

令

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}n}&=(a-b)nf(n)-\int_0^n(b-c)f(r)\,\mathrm{d}r-(a-b)nf(n)+\int_n^{+\infty}(a-b)f(r)\,\mathrm{d}r\\&=-(b-c)\int_0^n f(r)\,\mathrm{d}r+(a-b)\int_n^{+\infty}f(r)\,\mathrm{d}r=0.\end{aligned}$$

得

$$\frac{\int_0^n f(r)\,\mathrm{d}r}{\int_n^{+\infty}f(r)\,\mathrm{d}r}=\frac{a-b}{b-c}.\tag{4.6.1}$$

令

$$p_1=\int_0^n f(r)\,\mathrm{d}r,\quad p_2=\int_n^{+\infty}f(r)\,\mathrm{d}r,$$

公式(4.6.1)可写为

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{a-b}{b-c}.\tag{4.6.2}$$

所得结果可分析如下：若购进 n 份报纸，则 p_1 是报纸卖不完的概率，p_2 是报纸全部卖出的概率，公式(4.6.2)表明，购进的份数 n 应使卖不完的概率与卖完的概率之比，恰等于卖出一份赚的钱与退回一份赔的钱之比.

习　题　四

1. 一箱产品中有 3 件正品和 2 件次品，不放回地任意取 2 件，X 表示取到的次品数，求平

均次品数 $E(X)$.

2. 设随机变量 X 服从拉普拉斯分布，其概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

计算 $E(X)$ 和 $D(X)$.

3. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

4. 设随机变量 X 服从瑞利分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{\frac{-x2}{2\sigma 2}}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\quad(\sigma>0)$$

试求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

5. 地面雷达搜索飞机，在时间段 $(0,t)$ 内发现飞机的概率为

$$P(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\quad(\lambda>0),$$

试求发现飞机的平均搜索时间.

6. 已知随机变量 $X\sim U(-\pi,\pi)$，试求 $Y=\cos X$ 和 $Y^2=\cos^2 X$ 的数学期望.

7. 已知随机变量 $X\sim P(\lambda)$，试求 $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

8. 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

试求 $Y=2X$ 和 $Z=\mathrm{e}^{-2X}$ 的数学期望.

9. 设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求：$E(X)$、$E(Y)$、$E(XY)$ 和 $E(X^2+Y^2)$.

10. 随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，令随机变量

$$X_k=\begin{cases}0, & Y\leqslant k;\\ k, & Y>k.\end{cases}$$

试求 数学期望 $E(X_1+X_2)$.

11. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\qquad f(y)=\begin{cases}2y, & 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(XY)$ 和 $E(X+Y)$.

12. 若随机变量 X 与 Y 相互独立,都服从标准正态分布,试求 $E(X^2+Y^2)$和$D(X^2+Y^2)$.

13. 民航机场的送客汽车载有 20 名乘客,从机场开出,乘客可以在 10 个车站下车. 如果到达某一车站无人下车,则在该站不停车,设随机变量 X 表示停车次数,并假定每个顾客在各个车站下车是等可能的. 求平均停车次数.

14. 将 n 个球($1\sim n$ 号)随机地放入 n 只盒子($1\sim n$ 号)中,1 只盒子装 1 个球. 若 1 个球装入与球同号的盒子中,称为 1 个配对,记 X 为总配对数,求 $E(X.)$

15. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<x\leqslant 1,0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试写出(X,Y)的协方差矩阵.

16. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,|y|\leqslant x;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明 X 与 Y 不相关.

17. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1
1	0.2	0.1	0.1
2	0.1	0.0	0.1
3	0.2	0.1	0.1

求 X 与 Y 的相关系数.

18. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty,$$

问 X 与$|X|$是否不相关?是否相互独立?

19. 设 $D(X)=25$,$D(Y)=36$,相关系数 $\rho_{XY}=0.4$,试求 $D(X+Y)$和 $D(X-Y)$.

20. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$,试求 X 的 k 阶原点矩.

21. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N\left(1,3^2;0,4^2;-\frac{1}{2}\right)$,设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$,试求:

(1) Z 的数学期望和方差;

(2) X 与 Z 的相关系数;

(3) 问 X 与 Z 是否相互独立?

第 5 章 大数定律和中心极限定理

本章介绍的大数定律和中心极限定理是独立随机变量序列的部分极限定理,是概率论和数理统计的基本理论,在理论与实际应用中都十分重要.

§5.1 随机变量序列的收敛性

在第一章我们了解到随机现象的统计规律性,在相同条件下进行大量的重复观察或试验才可能显现出来.譬如,抛一枚均匀硬币,虽然不能准确预言每次抛出的结果,但随着投掷次数 n 的增大,出现正面的频率$\frac{\mu_n}{n}$"稳定于"出现反面的概率$\frac{1}{2}$.能否说频率$\frac{\mu_n}{n}$"收敛于"概率$\frac{1}{2}$呢?我们继续分析此问题.

记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次掷出正面;}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次掷出反面}\end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则有$\frac{\mu_n}{n}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,问题归结为随机变量序列

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad (n=1,2,\cdots),$$

是否"收敛于"极限$\frac{1}{2}$.

关于随机变量序列的收敛概念种类较多,这里仅介绍常见的两种收敛概念.

定义 5.1.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是随机变量序列,$X$ 是一个随机变量(或为常数 a),如果对任意给定的正数 ε,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1, \tag{5.1.1}$$

或等价地

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}=0, \tag{5.1.2}$$

则称随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$依概率收敛于 X.

$$\text{记为 } X_n\xrightarrow{P}X\text{,或记为}\lim_{n\to\infty}X_n=X(P).$$

注意,随机变量序列依概率收敛的意义不同于微积分学中的数列的收敛意

义. 这里对于给定的正数 ε,无论 N 多大,当 $n>N$ 时,X_n 和 X 的偏差仍可能达到或超过 ε,只不过当 n 很大时,出现较大偏差的可能性很小,换言之,在 n 很大时我们有很大的把握(并非百分之百)断言 X_n 很接近 X.

定义 5.1.2　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是随机变量序列,X 为随机变量,$F_n(x)$ 和 $F(x)$ 分别为 X_n、X 的分布函数. 如果在 $F(x)$ 的连续点 x 处均有

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x), \tag{5.1.3}$$

则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 依分布收敛于 X,记为 $X_n\xrightarrow{L}X$.

$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 依分布收敛于 X,表明 $\{X_n\}$ 以 X 的分布为极限分布.

§5.2　大数定律

一、切比雪夫不等式

介绍大数定律之前,先介绍一个重要不等式.

定理 5.2.1(切比雪夫(Chebyshev)不等式)　设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 存在,则对任意常数 $\varepsilon>0$,下列不等式成立:

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \tag{5.2.1}$$

或

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{5.2.2}$$

证　仅就 X 是连续型随机变量的情况给予证明. 设 X 的概率密度为 $f(x)$,

$$P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\}=\int_{|x-E(X)|\geqslant\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{|x-E(X)|\geqslant\varepsilon}\frac{|x-E(X)|^2}{\varepsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

证得公式(5.2.1). 由于

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}=1-P\{|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\},$$

利用公式(5.2.1)即得公式(5.2.2).

切比雪夫不等式在概率论的理论推证和概率的估计中都有重要用途.

例 5.2.1　随机变量 X 的分布未知,但已知 $E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$,试估计概率

$$P\{|X-E(X)|\geqslant 3\sigma\}\text{ 和 }P\{|X-E(X)|\leqslant 4\sigma\}.$$

解　由切比雪夫不等式

$$P\{|X-E(X)|\geqslant 3\sigma\}\leqslant\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}=0.1111,$$

$$P\{|X-E(X)|<4\sigma\}\geqslant 1-\frac{\sigma^2}{(4\sigma)^2}=\frac{15}{16}=0.9375.$$

例 5.2.2 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立且都服从参数为 $\lambda=4$ 的泊松分布,令 $Y=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$,利用切比雪夫不等式估计概率 $P\{360<Y<440\}$.

解 因为 $E(X_i)=D(X_i)=4\quad(i=1,2,\cdots,100)$,而且 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立,有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{100}E(X_i)=400,\quad D(Y)=\sum_{i=1}^{100}D(X_i)=400.$$

由公式(5.2.2)得

$$P\{360<Y<440\}=P\{|Y-E(Y)|<40\}\geqslant 1-\frac{400}{40^2}=\frac{3}{4}=0.75.$$

需特别指出,切比雪夫不等式只能对概率作出很粗略的估计.

二、大数定律

定义 5.2.1 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 的每个数学期望 $E(X_i)$,$i=1,2,\cdots$ 均存在,如果对任意给定的正实数 ε,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1,\tag{5.2.3}$$

则称随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从大数定律.

由定义 5.1.1 可知,随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从大数定律,是指序列的前 n 项算术平均值与其数学期望之差,将依概率收敛于零,即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\xrightarrow{P}0.$$

下面介绍几个重要的大数定律.

称随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立,若其中的任意有限个随机变量相互独立.

定理 5.2.2(切比雪夫大数定律) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立的随机变量序列,每个随机变量的数学期望 $E(X_i)$ 和方差 $D(X_i)$ 都存在,而且方差一致有界,即存在正常数 C,使

$$D(X_i)<C\quad(i=1,2,\cdots),$$

则 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从大数定律.

证 需证明对任意正数 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

因为

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i),D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)\leqslant\frac{1}{n^2}\cdot nC=\frac{C}{n},$$

由切比雪夫不等式(5.2.2),对给定的 $\varepsilon>0$,有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}\geqslant 1-\frac{\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)}{\varepsilon^2}\geqslant 1-\frac{C}{n\varepsilon^2},$$

令 $n\to\infty$,注意到概率不能大于 1,故有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

定理 5.2.3(独立同分布大数定律)　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立同分布的随机变量序列,随机变量的数学期望与方差存在

$$E(X_i)=\mu,\quad D(X_i)=\sigma^2\quad(i=1,2,\cdots),$$

则 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从大数定律,即对任意 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{5.2.4}$$

证　因 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立同分布,所以

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu,D(X_i)=\sigma^2\quad(i=1,2,\cdots),$$

故方差数列是有界数列,根据定理 5.2.2 知 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从大数定律,并且公式(5.2.3)可改写为:对任意正数 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

更进一步,这里不加证明给出更强的结论.

定理 5.2.4(辛钦大数定律)　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立同分布的随机变量序列,随机变量的数学期望存在

$$E(X_i)=\mu\quad(i=1,2,\cdots),$$

则 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从大数定律,即对任意正数 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

根据大数定律的定义可知:$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 的数学期望 $E(X_i)=\mu(i=1,2,\cdots)$ 存在,是其服从大数定律的必要条件.

上述两个定理表明,相互独立同分布的随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 的算术平均值 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$,在 n 充分大时具有稳定性,其稳定值为 $E(X_i)=\mu$. 这就是工

程应用中往往用大量测量值的算术平均值作为精确值的估计的理论依据.

定理 5.2.5（伯努利大数定律）　设 m 是 n 重伯努利试验中事件 A 出现的次数，p 是 A 在每次试验中发生的概率，则对任意给定的实数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1. \tag{5.2.5}$$

证　引进随机变量序列如下：

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若在第 } i \text{ 次试验中事件 } A \text{ 发生；}\\ 0, & \text{若在第 } i \text{ 次试验中事件 } A \text{ 不发生.}\end{cases}$$

有 $m=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，都服从 $(0-1)$ 分布，可得

$$E(X_i)=p,\quad D(X_i)=p(1-p)\leqslant\frac{1}{4},\quad (i=1,2,\cdots)$$

由定理 5.2.3 可得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-p\right|<\varepsilon\right\}=1,$$

亦即

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

定理结果说明随机事件的频率是依概率收敛于事件发生的概率，即当试验次数充分大时，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 具有稳定性，其稳定值为事件 A 发生的概率 $p=P(A)$. 伯努利大数定律以严格的数学形式表述了频率的稳定性.

频率的稳定性在理论研究和工程应用中有极其重要的意义. 大数定律中的“大数”二字是指定理所描述的规律，仅在大量次数的重复试验和观察中才能呈现. 因此在实际应用中当试验次数很大时，便可使用事件发生的频率来近似估计概率.

换一个角度分析伯努利大数定律，由于随机事件 A 发生的频率依概率收敛于事件 A 的概率 p，当 p 很小，则 A 发生的频率也极可能很小，从而 A 发生的次数 m 也很小. 譬如，$p=0.001$，则在 1 000 次试验中事件 A 很可能仅发生 1 次. 因此人们在实际应用中常常忽略那些概率很小的随机事件发生的可能性. 得到下述实际推断原理.

小概率实际推断原理　概率很小的事件，在一次试验中几乎是不可能发生，在实际中可看成不可能事件.

在应用中常用正态分布描述实际的随机变量. 譬如，将某门课程的百分制考试成绩记为 X，并假设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，可以较好地描述得分规律. 但有一个令人疑惑的问题是正态分布随机变量可以取任何实数，这与百分制不符. 我们曾经计

算过概率式

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974,$$

或

$$P\{|X-\mu|>3\sigma\}=0.0026,$$

即是说，若随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 的取值大于 $\mu+3\sigma$ 或小于 $\mu-3\sigma$ 的概率不到千分之 3（见图 5.1），可视为小概率事件. 因此，根据小概率事件原理，把区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 看成随机变量 X 的实际可能取值区间，称为"三倍标准差原理"或"3σ－原理".

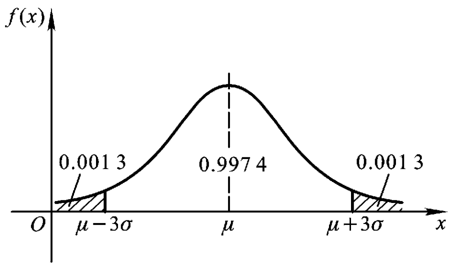


图 5.1

对于百分制得分 X，假设 $X\sim N(70,10^2)$，根据"3σ－原理"，我们实际上将得负分或得分超过 100 分看着不可能事件，实际得分范围是 $[0,100]$.

§5.3 中心极限定理

在上一节中，基于随机变量序列的依概率收敛的概念，我们介绍了重要的极限定理——大数定律. 本节将从随机变量序列的依分布收敛概念，引进另一类重要极限定理——中心极限定理.

考虑相互独立的随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$，并假定它们的数学期望和方差均存在，则对它们的前 n 项和

$$\sum_{i=1}^{n}X_i=X_1+X_2+\cdots+X_n,$$

有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i),\quad D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)>0,$$

将 $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 标准化，令

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D(X_i)}},\tag{5.3.1}$$

有

$$E(Z_n)=0,\quad D(Z_n)=1.$$

定义 5.3.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立的随机变量序列,其前 n 项和的标准化随机变量序列为

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}E(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}D(X_i)}}\quad(n=1,2,\cdots),$$

记 Z_n 的分布函数为 $F_n(x)=P\{Z_n\leqslant x\}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,\quad -\infty<x<+\infty,\tag{5.3.2}$$

则称随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从中心极限定理.

公式(5.3.2)成立,即随机变量序列 $\{Z_n\}$ 依分布收敛于标准正态分布随机变量.

中心极限定理有很强的实际背景. 我们知道正态分布在概率论与数理统计的理论及应用中占有重要的中心地位. 在现实中许多随机变量都可以表示成为大量相互独立的随机变量之和,而且其中每一个随机变量对总和只起到微小的影响,这类随机变量往往服从或近似服从正态分布. 中心极限定理从理论上阐明了其缘由.

定理 5.3.1(独立同分布中心极限定理) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是相互独立同分布的随机变量序列,具有数学期望和方差

$$E(X_i)=\mu,\quad D(X_i)=\sigma^2>0\quad(i=1,2,\cdots),$$

则随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 服从中心极限定理,即有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\Phi(x),\tag{5.3.3}$$

本定理的证明超过我们所学知识范围,在此从略.

此定理的结果说明序列 $Z_n=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 的极限分布是标准正态分布,因此,当 n 很大时,可以认为 Z_n 近似服从 $N(0,1)$ 分布,从而

$$\sum_{i=1}^{n}X_i=\sqrt{n}\sigma Z_n+n\mu$$

近似服从 $N(n\mu,n\sigma^2)$. 而随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$的前 n 项的算术平均 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$近似服从 $N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$分布.

如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是 n 个相互独立同分布的随机变量,且

$$E(X_i)=\mu,\quad D(X_i)=\sigma^2>0\quad (i=1,2,\cdots),$$

则当 n 充分大时,由定理 5.3.1 可得概率近似计算公式

$$\begin{aligned}P\left\{x_1<\sum_{i=1}^{n}X_i\leqslant x_2\right\}&=P\left\{\frac{x_1-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}<Z_n\leqslant\frac{x_2-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right\}\\&\approx\Phi\left(\frac{x_2-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right).\end{aligned}\tag{5.3.4}$$

例 5.3.1　设有 36 个电子元件 $D_1,D_2,\cdots,D_{36}$,它们的寿命(单位:小时)分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_{36}$,而且 X_i都服从参数为 $\lambda=\frac{1}{10}$的指数分布. 当 D_i损坏时立即使用 D_{i+1},$(i=1,2,\cdots,35)$,试求元件使用的总时数 Y 在 300 小时至 450 小时的概率.

解　X_i的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}, & x>0;\\0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

且
$$E(X_i)=10,\quad D(X_i)=100\quad (i=1,2,\cdots,36),$$

因为 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$,$E(Y)=360$,$D(Y)=3\ 600$,利用公式(5.3.4),所求概率为

$$\begin{aligned}P\{300\leqslant Y\leqslant 450\}&=P\left\{\frac{300-360}{\sqrt{3600}}\leqslant\frac{Y-360}{\sqrt{3600}}\leqslant\frac{450-360}{\sqrt{3600}}\right\}\\&\approx\Phi\left(\frac{450-360}{60}\right)-\Phi\left(\frac{300-360}{60}\right)=\Phi(1.5)-\Phi(-1)\\&=0.9332+0.8413-1=0.7745.\end{aligned}$$

定理 5.3.2(棣莫弗 – 拉普拉斯中心极限定理)　设随机变量 $Y_n\sim B(n,p)$,$(n=1,2,\cdots)$,则对任意实数 x 有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\Phi(x).\tag{5.3.5}$$

证　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$是相互独立同$(0-1)$分布的随机变量序列,有

$$E(X_i)=p,\quad D(X_i)=p(1-p)\quad (i=1,2,\cdots),$$

由定理 5.3.1 知 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$服从中心极限定理,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\Phi(x),$$

由二项分布的可加性知 $\sum_{i=1}^{n}X_i=Y_n\sim B(n,p)$，上式可以改写为

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\Phi(x).$$

若随机变量 $Y_n\sim B(n,p)$，当 n 足够大时，由式(5.3.5)可得到概率近似计算公式

$$P\{m_1<Y_n\leqslant m_2\}=P\left\{\frac{m_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant\frac{m_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).\tag{5.3.6}$$

例 5.3.2　设有数量很大的一批产品，其次品率为 0.02，从中任意取出 10 000件，求次品数不超过 221 件的概率.

解　用 Y 表示任意取出 10 000 件产品中的次品数，则 $Y\sim B(10000,0.02)$，有 $np=200$，$np(1-p)=196$，由公式(5.3.6)，所求概率为

$$P\{0\leqslant Y_n\leqslant 221\}\approx\Phi\left(\frac{221-200}{\sqrt{196}}\right)-\Phi\left(\frac{0-200}{\sqrt{196}}\right)$$

$$\approx\Phi(1.5)-\Phi(-14.3)=0.9332-0=0.9332.$$

例 5.3.3　某个单位有 100 台电话机，每台电话大约有 5% 的时间使用外线电话，各台电话是否使用外线是相互独立的，问该单位总机至少需要安装多少条外线，才能以 90% 以上的概率保证每台电话使用外线时不被占线.

解　设 Y 表示 200 台电话机中同时使用外线的电话机总数，则 $Y\sim B(200,0.05)$，其中 $n=200$，$p=0.05$，计算得 $np=10$，$np(1-p)=9.5$.

设外线条数为 m，由公式(5.3.6)

$$P\{0\leqslant Y\leqslant m\}=P\left\{\frac{0-10}{\sqrt{9.5}}\leqslant\frac{Y-10}{\sqrt{9.5}}\leqslant\frac{m-10}{\sqrt{9.5}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{m-10}{\sqrt{9.5}}\right)-\Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{9.5}}\right)$$

$$\approx\Phi\left(\frac{m-10}{\sqrt{9.5}}\right)-0=\Phi\left(\frac{m-10}{\sqrt{9.5}}\right),$$

由题意需求一个最小的整数 m，使

$$P\{0\leqslant Y\leqslant m\}\geqslant 0.9\quad\text{或}\quad\Phi\left(\frac{m-10}{\sqrt{9.5}}\right)\geqslant 0.9,$$

查表得 $\Phi(1.30)=0.9032$，应使$\dfrac{m-10}{\sqrt{9.5}}\geqslant 1.30$，解出 $m\geqslant 14$.

若至少配置 14 条外线，就能以 90% 以上的概率保证每台电话机使用外线时不被占线.

§5.4 应用

蒙特卡罗模拟

仿真模拟技术是新兴的科研方法，称为第三种科学研究手段. 随着计算机的日益普及，计算机模拟技术日趋成熟，应用愈加广泛. 蒙特卡罗模拟又称统计试验法，是计算机模拟方法的重要组成部分.

下面，介绍用蒙特卡罗模拟法估计圆周率 π 值的一个例子，以期同学们从中体会蒙特卡罗模拟的思想.

如图5.2，考虑边长为1的正方形，以坐标原点为圆心，半径为1作圆，在正方形中画出一条1/4圆弧. 设二维随机变量(X,Y)在正方形内服从均匀分布，则(X,Y)落在四分之一圆内的概率为

$$P\{X^2+Y^2\leqslant 1\}=\frac{\pi}{4}, \tag{5.4.1}$$

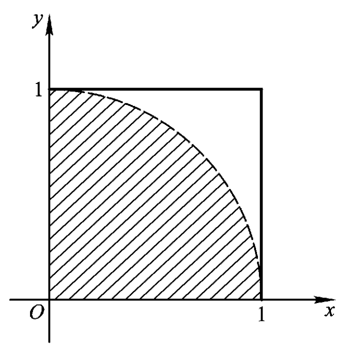


图5.2

在计算机上产生 n 对二维随机数(x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,n$，x_i 和 y_i 是$(0,1)$上的均匀分布随机数，若其中 k 对满足

$$x_i^2+y_i^2\leqslant 1. \tag{5.4.2}$$

此项计算机模拟工作相当于是向正方形内进行了 n 次投掷，视为 n 次独立掷点试验，而且恰有 k 个点落入四分之一圆内，即随机点落入四分之一圆的频率为$\frac{k}{n}$.

根据伯努利大数定律，随机事件发生的频率依概率收敛于事件发生的概率 p，即有

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1, \tag{5.4.3}$$

因此当 n 足够大时，可用$\frac{k}{n}$作为$\frac{\pi}{4}$的估计，从而得到圆周率 π 的估计值为 $\hat{\pi}=\frac{4k}{n}$. 并且随着试验次数的增大，所得估计 $\hat{\pi}$ 的精度也随之提高.

蒙特卡罗模拟是一种试验近似方法，上例中用的方法称为频率法，即用 n 次独立试验中随机事件 A 出现的频率$\frac{k}{n}$作为其概率 p 的估计值.

人们希望能以较少的试验次数（即较低的试验费用，较短的时间等），得到

较高的估计精度. 考虑对给定的置信度 $1-\alpha(0<\alpha<1)$,估计精度达到 ε,亦即使

$$P\{|\hat{p}-p|<\varepsilon\}=P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}>1-\alpha \tag{5.4.4}$$

成立,试验次数 n 应取多大?

记 n 次独立试验中 A 出现的次数为 k_n,则 $k_n\sim B(n,p)$,根据棣莫弗 - 拉普拉斯中心极限定理知

$$\begin{aligned}P\{|\hat{p}-p|<\varepsilon\}&=P\{n(p-\varepsilon)<k_n<n(p+\varepsilon)\}=\\&P\left\{-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{k_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right\}\\&\approx 2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-1,\end{aligned}$$

令
$$2\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-1>1-\alpha,$$

即
$$\Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\right)>1-\frac{\alpha}{2}. \tag{5.4.5}$$

查得满足上式的标准正态分布的上侧分位数 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$,令 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}=n\varepsilon/\sqrt{np(1-p)}$,解得

$$n=\frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2. \tag{5.4.6}$$

公式(5.4.6)说明,频率法的估计精度 ε 与试验次数 n 的平方根成反比,如果精度 ε 提高 10 倍,则试验次数 n 要增大 100 倍.

蒙特卡罗模拟在实际应用中十分有效,同学们都应掌握这一重要的科研手段.

习　题　五

1. 进行 600 次伯努利试验,事件 A 在每次试验中发生的概率为 $p=\frac{2}{5}$,设 Y 表示 600 次试验中事件 A 发生的总次数,利用切比雪夫不等式估计概率 $P\{216<Y<264\}$.

2. 若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立且都服从区间(0,6)上的均匀分布. 设 $Y=\sum\limits_{i=1}^{100}X_i$,利用切比雪夫不等式估计概率 $P\{260<Y<340\}$.

3. 利用切比雪夫大数定律证明泊松大数定律:设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$为相互独立的随机变量序列,有 $P\{X_n=1\}=p_n,P\{X_n=0\}=1-p_n,(0<p_n<1),n=1,2,\cdots$,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$服从大数定律.

4. 调整 200 台仪器的电压,假设调整电压过高的可能性为 0.5. 试求调整电压过高的仪器台数在 95 至 105 台之间的概率.

5. 某射手每次射击的命中率为 $p=0.8$,现射击 100 发子弹,各次射击互不影响,求命中次数在 72 与 88 之间的概率.

6. 设某个系统由 100 个相互独立的部件组成,每个部件损坏的概率均为 0.1,必须有 85 个以上的部件工作才能使整个系统正常工作,求整个系统正常工作的概率.

7. 对敌人阵地进行 100 次炮击,每次炮击时炮弹命中次数的数学期望为 4,方差为 2.25. 求在 100 次炮击中有 380 颗到 420 颗炮弹命中目标的概率.

8. 一个加法器同时收到 20 个噪声电压 $V_1,V_2,\cdots,V_{20}$,设它们是相互独立的,且都在区间 $(0,10)$ 上服从均匀分布,记 $V=\sum\limits_{i=1}^{20}V_i$,求概率 $P\{V\geqslant 105\}$.

9. 某种电器元件的寿命(单位:小时)T 服从参数为 $\frac{1}{100}$ 的指数分布,现随机抽取 16 件,设它们的寿命相互独立,求这 16 个元件的寿命总和大于 1920 小时的概率.

10. 某个系统由相互独立的 n 个部件组成,每个部件的可靠性(即正常工作的概率)为 0.9,且至少有 80% 的部件正常工作,才能使整个系统工作. 问 n 至少为多大,才能使系统的可靠性为 95%.

第 6 章　数理统计的基本概念

前面我们讲述了概率论的基本内容，概括起来主要是随机变量的概率分布. 从本章起，我们进入本课程的第二部分——数理统计学. 概率论与数理统计是两个紧密联系的姊妹学科，概率论是数理统计学的理论基础，而数理统计学则是概率论的重要应用.

数理统计学是使用概率论和数学的方法，研究如何用有效的方式收集带有随机误差的数据，并在设定的模型下，对收集的数据进行分析，提取数据中的有用信息，形成统计结论，为决策提供依据. 这就不难理解，数理统计应用的广泛性，几乎渗透到人类活动的一切领域. 如：农业、生物和医学领域的“生物统计”，教育心理学领域的“教育统计”，管理领域的“计量经济”，金融领域的“保险统计”等等，这些统计方法的共同基础都是数理统计.

数理统计学的内容十分丰富，概括起来可以分为两大类：其一是研究如何用有效的方式去收集随机数据，即抽样理论和试验设计；其二是研究如何有效地使用随机数据对所关心的问题做出合理的、尽可能精确和可靠的结论，即统计推断.

本书主要介绍统计推断的基本内容和基本方法. 在这一章中先给出数理统计中一些必要的基本概念，然后给出正态总体抽样分布的一些重要结论.

§6.1　总体、样本与统计量

一、总体

在数理统计中，我们将研究对象的全体称为总体或母体，而把组成总体的每个基本元素称为个体. 例如，检查灯泡厂某天的产品质量，则该厂某天生产的全部灯泡就可看成一个总体，每个灯泡则成为一个个体.

在实际问题中，研究对象往往是很具体的事物或现象，而我们所关心的不是每一个个体的种种具体特征，而是其中的某一数值指标，因此也可以把每个个体的这个数值指标看作个体，把它们的全体看作总体. 例如，当我们研究学生的学习成绩时，考察的是学生相应的考分，并不去关心他的身高、体重等，于是每一个学生的学习成绩就是个体，而总体是所有学生的学习成绩；又如，考察某工厂生产电子元件的使用寿命，每个电子元件的使用时数是个体，总体则是由全部电子

元件的使用时数所组成.

上述两例总体中所有个体的取值是按一定的规律分布着的,两个总体中的数字,来自不同的概率分布. 由第 2 章的讨论知道,电子元件的寿命服从指数分布,而学生的学习成绩通常认为是服从正态分布. 赋有一定概率分布的总体称为统计总体,其概率分布称为总体分布. 当总体分布为指数分布时,称为指数分布总体;当总体分布为正态分布时,称为正态分布总体或简称正态总体,等等. 两个总体,即使其所含个体的具体性质根本不同,只要总体分布同类,则在数理统计中就视为是同类总体,可以用完全相同的统计方法进行处理.

忽略总体中人或物的具体内容,总体的概率分布是总体的核心. 因此,进一步将总体看成具有相应的概率分布的随机变量,比如 X,称做总体 X,则随机变量 X 的概率分布就是总体分布.

二、样本

样本是按一定的规定从总体中抽出的一部分个体. 这里的"按一定的规定",是指为保证总体中的每一个个体有同等的被抽出的机会而采取的一些措施. 取得样本的过程,称为抽样.

由于我们关注的是个体的某一数值指标,因而所得样本表现为若干个数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 对一个具体问题而言,抽出的样本就是一些具体的数据. 但由于抽取样本是随机的,即使在相同条件下重复抽取,也可能得到不同的数据,因此样本是一组随机变量,记为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,其中 n 称为样本容量或样本大小、样本量. 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中的每一个 X_i 也称为样本. 有时为区别计,把样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的全体称为一组样本,而把 X_i 称为其中的第 i 个样本. 实施抽样后得到的具体数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为样本观测值.

抽取样本的目的是根据样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的性质对总体 X 的某些特性进行估计和推断,所以抽取的样本应尽可能地反映总体的特性. 为此,我们要求样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 满足下列要求:

(1) 代表性. 每一个 X_i 应该与总体 X 有相同的分布,$i=1,2,\cdots,n$;

(2) 独立性. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 应该是相互独立的随机变量.

具有上述两个特性的样本称为简单随机样本. 这是数理统计应用中最常见、理论研究也最深入的一种情形.

在实际问题中,对总体进行的有放回抽样得到的 n 个个体就是一个简单随机样本,当样本容量 n 相对于总体来讲很小时,连续抽取的 n 个个体也可以认为是一个简单随机样本. 又如测量一个物体的重量,重复测量 n 次得到的也是一个简单随机样本.

以后如无特别说明,本书提到的样本都是简单随机样本.

显然，若总体 X 的分布函数为 $F(x)$，则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n\}$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P\{X_i \leqslant x_i\}.$$

三、统计量

随机样本是对总体进行统计分析与推断的依据，当我们获取样本后，往往不是直接利用样本进行推断，而是要对样本进行"加工"、"整理"，以把它们所提供的关于总体 X 的信息集中起来. 为此我们引进统计量的定义.

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，若样本函数 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 中不含任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为一个统计量.

例如，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 是统计量，而 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ 当 μ 为一个已知数时是统计量，当 μ 为未知参数时就不是统计量.

统计量一般是样本的连续函数，显然它是随机变量. 常用的统计量有：

$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$，称为样本均值，它与总体均值有密切的关系；

$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$，称为样本方差，$S^2$ 是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的分散程度的一个合理的刻画，它与总体方差有密切的关系，S 称为样本标准差；

$A_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$　（k 为任意整数），称为样本 k 阶原点矩；

$M_k = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k$　（k 为任意整数），称为样本 k 阶中心矩.

样本原点矩和样本中心矩统称为样本矩. 显然 $A_1 = \bar{X}$，特别值得注意的是样本二阶中心矩 M_2，它与样本方差 S^2 只相差一个实数因子：$M_2 = \dfrac{n-1}{n}S^2$.

将样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代入上述各式，得到统计值，以相应的小写字母表示，如 $\bar{x}, s^2, a_k, m_k$ 等等.

在第 4 章 §4.4 中，我们曾给出随机变量 X 的 k 阶原点矩 γ_k 和 k 阶中心矩 μ_k. 注意将此处定义的 A_k, M_k 与相应的总体矩对比.

最常用的样本矩是一阶和二阶的，三阶、四阶也有些应用，四阶以上的则用得很少.

其他有用的统计量还有很多,它们都是在解决具体统计推断问题时构造的,后面我们将结合相应的问题进行介绍.

§6.2 抽样分布

统计量是我们对总体的分布规律或数字特征进行推断的基础. 由于统计量是随机变量,所以在使用统计量进行统计推断时必须要知道它的分布. 统计量的分布称为抽样分布. 抽样分布在数理统计的诸多方法及其应用中都有十分重要的作用,有些方法的核心内容就是构造一个恰当的统计量并确定其抽样分布. 一般说来,要求出一个统计量的精确分布是较困难的,不过对于最重要的正态总体的几个常用统计量的抽样分布,已取得较为完整的结果. 在介绍这些结果之前,先给出数理统计学中三个常用的重要分布.

一、三个重要分布

1. χ^2**分布**

定义 6.2.1 设随机变量χ^2的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

则称随机变量χ^2服从自由度为 n 的χ^2分布,记为$\chi^2\sim\chi^2(n)$.

其中 $\Gamma(s)$为 Γ 函数,定义为

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \qquad (s>0).$$

定理 6.2.1 设 n 个相互独立并且都服从正态分布 $N(0,1)$的随机变量 X_1,X_2,…,X_n,记

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2, \tag{6.2.1}$$

则称随机变量χ^2服从自由度为 n 的χ^2分布.

定理 6.2.1 中,自由度是指(6.2.1)式右端所包含的独立变量的个数.

这个定理可利用随机变量的函数的分布并对自由度 n 运用数学归纳法得到证明,此处从略.

不同自由度的χ^2分布的概率密度曲线图形如图 6.1 所示.

设$\chi^2\sim\chi^2(n)$,对于给定的正数 $\alpha(0<\alpha<1)$,称满足关系式

$$P\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\}=\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty}f_{\chi^2}(x)\,\mathrm{d}x=\alpha$$

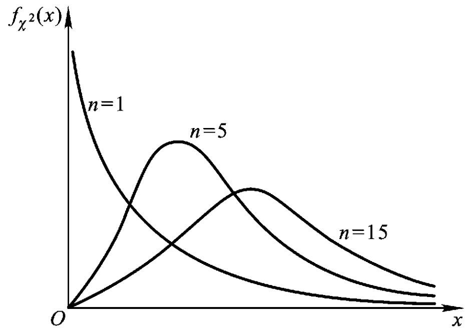


图 6.1

的数 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上侧临界值或上侧分位数，见图 6.2. 分位数的概念在统计推断中有重要的应用.

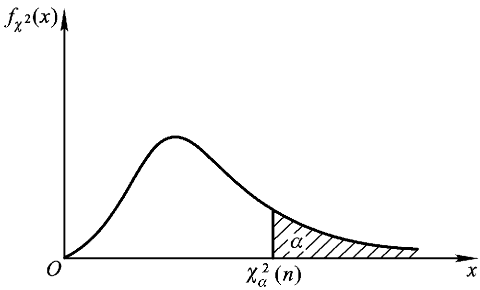


图 6.2

给定 n 及 $\alpha(0<\alpha<1)$，由附表 3 可查得 $\chi_\alpha^2(n)$. 例如

$$\chi_{0.995}^2(18)=6.265, \chi_{0.025}^2(5)=12.833.$$

χ^2 分布具有以下重要性质：

性质 1　设 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则有

$$E(\chi^2)=n,\quad D(\chi^2)=2n.$$

证　$E(\chi^2)=E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)=n.$

$$D(\chi^2)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}\{E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}dx-1\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (3-1) = 2n.$$

性质 2 设 Y_1, Y_2 相互独立，且 $Y_1 \sim \chi^2(n_1)$，$Y_2 \sim \chi^2(n_2)$，则有

$$Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2).$$

此性质的证明可利用相互独立随机变量之和的概率密度公式得到. 事实上，直观地从式(6.2.1)出发，将 $Y_1 + Y_2$ 看成 $(n_1 + n_2)$ 个标准正态分布变量的平方和亦可解释此结论. 性质 2 说明 χ^2 分布具有可加性，它还可以推广到任意有限个相互独立且服从 χ^2 分布的随机变量之和的情况.

性质 3 当 n 足够大时，有

$$\chi_\alpha^2(n) \approx n + u_\alpha \sqrt{2n},$$

式中 u_α 是标准正态分布的上侧分位数，即 u_α 是满足等式 $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$ 的数.

事实上，由独立同分布中心极限定理，$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$，当 n 足够大时，χ^2 近似服从正态分布 $N(n, 2n)$，即得性质 3.

当 $n > 45$ 时，在附表 3 中查不到 $\chi_\alpha^2(n)$ 的值，这时可由性质 3 作近似计算.

2. t 分布

定义 6.2.2 设随机变量 T 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

则称 T 服从自由度为 n 的 t 分布，记为 $T \sim t(n)$.

定理 6.2.2 设随机变量 X, Y 相互独立，$X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，记

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}},$$

则随机变量 T 服从自由度为 n 的 t 分布.

证明 从略.

t 分布的概率密度曲线的图形关于纵轴对称，如图 6.3 所示.

设 $T \sim t(n)$，对于给定的正数 $\alpha (0 < \alpha < 1)$，称满足关系式

$$P\{T > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} f_T(x)\,\mathrm{d}x = \alpha$$

的数 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上侧分位数，见图 6.4.

给定 n 及 $\alpha (0 < \alpha < 1)$，由附表 4 可查得 $t_\alpha(n)$. 例如，$t_{0.025}(10) = 2.2281$.

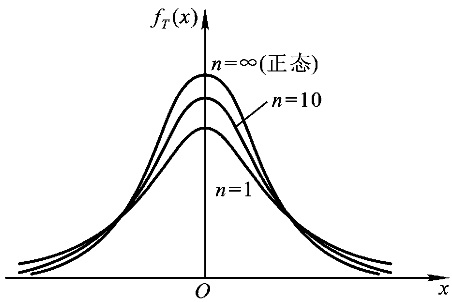


图 6.3

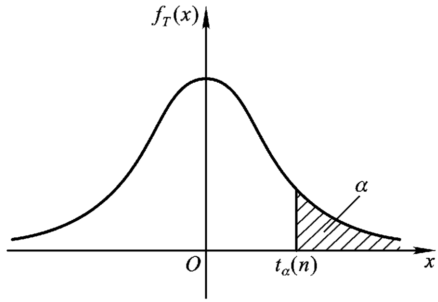


图 6.4

可以证明，若 $T\sim t(n)$，则对任意实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} f_T(x)=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

因此，当 n 足够大时，T 近似服从 $N(0,1)$ 分布. 实际上当 $n>45$ 时，t 分布便与正态分布几乎没有差异，此时 $t_\alpha(n)\approx u_\alpha$.

3. F 分布

定义 6.2.3　设随机变量 F 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} n_1^{\frac{n_1}{2}}n_2^{\frac{n_2}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n_2}{2}\right)}x^{\frac{n_1}{2}-1}(n_1x+n_2)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}, & x>0\,; \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

则称 F 服从第一自由度为 n_1，第二自由度为 n_2 的 F 分布，记为 $F\sim F(n_1,n_2)$.

定理 6.2.3　设随机变量 X,Y 相互独立，$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，记

$$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2},$$

则随机变量 F 服从第一自由度为 n_1，第二自由度为 n_2 的 F 分布.

证明　从略.

F 分布的概率密度曲线图形如图 6.5 所示.

设 $F\sim F(n_1,n_2)$，对于给定的正数 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足关系式

$$P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty}f_F(x)\,\mathrm{d}x=\alpha$$

的数 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 为 $F(n_1,n_2)$ 分布的上侧分位数，见图 6.6.

给定 n_1,n_2 及 $\alpha(0<\alpha<1)$，可由附表 5 查得 $F_\alpha(n_1,n_2)$，例如 $F_{0.025}(8,6)=5.60$.

附表 5 仅给出了 α 较小(0.10，0.05，0.025，0.01，0.005)时的上侧分位数值，对于 α 较大(接近 1)的 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 值，可利用如下性质计算.

若 $F\sim F(n_1,n_2)$，由定理 6.2.3 易知，$\dfrac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$. 由此性质，若

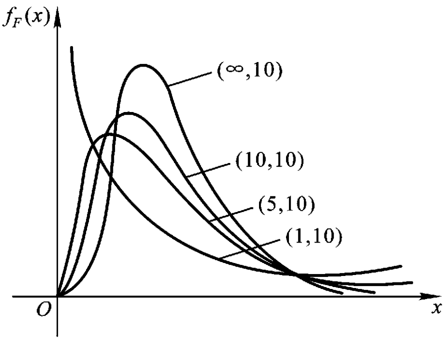


图 6.5

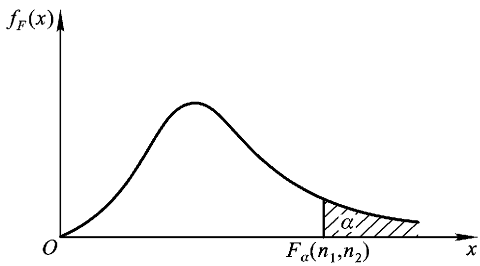


图 6.6

$$P\{F > F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\} = 1-\alpha,$$

则

$$1-\alpha = P\left\{\frac{1}{F} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\} = 1 - P\left\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\},$$

所以

$$P\left\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\} = \alpha,$$

从而

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}.$$

利用上式,可计算 α 接近 1 的 $F_\alpha(n_1,n_2)$ 的值. 例如,

$$F_{0.95}(12,9) = \frac{1}{F_{0.05}(9,12)} = \frac{1}{2.80} = 0.357\ 1.$$

χ^2 分布、t 分布和 F 分布常常被人们称为数理统计学中的三大统计分布.

二、抽样分布定理

从理论上讲,若总体的分布已知,统计量的分布总是确定的. 但对一般的总体分布,统计量分布的计算往往很复杂,有时甚至不能求出. 这里我们仅考虑正态总体的抽样分布. 一方面是因为其抽样分布较容易求出,另一方面是正态分布可以作为很多统计问题中总体分布的近似分布.

定理 6.2.4　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,$\bar{X}$,S^2 分别是样本均值和样本方差,则有

(1) $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立;

(2) $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$;

(3) $\dfrac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$;

(4) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

证　本定理(1)、(3)的证明超出本书范围,利用(1)、(2)、(3)及定理 6.2.2 不难得到(4). 下面证明(2).

由于 $\bar{X}$ 是独立正态随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的线性组合,因此 $\bar{X}$ 服从正态分布. 而

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu,$$

$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n},$$

故 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.

定理 6.2.5　设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本,并且它们相互独立,$\bar{X}$、S_1^2 及 $\bar{Y}$、S_2^2 分别是这两组样本的样本均值和样本方差,则有

(1) $F=\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$;

(2) 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中,$S_\omega=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

证　本定理结论(1)由定理 6.2.4 的(3)及定理 6.2.3 即可得到，下面证明(2).

当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，$\overline{X}\sim N\left(\mu_1,\dfrac{\sigma^2}{n_1}\right)$，$\overline{Y}\sim N\left(\mu_2,\dfrac{\sigma^2}{n_2}\right)$，且 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 相互独立，故

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)\sigma^2\right),$$

所以

$$U=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim N(0,1).$$

由定理 6.2.4 结论(3)，有 $\dfrac{n_1-1}{\sigma^2}S_1^2\sim\chi^2(n_1-1)$，$\dfrac{n_2-1}{\sigma^2}S_2^2\sim\chi^2(n_2-1)$，于是

$$V=\frac{1}{\sigma^2}[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2]-\chi^2(n_1+n_2-2).$$

又由关于 t 分布的定理 6.2.2，有

$$T=\frac{U}{\sqrt{V/(n_1+n_2-2)}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

故结论(2)成立.

§6.3　应用

一、顺序统计量及其应用

顺序统计量是数理统计学中具有丰富理论和广泛应用的一类统计量. 设总体 X 的分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，将其按大小排列为

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)},$$

称 $X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 为顺序统计量. 这里对随机变量按大小排列，是这样定义的 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的实际观测值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，将其按大小排列为 $x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$，则统计量 $X_{(k)}$ 的观测值为 $x_{(k)}$，$k=1,2,\cdots,n$.

可以求出顺序统计量 $X_{(k)}$ 的概率密度为

$$f_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(x)]^{k-1}[1-F(x)]^{n-k}f(x).$$

由顺序统计量出发可定义一些很有用的统计量，如极差 $W=X_{(n)}-X_{(1)}$，反映了样本观测值的波动幅度，它同样本方差一样是描述样本分散程度的数量指标，而且计算简便. 此外，还有常用的样本中位数 M：

$$M=\begin{cases}X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{当 } n \text{ 为奇数},\\ \frac{1}{2}\left[X_{\left(\frac{n}{2}\right)}+X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right], & \text{当 } n \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

样本中位数有类似于样本均值的作用.

由顺序统计量出发定义的统计量,计算简便是其一个特点. 更为重要的是,在有些场合,这些统计量显示出特有的优良性质. 例如,观测数据中的某些数据,由于种种原因或者不可靠、或者丢失等等. 此时,一些通常使用的统计量如 $\bar{X}$、S^2 将产生较大偏差,而基于一部分顺序统计量的方法仍然保持有效. 如设 $n=10$,即使不知道 $X_{(9)}$ 和 $X_{(10)}$,也不妨碍样本中位数的计算.

在寿命试验中经常遇到的截尾数据,也要使用顺序统计量进行分析. 设想将 n 个元件同时作寿命试验,一般常有少数的几个元件其寿命特别长,如果要等到这 n 个元件都用坏,那么时间未免过长,这时通常是根据一定的准则,定时或定数进行截尾处理,这样得到的数据只是顺序统计量前面的若干个观测值.

有些试验观测仪器只能记录下反应强度达到一定界限以上的数据(这是有广泛应用背景的情形),此时得到的只是顺序统计量后面的若干个观测值.

看过电视歌手大奖赛的观众一定还记得每个歌手的得分去掉两个最高分、去掉两个最低分,这里使用的是顺序统计量中间$(n-4)$个观测值.

顺序统计量中 $X_{(1)}$ 和 $X_{(n)}$ 在应用上具有突出重要的地位,这是下面将要介绍的内容.

二、极值的分布及其应用

极大值 $X_{(n)}$ 和极小值 $X_{(1)}$ 统称为极值. 在理论上,极值理论曾引起不少统计学家的关注,一些知名度高的学者都对此作出过贡献. 在应用上,一些灾害性的自然现象,如地震、洪水之类,都涉及极值问题. 在对材料进行疲劳试验时,极值模型是其自然而且合理的描述,这在一些大型工程设计中可找到它的应用背景.

因为 $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$,不难得到它们的分布函数和概率密度:

$$\begin{aligned}F_n(x)&=P\{X_{(n)}\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x,X_2\leqslant x,\cdots,X_n\leqslant x\}\\&=P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant x\}\cdots P\{X_n\leqslant x\}\\&=[F(x)]^n,\\F_1(x)&=P\{X_{(1)}\leqslant x\}=1-P\{X_{(1)}>x\}\\&=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}\\&=1-[1-F(x)]^n.\end{aligned}$$

于是,可得到 $X_{(n)}$ 和 $X_{(1)}$ 的概率密度分别为

$$f_n(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x),$$
$$f_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x).$$

例如，设电子元件的寿命时数 X 服从参数为 $\frac{1}{500}$ 的指数分布，现任取 5 个元件进行寿命试验，则总体 X 的概率密度和分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{500}\mathrm{e}^{-\frac{x}{500}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{500}}, & x<0,\\ 0, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

我们来计算在 600 小时之前没有元件失效的概率 p_1 和没有一个元件的寿命超过 2 000 小时的概率 p_2. 记 5 个元件的使用寿命为 $X_1,X_2,\cdots,X_5$，且

$$X_{(1)}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_5\},X_{(5)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_5\},$$

则有

$$\begin{aligned}p_1&=P\{X_{(1)}>600\}=1-F_1(600)\\&=\left[1-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{600}{500}}\right)\right]^5=\mathrm{e}^{-6}=2.4788\times10^{-3},\\p_2&=P\{X_{(5)}\leqslant 2\,000\}=F_5(2\,000)\\&=\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{2\,000}{500}}\right)^5=(1-\mathrm{e}^{-4})^5\\&=0.9117.\end{aligned}$$

习　题　六

1. **设** $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,\bar{y}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，**证明：**

(1) $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}$.

2. **由下列样本值计算样本平均值和样本方差：**

(1) 54.67，68.78，70.66，67.70，65.69；

(2) 100.3，99.7，102.2，99.3，100.7，100.5，103.1，101.5.

3. **某射手进行独立、重复的射击，击中靶子的环数及相应的次数如下：**

环　数	10	9	8	7	6	5	4
击中次数	2	3	0	9	2	0	4

求一次中靶的平均环数及环数的标准差.

4. 设总体 $X \sim N(12,4)$，$X_1, X_2, \cdots, X_5$ 为其样本.

（1）求样本平均值 $\bar{X}$ 大于 13 的概率；

（2）求样本平均值与总体均值之差的绝对值大于 1 的概率.

5. 设总体 X 在区间 $[-2,3]$ 上服从均匀分布，$X_1, X_2, \cdots, X_5$ 为其样本，$\bar{X}$ 为样本平均值，求 $E(\bar{X})$ 及 $D(\bar{X})$.

6. 设总体 $X \sim N(20,3)$，分别取样本容量 $n_1 = 10$ 及 $n_2 = 15$ 的两个样本，$\bar{X}_1$ 及 $\bar{X}_2$ 分别为两个样本的平均值，求 $P\{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| > 0.3\}$.

7. 设总体 $X \sim N(0, 0.3^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 为其样本，求 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right)$.

8. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{20}$ 为其样本，S^2 为样本方差，求

$$P\{0.4\sigma^2 \leqslant S^2 \leqslant 2\sigma^2\}.$$

9. 设总体 $X - \chi^2(n)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为其样本，求样本平均值 $\bar{X}$ 的数学期望和方差.

10. 设随机变量 X, Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，则 $\dfrac{X}{\sqrt{Y^2}}$ 服从什么分布？

11. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n, X_{n+1}$ 为其样本，记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2,$$

求证：

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \sim t(n-1).$$

12. 设总体 X, Y 相互独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别为其样本，证明：

$$\frac{n_2 \sum\limits_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sum\limits_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2} \sim F(n_1, n_2).$$

第7章　参数估计

参数估计是统计推断的基本问题之一. 在实际问题中,所遇到的总体往往是总体的分布类型知道,而所依据的几个参数未知. 例如某电话局在单位时间间隔内收到的呼唤次数 X 服从泊松分布,但参数 λ 未知. 针对未知参数,借助于总体 X 的样本对其作出估计,这就是所谓的参数估计问题. 参数估计分为参数的点估计和参数的区间估计.

§7.1　参数的点估计

参数点估计问题的一般提法是:设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$,其分布类型已知,$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 是未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本,对每一个未知参数 $\theta_i(i=1,2,\cdots,m)$,构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}_i=\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,作为对参数 θ_i 的估计. 我们称 $\hat{\theta}_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为参数 θ_i 的估计量. 将样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 代入估计量 $\hat{\theta}_i$,就得到一个具体数值 $\hat{\theta}_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,即 θ_i 的估计值. 通常在不致混淆的情况下,对估计量和估计值不做严格区分,统称为估计,并简记为 $\hat{\theta}_i$.

参数点估计的方法很多,下面介绍两种常用的方法.

一、矩估计法

矩估计法是由英国统计学家 K. 皮尔逊在19世纪末到20世纪初的一系列文章中给出的. 这个方法的思想既简单又直观:以样本矩作为相应的总体矩的估计,以样本矩的函数作为相应的总体矩的同一函数的估计.

矩估计法的具体做法如下:

设总体 X 的分布为 $f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$,若总体的各阶矩存在,则它的矩(原点矩或中心矩)是参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的函数. 此处以原点矩为例,总体 k 阶原点矩为

$$\gamma_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\text{def}} \gamma_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m),$$

$$\text{或 } \gamma_k=\sum_i x_i^m p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m).$$

用样本 k 阶原点矩 $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$ 去估计相应的总体 k 阶原点矩,即构造方程组:

$$\gamma_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)=A_k,\quad k=1,2,\cdots,m \tag{7.1.1}$$

解此方程组,其解为 $\hat{\theta}_k=\hat{\theta}_k(X_1,X_2,\cdots,X_n),k=1,2,\cdots,m$. 就以 $\hat{\theta}_k$ 作为 θ_k 的估计. 同理,若估计 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的函数 $g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$,则用 $\hat{g}(X_1,X_2,\cdots,X_n)=g(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)$ 去估计它. 这样给出的估计量就是矩估计.

例 7.1.1　设总体 X 的数学期望 μ 和方差 σ^2 都存在,但 μ、σ^2 均未知,求 μ 和 σ^2 的矩估计.

解　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的样本. 由

$$\begin{cases}\gamma_1=E(X)=\mu,\\ \gamma_2=E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2,\end{cases}$$

有
$$\begin{cases}\mu=\gamma_1,\\ \sigma^2=\gamma_2-\gamma_1^2.\end{cases}$$

将 γ_i 的矩估计 $\hat{\gamma}_i=A_i(i=1,2)$ 代入上式,得 μ、σ^2 的矩估计为

$$\hat{\mu}=A_1=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2,$$

$$\hat{\sigma}^2=A_2-A_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

需特别注意,方差的矩估计并不等于样本方差 S^2,而是等于 $\frac{n-1}{n}S^2$,这种修正的理由将在下一节说明.

例 7.1.2　设总体 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是其样本,求 λ 的矩估计.

解　由于 $\lambda=E(X)=D(X)$,故

$$\hat{\lambda}_1=\bar{X},\quad \hat{\lambda}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

均为 λ 的矩估计. 一个参数 λ 有两个不同的矩估计,在实际应用中,究竟采用哪一个呢？这除了要考虑我们后面将要讨论的估计量的优良性标准外,一般选用低阶矩.

例 7.1.3　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自定义在 $[a,b]$ 上的均匀分布总体的样本,求参数 a 和 b 的矩估计.

解　由于 $E(X)=\frac{a+b}{2}$,$D(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2$,故得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{a+b}{2}=\bar{X},\\ \dfrac{(b-a)^2}{12}=M_2.\end{cases}$$

由此方程组解得 a 和 b 的矩估计分别为

$$\hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3M_2},\quad \hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3M_2}.$$

例 7.1.4　设总体 X 的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求参数 θ 的矩估计量.

解　由

$$E(X)=\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$

令

$$\overline{X}=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$

得 θ 的矩估计为

$$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}.$$

二、极大似然估计法

由前面的讨论可知，矩估计法以总体的矩存在为前提，然而有些分布不存在数学期望，当然就不存在高阶矩了，此时矩估计法就行不通. 由英国统计学家 R. A. 费歇给出的极大似然估计法，无论在理论上还是在应用上，至今仍是一种重要而普遍适用的参数估计法.

极大似然估计法的基本思想就是按照最大可能性的准则进行推断，下面通过一个例题说明这种思想.

例 7.1.5　从某企业生产的一批产品中随机抽取 100 只，结果发现有 90 只合格品，10 只次品，试估计该批产品的次品率.

解　随机抽取一只产品，设抽到次品的概率为 p. 令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 次取到的是次品},\\ 0, & \text{第 } i \text{ 次取到的是合格品},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,100,$$

则 $P(X_i=1)=p$，$P(X_i=0)=1-p$.

依题意，抽取的 100 只产品中有 10 只次品的概率为

$$\begin{aligned}L(p)&=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}\\&=\prod_{i=1}^{100}P\{X=x_i\}=p^{10}(1-p)^{90}.\end{aligned}$$

根据极大似然估计法的基本思想，我们选择使函数 $L(p)$ 取到最大值的数 $\hat{p}$ 作为 p 的估计值，即令

$$\frac{\mathrm{d}L(p)}{\mathrm{d}p}=10(1-p)-90p=0.$$

解出 $p=0.10$. 当 $p=0.10$ 时,$L(p)$ 取到最大值. 于是我们取 $\hat{p}=0.10$ 作为 p 的极大似然估计值.

一般地,设总体分布形式已知,含有一个或几个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自该总体的样本,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本观测值,相当于事件

$$\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\} \tag{7.1.2}$$

已经发生. 我们把已经发生的事件,看成最可能出现的事件,即认为它具有最大的概率.

对于离散型总体,事件(7.1.2)的概率为

$$\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m). \tag{7.1.3}$$

对于连续型总体,随机样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$落在点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的边长依次为 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 的 n 维长方形邻域内的概率近似为

$$\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\mathrm{d}x_i=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)\prod_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i.$$

因为 $\prod\limits_{i=1}^{n}\mathrm{d}x_i$ 与参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 无关,故只需考虑

$$\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m). \tag{7.1.4}$$

我们将(7.1.3)、(7.1.4)统称为参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的似然函数,记为 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$. 若

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m)=\max_{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m}L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m), \tag{7.1.5}$$

则称 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的极大似然估计值,称 $\hat{\theta}_k(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 为参数 θ_k 的极大似然估计量.

由上可见,求未知参数的似然估计就归结为求似然函数 L 的最大值点. 由于对数函数是单调增函数,所以 $\ln L$ 与 L 在相同点处达到最大值. 为了计算方便,一般通过求解如下的似然方程组

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_k}=0,\qquad k=1,2,\cdots,m \tag{7.1.6}$$

得到未知参数的极大似然估计,多数常见情形都属于这种情况. 然而在一些情况下,问题比较复杂,似然方程组的解可能不唯一,这时就需用微积分学知识进一步判定哪一个是最大值点. 还需特别指出,若似然函数关于 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的导数不存在时,就无法得到似然方程组(7.1.6),因此须回到极大似然估计的定义

(7.1.5)式直接求解.

例 7.1.6　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,求未知参数 μ 和 σ^2 的极大似然估计量.

解　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本观测值. 因为正态总体的概率密度

$$\varphi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

所以似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}.$$

其对数为

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

由似然方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0.\end{cases}$$

解得

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

由于似然方程组有唯一解$(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)$,而且它一定是最大值点,所以参数 μ 和 σ^2 的极大似然估计量是

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=M_2.$$

例 7.1.7　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自泊松总体 $P(\lambda)$ 的样本,求未知参数 λ 的极大似然估计量.

解　泊松总体分布律为

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},\quad x=0,1,2,\cdots$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本观测值,则似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!},$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i !).$$

似然方程为

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

解得

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

因为 $\ln L(\lambda)$ 的二阶导数总是负值,故得 λ 的极大似然估计值为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$,极大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

例 7.1.8　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是在区间 $[a, b]$ 上均匀分布总体中抽出的样本,求 a, b 的极大似然估计.

解　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本值,均匀分布总体的概率密度和似然函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{当 } a \leqslant x \leqslant b \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$L(a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & \text{若 } a \leqslant x_i \leqslant b, i = 1, 2, \cdots, n; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由于 $L(a, b)$ 不连续,此时不能用似然方程(7.1.6)求解,故用极大似然估计的定义直接求解.

记 $x_{(1)} = \min(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 于是对于满足条件 $a \leqslant x_{(1)}$,$b \geqslant x_{(n)}$ 的任意 a, b 有

$$L(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n} \leqslant \frac{1}{(x_{(n)} - x_{(1)})^n}.$$

即 $L(a, b)$ 在 $a = x_{(1)}$,$b = x_{(n)}$ 取到最大值. 故 a, b 的极大似然估计值为

$$\hat{a} = x_{(1)} = \min(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad \hat{b} = x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

a, b 的极大似然估计量为

$$\hat{a} = X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n), \hat{b} = X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n).$$

至此,我们以正态分布、泊松分布、均匀分布的参数估计为例讨论了矩估计和极大似然估计,除了均匀分布外,两种估计都是一致的.

§7.2　估计量的优良性准则

由前面的讨论可知,对于同一个未知参数,用不同的估计方法求出的估计量

可能不相同. 尽管原则上任何统计量均可以作为未知参数的估计量,但是在同一参数的许多可能的估计量中哪一个是最好的估计量呢?这就涉及用什么样的标准来评价估计量的问题. 下面介绍几个常用的评价估计量的优良性准则.

一、无偏性

未知参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是一个随机变量,对一次具体的样本观察值,估计值 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可能比真值大,也可能比真值小. 而一个好的估计量不应总是偏大或偏小,在多次试验中所得估计量的平均值应与真实参数吻合,这就是无偏性所要求的.

定义 7.2.1 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的一个估计量,如果对 θ 的所有可能取值,都有

$$E(\hat{\theta})=\theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计量.

一个估计量如果不是无偏的就称之为有偏估计. 称 $E(\hat{\theta}-\theta)$ 为估计量 $\hat{\theta}$ 的偏差,在科学技术中也称之为 $\hat{\theta}$ 的系统误差. 由此,无偏估计的实际意义就在于无系统误差.

例 7.2.1 设总体的 k 阶原点矩 $\gamma_k=E(X^k)\ (k\geqslant 1)$ 存在,则样本的 k 阶原点矩

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$$

是 γ_k 的无偏估计量.

证 因为

$$E(A_k)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X^k)=E(X^k)=\gamma_k,$$

所以 A_k 是 γ_k 的无偏估计.

例 7.2.2 设总体数学期望为 μ,方差为 σ^2,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的样本,则样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计量.

证 因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2&=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)]^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)+n(\overline{X}-\mu)^2,\end{aligned}$$

而 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)=n(\overline{X}-\mu)$，故

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2.$$

因为 $\mu=E(X_i)=E(\overline{X})$，且由方差的定义，有

$$E[(X_i-\mu)^2]=D(X_i)=\sigma^2,$$

$$E[(\overline{X}-\mu)^2]=D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n},$$

所以

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}=(n-1)\sigma^2,$$

于是

$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]=\frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2=\sigma^2.$$

即 S^2 是 σ^2 的无偏估计.

前面曾经用矩法和极大似然法求得 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，很显然，它不是 σ^2 的无偏估计. 这就是我们为什么将二阶样本中心矩 $M_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 的分母 n 修正为 $n-1$ 获得样本方差 S^2 的理由.

二、有效性

无偏性是对未知参数估计量的最基本要求，但是一般来说，对于总体的某一未知参数，可以有多个无偏估计量存在，如何从众多无偏估计量中去挑选更为理想的估计量呢？由于方差反映了随机变量在期望值周围取值的分散或集中程度，所以一个好的估计量 $\hat{\theta}$，不仅应该是待估参数 θ 的无偏估计，而且还应该有尽可能小的方差.

定义 7.2.2　设 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，$\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的两个无偏估计，如果对 θ 的所有可能取值，都有

$$D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2),$$

则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

设 $\hat{\theta}_0$ 是 θ 的无偏估计，如果对 θ 的任何一个无偏估计 $\hat{\theta}$，都有

$$D(\hat{\theta}_0)\leqslant D(\hat{\theta})$$

对 θ 的所有可能取值成立，则称 $\hat{\theta}_0$ 为 θ 的最小方差无偏估计．在"方差愈小愈好"这个准则下，$\hat{\theta}_0$ 是最好的估计量．

例 7.2.3　$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 与 $X_c=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\left(\sum_{i=1}^{n}c_i=1\right)$ 都是总体数学期望 μ 的无偏估计量，证明 $\bar{X}$ 比 X_c 有效．

证　由代数知识，当诸 c_i 相等时，$\sum_{i=1}^{n}c_i^2$ 取最小值，故有

$$\sum_{i=1}^{n}c_i^2\geqslant\frac{1}{n}.$$

于是有

$$D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}\leqslant\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)=D\left(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i\right)=D(X_c),$$

故 $\bar{X}$ 比 X_c 有效．

对于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，μ 和 σ^2 未知，可以证明，$\bar{X}$ 和 S^2 是 μ 和 σ^2 的最小方差无偏估计．

通常要求出参数的最小方差无偏估计是有相当难度的，其方法也超出了本书的范围，这里不作介绍．

三、相合性

估计量作为样本的函数，一般与样本容量 n 有关，从直观上看，n 越大，估计量越精确，所以我们希望，一个好的估计量应随着 n 的增大而越来越接近于未知参数的真值．

定义 7.2.3　设 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量，如果对 θ 的所有可能取值，当 $n\to\infty$ 时，$\hat{\theta}_n$ 依概率收敛于 θ，即对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon\}=1\quad\text{或}\quad\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}_n-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0$$

成立，则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的相合估计量或一致估计量．

例 7.2.4　设总体 X 的方差存在，证明 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是总体数学期望 μ 的相合估计量．

证　因 $\sigma^2=D(X)$ 存在，故由切比雪夫大数定律，对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|\geqslant\varepsilon\right\}=0.$$

所以 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$是$\mu$的相合估计量.

相合性是对估计量很基本的要求. 可以证明 S^2与 M_2都是 σ^2的相合估计量.

例 7.2.5　设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ $(n>1)$为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$的样本,证明 样本方差 S^2 与样本二阶中心矩 M_2 都是总体方差 σ^2 的相合估计量.

证　先证 S^2 是 σ^2 的相合估计量. 因为

$$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1),$$

所以

$$E(S^2)=\sigma^2,D(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

由切比雪夫不等式,$\forall\varepsilon>0$,有

$$\begin{aligned}0\leqslant P&\{|S^2-\sigma^2|>\varepsilon\}\\&=P\{|S^2-E(S^2)|>\varepsilon\}\\&\leqslant\frac{D(S^2)}{\varepsilon^2}=\frac{2\sigma^4}{(n-1)\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

故$\forall\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|S^2-\sigma^2|>\varepsilon\}=0.$$

即 S^2 是 σ^2 的相合估计量.

下面证明 M_2 是 σ^2 的相合估计量. 因为

$$\frac{n}{\sigma^2}M_2\sim\chi^2(n-1),$$

所以

$$E(M_2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2,D(M_2)=\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4.$$

于是

$$\begin{aligned}E[(M_2-\sigma^2)^2]&=E\{[M_2-E(M_2)+E(M_2)-\sigma^2]^2\}\\&=D(M_2)+[E(M_2)]^2-2\sigma^2E(M_2)+\sigma^4\\&=\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4.\end{aligned}$$

类似于切比雪夫不等式的证明,$\forall\varepsilon>0$,有

$$0\leqslant P\{|M_2-\sigma^2|>\varepsilon\}\leqslant\frac{E[(M_2-\sigma^2)^2]}{\varepsilon^2}=\frac{2n-1}{n^2\varepsilon^2}\sigma^4.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} P\{|M_2-\sigma^2|>\varepsilon\}=0.$$

所以 M_2 是 σ^2 的相合估计量.

由上可见,对于正态总体,其样本均值、样本方差都是总体均值、总体方差的相合估计量. 事实上,对于其他总体,结论也同样成立. 可以证明,在较为一般情况下,用矩估计法和极大似然估计法得到的估计量都是被估参数的相合估计量.

§7.3 区间估计

一、基本概念

参数的点估计,讨论的是根据样本观测值明确求出参数估计值的方法,结果非常直观. 但是点估计的方法无法告诉我们估计值的可靠程度是多少. 区间估计是给出一个范围,并在要求的可信程度下保证这个范围包含未知参数,恰好弥补了点估计的不足.

现今最流行的一种区间估计方法来自于原籍波兰的美国统计学家 J. 奈曼建立的估计理论.

设 θ 是总体分布中的一个未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自该总体的样本. 对 θ 的区间估计,就是给出两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$、$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,并且恒有 $\hat{\theta}_1\leqslant\hat{\theta}_2$,以它们为端点构成一个区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$,则区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 是一个随机区间. 对具体的问题,一旦得到了样本观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,便给出了一个具体的区间 $[\hat{\theta}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\hat{\theta}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$,并估计这个区间将未知参数 θ 包含在内. 这里有两个很自然的要求:

① 随机区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 要以很大的概率包含未知参数 θ,即 $P\{\hat{\theta}_1\leqslant\theta\leqslant\hat{\theta}_2\}$ 要尽可能大. 此概率反映了区间估计的可靠程度.

② 区间长度 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ 要尽可能小. 实际上区间长度反映了区间估计的精确程度,这里即是要求精确度要尽可能地高.

我们自然对①、②两个要求都希望得到保证,但它们又是相互矛盾的. 区间估计理论和方法的基本问题,就是研究在已有的样本资源的限制下,如何找出更好的估计方法,以尽量提高估计的可靠性和精确度,但终归有一定的限度. 由奈曼提出并且现今仍被广泛接受的原则是:先确定一个能接受的可靠度,在这个前提下尽量使精确度提高. 为此,有如下的定义.

定义 7.3.1 给定一个很小的数 $\alpha>0$,如果对于参数 θ 的所有可能取值,都有

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant\theta\leqslant\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha, \tag{7.3.1}$$

则称随机区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

置信区间的意义可作如下直观解释:如果进行N次简单随机抽样,则得到N个具体的区间,有的包含未知参数θ的真值,有的不包含. 当式(7.3.1)成立时,这些区间中,包含θ真值的约占$100(1-\alpha)\%$. 一般在应用上,α取值为0.05、0.01的居多,当然也可以取0.10,0.005,0.001等等,主要视情况需要而定. 这些数字本身并无特殊意义,主要是标准化后对造分布临界值表或分布函数数值表方便.

二、枢轴变量法构造置信区间

区间估计的主要工作,就是在给定的置信度下,寻找估计精度尽可能高的置信区间. 下面我们通过一个具体例子给出构造置信区间的方法.

例 7.3.1 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,其中σ^2已知,求未知参数μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

解 因为样本均值$\overline{X}$是μ的无偏估计,且$\overline{X}\sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$,所以

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

于是由标准正态分布的上侧分位数的定义可知,对于给定的置信度$1-\alpha$,有$P\{|U|\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$(如图7.1所示).

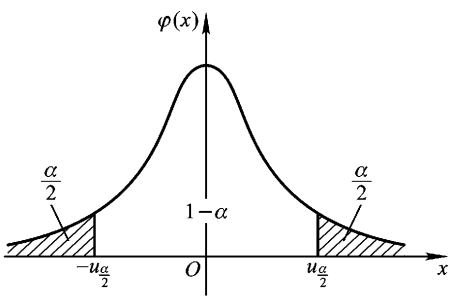


图 7.1

即

$$\begin{aligned}&P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\\&=P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant\mu\leqslant\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\\&=1-\alpha,\end{aligned}$$

从而得到μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right]$.

由此例悟出一种寻找置信区间的一般方法. 归结如下：

1° 找出一个关于待估计参数θ的良好的估计量（如上例中的$\overline{X}$）；

2° 构造一个包含参数θ及其估计量的函数$W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$，除了被估计参数$\theta$外，$W$不能包含其他未知数，并且$W$的概率分布能完全确定，与$\theta$无关（如上例中$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，其分布是$N(0,1)$，与$\mu$无关），函数$W$称为枢轴变量；

3° 对任何参数$a<b$，不等式$a\leqslant W\leqslant b$可以改写为等价的形式$A\leqslant\theta\leqslant B$，$A$与$B$是不包含未知参数的统计量；

4° 根据W的分布，找出其上侧$\frac{\alpha}{2}$分位数$\omega_{\frac{\alpha}{2}}$和上侧$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$分位数$\omega_{1-\frac{\alpha}{2}}$，有$P(\omega_{1-\frac{\alpha}{2}}\leqslant W\leqslant\omega_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha$，改写为等价的形式$P(A\leqslant\theta\leqslant B)=1-\alpha$，区间$[A,B]$即是参数$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

上述步骤的关键，是构造枢轴变量$W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$，它就好像是一个轴心，由$a\leqslant W\leqslant b$转出我们需要的不等式$A\leqslant\theta\leqslant B$. 下面通过一些常用的重要区间估计来说明这个方法.

三、一个正态总体参数的置信区间

设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体X的样本，$\overline{X}$与S^2分别为样本均值和样本方差.

1. 总体均值μ的置信区间

(1) σ^2已知.

例7.3.1正是这种情形，这时枢轴变量$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right].\tag{7.3.2}$$

(2) σ^2未知.

此时$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$不再构成枢轴变量，因为$\sigma^2$未知，故用$S^2$代替$\sigma^2$，即可得到枢轴变量$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，注意到$t$分布关于$Y$轴对称（见图7.2），于是有

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leqslant\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\leqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha,$$

进行恒等变形,得到参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left[\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]. \tag{7.3.3}$$

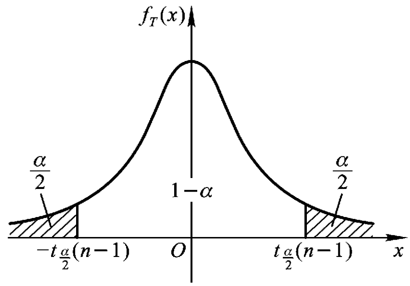


图 7.2

例 7.3.2　我们知道某台天平秤没有系统误差但存在随机误差,且随机误差服从正态分布. 为估计一物件 G_1 的重量 μ,将其在这台天平上重复秤了 5 次,得结果为(单位 克)

8.62,8.58,8.73,8.61,8.53

若 $\alpha=0.05$,试求 μ 的置信区间.

解　由题意知,总体分布为 $N(\mu,\sigma^2)$,σ^2 未知. 根据样本计算出 $\bar{x}=8.614$,$s=0.0737$,由 $n=5$,$\alpha=0.05$,查表得 $t_{0.025}(4)=2.7764$,故

$$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=8.614-\frac{0.0737}{\sqrt{5}}\times 2.7764=8.5225,$$

$$\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=8.614+\frac{0.0737}{\sqrt{5}}\times 2.7764=9.7055.$$

即参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 [8.5225,9.7055].

2. **总体方差 σ^2 的置信区间**

此处,根据实际问题的需要,只介绍 μ 未知的情形.

我们知道 S^2 是 σ^2 的无偏估计,根据定理 6.2.4,$\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$,于是 $\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2$ 可作为枢轴变量. χ^2 分布不是对称分布,可由 χ^2 分布的上侧分位数表查出 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 和 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$,见图 7.3,使得:

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\leqslant\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2\leqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=1-\alpha,$$

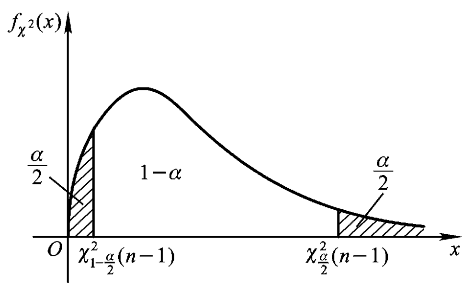


图 7.3

即可得到 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]. \tag{7.3.4}$$

至于参数 μ 为已知的情况下,总体方差 σ^2 的置信区间请读者自己考虑.

例 7.3.3 某工厂生产的一批螺栓,其长度(单位:cm)服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,随机抽取 5 个样品,测得 $\bar{x}=13.0$,$s^2=0.1$,$\alpha=0.05$. 试求 σ^2 的置信区间.

解 $n=5$,$\alpha=0.05$,查表得 $\chi^2_{0.975}(4)=11.143$,$\chi^2_{0.025}(4)=0.484$. 因为 μ 未知,所以 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]=\left[\frac{4\times0.1}{11.143},\frac{4\times0.1}{0.484}\right]=[0.0359,0.8264].$$

四、两个正态总体的区间估计

两个正态总体的区间估计问题,在实际应用中经常会遇到. 例如,已知产品的某一质量指标服从正态分布,但由于设备的更新、工艺流程的改变等因素,都会引起总体均值或方差的改变. 我们需要知道这些变化的程度有多大?这就需要考虑两个正态总体均值差或方差比的区间估计.

设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 是来自正态总体 X 的样本;总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是来自正态总体 Y 的样本. 两个样本相互独立,$\overline{X}$、$\overline{Y}$ 和 S_1^2、S_2^2 分别表示两个样本的均值和方差.

1. 两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

(1) σ_1^2、σ_2^2 已知.

因为 $\overline{X}$、$\overline{Y}$ 分别为 μ_1、μ_2 的无偏估计,所以 $\overline{X}-\overline{Y}$ 是 $\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计. 又由于 $\overline{X}$、$\overline{Y}$ 相互独立,且 $\overline{X}\sim N\left(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$、$\overline{Y}\sim N\left(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$,故

$$\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

进一步取枢轴变量为

$$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

由此即得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]. \tag{7.3.5}$$

(2) σ_1^2、σ_2^2 未知,但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

此时记

$$S_{\omega}=\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(X_j-\overline{Y})^2\right]\Big/(n_1+n_2-2)}$$
$$=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}.$$

由定理 6.2.5 知

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_{\omega}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

于是以 T 作为枢轴变量，求出 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[(\overline{X}-\overline{Y})-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_{\omega}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},(\overline{X}-\overline{Y})+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_{\omega}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right] \quad (7.3.6)$$

例 7.3.4　例 7.3.2 中天平秤称重量时，设有另一架天平秤，将物件 G_1 放在该架天平秤上称 4 次，得结果为(单位:克)

$$8.55, 8.50, 8.43, 8.61.$$

假定两架天平秤的称重值都服从正态分布，且它们的方差相同(即天平的称重精度相同). 试求两架天平秤的平均称重值之差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解　因为两架天平的称重精度相同，故可用(7.3.6). 前面已算出 $\bar{x}=8.614$, $s_1=0.0737$;再计算得 $\bar{y}=8.5225$, $s_2=0.0763$. 于是

$$s_{\omega}=\sqrt{(4\times0.0737^2+3\times0.0763^2)/(5+4-2)}=0.0748.$$

查 t 分布表，$t_{0.025}(7)=2.3646$，将这些数值都代入(7.3.6)，算出 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $[-0.0271, 0.2101]$. 由于该区间中包含 0，在实际问题中可以认为 μ_1 与 μ_2 没有显著差异.

2. 两个正态总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

判断两个正态总体方差 σ_1^2 和 σ_2^2 的大小，通常可化为两个正态总体方差比的区间估计问题. 我们仅讨论总体均值 μ_1、μ_2 未知的情况.

由定理 6.2.5 知

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1),$$

故 F 可作为枢轴变量，因为 F 分布非对称分布，需要查出 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ 和 $F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$，见图 7.4，使得：

$$P\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\leqslant F\leqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\}=1-\alpha,$$

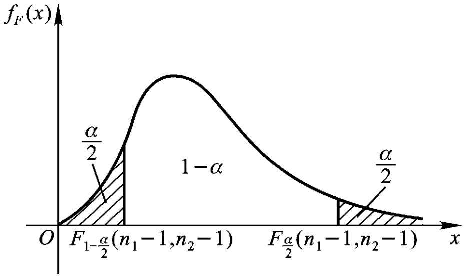


图 7.4

从而确定出比值$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1),\frac{S_2^2}{S_1^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right]. \tag{7.3.7}$$

当参数 μ_1 和 μ_2 均为已知时,则可通过构造枢轴变量

$$F=\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/\sigma_1^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1,n_2)$$

进行方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计.

例 7.3.5 在例 7.3.4 中,假定两个正态总体的方差相等是很重要的. 如果现在我们不知道这两架天平秤的称重精度相同,为了比较 σ_1^2 和 σ_2^2 的大小,该如何处理？

解 进行两个正态总体方差比的区间估计,因为 μ_1 和 μ_2 未知,故可用(7.3.7).

$$n_1=5,n_2=4,\alpha=0.05,\text{查 } F \text{ 分布表得}$$

$$F_{0.025}(4,3)=15.10,$$

$$F_{0.975}(4,3)=\frac{1}{F_{0.025}(3,4)}=\frac{1}{9.98}=0.1002.$$

于是比值$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left[\frac{0.0763^2}{0.0737^2}\times0.1002,\frac{0.0763^2}{0.0737^2}\times15.10\right]=[0.1074,16.1842].$$

由于该区间中包含 1,在实际中可以认为 σ_1^2 和 σ_2^2 没有显著差异,即例 7.3.4 中的结论是合理的.

五、大样本方法构造置信区间

前面讨论了正态总体参数的区间估计，而对非正态总体而言，要确定其抽样分布往往是比较困难的. 大样本方法就是以中心极限定理为理论基础，利用极限分布确定枢轴变量的分布，进而构造出置信区间. 本质上这是利用近似分布代替精确分布以构造近似置信区间.

例 7.3.6　在 n 次独立重复试验中，观察事件 A 发生的次数，记为 Y_n. 设在每次试验中，$P(A)=p$. 求 p 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

对离散型总体的参数去寻找具有指定置信度的置信区间，难度很大，其方法已超过本书的范围. 当 n 足够大时，可利用近似分布构造枢轴变量.

解　由中心极限定理，当 n 足够大时，$\dfrac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$近似服从 $N(0,1)$，以它作为枢轴变量，有

$$P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\approx 1-\alpha,$$

等价地改写为

$$P\{A\leqslant p\leqslant B\}\approx 1-\alpha.$$

其中，A 和 B 是关于 p 的二次方程（将 Y_n 看作一般已知数）

$$(Y_n-np)^2=np(1-p)u_{\frac{\alpha}{2}}^2$$

的两个根，即

$$A=\frac{1}{2(n+u_{\frac{\alpha}{2}}^2)}\left[2Y_n+u_{\frac{\alpha}{2}}^2-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{4Y_n(n-Y_n)}{n}+u_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right],$$

$$B=\frac{1}{2(n+u_{\frac{\alpha}{2}}^2)}\left[2Y_n+u_{\frac{\alpha}{2}}^2+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{4Y_n(n-Y_n)}{n}+u_{\frac{\alpha}{2}}^2}\right].$$

故得到参数 p 的置信区间为 $[A,B]$. 由于枢轴变量的分布用的是近似分布，因此置信度只是近似地等于 $1-\alpha$.

例 7.3.7　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自泊松分布总体 $P(\lambda)$ 的样本，求参数 λ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解　由于泊松分布 $P(\lambda)$ 的数学期望和方差都是 λ，由中心极限定理，当 n 足够大时，

$$\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\lambda\right)\Big/\sqrt{n\lambda}$$

近似地服从 $N(0,1)$，于是

$$P\left\{-u_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \leqslant u_{\frac{\alpha}{2}}\right\} \approx 1-\alpha,$$

等价于

$$P\{A \leqslant \lambda \leqslant B\} \approx 1-\alpha.$$

其中,A 和 B 是二次方程

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\lambda\right)^2 = n\lambda u_{\frac{\alpha}{2}}^2$$

的两个根,即

$$A = \overline{X} + \frac{1}{2n}u_{\frac{\alpha}{2}}^2 - u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}}{n} + \frac{1}{4n^2}u_{\frac{\alpha}{2}}^2},$$

$$B = \overline{X} + \frac{1}{2n}u_{\frac{\alpha}{2}}^2 + u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{X}}{n} + \frac{1}{4n^2}u_{\frac{\alpha}{2}}^2}.$$

故得到 λ 的置信区间为 $[A,B]$,置信度近似地为 $1-\alpha$.

例 7.3.8 设某总体数学期望为 μ,方差为 σ^2,而 μ、σ^2 均未知,从该总体中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$. 试求参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

解 由中心极限定理,$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$的极限分布($n\to\infty$)为 $N(0,1)$. 由于 σ 未知,不能以$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$作为枢轴变量. 而样本标准差 S 是 σ 的一个相合估计,所以当 $n\to\infty$ 时,$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$仍以 $N(0,1)$ 为极限分布. 因此,当 n 足够大时,不难得出 μ 的置信区间为

$$\left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right].$$

置信度近似地为 $1-\alpha$,近似的程度如何不仅取决于样本容量 n 的大小,还要看总体分布如何.

上述例 7.3.6 ~ 7.3.8 使用的区间估计方法,称为大样本区间估计. 在统计学中,一个统计方法如果依据的是有关变量的精确分布,不论样本容量多大都称为小样本方法;而一个统计方法如果是基于有关变量的极限分布($n\to\infty$),则称这个方法是大样本方法. 至于 n 究竟应该多大?理论上很难给出 n 的一个界限,但许多应用实践表明,当 $n\geqslant 30$ 时,近似程度还是可以接受的.

六、单侧置信区间

前面讨论的区间估计问题,其置信区间都有两个有限的端点,这样的置信区

间称为双侧置信区间. 但在有些实际问题中,我们常常关心的是未知参数至少有多大(例如设备、元件的使用寿命等),或者是未知参数至多是多少(例如产品的不合格品率、杂质含量等),这就引出了只有一个有限端点的单侧置信区间概念.

定义 7.3.2　设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自某个总体的样本,总体分布包含未知参数 θ,$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是两个统计量. 如果

1)对 θ 的一切可取的值,有

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant\theta\}=1-\alpha, \tag{7.3.8}$$

则称随机区间 $[\hat{\theta}_1,+\infty)$ 为参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间,$\hat{\theta}_1$ 称为单侧置信下限;

2)对 θ 的一切可取的值,有

$$P\{\theta\leqslant\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha, \tag{7.3.9}$$

则称随机区间 $(-\infty,\hat{\theta}_2]$ 为参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间,$\hat{\theta}_2$ 称为单侧置信上限.

由定义可知,单侧置信区间的估计与双侧情形完全类似,只需将置信区间的一个端点换成 $+\infty$ 或 $-\infty$,而将另一个端点中的 $\frac{\alpha}{2}$ 换成相应的 α 即可. 因此,前面所有求置信区间的方法,都可以很容易地平行移至此处. 比如,$u_{\frac{\alpha}{2}}$ 换成 u_α,$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 换成 $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$,等等.

例如,总体分布 $N(\mu,\sigma^2)$,σ^2 已知,求参数 μ 的单侧置信上、下限. 仍然以 $U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 为枢轴变量,其分布为 $N(0,1)$. 由

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant u_\alpha\right\}=1-\alpha,$$

得 μ 的单侧置信下限为 $\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$,相应的单侧置信区间为 $\left[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha,+\infty\right)$. 又由

$$P\left\{-u_\alpha\leqslant\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha,$$

得 μ 的单侧置信上限为 $\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$,相应的单侧置信区间为 $\left(-\infty,\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\right]$.

§7.4　应用

一、柯西分布的参数估计

设总体分布有概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]},\quad -\infty<x<+\infty.$$

这个分布叫做柯西分布. 它包含一个参数 θ,θ 可取任何实数值. 柯西分布的概率密度曲线关于 $x=\theta$ 对称.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为抽取自柯西分布总体的样本,要对未知数 θ 进行估计. 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]}\mathrm{d}x=\infty,$$

于是,柯西分布的数学期望(一阶原点矩)不存在,因而更高阶的矩也不存在. 所以无法使用矩估计法估计 θ. 如果用极大似然法,设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本观测值,似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\pi^{-n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(x_i-\theta)^2},$$

取对数,并令$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=0$,得到

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\theta}{(x_i-\theta)^2}=0,$$

这个方程有许多根且求解很不容易. 因此,运用极大似然法估计 θ 也不是理想的办法.

注意到 θ 是柯西分布的对称中心,即设 X 是服从柯西分布的随机变量,则有

$$P\{X\geqslant\theta\}=P\{X<\theta\}=\frac{1}{2},$$

称 θ 是总体分布的中位数$\left(\frac{1}{2}\text{分位数}\right)$. 我们在 §6.3 中定义过样本中位数 M:

$$M=\begin{cases}X_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{当 } n \text{ 为奇数};\\ \frac{1}{2}[X_{(\frac{n}{2})}+X_{(\frac{n}{2}+1)}], & \text{当 } n \text{ 为偶数},\end{cases}$$

则样本中位数是总体中位数的简便易行并且合理的估计,它们一个是总体分布的“中心”,一个是样本的“中心”. 因此,取 $\hat{\theta}=M$ 作为 θ 的估计.

可以证明,当 $n\geqslant3$,样本中位数 M 是 θ 的无偏估计. 并且,其大样本的渐近方差与最小方差无偏估计的方差之比为$\frac{\pi^2}{8}\approx1.23$,表明这个估计具有良好的有效性.

二、样本数据不完全时参数的区间估计

在产品的寿命试验中，常产生截尾的不完全数据；某些特殊试验只能得到部分观测值；由于偶然发生的意外可能丢失数据等等. 对于这种情况，如何根据不完全的样本数据对总体分布中的参数进行估计，有着广泛的应用背景. 相对来说，寻求参数的点估计容易一些，而对参数进行区间估计，由于枢轴变量的概率分布不易确定，因而有较大的难度. 下面介绍的正态分布总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 均值 μ 的区间估计，是近年才发表的一个新成果.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$ 是相应的顺序统计量. 我们将根据这些顺序统计量中的两个，构造对参数 μ 进行区间估计所需的枢轴变量.

记

$$H=\frac{X_{(n-r+1)}+X_{(r)}-2\mu}{X_{(r)}-X_{(n-r+1)}},$$

其中，r 是满足 $\frac{n+1}{2}<r<n$ 的整数. 由于

$$H=\frac{\frac{X_{(n-r+1)}-\mu}{\sigma}+\frac{X_{(r)}-\mu}{\sigma}}{\frac{X_{(r)}-\mu}{\sigma}-\frac{X_{(n-r+1)}-\mu}{\sigma}},$$

而 $\frac{X_{(n-r+1)}-\mu}{\sigma}$ 和 $\frac{X_{(r)}-\mu}{\sigma}$ 可以看作来自标准正态总体的顺序统计量. 因此，H 的概率分布与 μ,σ^2 的取值无关，可以作为枢轴变量.

不难证明，H 的分布关于 Y 轴 $(x=0)$ 对称. 同时，我们还可以证明 H 的概率密度函数为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!}\displaystyle\int_{-\infty}^{0}h(y,t)\,\mathrm{d}t, & y<-1.\\[2ex] \dfrac{n!}{(n-r)!}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}h(y,t)\,\mathrm{d}t, & y>-1.\end{cases}$$

其中，函数

$$\begin{aligned}h(y,t)=&\frac{1}{\pi(y+1)^2}\exp\left\{-\frac{y^2+1}{(y+1)^2}t^2\right\}\cdot\\&\cdot\sum_{i=1}^{2r-n-2}\sum_{j=0}^{n-r}\frac{(-1)^j}{i!(2r-n-i-2)!j!(n-r-j)!}\cdot\\&\cdot[\Phi(t)]^{i+j}\left[\Phi\left(\frac{y-1}{y+1}t\right)\right]^{r-i-2}.\end{aligned}$$

利用上述表达式，通过数值计算，可求得 H 的分位数，当然比较繁杂且有一定难度. 另一个有效的方法是当 n 不大时，利用计算机模拟 H 的概率分布；当 n 较大时，利用大样本方法寻求置信区间. 可以证明，当 n 足够大时，H 近似地服从 $N(0,\sigma_H^2)$，其中

$$\sigma_H^2=\frac{n-r}{2n^2\left\{\Phi^{-1}\left(\frac{n-r}{n}\right)\varphi\left[\Phi^{-1}\left(\frac{n-r}{n}\right)\right]\right\}^2}.$$

这里，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

进一步不难得到参数 μ 的置信区间为

$$\left[\frac{X_{(n-r+1)}+X_{(r)}}{2}-\sigma_H u_{\frac{\alpha}{2}}(X_{(r)}-X_{(n-r+1)}),\right.$$
$$\left.\frac{X_{(n-r+1)}+X_{(r)}}{2}+\sigma_H u_{\frac{\alpha}{2}}(X_{(r)}-X_{(n-r+1)})\right],$$

置信度近似等于 $1-\alpha$.

习 题 七

1. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一组样本，求下列各总体的分布中未知参数的矩法估计量.

(1) 总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\quad \lambda>0 \text{ 为未知参数.}$$

(2) 总体 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,\quad 0<p<1.$$

p 为未知参数.

(3) 总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}\quad \theta>0 \text{ 为未知参数.}$$

(4) 总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}; & x\geqslant c,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

式中 $c>0$ 为已知，$\theta>1$ 为未知参数.

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一组样本，求下列各总体的分布中未知参数的极大似然估计量.

(1) 总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad \theta>0\ \text{为未知参数}.$$

（2）总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\beta x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

式中 k 为已知正整数，$\beta>0$ 为未知参数.

（3）总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

式中 $\sigma>0$ 为未知参数.

（4）总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-x^2/2\theta^2}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}\quad \theta>0\ \text{为未知参数}.$$

（5）总体 X 的分布律为

$$P\{X=x\}=C_m^x p^x(1-p)^{m-x},\quad x=0,1,2,\cdots,m.$$

式中 $p(0<p<1)$ 为未知参数.

3. 从灯泡厂某日生产的一批灯泡中任取 10 个进行寿命试验，测得灯泡寿命（单位：小时）如下：

1 050，　1 100，　1 080，　1 120，　1 200，

1 250，　1 040，　1 130，　1 300，　1 200.

求该日生产的整批灯泡的平均寿命及寿命方差的无偏估计值.

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一组样本，且已知 $E(X)=a$，证明 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$ 是 $D(X)=\sigma^2$ 的无偏估计量.

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为其样本，试求 C，使 $C\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

6. 设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量且 $D(\hat{\theta})>0$，试证 $(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

7. 设总体 $X\sim N(\mu,1)$，X_1,X_2 是 X 的样本，试证：估计量 $\hat{\mu}_1=\dfrac{2}{3}X_1+\dfrac{1}{3}X_2$，$\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{4}X_1+\dfrac{3}{4}X_2$，$\hat{\mu}_3=\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{1}{2}X_2$ 都是 μ 的无偏估计量，并确定哪个估计量的方差最小.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本且 $E(X)=\theta$，问 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 应取何值时方能使 $\hat{\theta}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i$ 是 θ 的无偏估计量，并且 $D(\hat{\theta})$ 为最小.

9. 设晶体管的寿命 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取 100 只作寿命试验，测得其平均寿命 $\bar{x}=1\ 000$ 小时，标准差 $s=40$ 小时，求这批晶体管的平均寿命的置信度为 0.95 的置信区间.

10. 设某种清漆的干燥时间（单位：小时）$X\sim N(\mu,\sigma)$，现有 9 个样本观测值：

$$6.0,\quad 5.7,\quad 5.8,\quad 6.5,\quad 7.0,\quad 6.3,\quad 5.6,\quad 6.1,\quad 5.0$$

求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.（1）若已知 $\sigma=0.6$（小时）；（2）若 σ 未知.

11. 对于方差 σ^2 为已知的正态总体，问需取容量 n 为多大的样本才能使总体均值的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间长度不大于 L？

12. 某种零件的加工时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，现进行 30 次独立试验，测得样本均值 $\bar{x}=5.5$（秒），样本标准差 $s=1.729$（秒），若置信度为 0.95，求加工时间的数学期望和标准差的置信区间.

13. 设某种炮弹的出炮口速度（单位：m/s）$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，随机抽取 9 发炮弹做试验，测得 $s=11$（m/s），求这种炮弹出炮口速度方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间.

14. 用金球测定引力常数（单位：$10^{-11}\text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$）得测定值：

$$6.683,\quad 6.681,\quad 6.676,\quad 6.678,\quad 6.679,\quad 6.672$$

设引力常数 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 和 σ^2 均未知，求 σ^2 的置信度为 0.9 的置信区间.

15. 从 A、B 两批导线中分别抽取 4 根和 5 根测得电阻值（单位：欧）为

A 批导线：0.143， 0.142， 0.143， 0.137；

B 批导线：0.140， 0.142， 0.136， 0.140， 0.138.

设 A 批导线的电阻 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，B 批导线电阻 $Y\sim N(\mu_2、\sigma^2)$，μ_1、μ_2 和 σ^2 均未知，试求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间.

16. 从某地区随机地抽取成人男、女各 100 名，测量并计算得男子身高的平均数 $\bar{x}=1.71$ m，标准差 $s_1=0.035$ m；女子身高的平均数 $\bar{y}=1.67$ m，标准差 $s_2=0.038$ m. 设男、女身高均服从正态分布且方差相等，试求男、女身高之差的置信度为 0.95 的置信区间.

17. 两台机床加工同一种零件，分别抽取 6 个和 9 个零件，测量其长度并算得样本方差 $s_1^2=0.245$，$s_2^2=0.357$. 假定两台机床加工零件的长度都服从正态分布，试求两总体方差之比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 0.95 的置信区间.

18. 设有 A、B 两位化验员对某种聚合物的含氯量用同样的方法各作 10 次测定，由测量值分别算得 $s_1^2=0.5419$，$s_2^2=0.6065$，设总体均为正态分布，求方差比 σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 0.95 的置信区间.

19. 为估计一批钢索所能承受的平均张力，从中任取 10 根做试验，由试验算得平均张力 $\bar{x}=6720$（kg/cm^2），标准差 $s=220$（kg/cm^2）. 设张力服从正态分布，试求这批钢索所能承受的平均张力的单侧置信下限（取置信度为 0.95）.

20. 从某种型号的一批电子管中抽出容量为 10 的样本作寿命试验，算得标准差 $s=45$（小时），设整批电子管的寿命服从正态分布，试求这批电子管寿命标准 σ 的单侧置信上限（取置信度为 0.95）.

第 8 章 假设检验

假设检验是统计推断的另一种重要形式. 假设检验问题分为两类,一类是参数的假设检验,一类是分布的假设检验. 设总体 X 的分布未知,或 X 的某个分布参数 θ 未知,对总体分布或分布参数 θ 提出一个假设 H_0,然后根据样本所提供的信息,运用统计分析的方法进行判断,从而作出是接受还是拒绝 H_0 的决定,这就是假设检验问题.

§8.1 假设检验的基本概念

一、问题的提出

先考察下面几个例子.

例 8.1.1 某厂有一批产品,经检验合格后才能出厂,按行业标准,次品率不得超过 4%. 由于该批产品的次品率 p 未知,无法确切地知道该批产品是否可以出厂,于是用抽样的方法进行检验,即从该批产品中随机地抽出 n 件,然后根据抽样结果去决定该批产品是否可以出厂.

例 8.1.2 某加工厂用一台包装机包装其产品,额定重量每袋 500 克. 这台包装机存在随机误差,正常情况下它包装出的产品重量服从正态分布 $N(500,15^2)$. 某日开工后,随机抽取它包装的 9 袋产品,秤得重量为(单位:克):

$$497,506,518,524,498,511,520,515,512.$$

问这天包装机工作是否正常?

例 8.1.3 计算机中产生随机数是通过数学迭代公式来产生的. 因而产生的随机数序列并非真正意义下的随机数. 现假设产生了 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 这 n 个数,问是否可以将这 n 个数当作随机数来使用?即是否可以认为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自于 $[0,1]$ 上的均匀分布总体.

在例 8.1.1 中,我们关心的是该批产品是否可以出厂. 为此我们提出统计假设

$$H_0:p\leqslant 0.04,H_1:p>0.04. \tag{8.1.1}$$

这是两个对立的假设. 假设 H_0 称为原假设或零假设,而假设 H_1 称为对立假设或备择假设. 备择假设描述的内容与原假设对立,它作为备择假设的含义是,在假设检验问题中,否定原假设后,则选择对立假设的结论.

在例 8.1.2 中,我们根据抽查的结果提出统计假设

$$H_0:\mu=500, H_1:\mu\neq500. \tag{8.1.2}$$

而在例 8.1.3 中,我们需根据计算机产生的 n 个随机数提出统计假设

$$H_0: X \text{ 服从 } U(0,1), H_1: X \text{ 不服从 } U(0,1). \tag{8.1.3}$$

上面我们看到了三种假设式(8.1.1)~(8.1.3). 假设式(8.1.1)和(8.1.2)是关于总体参数的假设,相应的检验称为参数的假设检验;式(8.1.3)是关于总体分布的假设,相应的检验属于非参数的假设检验,我们将在§8.3 中讨论.

而假设式(8.1.1)和(8.1.2)是参数假设检验的两种情况,分别称为参数的单侧假设检验和双侧假设检验. 参数的假设检验是单侧还是双侧的,通常由对立假设 H_1 的形式判断.

二、假设检验的接受域和拒绝域

根据实际问题的需要提出统计假设以后,如何检验这个假设?我们通过例 8.1.2 来说明假设检验的基本思想和推理方法.

在例 8.1.2 中,我们提出原假设 $H_0:\mu=500$ 与备择假设 $H_1:\mu\neq500$. 由于样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 μ 的一个较好的估计,故当 H_0 成立时,$\bar{X}$ 的观察值应在 $\mu=500$ 附近,否则,$\bar{X}$ 应有偏离 μ 的趋势. 因此,当 $|\bar{X}-500|$ 的值超过一定的界限,就拒绝 H_0,否则就接受 H_0. 那么,如何确定这个界限呢?在假设检验中,是依据小概率事件实际不发生原理来确定这个界限的. 即指定一个小概率 α,确定一个常数 k,使

$$P\{|\bar{X}-\mu|>k\}=\alpha, \tag{8.1.4}$$

将 $\bar{X}$ 的观察值 $\bar{x}$ 代入式(8.1.4),若有 $|\bar{x}-\mu|>k$,则说明小概率事件在一次试验中发生了,这是与实际推断原理相矛盾的,故我们有理由怀疑原假设 H_0 的正确性,从而作出拒绝 H_0 的判断;而如果 $|\bar{x}-\mu|\leqslant k$,则我们没有充分的理由怀疑 H_0 的正确性,应作出接受 H_0 的判断.

为了确定常数 k,我们注意到当 H_0 成立时,统计量

$$U=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

故对于 $\alpha>0$,有

$$P\{|U|>u_{\frac{\alpha}{2}}\}=P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|>u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=P\left\{|\bar{X}-\mu|>\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha.$$

使原假设 H_0 得以接受的检验统计量取值的区域称为检验的接受域,使原假设 H_0 被拒绝的检验统计量取值的区域称为检验的拒绝域.

在例 8.1.2 中,假定 $\alpha=0.05$,查表得 $u_{0.025}=1.96$,依题意计算出 $\bar{x}=$

511. 2222，$|u|=\frac{|511.2222-500|}{15/\sqrt{9}}=2.2444>1.96$，故拒绝 H_0，认为这天包装机的工作不正常.

一般情况下，对于参数的假设检验，首先找出参数的一个良好估计，并以这个估计为基础构造检验统计量，要求是当原假设 H_0 成立时能完全确定其概率分布. 其次确定检验统计量取值于什么区域对 H_0 成立有利，取值于什么区域又对 H_1 成立有利，从而确定检验的拒绝域或接受域.

三、假设检验的两类错误和检验水平

由于假设检验作出判断的依据是小概率事件的实际推断原理和一个样本所提供的信息，也就是由部分来判断总体，因而所作判断不可能绝对正确，假设检验的结论有可能犯错误.

假设检验可能犯的第一类错误是“弃真”错误：H_0 本来是正确的，却被拒绝了. 如果我们在作检验时，认为概率值小于事先给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的事件为小概率事件，则犯第一类错误的概率为

$$P\{\text{拒绝 } H_0/H_0 \text{ 为真}\}=\alpha, \tag{8.1.5}$$

这个事先给定的值 α 称为假设检验的显著性水平.

假设检验可能犯的第二类错误是“纳伪”错误：H_0 实际上不正确，却被接受了. 显然，犯第一类错误的概率 α 越小，拒绝域越小，从而拒绝 H_0 的可能性也越小，犯第二类错误的概率便越大.

我们希望犯两类错误的概率都尽可能地小，但它们是互相矛盾的，就好像区间估计中可靠度与精确度相互矛盾一样. 假设检验的通常做法是，先保证犯第一类错误的概率 α 有较小的值，常取为 0.05 和 0.01，有时也用到 0.001，0.10 等值，在这个前提下，使犯第二类错误的概率尽可能小.

在实际应用中，若要同时减少犯两类错误的概率，则必须增加样本容量，而这意味着工作量的加大和经济上的损失.

综上所述，假设检验的一般步骤是：

1° 根据问题的具体要求，提出原假设 H_0 和对立假设 H_1；

2° 根据 H_0 的内容，选取适当的检验统计量，并在 H_0 成立的条件下，能确定检验统计量的分布（或近似分布）；

3° 按问题的要求选定显著性水平 α，根据检验统计量的分布和对立假设 H_1 的内容，确定拒绝域；

4° 根据样本观测值计算检验统计量的值，判断该值是在拒绝域还是在接受域内，作出拒绝 H_1 或接受 H_0 的检验结论.

§8.2 参数的假设检验

正态总体下未知参数的假设检验问题在实际工作中会经常遇到，本节首先分单个正态总体与两个正态总体的情形进行讨论，最后介绍大样本检验方法.

一、单个正态总体均值μ的检验

设样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$，我们讨论关于均值μ的假设检验问题. 在应用上常见的是对如下形式的假设进行检验：

(1) $H_0:\mu=\mu_0,\qquad H_1:\mu\neq\mu_0.$ (8.2.1)

(2) $H_0:\mu\leqslant\mu_0,\qquad H_1:\mu>\mu_0.$ (8.2.2)

(3) $H_0:\mu\geqslant\mu_0,\qquad H_1:\mu<\mu_0.$ (8.2.3)

其中，μ_0是一给定的数.

先考虑双侧检验问题式(8.2.1)，以$\bar{X}$估计μ，考察$\bar{X}-\mu_0$的情况. 直观上$|\bar{X}-\mu_0|$的值越小，与原假设越符合；反之，$|\bar{X}-\mu_0|$的值越大，与对立假设H_1越符合. 因此，H_0的拒绝域是$|\bar{X}-\mu_0|$的值大于一个界限值的区域.

1° 总体方差σ^2已知时

由前面讨论可知，原假设H_0成立时，检验统计量取$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，在给定显著性水平为$\alpha$时，有

$$P\left\{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}>u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=\alpha,$$

得到原假设H_0的拒绝域为$|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}$，

或
$$|\bar{X}-\mu_0|>\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}.$$

在这个检验中，我们使用了统计量$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，其分布为$N(0,1)$. 若一检验方法使用了服从标准正态分布的统计量，则称为U检验法.

2° 总体方差σ^2未知时

由于σ^2未知，以样本标准差S代替σ，在原假设H_0成立时，检验统计量$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，故有

$$P\left\{\frac{|\bar{X}-\mu_0|}{S/\sqrt{n}}>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\alpha,$$

得到原假设 H_0 的拒绝域为 $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}$，

或
$$|\overline{X} - \mu_0| > \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

在上述检验中，我们运用了服从于 t 分布的统计量. 若一检验方法使用了服从 t 分布的统计量，则称为 t 检验法.

现在考虑单侧检验问题式(8.2.2). 仍以 $\overline{X}$ 估计 μ，考察 $\overline{X} - \mu_0$ 的值大于一个为正值的界限值的区域. 同时，可以证明，检验问题式(8.2.2)与如下的检验问题
$$H_0' : \mu = \mu_0, H_1' : \mu > \mu_0 \tag{8.2.4}$$
有相同的拒绝域. 下面就检验问题式(8.2.4)讨论其拒绝域.

当总体方差 σ^2 已知时，在 $H_0' : \mu = \mu_0$ 成立的条件下，$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，

有
$$P\left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_\alpha\right\} = \alpha,$$
得到检验问题式(8.2.4)，也是检验问题式(8.2.2)的拒绝域为
$$u > u_\alpha,$$
或
$$\overline{X} - \mu_0 > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha.$$

当总体方差 σ^2 未知时，在 $H_0' : \mu = \mu_0$ 成立的条件下，$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，

有
$$P\left\{\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)\right\} = \alpha,$$
得到检验问题式(8.2.4)，也是检验问题式(8.2.2)的拒绝域为
$$t > t_\alpha(n-1),$$
或
$$\overline{X} - \mu_0 > \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1).$$

类似地，单侧检验问题式(8.2.3)与检验问题
$$H_0'' : \mu = \mu_0, H_1'' : \mu < \mu_0 \tag{8.2.5}$$
有相同的拒绝域. 它们的 U 检验法拒绝域是
$$u < -u_\alpha,$$
它们的 t 检验法的拒绝域是
$$t < -t_\alpha(n-1).$$

例 8.2.1 有一种元件，要求其平均使用寿命不得低于 1 000（小时），现从一批这种元件中随机抽取 25 件，测得其使用寿命的样本平均值 $\bar{x}=950$（小时），样本标准差 $s=100$（小时）. 以往长期的观测表明该种元件的寿命服从正态分布，问这批元件是否可以认为合格（$\alpha=0.05$）？

解 由题意需检验假设

$$H_0: \mu \geqslant 1\ 000, \quad H_1: \mu < 1\ 000.$$

由于总体方差 σ^2 未知，用 t 检验法. 检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-1\ 000}{\sigma/\sqrt{n}}$，原假设 H_0 的拒绝域为

$$t < -t_{0.05}(n),$$

已知 $n=25$，$\bar{x}=950$，$s=100$，由 t 分布表查得 $t_{0.05}(24)=1.7109$，故

$$t=\frac{950-1000}{100/\sqrt{25}}=-2.5<-1.7109,$$

因此拒绝 H_0，即认为这批元件不合格.

二、单个正态总体方差 σ^2 的检验

相对于正态总体均值的检验，方差检验在应用上稍少一些，但也有一些比较重要的应用. 例如，一种仪器或一种测定方法，总是存在或大或小的、非人为因素能控制的偏差，因而需要检验其精度是否达到某种界限；当一种产品的质量出现过大的波动时，需要知道方差是否超过了一个预定界限.

设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，我们讨论总体方差 σ^2 的假设检验问题. 且设 σ_0^2 为给定的数，通常是提出以下几个检验问题：

（1）$H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$，$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$. （8.2.6）

（2）$H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$，$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$. （8.2.7）

（3）$H_0: \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$，$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$. （8.2.8）

当总体均值 μ 未知，对于检验问题式（8.2.6）进行检验. 我们知道样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是总体方差 σ^2 的无偏估计，故当原假设 H_0 成立时，S^2 与 σ_0^2 应该比较接近，即比值 S^2/σ_0^2 应比较接近于 1，因此该比值过大或过小都是我们拒绝原假设 H_0 的理由. 这时，我们取检验统计量为

$$\chi^2=(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

其拒绝域应具有以下形式：

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}<k_1 \text{ 或 } (n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}>k_2,$$

这里 k_1 和 k_2 由显著性水平 α 来确定. 为简单计，可取

$$k_1=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),k_2=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),$$

于是检验问题式(8.2.6)的拒绝域为

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\text{或}(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

从以上的构造过程可知，k_1、k_2 的取法可以不唯一，我们这样取完全在于方便计算，并且对于具有对称分布的检验统计量，这种取法具有优越性.

类似地，单侧检验问题(8.2.7)与检验问题

$$H_0':\sigma^2=\sigma_0^2,\quad H_1':\sigma^2>\sigma_0^2$$

有相同的拒绝域，为

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{\alpha}(n-1).$$

检验问题式(8.2.8)与检验问题

$$H_0'':\sigma^2=\sigma_0^2,\quad H_1'':\sigma^2<\sigma_0^2$$

有相同的拒绝域，为

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha}(n-1).$$

在上述检验中，我们运用了服从于 χ^2 分布的统计量. 所以通常称为 χ^2 检验法.

当总体均值 μ 已知时，通常取检验统计量为

$$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2},$$

在原假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$ 成立时，它服从 $\chi^2(n)$，从而得到相应假设问题的拒绝域. 值得一提的是，在 μ 已知时，也可用 μ 未知时的 χ^2 检验法，两者比较，后者的拒绝域比前者有较小的犯第二类错误的概率，因而更有效一些.

例 8.2.2 某企业生产的产品其不合格品率长期保持为服从方差 $\sigma^2=0.003\ 6$ 的正态分布. 某日质检员似乎感觉不合格品率波动较以往大，便随机抽取了一个容量 $n=23$ 的样本，计算得样本方差 $s^2=0.005\ 9$. 试在显著性水平 $\alpha=0.10$ 下，检验该日产品不合格品率的波动较以往是否显著地变大？

解 根据题意，即是在显著性水平 $\alpha=0.10$ 下，检验假设

$$H_0:\sigma^2=0.003\ 6,H_1:\sigma^2>0.003\ 6,$$

当原假设 H_0 成立时，有检验统计量

$$\chi^2=(n-1)\frac{S^2}{\sigma_0^2}=22\times\frac{S^2}{0.0036}\sim\chi^2(22),$$

这里 $n=23$，$\chi_{\alpha}^{2}(n-1)=\chi_{0.10}^{2}(22)=30.813$，由此得

$$\chi^{2}=22\times\frac{0.0059}{0.0036}=36.0556>30.813,$$

因此拒绝原假设，即认为该厂这一天产品不合格品率波动较以往显著变大.

三、两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的检验

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 是从正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 中抽出的样本；$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 是从正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中抽出的样本，两组样本相互独立. 为比较两个总体的均值是否有显著的差异，最常见的是检验如下的几个假设：

(1) $H_0:\mu_1-\mu_2=0$，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$. (8.2.9)

(2) $H_0:\mu_1-\mu_2\leqslant 0$，$H_1:\mu_1-\mu_2>0$. (8.2.10)

(3) $H_0:\mu_1-\mu_2\geqslant 0$，$H_1:\mu_1-\mu_2<0$. (8.2.11)

1° 当总体方差 σ_1^2 和 σ_2^2 均已知时

对于检验问题式(8.2.9)，在 $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ 成立时，有检验统计量

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

于是，显著性水平为 α 的检验的拒绝域为 $|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}$，

即
$$|\bar{X}-\bar{Y}|>u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

而对于检验问题式(8.2.10)，它与检验问题

$$H_0':\mu_1-\mu_2=0,H_1':\mu_1-\mu_2>0 \tag{8.2.12}$$

有相同的拒绝域，为 $u>u_{\alpha}$，

或
$$\bar{X}-\bar{Y}>u_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

检验问题式(8.2.11)与检验问题

$$H_0'':\mu_1-\mu_2=0,H_1'':\mu_1-\mu_2<0 \tag{8.2.13}$$

有相同的拒绝域，为 $u<-u_{\alpha}$，

或
$$\bar{X}-\bar{Y}<-u_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

上述几个检验称为两样本 U 检验法.

2° 当总体方差 σ_1^2 和 σ_2^2 均未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时

在实际问题的检验中，大多数情形下总体的方差未知. 这时，若已知两总体方差相等，在原假设 $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ 成立时，有检验统计量

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

其中

$$S_\omega^2=\frac{1}{n_1+n_2-2}[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2]$$

$$=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\bar{Y})^2\right].$$

于是,显著性水平为 α 的检验问题式(8.2.9)的拒绝域为

$$|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2),$$

或

$$|\bar{X}-\bar{Y}|>S_\omega t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

类似地,检验问题式(8.2.10)与(8.2.12)的拒绝域为

$$t>t_\alpha(n_1+n_2-2),$$

或

$$\bar{X}-\bar{Y}>S_\omega t_\alpha(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

而检验问题式(8.2.11)与(8.2.13)的拒绝域为

$$t<-t_\alpha(n_1+n_2-2),$$

或

$$\bar{X}-\bar{Y}<-S_\omega t_\alpha(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

上述几个检验称为两样本 t 检验法.

综上可见,对于正态总体均值的假设检验问题,无论是两个总体还是单个总体,当总体方差已知时,使用 U 检验法;当总体方差未知时,使用 t 检验法.

例 8.2.3　甲、乙两厂生产同一种产品,其质量指标分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$. 现从这两个厂分别抽取出若干件产品,测得其该项质量指标值为

甲厂(x_i):2.74,2.75,2.72,2.69;

乙厂(y_i):2.75,2.78,2.74,2.76,2.72.

试通过这些数据检验两厂产品质量差别是否显著($\alpha=0.05$)?

对于这种问题,直观上好像也可以简单地用估计的方法去处理:甲厂样本均值 $\bar{x}=2.725$,乙厂样本均值 $\bar{y}=2.75$,因 $\bar{y}>\bar{x}$,从所抽样本看,乙厂产品质量优于甲厂. 但这样的结论还不完全令人信服,因为这个差距也可以是因为抽样的随机性而来,不一定反映本质. 故考虑用假设检验来处理这个问题.

解　由题意检验如下的假设

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0,\quad H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0.$$

当 H_0 成立时,检验统计量为

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2),$$

这里 $n_1=4,n_2=5,\alpha=0.05$,查表得 $t_{0.025}(7)=2.3646$,并由样本计算出 $\bar{x}=2.725,\bar{y}=2.75$,而

$$\begin{aligned}s_\omega&=\sqrt{\frac{1}{4+5-2}\left[\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{5}(y_j-\bar{y})^2\right]}\\&=\sqrt{\frac{1}{7}(0.0021+0.002)}=0.0242,\end{aligned}$$

于是

$$|t|=\frac{|2.725-2.75|}{0.0242\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}}\approx1.54<2.3646,$$

故接受 H_0,即认为这两个厂的产品质量没有显著的差别.

关于两个正态总体均值的比较,这里再简要介绍在应用上较为常见的所谓“配对检验”问题. 有时,我们会遇到不相互独立的两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,不能再用上述的方法检验 μ_1 和 μ_2 的差异,此时可以在相同的条件下,同时对两个总体抽样,得到成对的样本 $(X_i,Y_i),i=1,2,\cdots,n$. 由正态分布的性质,可以将对应样本之差 $(X_i-Y_i),i=1,2,\cdots,n$ 看作来自某一个正态总体 $N(\mu',\sigma'^2)$ 的样本,这里 $\mu'=\mu_1-\mu_2,\sigma'^2$ 不但与 σ_1^2 和 σ_2^2 有关,还与相应的协方差有关,可视其为未知. 这样就将对 $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ 这个两总体均值差的检验问题,转化成为单个正态总体均值的检验问题 $H'_0:\mu'=0$,具体的过程不再赘述.

四、两个正态总体方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的检验

设 $X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$ 分别是从正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 中抽出的样本,并且两组样本相互独立,样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2,通常有以下几种形式的检验问题:

(1) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$　　(8.2.14)

(2) $H_0:\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2.$　　(8.2.15)

(3) $H_0:\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2,H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2.$　　(8.2.16)

当参数 μ_1 和 μ_2 未知时,分别以 S_1^2 和 S_2^2 估计 σ_1^2 和 σ_2^2,考察比值 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ 的情况.

对于检验问题式(8.2.14),当原假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 成立时,有检验统计量

$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

原假设 H_0 成立时,统计量 $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$的值应在 1 的附近,因而,F 的值过大或过小,都不符合原假设 H_0. 由于 F 分布也是不对称分布,需要确定两个分位点,以得到 H_0 的拒绝域. 由前面的分析,容易确定检验问题式(8.2.14)的拒绝域为

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\text{或}\frac{S_1^2}{S_2^2}<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1).$$

而单侧检验问题式(8.2.15)与检验问题

$$H_0':\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1':\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

具有相同的拒绝域,为

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}>F_\alpha(n_1-1,n_2-1).$$

由于 σ_1^2 与 σ_2^2 的对等地位,交换它们的位置,即得到检验问题式(8.2.16)与检验问题

$$H_0'':\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1'':\sigma_1^2<\sigma_2^2$$

的拒绝域为

$$\frac{S_2^2}{S_1^2}>F_\alpha(n_2-1,n_1-1).$$

当参数 μ_1 和 μ_2 已知时,以

$$\frac{\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2}\xlongequal{\text{def}}F$$

为检验统计量,其对应假设的拒绝域请读者自己完成.

在上述检验中,我们运用了服从于 F 分布的统计量. 所以通常称即为 F 检验法.

例 8.2.4　对于例 8.2.3,检验其事先认定两个厂产品质量指标的方差相等的假定是否合理($\alpha=0.05$)?

解　设甲、乙两厂产品质量指标的方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2,依题意检验假设

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2,\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$$

当原假设 H_0 成立时,检验统计量

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1).$$

已知 $n_1=4,n_2=5,\alpha=0.05$,查 F 分布表得

$$F_{0.025}(3,4)=9.98, F_{0.975}(3,4)=\frac{1}{F_{0.025}(4,3)}=\frac{1}{15.10}=0.0622,$$

又由样本计算出 $s_1^2=0.0007, s_2^2=0.0005$. 于是

$$F=\frac{0.0007}{0.0005}=1.4,$$

故接受原假设 H_0，即认为两个厂产品质量指标的方差相等的假定是合理的.

五、大样本检验方法

在上面介绍的检验方法中，当原假设 H_0 成立时，都能确定有关检验统计量的精确分布，并据此在给定的显著性水平 α 下，决定相应检验问题的拒绝域.

而实际问题中，有时找到了比较合理的检验统计量，其精确分布却求不出. 这时，根据中心极限定理，当样本容量 n 无限增大时，某些统计量的极限分布是已知的，从而使我们有可能用容量充分大的样本，近似解决一些统计推断问题.

例 8.2.5　设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本，且两组样本相互独立. 参数 μ_1、σ_1^2 和 μ_2、σ_2^2 全都未知，且不假定 σ_1^2 与 σ_2^2 相等. 要求检验假设

$$H_0: \mu_1=\mu_2, \qquad H_1: \mu_1\neq\mu_2.$$

解　由正态分布的性质有

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1),$$

因为 σ_1^2、σ_2^2 未知，所以不能据此确定统计量. 以样本方差 S_1^2、S_2^2 代替它们，得到

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

T 的精确分布很复杂，而其极限分布是 $N(0,1)$. 因此，当 n_1、n_2 都足够大时，我们以 $N(0,1)$ 作为 T 的近似分布，从而确定出原假设 H_0 的拒绝域为

$$|t|=\frac{|\overline{X}-\overline{Y}|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}>u_{\frac{\alpha}{2}},$$

或

$$|\overline{X}-\overline{Y}|>u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}.$$

对于大样本检验，其近似的意义体现在：对于给定的显著性水平 α，给出的检验法的实际水平与 α 有差距. 这是由于精确分布与近似分布之间有差异. 但是由于在很多情况下，无法找到形式简单、便于应用的精确分布. 因此，大样本方

法在数理统计学中占有不可缺少的重要地位.

有时,检验统计量的精确分布也是知道的,但当样本容量 n 太大时,计算出现困难,我们往往也以形式较简单的极限分布去代替它.

例 8.2.6 某供应公司与用户商定,供应的产品次品率不超过 1% 即视为合格,验收每一批产品时,从中随机抽取 200 件进行检查,试用假设检验方法确定恰当的验收方案($\alpha=0.05$).

解 设 p 为产品的次品率,依题意检验如下的假设:

$$H_0: p\leqslant 0.01,\quad H_1: p>0.01.$$

又设 200 件产品中的次品个数为 X,则 $X\sim B(200,p)$. 显然,X 的值越小,越符合原假设 H_0 的内容,反之,X 的值越大,越符合对立假设 H_1. 尽管能确定 X 的精确分布,但对于较大的 n,二项分布的计算比较困难,不便确定拒绝域. 故由中心极限定理,检验统计量:

$$\frac{X-200\times 0.01}{\sqrt{200\times 0.01\times 0.99}}$$

近似服从 $N(0,1)$,所以原假设 H_0 的拒绝域为

$$\frac{X-2}{\sqrt{1.98}}>u_{0.05},\text{即 } X>2+1.645\sqrt{1.98}=4.315.$$

因此,当抽检 200 件产品中次品数超过 4 件,则要拒收该批产品;若次品数未超过 4 件,就没有足够的理由拒绝,应予接收.

§8.3 分布的假设检验

前面讨论参数估计与假设检验问题时,常常假定总体 X 服从正态分布. 但在实际工作中,我们往往事先并不知道总体的分布类型,这时需要根据样本对总体的分布类型提出假设并进行检验.

分布假设检验问题的一般提法是:设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本,在显著性水平 α 下,检验假设

$$H_0: F(x)=F_0(x),\tag{8.3.1}$$

其中 $F_0(x)$ 为某一个已知或仅含有若干个未知参数的分布函数.

处理这个问题的一般原则是:设法确定一个量 $D(X_1,\cdots,X_n,F)$,它有某种理由可以作为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与理论分布 F 之间的偏离的度量,就具体的样本观察值算出 $D(x_1,\cdots,x_n,F)$ 的值,记为 D_0,然后在假设 H_0 成立的条件下,算出概率

$$P(D_0)=P(D\geqslant D_0\mid H_0),$$

它称为在选定的偏离指标 D 之下,样本与理论分布的拟合优度. $P(D_0)$ 愈大,表

示样本与理论分布的拟合愈好,而假设式(8.3.1)就愈可信. 一般地,事先根据某种考虑,给定显著性水平 α,当 $P(D_0)\leqslant\alpha$ 时拒绝 H_0,否则接受 H_0,通常称这种类型的检验为拟合优度检验. 由于 D 可以有种种不同意义下的定义,所以有不同的拟合优度检验,其中最著名的是英国统计学家 K · 皮尔逊在 1900 年提出的 χ^2 检验法,本节主要讨论这个检验方法.

一、理论分布完全已知且只取有限个值

设总体 X 为只取有限个值,且理论分布完全已知的离散型分布,则假设式(8.3.1)可表述为

$$H_0\ 总体分布律为\ P\{X=a_i\}=p_i, i=1,2,\cdots,k, \tag{8.3.2}$$

其中,a_i 与 p_i 均为已知,且 $p_i>0, i=1,2,\cdots,k$.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从总体中抽取的样本,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本观测值,以 v_i 记 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中等于 a_i 的个数. 考虑样本容量 n 足够大时,由大数定律,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中等于 a_i 的个数应大致为 np_i,不妨将 np_i 称为"理论频数",而把 v_i 称为"经验频数". 如下所示:

X	a_1	a_1	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_k
理论频数	np_1	np_2	$\cdots$	np_i	$\cdots$	np_k
经验频数	v_1	v_2	$\cdots$	v_i	$\cdots$	v_k

显然,理论频数与经验频数的差异越小,越符合原假设 H_0 的内容. 基于这种想法,统计学家 K · 皮尔逊构造了一个统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(np_i-v_i)^2}{np_i}, \tag{8.3.3}$$

并证明了如下的重要结论:

定理 8.3.1 如果原假设 H_0 成立,则当样本容量 $n\to\infty$ 时,χ^2 的极限分布是自由度为 $k-1$ 的 χ^2 分布,即 $\chi^2(k-1)$.

此定理的证明超出本课程的范围,这里不作介绍. 给定显著性水平 α,由(8.3.3)计算出检验统计量的值 χ^2,则原假设 H_0 的拒绝域为

$$\chi^2>\chi^2_\alpha(k-1).$$

上述拒绝域是基于检验统计量的极限分布得到的,所以在实用中必须注意 n 要足够大. 根据实际经验,样本容量 n 不应小于 50.

例 8.3.1 一枚骰子掷了 120 次,得到如下结果:

出现点数 i	1	2	3	4	5	6

出现次数 v_i	23	26	21	20	15	15

试在 $\alpha=0.05$ 下检验这枚骰子是否均匀、对称？

解　设 X 是骰子掷出的点数，依题意提出原假设

$$H_0: P\{X=i\}=\frac{1}{6}, i=1,2,\cdots,6.$$

这里 $n=120, p_i=\frac{1}{6}, np_i=20, i=1,2,\cdots,6$. 故检验统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{(np_i-v_i)^2}{np_i}=4.8,$$

查表得 $\chi^2_{0.05}(5)=11.071>4.8$，所以在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下接受原假设 H_0，即可以认为这枚骰子是均匀、对称的.

二、理论分布只取有限个值但含有未知参数

设总体 X 只取有限个值 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，总体分布律为

$$P\{X=a_i\}=p_i(\theta_1,\cdots,\theta_r), i=1,2,\cdots,k.$$

其中 $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 为未知参数，可在一定范围内变化，参数个数 $r\leqslant k-2$. 此时，原假设的一般提法是

$$H_0: \text{总体分布律为 } P\{X=a_i\}=p_i(\theta_1^0,\cdots,\theta_r^0), i=1,2,\cdots,k,$$

其中 $\theta_1^0,\cdots,\theta_r^0$ 为参数 $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 在其变化范围内的一组值.

检验这个假设的步骤与前面的讨论相似，只是多了一个参数估计问题，由于我们并不知道 $\theta_1^0,\cdots,\theta_r^0$ 的值是多少，通常采用 $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_r$ 代替参数真值 $\theta_1^0,\cdots,\theta_r^0$，于是仍以(8.3.3)为检验统计量，不过此时 χ^2 的抽样分布有一点变化.

定理 8.3.2　在一定的条件下，如果原假设 H_0 成立，则当样本容量 n 足够大时，由(8.3.3)确定的统计量 χ^2 近似服从自由度为 $k-r-1$ 的 χ^2 分布，即 $\chi^2(k-r-1)$.

这个定理的条件及证明都很复杂，不在此详细叙述. 由此结果，对给定显著性水平 α，原假设 H_0 的拒绝域为

$$\chi^2>\chi^2_\alpha(k-r-1).$$

三、总体分布为一般分布

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是抽取自总体 X 的样本，欲检验原假设

$$H_0: X \text{ 的分布函数为 } F(x),$$

其中 $F(x)$ 完全已知，或者带有未知参数，将其记为 $F(x;\theta_1,\cdots,\theta_r)$.

检验原假设 H_0 的基本方法是通过区间的划分将此问题转化为前面已讨论过的情况.

先说明连续型的总体分布，取 $k-1$ 个数 $-\infty<a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}<+\infty$，将数轴 $(-\infty. TIF ;E+\infty)$ 分割为 k 个区间：$I_1=(-\infty,a_1]$，$I_2=(a_1,a_2]$，$\cdots$，$I_k=(a_{k-1}. TIF ;E+\infty)$. 如果总体分布为 $F(x)$，则样本 X_j 落入区间 I_i 的概率 p_i 为

$$p_i=F(a_i)-F(a_{i-1}),$$

其中 $j=1,2,\cdots,n$；$i=1,2,\cdots,k$；$a_0=-\infty$，$a_k=+\infty$. 以 v_i 记样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中落入区间 I_i 内的个数，显然 np_i 即为相应的理论频数. 如果总体分布含有未知参数，即为 $F(x;\theta_1,\cdots,\theta_r)$，则先用 $\theta_1,\cdots,\theta_r$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_r$ 代替，有

$$p_i=F(a_i;\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_r)-F(a_{i-1};\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_r),$$

从而将问题转化为前面讨论的情形. 这里要注意所划分区间的数目 k 不能小于 $r+2$，因为检验统计量 χ^2 的近似分布为 $\chi^2(k-r-1)$.

需要说明的是，通过划分区间，实际上检验的是另一个假设

$$H_0'：总体的值在区间 I_i 内的概率为 p_i, i=1,2,\cdots,k.$$

如果有原假设 H_0 成立，显然 H_0' 也成立. 因此若拒绝 H_0'，则更有理由拒绝原假设 H_0；反之由 H'_0 成立未必推出 H_0 成立. 因此，在划分区间时要尽量将区间分得很细，使总体取值于每个小区间 I_i 内的概率都不大，这样，假设 H_0' 与原假设 H_0 所包含的内容差别不大. 但是，为使检验统计量 χ^2 的分布与其近似分布（定理 8.3.1 及定理 8.3.2）的差距缩小，又要求划分的区间数目少些，以使样本 X_1，$X_2,\cdots,X_n$ 落在每个区间 I_i 的数目 v_i 不至于太小，通常要求每个 v_i 不小于 5. 针对这里两个互相矛盾的要求，在实际工作中，一般处理为：$50\leqslant n\leqslant 100$ 时，区间数 k 取为 6 ~ 8；$100<n\leqslant 200$ 时，k 取为 9 ~ 12；$n>200$ 时，区间数可再适当增加，以不超过 15 ~ 20 为宜.

对离散型分布的总体，设它的取值为 $a_1<a_2<\cdots$，若样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中取值为某个 a_i 的个数比较多（比如 5 个以上），则将 a_i 自成一组；若不然，则将相邻的几个 a_i 合并为一组. 分组的数目原则上与上述划分区间相同.

例 8.3.2　有一取值为 0，1，2，…的离散型变量，对其进行了 2 608 次观测，结果如下所示：

变量值	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
观测频数	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	10	4	2

问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为该变量服从泊松分布？

解　设该离散型变量为 X，依题意需检验

$$H_0: P(X=i)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}, \text{常数 } \lambda>0, i=0,1,2,\cdots.$$

未知参数 λ 的极大似然估计 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i=3.8704.$

变量取值 $0,1,\cdots,9$ 时，观测频数都比较大，可单独自成一组. 变量取值 10，11，12 可合并为"大于 9"的一组，相应的频数为 $10+4+2=16$；或者将 10 也单独成组，将 11，12 合并为"大于 10"的组，频数为 $4+2=6$. 我们这里按后一种分法，则有分组数目 $k=12$.

各组的理论频数分别是

$$2068\,\frac{3.8704^i}{i!}e^{-3.8704}, i=0,1,\cdots,10.$$

及
$$2068\left(1-\sum_{i=0}^{10}\frac{3.8704^i}{i!}e^{-3.8704}\right), i=11.$$

依次计算出理论频数为 54.3769，210.4602，407.2827，525.4489，508.4244，393.5612，253.8732，140.3701，67.9111，29.2048，11.3034，5.7831.

于是检验统计量：

$$\chi^2=\frac{(57-54.3769)^2}{54.3769}+\frac{(203-210.4602)^2}{210.4602}+\cdots+\frac{(6-5.7831)^2}{5.7831}=12.9708.$$

这里 $k=12, r=1$，故当 H_0 成立时，检验统计量近似服从 $\chi^2(10)$，$\alpha=0.05$，查 χ^2 分布表有 $\chi^2_{0.05}(10)=18.307>12.9708$，因此接受原假设，即可以认为该变量服从泊松分布.

例 8.3.3　一台自动车床加工某种零件，任取 250 个测其长度，与规定尺寸的偏差（单位：微米）的频数分布如下：

偏差区间	$(-\infty,-25]$	$(-25,-20]$	$(-20,-15]$	$(-15,-10]$
频　数	2	6	11	23
偏差区间	$(-10,-5]$	$(-5,0]$	$(0,5]$	$(5,10]$
频　数	35	47	45	36
偏差区间	$(10,15]$	$(15,20]$	$(20,25]$	(25. *TIF* ;*E* + ∞)
频　数	26	13	5	1

试检验零件长度偏差 X 是否服从正态分布($\alpha=0.05$)?

解　依题意需检验:

$$H_0: X\sim N(\mu,\sigma^2).$$

首先将频数太小的前、后两个区间并入其相邻区间.

正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 有两个未知参数 μ 和 σ^2,其极大似然估计 $\hat{\mu}=\bar{x}$,$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$. 由于本例数据以分组形式给出,没提供原始数据,或者原始记录只记下了相应的区间,这种情况通常用公式

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum m_i v_i,\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum v_i(m_i-\hat{\mu})^2$$

来计算,其中 m_i 是第 i 个区间的组中值$\left(\frac{\text{上限}+\text{下限}}{2}\right)$,开口组组距以相邻组组距为假定组距. 故得

$$\hat{\mu}=0.1,\ \hat{\sigma}^2=10.4709^2.$$

于是,各组的理论频数

$$n\left[\Phi\left(\frac{a_i-0.1}{10.4709}\right)-\Phi\left(\frac{a_{i-1}-0.1}{10.4709}\right)\right],\qquad i=1,2,\cdots,10.$$

其中,$a_0=-\infty$,$a_1=-20$,$a_2=-15$,$\cdots$,$a_9=20$,$a_{10}=+\infty$;$n=250$. 具体算出理论频数依次为 6.85,11.775,23.2,34.4625,45.7125,46.02,36.9238,23.6763,12.205,7.175.

检验统计量$$\chi^2=\frac{(8-6.85)^2}{6.85}+\frac{(11-11.775)^2}{11.775}+\cdots+\frac{(6-7.175)^2}{7.175}$$

$$=0.8587.$$

$k=10$,$r=2$,查 χ^2 分布表,$\chi^2_{0.05}(7)=14.067>0.8587$,因此接受原假设,可以认为零件长度偏差服从正态分布.

§8.4　应　　用

一、统计数据中异常值的检验

爱看电视节目的读者或许还记得，在电视歌手比赛中，对每一位参赛歌手的得分，都是将各评委的给分去掉一个最高分、去掉一个最低分，再取平均计算出来的. 为什么要这样做呢？是为了避免个别过高或过低的不合理评分影响歌手的成绩. 实际上，在对数据进行统计分析时，往往需要考虑是否有异常值的干扰. 异常值是指样本中的个别值，其数值明显偏离它所属样本的其余观测值. 异常值可能是总体固有的随机变异值的极端表现，这种异常值和样本中其余观测值属于同一总体. 异常值也可能是由于试验条件和试验方法的偶然偏离所产生的后果，或产生于观测、计算、记录中的失误. 这种异常值和样本中其余观测值不属于同一总体.

由于异常值的出现对经典的统计方法影响较大，比如，一个偏离严重的异常值将使常用的统计量 $\overline{X}$ 的值产生较大偏差，因此，关于异常值的检验也逐渐成为统计学中的重要问题.

一旦样本观测值中存在异常值，那么它一定是样本观测值中的最大值 $X_{(n)}$ 或最小值 $X_{(1)}$，如果同侧不止一个异常值，则依次为 $X_{(n-1)}$ 或 $X_{(2)}$，以此类推. 构造异常值的检验统计量，通常是按照能描述样本极值 $X_{(n)}$ 或 $X_{(1)}$ 与样本主体之间的差异的原则来进行的. 例如，关于正态分布总体，统计学家格拉布斯（Grubbs）提出如下的检验统计量

$$G_{(n)}=\frac{\overline{X}-X_{(1)}}{S},G^{(n)}=\frac{X_{(n)}-\overline{X}}{S}.$$

用 $G_{(n)}$ 检验极小值 $X_{(1)}$、用 $G^{(n)}$ 检验极大值 $X_{(n)}$ 是否为异常值. 提出了检验统计量，然后在不存在异常值的原假设下，推导出相应的抽样分布并计算出检验的临界值，即可进行异常值检验了. 如果拒绝原假设，则判断相应的 $X_{(n)}$ 或 $X_{(1)}$ 为异常值.

此外，对于一些常见的分布如指数分布、极值分布等等，都有一些统计学者提出了异常值的检验方法. 我国还颁布了几个关于异常值检验的国家标准. 对于用统计方法检查出的异常值，应尽可能寻找产生异常值的技术上的、物理上的原因，作为处理异常值的依据.

处理异常值的方式通常有：将异常值保留在样本中，参加其后的数据分析，但对相应的结果给予必要的关注；将异常值从样本中剔除后，再做数据分析；将异常值剔除后，追加适宜的观测值计入样本；寻找产生异常值的实际原因修正异

常值. 一般应根据实际问题的性质,权衡得失风险,确定相应的处理方式.

例 8.4.1　射击 16 发子弹,射程(由小至大排列)分别为 1125,1248,1250,1259,1273,1279,1285,1285,1293,1300,1305,1312,1315,1324,1325,1350(单位:m),检验极小值 $x_{(1)}=1125$ 是否为异常值($\alpha=0.01$)?

解　由样本计算出 $\bar{X}=1283$,$S=50.7609$. 于是有

$$G_{(16)}=\frac{1283-1125}{50.7609}=3.1126,$$

$\alpha=0.01$,$G_{(16)}$ 的临界值(有异常值检验表可查)为 $2.747<3.1126$,因此判断极小值 1125 为异常值.

二、符号检验

假定有甲、乙两种品牌的同类产品,为了比较大众对两种品牌的认同程度,随机地挑选 n 个人,给每人甲、乙品牌产品各一份,请他们使用后给出评分. 记甲、乙品牌的得分分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$,可选择的一种办法是将 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 分别看作从正态总体 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 中抽出的样本,用两样本 t 检验法检验原假设 $H_0:\mu_1=\mu_2$. 该做法的弊端是:各人的品位和打分尺度不同,如要求高的用户评分大体上要低一些,反之则给分高一些,这不仅会破坏正态性,也会使方差 σ^2 加大而降低检验的功效. 另一种办法是作配对检验,即将

$$Z_i=X_i-Y_i,i=1,2,\cdots,n.$$

视为单个正态总体 $N(\mu_1-\mu_2,\sigma'^2)$ 的样本,用单样本 t 检验法检验假设 $H_0:\mu_1-\mu_2=0$. 由于 X_i 与 Y_i 是同一人所评出的得分,这种做法部分弥补了前一种做法的弊端,但各人以什么样的分数描述两种品牌的差距,其尺度也并不相同. 感觉上是同样的差距,也许有人觉得 5 分可以描述,而有人却可能觉得 20 分才能体现,这也会破坏关于总体正态性的假定.

由于这个问题是比较两个品牌在大众中被认同的程度,我们只记录 X_i-Y_i 的正、负符号,于是,打"+"号的人认为"甲优于乙",打"-"号的人认为"乙优于甲". 以 p 记整个大众中认为"甲优于乙"的人的比例,显然若 $p=\frac{1}{2}$,则表示甲、乙两个品牌不相上下. 设 W 为 n 个人中打"+"号的人数,则当假设 $H_0:p=\frac{1}{2}$ 成立时,W 服从二项分布 $B\left(n,\frac{1}{2}\right)$. 由此可以确定两个临界值 b_1 和 b_2:如果 $W<b_1$,认为甲明显不如乙;如果 $W>b_2$,认为甲明显优于乙;如果 $b_1\leqslant W\leqslant b_2$,则认为两个品牌的差异不明显. 这就是所谓的符号检验,它的优点是对样本 X_i 和 Y_i 所来自的总体的分布不需要有特殊的规定. 这样的检验方法在数理统计学中称

为"非参数检验",意指它不仅仅只适用于某种特定的参数分布族,而是适用面更为广泛的方法. 符号检验的缺点是丢失了 X_i 和 Y_i 这些数据中很大部分信息量,如果有把握认为参加评分的人能比较准确地把握评分尺度,那么用 t 检验法比用符号检验法能给出更高的分辨率. 因此,是否将具体的数据转化为符号,必须依据对实际背景的深入了解作出决定.

习　题　八

1. 从在标准差 $\sigma=5.2$ 的正态总体中,抽取容量 $n=16$ 的样本,算得样本平均值 $\bar{x}=27.56$,在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下,能否认为总体的均值 $\mu=26$?

2. 在正常生产情况下,某种汽车零件的重量 $X\sim N(54,0.75)$. 在某日生产的零件中任取 10 件,测得重量如下(单位:$\frac{1}{2}$kg):

55.1,54.0,55.1,53.8,54.2,52.1,54.2,55.0,55.8,55.3.

如果标准差不变,显著性水平 $\alpha=0.05$. 问该日生产零件的平均重量较正常情况有无显著差异?

3. 某种矿砂含镍量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,测定 5 个样品的值(%)为:

3.25,3.27,3.24,3.26,3.24.

问在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下,能否认为这批矿砂的平均含镍量为 3.25(%)?

4. 已知锰的熔化点 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,进行 5 次测量,得到结果如下(℃):

1269,1271,1256,1265,1254.

取显著性水平 $\alpha=0.05$,是否可以认为锰的熔化点是 1260℃?

5. 某电工器材厂生产一种保险丝,测量其熔化时间,依通常情况方差为 400. 今从某天的产品中任取容量为 25 的样本,算得熔化时间的平均值 $\bar{x}=62.24$,样本方差 $s^2=404.77$. 假定熔化时间 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,显著性水平 $\alpha=0.01$. 问这天生产的保险丝熔化时间的分散度与通常情况有无显著差异?

6. 已知维尼纶纤度在正常情况下服从正态分布,且 $\sigma=0.048$. 从某天的产品中任取 5 根纤维,测得其纤度为:

1.32,1.55,1.36,1.40,1.44.

取显著性水平 $\alpha=0.05$,问这天的标准差是否正常?

7. 测定某种溶液的水分,由它的 10 个测量值算得 $\bar{x}=0.452\%$,$s=0.037\%$. 设测量值的总体服从正态分布,试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下,分别检验假设(1) $H_0:\mu\geqslant0.5\%$,$H_1:\mu<0.5\%$;(2) $H_0:\sigma\geqslant0.04\%$,$H_1:\sigma<0.04\%$.

8. 为了比较两种枪弹速度(单位:m/s),在相同条件下进行速度测量,分别算得样本平均值和样本标准差如下:

枪弹甲:$n_1=110$,$\bar{x}=2805$,$s_1=120.51$;

枪弹乙:$n_2=100$,$\bar{y}=2680$,$s_2=105.00$.

假定两正态总体方差相等,在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下,问两种枪弹的平均速度有无显著差异?

9. 对两批同类电子元件的电阻(单位:欧姆)进行测试,各抽取 6 件测得结果如下:

第一批:0.140,0.138,0.143,0.141,0.144,0.137;

第二批:0.135,0.140,0.142,0.136,0.138,0.140.

已知两批元件的电阻都服从正态分布,取显著性水平 $\alpha=0.05$,试检验:

(1) 两批元件电阻的方差是否相等;

(2) 两批元件的平均电阻有无显著差异.

10. 在两个工厂生产的蓄电池中,分别取 10 个蓄电池测得其电容量(单位:安培小时)如下:

甲厂:140,141,135,142,140,143,138,137,142,137;

乙厂:141,143,139,139,140,141,138,140,142,138.

取显著性水平 $\alpha=0.05$,试检验两厂蓄电池的性能有无显著差异?

11. 在化工试验中,要考虑温度对产品断裂力的影响,在 70℃和 80 ℃的条件下,分别进行 8 次试验,测得产品的断裂力(单位:kg)如下:

70 ℃时:20.5,18.8,19.8,20.9,21.5,19.5,21.0,21.2;

80 ℃时:17.7,20.3,20.0,18.8,20.1,19.0,20.2,19.1.

已知产品的断裂力都服从正态分布,取显著性水平 $\alpha=0.05$. 检验两种温度下产品断裂力的均值和方差是否相等.

12. 某灯泡厂在采用一种新工艺的前后,各取 10 个灯泡进行寿命试验. 测得新工艺前灯泡寿命的样本平均值为 2 460 h,样本标准差为 56 h;采用新工艺后灯泡寿命的样本平均值为 2 550 h,样本标准差为 48 h. 已知灯泡寿命服从正态分布,取显著性水平 $\alpha=0.05$,问新工艺前后灯泡的平均寿命有无显著差异?

13. (1) 在第 5 题中,问该日生产的保险丝熔化时间的方差是否不超过 400(取显著性水平 $\alpha=0.01$)?

(2) 在第 8 题中,检验甲枪弹的速度比乙枪弹的速度是否显著地大(仍取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

(3) 在第 12 题中,能否认为灯泡的平均寿命在采用新工艺后有明显提高(取显著性水平 $\alpha=0.01$)?

14. 甲、乙两台机床加工同一种零件,分别取 6 个、9 个零件,测得其长度的样本方差分别为 $s_1^2=0.245$,$s_2^2=0.357$. 假定零件长度服从正态分布,取显著性水平 $\alpha=0.05$,问是否可以认为甲机床加工的精度比乙机床高?

15. 将一正四面体的四个面分别涂为红、黄、蓝、白四色,现任意地抛掷它,直到白色面与地面相接触为止作为一盘试验,其抛掷次数为 X. 作 200 盘试验的结果如下:

抛掷次数 x_i	1	2	3	4	$\geqslant 5$
频数 m_i	56	48	32	28	36

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下,该四面体是否匀称?

16. 检查了一本书的 100 页，记录各页中印刷错误的个数，其结果如下：

检查个数 x_i	0	1	2	3	4	5	6	≥7
含 x_i 个错误的页数	36	40	19	2	0	2	1	0

取显著性水平 $\alpha=0.05$，能否认为一页书的印刷错误个数 X 服从泊松分布？

17. 在某细纱机上进行断纱率测定. 试验锭子的总数为 440 个，测量各锭子的断纱次数记录如下：

每锭断纱数 x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
有 x_i 继纱的锭数	263	112	38	19	3	1	1	0	3

取显著性水平 $\alpha=0.05$，问锭子的断纱数是否服从泊松分布？

18. 在一批灯泡中抽取 300 只作寿命试验，其结果如下：

寿命 t（小时）	$t<100$	$100\leqslant t<200$	$200\leqslant t<300$	$t\geqslant 300$
灯泡数	121	78	43	58

取显著性水平 $\alpha=0.05$，检验假设

H_0 灯泡寿命服从指数分布，$f(t)=\begin{cases}0.005\mathrm{e}^{-0.005t}, & t\geqslant 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$

19. 对某汽车零件制造厂所生产的汽缸螺栓口径进行抽样检测，得 100 个数据，分组记录如下：

组限	10.93 ~ 10.95	10.95 ~ 10.97	10.97 ~ 10.99	10.99 ~ 11.01
频数	5	8	20	34

组限	11.01 ~ 11.03	11.03 ~ 11.05	11.05 ~ 11.07	11.07 ~ 11.09
频数	17	6	6	4

取显著性水平 $\alpha=0.05$，试检验螺栓口径 X 是否服从正态分布？

20. 下列数据是 200 个零件的直径（单位：cm），测量值经分组后的组中值和各组的频数为：

直径	2.25	2.35	2.45	2.55	2.65	2.75	2.85	2.95
频数	3	4	5	11	12	17	19	26

直径	3. 05	3. 15	3. 25	3. 35	3. 45	3. 55	3. 65	3. 75
频数	24	22	19	13	13	7	3	2

取显著性水平 $\alpha=0.05$,试检验零件的直径 X 是否服从正态分布？

第 9 章　回 归 分 析

本章的回归分析和下一章的方差分析是数理统计中应用价值很大的两类方法，它们的共同点是研究变量之间的关系. 回归分析着重寻求变量之间近似的函数关系，我们主要介绍一元和多元线性回归的最基本的内容以及一些可以变成线性回归处理的非线性回归问题.

§9.1　回归分析的模型

在人类活动的各种领域中，经常需要研究事物之间的关系，从定量的角度看，即归结为变量与变量之间的关系. 一般来说，变量之间的关系可以分成两类：一类关系是确定性关系，这在数学上可表述为函数关系. 例如，正方形的面积 S 与边长 l 之间，存在着以公式 $S=l^2$ 表示的确定性关系；另一类关系是相关关系，即变量之间存在某种联系，但又没有达到可以相互确定的程度. 例如，人的身高 H 与体重 W 有联系，尽管身材高的人一般体重相应较重，但是知道身高并不能够准确地确定体重. 又如，一种农作物的亩产量 Y 与其播种量 X_1、施肥量 X_2 有联系，但 X_1、X_2 不能严格确定 Y.

回归分析是研究相关关系的一种重要的工具，也是最常用的一种统计方法. 为叙述方便，我们借用函数关系中关于变量的称呼，将作为考察目标的变量 Y 称为因变量，将影响 Y 的各种变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 称为自变量.

对于存在相关关系的自变量与因变量，为什么由 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 不能严格确定 Y 呢？这是因为，影响 Y 的因素很多，除了已经列出的自变量之外，还可能存在其他的影响 Y 的因素，它们包括尚不为人们所发现的，或已知存在但因技术、经济等条件限制未予理会的，还有一些本身就难以控制的随机因素. 因此，已考虑的因素即自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 只能在一定程度上决定因变量 Y，其余的影响归结为随机误差.

设在一个问题中，自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 的取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，可以设想因变量 Y 的值由两部分构成：一部分由自变量的影响所致，这一部分表现为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的函数形式 $\mu(x_1,x_2,\cdots,x_k)$；另一部分由其他未知的、未加考虑的因素以及随机因素的影响所致，将这一部分视为随机误差，记为 ε. 于是得到模型

$$Y=\mu(x_1,x_2,\cdots,x_k)+\varepsilon. \tag{9.1.1}$$

ε 作为随机误差，通常要求其均值为 0、方差存在，即

$$E(\varepsilon)=0, D(\varepsilon)=\sigma^2.$$

在这样的假定下，$\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k)$就是在自变量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 取值为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 时，因变量 Y 的数学期望值，可写为

$$\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k)=E(Y \mid X_1=x_1, \cdots, X_k=x_k).$$

函数 $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k)$称为 Y 对 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的回归函数，而方程

$$y=\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k),$$

则称为 Y 对 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的回归方程. 有时为明确起见，在"回归函数"和"回归方程"之前加上"理论"二字，以表明它们是直接来自模型.

以上模型称为回归模型，其中回归方程是一个确定性的函数关系，它近似地描述了非确定性的相关关系. 回归分析就是以此为基础处理相关关系的一种方法.

我们看到，在回归分析中，因变量被看作随机变量，自变量则是可控制的、非随机的变量. 从理论上说，这样规定是必需的，在实际应用中，往往将随机自变量的一组观测值，看成可控制变量的一组取值，按可控制的自变量来处理.

只含一个自变量的回归分析称为一元回归分析，含有多个自变量的回归分析称为多元回归分析.

设 X 为一随机变量，则 $E(X-t)^2$ 作为 t 的函数，在 $t=E(X)$时取最小值. 由这个性质，可以解释回归函数 $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k)$的一个含义:在均方误差最小的原则下，以回归函数的值估计因变量 Y 的值是最好的.

在实际问题中，回归函数一般总是未知的. 回归分析的任务，就是根据自变量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 和因变量 Y 的观测值，去估计这个函数，并讨论与此有关的种种统计推断问题.

对回归函数 $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k)$的估计，通常是根据所讨论问题的专业知识或以往的经验，先确定(或假定)$\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k)$的数学形式，然后对其中的若干未知参数进行估计. 例如，对某个问题确定 $k=2$，并已知 $\mu(x_1, x_2)$形如

$$\mu(x_1, x_2)=a_0+a_1 \mathrm{e}^{a_2 x_1}+a_3 \ln x_2,$$

其中 a_0, a_1, a_2, a_3 是未知参数，要通过观测值去估计它们.

回归模型的一个重要参数，是随机误差 ε 的方差 σ^2，因为我们已假定 $E(\varepsilon)=0$，由方差的定义，有 $\sigma^2=D(\varepsilon)=E(\varepsilon^2)$，由(9.1.1)式，有

$$\varepsilon=Y-\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k),$$

因此

$$\sigma^2=E(\varepsilon^2)=E[Y-\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k)]^2.$$

所以，σ^2 实质上就是以回归函数 $\mu(x_1, x_2, \cdots, x_k)$近似因变量 Y 的均方误差，σ^2 愈小，回归方程就愈能有效地反映出 Y 与 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 之间的相关关系.

因此，在应用中，通过观测值对误差方差 σ^2 作估计，也是很重要的工作. 如

果 σ^2 的估计值很大，超出了该问题所能承受的范围，就有必要考虑一下所建立的回归模型是否太不符合实际. 一般地，决定 σ^2 大小的有以下两点：

(1) 在确定自变量时，是否把对因变量 Y 有重要影响的那些因素都考虑进去了. 如果是，则 σ^2 相对会比较小；反之，若某些对 Y 有重要影响的因素未被考虑，则其影响进入随机误差 ε，将导致 σ^2 增大.

(2) 回归函数的形式是否恰当. 例如，回归函数本来是一个线性函数，却选用了一个非线性函数进入模型，它们之间过大的差距进入随机误差 ε，增大了它的方差 σ^2.

§9.2 一元线性回归

回归分析中，在应用上最重要并且在理论上发展得最完善的方面，是回归函数 $\mu(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 为线性函数的情形：

$$\mu(x_1,x_2,\cdots,x_k)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_kx_k,$$

其中 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 是未知常系数. 这种情形叫做线性回归，是我们讨论的主要内容. 当自变量变化的范围不太大，线性回归适用于大多数常见的实际问题. 此外，有些形式上是非线性回归问题，可能通过自变量的变换，转化为线性回归.

这里讨论只含有一个自变量 X 的情形. 回归模型

$$Y=a+bx+\varepsilon, E(\varepsilon)=0, D(\varepsilon)=\sigma^2 \tag{9.2.1}$$

称为一元线性回归模型，其中 $a,b,\sigma^2(0<\sigma<+\infty)$ 为未知参数. a 称为回归常数，b 称为 Y 对 X 的回归系数，参数 σ^2 的意义前面已作过解释.

取定自变量 X 的一组值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，对 Y 做 n 次独立观测(试验)，记试验结果为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$，则

$$Y_i=a+bx_i+\varepsilon_i, i=1,2,\cdots,n.$$

式中 ε_i 是第 i 次观测时的随机误差. 由于各次观测独立，所以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 独立同分布，且

$$E(\varepsilon_i)=0, D(\varepsilon_i)=\sigma^2, i=1,2,\cdots,n.$$

有时我们还进一步要求随机误差 ε 服从正态分布，即假定

$$Y=a+bx+\varepsilon, \varepsilon\sim N(0,\sigma^2). \tag{9.2.2}$$

称为一元正态线性回归模型，此时，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可看作正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本.

设 Y 对应于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个观测值为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，则它们分别是 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的样本观测值.

本节主要解决下列问题：

(1) 用观测值 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$ 对未知参数 a、b 和 σ^2 进行点估计；

（2）对回归系数 b 作假设检验.

一、对 a,b 和 σ^2 的估计

设已知变量 X,Y 的 n 对观测值(x_i,y_i),$i=1,2,\cdots,n$,我们用最小二乘法求参数 a、b 的估计值.

记 a,b 的点估计为 $\hat{a}$,$\hat{b}$,则回归函数 $a+bx$ 被估计为 $\hat{a}+\hat{b}x$,在 $X=x_i$ 处,因变量 Y 的值被估计为 $\hat{y}_i=\hat{a}+\hat{b}x_i$,$i=1,2,\cdots,n$,而实际观测已得到$X=x_i$ 处 Y 的值 y_i,这样就有偏离 $y_i-\hat{y}_i$,$i=1,2,\cdots,n$,称为在 $X=x_i$ 处的残差,作残差平方和：

$$Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{a}-\hat{b}x_i)^2. \tag{9.2.3}$$

残差平方和越小越好,于是考虑选择使 $Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$ 取最小值的 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 作为 a、b 的估计值. 这种估计方法称为最小二乘法.

记

$$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x \tag{9.2.4}$$

称式(9.2.4)为 Y 对 X 的经验回归方程. 这里的‘经验’二字,表明回归方程是由试验数据估计得到的,区别于上文中直接从模型得到的理论回归方程. 类似地,称 $\hat{a}$ 为经验回归常数,$\hat{b}$ 为经验回归系数. 一般在不致混淆的场合,不用特别注明‘经验’或‘理论’两个字.

最小二乘法体现了最佳拟合的思想,由此得到的经验回归直线是拟合 n 个观测点(x_i,y_i)的所有直线中,总离差最小的直线.

利用多元函数求极值的方法,对 $Q=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$ 分别求关于 a、b 的偏导数并令它们等于零,得

$$\frac{\partial Q}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)x_i=0.$$

整理后,得方程组

$$\begin{cases} na+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i. \end{cases} \tag{9.2.5}$$

方程组(9.2.5)称为正规方程组. 解此方程组得 a,b 的估计值：

$$\hat{b}=\frac{l_{xy}}{l_{xx}},$$
$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

其中

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,$$

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y},$$

$$l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2.$$

可以证明,这样得到的 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 即是 a、b 的最小二乘估计值.

下面讨论误差方差 σ^2 的估计. 由式(9.2.1),有

$$\sigma^2=D(\varepsilon)=E(\varepsilon^2)-[E(\varepsilon)]^2=E(\varepsilon^2).$$

因此,σ^2 的矩估计为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$,再将 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 代入得到 $\hat{\sigma}^2$ 的估计. 由于该矩估计不是 σ^2 的无偏估计,故将矩估计修正为无偏估计,有

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2.$$

将 $\hat{y}_i=\hat{a}+\hat{b}x_i$ 代入上式,有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}+\hat{b}\bar{x}-\hat{b}x_i)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})\hat{b}+\sum_{i=1}^{n}\hat{b}^2(x_i-\bar{x})^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2-\hat{b}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.\end{aligned}$$

于是,得到 σ^2 的无偏估计为

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}(l_{yy}-\hat{b}^2l_{xx}),\tag{9.2.6}$$

其中，

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2.$$

例 9.2.1　第一导丝盘速度 Y 是合成纤维抽丝的重要因素,它与电流周波 X(单位:Hz)有密切关系,由生产记录得：

周波 X	49.2	50.0	49.3	49.0	49.0	49.5	49.8	49.9	50.2	50.2
速度 Y	16.7	17.0	16.8	16.6	16.7	16.8	16.9	17.0	17.0	17.1

试求 Y 对 X 的经验回归直线方程，并求误差方差 σ^2 的无偏估计值 $\hat{\sigma}^2$.

解　将观测数据点标注在坐标平面上，如图 9.1 所示，由此得到的图形称为散点图. 由散点图可以看出，各个点大致分布在一条直线附近，直观上可认为 Y 对 X 的回归函数为线性函数 $a+bx$.

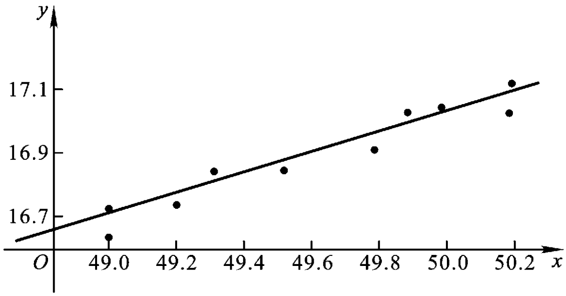


图 9.1

这里 $n=10$，计算出

$$\bar{x}=49.61,\ \sum_{i=1}^{10} x_i^2=24\ 613.51,$$
$$\bar{y}=16.86,\ \sum_{i=1}^{10} y_i^2=2\ 842.84,$$
$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i=8\ 364.92.$$

故得

$$l_{xx}=24\ 613.51-10\times 49.61^2=1.989,$$
$$l_{xy}=8\ 364.92-10\times 49.61\times 16.86=0.674,$$
$$l_{yy}=2\ 842.84-10\times 16.86^2=0.244.$$

于是有

$$\hat{b}=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=\frac{0.674}{1.989}\approx 0.338\ 9,$$
$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=16.86-0.338\ 9\times 49.61\approx 0.047\ 2,$$
$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}(l_{yy}-\hat{b}^2 l_{xx})$$
$$=\frac{1}{10-2}(0.244-0.338\ 9^2\times 1.989)\approx 0.001\ 9.$$

得经验回归直线方程为

$$\hat{y}=0.047\ 2+0.338\ 9x.$$

二、估计量的统计性质

最小二乘法得到的估计量是否具有优良性，这一问题的解答将有助于我们对最小二乘估计进行评价.

从一元正态线性回归模型(9.2.2)的假定，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是正态分布总体 $N(0,\sigma^2)$ 的独立同分布样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立，$Y_i \sim N(a+bx_i,\sigma^2)$，$i=1,2,\cdots,n$. 在回归分析的模型假定中，$X$ 是可控制的非随机变量，Y 是随机变量，以下的讨论中，将 $\hat{b}$，$\hat{a}$ 及 $\hat{\sigma}^2$ 的算式里的观测值 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 均换成随机变量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$，于是有

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

因此，$\hat{b}$ 是相互独立的正态分布随机变量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的线性组合，所以 $\hat{b}$ 也服从正态分布. 计算 $\hat{b}$ 的数学期望和方差，有

$$\begin{aligned}E(\hat{b})&=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})E(Y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\\&=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(a+bx_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\\&=\frac{a\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})+b\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})x_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=b,\end{aligned}$$

$$D(\hat{b})=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2D(Y_i)}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^2}=\frac{\sigma^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^2}=\frac{\sigma^2}{l_{xx}}.$$

可见，$\hat{b}$ 是 b 的无偏估计，并且对正态回归模型(9.2.2)，有

$$\hat{b}\sim N\left(b,\frac{\sigma^2}{l_{xx}}\right).$$

类似地，不难发现 $\hat{a}$ 也是 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的线性组合，也服从正态分布. 计算 $\hat{a}$

的数学期望和方差,有

$$E(\hat{a})=E(\overline{Y})-E(\hat{b})\bar{x}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i)-b\bar{x}=a,$$
$$D(\hat{a})=D(\overline{Y})+D(\hat{b})\bar{x}^2-2\operatorname{cov}(\overline{Y},\hat{b}\bar{x})$$
$$=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\bar{x}^2}{l_{xx}}\sigma^2-0$$
$$=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{l_{xx}}\right)\sigma^2.$$

可见,$\hat{a}$ 是 a 的无偏估计,并且对于正态回归模型(9.2.2),有

$$\hat{a}\sim N\left(a,\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{l_{xx}}\right)\sigma^2\right).$$

为讨论估计量 $\hat{\sigma}^2$ 的统计性质,先求出 $E(l_{yy}-\hat{b}^2l_{xx})$;

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]=\sum_{i=1}^{n}E(Y_i^2)-nE(\overline{Y}^2)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\{D(Y_i)+[E(Y_i)]^2\}-n\{D(\overline{Y})+[E(\overline{Y})]^2\}$$
$$=n\sigma^2+\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i)^2-n\left[\frac{\sigma^2}{n}+(a+b\bar{x})^2\right]$$
$$=(n-1)\sigma^2+b^2l_{xx},$$
$$E(\hat{b}^2l_{xx})=l_{xx}E(\hat{b}^2)=l_{xx}\{D(\hat{b})+[E(\hat{b})]^2\}$$
$$=l_{xx}\left(\frac{\sigma^2}{l_{xx}}+b^2\right)=\sigma^2+b^2l_{xx}.$$

于是

$$E(l_{yy}-\hat{b}^2l_{xx})=(n-2)\sigma^2.$$

可见,$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}(l_{yy}-\hat{b}^2l_{xx})$ 是 σ^2 的无偏估计. 并且,可以证明,对于正态回归模型(9.2.2),估计量 $\hat{\sigma}^2$ 分别与 $\hat{a}$,$\hat{b}$ 相互独立,且有

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-2).$$

三、一元线性回归的显著性检验

对任何两个变量 X 和 Y,无论它们之间是否存在线性相关关系,我们都可以依据试验数据(x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,n)$,由最小二乘法写出一个线性回归方程. 如果 X 和 Y 之间根本不存在线性相关关系,这样求出的方程其实是没有意义的.

只有当 X 和 Y 之间真正存在线性相关关系时，求出的回归方程才可以应用于实际的统计推断问题.

因此，在求经验回归直线方程（包括后面的多元线性回归方程）之前，应该先检验变量之间是否存在线性相关关系. 从根本上讲，这个问题要通过实践来回答，即从所研究问题的实际背景考察回归方程所描述变量之间关系的合理性. 但是，我们也有一些辅助性的统计方法来帮助回答这个问题，这就是下面要讨论的回归方程显著性检验.

1. F 检验法

记

$$Q_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2,$$

称 Q_T 为总离差平方和，它反映了变量 Y 的观测值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的总的离散强度. 我们对总离差平方和 Q_T 进行分解：

$$\begin{aligned} Q_T &= \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}). \end{aligned}$$

不难验证，上式中最末一项等于零，记

$$Q_E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

$$Q_R = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2.$$

称 Q_E 为残差平方和，Q_R 为回归离差平方和. 于是有

$$Q_T = Q_E + Q_R.$$

此式说明 Y 的观测值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的离散由残差与回归离差两方面原因造成. 一方面，由于 $(y_i - \hat{y}_i)^2$ 反映了 Y 的观测值 y_i 与回归直线的偏差，这个偏差是对相同的自变量值 x_i 而言的，因此这个差异来自于试验的随机误差而非自变量的变化，所以残差平方和 Q_E 的大小反映了试验误差等随机因素对 Y 的观测值所造成的离散程度；另一方面，注意到 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_n$ 的平均值

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\hat{a} + \hat{b}x_i) = \hat{a} + \hat{b}\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{a} + \hat{b}\bar{x} = \bar{y}.$$

因此，$Q_R = \sum\limits_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \bar{y})^2$ 实际上反映了数据 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_n$ 的离散程度. 这个离散是在回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 上由于自变量 X 取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的变化而引起的，所以 Q_R 的大小反映了回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 所描述的 Y 的值因自变量取值变化而具有的离散程度.

由于 Y 的观测值的离散由 Q_E 和 Q_R 引起，如果 Q_R 明显地大于 Q_E，说明回归直线已经包含了对变量 Y 有重要影响的各种因素，亦即说明 Y 与自变量 X 之间的线性相关关系显著；如果 Q_R 与 Q_E 差不多甚至比 Q_E 还小，则说明回归直线方程还没有包含对 Y 有重要影响的一些因素，Y 与 X 的线性相关关系不显著，此时，或者是 Y 与 X 不相关，或者是 Y 与 X 非线性相关，或者是还应增加自变量.

基于上述离差平方和分解的基础，提出假设检验的方法，即 Q_R 比 Q_E 大多少，才能认为 X 与 Y 的线性相关关系显著？通常是对回归系数 b 进行检验，提出原假设

$$H_0: b=0.$$

如果拒绝 H_0，则自变量 X 与因变量 Y 之间线性相关关系显著；如果接受 H_0，则意味着回归函数为一常数，所选定的自变量 X 与 Y 并没有明显的线性相关关系.

可以证明，在正态回归模型(9.2.2)的假定下，当原假设 H_0 成立时，统计量

$$F=\frac{Q_R}{Q_E/(n-2)}\sim F(1,n-2).$$

于是，根据上述分析，对于给定的显著性水平 α，原假设 $H_0: b=0$ 的拒绝域是

$$F>F_\alpha(1,n-2).$$

需指明，这里介绍的离差平方和分解的方法就是方差分析法(参见第十章).

实际中，各离差平方和 Q_T, Q_R, Q_E 常用如下的简便计算式：

$$Q_T=l_{yy}=\sum_{i=1}^n y_i^2-n\bar{y}^2,$$

$$\begin{aligned}Q_R&=\sum_{i=1}^n(\hat{a}+\hat{b}x_i-\hat{a}-\hat{b}\bar{x})^2\\&=\sum_{i=1}^n\hat{b}^2(x_i-\bar{x})^2=\hat{b}^2l_{xx},\end{aligned}$$

$$Q_E=l_{yy}-\hat{b}^2l_{xx}.$$

2. **相关系数检验法**

我们知道，变量 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} 是描述它们之间相关关系的数字特征. 一般地，如果 $|\rho_{XY}|$ 比较小，认为 X 与 Y 之间线性相关关系不显著；如果 $|\rho_{XY}|$ 比较大，认为 X 与 Y 之间线性相关关系显著. 因此，可以考虑利用相关系数来检验变量 X 与 Y 之间的线性相关关系是否显著.

通常情况下，X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} 未知，以其矩估计量样本相关系数 R 进行检验. 因为

$$\rho_{XY}=\frac{E\{[E-E(X)][Y-E(Y)]\}}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

定义

$$R=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}}\sqrt{l_{yy}}}.$$

样本相关系数 R 与 ρ_{XY} 具有类似的性质.

提出原假设

$$H_0:\rho_{XY}=0.$$

如果拒绝 H_0，则变量 X 与 Y 之间线性相关关系显著；如果接受 H_0，则认为 X 与 Y 之间线性相关关系不显著. 显然，样本相关系数 R 的绝对值越大，对原假设 H_0 越不利. 那么，$|R|$ 的值有多大时，才能拒绝 H_0 呢？本书附表 6 给出了显著性水平 $\alpha=0.01$ 与 0.05 的临界值 $R_\alpha(n-2)$. 对于给定显著性水平 α，当 $|R|>R_\alpha(n-2)$，则认为变量 X 与 Y 之间线性相关关系显著；否则认为线性相关关系不显著.

样本相关系数临界值 $R_\alpha(n-2)$ 与自由度 $(n-2)$ 有关. 由 R 的定义式不难发现，它与离差平方和 Q_R 与 Q_E 有如下关系式

$$\frac{R^2}{1-R^2}=\frac{Q_R}{Q_E}.$$

于是

$$F=\frac{(n-2)R^2}{1-R^2}=\frac{Q_R}{Q_E/(n-2)}\sim F(1,n-2).$$

对于给定的 $0<\alpha<1$，由

$$\begin{aligned}\alpha&=P\left\{\frac{(n-2)R^2}{1-R^2}>F_\alpha(1,n-2)\right\}\\&=P\left\{R^2>\frac{F_\alpha(1,n-2)}{(n-2)+F_\alpha(1,n-2)}\right\}\\&=P\left\{|R|>\sqrt{\frac{F_\alpha(1,n-2)}{(n-2)+F_\alpha(1,n-2)}}\right\}.\end{aligned}$$

即得到样本相关系数临界值 $R_\alpha(n-2)$ 的计算式：

$$R_{\alpha}(n-2)=\sqrt{\frac{F_{\alpha}(1,n-2)}{(n-2)+F_{\alpha}(1,n-2)}}.$$

例 9.2.2 试分别用 F 检验法和相关系数检验法，检验例 9.2.1 中的电流周波 X 与第一导丝盘速度 Y 之间是否存在显著的线性相关关系（取 $\alpha=0.01$）？

解 （1）F 检验法

$$Q_R=\hat{b}^2 l_{xx}=0.338\,9^2\times 1.989\approx 0.228\,4,$$
$$Q_E=l_{yy}-\hat{b}^2 l_{xx}=0.244-0.228\,4=0.015\,6,$$
$$n=10.$$

于是

$$F=\frac{Q_R}{Q_E/(n-2)}=\frac{0.228\,4}{0.015\,6/8}\approx 117.128\,2.$$

查表得 $F_{0.01}(1,8)=11.26$，由于 $F>F_{0.01}(1,8)$，所以电流周波 X 与第一导丝盘速度 Y 之间线性相关关系显著.

（2）相关系数检验法

$$R=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}}\sqrt{l_{yy}}}=\frac{0.674}{\sqrt{1.989}\sqrt{0.244}}\approx 0.967\,5.$$

$n=10$，查表得 $R_{0.01}(8)=0.765$，因为 $R>R_{0.01}(8)$，故电流周波 X 与第一导丝盘速度 Y 之间线性相关关系显著.

§ 9.3 多元线性回归

实际问题中，有多个自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 的多元线性回归分析，是更具有一般性的回归分析方法，在各个领域都有更为广泛的应用.

设自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 的取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，则多元线性回归模型为

$$\left.\begin{aligned}&Y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_kx_k+\varepsilon,\\&E(\varepsilon)=0,0<D(\varepsilon)=\sigma^2<+\infty\end{aligned}\right\}\tag{9.3.1}$$

式中 $b_0,b_1,\cdots,b_k,\sigma^2$ 为未知参数. b_0 称为回归常数，b_j 称为 Y 对 X_j 的回归系数或偏回归系数，$j=1,2,\cdots,k$ 参数 σ^2 的意义同前.

有时根据问题的实际情况，还可以假定为多元正态线性回归模型

$$Y=b_0+b_1x_1+\cdots+b_kx_k+\varepsilon,\varepsilon\sim N(0,\sigma^2).\tag{9.3.2}$$

取定自变量 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 的一组值 $(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ik})$，$i=1,2,\cdots,n$，对因变量 Y 作 n 次独立观测，记试验观测结果为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$，则有

$$Y_i=b_0+b_1x_{i1}+b_2x_{i2}+\cdots+b_kx_{ik}+\varepsilon_i,i=1,2,\cdots,n.\tag{9.3.3}$$

式中 ε_i 是第 i 次观测时的随机误差. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 独立同分布，

$$E(\varepsilon_i)=0, D(\varepsilon_i)=\sigma^2, i=1,2,\cdots,n.$$

记 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的观测值为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，多元线性回归分析的主要任务是依据观测数据，对未知参数 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 与 σ^2 作点估计，并对回归系数 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 进行假设检验.

多元线性回归分析是一元线性回归分析的自然推广，两者在参数估计、显著性检验等技术方面是非常相似的，只是有关的计算和理论更为复杂. 按照课程的基本要求，这里不对多元线性回归进行仔细的论述，只简明扼要地给出一些重要的结论.

为数学处理方便起见，通常引入矩阵表示上述模型. 记

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\ \vdots \\Y_n\end{bmatrix}_{n\times 1},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k}\\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk}\end{bmatrix}_{n\times(k+1)},$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\ \vdots \\b_k\end{bmatrix}_{(k+1)\times 1},\quad \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots \\ \varepsilon_n\end{bmatrix}_{n\times 1},\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\ \vdots \\y_n\end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

则方程(9.3.3)可写成

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\varepsilon}.$$

通常将上式及式(9.3.3)都称为线性模型.

一、多元线性回归模型的参数估计

对回归常数 b_0 和回归系数 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 的估计，仍采用最小二乘法. 作残差平方和

$$Q=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(b_0+b_1x_{i1}+\cdots+b_kx_{ik})]^2, \tag{9.3.4}$$

选择使残差平方和 Q 取最小值的 $\hat{b}_0,\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_k$ 作为 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 的估计值. 故对 Q 分别求关于 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 的偏导数，并令它们等于零，得

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_{i1}-\cdots-b_kx_{ik})=0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_j}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-b_1x_{i1}-\cdots-b_kx_{ik})x_{ij}=0,$$

化简、整理并将 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 换成 $\hat{b}_0,\hat{b}_1,\cdots,\hat{b}_k$ 后，得方程组：

$$\begin{cases} n\hat{b}_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\right)\hat{b}_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}\right)\hat{b}_k = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\right)\hat{b}_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2\right)\hat{b}_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{ik}\right)\hat{b}_k = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}y_i, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}\right)\hat{b}_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{i1}\right)\hat{b}_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2\right)\hat{b}_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ik}y_i. \end{cases} \tag{9.3.5}$$

方程组(9.3.5)的系数矩阵为 $X^{\mathrm{T}}X$,其中 T 表示矩阵的转置. 于是,方程组(9.3.5)可表示成如下的矩阵方程:

$$(X^{\mathrm{T}}X)\hat{\boldsymbol{b}} = X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \tag{9.3.6}$$

方程的解

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \\ \hat{b}_k \end{bmatrix}_{(k+1)\times 1} \quad 为 \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \\ b_k \end{bmatrix}_{(k+1)\times 1}$$

的最小二乘估计. 通常将方程组(9.3.5)和方程(9.3.6)都称为正规方程(组).

当正规方程(9.3.6)的系数矩阵 $X^{\mathrm{T}}X$ 可逆时,最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 有唯一的表达式

$$\hat{\boldsymbol{b}} = (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}(X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}).$$

可以证明,正规方程的解总是存在,亦即 $\boldsymbol{b}$ 的最小二乘估计总是存在. 当 $X^{\mathrm{T}}X$ 不可逆时,$\hat{\boldsymbol{b}}$ 不唯一,但 $X\hat{\boldsymbol{b}} \xlongequal{\text{def}} \hat{\boldsymbol{y}}$ 是唯一确定的,因而残差平方和 Q 的最小值是唯一确定的.

记
$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1x_1 + \cdots + \hat{b}_kx_k.$$

称上式为 Y 对 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 的经验线性回归方程,称 $\hat{b}_0$ 为经验回归常数,$\hat{b}_1$, $\hat{b}_2, \cdots, \hat{b}_k$ 为经验回归系数.

经验回归常数 $\hat{b}_0$ 与经验回归系数 $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \cdots, \hat{b}_k$ 之间有如下关系式

$$\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1\bar{x}_1 - \hat{b}_2\bar{x}_2 - \cdots - \hat{b}_k\bar{x}_k.$$

式中 $\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, j = 1, 2, \cdots, k$. 此关系式与一元线性回归中 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ 相类似.

对于随机误差的方差 σ^2,类似于一元线性回归,仍采用修正矩阵计为无偏估计的做法. 残差平方和 $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ 为

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{b}_0-\hat{b}_1x_{i1}-\hat{b}_2x_{i2}-\cdots-\hat{b}_kx_{ik})^2$$
$$=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{b}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{b}})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

因此，σ^2 的矩估计为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\frac{1}{n}(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}).$$

将修正矩阵计为无偏估计，有

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-k-1}(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}).$$

例 9.3.1　在汽油中加入两种化学添加剂，观察它们对汽车消耗 1 L **汽油所行里程的影响，共进行** 9 **次试验，得到里程** Y **与两种添加剂用量** X_1，X_2 **之间数据如下：**

x_{i1}	0	1	0	1	2	0	2	3	1
x_{i2}	0	0	1	1	0	2	2	1	3
y_i	15.8	16.0	15.9	16.2	16.5	16.3	16.8	17.4	17.2

试求里程 Y **与** X_1，X_2 **的经验线性回归方程，并求误差方差** σ^2 **的无偏估计值** $\hat{\sigma}^2$.

解　首先求正规方程的系数矩阵，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&2&0&2&3&1\\0&0&1&1&0&2&2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\\1&2&2\\1&3&1\\1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&10&10\\10&20&11\\10&11&20\end{bmatrix}.$$

其逆矩阵为

$$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}=\frac{1}{711}\begin{bmatrix}279&-90&-90\\-90&80&1\\-90&1&80\end{bmatrix}.$$

而

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=(148.1\quad 168.2\quad 167.3)^{\mathrm{T}}.$$

于是

$$\hat{\boldsymbol{b}}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\frac{1}{711}\begin{bmatrix}279 & -90 & -90\\ -90 & 80 & 1\\ -90 & 1 & 80\end{bmatrix}\begin{bmatrix}148.1\\ 168.2\\ 167.3\end{bmatrix}$$

$$\approx(15.6468 \quad 0.4139 \quad 0.3139)^{\mathrm{T}}.$$

即得到里程 Y 关于 X_1、X_2 的经验线性回归方程为

$$\hat{y}=15.6468+0.4139x_1+0.3139x_2.$$

又因为

$$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=2439.67,$$

$$\hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=[15.6468 \quad 0.4139 \quad 0.3139]\begin{bmatrix}148.1\\ 168.2\\ 167.3\end{bmatrix}\approx 2439.4245,$$

故有

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2&=\frac{1}{n-k-1}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}-\hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y})\\&=\frac{1}{9-2-1}(2439.67-2439.4245)\\&=0.0409.\end{aligned}$$

二、估计量的统计性质

由前面得到的参数 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 和 σ^2 的估计式，将观测值 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 依次替换为随机变量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$，得到相应的估计量.

记
$$\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)^{\mathrm{T}},$$

则参数向量 $\boldsymbol{b}$ 的估计量为

$$\hat{\boldsymbol{b}}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}.$$

在正态线性回归模型(9.3.2)的假定下，$\boldsymbol{Y}$ 是 n 维正态分布随机变量，$\hat{\boldsymbol{b}}$ 是一个 $(k+1)$ 维正态分布随机变量，其分量皆为正态随机变量.

不难发现，随机向量 $\boldsymbol{Y}$ 的数学期望(注：随机向量的数学期望等于其分量的数学期望为相应分量所构成的数值向量)为

$$E(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{X}\boldsymbol{b},$$

于是

$$\begin{aligned}E(\hat{\boldsymbol{b}})&=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\\&=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

可见，$\hat{b}$ 是 b 的无偏估计，进而 $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \cdots, \hat{b}_k$ 分别是 $b_0, b_1, \cdots, b_k$ 的无偏估计.

此外，可以证明残差平方和

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 / \sigma^2 \sim \chi^2(n-k-1).$$

于是对 σ^2 的无偏估计 $\hat{\sigma}^2$，有

$$\frac{(n-k-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k-1).$$

此处因模型中有 $k+1$ 个未知参数 $b_0, b_1, \cdots, b_k$ 要估计，故自由度减少了 $k+1$，变成 $(n-k-1)$. 显然，这里一元线性回归即为 $k=1$ 的特例.

三、多元线性回归中的假设检验

多元线性回归中，因包含多个回归系数，考虑的假设检验问题比一元线性回归复杂. 有对单个回归系数的检验，即逐一检验自变量 $X_j(j=1,2,\cdots,k)$ 对因变量 Y 的影响是否显著；还有检验全体回归系数是否皆为零，即检验原假设

$$H_0: b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0. \tag{9.3.7}$$

关于该假设的检验通常被称为回归显著性试验.

这里主要介绍关于假设(9,3.7)的回归显著性检验. 如果接受原假设 H_0，所选的自变量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 很可能对因变量 Y 没有影响或影响很小，这样配出的经验线性回归方程意义不大. 反之，如果拒绝原假设 H_0，则说明所选定的自变量 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 时因变量 Y 确有影响，通常认为回归达到了显著性，所配经验线性回归方程可以有效地使用. 值得一提的是，拒绝 H_0，只是保证所选自变量中包含了对因变量 Y 有重要影响的因素，但也可能还保留有并不重要的、或是可能遗漏了的其他有重要影响的因素，这里的讨论以及关于单个回归系数假设检验结论的解释，实质上涉及一个选择回归自变量的问题，这是近 30 年来在回归分析中很受重视的课题，对相应内容感兴趣的读者可参阅有关回归分析的专门书籍，如陈希孺和王松桂所著《近代回归分析》.

对原假设(9.3.7)的检验，仍采用离差平方和分解的方法. 记

$$Q_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2.$$

称 Q_T 为总离差平方和，它反映了因变量 Y 的观测值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 总的离散程度.

类似于一元线性回归中的平方和分解，Q_T 可以分解为残差平方和 Q_E 与回归离差平方和 Q_R 两部分

$$Q_T = Q_E + Q_R.$$

式中

$$Q_E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2,$$

$$Q_R = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2.$$

Q_E 的大小反映了试验误差等随机因素对 Y 的观测值所造成的离散程度；Q_R 的大小反映了回归方程 $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \cdots + \hat{b}_k x_k$ 所描述的 Y 的观测值因自变量取值变化而具有的离散程度.

将各离差平方和中的观测值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 换成变量 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$，则可证明，在多元正态线性回归模型(9.3.2)下，当原假设(9.3.7)式成立时，有

$$F = \frac{Q_R/k}{Q_E/(n-k-1)} \sim F(k, n-k-1).$$

于是，对于给定显著性水平 α，原假设 $H_0: b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$ 的拒绝域是

$$F > F_\alpha(k, n-k-1).$$

各离差平方和的计算式为

$$Q_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}) = l_{yy},$$

$$Q_E = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},$$

$$Q_R = Q_T - Q_E = \hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - n\bar{y}^2.$$

定义

$$R^* = \sqrt{\frac{Q_R}{Q_T}}$$

为复相关系数，R^* 满足 $0 \leqslant R^* \leqslant 1$.

复相关系数 R^* 反映了回归离差平方和 Q_R 在总离差平方和 Q_T 中所占份额，是评价回归模型有效性的指标. R^* 的值越大，说明回归模型中选定的自变量对因变量的影响越重要. 因此，复相关系数 R^* 的作用与一元线性回归中相关系数 R 的作用相似. 比较二者的定义式，当 $k=1$ 时二者一致，即相关系数 R 是复相关系数 R^* 的特例. 复相关系数 R^* 的值达到多大时才认为自变量与因变量相关关系显著呢？与一元线性回归类似，可以根据上面 F 检验的临界值 $F_\alpha(k, n-k-1)$ 和 R^* 的算式，计算出 R^* 的临界值，这里不再赘述.

例 9.3.2　检验例 9.3.1 中，里程 Y 关于添加剂用量 X_1, X_2 的线性回归是否显著(取 $\alpha = 0.01$)？

解　这里 $n=9, k=2$.

$$Q_T = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2 \approx 2.589\ 1.$$

利用例 9.3.1 中已求出的结果,有

$$Q_E = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} - \hat{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} = 2\,439.67 - 2\,439.424\,5 \approx 0.245\,5,$$

$$Q_R = Q_T - Q_E = 2.589\,1 - 0.245\,5 = 2.343\,6.$$

于是

$$F = \frac{Q_R/k}{Q_E/(n-k-1)} = \frac{\dfrac{2.343\,6}{2}}{\dfrac{0.245\,5}{9-2-1}} = 28.638\,7.$$

查表,$F_{0.01}(2,6) = 10.92$,由于 $F > F_{0.01}(2,6)$,故检验认为,里程 Y 对于添加剂用量 X_1,X_2 的线性回归显著.

复相关系数

$$R^* = \sqrt{\frac{Q_R}{Q_T}} = \sqrt{\frac{2.343\,6}{2.589\,1}} = 0.954\,1.$$

§9.4　非线性回归问题的线性化处理

在许多实际问题中,变量之间存在的相关关系不是线性的,而是某种曲线的非线性相关关系.

例 9.4.1　测量 13 个样品中某种金属含量 Y 与该样品采集点距中心观测点的距离 X,有如下的观测值:

x_i	2	3	4	5	7	8	10	11
y_i	106.42	108.20	109.58	109.50	110.00	109.93	110.49	110.59

x_i	14	15	16	18	19
y_i	110.62	110.90	110.76	111.00	111.20

将数据点 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,13)$ 描绘在坐标平面上,得到散点图,如图 9.2 所示. 显然,这些点不是分布在某一条直线附近,此时用一元线性回归方法处理这个问题是不合适的.

例 9.4.2　电容器充电到 100 V 电压时开始放量,测得时刻 t_i 时的电压 u_i 的数据如下:

t_i(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_i(s)	100	75	55	40	30	20	15	10	8	5	3

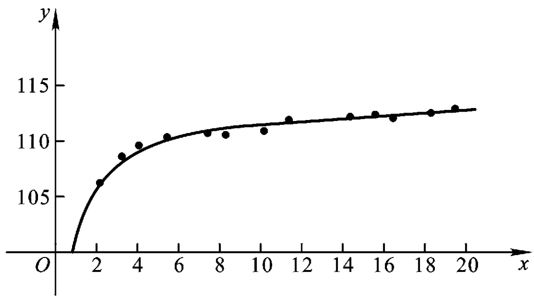


图 9.2

将数据点(t_i,u_i) $(i=1,2,\cdots,11)$描绘在坐标平面上，其散点图如图 9.3 所示. 很明显，用一元线性回归的方法来处理这个问题也是不恰当的.

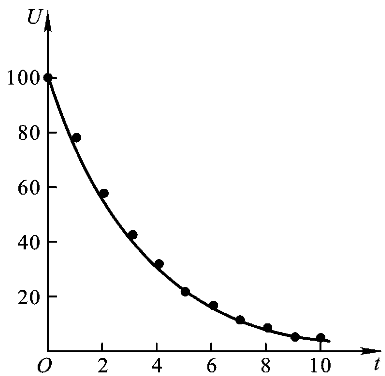


图 9.3

对于上述这种变量之间存在的非线性相关关系问题，要用到非线性回归分析的方法，非线性回归分析的讨论比线性回归分析要复杂得多. 本节只介绍可线性化的非线性回归.

一、用变量替换将非线性回归问题线性化

若变量之间存在非线性相关关系，首先要设法确定变量间曲线相关的类型，选用一条合适的曲线来拟合变量间的相关关系，然后根据其特点进行变量替换，将其转化为线性回归问题. 分析变量之间相关关系的类型，一般有两条途径：一是根据所讨论问题的专业知识或以往积累的经验确定；二是对于仅有一个自变量的一元回归问题，可根据实际观测数据描出的散点图确定.

为了便于选择适当的函数形式进行曲线拟合，下面列出了常见的几种典型

曲线方程及其图形,供实际应用中选用.

（1）双曲线函数

$$\frac{1}{y}=a+\frac{b}{x}.$$

其曲线图形如图 9.4 所示.

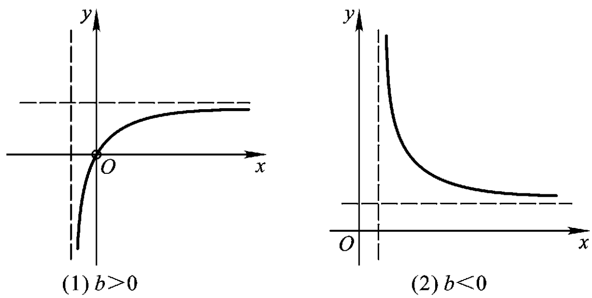


图 9.4

（2）幂函数

$$y=ax^{b}\quad (x>0).$$

其中参数 $a>0$,其曲线图形如图 9.5 所示.

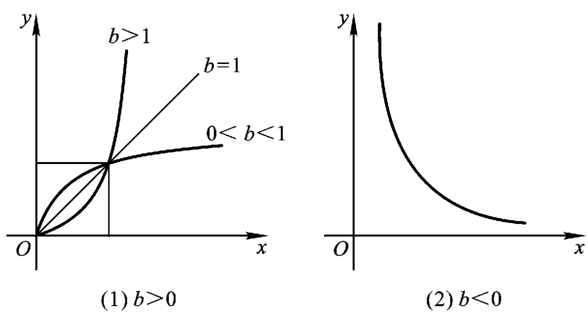


图 9.5

（3）对数函数

$$y=a+b\ \ln\ x\quad (x>0).$$

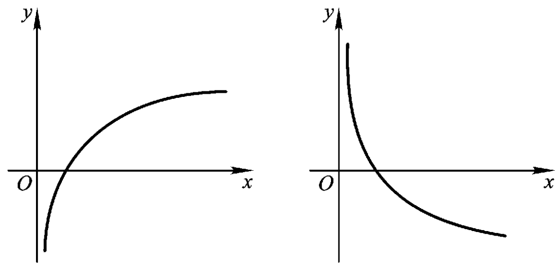
其曲线图形如图 9.6 所示.

（4）指数函数

$$y=ae^{bx}.$$

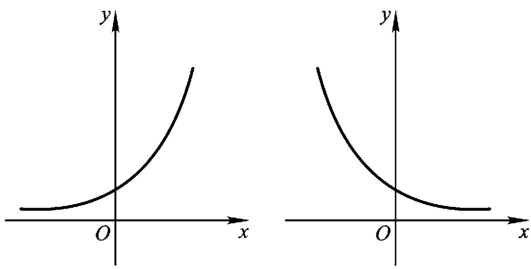
其中参数 $a>0$,其曲线图形如图 9.7 所示.

（5）倒数指数函数



(1) $b>0$　　(2) $b<0$

图 9.6

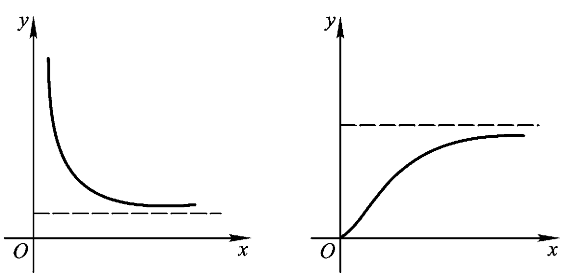


(1) $b>0$　　(2) $b<0$

图 9.7

$$y = a\mathrm{e}^{\frac{b}{x}} \quad (x>0).$$

其中参数 $a>0$,其曲线图形如图 9.8 所示.



(1) $b>0$　　(2) $b<0$

图 9.8

（6）S 形曲线

S 形曲线方程如下

$$y=\frac{1}{a+b\mathrm{e}^{-x}}.$$

其曲线图形如图 9.9 所示.

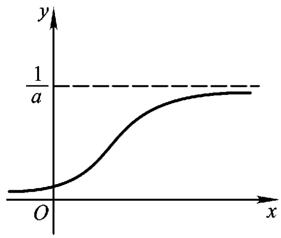


图 9.9

将非线性回归问题化为线性回归问题后,确定出有关参数的数值,再代回到原来的变量,就得到所需要的回归曲线.

例 9.4.3　对例 9.4.1,试求金属含量 Y 与样品采集点距中心观测点的距离 X 之间的相关关系式,并进行显著性检验.

解　由其散点图(见图 9.2),可以认为变量 X 与 Y 之间具有对数曲线的类型(见图 9.6),于是得到该问题的回归模型:

$$Y=a+b\ln x+\varepsilon, E(\varepsilon)=0, 0<D(\varepsilon)=\sigma^2<+\infty.$$

进行变量替换

$$x^*=\ln x,$$

则拟合曲线变为直线

$$Y=a+bx^*+\varepsilon, E(\varepsilon)=0,\quad 0<D(\varepsilon)=\sigma^2<+\infty.$$

将试验观测值 (x_i, y_i) 按变换公式 $x^*=\ln x$ 变换为 (x_i^*, y_i)　$(i=1,2,\cdots,13)$:

x_i^*	0.693 1	1.098 6	1.386 3	1.609 4	1.945 9	2.079 4
y_i	106.42	108.20	109.58	109.50	110.00	109.93

x_i^*	2.302 6	3.397 9	2.639 1	2.708 1	2.772 6	2.890 4	2.944 4
y_i	110.49	110.59	110.62	110.90	110.76	111.00	111.20

计算出

$$\bar{x}^*=2.112\ 9, \sum_{i=1}^{13} x_i^{*2}=64.371\ 5,$$

$$\bar{y}=109.937\ 7, \sum_{i=1}^{13} y_i^2=157\ 143.087\ 9,$$

$$\sum_{i=1}^{13} x_i^* y_i = 3\ 030.614\ 1.$$

故有

$$l_{x^*x^*} = 64.371\ 5 - 13 \times 2.112\ 9^2 \approx 6.335\ 0,$$

$$l_{x^*y} = 3\ 030.614\ 1 - 13 \times 2.112\ 9 \times 109.937\ 7 \approx 10.878\ 3,$$

$$l_{yy} = 157\ 143.087\ 9 - 13 \times 109.937\ 7^2 \approx 21.215\ 5.$$

于是

$$\hat{b} = \frac{10.878\ 3}{6.335\ 0} = 1.717\ 2,$$

$$\hat{a} = 109.937\ 7 - 1.717\ 2 \times 2.112\ 9 = 106.309\ 4.$$

得到 Y 关于 X 的经验回归方程

$$\hat{y} = 106.309\ 4 + 1.717\ 2\ln x.$$

且 σ^2 的无偏估计值

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{l_{yy} - \hat{b}^2 l_{x^*x^*}}{n-2} = \frac{21.215\ 5 - 1.717\ 2^2 \times 6.335\ 0}{13-2} = 0.230\ 5.$$

变量 X^* 与 Y 之间的样本相关系数

$$R = \frac{l_{x^*y}}{\sqrt{l_{x^*x^*}} \cdot \sqrt{l_{yy}}} = \frac{10.878\ 3}{\sqrt{6.335\ 0} \cdot \sqrt{21.215\ 5}} = 0.938\ 3,$$

查表得 $R_{0.01}(11) = 0.684$，因为 $R = 0.938\ 3 > R_{0.01}(11)$，于是，变量 X^* 与 Y 的线性相关关系显著，即可以认为变量 X 与 Y 之间有显著的形如 $y = a + b\ln x$ 的相关关系.

一般地，只对自变量实施变量替换，则是本质上可线性化的回归，如例 9.4.1 .而无论自变量是否替换，变量替换只要对因变量实施，则一定是本质上不可线性化的回归，如例 9.4.2 中，由其散点图（图 9.3）的形态，可认为电压 U 关于时刻 t 的回归方程为指数曲线类型（图 9.7），故该问题的回归模型为

$$U = a\mathrm{e}^{bt} + \varepsilon, E(\varepsilon) = 0, 0 < D(\varepsilon) = \sigma^2 < +\infty.$$

其中 a, b 为未知参数，ε 为随机误差. 为将此非线性模型转化为线性模型，对上式两边取对数，有

$$\ln U = \ln(a\mathrm{e}^{bt} + \varepsilon) = \ln\left[a\mathrm{e}^{bt}\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\mathrm{e}^{-bt}\right)\right]$$

$$= \ln a + bt + \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\mathrm{e}^{-bt}\right).$$

令 $Y=\ln U$，记 $\ln a=A$，$\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon}{a}e^{-bt}\right)=\varepsilon^*$，则有

$$Y=A+bt+\varepsilon^*.$$

从形式上看，上式似乎也是一个线性回归模型，但实际上这里有本质差距，其误差项 ε^* 是一个与待估的未知参数 a，b 及自变量 t 有关的随机变量，不能将其视为随机误差. 因而从理论上说，不能完全套用一元线性回归的有关公式去处理该类本质上不可线性化的回归问题.

不难验证，前面列出的六种常见曲线类型中，只有对数曲线 $y=a+b\ln x$ 属于本质上可线性化的回归，其余五种类型皆为本质上不可线性化的回归.

对于本质上不可线性化的回归问题，有一些直接处理的方法，这里不作进一步介绍.

在实际应用中，我们往往最感兴趣的是配出能反映变量之间大致关系的经验回归曲线. 如果变量替换只针对回归方程 $y=\mu(x)$ 进行，将其变换为线性方程，不涉及关于随机误差的假定，从而套用一元线性回归的有关计算公式，估计出经验回归方程，这是一种行之有效的简便处理方法.

例 9.4.4　试求例 9.4.2 中电压 U 与时刻 t 之间的相关关系式.

解　对回归方程

$$u=ae^{bt},$$

实施变量替换，令 $y=\ln u$，$x=t$，记 $A=\ln a$，则有

$$y=A+bx.$$

由观测值 (t_i,u_i) 计算出 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,11)$，再计算出

$$\bar{x}=5,\quad \sum_{i=1}^{11}x_i^2=385,$$

$$\bar{y}=2.983\ 1,\quad \sum_{i=1}^{11}x_iy_i=126.455\ 2.$$

故

$$l_{xx}=385-11\times5^2=110,$$

$$l_{xy}=126.455\ 2-11\times5\times2.983\ 1=-37.615\ 3.$$

于是

$$\hat{b}=\frac{-37.615\ 3}{110}=-0.342\ 0,$$

$$\hat{A}=2.983\ 1-(-0.342\ 0)\times5=4.693\ 1.$$

从而

$$\hat{a}=e^{4.6931}=109.191\ 1.$$

故电压 U 关于时刻 t 的经验回归方程为

$$\hat{u}=109.191\ 1\ \mathrm{e}^{-0.342\ t}.$$

此题如果考虑实际的物理背景，即时刻 $t=0$ 时，电压值为 $u=100\ \mathrm{V}$，运用经过定点的回归方程公式（参见习题九第 1 题），可求得经验回归方程

$$\hat{u}=100\mathrm{e}^{-0.329\ 4t}.$$

使用线性化方法的关键是对数据作适当的变换，使得变换后的数据点大致在一条直线周围. 当没有足够的专业知识可利用的时候，往往要多试几种变换以得到与实际较吻合的经验公式.

对于含有多个自变量的多元非线性回归问题，仍然可以利用变量替换，将其作线性化处理. 例如，在某项试验中，根据经验知道，试验指标 Y 与变量 X_1，X_2，X_3 有关，并且与 X_1，X_2^2，$\frac{1}{X_3}$成正比例关系，于是可以假设有如下回归模型.

$$Y=b_0+b_1x_1+b_2x_2^2+\frac{b_3}{x_3}+\varepsilon.$$

式中 ε 是随机误差，这是一个三元非线性回归问题. 只需作变量替换 $x_2^*=x_2^2$，$x_3^*=\frac{1}{x^3}$，该问题即化为一个三元线性回归问题.

二、一元多项式回归

一元多项式回归，是将具有一般形式的非线性回归问题，本质地转化为线性回归的一种方法.

由高等数学的级数理论，一个有任意阶导数的函数可以展开成幂级数，该级数的前有限项是一个多项式，可无限地逼近这个函数. 此外还可证明，当 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则对任给 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使 $|f(x)-P(x)|<\varepsilon$ 对 $a\leqslant x\leqslant b$ 一致成立.

根据上述思路，可以对回归函数进行估计. 下面仅说明一元多项式回归.

设因变量 Y 与自变量 X 有关，记 Y 关于 X 的回归函数为 $\mu(x)$，考虑函数 $\mu(x)$ 为一个 k 次多项式，即

$$\mu(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_kx^k,$$

于是回归模型为

$$Y=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_kx^k+\varepsilon.$$

ε 是随机误差. 作变换替换：

$$x_1=x,x_2=x^2,\cdots,x_k=x^k,$$

则上述回归模型变换为

$$Y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_kx_k+\varepsilon.$$

从而将问题转化为多元线性回归模型.

从理论上说，只要变量之间存在相关关系，都可以利用多项式回归估计出相应的多项式经验回归方程，当误差偏大或回归模型不显著时，可考虑用更高次数的多项式进行回归分析. 信息时代计算机知识的广泛应用，有效地克服了回归分析方法在计算方面的一些障碍，使多项式回归方法的应用越来越广泛.

例 9.4.5　试求例 9.4.2 中电压 U 与时刻 t 之间的多项式回归方程.

解　考虑电压 U 关于时刻 t 的二阶多项式回归，故回归方程为

$$u = b_0 + b_1 t + b_2 t^2.$$

作变量替换，令 $x_1 = t$，$x_2 = t^2$，于是回归方程变为

$$u = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

沿用多元线性回归中的记号，根据所得到的观测值，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 & 9^2 & 10^2 \end{bmatrix}$$

计算出

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 11 & 55 & 385 \\ 55 & 385 & 3\,025 \\ 385 & 3\,025 & 25\,333 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1} = \frac{1}{8\,580}\begin{bmatrix} 4\,980 & -1\,890 & 150 \\ -1\,890 & 1\,078 & -100 \\ 150 & -100 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 361 \\ 824 \\ 3\,882 \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 95.888\,1 \\ -21.237\,5 \\ 1.231\,9 \end{bmatrix}.$$

得到电压 U 关于时刻 t 的经验回归方程为

$$\hat{u} = 95.888\,1 - 21.237\,5t + 1.231\,9t^2.$$

计算各离差平方和，有

$$Q_T = \sum_{i=1}^{11} (u_i - \bar{u})^2 = 10\,125.636\,4,$$

$$Q_E = \sum_{i=1}^{11} u_i^2 - (95.888\,1, -21.237\,5, 1.231\,9)\begin{bmatrix} 361 \\ 824 \\ 3\,882 \end{bmatrix} = 74.860\,1,$$

$$Q_R = Q_T - Q_E = 10\,125.636\,4 - 74.860\,1 = 10\,050.776\,3.$$

于是

$$F = \frac{Q_R/k}{Q_E/(n-k-1)} = \frac{10\,050.776\,3/2}{74\,680\,1/(11-2-1)}$$

$=537.0432.$

查表得 $F_{0.01}(2,8)=8.65$，$F>F_{0.01}(2,8)$，该多项式回归显著.

§9.5 应用

回归分析是重要的数理统计方法之一，实际中已得到广泛的应用. 预测和控制是它应用于生产实践的两个重要方面.

一、预测和控制

1. 预测

设要考察的指标为因变量 Y，与其有相关关系的自变量为 X（自变量也可以是多个，为叙述方便，这里统称为 X）. 所谓预测，就是对给定的 X 的值 x_0 以及置信度 $1-\alpha$，求随机变量 Y 的预测值 y_0 及置信区间，此时置信区间又称为预测区间.

假定 Y 关于 X 的回归模型是

$$Y=\mu(x)+\varepsilon,\varepsilon\sim N(0,\sigma^2),$$

则当 X 取定值 x_0 时，有

$$Y_0=\mu(x_0)+\varepsilon,\varepsilon\sim N(0,\sigma^2).$$

记 Y_0 的观测值为 y_0，当我们得到回归函数 $\mu(x)$ 的估计 $\hat{\mu}(x)$ 后，通常以 y_0 的回归值 $\hat{y}=\hat{\mu}(x_0)$ 作为 y_0 的预测值，并据此求出 y_0 的置信区间.

对 y_0 进行区间估计需知有关估计量的概率分布，而这个问题目前仅对线性回归分析有比较完整的结果. 因此，利用回归方程预测，通常都是对线性回归的问题或本质上可线性化的非线性回归问题进行的. 下面仅通过一元线性回归来说明预测的方法.

对于一元正态线性回归模型(9.2.2)，有

$$Y_0=a+bx_0+\varepsilon_0,\varepsilon_0\sim N(0,\sigma^2). \tag{9.5.1}$$

y_0 的预测值 $\hat{y}_0=\hat{a}+\hat{b}x_0$，于是 $y_0-\hat{y}_0=y_0-(\hat{a}+\hat{b}x_0)$，为讨论概率分布，将 y_0，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 换成 $Y_0,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$.

可以证明，统计量

$$T=\frac{Y_0-(\hat{a}+\hat{b}x_0)}{\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{l_{xx}}}}\sim t(n-2). \tag{9.5.2}$$

于是，对于给定的置信度 $1-\alpha$，

$$P\{|T|<t_{\alpha/2}(n-2)\}=1-\alpha,$$

则 y_0 的预测区间为

$$\left(\hat{a}+\hat{b}x_0-t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{l_{xx}}},\hat{a}+\hat{b}x_0+t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{l_{xx}}}\right). \tag{9.5.3}$$

预测区间的长度

$$L=2t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{l_{xx}}}.$$

由 L 的表达式可以看到

(1) L 与 α 有关，α 越小，L 越大；

(2) L 与 n 有关，n 越大，L 越小；

(3) L 与 x_0 有关，当 $x_0=\bar{x}$ 时，L 最小，$|x_0-\bar{x}|$ 越大，L 越大；

(4) L 与 l_{xx} 有关，l_{xx} 越大，即点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 比较分散，L 越小；

(5) L 与 $\hat{\sigma}$ 有关，$\hat{\sigma}$ 越小，L 越小.

因此，为了获得较精确的预测区间，应该在建立回归方程时，选择观测点的个数 n 比较多，且各个观测点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不要太集中. 同时，在进行预测时，适用范围一般在试验过的 x 的变化范围内，以免因轻易外推而带来误差.

预测区间的表达式(9.5.3)非常复杂，实际应用时可以将其简化. 注意到当 n 很大，同时 x_0 离 $\bar{x}$ 不太远时，亦即 $|x_0-\bar{x}|\ll l_{xx}$，此时有

$$t_{\alpha/2}(n-2)\approx u_{\alpha/2},$$

$$1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{l_{xx}}\approx 1.$$

故可以将(9.5.3)式简化为

$$(\hat{a}+\hat{b}x_0-u_{\alpha/2}\hat{\sigma},\hat{a}+\hat{b}x_0+u_{\alpha/2}\hat{\sigma}). \tag{9.5.4}$$

式(9.5.4)是实际预测中常用的计算公式.

例 9.5.1　在例 9.2.1 中，我们得到第一导丝盘速度 Y 关于电流周波 X 的回归方程

$$y=0.047\ 2+0.338\ 9x.$$

试利用该方程对 $x=50$ Hz 时 y 的波动区间进行估计($\alpha=0.05$).

解　由例 9.2.1 及例 9.2.2 得到

$$\bar{x}=49.61,l_{xx}=1.989,Q_E=0.015\ 6,n=10.$$

故

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{Q_E}{n-2}}=0.044,$$

又 $t_{0.025}(8)=2.306$，计算得

$$\hat{y}_0=0.0472+0.3389\times50=16.9922,$$

$$2.306\times0.044\times\sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{(50-49.61)^2}{1.989}}=0.110.$$

所以 y 的预测区间为 $(16.882,17.102)$.

假设例 9.2.1 中得到的数据是在 $n=100$ 的情况下得到的，则利用回归方程 $y=0.0472+0.3389x$，在同样的显著性水平下，由简化式(9.5,4)估计出 $x=50$ Hz 时 y 的波动区间为 $(16.967,17.017)$，估计区间明显变小，估计精度显著提高.

2. 控制

控制是预测的反问题. 控制问题的提法是:给定了置信度 $1-\alpha$，求出一个区间 (c_1,c_2)，使得 $c_1<x<c_2$ 时，对应的变量 Y 的值，以 $1-\alpha$ 的概率落在事先给定的区间 (d_1,d_2) 中，则 (c_1,c_2) 称为控制区间.

控制问题的求解比较复杂，我们仅利用式(9.5.4)求出一个近似结果.

由式(9.5.4)，令

$$d_1=\hat{a}+\hat{b}x_1-u_{\alpha/2}\hat{\sigma}, \tag{9.5.5}$$

$$d_2=\hat{a}+\hat{b}x_2+u_{\alpha/2}\hat{\sigma}. \tag{9.5.6}$$

得

$$x_1=\frac{d_1+u_{\alpha/2}\hat{\sigma}-\hat{a}}{\hat{b}},\quad x_2=\frac{d_2-u_{\alpha/2}\hat{\sigma}-\hat{a}}{\hat{b}}.$$

取

$$c_1=\min\{x_1,x_2\},c_2=\max\{x_1,x_2\},$$

则 (c_1,c_2) 即是满足要求的 x 的控制区间. 需要注意的是，指定区间 (d_1,d_2) 的区间长度 d_2-d_1 必须超过预测区间长度 $2u_{\alpha/2}\hat{\sigma}$，才能实现控制.

二、非线性交调的频率设计

非线性交调的频率设计问题，广泛存在于通讯系统中，这里介绍的实例，是卫星通信中频率设计问题的简化. 简单说明其背景如下:如果一非线性器件输入

$$u(t)=\cos 2\pi f_1 t+\cos 2\pi f_2 t, f_1\neq f_2,$$

而输入输出关系为 $y(t)=u(t)+u^2(t)$，则 $y(t)$ 的展开式为

$$y(t)=1+\cos 2\pi f_1 t+\cos 2\pi f_2 t+\frac{1}{2}\cos 4\pi f_1 t+\frac{1}{2}\cos 4\pi f_2 t$$

$$+\cos 2\pi(f_1+f_2)t+\cos 2\pi(f_1-f_2)t.$$

可见 $y(t)$ 的展开式中不仅包含有原信号的频率 f_1 和 f_2，而且包含有 $2f_1,2f_2$，

$f_2 \pm f_2$ 等新的频率成分，这些新的频率称为交调. 如果这些交调出现在 f_1 和 f_2 的接收带内，就会形成干扰. 工程设计中的一项任务就是在允许的范围内调整 f_1 和 f_2，使得各交调对信号不构成干扰，或者是弱干扰.

现有一非线性(SCS)系统，其输入输出关系由如下的一组数据给出：

输入 u	0	5	10	20	30	40	50	60	80
输出 y	0	2.25	6.80	20.15	35.70	56.40	75.10	87.85	98.50

输入信号为

$$u(t) = A_1\cos 2\pi f_1 t + A_2\cos 2\pi f_2 t + A_3\cos 2\pi f_3 t.$$

式中 $A_1 = 25$，$A_2 = 10$，$A_3 = 45$ 是输入信号振幅，一般的输入信号

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos 2\pi f_k t$$

有数十项或上百项，这里作了简化.

对输入信号频率 f_1，f_2，f_3 的设计要求为：

1) $36 \leqslant f_1 \leqslant 40$，$41 \leqslant f_2 \leqslant 50$，$46 \leqslant f_3 \leqslant 55$.

2) 输出中的交调均不得出现在 $f_i \pm 5$ 的范围内，$i = 1, 2, 3$，此范围称为 f_i 的接收带.

3) f_i 不能出现在 f_j 的接收带内，$i, j = 1, 2, 3$，$i \neq j$.

4) 定义：信噪比 SNR(单位：dB)为

$$\mathrm{SNR} = 10\lg \frac{B_i^2}{C_n^2}, i = 1, 2, 3.$$

式中 B_i 为输出中对应于 f_i 的信号的振幅，C_n 为某一个频率为 f_n 的交调的振幅.

当 f_n 出现在 $f_i \pm 6$ $(i = 1, 2, 3)$ 处时，则其对应的信噪比要大于 10 dB.

这一要求的意义是，f_n 出现在 $f_i \pm 6$ 处时，已不在 f_i 的接收带内，但距 f_i 的接收带很近. 因此，若此时信噪比 SNR > 10 dB，则可认为 f_n 对 f_i 的干扰可忽略不计，否则，认为 f_n 对 f_i 有干扰.

5) 为简单起见，f_i 只取整数值，且交调只考虑二阶类型(即 $\{f_i \pm f_j\}$，$i, j = 1, 2$)和三阶类型(即 $\{f_i \pm f_j \pm f_k\}$，$i, j, k = 1, 2, 3$).

一般的情形是，f_i 可取非负实数值，交调需要考虑五阶或七阶.

下面按照上述简化的设计要求，确定输入信号频率 f_1，f_2，f_3 的取值.

此问题的求解分三个步骤：(a) 由所给的数据建立输入输出关系式；(b) 在 $\{f_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ 允许的范围内，解出满足频率约束条件的全部可能的配置；(c) 计算输出的信号频率和交调频率的振幅，计算各信噪比，选出符合要求的频率设计.

鉴于本书的性质,我们主要介绍利用回归方法建立输入输出关系式,其余内容只作简要说明.

根据设计要求,仅考虑二阶和三阶交调,因此假定输入输出的函数关系是:

$$y(t)=b_0+b_1u(t)+b_2u^2(t)+b_3u^3(t). \tag{9.5.7}$$

由所给输入输出的实际数据,有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&5&10&20&30&40&50&60&80\\0&5^2&10^2&20^2&30^2&40^2&50^2&60^2&80^2\\0&5^3&10^3&20^3&30^3&40^3&50^3&60^3&80^3\end{bmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}9&295&15\ 525&953\ 125\\295&15\ 525&953\ 125&63\ 710\ 625\\15\ 525&953\ 125&63\ 710\ 625&4\ 496\ 903\ 125\\953\ 125&63\ 710\ 625&4\ 496\ 903\ 125&329\ 315\ 015\ 625\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}=[0\quad 2.25\quad 6.80\quad 20.15\quad 35.70\quad 56.40\quad 75.10\quad 87.85\quad 98.50],$$

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}382.75\\20\ 715.25\\1\ 265\ 576.25\\83\ 536\ 881.25\end{bmatrix}.$$

故由§9.3公式,得到关系式(9.5.7)中系数 b_0,b_1,b_2 和 b_3 的估计为

$$\begin{bmatrix}\hat{b}_0\\\hat{b}_1\\\hat{b}_2\\\hat{b}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&295&15\ 525&953\ 125\\295&15\ 525&953\ 125&63\ 710\ 625\\15\ 525&953\ 125&63\ 710\ 625&446\ 903\ 125\\953\ 125&63\ 710\ 625&446\ 903\ 125&329\ 315\ 015\ 625\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}382.75\\20\ 715.25\\1\ 265\ 576.25\\83\ 536\ 881.25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.049\ 46\\0.239\ 1\\0.045\ 51\\-0.000\ 414\ 2\end{bmatrix}.$$

于是估计的输入输出关系式

$$y(t)=0.049\ 46+0.239\ 1u(t)+0.045\ 51u^2(t)-0.000\ 414\ 2u^3(t). \tag{9.5.8}$$

检验式(9.5.8)的显著性,有

$$F=4\ 629.42\gg F_{0.01}(3,5)=12.06,$$

$$R^*=0.998\ 2.$$

表明关系式(9.5.8)是显著的.

然而,考虑到输入输出关系的物理背景(这一点在处理实际问题时尤需重视),由所给数据中,有 $u=0, y=0$,即没有输入信号时没有输出信号,表明常数项 $a=0$ 更为合理. 因而应对其余的 8 对数据求形如

$$y(t)=b_1u(t)+b_2u^2(t)+b_3u^3(t)$$

的输入输出关系式.

用相同的回归方法,可求得

$$y(t)=0.244\ 1u(t)+0.045\ 38u^2(t)-0.000\ 413\ 2u^3(t). \qquad (9.5.9)$$

检验式(9.5.9)的显著性,有

$$F=5\ 734.23 \gg F_{0.01}(2,5)=13.27,$$

$$R^*=0.999\ 782.$$

表明式(9.5.9)的显著性与式(9.5.8)几乎相同,综合物理背景的因素,选用式(9.5.9)作为本问题的输入输出关系式.

对于输入信号

$$u(t)=\sum_{k=1}^{3}A_k\cos 2\pi f_k t, \qquad (9.5.10)$$

将式(9.5.10)代入式(9.5.9),整理后可发现频率成分有以下几种:

(1) 一阶　$f_i, i=1,2,3$;

(2) 二阶　$f_i \pm f_j, i,j=1,2,3, i\neq j$;

(3) 三阶　$2f_i \pm f_j, f_i \pm f_j \pm f_k, i,j,k=1,2,3, i\neq j\neq k.$

其中(2)、(3)即为可能出现的交调.

根据频率设计要求 1)、2)、3)及 5),可以选出满足频率约束的有 6 组解(f_1,f_2,f_3):

$$(36,42,54),(36,42,55),(36,48,54)$$
$$(36,49,56),(36,43,55),(37,49,55)$$

再根据频率设计要求 4)中关于信噪比的要求,先计算对应于频率为 $f_i(i=1,2,3)$ 的振幅和各类可能需要考虑的交调的振幅,再计算有关的信噪比,得到上述 6 组频率中信噪比大于 10 dB 即满足条件 4)的只有二组:(36,42,55)和(36,49,55).

于是,得到非线性交调的频率设计的解为

$$f_1=36, f_2=42, f_3=55.$$

或者

$$f_1=36, f_2=49, f_3=55.$$

习　题　九

1. (过定点配直线)假定从某问题的实际背景确定:当自变量 X 取值为 x_0 时,因变量 Y 取值 y_0 才符合实际背景,则可假设如下的过定点 (x_0, y_0) 的一元线性回归模型:

$$Y_i = y_0 + b(x_i - x_0) + \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

式中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 相互独立,均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$,试由观测值 (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$ 用最小二乘法估计参数 b,并用矩法估计 σ^2.

2. 在一定条件下测得石灰水乳液的相对密度 X 与百分浓度 Y 的一组值为

相对密度 $x_i(d)$	1.038	1.038 5	1.039	1.050	1.063	1.064
百分浓度 $y_i(\%)$	5.05	5.7	6.45	8.26	10.08	11.12
相对密度 $x_i(d)$	1.073	1.801	1.082	1.090	1.096	1.119
百分浓度 $y_i(\%)$	12.00	13.16	13.66	15.35	16.54	18.08

从物理化学的意义上说，当石灰水乳液的百分浓度为 0 时，其密度应为水的密度（等于 1）. 试由上述观测值求出 Y 关于 X 的符合物理化学意义的线性回归关系式.

3. 以下列出了悬挂不同重量下的弹簧的长度：

重量 x_i(g)	5	10	15	20	25	30
长度 y_i(cm)	7.25	8.12	8.95	9.90	10.9	11.8

（1）由上述观测值，画出散点图草图，直观上能否认为重量 X 与长度 Y 是线性相关的？

（2）求出长度 Y 关于重量 X 的经验线性回归方程.

4. 某工厂为预测其产品的回收率 Y，要研究它与原材料的有效成分 X 之间的相关关系，现取得 8 对观测数据 (x_i, y_i)，计算得：

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 52,\ \sum_{i=1}^{8} y_i = 228,$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 478,\ \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 7\ 666,\ \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 1\ 849.$$

（1）检验 X 与 Y 的线性相关关系是否显著（$\alpha = 0.01$）？

（2）求 Y 关于 X 的经验线性回归方程.

5. 研究物体横面上局部能量 X 与渗透深度 Y 的关系，理论上认为它们之间关系式为：

$$Y = a + bx + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2).$$

经 13 次独立观测得到的数据如下：

x_i	41	50	81	104	120	139	154
y_i	4	8	10	14	16	20	19
x_i	180	208	241	250	269	301	
y_i	23	26	30	31	36	37	

（1）试检验线性回归是否显著（$\alpha = 0.01$）？

（2）求未知参数 a, b 的最小二乘估计值和 σ^2 的无偏估计值.

6. 在考察硝酸钠的可溶性程度时，对一系列不同温度观察它在 100 ml 的水中溶解的硝酸钠的重量，得到一组观测值 (x_i, y_i)，$i = 1, 2, \cdots, 9$. 计算得：

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 234,\ \sum_{i=1}^{9} y_i = 811.3,$$

$$\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 10\ 144,\ \sum_{i=1}^{9} y_i^2 = 76\ 218.133\ 9,\ \sum_{i=1}^{9} x_i y_i = 24\ 628.6.$$

从理论上推测，温度 x_i 与溶解的硝酸钠的重量 Y_i 之间有关系式：

$$Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, 9.$$

式中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_9$ 相互独立,均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$.

(1) 求未知参数 a, b 的最小二乘估计值和 σ^2 的无偏估计值.

(2) 检验线性回归是否显著($\alpha = 0.01$)?

7. 通过原点 $O(0,0)$ 的二元线性回归模型为

$$Y_i = b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

式中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 相互独立,均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$. 试由观测值 (x_{i1}, x_{i2}, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$,用最小二乘法,推导出估计参数 b_1, b_2 的正规方程组.

8. 某化工厂产品产率 Y 与反应温度 X_1、反应时间 X_2 以及反应物浓度 X_3 有关,X_1、X_2、X_3 的取值状态均以数码 -1、1 表示,今对 X_1、X_2、X_3 的各种取值测得产品产率 Y 的观测数据如下:

温度 x_{i1}	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
时间 x_{i2}	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
时间 x_{i3}	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
产率 y_i	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

根据以往的经验,认为有如下关系式:

$$Y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2).$$

(1) 求出未知参数 a、b_1、b_2、b_3 的最小二乘估计值和误差方差 σ^2 的无偏估计值,写出经验线性回归方程.

(2) 检验线性回归是否显著($\alpha = 0.05$)?

9. 某地区某 10 年中,货运总量 Y(万吨)、工业总产值 X_1(十亿元)和农业总产值 X_2(十亿元)的数据资料如下:

货运总量 y_i	2.8	2.9	3.2	3.3	3.4
工业总产值 x_{1i}	25	27	29	32	34
农业总产值 x_{2i}	3.6	3.8	4.0	4.4	4.8
货运总量 y_i	3.2	3.3	3.7	3.9	4.2
工业总产值 x_{1i}	36	35	39	42	45
农业总产值 x_{2i}	4.7	4.8	5.3	5.5	5.9

求货运总量 Y 关于工业总产值 X_1、农业总产值 X_2 的经验线性回归方程.

10. 一种产品的单位成本 Y 与制作数量 X 相关,现得到如下一组统计数字:

制作数量 x_i(千件)	1	2	3	5	10
单位成本 y_i(元/件)	10.15	5.52	4.08	2.85	2.11
制作数量 x_i(千件)	20	30	50	100	200
单位成本 y_i(元/件)	1.62	1.41	1.30	1.21	1.15

根据上述数据,大致推断 Y 与 X 之间为形如

$$Y = a + b\frac{1}{x} + \varepsilon,\quad \varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$$

的模型，其中 x 为 X 的取值.

（1）求未知参数 a、b 的最小二乘估计值和 σ^2 的无偏估计值，并写出经验回归方程.

（2）检验上述回归是否显著（$\alpha = 0.01$）？

11.（同一个问题可建立不同形式的曲线回归方程）对例 9.4.1 的数据，我们曾求出了形如 $y = a + b\ln x$ 的回归方程，并做了相应的显著性检验. 现仍以同样的数据，要求：

（1）对回归模型

$$Y = a + b\sqrt{x} + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0,\sigma^2).$$

求未知参数 a、b 以及 σ^2 的估计值，写出经验回归方程，并检验回归是否显著（$\alpha = 0.01$）？

（2）对回归模型

$$Y = a + b\frac{1}{x} + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0,\sigma^2).$$

求未知参数 a、b 以及 σ^2 的估计值，写出经验回归方程，并检验回归是否显著（$\alpha = 0.01$）？

（3）比较三种形式：$y = a + b\ln x$，$y = a + b\sqrt{x}$，$y = a + b\dfrac{1}{x}$ 的曲线回归的拟合程度，指出哪一种最好？

提示：可比较相关系数绝对值的大小，也可以比较剩余离差平方和的大小.

12. 下面给出的是一种油漆的干燥时间 Y 与油漆中一种添加剂用量 X 之间的一组数据：

x_i(g/kg)	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i(h)	7.2	6.7	4.7	3.7	4.7	4.2	5.2	5.7

根据数据情况，考虑二次多项式来拟合，即假定

$$Y_i = a + b_1x_i + b_2x_i^2 + \varepsilon_i, i = 1,2,\cdots,8.$$

式中 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_8$ 相互独立，均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$.

（1）求未知参数 a、b_1、b_2 的最小二乘估计值和 σ^2 的无偏估计值，写出经验回归方程.

（2）求复相关系数 R^*，并检验二次多项式回归是否显著（$\alpha = 0.01$）？

第 10 章　方差分析及试验设计

方差分析及试验设计都是数理统计中具有广泛应用的内容，本章对它们的最基本部分作一些介绍.

§10.1　方差分析概述

在科学试验和生产实践中，影响一个结果的因素往往很多，而比较各种因素对结果产生影响的大小，便是人们经常遇到的问题. 例如，一种化工产品的质量，往往取决于原料成分、原料剂量、反应温度、机器设备以及操作人员的熟练程度等多个因素. 每个因素的变化都有可能影响产品的质量，但各因素影响的大小又不尽相同. 对各因素进行分析，找出其中影响较大的因素，是实现优质、高产所需要解决的一个重要问题. 方差分析就是根据试验的结果进行分析，鉴别各因素效应显著性的一种有效的统计方法.

方差分析方法是由英国的统计学家费歇尔（R. A. Fisher）最早提出来的，可以用较少的试验有效地获得大量的信息. 由于考察指标在受到各种明确的因素影响的同时，也受到随机误差的影响. 因此，通过生产或科学试验得到考察指标的观测数据之后，一方面要分析各种明确的因素对指标的影响情况，另一方面也要分析随机误差的影响情况. 下面考察一个例子.

例 10.1.1　某电子材料厂用四种不同配料方案生产出四批元件，在每一批元件中取出若干个分别装配在整机中作寿命试验，得到如下数据（单位：小时）：

元件	A_1	1 600，1 610，1 650，1 680，1 700，1 720，1 800；	均值 1 680.00
	A_2	1 580，1 640，1 640，1 700，1 750；	均值 1 662.00
	A_3	1 460，1 550，1 600，1 620，1 640，1 660，1 740，1 820；	均值 1 636.25
	A_4	1 510，1 520，1 530，1 570，1 600，1 680；	均值 1 568.33

考察用不同的配料方案所生产的元件，其使用寿命有没有显著的差异？

例 10.1.1 中的数据参差不齐、各有差异，造成这些数据差异的原因是什么呢？首先想到的可能原因是生产元件的配料方案不同而造成数据差异. 事实上，四种配料方案的元件平均寿命分别为 1680.00、1662.00、1636.25、1568.23 小时，它们之间的确有差异. 此外，我们也看到，每种配料方案下的元件，尽管是相

同条件下生产出来的产品，它们的寿命仍然互有差异，这又是什么原因造成的呢？一般而言，这是由于生产过程中随机因素的影响而引起的差异. 综上所述，造成元件寿命差异的原因有两个方面：一方面是由于生产条件（配料方案）不同；另一方面是由于存在随机因素的影响. 前者所造成的差异称为条件误差，后者造成的差异称为随机误差.

如果条件误差与随机误差大小差不多，说明条件变化（即改变因素状态）对考察指标（元件的寿命）的影响不明显；如果条件误差比随机误差大得多，则有理由认为条件的变化对考察指标有显著影响. 因此，我们需要将观测数据的总的差异分解成两大部分，一部分是条件误差，另一部分是随机误差，然后进行比较，最后作出因素对考察指标的影响是否显著的结论. 这种对误差进行分解的方法，就是方差分析法的基本思想.

在方差分析中，我们所要考察的指标称为试验指标，影响试验指标的条件称为因素，因素所处的状态称为因素的水平，只考察一个因素变动的方差分析称为单因素方差分析，需要考察两个或两个以上因素变动的方差分析称为两因素方差分析和多因素方差分析.

§ 10.2　单因素方差分析

单因素方差分析只考察一个因素的变动对试验指标的影响. 实际上，影响试验指标的因素可能有若干个，当我们考察其中某一个因素的影响时，将其他因素固定在适当的水平上，只让所考察的因素在若干个水平上变化，以观察和分析它对试验指标的影响. 两因素方差分析或多因素方差分析亦有类似的含义.

一、单因素方差分析模型

设因素 A 有 s 个水平 $A_1, A_2, \cdots, A_s$，在水平 A_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 下，进行 n_i $(n_i \geqslant 2)$ 次独立试验，得到如表 10.2.1 所示的结果.

表 10.2.1

水　平	观　测　值			
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n_1}
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n_2}
A_s	x_{s1}	x_{s2}	$\cdots$	x_{sn_s}

假定每个水平 A_i 对应于一个总体 X_i，$X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ $(i=1,2,\cdots,s)$，其中 μ_i

和 σ^2 为未知参数. 这里 s 个总体的方差假设相同,称为方差齐性,此条件是进行方差分析的前提.

在每个水平 A_i 下取一样本 $(X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in_i})$,其观测值为 $(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in_i})$,并设取得的 s 个样本相互独立. 我们要检验的假设为

$$H_0:\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_s. \tag{10.2.1}$$

即根据这 s 个样本值检验因素 A 对试验结果影响的显著程度.

二、离差平方和分解

为了实施对 H_0 的检验,必须设法将交织在实测数据中的由于不同水平而产生的条件误差,与同一水平下重复试验而产生的随机误差相区分,其间重要的是进行离差平方和的分解.

设试验总次数为 n, $n=\sum_{i=1}^{s}n_i$. 称水平 A_i 下的样本均值

$$\overline{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,s).$$

为样本组均值,其观测值为 $\overline{x}_i$. 而称

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{s}n_i\overline{X}_i \tag{10.2.2}$$

为样本总均值,其观测值为 $\overline{x}$.

记全体数据 x_{ij} 对样本总均值的离差平方和

$$S_T=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x})^2. \tag{10.2.3}$$

称 S_T 为总离差平方和. 它反映了考察指标的全部样本观测值之间的差异程度.

总离差平方和 S_T 可分解为

$$\begin{aligned}S_T&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}[(x_{ij}-\overline{x}_i)+(\overline{x}_i-\overline{x})]^2\\&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)^2+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(\overline{x}_i-\overline{x})^2+2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)(\overline{x}_i-\overline{x}).\end{aligned}$$

上式中交叉项为

$$\begin{aligned}&2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)(\overline{x}_i-\overline{x})\\&=2\sum_{i=1}^{s}(\overline{x}_i-\overline{x})\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\overline{x}_i)\\&=2\sum_{i=1}^{s}(\overline{x}_i-\overline{x})\left(\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}-n_i\overline{x}_i\right)=0.\end{aligned}$$

于是

$$S_T = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_i-\bar{x})^2$$
$$= S_E + S_A. \tag{10.2.4}$$

式中

$$S_E = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2. \tag{10.2.5}$$

称 S_E 为误差离差平方和或组内离差平方和. S_E 反映了随机误差对考察指标总的影响程度.

$$S_A = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{x}_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{s} n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2. \tag{10.2.6}$$

称 S_A 为因素 A 的效应离差平方和或组间离差平方和. S_A 反映了因素 A 的水平的改变对考察指标的影响程度，它是由水平 A_i 以及随机误差引起的.

综上所述，式(10.2.4)即是我们所需要的离差平方和分解式，它体现了§10.1 中我们论述的分解误差的思想.

三、离差平方和的统计性质及显著性检验

为了得出假设式(10.2.1)的检验统计量，我们进一步考察各项离差平方和的统计性质.

先将 S_E 写成下面的形式：

$$S_E = \sum_{j=1}^{n_1}(X_{1j}-\bar{X}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\bar{X}_2)^2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n_s}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2. \tag{10.2.7}$$

由第 6 章的定理 6.2.4 可知

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2 \sim \chi^2(n_i-1),\qquad i=1,2,\cdots,s.$$

又由 X_{ij} 的独立性可知平方和

$$\sum_{j=1}^{n_1}(X_{1j}-\bar{X}_1)^2,\ \sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j}-\bar{X}_2)^2,\cdots,\ \sum_{j=1}^{n_s}(X_{sj}-\bar{X}_s)^2$$

相互独立，再由 χ^2 分布的可加性知

$$\frac{1}{\sigma^2}S_E \sim \chi^2\left[\sum_{i=1}^{s}(n_i-1)\right].$$

即

$$\frac{1}{\sigma^2}S_E \sim \chi^2(n-s). \tag{10.2.8}$$

S_E的自由度为 $n-s$，并且 $E(S_E)=(n-s)\sigma^2$.

对于总离差平方和 S_T，如果假设式(10.2.1)的假设 H_0是正确的，即 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_s$，则所有的样本 X_{ij}可以看作服从同一正态分布总体 $N(\mu,\sigma^2)$的随机变量. 故同样由定理 6.2.4 有

$$\frac{1}{\sigma^2}S_T \sim \chi^2(n-1). \tag{10.2.9}$$

S_T的自由度为 $n-1$.

对于效应离差平方和 S_A，进一步可以证明 S_A与 S_E相互独立，并且当假设式(10.2.1)中的假设 H_0成立时，有

$$\frac{1}{\sigma^2}S_A \sim \chi^2(s-1). \tag{10.2.10}$$

S_A的自由度为 $s-1$，并且 $E(S_A)=(s-1)\sigma^2$.

将 S_A，S_E分别除以各自相应的自由度，记

$$\overline{S}_A=\frac{S_A}{s-1},\qquad \overline{S}_E=\frac{S_E}{n-s}. \tag{10.2.11}$$

称$\overline{S}_A$为因素 A 的效应离差均方和，称$\overline{S}_E$为因素 A 的误差离差均方和.

构造检验统计量

$$F_A=\frac{\overline{S}_A}{\overline{S}_E}. \tag{10.2.12}$$

当假设式(10.2.1)中 H_0成立时，有

$$F_A \sim F(s-1,n-s). \tag{10.2.13}$$

如果因素 A 的水平变化对试验结果的影响显著，则$\overline{S}_A$应比$\overline{S}_E$大得多，从而统计量 F_A的值较大 如果因素 A 对试验结果的影响不显著，则$\overline{S}_A$与$\overline{S}_E$的值相差不多甚至$\overline{S}_A$小于$\overline{S}_E$，此时统计量 F_A的值较小. 作为检验的统计量，F_A是通过两个方差之比表达的，这就是方差分析名称的由来.

在方差分析的具体条件下，F_A的观察值越小对假设的成立越有利，如果 F_A的观察值远大于 1，说明因素 A 及其水平形成的条件误差远超过了随机误差，则有理由拒绝原假设. 因此我们采用单边右侧检验法则，得到假设式(10.2.1)中 H_0的拒绝域为

$$F_A=\frac{\overline{S}_A}{\overline{S}_E}>F_\alpha(s-1,n-s). \tag{10.2.14}$$

式中 α 为给定的显著性水平.

实际中，显著性水平通常取为 0.05 和 0.01. 当 $F_A\leqslant F_{0.05}(s-1,n-s)$，因素 A 对考察指标的影响不显著 当 $F_{0.05}(s-1,n-s)<F_A\leqslant F_{0.01}(s-1,n-s)$，因素 A 对考察指标的影响显著 当 $F_A>F_{0.01}(s-1,n-s)$，因素 A 对考察指标的影响

特别显著.

通常将上述过程列成表格形式，得到方差分析表，如表 10.2.2 所示.

表 10.2.2　单因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 比	显著性
因素 A 误　差	S_A S_E	$s-1$ $n-s$	$\overline{S}_A$ $\overline{S}_E$	$F_A=\dfrac{\overline{S}_A}{\overline{S}_E}$	
总　和	S_T	$n-1$			

在实际计算时，为简化计算步骤，将离差平方和 S_T,S_A,S_E 分别作出如下形式的变化：

$$\begin{aligned}
S_T &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}^2-2x_{ij}\bar{x}+\bar{x}^2)\\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}+n\bar{x}^2\\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-2\bar{x}(n\bar{x})+n\bar{x}^2\\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-n\bar{x}^2\\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\right)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_A &= \sum_{i=1}^{s}n_i(\bar{x}_i^2-2\bar{x}_i\bar{x}+\bar{x}^2)\\
&= \sum_{i=1}^{s}n_i\left(\bar{x}_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{s}n_i\bar{x}_i+\bar{x}^2\sum_{i=1}^{s}n_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{s}n_i\bar{x}_i^2-2\bar{x}(n\bar{x})+n\bar{x}^2\\
&= \sum_{i=1}^{s}n_i\bar{x}_i^2-n\bar{x}^2\\
&= \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\right)^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\right)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_E &= S_T-S_A\\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2-\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\right)^2.
\end{aligned}$$

记

$$P=\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\Big)^2 \tag{10.2.15}$$

$$Q=\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{n_i}\Big(\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\Big)^2 \tag{10.2.16}$$

$$R=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2 \tag{10.2.17}$$

则有

$$S_T=R-P, \tag{10.2.18}$$

$$S_A=Q-P, \tag{10.2.19}$$

$$S_E=R-Q. \tag{10.2.20}$$

上述计算过程可以列表进行，如表 10.2.3 所示.

表 10.2.3

水平	A_1	A_2	…	A_s	
样本观测值	x_{11} x_{12} x_{1n_1}	x_{21} x_{22} x_{2n_2}	… … …	x_{s1} x_{s2} x_{sn_s}	$n=\sum_{i=1}^{s}n_i$
$\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}$	$\sum_{j=1}^{n_1}x_{1j}$	$\sum_{j=1}^{n_2}x_{2j}$	…	$\sum_{j=1}^{n_s}x_{sj}$	$P=\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\Big)^2$
$\frac{1}{n_i}\Big(\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\Big)^2$	$\frac{1}{n_1}\Big(\sum_{j=1}^{n_1}x_{1j}\Big)^2$	$\frac{1}{n_2}\Big(\sum_{j=1}^{n_2}x_{2j}\Big)^2$	…	$\frac{1}{n_s}\Big(\sum_{j=1}^{n_s}x_{sj}\Big)^2$	$Q=\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{n_i}\Big(\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\Big)^2$
$\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2$	$\sum_{j=1}^{n_1}x_{1j}^2$	$\sum_{j=1}^{n_2}x_{2j}^2$	…	$\sum_{j=1}^{n_s}x_{sj}^2$	$R=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}^2$

例 10.2.1　以下数据是四种类型电路 A_1,A_2,A_3,A_4 的响应时间（单位：ms）：

电路类型	响应时间				
A_1	19	22	20	18	15

A_2	20	21	33	27	40
A_3	16	15	18	26	17
A_s	18	22	19	21	17

检验这四种类型电路的响应时间是否有显著差异？

解　列计算表如下：

水平	A_1	A_2	A_3	A_4	
样本观测值	19 22 20 18 15	20 21 33 27 40	16 15 18 26 17	18 22 19 21 17	$s=4$ $n_1=n_2=n_3$ $=n_4=5$ $n=20$
$\sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}$	94	141	92	97	$P=8988.8$
$\frac{1}{n_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)^2$	1767.2	3876.2	1692.8	1881.8	$Q=9318$
$\sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2$	1794	4259	1770	1899	$R=9722$

于是

$$S_T=R-P=9722-8988.8=733.2,$$
$$S_A=Q-P=9318-8988.8=329.2,$$
$$S_E=R-Q=9722-9318=404.$$

离差平方和 S_T,S_A,S_E 的自由度依次为 19,3,16,查 F 分布临界值表,有

$$F_{0.05}(3,16)=3.24,F_{0.01}(3,16)=5.29.$$

于是得方差分析表如表 10.2.4：

表 10.2.4　电路响应时间方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 值	显著性
因素 A	329.2	3	109.733 3	4.345 9	显著
误　差	404	16	25.250 0		
总　和	733.2	19			

有时在具体计算时，为了节省计算量，可以对观测值施以线性变换，即将所有的观测值同时减去或同时加上一个常数，常数的大小可根据实际数据情况确定. 容易证明，这样变换后不会改变各离差平方和的值.

例 10.2.2　对例 10.1.1 中的观测值，检验四种不同的配料方案所生产元件的寿命是否有显著的差异？

解　将所有的样本观测值都减去同一个常数 $C=1\ 600$，然后列表计算如下：

水平	A_1	A_2	A_3	A_4	
样本观测值	0 10 50 80 100 120 200	-20 40 40 100 150	-140 -50 0 20 40 60 140 220	-90 -80 -70 -30 0 80	$n_1=7$ $n_2=5$ $n_3=8$ $n_4=6$ $s=4$ $n=26$
$\sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}$	560	310	290	-190	$P=36\ 188.461\ 5$
$\dfrac{1}{n_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}\right)^2$	44 800	19 220	10 512.5	6 016.666 7	$Q=80\ 549.166\ 7$
$\sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2$	73 400	36 100	95 700	26 700	$R=231\ 900$

于是

$$S_T=R-P=231\ 900-36\ 188.461\ 5=195\ 711.538\ 5,$$
$$S_A=Q-P=80\ 549.166\ 7-36\ 188.461\ 5=44\ 360.705\ 2,$$
$$S_E=R-Q=231\ 900-80\ 549.166\ 7=151\ 350.833\ 3.$$

离差平方和 S_T，S_A，S_E 的自由度依次为 25，3，22，查 F 分布临界值表，有

$$F_{0.05}(3,22)=3.05, F_{0.01}(3,22)=4.82.$$

列出方差分析表如表 10.2.5：

表 10.2.5　元件寿命方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 值	显著性
因素 A	44 360.705 2	3	14 786.901 7	2.149 4	不显著
误　差	151 350.833 3	22	6 879.583 3		
总　和	195 711.538 5	25			

§10.3　两因素方差分析

工程实际中许多问题的试验结果常常受到两个或多个因素的影响. 同时考察多个因素对试验结果的影响，就要进行多因素方差分析. 本节通过两因素方差分析的讨论来体现多因素方差分析的思想和方法.

在同时考察多个因素对试验指标的影响时，不仅每个因素单独对指标起作用，而且有时因素之间联合起来也对指标起影响作用，称其为因素间的交互作用.

例如，在四块土地情况大体相同的大豆试验田中，用不同方式施肥，大豆平均亩产如下(单位：kg)：

大豆亩产 (氮肥＼磷肥)	$P_1=0$	$P_2=2$
$N_1=0$	200	225
$N_3=3$	215	280

由试验结果可见，单独施磷肥时，亩产增加 25 kg；单独施氮肥时，亩产增加 15 kg；同时施两种肥料时，亩产增加 80 kg. 两种肥料联合起来使亩产增加 80 − 25 − 15 = 40 kg，这就是两种肥料的交互作用. 还可从另一角度理解两种肥料的交互作用：当用磷肥 2 kg 时，加施 3 kg 氮肥，亩产增加 55 kg；当用氮肥 3 kg 时，加施 2 kg 磷肥，使亩产增加 65 kg. 即一个因素对试验指标的影响，依赖于另一个因素所取的水平.

一、两因素方差分析模型

假定要考察两个因素 A、B 对试验指标的影响，因素 A 有 s 个水平 A_1，

$A_2, \cdots, A_s$，因素 B 有 t 个水平 $B_1, B_2, \cdots, B_t$，则因素 A 和 B 之间共有 $s \times t$ 种不同的水平组合方式. 设 X_{ij} 表示在水平组合 (A_i, B_j) 下的试验结果，则 X_{ij} $(i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,t)$ 为 st 个总体，通常假定它们是具有方差齐性的正态分布变量：

$$X_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2), i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,t.$$

式中 μ_{ij}, σ^2 均为未知参数.

引入记号

$$\mu = \frac{1}{st} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \mu_{ij}, \tag{10.3.1}$$

$$\mu_{i\cdot} = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{t} \mu_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,s. \tag{10.3.2}$$

$$\mu_{\cdot j} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \mu_{ij}, \quad j=1,2,\cdots,t. \tag{10.3.3}$$

并记

$$\alpha_i = \mu_{i\cdot} - \mu, \quad i=1,2,\cdots,s. \tag{10.3.4}$$

$$\beta_j = \mu_{\cdot j} - \mu, \quad j=1,2,\cdots,t. \tag{10.3.5}$$

容易验证

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 0, \sum_{j=1}^{t} \beta_j = 0.$$

μ 为指标总平均值. 称 α_i 为因素 A 在水平 A_i 的效应，它是因素 A 对指标的影响作用在水平 A_i 上的反映. 称 β_j 为因素 B 在水平 B_j 的效应，它是因素 B 对指标的影响作用在水平 B_j 上的反映.

记

$$\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \alpha_i - \beta_j - \mu. \tag{10.3.6}$$

$$i=1,2,\cdots,s; \quad j=1,2,\cdots,t.$$

称 γ_{ij} 为水平 A_i 和 B_j 的交互效应，它是因素 A 与因素 B 之间的交互作用对指标的影响在组合水平 (A_i, B_j) 上的反映. 容易验证

$$\sum_{i=1}^{s} \gamma_{ij} = 0, \quad i=1,2,\cdots,s.$$

$$\sum_{j=1}^{t} \gamma_{ij} = 0, \quad j=1,2,\cdots,t.$$

于是有如下分解式：

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + (\mu_{ij} - \mu_{i\cdot} - \mu_{\cdot j} + \mu) \\ &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}. \end{aligned} \tag{10.3.7}$$

$$i=1,2,\cdots,s; \quad j=1,2,\cdots,t.$$

要检验因素 A、因素 B 以及因素 A、B 间的交互作用对试验指标是否有显著

影响，归结为检验它们在各自所有水平上的效应是否都等于零. 因此应该检验如下假设

$$H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0. \tag{10.3.8}$$

$$H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_t = 0. \tag{10.3.9}$$

$$H_{03}: \gamma_{11} = \cdots = \gamma_{1t} = \gamma_{21} = \cdots = \gamma_{st} = 0. \tag{10.3.10}$$

如果假设 H_{01} 成立，由式（10.3.7），表明单独改变因素 A 的水平时，不影响 μ_{ij} 的值. 因此，接受假设 H_{01}，表明因素 A 对试验指标没有显著影响；拒绝假设 H_{01}，表明因素 A 对试验指标有显著影响.

类似地，接受假设 H_{02}，表明因素 B 对试验指标没有显著影响；接受假设 H_{03}，表明因素 A 与 B 之间交互作用不显著.

下面分两种情况讨论上述假设的显著性检验.

二、无重复试验的两因素方差分析

实际问题中，如果所考虑的因素之间不存在交互作用或者交互作用对试验指标的影响很小时，可以主观确定不考虑交互作用，于是所有的交互效应 γ_{ij} 均等于零，由式（10.3.7）有

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j, \tag{10.3.11}$$

$$i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, t.$$

不考虑交互作用时，只需检验假设 H_{01} 和假设 H_{02} 是否成立. 此时，可以进行无重复试验，即在因素 A 与因素 B 的每一个水平组合 (A_i, B_j) 下各做一次试验.

假定各次试验相互独立，试验指标的样本观测值如表 10.3.1 所示.

表 10.3.1

因素A \ 因素B	B_1	B_2	$\cdots$	B_t
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1t}
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2t}
A_s	x_{s1}	x_{s2}	$\cdots$	x_{st}

同单因素方差分析一样，要检验上述假设，需要将总离差平方和进行分解. 由于在每个水平 (A_i, B_j)（$i = 1, 2, \cdots, s; j = 1, 2, \cdots, t.$）只做一次观测，故 x_{ij} 是总体 X_{ij} 容量为 1 的样本观测值，相应的样本仍记为 X_{ij}.

记因素 A 的第 i 水平均值为 $\bar{x}_{i\cdot}$，因素 B 的第 j 水平均值为 $\bar{x}_{\cdot j}$，则

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} x_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, s.$$

$$\bar{x}_{\cdot j}=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}x_{ij},\quad j=1,2,\cdots,t.$$

以

$$\bar{x}=\frac{1}{st}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}$$

表示总平均值,显然有

$$\bar{x}=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\bar{x}_{i\cdot}=\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{\cdot j}$$

考虑全体数据对总平均值的离差平方和

$$S_T=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(x_{ij}-\bar{x})^2,$$

称 S_T 为总离差平方和. 对 S_T 进行分解,则有

$$\begin{aligned}S_T&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}[(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})+(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})+(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})]^2\\&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2\\&\quad+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2+2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})\\&\quad+2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})\\&\quad+2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x}).\end{aligned}$$

容易验证上式中三个交叉乘积项为零,于是得到离差平方和分解式:

$$S_T=S_E+S_A+S_B.\tag{10.3.12}$$

其中

$$S_E=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}+\bar{x})^2\tag{10.3.13}$$

称为误差离差平方和.

$$S_A=t\sum_{i=1}^{s}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2\tag{10.3.14}$$

称为因素 A 的效应离差平方和.

$$S_B=s\sum_{j=1}^{t}(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2\tag{10.3.15}$$

称为因素 B 的效应离差平方和.

S_A、S_B 分别反映了因素 A、因素 B 水平的改变对试验指标的影响程度,S_E 反映了随机误差对试验指标总的影响程度.

可以证明,S_T,S_E,S_A,S_B 的自由度依次是 $st-1,(s-1)(t-1),s-1,t-1$. 并

且

$$E(S_E)=(s-1)(t-1)\sigma^2.$$

与单因素方差分析的情形类似，记

$$\overline{S}_A=\frac{S_A}{s-1},$$

$$\overline{S}_B=\frac{S_B}{t-1},$$

$$\overline{S}_E=\frac{S_E}{(s-1)(t-1)},$$

分别称为因素 A、因素 B 和随机误差的效应离差均方和.

构造检验统计量

$$F_A=\frac{\overline{S}_A}{\overline{S}_E},\quad F_B=\frac{\overline{S}_B}{\overline{S}_E}.$$

当假设式(10.3.8)中假设 H_{01} 成立时，可以证明

$$F_A\sim F(s-1,(s-1)(t-1)).\tag{10.3.16}$$

当假设式(10.3.9)中假设 H_{02} 成立时，可以证明

$$F_B\sim F(t-1,(s-1)(t-1)).\tag{10.3.17}$$

如果因素 A 的影响较显著，则统计量 F_A 的观察值应较大 如果因素 B 的影响较显著，则统计量 F_B 的观察值应较大. 于是对给定的显著性水平 α，假设式(10.3.8)中 H_{01} 的拒绝域为

$$F_A>F_\alpha(s-1,(s-1)(t-1)),\tag{10.3.18}$$

假设式(10.3.9)中 H_{02} 的拒绝域为

$$F_B>F_\alpha(t-1,(s-1)(t-1)).\tag{10.3.19}$$

实际中，显著性水平 α 通常取 0.05 或 0.01. 与单因素方差分析相同，对应于 $\alpha=0.05$ 或 0.01，检验的结论分别有不显著、显著和特别显著 3 种.

在实际计算时，为简化计算步骤，将各离差平方和 S_T,S_E,S_A,S_B 的形式作如下变化：

$$\begin{aligned}S_T&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(x_{ij}^2-2x_{ij}\overline{x}+\overline{x}^2)\\&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}^2-2\,\overline{x}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}+st\overline{x}^2\\&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}^2-st\overline{x}^2\\&=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}^2-\frac{1}{st}\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}\Big)^2,\end{aligned}\tag{10.3.20}$$

$$S_A = t\sum_{i=1}^{s}\left(\bar{x}_{i\cdot}^2 - 2\bar{x}_{i\cdot}\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$

$$= t\sum_{i=1}^{s}\bar{x}_{i\cdot}^2 - 2t\bar{x}\sum_{i=1}^{s}\bar{x}_{i\cdot} + st\bar{x}^2$$

$$= t\sum_{i=1}^{s}\bar{x}_{i\cdot}^2 - st\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{st}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}\right)^2, \tag{10.3.21}$$

$$S_B = s\sum_{j=1}^{t}\left(\bar{x}_{\cdot j}^2 - 2\bar{x}_{\cdot j}\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$

$$= s\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{\cdot j}^2 - 2s\bar{x}\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{\cdot j} + st\bar{x}^2$$

$$= s\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{\cdot j}^2 - st\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s}x_{ij}\right)^2 - \frac{1}{st}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}\right)^2,$$

$$S_E = S_T - S_A - S_B.$$

记

$$P = \frac{1}{st}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}\right)^2, \tag{10.3.22}$$

$$Q_A = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}x_{ij}\right)^2, \tag{10.3.23}$$

$$Q_B = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s}x_{ij}\right)^2, \tag{10.3.24}$$

$$R = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}x_{ij}^2, \tag{10.3.25}$$

则有

$$S_T = R - P, \tag{10.3.26}$$

$$S_A = Q_A - P, \tag{10.3.27}$$

$$S_B = Q_B - P, \tag{10.3.28}$$

$$S_E = R - Q_A - Q_B + P. \tag{10.3.29}$$

由此可得两因素无重复试验数据计算表,如表 10.3.2 所示.

表 10.3.2

因素B / 因素A	B_1	B_2	…	B_t	$\sum_{j=1}^{t}x_{ij}$	$\left(\sum_{j=1}^{t}x_{ij}\right)^2$

A_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1t}	$\sum\limits_{j=1}^{t} x_{1j}$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{t} x_{1j}\right)^2$
A_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2t}	$\sum\limits_{j=1}^{t} x_{2j}$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{t} x_{2j}\right)^2$
A_s	x_{s1}	x_{s2}	…	x_{st}	$\sum\limits_{j=1}^{t} x_{sj}$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{t} x_{sj}\right)^2$
$\sum\limits_{i=1}^{s} x_{ij}$	$\sum\limits_{i=1}^{s} x_{i1}$	$\sum\limits_{i=1}^{s} x_{i2}$	…	$\sum\limits_{i=1}^{s} x_{it}$	$\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{t} x_{ij}$	$\sum\limits_{i=1}^{s}\left(\sum\limits_{j=1}^{t} x_{ij}\right)^2$
$\left(\sum\limits_{i=1}^{s} x_{ij}\right)^2$	$\left(\sum\limits_{i=1}^{s} x_{i1}\right)^2$	$\left(\sum\limits_{i=1}^{s} x_{i1}\right)^2$	…	$\left(\sum\limits_{i=1}^{s} x_{it}\right)^2$	$\sum\limits_{j=1}^{t}\left(\sum\limits_{i=1}^{s} x_{ij}\right)^2$	
$\sum\limits_{i=1}^{s} x_{ij}^2$	$\sum\limits_{i=1}^{s} x_{i1}^2$	$\sum\limits_{i=1}^{s} x_{i2}^2$	…	$\sum\limits_{i=1}^{s} x_{it}^2$	$R=\sum\limits_{i=1}^{s}\sum\limits_{j=1}^{t} x_{ij}^2$	

最后可列出两因素无重复试验的方差分析表，如表 10.3.3 所示. 从而判断因素 A 与因素 B 的显著性.

表 10.3.3　两因素无重复试验方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 比	显著性
因素 A	S_A	$s-1$	$\bar{S}_A$	$F_A=\dfrac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$	
因素 B	S_B	$t-1$	$\bar{S}_B$	$F_B=\dfrac{\bar{S}_B}{\bar{S}_B}$	
误　差	S_E	$(s-1)(t-1)$	$\bar{S}_E$		
总　和	S_T	$st-1$			

例 10.3.1 在 B_1,B_2,B_3,B_4 四台不同的机器上，用三种不同气压 A_1,A_2,A_3 试制产品，在每种气压和每台机器上各取一个样品，测量其抗压强度，得到如下观测数据：

气压 \ 机器	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1 577	1 690	1 800	1 642
A_2	1 535	1 640	1 783	1 621
A_3	1 592	1 652	1 810	1 663

检验不同气压之间和不同机器之间产品的抗压强度有无显著差异.

解 将所有观测数据都减去同一常数 $c=1\ 650$，然后列表计算如下：

气压 \ 机器	B_1	B_2	B_3	B_4	$\sum\limits_{j=1}^{4} x_{ij}$	$\left(\sum\limits_{j=1}^{4} x_{ij}\right)^2$
A_1	−73	40	150	−8	109	11 881
A_2	−115	−10	133	−29	−21	441
A_3	−58	2	160	13	17	13 689
$\sum\limits_{i=1}^{3} x_{ij}$	−246	32	443	−24	205	26 011
$\left(\sum\limits_{i=1}^{3} x_{ij}\right)^2$	60 516	1 024	196 249	576	258 365	
$\sum\limits_{i=1}^{3} x_{ij}^2$	21 918	1 704	65 789	1 074	$R=90\ 485$	

则有

$$P=\frac{1}{3\times4}\times205^2=3\ 052.083\ 3,$$

$$Q_A=\frac{1}{4}\times26\ 011=6\ 502.75,$$

$$Q_B=\frac{1}{3}\times258\ 365=86\ 121.666\ 7,$$

$$R=90\ 485.$$

故

$S_T = 90\,485 - 3\,502.083\,3 = 86\,982.916\,7$,

$S_A = 6\,502.75 - 3\,502.083\,3 = 3\,000.666\,7$,

$S_B = 86\,121.666\,7 - 3\,502.083\,3 = 82\,619.538\,4$,

$S_E = 90\,485 - 6\,502.75 - 86\,121.666\,7 + 3\,502.083\,3 = 1\,362.666\,6.$

由题意知 $s=3, t=4$，所以各离差平方和 S_T, S_A, S_B, S_E 的自由度依次是 11，2，3，6. 查 F 分布临界值表，有

$$F_{0.05}(2,6) = 5.14,\quad F_{0.01}(2,6) = 10.92,$$

$$F_{0.05}(3,6) = 4.76,\quad F_{0.01}(3,6) = 9.78.$$

由上述数据得方差分析表如下：

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 比	显著性
气压(A)	3 000.666 7	2	1 500.333 4	6.606 2	显著
机器(B)	82 619.583 4	3	27 539.861 1	121.261 6	特别显著
误差	1 362.666 6	6	227.111 1		
总和	86 982.916 7	11			

三、等重复试验的两因素方差分析

一般说来，在两因素试验中，两个因素不仅各自独立地对试验结果产生影响，而且因素与因素之间还可以联合对试验结果产生交互作用的影响. 在无重复试验的条件下，因为每种水平搭配只进行一次试验，我们无法对交互作用进行分析，此时交互作用同试验的随机误差混杂在一起，只能一起当作随机误差来考虑.

为了将两因素试验的交互作用同试验的随机误差分离，需要对两个因素的每一种不同的水平组合方式各进行若干次重复试验，才能看出两个因素之间是否存在交互作用. 为了计算简便，假定对每一种不同的水平组合方式，都进行相同次数的重复试验，这就是两因素等重复试验.

假定在因素 A 与因素 B 的每一个组合水平 (A_i, B_j) $(i=1,2,\cdots,s; j=1,2,\cdots,t)$ 各做 $r(r\geqslant 2)$ 次试验，且每次试验相互独立，得到试验指标的样本观测值如表 10.3.4 所示.

表 10.3.4

因素B / 因素A	B_1	B_2	…	B_t
A_1	$x_{111},x_{112},\cdots,x_{11r}$	$x_{121},x_{122},\cdots,x_{12r}$	…	$x_{1t1},x_{1t2},\cdots,x_{1tr}$
A_2	$x_{211},x_{212},\cdots,x_{21r}$	$x_{221},x_{222},\cdots,x_{22r}$	…	$x_{2t1},x_{2t2},\cdots,x_{2tr}$
A_s	$x_{s11},x_{s12},\cdots,x_{s1r}$	$x_{s21},x_{s22},\cdots,x_{s2r}$	…	$x_{st1},x_{st2},\cdots,x_{str}$

由前述假定，$x_{ij1},x_{ij2},\cdots,x_{ijr}$是总体 X_{ij}样本容量为 r 的样本观测值，相应的样本记为 $X_{ij1},X_{ij2},\cdots,X_{ijr}(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$.

此时，需检验式(10.3.8)、式(10.3.9)和式(10.3.10)的三个假设 H_{01}、H_{02}和 H_{03}是否成立. 检验上述假设，仍需将总离差平方和进行分解.

记

$$\bar{x}=\frac{1}{rst}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk},$$

$$\bar{x}_{ij\cdot}=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk},i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t.$$

$$\bar{x}_{i\cdot\cdot}=\frac{1}{rt}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk},i=1,2,\cdots,s.$$

$$\bar{x}_{\cdot j\cdot}=\frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk},j=1,2,\cdots,t.$$

总离差平方和

$$S_T=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}(x_{ijk}-\bar{x})^2,$$

反映了所有样本观测值的差异程度.

对总离差平方和 S_T进行分解，有

$$S_T=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}[(x_{ijk}-\bar{x}_{ij\cdot})+(\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x})+(\bar{x}_{\cdot j\cdot}-\bar{x})+(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x}_{\cdot j\cdot}+\bar{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij\cdot})^2+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x})^2$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{\cdot j\cdot}-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x}_{\cdot j\cdot}+\bar{x})^2$$

$$=S_E+S_A+S_B+S_{A\times B}. \tag{10.3.30}$$

其中,误差离差平方和

$$S_E=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij\cdot})^2, \tag{10.3.31}$$

因素 A 的效应离差平方和

$$S_A=tr\sum_{i=1}^{s}(\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x})^2, \tag{10.3.32}$$

因素 B 的效应离差平方和

$$S_B=sr\sum_{j=1}^{t}(\bar{x}_{\cdot j\cdot}-\bar{x})^2, \tag{10.3.33}$$

因素 A 与因素 B 之间的交互效应离差平方和

$$S_{A\times B}=r\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x}_{\cdot j\cdot}+\bar{x})^2, \tag{10.3.34}$$

反映了因素 A 与因素 B 之间的交互作用对试验指标总的影响程度.

可以证明,离差平方和 $S_T,S_A,S_B,S_{A\times B},S_E$ 的自由度依次是 $rst-1,s-1,t-1,(s-1)(t-1),st(r-1)$,并且

$$E(S_E)=st(r-1)\sigma^2.$$

记

$$\bar{S}_A=\frac{S_A}{s-1},$$

$$\bar{S}_B=\frac{S_B}{t-1},$$

$$\bar{S}_{A\times B}=\frac{S_{A\times B}}{(s-1)(t-1)},$$

$$\bar{S}_E=\frac{S_E}{st(r-1)},$$

分别称为因素 A、因素 B、因素 A 与 B、随机误差的效应离差均方和.

构造检验统计量

$$F_A=\frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E},F_B=\frac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E},F_{A\times B}=\frac{\bar{S}_{A\times B}}{\bar{S}_E}.$$

当式(10.3.8)中假设 H_{01} 成立时,有

$$F_A \sim F(s-1, st(r-1)), \tag{10.3.35}$$

当式(10.3.9)中假设 H_{02} 成立时,有

$$F_B \sim F(t-1, st(r-1)), \tag{10.3.36}$$

当式(10.3.10)中假设 H_{03} 成立时,有

$$F_{A\times B} \sim F((s-1)(t-1), st(r-1)). \tag{10.3.37}$$

于是对给定的显著性水平 α,式(10.3.8)中假设 H_{01} 的拒绝域为

$$F_A > F_\alpha(s-1, st(r-1)), \tag{10.3.38}$$

式(10.3.9)中假设 H_{02} 的拒绝域为

$$F_B > F_\alpha(t-1, st(r-1)), \tag{10.3.39}$$

式(10.3.10)中假设 H_{03} 的拒绝域为

$$F_{A\times B} > F_\alpha((s-1)(t-1), st(r-1)). \tag{10.3.40}$$

与前面的讨论一样,实际中显著性水平 α 通常取 0.05 或 0.01,其对应的检验结论分别有不显著、显著和特别显著 3 种.

在实际计算时,为简化计算步骤,仍需将各离差平方和的形式作如下变化:

$$\begin{aligned}
S_T &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}(x_{ijk}^2 - 2x_{ijk}\bar{x} + \bar{x}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk} + rst\bar{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}^2 - rst\bar{x}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}^2 - \frac{1}{rst}\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}\Big)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_A &= tr\sum_{i=1}^{s}(\bar{x}_{i\cdot\cdot}^2 - 2\bar{x}_{i\cdot\cdot}\bar{x} + \bar{x}^2) \\
&= tr\sum_{i=1}^{s}\bar{x}_{i\cdot\cdot}^2 - 2tr\bar{x}\sum_{i=1}^{s}\bar{x}_{i\cdot\cdot} + rst\bar{x}^2 \\
&= tr\sum_{i=1}^{s}\bar{x}_{i\cdot\cdot}^2 - rst\bar{x}^2 \\
&= \frac{1}{tr}\sum_{i=1}^{s}\Big(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}\Big)^2 - \frac{1}{rst}\Big(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}\Big)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_B &= sr\sum_{j=1}^{t}(\bar{x}_{\cdot j\cdot}^2 - 2\bar{x}_{\cdot j\cdot}\bar{x} + \bar{x}^2) \\
&= sr\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{\cdot j\cdot}^2 - 2sr\bar{x}\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{\cdot j\cdot} + rst\bar{x}^2
\end{aligned}$$

$$= sr\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{\cdot j\cdot}^{2} - rst\bar{x}^{2}$$

$$= \frac{1}{sr}\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^{2} - \frac{1}{rst}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^{2},$$

$$S_E = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}(x_{ijk}^{2} - 2x_{ijk}\bar{x}_{ij\cdot} + \bar{x}_{ij\cdot}^{2})$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}^{2} - 2\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{ij\cdot}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk} + r\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{ij\cdot}^{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}^{2} - r\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\bar{x}_{ij\cdot}^{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}^{2} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^{2},$$

$$S_{A\times B} = S_T - S_A - S_B - S_E.$$

记

$$P = \frac{1}{rst}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^{2}, \tag{10.3.41}$$

$$Q_A = \frac{1}{rt}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^{2}, \tag{10.3.42}$$

$$Q_B = \frac{1}{rs}\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^{2}, \tag{10.3.43}$$

$$Q_{A\times B} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^{2}, \tag{10.3.44}$$

$$R = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}^{2}, \tag{10.3.45}$$

则有

$$S_T = R - P, \tag{10.3.46}$$

$$S_A = Q_A - P, \tag{10.3.47}$$

$$S_B = Q_B - P, \tag{10.3.48}$$

$$S_{A\times B} = Q_{A\times B} - Q_A - Q_B + P, \tag{10.3.49}$$

$$S_E = R - Q_{A\times B}. \tag{10.3.50}$$

上述计算过程也可以通过列计算表完成，如表 10.3.5 所示：

表 10.3.5

因素B / 因素A	B_1	B_2	…	B_t	$\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}$	$\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^2$
A_1	$\sum_{k=1}^{r}x_{11k}$	$\sum_{k=1}^{r}x_{12k}$	…	$\sum_{k=1}^{r}x_{1tk}$	$\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{1jk}$	$\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{1jk}\right)^2$
A_2	$\sum_{k=1}^{r}x_{21k}$	$\sum_{k=1}^{r}x_{22k}$	…	$\sum_{k=1}^{r}x_{2tk}$	$\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{2jk}$	$\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{2jk}\right)^2$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
A_s	$\sum_{k=1}^{r}x_{s1k}$	$\sum_{k=1}^{r}x_{s2k}$	…	$\sum_{k=1}^{r}x_{stk}$	$\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{sjk}$	$\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{sjk}\right)^2$
$\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}$	$\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{i1k}$	$\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{i2k}$	…	$\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{itk}$	$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}$	$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{r}x_{ijk}\right)^2$
$\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^2$	$\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{i1k}\right)^2$	$\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{i2k}\right)^2$	…	$\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{itk}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^2$	
$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{r}x_{i1k}\right)^2$	$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{r}x_{i2k}\right)^2$	…	$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{r}x_{itk}\right)^2$	$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}\right)^2$	

需要指出，表 10.3.5 中由于栏目限制，没列出所有数据的平方和 R 的算式，请读者注意. 最后列出两因素等重复试验的方差分析表，如表 10.3.6 所示.

表 10.3.6　两因素等重复试验方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 比	显著性
因素 A	S_A	$s-1$	$\overline{S}_A$	$F_A=\dfrac{\overline{S}_A}{\overline{S}_E}$	
因素 B	S_B	$t-1$	$\overline{S}_B$	$F_B=\dfrac{\overline{S}_B}{\overline{S}_E}$	
交互作用 $A\times B$	$S_{(A\times B)}$	$(s-1)(t-1)$	$\overline{S}_{A\times B}$	$F_{A\times B}=\dfrac{\overline{S}_{A\times B}}{\overline{S}_E}$	
误　差	S_E	$st(r-1)$	$\overline{S}_E$		
总　和	S_T	$rst-1$			

例 10.3.2　一种炮弹使用了四种燃料 A_1,A_2,A_3,A_4 和三种外形设计 B_1,B_2,B_3 做射程试验. 每种燃料与每种外形的组合各试射二次，得数据如下（单位：km）：

燃料 \ 外形	B_1	B_2	B_3
A_1	58.2 52.6	56.2 41.2	65.3 60.8
A_2	49.1 42.8	54.1 50.5	51.6 48.4
A_3	60.1 58.3	70.9 73.2	39.2 40.7
A_4	75.8 71.5	58.2 51.0	48.7 41.4

检验不同燃料（因素 A）之间及不同外形（因素 B）之间的炮弹射程有无显著差异？因素 A、B 之间的交互作用是否显著？

解　已知 $s=4,t=3,r=2$，所有数据的平方和

$$R=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}x_{ijk}^2$$

$$= (58.2^2 + 52.6^2) + (56.2^2 + 41.2^2) + \cdots + (48.7^2 + 41.4^2)$$
$$= 75\ 216.30.$$

列表计算如下：

燃料 \ 外形	B_1	B_2	B_3	$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk}$	$\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk}\right)^2$
A_1	110.8	97.4	126.1	334.3	111 756.49
A_2	91.9	104.6	100.0	296.5	87 912.25
A_3	118.4	144.1	79.9	342.4	117 237.76
A_4	147.3	109.2	90.1	346.6	120 131.56
$\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk}$	468.4	455.3	396.1	1 319.8	437 038.06
$\left(\sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} x_{ijk}\right)^2$	219 398.56	207 298.09	156 895.21	583 591.86	
$\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{2} x_{ijk}\right)^2$	56 438.10	53 117.37	40 403.23	149 958.70	

由表中数据，有

$$P = \frac{1}{2\times4\times3}\times1\ 319.8^2 = 72\ 578.001\ 7,$$

$$Q_A = \frac{1}{2\times3}\times437\ 038.06 = 72\ 839.676\ 7,$$

$$Q_B = \frac{1}{2\times4}\times583\ 591.86 = 72\ 948.982\ 5,$$

$$Q_{A\times B} = \frac{1}{2}\times149\ 958.70 = 74\ 979.350\ 0.$$

故

$$S_T = 75\ 216.30 - 72\ 578.001\ 7 = 2\ 638.298\ 3,$$
$$S_A = 72\ 839.676\ 7 - 72\ 578.001\ 7 = 261.675\ 0,$$
$$S_B = 72\ 948.982\ 5 - 72\ 578.001\ 7 = 370.980\ 8,$$
$$S_{A\times B} = 74\ 979.35 - 72\ 839.676\ 7 - 72\ 948.982\ 5 + 72\ 578.001\ 7$$
$$= 1\ 768.692\ 5,$$
$$S_E = 75\ 216.30 - 74\ 979.35 = 236.950\ 0.$$

离差平方和 $S_T, S_A, S_B, S_{A\times B}, S_E$ 的自由度依次是 23，3，2，6，12. 查 F 分布临界值表，有

$$F_{0.05}(3,12)=3.49,\quad F_{0.01}(3,12)=5.95,$$
$$F_{0.05}(2,12)=3.89,\quad F_{0.01}(2,12)=6.93,$$
$$F_{0.05}(6,12)=3.00,\quad F_{0.01}(6,12)=4.82.$$

于是得方差分析表：

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 比	显著性
燃料(A)	261.675 0	3	87.225 0	4.417 4	显著
外形(B)	370.980 8	2	185.490 4	9.393 9	很显著
交互作用	1 768.692 5	6	294.782 1	14.928 9	很显著
误差	236.950 0	12	19.745 8		
总和	2 638.298 3	23			

在实际试验中，如果条件允许，最好作重复试验，以提高分析的精度. 一般情况下，可以先检验交互作用是否显著，如果不显著并且其离差均方和与误差均方和差不多或者还更小，可将该项平方和与误差平方和合并，相应的自由度也合并，构成新的误差项，以提高分析的精度，这是方差分析中常用的一种技巧. 这里我们只介绍了等重复试验的两因素方差分析，实际中有时获得的试验数据不一定整齐，各组试验次数重复但不相等，此时进行方差分析，分析过程、计算步骤等等都是一样的，只是计算公式要做适当修改，本章 §10.5 中方差分析应用的实例，就是一个不等重复试验.

§10.4　正交试验设计

在实际问题中，往往需要同时考虑多个因素对试验指标的影响，从理论上可以推导出多因素(两个以上)的方差分析方法，以检验各个因素以及交互作用对考察指标的影响是否显著. 但此时计算公式将会变得很复杂，而且试验总次数也要增多，如考虑 m 个因素，各因素的水平分别有 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 个，则共有 $s_1s_2\cdots s_m$ 种组合水平，即使在每个组合水平上只做一次试验，总共也有 $s_1s_2\cdots s_m$ 次试验，如果是重复试验，则试验总次数还要翻倍. 比如，有 5 个因素，每个因素各有 3 种水平，则至少要做 $3^5=243$ 次试验，若每个组合水平上重复试验两次，则要进行 486 次试验. 做这么多次试验，要花费大量的人力、物力，还要用相当长的时间，显然是非常困难的. 有时由于时间过长，条件改变，还会使试验失效. 人们在长期的实践中发现，要得到理想的结果，并不需要进行全面试验，我们应当在不影响试验效果的前提下，尽可能地减少试验次数.

在数理统计中，研究如何科学地安排试验方案的方法称为试验设计. 试验设

计的方法有很多,这里仅简要地介绍一种应用相当广泛的方法,即正交试验设计,亦称为正交试验法.

一、正交表及其特点

正交试验设计的基本思想是利用主要工具——正交表安排试验方案. 正交表是一种特制的表格,一般常用的正交表事先已经制作好,可直接套用,如表 10.4.1 和表 10.4.2 所示.

表 10.4.1 正交表 $L_8(2^7)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

表 10.4.2 正交表 $L_9(3^4)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

在本书的附录中，给出了常用的六种正交表. 正交表一般记为 $L_n(s^m)$，L 代表正交表；m 是正交表的列数，表示因素的个数；n 为正交表的行数，也就是要安排的试验次数；s 为各因素的水平数. 注意，本书给出的正交表以及介绍的正交试验设计，要求每个因素的水平数相等，实际上，也有可以安排水平数不相等的因素的正交表，即混合水平正交表，这里不作介绍.

正交表有两条重要性质：(1) 每列中不同数码出现的次数是相同的；(2) 任意两列中，将同一行的两个数字看成有序数对时，每种数对出现的次数是相等的，如表 10.4.1 中，数对(1，1)，(1，2)，(2，1)，(2，2)各出现两次. 可见正交表的主要特点是数码搭配均衡，因此，按照正交表安排试验方案，各因素水平的组合比较均匀，从而使全面试验中挑选出来的一部分试验，能达到兼顾各方、代表全体的目的.

下面我们分不考虑交互作用和考虑交互作用的两种情况，介绍正交试验设计.

二、不考虑交互作用的正交试验设计

先通过具体例子说明如何选用正交表进行试验设计.

例 10.4.1　为了考察某种化工产品转化率，选择了有关的三个因素：反应温度(A)，反应时间(B)，用碱量(C)，每种因素取三种水平，如表 10.4.3 所示.

表 10.4.3

反应温度(A)	A_1：80°C	A_2：85°C	A_3：90°C
反应时间(B)	B_1：90 min	B_2：120 min	B_3：150 min
用碱量(C)	C_1：5%	C_2：6%	C_3：7%

根据经验确认三个因素中的任意两个之间都不存在交互作用，应如何安排试验并检验反应温度、反应时间和用碱量对转化率的影响是否显著？

先选择一个合适的正交表安排试验方案. 首先要求正交表中水平数 s 与每个因素的水平数一致；其次要求正交表中列数 m 要大于或等于实际的因素个数；最后在满足前面要求的正交表中，一般选择试验次数 n 较小的正交表.

对于本例，要求 $s=3$，$m\geqslant3$. 本书所附正交表中，满足上述要求的正交表有 $L_9(3^4)$ 和 $L_{27}(3^{13})$，我们选用 $L_9(3^4)$.

由于不考虑交互作用，可将每个因素分别任意放在正交表表头的一个列号上. 放上因素的列中的数码表示该因素的各个水平，正交表的每一行则代表所有因素的一个组合水平，按正交表提供的组合水平进行试验，即实现了利用正交表安排试验方案.

本例中，将因素 A、B、C 依次放在 $L_9(3^4)$ 的前三列上，则第 1 列中的数码"1"，"2"，"3"依次表示因素 A 的三个水平 A_1,A_2,A_3，第 2 列、第 3 列的数码分别表示因素 B、因素 C 的不同水平. 按正交表提供的组合水平，做不重复试验，记 X_i $(i=1,2,\cdots,9)$ 为第 i 号试验中转化率的试验结果，分别记在表中每个试验的后面，如表 10.4.4 所示.

表 10.4.4

列号 / 试验号	1 (A)	2 (B)	3 (C)	组合水平			试验结果(转化率)
1	1	1	1	A_1	B_1	C_1	X_1
2	1	2	2	A_1	B_2	C_2	X_2
3	1	3	3	A_1	B_3	C_3	X_3
4	2	1	2	A_2	B_1	C_2	X_4
5	2	2	3	A_2	B_2	C_3	X_5
6	2	3	1	A_2	B_3	C_1	X_6
7	3	1	3	A_3	B_1	C_3	X_7
8	3	2	1	A_3	B_2	C_1	X_8
9	3	3	2	A_3	B_3	C_2	X_9

下面建立本例的数学模型并说明检验方法，以此介绍无交互作用的正交试验设计方法.

设在组合水平 (A_j,B_k,C_l) 上，转化率为 X_{jkl}，j、k、$l=1,2,3$. 假定 $X_{jkl}\sim N(\mu_{jkl},\sigma^2)$，不考虑交互作用时，可将 μ_{jkl} 表示为

$$\mu_{jkl}=\mu+a_j+b_k+c_l,\quad j,k,l=1,2,3.$$

式中 a_1,a_2,a_3 为因素 A 在水平 A_1,A_2,A_3 上的效应；b_1,b_2,b_3 为因素 B 在水平 B_1,B_2,B_3 上的效应；c_1,c_2,c_3 为因素 C 在水平 C_1,C_2,C_3 上的效应.

于是得到本例的数学模型为

$$\begin{cases} X_1=\mu+a_1+b_1+c_1+\varepsilon_1, \\ X_2=\mu+a_1+b_2+c_2+\varepsilon_2, \\ X_3=\mu+a_1+b_3+c_3+\varepsilon_3, \\ X_4=\mu+a_2+b_1+c_2+\varepsilon_4, \\ X_5=\mu+a_2+b_2+c_3+\varepsilon_5, \\ X_6=\mu+a_2+b_3+c_1+\varepsilon_6, \\ X_7=\mu+a_3+b_1+c_3+\varepsilon_7, \\ X_8=\mu+a_3+b_2+c_1+\varepsilon_8, \\ X_9=\mu+a_3+b_3+c_2+\varepsilon_9. \end{cases} \tag{10.4.1}$$

式中，$a_1+a_2+a_3=0$，$b_1+b_2+b_3=0$，$c_1+c_2+c_3=0$，ε_1，ε_2，…，ε_9，是独立同分布随机变量，服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$.

检验因素 A、B、C 对转化率的影响是否显著，即检验如下假设是否成立.

$$H_{01}:a_1=a_2=a_3=0. \tag{10.4.2}$$

$$H_{02}:b_1=b_2=b_3=0. \tag{10.4.3}$$

$$H_{03}:c_1=c_2=c_3=0. \tag{10.4.4}$$

若接受假设，则表示因素对转化率没有显著影响；若拒绝假设，则表示因素对转化率有显著影响.

首先介绍一种粗略简便的直观分析法检验上述假设.

由表 10.4.3 的第 1 列，计算因素 A 在每一种水平上的试验结果的平均值：

$$\begin{cases} \overline{X}_{A_1}=\dfrac{1}{3}(X_1+X_2+X_3), \\ \overline{X}_{A_2}=\dfrac{1}{3}(X_4+X_5+X_6), \\ \overline{X}_{A_3}=\dfrac{1}{3}(X_7+X_8+X_9). \end{cases} \tag{10.4.5}$$

由表 10.4.3 的第 2 列，计算因素 B 在每一种水平上的试验结果的平均值：

$$\begin{cases} \overline{X}_{B_1}=\dfrac{1}{3}(X_1+X_4+X_7), \\ \overline{X}_{B_2}=\dfrac{1}{3}(X_2+X_5+X_8), \\ \overline{X}_{B_3}=\dfrac{1}{3}(X_3+X_6+X_9). \end{cases} \tag{10.4.6}$$

由表 10.4.3 的第 3 列，计算因素 C 在每一种水平上的试验结果的平均值：

$$\begin{cases} \overline{X}_{C_1}=\dfrac{1}{3}(X_1+X_6+X_8), \\ \overline{X}_{C_2}=\dfrac{1}{3}(X_2+X_4+X_9), \\ \overline{X}_{C_3}=\dfrac{1}{3}(X_3+X_5+X_7). \end{cases} \tag{10.4.7}$$

将转化率的实际试验结果代入上述计算公式，利用这些平均值即平均转化率，计算每一个因素的平均转化率的极差（即最大值与最小值之差），极差最大的因素可以认为对考察指标的影响最大，极差最小的因素则对考察指标的影响最小.

根据极差的大小和专业技术知识,判断因素对考察指标的影响大小,就是直观分析法. 此法一般直观上无法确定哪个因素的影响显著,哪个因素的影响不显著,需要用下面的方差分析法进行检验.

记转化率总平均值为 $\overline{X} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{9} X_i$,则显然有

$$\overline{X} = \frac{1}{3}(\overline{X}_{A_1} + \overline{X}_{A_2} + \overline{X}_{A_3})$$
$$= \frac{1}{3}(\overline{X}_{B_1} + \overline{X}_{B_2} + \overline{X}_{B_3})$$
$$= \frac{1}{3}(\overline{X}_{C_1} + \overline{X}_{C_2} + \overline{X}_{C_3}).$$

记总离差平方和

$$S_T = \sum_{i=1}^{9} (x_i - \overline{X})^2.$$

可将总离差平方和 S_T 分解为

$$S_T = S_A + S_B + S_C + S_E. \tag{10.4.8}$$

式中

$$S_A = 3 \sum_{j=1}^{3} (\overline{X}_{A_j} - \overline{X})^2. \tag{10.4.9}$$

$$S_B = 3 \sum_{k=1}^{3} (\overline{X}_{B_k} - \overline{X})^2. \tag{10.4.10}$$

$$S_C = 3 \sum_{l=1}^{3} (\overline{X}_{C_l} - \overline{X})^2. \tag{10.4.11}$$

上述三式前面所乘数 3 是因素在每一种水平上的试验次数,即为 $\frac{n}{s}$.

各离差平方和 S_A、S_B、S_C 分别反映了各因素在其自身的三种水平上的试验平均值之间的差异程度,S_E 为误差离差平方和.

一般情况下,各离差平方和的自由度可以这样确定:假定用正交表 $L_n(S^m)$ 安排试验,而实际上只考虑 m^* 个因素($m^* < m$),则总离差平方和的自由度为 $n-1$,每一个因素引起的离差平方和的自由度为 $s-1$,误差离差平方和的自由度为 $n-1-m^*(s-1)$.

例 10.4.1 中,$n=9$,$s=3$,$m^*=3$($m=4$),于是,S_T 的自由度为 8,S_A,S_B,S_C 的自由度为 2,S_E 的自由度为 $8-3\times 2=2$.

当式(10.4.2)中假设 H_{01} 成立时,有

$$F_A = \frac{S_A/2}{S_E/2} = \frac{S_A}{S_E} \sim F(2,2).$$

当式(10.4.3)中假设 H_{02} 成立时,有

$$F_B=\frac{S_B}{S_E}\sim F(2,2).$$

当式(10.4.4)中假设 H_{03} 成立时,有

$$F_C=\frac{S_C}{S_E}\sim F(2,2).$$

故假设 H_{01}、H_{02}、H_{03} 的拒绝域依次为

$$F_A>F_\alpha(2,2). \tag{10.4.12}$$

$$F_B>F_\alpha(2,2). \tag{10.4.13}$$

$$F_C>F_\alpha(2,2). \tag{10.4.14}$$

式中,α 为给定的显著性检验水平.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_9$ 是转化率的实际观测值,则在实际计算中,可采用如下公式,记

$$P=\frac{1}{9}\Big(\sum_{i=1}^{9}x_i\Big)^2,\quad R=\sum_{i=1}^{9}x_i^2,$$

$$Q_A=3\sum_{j=1}^{3}\bar{x}_{A_j}^2,Q_B=3\sum_{k=1}^{3}\bar{x}_{B_k}^2,$$

$$Q_C=3\sum_{l=1}^{3}\bar{x}_{C_l}^2.$$

则有

$$S_T=R-P,\quad S_A=Q_A-P,$$

$$S_B=Q_B-P,\quad S_C=Q_C-P,$$

$$S_E=S_T-S_A-S_B-S_C.$$

例 10.4.1 中,经过试验,得到转化率的实际观测值为

$$x_1=31,x_2=54,x_3=38,$$

$$x_4=53,x_5=49,x_6=42,$$

$$x_7=57,x_8=62,x_9=64.$$

于是

$$\bar{x}_{A_1}=41,\quad \bar{x}_{A_2}=48,\quad \bar{x}_{A_3}=61,$$

$$\bar{x}_{B_1}=47,\quad \bar{x}_{B_2}=55,\quad \bar{x}_{B_3}=48,$$

$$\bar{x}_{C_1}=45,\quad \bar{x}_{C_2}=57,\quad \bar{x}_{C_3}=48.$$

如果采用直观分析法,可归纳成表格形式,如表 10.4.5 所示.

表 10.4.5

平均转化率 \ 因素 / 列号	A	B	C
	1	2	3
水平 1	41	47	45
水平 2	48	55	57
水平 3	61	48	48
极　差	20	8	12
因素主次	1	3	2
可能好水平	A_3	B_2	C_2

根据表 10.4.5，反应温度（A）对转化率影响最大，用碱量（C）的影响次之，反应时间（B）的影响最小.

如果采用方差分析法，其计算如下：

$$P=\frac{1}{9}\times(31+54+\cdots+64)^2=22\ 500,$$

$$R=(31^2+54^2+\cdots+64^2)=23\ 484,$$

$$Q_A=3\times(41^2+48^2+61^2)=23\ 118,$$

$$Q_B=3\times(47^2+55^2+48^2)=22\ 614,$$

$$Q_C=3\times(45^2+57^2+48^2)=22\ 734.$$

于是

$$S_T=23\ 484-22\ 500=984,$$

$$S_A=23\ 118-22\ 500=618,$$

$$S_B=22\ 614-22\ 500=114,$$

$$S_C=22\ 734-22\ 500=234,$$

$$S_E=984-618-114-234=18.$$

故有

$$F_A=\frac{618}{18}=34.333\ 3,$$

$$F_B=\frac{114}{18}=6.333\ 3,$$

$$F_C=\frac{234}{18}=13.000\ 0.$$

查 F 分布临界值表，有 $F_{0.05}(2,2)=19.00$，$F_{0.01}(2,2)=99.00$. 容易判断，只有因素 A（反应温度）对转化率有显著影响，因素 B（反应时间）和因素 C（用碱量）

对转化率没有显著的影响.

这里简要说明正交试验设计的另一个很有实用价值的重要应用,即不假定数学的理论模型,采用直观的分析方法和简单的计算,寻求各因素水平搭配的较好试验方案. 简单地说,就是"做不多的试验,得到较好的方案". 一般而言,如果做全面试验,可能会找到最佳方案,但由于人力、物力、时间等大量耗费,全面试验并不划算. 由于正交表具有搭配均衡的特点,因此,正交试验设计往往能够只做少数试验而找到令人满意的方案. 下面我们仍以例 10. 4. 1 的数据来说明,在 § 10. 5中还有一个这方面的应用实例.

利用正交试验设计寻找因素水平的好搭配,首先是在已做试验中直接找出其中最好的组合水平. 对于例 10. 4. 1,希望转化率较高,因此最好的是第 9 号试验,组合水平是 $A_3B_3C_2$. 然后对每个因素计算各水平的平均转化率,取每个因素平均转化率最高的水平构成新的组合水平,称为可能好水平,如表 10. 4. 4 最末一行所示,本例的可能好水平为 $A_3B_2C_2$. 可能好水平与直接得到的好水平可能一致,也可能不一致的. 当它们不一致的时候,按可能好水平补做一次试验,与直接得到的好水平相比较,优者即为选定的好的试验方案. 如果选定的方案虽有改善但尚不很满意,则可在这一轮试验的基础之上重新确定因素水平,安排新一轮正交试验设计. 在最后确定试验方案时,由于已分析出因素的主次(参见表 10. 4. 4),在保证考察指标达到要求的前提下,可遵循"主要因素保证最好水平,次要因素以节约、方便为主"的实用原则.

三、考虑交互作用的正交试验设计

在考虑因素之间的交互作用时,进行的正交试验设计在形式上可以将交互作用当作一个因素. 设有因素 A,B,C 等,记因素 A 与因素 B 的交互作用为 $A\times B$,因素 B 与因素 C 的交互作用为 $B\times C$,以此类推.

与不考虑因素之间的交互作用相比,一个重要的区别是利用正交表安排试验方案时,不能完全任意地将所考虑因素放在正交表的各列上,需要遵循一定的原则. 比如,将因素 A、B 任意放在正交表的两列后,则交互作用 $A\times B$ 必须根据 A、B 已放位置而放到指定的列上,然后在空余的列上任意选定因素 C 的位置,此时交互作用 $A\times C$、$B\times C$ 又分别必须根据 A、C 的位置和 B、C 的位置放到指定的列上去. 以此类推,直到所有因素放置完毕. 这个过程称为正交试验设计的表头设计.

如何确定交互作用的位置？可用正交表的两列间交互作用表确定. 有一类正交表,随表给出了相应的交互作用表. 如表 10. 4. 6 所示,是正交表 $L_8(2^7)$ 的两列间交互作用表.

表 10. 4. 6

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6
7	6	5	4	3	2	1
6	7	4	5	2	3	
5	4	7	6	1		
4	5	6	7			
3	2	1				
2	3					

两列间交互作用表的用法如下:如用 $L_8(2^7)$ 安排试验,若因素 A 放在第 1 列,因素 B 放在第 3 列,则在表 10.4.6 中找到对应于列号 1、3 的数字为 2,说明 $A\times B$应放在第 2 列 进而将因素 C 放在余下的列比如第 5 列上,对照表10.4.6,则 $A\times C$ 应放在第 4 列,$B\times C$ 应放在第 6 列. 如此设计出的表头为:

列号	1	2	3	4	5	6	7
因素	A	$A\times B$	B	$A\times C$	C	$B\times C$	

显然表头设计不唯一,还可设计出其他形式的表头.

前面已经说过,形式上将交互作用当作一个因素,因而选择正交表时应注意此问题. 比如,考察因素 A,B,C 对试验指标的影响,每个因素取 3 个水平,$s=3$ 的正交表有 $L_9(3^4)$ 和 $L_{27}(3^{13})$,由于考虑交互作用,不但要考虑因素 A、B、C,还要考虑“因素”$A\times B$、$B\times C$、$A\times C$,因此必须选择 $m\geqslant 6$ 的正交表,故此时应用正交表 $L_{27}(3^{13})$ 安排试验.

完成了表头设计之后,试验方案由“真正的”因素(即不含交互作用)所处列的数码确定. 按这些组合水平进行试验,得到试验结果. 然后,对所有“真正的”、“形式的”因素按照前面不考虑交互作用时的分析、检验方法,检验各个因素对考察指标的影响是否显著.

最后说明一点,有的正交表的交互作用要占两列,如 $L_{27}(3^{13})$,当因素 A、B 分别取第 1 列和第 2 列,交互作用 $A\times B$ 则要同时放在第 3、第 4 列,分别记为$(A\times B)_1$与$(A\times B)_2$. 此时不便做直观分析,可用方差分析法,交互作用 $A\times B$ 的效应离差平方和 $Q_{A\times B}$由$(A\times B)_1$和$(A\times B)_2$的效应离差平方和 $Q_{(A\times B)_1}$与 $Q_{(A\times B)_2}$合并而成,相应的自由度相加.

正交试验设计的内容非常丰富,本书只作了简单介绍,有兴趣的读者可参阅有关专门著作.

§10.5　应用实例

方差分析方法和正交试验设计具有非常广泛的应用前景，这里介绍的两个具体实例，仅仅反映了两种方法实际应用的一个侧面.

一、用方差分析法确定最佳培训方案

随着社会的发展、科学技术的进步，许多行业对从业人员技术素质的要求越来越高，尤其是一些技术水平要求较高的行业，如电子行业等. 由于各种客观原因，不少行业从业人员的技术素质尚不理想，为尽快解决这一问题，比较可行的办法是首先培训一批技术骨干，以此带动全面技术素质的提高. 那么，挑选什么样的人员作为技术骨干来培训呢？下面的实例是确定最佳培训方案的探讨.

对于从业人员的状况，比较容易量化且对培训效果有影响的因素为人员的年龄大小和工龄长短，下面根据某公司职工培训的情况进行方差分析. 培训效果即为考察指标，由学习成绩、培训后工作业绩综合按百分制计.

记被培训人员的年龄因素为 A，工龄因素为 B，在这个实际问题中，需要适当地划分因素 A、B 的水平，以免出现某些组合水平没有观测值. 比如，年龄 18 岁而工龄 10 年的职工是几乎没有的. 根据具体情况，将因素 A、因素 B 的水平确定如下：

A_1：年龄不超过 25 岁；A_2：年龄超过 25 岁.

B_1：工龄 5 年以下；　　B_2：工龄 5 年及以上.

公司首批培训了 37 名职工，培训效果如表 10.5.1 所示.

表 10.5.1

培训效果　工龄(B) 年龄(A)	B_1	B_2
A_1	86　87　76　79　85 75　85　79　84	82　93　82　88　91
A_2	77　82　84　90　76	82　82　80　84　75　83 81　81　85　78　78　81 75　85　80　86　80　79

由表 10.5.1 的数据，建立不等重复试验两因素方差分析模型.

记培训效果的数据为 x_{ijk}，$i=1,2$；$j=1,2$；$k=n_{ij}$，这里 $n_{11}=9$，$n_{12}=5$，$n_{21}=5$，$n_{22}=18$.

记

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_{ij}}x_{ijk},$$

式中，$n=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}n_{ij}=37$.

$$\bar{x}_{i\cdot\cdot}=\frac{1}{n_{i1}+n_{i2}}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_{ij}}x_{ijk},\qquad i=1,2.$$

$$\bar{x}_{\cdot j\cdot}=\frac{1}{n_{1j}+n_{2j}}\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_{ij}}x_{ijk},\qquad j=1,2.$$

$$\bar{x}_{ij\cdot}=\frac{1}{n_{ij}}\sum_{k=1}^{n_{ij}}x_{ijk}.\qquad i=1,2;j=1,2.$$

可得各离差平方和

$$S_T=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(x_{ijk}-\bar{x})^2,$$

$$S_A=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}n_{ij}(\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x})^2,$$

$$S_B=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}n_{ij}(\bar{x}_{\cdot j\cdot}-\bar{x})^2,$$

$$S_{A\times B}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}n_{ij}(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x}_{\cdot j\cdot}+\bar{x})^2,$$

$$S_E=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij\cdot})^2.$$

各离差平方和的自由度依次为 36，1，1，1，33.

查 F 分布临界值表，有

$$F_{0.05}(1,33)=4.14,\quad F_{0.01}(1,33)=7.47.$$

得到方差分析表，如表 10.5.2 所示.

表 10.5.2

方差来源	平方和	自由度	均方和	F 比	显著性
因素 A	62.077 9	1	62.077 9	3.567 7	不显著
因素 B	1.621 9	1	1.621 9	0.093 2	不显著
$A\times B$	87.997 9	1	87.997 9	5.057 4	显　著
误　差	574.194 2	33	17.399 8		
总　和	725.891 9	36			

上述分析结果表明，年龄因素（A）、工龄因素（B）对培训效果均没有显著的

影响，但它们的交互作用对培训效果的影响是显著的. 因此，在确定培训骨干时，要同时考虑年龄和工龄的情况. 考虑因素 A 和因素 B 的各个组合水平的培训效果，有

$$\bar{x}_{11\cdot}=81.7778,\quad \bar{x}_{12\cdot}=87.2000,$$
$$\bar{x}_{21\cdot}=81.8000,\quad \bar{x}_{22\cdot}=80.8333.$$

可发现组合水平（A_1、B_2）的培训效果最好. 于是我们得出结论：在培训技术骨干时，可首先挑选从业时间较长同时年龄较轻的人员作为骨干，他们的培训效果比较好.

二、应用正交试验设计改进机械加工工艺

某广播器材厂生产的数字微波中继机，是我国某地区的数字微波通信工程的主要设备，要求性能可靠，使用安全、方便且使用寿命长. 因此，对该机采用的元器件的各项指标要求高，尤其是本振源中的稳频腔更为突出. 稳频腔的性能取决于腔体的尺寸精度、内表面光洁度等质量要求. 例如，耦合孔壁厚要求为 $0.2_{-0.1}$（即壁厚为 0.1 mm 至 0.2 mm 之间为合格）；内孔光洁度要求达到 10 级以上. 根据性能要求，原材料采用低膨系数合金 4J32，该材料给切削加工带来很大困难. 为此，该厂确定了如下的三个研究课题：

（1）合理选择刀具材料，提高刀具耐用度；

（2）对切削三要素找到合理的好搭配，使得 $0.2_{-0.1}$ 壁厚达到要求；

（3）采用滚压方式，选择合理参数，使内孔光洁度达 10 级以上.

针对以上课题，在机械加工过程中运用正交试验设计，取得了明显的效果. 下面主要把解决 $0.2_{-0.1}$ 壁厚变形问题的正交试验设计介绍一下.

根据课题要求和以往经验，试验中将刀具牌号选成要考察的因素之一，将切削三要素（即主轴转数、切削深度、进给量）中的主轴转数和切削深度也选为考察的因素，而将进给量固定，取为 0.1 mm/n. 确定要考察的因素的水平如表 10.5.3 所示.

表 10.5.3

因　　素	水　　平	
刀具牌号(A)	A_1：YG8	A_2：YT15
主轴转数(B)	B_1：300 转/min	B_2：235 转/min
切削深度(C)	C_1：0.1 mm	C_2：0.06 mm

采用正交表 $L_4(2^3)$ 安排试验，在试验中固定的因素还有：刀具的几何参数（$\gamma_0=25°$，$\alpha=12°$，$\alpha'_0=8°$等）以及冷却润滑液（混合油）.

试验方案及试验结果如表 10.5.4 所示.

表 10.5.4

试验号 \ 列号 \ 因素	B	A	C	试验方案	试验结果（合格数）
	1	2	3		
1	1	1	1	$A_1B_1C_1$	2
2	1	2	2	$A_2B_1C_2$	1
3	2	1	2	$A_1B_2C_2$	5
4	2	2	1	$A_2B_2C_1$	1

作为试验结果的合格件数，是指在该条件下，一个刀具能加工合格品的件数，当然是愈大愈好. 由表 10.5.4 看出，直观的好搭配为第 3 号试验，试验方案为：刀具牌号 YG8（钨钴类），主轴转数 235 转/min，切削深度 0.06 mm. 采用该方案后，生产出 5 件合格品才换刀具，比其他三个方案的产率高很多.

进行简单的计算，得

$$\bar{x}_{A_1}=3.5,\quad \bar{x}_{B_1}=1.5,\quad \bar{x}_{C_1}=1.5,$$
$$\bar{x}_{A_2}=1,\quad \bar{x}_{B_2}=3,\quad \bar{x}_{C_2}=3.$$

归纳成表格的形式，如表 10.5.5 所示.

表 10.5.5

平均合格件数 \ 列号 \ 因素	B	A	C
	1	2	3
水平 1	1.5	3.5	1.5
水平 2	3	1	3
极　差	1.5	2.5	1.5
因素主次	2（并列）	1	2（并列）
可能好水平	B_2	A_1	C_2

简单的计算给出的可能好水平为 $A_1B_2C_2$，与直观的最好水平（第 3 号试验）一致. 简单的计算还表明刀具牌号（因素 A）为主要因素，应保证它取最好水平 YG8.

该厂按正交试验设计提供的方案，即刀具牌号为 YG8，主轴转数为 235 转/min，切削深度为 0.06 mm，其他条件不变，在这个条件下投产，基本上解决了$0.2_{-0.1}$壁厚变形问题.

接着，又用正交表 $L_4(2^3)$ 做了后道工序中滚压的试验，解决了光洁度问题，

即达到了 10 级以上.

这样，通过为数不多的几个试验，得到了好的生产方案. 该厂用好方案投产，合格品率由原来的 50% 提高到 98% ，工时减少到原来的 $\frac{2}{3}$ ，提高了经济效益，并且保证了长期稳定生产的水平.

习 题 十

1. 用四种不同型号的仪器对一种零件的表面光洁度进行检查，每种仪器分别在同一零件的表面检测 4 次，得数据如下：

仪器型号	光洁度数据			
A_1	-0. 21	-0. 06	-0. 17	-0. 14
A_2	0. 16	0. 08	0. 03	0. 11
A_3	0. 10	-0. 07	0. 15	-0. 02
A_4	0. 12	-0. 04	-0. 02	0. 11

问四种型号的检测仪器其测量结果有没有显著差异？

2. 抽查某地区三所小学五年级男学生的身高，得测量数据如下：

小 学	身高数据(cm)					
第一小学	128. 1	134. 1	133. 1	138. 9	140. 9	127. 4
第二小学	150. 3	147. 9	136. 0	126. 0	150. 7	155. 8
第三小学	140. 6	143. 1	144. 5	143. 7	148. 5	146. 4

试检验该地区这三所小学五年级男学生的平均身高是否有显著的差异.

3. 某一实验室有一批伏特计，它们经常被轮流用来测量电压. 现在任取 4 只伏特计，每只伏特计用来测量电压为 100 伏的恒定电动势各 5 次，得下列测定值：

伏特计	测量值数据				
A_1	110. 9	101. 1	100. 8	100. 8	100. 4
A_2	100. 2	100. 9	101. 0	100. 6	100. 3
A_3	100. 8	100. 7	100. 7	100. 4	100. 0
A_4	100. 4	100. 1	100. 3	100. 2	100. 0

问这 4 只伏特计的测量结果有无显著差异？

4. 粮食加工厂用 4 种不同的方法贮藏粮食，贮藏一段时间后，分别抽样化验，得到粮食含水率的数据如下：

贮藏方法	测量值数据				
Ⅰ	7.3	8.3	7.6	8.4	8.3
Ⅱ	5.8	7.4	7.1		
Ⅲ	8.1	6.4	7.0		
Ⅳ	7.9	9.0			

试检验这 4 种不同的贮藏方法对粮食的含水率是否有显著的影响？

5. 对木材进行抗压强度的试验，选择三种不同比重（g/cm^3）的木材 A_1、A_2、A_3，分别按三种不同的加荷速度（kg/cm^2 · min）B_1、B_2、B_3对三种木材进行加压，测得木材的抗压强度数据（kg/cm^2）如下：

加荷速度 / 木材比重	B_1	B_2	B_3
A_1	3.72	3.90	4.02
A_2	5.22	5.24	5.08
A_3	5.28	5.74	5.54

试检验木材比重以及加荷速度对木材的抗压强度是否有显著影响？

6. 在橡胶生产过程中，选择四种不同的配料方案 A_1，A_2，A_3，A_4 以及五种不同的硫化时间 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，分别对所得产品测量抗断强度，得测量数据如下（kg/cm^2）：

硫化时间 / 配料方案	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	151	157	144	134	136
A_2	144	162	128	138	132
A_3	134	133	130	122	125
A_4	131	126	124	126	121

试检验不同配料方案以及不同的硫化时间之间，产品的抗断强度是否有显著差异？

7. 某种化工过程在三种浓度、四种温度水平下得率的数据如下：

温 度 / 浓 度	B_1：10°C	B_2：24°C	B_3：38°C	B_4：52°C
A_1：2%	14，10	11，11	13，9	10，12
A_2：4%	9，7	10，8	7，11	6，10
A_3：6%	5，11	13，14	12，13	14，10

试检验浓度、温度对得率的影响是否显著？交互作用的影响是否显著？

8. 三位操作工分别在四台不同的机器上操作三天的日产量如下：

机器 \ 操作工	B_1	B_2	B_3
A_1	15,15,17	19,19,16	16,18,21
A_2	17,17,17	15,15,15	19,22,22
A_3	15,17,16	18,17,16	18,18,18
A_4	18,20,22	15,16,17	17,17,17

试检验：

（1）不同机器之间日产量是否有显著差异？

（2）不同操作工人之间产量是否有显著差异？

（3）交互作用的影响是否显著？

9. 某工厂对含有锌镉有毒物质的废水进行处理，采用正交试验设计，探索沉淀法进行一级处理. 选定因素及水平如下：

水平 \ 因素	pH 值	凝聚剂	淀剂	$CaCl_2$	废水浓度
水平 1	7 ~ 9	加	NaOH	不加	稀
水平 2	9 ~ 11	不加	Na_2CO_3	加	浓

假定不考虑因素间的交互作用，试选择适当的正交表安排试验，并写出第 3 号、第 5 号试验的试验方案.

10. 某农场为了提高水稻产量，选定如下因素及水平进行试验：

水平 \ 因素	水稻品种	栽种密度（万株/亩）	施肥量（kg/亩）
水平 1	窄叶青 2 号	30	纯氮 5
水平 2	南二矮 5 号	25	纯氮 2.5
水平 3	珍珠矮 11 号	20	纯氮 7.5

（1）不考虑因素间的交互作用，试选择适当的正交表安排试验，并写出第 5 号、第 8 号试验的试验方案；

（2）考虑因素间的交互作用，选择适当的正交表安排试验，写出表头设计，并写出第 3 号试验的试验方案.

11. 某厂为考察铁损情况，选定四个因素，每个因素取两种水平，如下表所示：

因素 / 水平	退火温度	退火时间	原料产地	轧程分配
水平 1	800°C	10 h	成都	0. 3 mm
水平 2	1 000°C	13 h	重庆	0. 35 mm

假定任意两个因素之间均没有交互作用. 现用正交表 $L_8(2^7)$ 安排试验,且将退火温度、退火时间、原料产地、轧程分配分别放在第 1、2、4、7 列,经试验所得结果如下:

列号 / 试验号	1 退火温度	2 退火时间	4 原料产地	7 轧程分配	铁损 (%)
1	1	1	1	1	0. 82
2	1	1	2	2	0. 85
3	1	2	1	2	0. 70
4	1	2	2	1	0. 75
5	2	1	1	2	0. 74
6	2	1	2	1	0. 79
7	2	2	1	1	0. 80
8	2	2	2	2	0. 87

请先用直观地简单计算,分出因素的主次,再检验每一个因素对铁损的影响是否显著?

习 题 答 案

习 题 一

1. (1) $A\overline{B}\overline{C}$.　(2) ABC.　(3) $AB\overline{C}$.　(4) $A\cup B\cup C$.　(5) $AB\cup BC\cup AC$.
(6) $\overline{A}\overline{B}C\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}$.　(7) $\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$.　(8) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.　(9) $\overline{ABC}$.

2. (1) $\{3,4,5,\cdots,18\}$.
(2) $\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,TTH,THT,TTT\}$.
(3) $\{5,6,7,\cdots\}$.
(4) $\{(x,y,z):x>0,y>0,z>0,x+y+z\geqslant 1\}$.
(5) $\{(m,n):1\leqslant m\leqslant 10,1\leqslant n\leqslant 10,m\neq n\}$.

3. 0.01473.　4. $\frac{1}{30},\frac{1}{720}$.　5. (1) 0.1285　(2) 0.1499.

6. $\frac{k^n}{10^n}$.　7. (1) 6.44×10^{-4}.　(2) 0.0316.　(3) 0.0825.

8. (1) 0.083.　(2) 0.05.　9. $p+q-r$,　$r-p$,　$r-q$,　$1-r$.

10. 0.2304.　11. (1) $\frac{1}{6}$.　(2) $\frac{1}{2}$.　(3) $\frac{3}{8}$.　12. (1) 0.862.　(2) 0.126.

13. $\frac{8}{15}$.　14. 0.1140.　15. $\frac{50}{81}$.　17. $\frac{2}{5}$.

20. $\frac{2}{3}$.　21. $\frac{1}{5}$.　22. (1) $\frac{1}{3}$.　(2) $\frac{1}{14}$.　(3) $\frac{4}{210}$.　23. $\frac{3}{5}$.

24. 0.225.　25. 0.0985.　26. 0.0893.　27. 0.0441.　28. 0.9979.

29. 0.9524.　30. 0.3789.　32. $1-(1-p)^n$.

33. (1) 0.25.　(2) 0.75.　(3) $\frac{11}{24}$.　(4) $\frac{23}{24}$.　34. 0.3312.

35. (1) 0.765.　(2) 0.22.　(3) 0.015.

36. $p_1=r_a(r_b+r_c-r_br_c)$.　$p_2=r_a^2(3-3r_a^2+r_a^4)$.　$p_3=(r_a+r_b-r_ar_b)^n$.

习 题 二

1.

X	0	1	2	3

$P\{X=k\}$	0.75	0.2045	0.0409	0.0046

2. (1) $P\{Y=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\cdots$

(2) $P\{X=m\}=C_{n+m-1}^{m}(1-p)^{m}p^{n}, m=0,1,2,\cdots$

3. $\frac{27}{38}$.　　4. $0<a<1$.

5. (1) $X\sim B\left(4,\frac{1}{5}\right)$.　　(2) $P\{X=k\}=\frac{C_5^kC_{20}^{4-k}}{C_{25}^4}, k=0,1,2,3,4$.

6. $X\sim B(30,0.8)$, $p=1.0737\times10^{-21}$.　　7. 0.2642.　　8. 0.0902.

9. $\lambda=\ln 3$, $p=0.3005$.

10.

X	-3	1	2
$P\{X=x_i\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3;\\ \frac{1}{3}, & -3\leqslant x<1;\\ \frac{5}{6}, & 1\leqslant x<2;\\ 1, & 2\leqslant x.\end{cases}$$

11. (1) $F(a)-F(a-0)$,　(2) $F(a-0)$,　(3) $1-F(a-0)$,　(4) $1-F(a)$.

12. (1) $A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{\pi}$,　(2) $\frac{1}{2}$,　(3) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, x\in\mathbf{R}$.

13. $f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ $P\{X\leqslant 1\}=0.2642$, $P\{X>3\}=0.1991$.

14. (1) $A=1$,　(2) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{2x}, & x<0;\\ 1-\frac{1}{2}e^{-2x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

15. (1) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 3x^2-2x^3, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & 1\leqslant x.\end{cases}$　(2) $b=\frac{1}{2}$.

16. (1) $\frac{2}{1-e^{-9}}$,　(2) $\left[\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-9}}\right]^5$,　17. $\frac{2}{5}$,　18. $\frac{3}{5}$.

19. (1) $\frac{t_1-t_0}{T}$,　(2) $\frac{t_1-t_0}{T-t_0}$.　20. (1) 0.0062,　(2) 0.1140.

21. (1) 0.2266,　(2) 0.2902.　22. $h>184$(cm).

23. (1) **第二个**,　(2) **第一个**;　24. $\sigma<228$(**小时**).

25. $x_1=57.975$；$x_2=60.63$.

习题三

1. （1）$A=\frac{1}{\pi^2}$，$B=C=\frac{\pi}{2}$.

（2）$F_X(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)$，$x\in\mathbf{R}$，　$F_Y(y)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right)$，$y\in\mathbf{R}$.

2. （1）$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-0.01x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$　$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-0.01y}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$　（2）0.5117.

3. $P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{4}$，$i,j=0,1$；　$F(x,y)=\begin{cases}1, & x\geqslant 1,y\geqslant 1;\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<1,0\leqslant y<1;\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,1\leqslant y;\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant y<1,1\leqslant x;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4.

X \ Y	1	2	3
1	0	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	0

5. （1）0.27，　（2）0.69，　（3）0.53，　（4）0.3，　（5）0.25.

6. $C=\frac{21}{4}$，$p=0.15$.

7. $C=\frac{\pi}{6}$.

8. （1）$C=\frac{5}{4}$，　（2）$p=\frac{79}{256}$，　（3）$p=0$.

9. （1）0.9499，　（2）$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-3x})(1-e^{-4y}), & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

10. （1）$\frac{1}{2}$，　（2）0.1207.

11. （1）$\frac{1}{4}$，　（2）$\frac{5}{8}$.

12. $1-e^{-\frac{r}{2}}$.

13. $C=6$，X 和 Y 相互独立.

14. （1）相互独立，　（2）不独立.

15. $\alpha=\frac{2}{9}$，$\beta=\frac{1}{9}$.

16. 当 $j=2,3,4,\cdots$ 时，$P\{X=i\mid Y=j\}=\frac{1}{j-1}$　$(1\leqslant i<j)$；

当 $i=1,2,3,\cdots$ 时，$P\{Y=j\mid X=i\}=p(1-p)^{j-i-1}$，$(i<j)$；

17. 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 0\leqslant y\leqslant 3;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

当 $0<y<3$，$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

18. $f_X(x)=\begin{cases}\frac{\lambda}{(\lambda+x)^2}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

19. （1）当 $y>0$，$f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x)$.

（2）

Z	0	1
$P\{Z=k\}$	$\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

20.

Y	2	$2+\frac{\pi}{3}$	$2+\frac{2\pi}{3}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Z	-1	0	1
$P\{Z=z_k\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

22. $P\{X+Y=m\}=\frac{m-1}{2^m}$，　$m=2,3,\cdots$

23. $X\sim P\left(\sum_{i=1}^{2608}3.87\right)$.

24. $\frac{1}{2}$.

25. 0.8185.

26. $F_Y(y)=\begin{cases}F_X(x), & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$ Y 不是连续型随机变量.

27. (1) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{(y+\mu)^2}{2\sigma^2}\right], & y>0;\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$

28. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\sqrt{1-y}, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

29. $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0;\\ 1-\sqrt{1-y}, & 0<y\leqslant 1;\\ 1, & y>1.\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y}}, & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

30. $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0;\\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0.\end{cases}$ $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0;\\ ze^{-z}\quad 0, & z>0.\end{cases}$

31. $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{h}(1-e^{-\lambda z}), & 0<z<h;\\ \dfrac{1}{h}e^{-\lambda z}(e^{\lambda h}-1), & z\geqslant h;\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$

32. $f_Z(z)=\begin{cases}z^2, & 0<z\leqslant 1;\\ 2z-z^2, & 1<z\leqslant 2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

33. $f_Z(z)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+z^2}$, $z\in\mathbf{R}$.

习 题 四

1. $E(X)=0.8$. 2. $E(X)=0, D(X)=2$. 3. $E(X)=1, D(X)=\dfrac{1}{6}$.

4. $E(X)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sigma, D(X)=\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)\sigma^2$. 5. 平均收索时间为$\dfrac{1}{\lambda}$.

6. $E(Y)=0, D(Y^2)=\dfrac{1}{2}$. 7. $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)=\dfrac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$. 8. $E(Y)=2, E(Z)=\dfrac{1}{3}$.

9. $E(X)=\dfrac{4}{5}$, $E(Y)=\dfrac{3}{5}$, $E(XY)=\dfrac{1}{2}$, $E(X^2+Y^2)=\dfrac{16}{15}$.

10. $E(X_1+Y_2)=e^{-1}+2e^{-2}$. 11. $E(XY)=2$, $E(X+Y)=\dfrac{11}{3}$.

12. $E(X^2+Y^2)=2$， $D(X^2+Y^2)=4$. 13. 平均停车次数为 $10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]$.

14. $E(X)=1$. 15. $C=\begin{bmatrix}\frac{1}{18} & 0\\ 0 & \frac{3}{80}\end{bmatrix}$. 17. $\mathrm{cov}(X,Y)=0$，$\rho_{XY}=0$.

18. X 与 $|X|$ 不相关，不相互独立. 19. $D(X+Y)=85$，$D(X-Y)=37$.

21. (1) $E(Z)=\frac{1}{3}$， $D(Z)=3$，(2) $\rho_{XY}=0$，(3) X 与 Z 相互独立.

习题五

1. $\geqslant\frac{3}{4}$. 2. $\geqslant\frac{13}{16}$. 4. 0.522. 5. 0.9544. 6. 0.9525. 7. 0.8164.

8. 0.348. 9. 0.2119. 10. $n\geqslant 35$.

习题六

2. (1) $\bar{x}=65.5$， $s^2=39.8872$.
(2) $\bar{x}=100.91$， $s^2=1.6355$.
3. $\bar{x}=6.9$，$s=39.8872$.
4. (1) 0.132， (2) 0.2628.
5. $E(\bar{X})=0.5$， $D(\bar{X})=\frac{5}{12}$.
6. 0.6744.
7. 0.1.
8. 0.985.
9. $E(\bar{X})=n$， $D(\bar{X})=2n$.
10. $t(1)$.

习题七

1. (1) $\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{X}}$. (2) $\hat{p}=\frac{1}{\bar{X}}$.

(3) $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$. (4) $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-c}$.

2. (1) $\hat{\theta}=\frac{-n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$. (2) $\hat{\beta}=\frac{k}{\bar{X}}$. (3) $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$.

(4) $\hat{\theta}=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}}$.　　(5) $\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{m}$.

3. $\hat{\mu}=\bar{x}=1147$（小时），　$\hat{\sigma}^2=s^2=7570$（小时）^{2}.

5. $C=\dfrac{1}{2(n-1)}$.

7. $D(\hat{\mu}_3)$最小.

8. $\sum_{i=1}^{n}a_i=1, a_i=\dfrac{1}{n}, i=1,2,\cdots,n$.

9. (992.16, 1007.84).

10. (1) (5.608, 6.392)；　(2) (5.558, 6.442).

11. $n\geqslant\left(2u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{L}\right)^2$.

12. (4.865 2, 6.134 8)；　(1.153 9, 2.285 3).

13. (55.204, 444.037).

14. $(6.76\times10^{-6}, 6.54\times10^{-5})$.

15. (−0.002, 0.006).

16. (0.029 9, 0.050 1).

17. (0.136, 6.163).

18. (0.222, 3.601).

19. 6 592.471.

20. 74.035.

习题八

1. 接受 $H_0: \mu=26$.　　2. 接受 $H_0: \mu=54$.

3. 接受 $H_0: \mu=3.25$.　　4. 接受 $H_0: \mu=1\ 260$.

5. 接受 $H_0: \sigma^2=400$.　　6. 拒绝 $H_0: \sigma=0.048$（不正常）.

7. (1) 拒绝 H_0；　(2) 接受 H_0.

8. 拒绝 $H_0: \mu_1=\mu_2$（有显著差异）.

9. (1) 接受 $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$；　(2) 接受 $H_0: \mu_1=\mu_2$.

10. （先检验 $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$）接受 $H_0: \mu_1=\mu_2$.

11. （先检验 $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$）拒绝 $H_0: \mu_1=\mu_2$.

12. （先检验 $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$）拒绝 $H_0: \mu_1=\mu_2$.

13. (1) 接受 $H_0: \sigma^2\leqslant400$.

(2) 接受 $H_0: \mu_1\geqslant\mu$（甲比乙显著大）.

(3) 新工艺对平均寿命有显著提高.

14. 接受 $H_0: \sigma_{甲}^2<\sigma_{乙}^2$.

15. **该四面体不匀称**.
16. **可认为服从泊松分布**.
17. **不能认为服从泊松分布**.
18. **接受** H_0.
19. **不能认为服从正态分布**.
20. **可以认为总体服从正态分布**.

习 题 九

1. $$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0)(x_i-x_0)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2},$$

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0)^2-\frac{1}{n}\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-y_0)(x_i-x_0)^2\right]}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2}.$$

2. $\hat{y}=162.9037(x-1)$.

3. (1) **可以**;　(2) $\hat{y}=6.282\,5+0.183\,1x$.

4. (1) **显著**($F=28.030\,0$ **或** $r=0.907\,6$);

(2) $\hat{y}=11.460\,9+2.621\,4x$.

5. (1) **显著**($F=912.803\,6$ **或** $r=0.994\,0$);

(2) $\hat{b}=0.124\,1$, $\hat{a}=0.667\,2$, $\hat{\sigma}^2=1.406\,5$.

6. (1) $\hat{b}=0.870\,6$, $\hat{a}=67.508\,8$, $\hat{\sigma}^2=0.956\,1$;

(2) **显著**($F=3\,362.678\,0$ **或** $r=0.999\,0$).

7. $$\begin{cases} b_1\sum_{i=1}^{n}x_{i1}^2+b_2\sum_{i=1}^{n}x_{i1}x_{i2}=\sum_{i=1}^{n}x_{i1}^2y_i, \\ b_1\sum_{i=1}^{n}x_{i1}x_{i2}+b_2\sum_{i=1}^{n}x_{i2}^2=\sum_{i=1}^{n}x_{i2}y_i. \end{cases}$$

8. (1) $\hat{a}=9.900\,0$, $\hat{b}_1=0.575\,0$,

$\hat{b}_2=0.550\,0$, $\hat{b}_3=1.150\,0$, $\hat{\sigma}^2=0.229\,2$.

$\hat{y}=9.9+0.575x_1+0.55x_2+1.15x_3$.

(2) **显著**($F=15.170\,9$).

9. $\hat{y}=0.805\,4+2.669\,8\times10^{-3}x_1+0.532\,6x_2$

10. (1) $\hat{b}=8.976\,2$, $\hat{a}=1.118\,9$, $\hat{\sigma}^2=3.447\times10^{-3}$,

$$\hat{y}_1 = 1.1189 + \frac{8.9762}{x}.$$

（2）显著（$F = 21\,375.274\,8$ 或 $r = 0.999\,8$）.

11. （1）$\hat{b} = 1.199\,6$，$\hat{a} = 106.288\,0$，$\hat{\sigma}^2 = 0.402\,4$

回归显著（$r = 0.889\,6$）.

（2）$\hat{b} = -9.438\,0$，$\hat{a} = 111.427\,0$，$\hat{\sigma}^2 = 0.198\,2$

回归显著（$r = -0.947\,2$）

（3）$y = a + \frac{b}{x}$ 拟合最好.

12. （1）$\hat{a} = 9.244\,6$，$\hat{b}_1 = -2.014\,9$，$\hat{b}_2 = 0.199\,4$；

$\hat{\sigma}^2 = 0.302\,3$ $\hat{y} = 9.246 - 2.014\,9x + 0.199\,4x^2$

（2）$R^* = 0.923\,1$，回归显著 $F = 14.400\,6$

习题十

1. $F = 7.208\,3$，特别显著的差异.
2. $F = 4.371\,7$，显著差异.
3. $F = 4.072\,0$，显著差异.
4. $F = 3.188\,4$，无显著影响.
5. $F_A = 96.879\,3$，木材比重影响特别显著；
   $F_B = 1.603\,4$，加压速度无显著影响.
6. $F_A = 10.558\,6$，配料方案之间差异特别显著；
   $F_B = 4.958\,4$，硫化时间之间差异显著.
7. $F_A = 4.092\,3$，浓度的影响不显著；
   $F_B = 0.707\,7$，温度的影响不显著.
   $F_{A\times B} = 0.830\,8$，交互作用不显著.
8. $F_A = 0.532\,3$，机器之间无显著差异.
   $F_B = 7.887\,1$，工人之间差异特别显著；
   $F_{A\times B} = 7.112\,9$，交互作用不显著.
9. 选用 $L_8(2^7)$ 安排试验.
10. （1）选用 $L_9(3^4)$ 安排试验.

（2）选用 $L_{27}(3^{13})$ 安排试验.

11. 因素主次为：① 原料产地；② 退火温度、退火时间（并列）；③ 轧程分配：$F_A = 0.060\,3$，$F_B = 0.060\,3$，$F_C = 0.376\,9$，$F_D = 0$，每个因素对铁损的影响都不显著.

附　　表

附表 1　泊松分布表

$$1-F(x-1)=\sum_{r=x}^{r=\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{r}}{r!}$$

x	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.3$	$\lambda=0.4$	$\lambda=0.5$	$\lambda=0.6$
0	1. 0000000	1. 0000000	1. 0000000	1. 0000000	1. 0000000
1	0. 1812692	0. 2591818	0. 3296800	0. 323469	0. 451188
2	0. 0175231	0. 0369363	0. 0615519	0. 090204	0. 121901
3	0. 0011485	0. 0035995	0. 0079263	0. 014388	0. 023115
4	0. 000568	0. 0002658	0. 0007763	0. 001752	0. 003358
5	0. 0000023	0. 0000158	0. 0000612	0. 000172	0. 000394
6	0. 0000001	0. 0000008	0. 0000040	0. 000014	0. 000039
7			0. 0000002	0. 000001	0. 000003

x	$\lambda=0.7$	$\lambda=0.8$	$\lambda=0.9$	$\lambda=1.0$	$\lambda=1.2$
0	1. 0000000	1. 0000000	1. 0000000	1. 0000000	1. 0000000
1	0. 503415	0. 550671	0. 593430	0. 632121	0. 698806
2	0. 155805	0. 191208	0. 227518	0. 264241	0. 337373
3	0. 034142	0. 047423	0. 062857	0. 080301	0. 120513
4	0. 005753	0. 009080	0. 013459	0. 018988	0. 033769
5	0. 000786	0. 001411	0. 002344	0. 003660	0. 007746
6	0. 000090	0. 000184	0. 000343	0. 000594	0. 001500
7	0. 000009	0. 00021	0. 000043	0. 000083	0. 000251
8	0. 000001	0. 000002	0. 000005	0. 000010	0. 000037
9				0. 000001	0. 000005
10					0. 000001

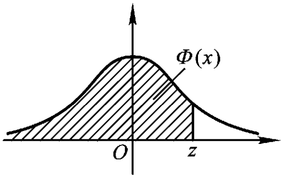
续表

x	$\lambda=1.4$	$\lambda=1.6$	$\lambda=1.8$		
0	1.000000	1.000000	1.000000		
1	0.753403	0.798103	0.834701		
2	0.408167	0.475069	0.537163		
3	0.166502	0.216642	0.269379		
4	0.053725	0.078813	0.108708		
5	0.014253	0.023682	0.036407		
6	0.003201	0.006040	0.010378		
7	0.000622	0.001336	0.002569		
8	0.000107	0.000260	0.000562		
9	0.000016	0.000045	0.000110		
10	0.00002	0.000007	0.000019		
11		0.000001	0.000003		

x	$\lambda=2.5$	$\lambda=3.0$	$\lambda=3.5$	$\lambda=4.0$	$\lambda=4.5$	$\lambda=5.0$
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.917915	0.950213	0.969803	0.981684	0.988891	0.993262
2	0.712703	0.800852	0.864112	0.908422	0.938901	0.959572
3	0.456187	0.576810	0.679153	0.761897	0.826422	0.875348
4	0.242424	0.352768	0.463367	0.566530	0.657704	0.734974
5	0.108822	0.184737	0.274555	0.371163	0.467896	0.559507
6	0.042021	0.083918	0.142386	0.214870	0.297070	0.384039
7	0.014187	0.033509	0.065288	0.110674	0.168949	0.237817
8	0.004247	0.011905	0.026739	0.051134	0.086586	0.133372
9	0.001140	0.003803	0.009874	0.021363	0.040257	0.068094
10	0.000277	0.001102	0.003315	0.008132	0.017093	0.031828
11	0.000062	0.000292	0.001019	0.002840	0.006669	0.013695
12	0.000013	0.000071	0.000289	0.000915	0.002404	0.005453
13	0.000002	0.000016	0.000076	0.000274	0.000805	0.002019
14		0.000003	0.000019	0.000076	0.000252	0.000698
15		0.000001	0.000004	0.000020	0.000074	0.000226
16			0.000001	0.000005	0.000020	0.000069
17				0.000001	0.000005	0.000020
18					0.000001	0.000005
19						0.000001

附表 2　标准正态分布表

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = P(X \leqslant x)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0. 0	0. 5000	0. 5040	0. 5080	0. 5120	0. 5160	0. 5199	0. 5239	0. 5279	0. 5319	0. 5359
0. 1	0. 5398	0. 5438	0. 5478	0. 5517	0. 5557	0. 5596	0. 5636	0. 5675	0. 5714	0. 5753
0. 2	0. 5793	0. 5832	0. 5871	0. 5910	0. 5948	0. 5987	0. 6026	0. 6064	0. 6103	0. 6141
0. 3	0. 6179	0. 6217	0. 6255	0. 6293	0. 6331	0. 6368	0. 6406	0. 6443	0. 6480	0. 6517
0. 4	0. 6554	0. 6591	0. 6628	0. 6664	0. 6700	0. 6736	0. 6772	0. 6808	0. 6844	0. 6879
0. 5	0. 6915	0. 6950	0. 6985	0. 7019	0. 7054	0. 7088	0. 7123	0. 7157	0. 7190	0. 7224
0. 6	0. 7257	0. 7291	0. 7324	0. 7357	0. 7389	0. 7422	0. 7454	0. 7486	0. 7517	0. 7549
0. 7	0. 7580	0. 7611	0. 7642	0. 7673	0. 7703	0. 7734	0. 7764	0. 7794	0. 7823	0. 7852
0. 8	0. 7881	0. 7910	0. 7939	0. 7967	0. 7995	0. 8023	0. 8051	0. 8078	0. 8106	0. 8133
0. 9	0. 8159	0. 8186	0. 8212	0. 8238	0. 8264	0. 8289	0. 8315	0. 8340	0. 8365	0. 8389
1. 0	0. 8413	0. 8438	0. 8461	0. 8485	0. 8508	0. 8531	0. 8554	0. 8577	0. 8599	0. 8621
1. 1	0. 8643	0. 8665	0. 8686	0. 8708	0. 8729	0. 8749	0. 8770	0. 8790	0. 8810	0. 8830
1. 2	0. 8849	0. 8869	0. 8888	0. 8907	0. 8925	0. 8944	0. 8962	0. 8980	0. 8997	0. 9015
1. 3	0. 9032	0. 9049	0. 9066	0. 9082	0. 9099	0. 9115	0. 9131	0. 9147	0. 9162	0. 9177
1. 4	0. 9192	0. 9207	0. 9220	0. 9236	0. 9251	0. 9265	0. 9278	0. 9292	0. 9306	0. 9319
1. 5	0. 9332	0. 9345	0. 9357	0. 9370	0. 9382	0. 9394	0. 9406	0. 9418	0. 9430	0. 9441
1. 6	0. 9452	0. 9463	0. 9474	0. 9484	0. 9495	0. 9505	0. 9515	0. 9525	0. 9535	0. 9545
1. 7	0. 9554	0. 9564	0. 9573	0. 9582	0. 9591	0. 9599	0. 9608	0. 9616	0. 9625	0. 9633
1. 8	0. 9641	0. 9648	0. 9656	0. 9664	0. 9671	0. 9678	0. 9686	0. 9693	0. 9700	0. 9706
1. 9	0. 9713	0. 9719	0. 9726	0. 9732	0. 9738	0. 9744	0. 9750	0. 9756	0. 9762	0. 9767
2. 0	0. 9772	0. 9778	0. 9783	0. 9788	0. 9793	0. 9798	0. 9803	0. 9808	0. 9812	0. 9817
2. 1	0. 9821	0. 9826	0. 9830	0. 9834	0. 9838	0. 9842	0. 9846	0. 9850	0. 9854	0. 9857
2. 2	0. 9861	0. 9864	0. 9868	0. 9871	0. 9874	0. 9878	0. 9881	0. 9884	0. 9887	0. 9890

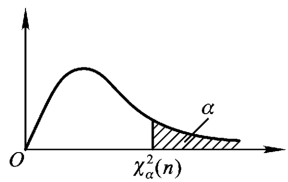
续表

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.000

注 表中末行系函数值 $\Phi(3.0),\Phi(3.1),\cdots,\Phi(3.9)$

附表 3　χ^2 分 布 表

$$P\{\chi^2(n) > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$$



n	$\alpha=0.995$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75
1	—	—	0.001	0.004	0.016	0.102
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299

续表

n	$\alpha=0.995$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	17.240
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	18.137
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	23.567
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	24.478
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304
33	15.851	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	34.585
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	35.510
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	36.436
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	37.363
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	38.291

$P\{\chi^2(n) > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$　　　　续表

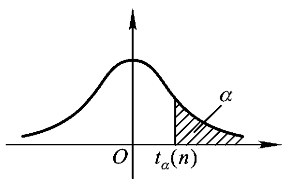
n	$\alpha=0.25$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	6.626	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	10.219	13.362	15.507	17.353	20.090	21.955
9	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	29.339	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	31.528	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275

续表

n	$\alpha=0.25$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
36	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	42.383	48.363	52.192	55.668	59.892	62.883
38	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	46.692	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	47.766	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	48.840	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	49.913	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	50.985	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166

附表4　t 分布表

$$P\{t(n)>t_{\alpha}(n)\}=\alpha$$



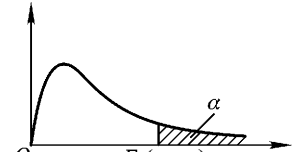
n	$\alpha=0.25$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467

续表

n	$\alpha=0.25$	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896

附表5 F 分布表

$$P\{F(n_1,n_2)>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha$$



$\alpha=0.10$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.45	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63

续表

$\alpha = 0.10$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

$\alpha = 0.05$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71

续表

$\alpha=0.05$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

$\alpha = 0.025$ 续表

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.23	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13

$\alpha=0.025$

续表

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

续表

$\alpha=0.01$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.75	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87

$\alpha = 0.01$

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	3.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

$\alpha=0.005$

续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091	24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359	25465
2	198.5	199.0	199.2	199.2	199.3	199.3	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.4	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5	199.5
3	55.55	49.80	47.47	46.19	45.39	44.84	44.43	44.13	43.88	43.69	43.39	43.08	42.78	42.62	42.47	42.31	42.15	41.99	41.83
4	31.33	26.28	24.26	23.15	22.46	21.97	21.62	21.35	21.14	20.97	20.70	20.44	20.17	20.03	19.89	19.75	19.61	19.47	19.32
5	22.78	18.31	16.53	15.56	14.94	14.51	14.20	13.96	13.77	13.62	13.38	13.15	12.90	12.78	12.66	12.53	12.40	12.27	12.14
6	18.63	14.52	12.92	12.03	11.46	11.07	10.79	10.57	10.39	10.25	10.03	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	16.24	12.40	10.88	10.05	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.69	11.04	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.61	10.11	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.83	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	12.23	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23
12	11.75	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	11.37	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.06	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44
15	10.80	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	10.58	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	10.38	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98

$\alpha = 0.005$　　续表

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
18	10.22	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	10.07	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

$\alpha = 0.001$

续表

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5929*	5981*	6023*	6056*	6107*	6158*	6200*	6235*	6261*	6287*	6313*	6340*	6366*
2	998.5	999.0	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.6	130.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.0	124.5	124.0	123.5
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05	47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40	44.05
5	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.84	28.16	27.64	27.24	26.92	26.42	25.91	25.39	25.14	24.87	24.60	24.33	24.06	23.79
6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.81	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16.89	16.67	16.44	16.21	15.99	15.75
7	29.25	21.69	18.77	17.19	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91	11.70
8	25.42	18.49	15.83	14.39	13.49	12.86	12.40	12.04	11.77	11.54	11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53	9.33
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9.89	9.57	9.24	8.10	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00	7.81
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.92	9.52	9.20	8.96	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94	6.76
11	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.63	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.17	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59	5.42
13	17.81	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	6.80	6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	7.08	6.80	6.58	6.40	6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47	4.31
16	16.12	10.97	9.00	7.94	7.27	6.81	6.46	6.19	5.98	5.81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.23	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	7.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5.32	5.05	4.78	4.63	4.48	4.33	4.18	4.02	3.85

$\alpha = 0.001$　　续表

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84	3.67
19	15.08	10.16	8.28	7.26	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68	3.51
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95	4.70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3.58	3.42	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.86	4.58	4.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89	4.73	4.48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06	2.89
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64	4.48	4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2.99	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57	4.41	4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50	4.35	4.11	3.86	3.60	3.46	3.32	3.18	3.02	2.86	2.69
29	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45	4.29	4.05	3.80	3.54	3.41	3.27	3.12	2.97	2.81	2.64
30	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24	4.00	3.75	3.49	3.36	3.22	3.07	2.92	2.76	2.59
40	12.61	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.64	3.40	3.15	3.01	2.87	2.73	2.57	2.41	2.23
60	11.97	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.87	3.69	3.54	3.31	3.08	2.83	2.69	2.55	2.41	2.52	2.08	1.89
120	11.38	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.02	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	1.95	1.56	1.54
∞	10.83	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.74	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.66	1.45	1.00

* 表示要将所列数乘以 100

附表 6　相关关系显著性检验相关系数临界值表

$n-$ \ α	0.05	0.01	$n-$ \ α	0.05	0.01
1	0.997	1.000	21	0.413	0.526
2	0.950	0.990	22	0.404	0.515
3	0.878	0.959	23	0.396	0.505
4	0.811	0.917	24	0.388	0.496
5	0.754	0.847	25	0.381	0.487
6	0.707	0.834	26	0.374	0.478
7	0.666	0.798	27	0.367	0.470
8	0.632	0.765	28	0.361	0.463
9	0.602	0.735	29	0.355	0.456
10	0.576	0.708	30	0.349	0.449
11	0.553	0.684	35	0.325	0.418
12	0.532	0.661	40	0.304	0.393
13	0.514	0.641	45	0.288	0.372
14	0.497	0.623	50	0.273	0.354
15	0.482	0.606	60	0.250	0.325
16	0.468	0.590	70	0.232	0.302
17	0.456	0.575	80	0.217	0.283
18	0.444	0.561	90	0.205	0.267
19	0.433	0.549	100	0.195	0.254
20	0.423	0.537	200	0.138	0.181

附表 7　正　交　表

(1) 正交表 $L_4(2^3)$

试验号 \ 列号	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

（2）正交表 $L_8(2^7)$

试验号＼列号	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

（3）正交表 $L_{16}(2^{15})$

试验号＼列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

(4) 正交表 $L_{12}(2^{11})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1

(5) 正交表 $L_9(3^4)$

试验号 \ 列号	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

(6) 正交表 $L_{27}(3^{13})$

试验号 \ 列号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2