第一章 命题逻辑

本章的主要内容:

§1.命题及其表示法

§2.联结词

§3.命题公式与翻译

§4.真值表与等价公式

§5.重言式与蕴含式

§6.其它联结词

§7.对偶与范 式

§8.推论理论

§1 命题及其表示

《**定义**》： 具有唯一真值的陈述句叫命题。

说明:

(1)真值分为：真、假;

(2)命题可以是真的，或者是假的，但不能同时为真又为假;

(3)命题分类:

①**原子命题**（简单命题、基本命题、本原命题）：一个命题，**不能分解**成为更简单的命题。

例：我是一位学生。

② **复合命题**：由若干个**原子命题**使用适当的**联结词**所组成的新命题。

例：我是一位学生和他是一位工人。

(4) 命题中所有的“真”用“T”表示（True）；

命题中所有的“假”用“F”表示（False）。

§1 命题及其表示

例：判断下列语句是否为命题。(＊陈述句一般为命题)

(1) 十是整数。 (√，T)

(2) 上海是一个村庄。 (√，F)

(3) 今天下雨。 (√，？)

(4) 加拿大是一个国家。 (√，T)

(5) 2 是偶数而 3 是奇数。 (√，T)

(6) 她不是护士。 (√，？)

(7) 1＋1 0 1＝1 1 0 (√，？)

(8) 今天是星期天。 (√，？)

注：1、祈使句、感叹句、疑问句均不是命题。

例如：(1) 请把门关上!

(2) 你到哪里去?

2、语句既为真，同时又包含假的不是命题，这样的句子称为“**悖论**”。

(3) 他正在说谎。

(在命题逻辑中不讨论这类问题)

§1 命题及其表示

(4)**命题的表示**:

常用大写的26个英文字母A、B、C, …, Z或带下标的大写字母或用数字来表示命题。如A_i、[12]等都可以表示命题。

例. P: 今天下雨　或 [12]:今天下雨

表示命题的符号称为**命题标识符**。

一个命题标识符如表示确定的命题,称之为**命题常量**； 如表示任意的命题，称之为**命题变元**。

命题变元可以表示任意命题, 不能确定其真值, 所以它不是命题。

命题变元P的指派（赋值）：用一个特定的命题取代它， 这时P才能确定其真值，即就成为命题。

§2 联结词

在命题演算中也有类似于日常生活中的联结词，称做“命题联结词”。下面先介绍五个常用的命题联结词。

1．**否定**：（否定运算、非运算）

(1) 符号 ¬，读作“非”，“否定”

设 P 表示一个命题，则在 P 的前面加否定词¬，变成¬P，¬P 读做“P 的否定”或“非 P”。

(2) 定义：（严格由真值表定义）

P	¬P
T	F
F	T

(3) 举例：

如 P：北京是一座城市，则 ¬P：北京不是一座城市。（F）

如 Q：每一种生物均是动物(F)，则 ¬Q：有一些生物不是动物。（T）

（这里¬Q 不能说成“每一种生物都不是动物”，此为假命题）

注:以上第2个例子是对**量化命题**的否定，这里“每一种”为量词，“是”为动词。

这时除对动词进行否定外，还要对量词加以否定。

§2 命题联结词

2．合取（又称为“积”运算、“与”运算）

(1)符号：“$\wedge$”

（2）设P、Q为两个命题，则$P \wedge Q$称为P与Q的合取，读作“P与Q”、“P与Q的合取”、“P并且Q”等。

（3）定义（由真值表给出）：

P	Q	$P\wedge Q$	$Q\wedge P$
F	F	F	F
F	T	F	F
T	F	F	F
T	**T**	**T**	**T**

当且仅当P和Q的真值均为“T”时，$P \wedge Q$的真值为“T”。否则，其真值为“F”。

注意： 1) P和Q是互为独立的，地位平等;

2) P和Q的位置可以交换而不会影响$P \wedge Q$的结果。

§2 命题联结词

例：(a) P：王华的成绩很好，Q：王华的品德很好，则

P∧Q：王华的成绩很好并且品德也很好。

(b) P：我们去种树，Q：房间里有一台电视机，则

P∧Q：我们去种树且房间里有一台电视机。

(c) P：今天下大雨，　Q：3+3=6，则

P∧Q：今天下大雨和3+3=6。

注：由例(b)、(c)可见，在日常生活中，合取词应用在两个有关联性的命题之间。而在逻辑学中，合取词可以用在两个毫不相干的命题之间。

(d) 下列语句不是合取联结词组成的命题：

P: 王大和王二是亲兄弟。

Q: 他打开箱子然后（而后）拿出一件衣服来。

§2 命题联结词

3．析取（“或”运算）

（1）符号“∨”

设P、Q为两个命题，则P∨Q称为P与Q的“析取”，读作“P或Q”。

（2）定义（由真值表给出）：

P	Q	P∨Q
F	**F**	**F**
F	T	T
T	F	T
T	T	T

当且仅当P、Q均为“F”时，（P∨Q）为“F”。否则，其真值为“T”.

说明： 这里的“析取”与汉语中的“或”意义**不全相同**：汉语中的”或”可表示“可兼或”，也可表示“不可兼或（异或，排斥或）”；而这里的析取词为可兼或，即P和Q均为“T”时（P∨Q）为“T”。

例如：以下各命题中的“或”均为“可兼或”:

(1)灯泡有故障或开关有故障。 (2)今晚写字或看书。 (3)今天下雨或打雷。

§2 命题联结词

“不可兼或”中当P和Q均为“ T ”或者“ F ”时，则 “ P异或Q ”为 “ F ”。(§6)

（异或用 “▽” 表示）

P	Q	P▽Q
F	**F**	**F**
F	T	T
T	F	T
T	**T**	**F**

例：

(1) 他通过电视看杂技**或**到剧场看杂技。

(2) 他乘火车去北京**或**乘飞机去北京。

以上两句中的“或”均为 “不可兼或” 。

4．条件：（“蕴含”）

（1）符号“→”，读作：“如果…,则…”、“蕴含”。

（2）P、Q为两个命题，“P→Q”为一个新的命题，读作：“如果P，则Q”，“P蕴含Q”，“P仅当Q”，“Q当且P”，“P是Q的充分条件”。

（3）定义

P	Q	P→Q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

注:①当P为“T”，Q为“F”时，则P→Q为“F”；否则P→Q均为“T”。

②P：称为前件、条件、前提、假设；　Q：称为后件、结论。

（4）举例：

(a) P：我拿起一本书，Q：我一口气读完了这本书，则

P→Q：如果我拿起一本书，则我一口气读完了这本书。

(b) P：月亮出来了，　Q：3×3=9，则

P→Q：如果月亮出来了，则3×3=9。

§2 命题联结词

(a) P→Q：如果我拿起一本书，则我一口气读完了这本书。

(b) P→Q：如果月亮出来了，则3×3=9。

注：通常称：(a)为**形式条件命题**——前提和结果有某种形式和内容上的联系。(b)为**实质条件命题**——前提和结果可以有联系，也可以没有联系，只要满足条件命题的定义。

所有形式条件命题一定是实质条件命题，反之不一定。

这里的条件联结词“→”联结的是实质条件命题。

例：P：我买到了鱼；Q:我吃鱼。则

P→Q：如果我买到了鱼，则我吃鱼。

但命题“如果我没买到鱼，则我吃鱼”，这在日常生活中是不可能的，但在单条件命题的定义中则是允许的。

§2 命题联结词

可以证明：

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$$

原命题　　逆否命题

$$Q \to P \Leftrightarrow \neg P \to \neg Q$$

逆命题　　反命题

列出真值表,由真值表得：原命题⇔逆否命题；逆命题⇔反命题。

P	Q	P→Q	¬Q→¬P	Q→P	¬P→¬Q
F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T
T	T	T	T	T	T

§2 命题联结词

5．双条件联结词（“等价”词、“同”联结词、“等同”词）

（1）符号“↔”：

设P、Q为两个命题，则P↔Q读作：“P当且仅当Q”，“P等价Q”,“P是Q的充分必要条件”。

（2）定义（见真值表）：

P	Q	P↔Q
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

注: 每当P和Q的真值相同时，则（P↔Q）的真值为“T”，否则（P↔Q）的真值为“F”。

§2 命题联结词

（3）**举例**：

（a）设P：△ABC是等腰三角形，Q：△ABC有两只角相等，则

$P \leftrightarrow Q$：△ABC是等腰三角形当且仅当△ABC中有两只角相等。

（b）下面均为等价联结词：

- 春天来了当且仅当燕子飞回来了。
- 平面上二直线平行，当且仅当这二直线不相交。
- $2+2=4$ 当且仅当雪是白色的。

（4）$P \leftrightarrow Q$中，P与Q的地位是平等的，P与Q交换位置不会改变真值表中的值。

（5）P当且仅当Q:　　$P \leftrightarrow Q$

P仅当Q:　　$P \rightarrow Q$

P当且Q:　　$Q \rightarrow P$ （只有P才Q）

§2 命题联结词

6．命题联结词在使用中的优先级

（1）先括号内，后括号外。

（2）如一个命题中含多个联结词，则运算时联结词的优先次序为：¬、∧、∨、→、↔（由高到低）。

（3）同一联结词按从左到右的次序进行运算。

例： ¬P∨（Q∨R）可省去括号，因为“∨”运算是可结合的。

（¬P∨Q）∨R 可省去括号，因为符合上述规定；

而 P→（Q→R）中的括号不能省去，因为“→”不满足结合律。

（4）最外层的括号一律均可省去：

（P→Q∨R）可写成 P→Q∨R

内容回顾：

- (1)命题的定义：具有唯一真值的陈述句

  真值：真(T)，假(F)；原子命题、复合命题
- (2)命题的符号化表示
- (3)联结词：用于联结两个(原子)命题的关系词
- (4) 5个基本的联结词：

  ① 否定 $\neg$；

  ② 合取 $\wedge$（当且仅当P和Q的真值均为“T”时，$P\wedge Q$的真值为“T”。否则，其真值为“F”）；

  ③ 析取 $\vee$（当且仅当P和Q的真值均为“F”时，$P\vee Q$的真值为“F”。否则，其真值为“T”），它是可兼或；

  ④ 单条件 $\rightarrow$（当且仅当P为“T”和Q为“F”时，$P\rightarrow Q$的真值为“F”。否则，其真值为“T”）；

  ⑤ 双条件 $\leftrightarrow$（当P和Q的真值相同时，则（$P\leftrightarrow Q$）的真值为“T”，否则为“F”）
- (5)联结词的优先级（由高到低）：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$(由高到低)。

§2 命题联结词

7．命题联结词小结：

(1)五个联结词的含义与日常生活中的联结词的含义大致相同。

(2)“或”分为可兼或（∨）和异或（▽）（不可兼或）。

(3) 除“¬”为一元运算外，其余四个均为二元运算。

(4)“→”分为形式条件命题和实质条件命题；当前件真值为“F”时，不论后件的真值怎样，则单条件命题的真值均为“T”。

(5)命题联结词是命题或命题之间的联结词，而不是名词之间、数字之间和动词之间的联结词。

§2 命题联结词

以上介绍了五种常用的联结词及其相应的复合命题。数理逻辑的特点是把**逻辑演算或推理**转化成类似数学推理或演算的完全形式化的**逻辑演算**。为此，首先要把演算中所涉及到的各**命题符号化**。

命题符号化的步骤如下：对给定的命题，

①找出该命题中所有原子命题，并分别符号化(用字母表示)。

②确定该命题中各联结词，把原子命题逐个联结起来。

§2 命题联结词

例. 将下列命题符号化:

（1）李明是计算机系的学生，他住在312室或313室。

（2）张三和李四是朋友。

（3）虽然交通堵塞，但是老王还是准时到达了车站。

（4）只有一个角是直角的三角形才是直角三角形。

（5）老王或小李中有一个去上海出差。

解：（1）李明是计算机系的学生，他住在312室或313室

用字母表示原子命题（或简单命题）：

P：李明是计算机系的学生，Q：李明住在312室，R：李明住在313室，则该命题符号化为:

$$P\wedge（Q\bigtriangledown R）$$

（2）“张三和李四是朋友”是一个简单句，该命题符号化为：P

§2 命题联结词

（3）虽然交通堵塞，但是老王还是准时到达了车站。

用字母表示简单命题：

P：交通堵塞，Q：老王准时到达了车站，则该命题符号化为：

$P \wedge Q$。

（4）只有一个角是直角的三角形才是直角三角形。（P当且Q）

用字母表示简单命题：

P：三角形的一个角是直角，Q：三角形是直角三角形，则该命题符号化为：

$Q \rightarrow P$ 或 $\neg P \rightarrow \neg Q$。

（5）老王或小李中只有一个人去上海出差。

用字母表示简单命题：

P：老王去上海出差，Q：小李去上海出差，则该命题符号化为：

$P \bigtriangledown Q$。

也可符号化为：

$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 或者 $(P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q)$

§2 命题联结词

以下句式均可符号化为$P\rightarrow Q$:

* (1)如P，则Q;
* (2)因为P，所以Q;
* (3)只要P，就Q;
* (4)P仅当Q;
* (5)只有Q，才P；(Q当且P)
* (6)除非Q，才P;
* (7)除非Q，否则非P。

§3 命题公式与翻译

两个约定:

（1）对命题，只关注它的真假值，而不再去注重命题的具体汉语意义。

（2）对命题联结词，只关注真值表的定义，而不注意它在日常生活中的含义。

1．命题公式

命题常元(量)：表示确定的命题，此时它有确定的真值｛T，F｝。

命题变元：没有指定真值的变元，或取值为真或假的变元。常用大写的英文字母A、B、…、Z等来表示。

一般地，**命题公式是**由命题常元、变元、联结词、括号，以规定的格式联结起来的**字符串**。但并不是所有由命题变元、常元、联结词、括号组成的字符串都能成为命题公式。

例如：$\neg(P \vee Q)$，$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$，$(P\wedge Q)\leftrightarrow R$，P都是命题公式；而$(P\rightarrow)$，$(P\vee\neg)$都不是命题公式。

那么，**什么样的字符串才是命题公式?**

§3 命题公式与翻译

《**定义**》：命题演算的**合式公式**（wff, well formed formula,或**命题公式**),规定为：

1)单个命题变元是一个命题公式。

2)若A是命题公式，则¬A也为命题公式。

3)若A、B是命题公式，则（A∧B）、（A∨B）、（A→B）、（A↔B）均为命题公式。

4)当且仅当有限次使用1)、2)、3)所生成的公式才是命题公式。

注：一般地，命题公式没有真假值，仅当其中的命题变元用确定的命题代入时才成为命题。

命题变元的赋值

§ 4 真值表与等价公式

1. 命题公式的真值表：

命题变元用特定的命题来取代，这一过程称为对该命题变元进行**指派（或赋值）**。

命题公式可以含有若干个命题变元，所以它也可以看成是一个以真假值为定义域和真假值为值域的一个**函数**。可 写成 $y = f(x)$。

例如： 公式 $P \to (Q \to R)$ 定义三元函数：

$Y(P，Q，R)$: $P \to (Q \to R)$

《**定义**》：对命题公式A，把它在所有命题变元的所有可能指派（赋值）之下所取得的值而列成的表格称为**A的真值表**。

构造命题公式真值表的步骤如下：

1)确定命题公式中所有的命题变元，列出所有可能的**赋值组**。

2)按照从低到高（或由内向外）的顺序写出命题公式的各层次（或子公式）。

3)对每组赋值，求命题公式各层次的值，直到最后得到整个命题公式的值。

§4真值表与等价公式

例1．构造命题公式¬（（P∨Q）∧P）的真值表：

P	Q	P∨Q	（P∨Q）∧P	¬（（P∨Q）∧P）
F	F	F	F	T
F	T	T	F	T
T	F	T	T	F
T	T	T	T	F

例2．构造命题公式P∨（Q∧R）的真值表

P	Q	R	Q∧R	P∨(Q∧R)
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T	F	T
T	T	F	F	T
T	T	T	T	T

由以上二例可见，2个命题变元有4组真值指派；3个命题变元有$2^3=8$组真值指派。

一般地，n个变元则有个2^n组真值指派。

§ 4真值表与等价公式

2. 等价公式

《**定义**》：设A和B是两个命题公式，如果对命题变元的任意一组指派(即对公式中命题变元的指派）A和B的真值均相同，则称A与B是**逻辑等价的**，亦说A（B）等价于B（A），记作：$A \Leftrightarrow B$。

"$\Leftrightarrow$"不能写成"="

例：$P \vee \neg P \Leftrightarrow Q \vee \neg Q \Leftrightarrow T$。

P	Q	$P \vee \neg P$	$Q \vee \neg Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	T	T

§4 真值表与等价公式

例：判断命题公式A：(P∨¬Q)∧(P∨Q) 与B：(P∨¬R)∧(P∨R)是否等价。

解： 列出两个命题公式的真值表：

P	Q	R	¬Q	**P∨¬Q**	**P∨Q**	¬R	**P∨¬R**	**P∨R**	A	B
F	F	F	T	T	F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F	F	F	T	F	F
F	T	F	F	F	T	T	T	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	F	T	T	T	T

§ 4 真值表与等价公式

常见的15组等价公式：

(1) **双重否定律:**

$\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(2) **幂等律：**

$P \vee P \Leftrightarrow P$； $P \wedge P \Leftrightarrow P$

(3) **交换律:**

$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P$

(4) **结合律:**

$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$。

(5) **分配律:**

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(6) **摩根律:**

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(7) **吸收律:**

$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$； $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

(8) **蕴含律:**

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

(9) **等价律:**

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

(10) **零　律:**

$P \vee T \Leftrightarrow T$； $P \wedge F \Leftrightarrow F$

(11) **同一律:**

$P \vee F \Leftrightarrow P$； $P \wedge T \Leftrightarrow P$

(12) **否定（或互补）律:**

$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$； $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

(13) **输出律:**

$P \wedge Q \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

(14) **归缪律:**

$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$

(15) **逆反律:**

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

§4 真值表与等价公式

说明:

（1）上述15组等价公式的证明均可用真值表法证明，也可以采用以下方法证明：先将$\Leftrightarrow$改为$\leftrightarrow$，再对所得的命题公式证明其为永真式(**§5**)。

（2） 由于$\wedge$、$\vee$、$\leftrightarrow$均满足结合律，所以在**仅含有**{$\wedge$、$\vee$、$\leftrightarrow$}中一个联结词的命题公式中，括号可以省去。

（3）每个等价模式实际给出了无穷多个同类型的具体的命题公式。

例如： $\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$,

$\neg((P\wedge Q) \vee (R\wedge S)) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \wedge \neg(R \wedge S)$,

$\neg((P\rightarrow Q) \vee \neg R) \Leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q) \wedge \neg\neg R$

置换

§ 4真值表与等价公式

3．置换

《定义》：给定一命题公式B，其中P_1、P_2、…、P_n是B的原子命题变元，若

(1)用某些命题公式代替B中的某些原子命题变元;

(2)当用命题公式A_i代替P_i时，必须用A_i代替B中<u>所有的同一个</u>P_i;

由此而得到的新的命题公式A称为命题公式B的**<u>代换实例</u>**，这样的变换称为**置换。**

例1 设B：$\underline{P}\rightarrow(\neg Q\land \underline{P})$。若用$(R\leftrightarrow S)$代换B中的P，得

A：$(\underline{R\leftrightarrow S})\rightarrow(\neg Q\land(\underline{R\leftrightarrow S}))$

是B的代换实例，而

A′：$(R\leftrightarrow S)\rightarrow(\neg Q\land P)$

不是B的代换实例。

例2．$P\rightarrow\neg Q$的代换实例有：$(R\land\neg S)\rightarrow\neg M$，$(R\land\neg S)\rightarrow P$，$Q\rightarrow\neg(P\rightarrow\neg Q)$等。

所以，一个命题公式的代换实例**有无限个**。

说明：(1)置换时用命题公式<u>只能代换**原子命题变元**</u>，而<u>不能去代换复合命题公式</u>(子公式)。

(2) 在置换时要用命题公式同时代替公式中<u>所有的同一个原子命题变元</u>。

§4 真值表与等价公式

下面讨论置换规则：

《**定义**》：给定一命题公式A，A′是A的任意一个部分，若A′本身也是一个命题公式，则称A′是A的**子公式**。

例：设有命题公式A：$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee (R \wedge \neg S))$，则A的子命题公式有：

P、Q、R、$\neg S$、$P \vee Q$、$R \wedge \neg S$、$Q \vee (R \wedge \neg S)$、$(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee (R \wedge \neg S))$ 等。

《**定理**1-4.1》：给定一命题公式A，A′是A的子公式。设B′是一命题公式，若A′⇔B′，并用B′置换A中的A′时得到一新的命题公式B，则A⇔B。这样的置换称为**等价置换**。

证明：只要说明对所有命题变元的任意一组指派，命题公式A与B的真值相同即可。

对所有命题变元的任意一组指派，命题公式A的子公式A′的真值与命题公式B′的真值相同，而当用B′置换A中的子公式A′时A中其它部分没有发生变化，从而在此指派下其它部分的真值没有变化，所以用B′置换A中的A′时所得到命题公式B与原命题公式A的真值相同。此表明，对命题变元的任意一组指派，命题公式A与B的真值相同，即有A⇔B。

从定理可见：一个命题公式A，经**多次等价置换**后所得到的新公式与原公式等价。

§4 真值表与等价公式

例：证明：$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$（输出律）。

证明：$P\rightarrow(\underline{Q\rightarrow R})\Leftrightarrow P\rightarrow(\underline{\neg Q\vee R})$（蕴含律）

$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee R)$（蕴含律）

$\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)\vee R$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$（蕴含律）

例：证明：

$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R)\Leftrightarrow T$

证明：$((P\vee Q)\wedge\underline{\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R))})\vee\underline{(\neg P\wedge\neg Q)}\vee\underline{(\neg P\wedge\neg R)}$

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(\underline{P\vee(Q\wedge R)}))\vee\underline{\neg(P\vee Q)}\vee\underline{\neg(P\vee R)}$

摩根律：$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$，$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$

双重否定律：$\neg\neg P\Leftrightarrow P$

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(\underline{P\vee Q})\wedge(\underline{P\vee R}))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$

分配律：$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

$\Leftrightarrow(\underline{(P\vee Q)\wedge(P\vee R)})\vee\neg(\underline{(P\vee Q)\wedge(P\vee R)})$

幂等律：$P\wedge P\Leftrightarrow P$

$\Leftrightarrow T$

否定（或互补）律：$P\vee\neg P\Leftrightarrow T$

§5 重言式与蕴含式

《**定义**》：设命题公式A中有n个不同的原子命题变元$P_1,\ldots,P_n$ (n为正整数)。该变元组的任意一组确定的值($u_1,\ldots,u_n$)(即指派)称为A关于$P_1,\ldots,P_n$的一个**完全指派**，其中u_i或为T，或为F。如果对于A中部分变元赋以确定值，其余变元没有赋以确定的值，则这样的一组值称为公式A的关于该变元组的**部分指派**。

《**定义**》：凡使公式A取"真"的指派称为A的**成真指派**；取"假"的指派称为A的**成假指派。**

《定义》：如果一个命题公式的**所有完全指派**均为**成真指派**，则该公式称为**重言式**或**永真式**。如果一个命题公式的**所有完全指派**均为**成假指派**，则该公式称为**矛盾式**或**永假式**。既不是永真式，又不是永假式，则称此命题公式是**可满足式。**

注：①永真式或永假式都是命题公式；

②永真式的否定为永假式（¬T为F）；永假式的否定为永真式（¬F为T）。

内容回顾：

1、命题公式的定义：

2、命题公式的真值表及其画法；

3、两个命题公式的等价（？）

4、15个常用的等价公式

5、命题公式的子公式（？）

6、命题公式的置换、等价置换（？）

7、命题公式的指派（完全指派、部分指派；成真指派、成假指派）（？）

8、重言式或永真式、矛盾式或永假式（？）

§5 重言式与蕴含式

定理1-5.1 两个重言式的析取或合取为永真式。

定理1-5.2 一个重言式, 对其中的同一变元（或子公式）都用任何一个合式公式置换, 结果仍为重言式。

例1 证明：$((\underline{P \vee S) \wedge R}) \vee \neg((\underline{P \vee S) \wedge R})$ 为重言式。

定理1-5.3 设A与B是两个命题公式，则 $A \Leftrightarrow B$ 的充要条件是命题 $A \leftrightarrow B$ 为重言式。

证明:

(1)充分性：如命题 $A \leftrightarrow B$ 为重言式，即对命题变元的任意一组指派，$A \leftrightarrow B$ 均为真，此表明命题公式A和B有相同的真值，所以 $A \Leftrightarrow B$。

(2)必要性：如 $A \Leftrightarrow B$，即对命题变元的任意一组指派，命题公式A和B有相同的真值，所以 $A \leftrightarrow B$ 为永真式。

说明:

1) "$\Leftrightarrow$"为等价关系符，$A \Leftrightarrow B$ 表示命题A和B有等价关系。$A \Leftrightarrow B$ 不为命题公式;

2) "$\leftrightarrow$"为等价联结词（运算符），A、B为命题公式，则（$A \leftrightarrow B$）也为一命题公式。

§5 重言式与蕴含式

例1：证明：$\neg\neg P \Leftrightarrow P$； $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$。

证明：真值表法----列出命题公式的真值表，检查所有指派下相应双条件命题的真值。

P	Q	$\neg\neg P \leftrightarrow P$	$P\rightarrow Q \leftrightarrow \neg P\vee Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	T	T

注:由定理知，对命题公式A、B和C，有：

1) $A \Leftrightarrow A$；（自反性）

2)若 $A \Leftrightarrow B$，则 $B \Leftrightarrow A$；（对称性）

3)若 $A \Leftrightarrow B$， $B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$。（传递性）

所以，命题公式之间的等价是一个等价关系。

例2 证明：$\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$。

证明：由真值表即可得证。

P	Q	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P\vee\neg Q$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	F	F

§5 重言式与蕴含式

定义1-5.3：命题公式P称为**蕴含**命题公式Q，当且仅当命题公式$P \rightarrow Q$是一个重言式，记作：$P \Rightarrow Q$。

说明：1) “$P \Rightarrow Q$”读作 “P蕴含Q”， “P能推得Q”。

2)“$\Rightarrow$”是关系符，$A \Rightarrow B$ 不为命题公式。

例：证明：$P \Rightarrow P \vee Q$； $P \wedge Q \Rightarrow P$。

证明：只要证明$P \rightarrow (P \vee Q)$和$(P \wedge Q) \rightarrow P$均为重言式或永真式。

证明： **方法1： 真值表法**

P	Q	$P \rightarrow (P \vee Q)$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	T	T

方法2：等价演算法

$P \rightarrow (P \vee Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (P \vee Q)$ （蕴含律）

$\Leftrightarrow T$（结合律、否定律、零律）

$(P \wedge Q) \rightarrow P$

$\Leftrightarrow \neg (P \wedge Q) \vee P$ （蕴含律）

$\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee P$

$\Leftrightarrow T$（交换律、结合律、否定律、零律）

否定律：$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$

零律：$P \vee T \Leftrightarrow T$； $P \wedge F \Leftrightarrow F$

§5重言式与蕴含式

<u>证明永真蕴含式的三种方法</u>:

(1) 把"⇒"关系符改为"→"联结词，证明<u>所得命题公式为永真式</u>。

(a)真值表法;

(b)命题等价演算法。

(2) 找出使条件命题的<u>前件为"T"</u>的<u>所有真值指派</u>，看能否导致<u>后件亦均为"T"</u>，若为"T"，则永真蕴含关系成立。

P	Q	P→Q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

← 排除此情况

例 证明：$P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$。

证明：使前件$P\wedge(P\rightarrow Q)$为"T"的所有指派必定使P和（$P\rightarrow Q$）均为"T"；而$P\rightarrow Q$为"T"时，由于P为"T"，所以Q也应为"T"，即在此指派下后件Q也为"T"。于是$P\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow Q$成立。

§5 重言式与蕴含式

(3) 找出使条件命题的后件均为“F”的所有真值指派，看前件所对应的真值是否也为“F”，若是，则永真蕴含关系成立。

例 证明：$\neg Q \land (P \to Q) \Rightarrow \neg P$

证明：使得后件$\neg P$为“F”的指派必使得P的真值为“T”。再由前件得

(i) 若Q为T，则$\neg Q \land (P \to Q)$真值为“F”；

(ii) 若Q为F，则$P \to Q$为“F”，从而$\neg Q \land (P \to Q)$真值也为“F”；

此表明，使后件$\neg P$为“F”的指派，前件$\neg Q \land (P \to Q)$的真值均为“F”，所以$\neg Q \land (P \to Q) \Rightarrow \neg P$成立。

说明：（1）若后件简单则可选用(3)；若前件简单则可选用(2)。

（2）两种方法是互为独立的，证明时只需使用其中一种即可。

§5 重言式与蕴含式

下面给出常用的13个永真蕴含(**Implication**)式：

I_1： $P\wedge Q \Rightarrow P$， $P\wedge Q \Rightarrow Q$

I_2： $P \Rightarrow P\vee Q$， $Q \Rightarrow P\vee Q$

I_3： $\neg P \Rightarrow P\rightarrow Q$

I_4： $Q \Rightarrow P\rightarrow Q$

I_5： $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow P$

I_6： $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

I_7： $P\wedge(P\rightarrow Q) \Rightarrow Q$

I_8： $(P\rightarrow Q)\wedge\neg Q \Rightarrow \neg P$

I_9： $\neg P\wedge(P\vee Q) \Rightarrow Q$

I_{10}： $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow (P\rightarrow R)$

I_{11}： $(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow R$

I_{12}： $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S) \Rightarrow (P\wedge R\rightarrow Q\wedge S)$

I_{13}： $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow (P\leftrightarrow R)$

§5 重言式与蕴含式

定理1-5.4：设A、B是两个命题公式，则$A \Leftrightarrow B$的充分必要条件是$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$。

证明：若$A \Leftrightarrow B$，则$A \leftrightarrow B$为重言式。由于

$$(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$$

所以$(A \rightarrow B)$和$(B \rightarrow A)$均为重言式，即$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$成立。

反之，若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$，则$A \Leftrightarrow B$也成立。

注：此定理把“$\Leftrightarrow$”和“$\Rightarrow$”之间建立了相应的关系。

蕴含的一些性质：

(1)给定命题公式A、B。若$A \Rightarrow B$且A为重言式，则B亦为重言式。

(2)给定命题公式A、B及C。若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$，则$A \Rightarrow C$，即蕴含关系具有传递性。

证明：因为$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$，所以$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C)$为重言式，由$I_{10}$：$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$和(1)知$(A \rightarrow C)$也为重言式，即$A \Rightarrow C$成立。

§5 重言式与蕴含式

《推论》：若 $A \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \ldots, B_m \Rightarrow B$，则 $A \Rightarrow B$。

(3) 给定命题公式A、B及C。若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow (B \land C)$。

证明：因为 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$，所以（$A \rightarrow B$）∧（$A \rightarrow C$）为重言式.

由条件，对命题变元的任意指派，若A为T，则B、C均为T，即 $B \land C$ 为T，从而 $A \rightarrow (B \land C)$ 也为T；

若A为F，则 $B \land C$ 不论取怎样的真值，$A \rightarrow (B \land C)$ 均为T。

所以，$A \Rightarrow (B \land C)$。

注：上述也可用等价公式来证明。因为

$$(A \rightarrow B) \land (A \rightarrow C)$$

$$\Leftrightarrow (\neg A \lor B) \land (\neg A \lor C) \Leftrightarrow \neg A \lor (B \land C) \Leftrightarrow A \rightarrow (B \land C)$$

所以，当（$A \rightarrow B$）∧（$A \rightarrow C$）为重言式时，$A \rightarrow (B \land C)$ 是也为重言式，从而 $A \Rightarrow (B \land C)$ 成立。

(4)若 $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$，则 $(A \vee C) \Rightarrow B$。

证明 由条件知 $A \to B$ 和 $C \to B$ 均为重言式， 即 $(\neg A \vee B)$ 和 $(\neg C \vee B)$ 均为重言式，从而 $(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B)$ 为重言式。又因为

$$(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg C) \vee B \Leftrightarrow \neg(A \vee C) \vee B \Leftrightarrow A \vee C \to B,$$

所以 $A \vee C \to B$ 为重言式, 从而 $(A \vee C) \Rightarrow B$。

注： 设 $H_1, H_2, \ldots, H_m, Q$ 均为命题公式，若

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m) \Rightarrow Q,$$

则称 H_1、H_2、….、H_m **共同蕴含** Q，并记作：

$$H_1, H_2, \ldots, H_m \Rightarrow Q。$$

§5 重言式与蕴含式

《定理》：若 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots H_m)$，$P \Rightarrow Q$，则

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots H_m) \Rightarrow (P \rightarrow Q)。$$

证明：由于

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge P) \rightarrow Q$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge P) \vee Q$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m) \vee (\neg P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m) \vee (P \rightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots\ldots \wedge H_m \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

所以，当 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge P) \rightarrow Q$ 为永真式时，

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots\ldots \wedge H_m \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

也为永真式，从而

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots\ldots \wedge H_m) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$$

成立。

§6 其他联结词

¬、∧、∨、→、↔

除了前面介绍的5个联结外,还有4个有用的联结词.

1．其他命题联结词:

(1) 不可兼析取（不可兼或，异或，异）：

(a)符号:“∇”（$\oplus$），$P\nabla Q$，读作“P 异或Q”

(b)定义:（由真值表）

即当且仅当P和Q的真值不相同时，$P\nabla Q$的真值为T。

P	Q	$P\nabla Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

(c)异或的性质：

(1) $P\nabla Q \Leftrightarrow Q\nabla P$ （可交换的）

(2) $(P\nabla Q)\nabla R \Leftrightarrow P\nabla(Q\nabla R)$（可结合的）

(3) $P\wedge(Q\nabla R) \Leftrightarrow (P\wedge Q)\nabla(P\wedge R)$

（$\wedge$对∇ 可分配的）

(4) $P\nabla Q \Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)\vee(\neg Q\wedge P) \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$

(5) $P\nabla Q \Leftrightarrow \neg(P\leftrightarrow Q)$

(6) $P\nabla P \Leftrightarrow F$, $F\nabla P \Leftrightarrow P$, $T\nabla P \Leftrightarrow \neg P$, $P\nabla\neg P \Leftrightarrow T$。

§6 其他联结词

定理1-6.1 若 $P \nabla Q \Leftrightarrow R$，则有

$P \nabla R \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R \nabla P$，$R \nabla Q \Leftrightarrow P \Leftrightarrow Q \nabla R$，$P \nabla Q \nabla R \Leftrightarrow F$。

证明：
$$
\begin{aligned}
P \nabla R &\Leftrightarrow P \nabla (P \nabla Q) \\
&\Leftrightarrow (P \nabla P) \nabla Q \\
&\Leftrightarrow F \nabla Q \\
&\Leftrightarrow Q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P \nabla Q \nabla R &\Leftrightarrow P \nabla (Q \nabla R) \\
&\Leftrightarrow P \nabla P \\
&\Leftrightarrow F
\end{aligned}
$$

§6 其他联结词

(2)“与非”联结词:

(a)符号“↑”，（$P\uparrow Q$）读作：“P与Q的否定”或“P与非Q”

(b)定义：（由真值表）

$(P\uparrow Q)\Leftrightarrow\neg(P\wedge Q)$

P	Q	$P\uparrow Q$	$P\wedge Q$
F	F	T	F
F	T	T	F
T	F	T	F
T	T	F	T

(c) **性质:**

$(P\uparrow Q)\Leftrightarrow(Q\uparrow P)$；

$(P\uparrow P)\Leftrightarrow\neg P$；

$(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)\Leftrightarrow(P\wedge Q)$；

$(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)$；

$P\uparrow(Q\uparrow R)\Leftrightarrow\neg P\vee(Q\wedge R)$； $(P\uparrow Q)\uparrow R\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee\neg R$；

------------- ↑不可结合的

$P\uparrow T\Leftrightarrow\neg P$，$P\uparrow F\Leftrightarrow T$。

内容回顾：

1、重言式（？）及性质：

2、蕴含式（？）、证明永真蕴含式的三种方法

3、13个永真蕴含式、蕴含式的性质；

4、其它联结词：不可兼析取∇、与非↑的定义与性质。

§6 其他联结词

（3）“或非”联结词：

(a)符号：“↓”

（P↓Q）读作：“P或Q的否定”或“P或非Q”

(b)定义（由真值表给出）

P	Q	P↓Q	P∨Q
F	F	T	F
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	F	T

（P↓Q）⇔¬（P∨Q）

(c)性质：

P↓Q⇔Q↓P；（可交换的）

P↓P⇔¬P；

（P↓Q）↓（P↓Q）⇔P∨Q；

（P↓P）↓（Q↓Q）⇔P∧Q；

P↓（Q↓R）⇔¬P∧（Q∨R）；(P↓Q）↓R⇔（P∨Q）∧¬R；

------------ ↓不可结合的

P↓F⇔¬P；　P↓T⇔F。

(c) 性质：

（P↑Q）⇔（Q↑P）；

（P↑P）⇔¬P；

（P↑Q）↑（P↑Q）⇔（P∧Q）；

（P↑P）↑（Q↑Q）⇔（P∨Q）；

P↑(Q↑R)⇔¬P∨(Q∧R）；

(P↑Q)↑R⇔(P∧Q)∨¬R；

------------- ↑不可结合的

P↑T⇔¬P，P↑F⇔T。

注：由↑和↓的性质可见，它们是**互为对偶的**。

§6 其他联结词

(4)“条件否定”联结词：

(a)符号：“$\xrightarrow{c}$”

(b)定义

（由真值表给出）：

$$P \xrightarrow{c} Q \Leftrightarrow \neg(P \to Q)$$

P	Q	$P \xrightarrow{c} Q$	$P \to Q$
F	F	F	T
F	T	F	T
T	F	T	F
T	T	F	T

九个联结词：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$、$\leftrightarrow$、∇、$\uparrow$、$\downarrow$、$\xrightarrow{c}$。

§6 其他联结词

2. 不同真值表的命题公式

根据命题公式的定义（或生成规则），用联结词可组成无限多个命题公式。那么这些**命题公式可分为多少种不同的类型或有多少种不同的真值表?**

(a)若命题变元只有一个P，则用联结词组成的命题公式有四种不同的真值表，即为:

P	永假
F	F
T	F

P	永真
F	T
T	T

P	P
F	F
T	T

P	¬P
F	T
T	F

它们分别为永假F、永真T、P、¬P。所有仅含一个命题变元P的命题公式均等价于这四个中的某一个。

(b)若有两个命题变元P、Q，则命题公式的不同真值表个数为：$2^{2^2}=2^4=16$种，即所有含有两个命题变元的命题公式有16种不同的类型。

一般地，若有n个命题变元，则不同真值表的个数为2^{2^n}种，即所有含有n个命题变元的命题公式有2^{2^n}种不同的类型。

§6 其他联结词

3. 关于联结词的总结：

前面已定义了五个基本联结词：¬、∧、∨、→、↔ 及其它四个其他联结词，于是就可以定义数理逻辑的一个符号系统，它们包括：

命题变元：A、B、…、X、Y、Z

真值：F、T

运算符：¬、∧、∨、→、↔、∇、↑、↓、$\xrightarrow{C}$

括号：( )

关系符：⇔ 、⇒

4．全功能联结词集合：

《**定义**》：对一个由若干联结词组成的集合，如果任意一个命题公式在均可用其中联结词等价地表达出来，则称此联结词集合为**全功能联结词集合**。

《**定义**》：设有一联结词集合S，若

(1) S为全功能联结词集合；

(2) 若从S中删除任一个联结词后得到一个新的联结词集合S′，则至少有一个命题公式B不能用S′中的联结词等价地表示出来，（**最小性**）

那么称S为**最小的全功能联结词集合**。

§6 其他联结词

可以证明： {¬, ∨}; {¬, ∧}; {¬, →}; {¬, $\xrightarrow{c}$}; {↑}; {↓}均为全功能联结词集合，且也均是最小的全功能联结词集合。

例： 分别用上述最小全功能联结词集合中的联结词表达命题公式：

$P \to Q$。

解

$$
\begin{aligned}
P \to Q &\Leftrightarrow \neg P \vee Q && \{\neg, \vee\} \\
&\Leftrightarrow \neg\neg(\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) && \{\neg, \wedge\} \\
P \to Q &\Leftrightarrow \neg\neg(P \to Q) && \{\neg, \to\} \\
&\Leftrightarrow \neg(P \xrightarrow{c} Q) && \{\neg, \xrightarrow{c}\}
\end{aligned}
$$

$(P{\downarrow}Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$

$$
\begin{aligned}
P \to Q &\Leftrightarrow \neg\neg(\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow ((P{\downarrow}P){\downarrow}Q){\downarrow}((P{\downarrow}P){\downarrow}Q) && \{\downarrow\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P \to Q &\Leftrightarrow \neg\neg(\neg P \vee Q) \\
&\Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q) \\
&\Leftrightarrow P{\uparrow}(Q{\uparrow}Q) && \{\uparrow\}
\end{aligned}
$$

$(P{\uparrow}Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

§7 对偶与范式

定义1-7.1 给定两个命题公式A和A^*，若用∧代换∨、用∨代换∧、用T代换F、用F代换T后可由一个命题公式得到另一个命题公式，则称A和A^*是**互为对偶的**，而联结词∧和∨也是互为对偶的。

"与非↑"和"或非↓"的性质是成对的，即它们是互为对偶的

例：写出下列命题公式的对偶式：

(1) A： P∨（Q∧R），对偶式A^*： P∧（Q∨R）。

(2) P∨F⇔P， P∧T⇔P；（同一律）

P∨T⇔T， P∧F⇔F。（零律）

说明：

(1) 若命题公式中含有→，↔等其它联结词，则必须把它**等价转化成**由联结词∧、∨、¬组成的等价命题公式，然后求它的对偶式。

例：求(P→Q)∧(P→R)的对偶式。

(2)在写对偶式时，原命题公式中括号不能省去，必须按优先级的次序画上括号，而在求其对偶式时仍将保留相应的括号。

例：（P∧Q）∨R对偶式写成（P∨Q）∧R，而不能写成P∨Q∧R。

§ 7 对偶与范式

定理1-7.1（推广的摩根定理）

设命题公式A和A^*互为对偶式，P_1、P_2、．．．．、P_n是出现在A和A^*中的所有原子命题变元，则有：

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \qquad (1)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \qquad (2)$$

证明：由摩根定理

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \qquad (1)$$

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \qquad (2)$$

将否定¬移到每个命题变元的前面即得证。

不难看出：一个命题公式的否定等价于它的对偶式，且用变元的否定替换每一个变元。

§ 7 对偶与范式

例：设 $A(P, Q, R) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg(Q \vee R)$，验证上述定理。

证明：(1)由于 $A(P, Q, R) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$，故有

$$\neg A(P, Q, R) \Leftrightarrow \underline{P \vee Q \vee R}。$$

另一方面，有

$$A^*(P, Q, R) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee \neg R,$$

$$A^*(\neg P, \neg Q, \neg R) \Leftrightarrow \underline{P \vee Q \vee R},$$

所以 $\neg A(P, Q, R) \Leftrightarrow A^*(\neg P, \neg Q, \neg R)$

（2）由于 $A(\neg P, \neg Q, \neg R) \Leftrightarrow \underline{P \wedge Q \wedge R}$，所以

$$\neg A^*(P, Q, R) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow \underline{P \wedge Q \wedge R}$$

从而有 $A(\neg P, \neg Q, \neg R) \Leftrightarrow \neg A^*(P, Q, R)$。

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

§ 7 对偶与范式

定理1-7.2 若二个命题公式互为等价，则它们的对偶式也互为等价，亦即若 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$ 成立。

证明：对任意两个命题公式A和B，若 $A \Leftrightarrow B$，要证明 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

设 P_1、P_2、…、P_n 是出现在A和B中的所有原子命题变元。由 $A \Leftrightarrow B$，即 $A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 知

$$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n)。$$

又由摩根推广定理有

$\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$

$A(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

$$A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \Leftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n),$$

即 $A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \leftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$ 为永真式。

由于永真式的代换实例仍为永真式，所以用 $\neg P_i$ 代换 A^* 和 B^* 中的 P_i $(1 \le i \le n)$ 后所得

$$A^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n) \leftrightarrow B^*(\neg\neg P_1, \neg\neg P_2, \ldots, \neg\neg P_n)$$

仍为永真式，即

$$A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

为永真式。所以

$$A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)。$$

§7 对偶与范式

例：证明：

（1）$\neg(P\wedge Q)\rightarrow(\neg P\vee(\neg P\vee Q)) \Leftrightarrow (\neg P\vee Q)$，

（2）$(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge(\neg P\wedge Q)) \Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)$。

证明：

（1）左边$\Leftrightarrow \neg\neg(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow \underline{(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)}$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg P\vee Q)\wedge(Q\vee\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\vee Q)$。

（2）左边$\Leftrightarrow \underline{(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge Q)}$

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge\neg P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P\wedge Q)$

幂等律：$P\vee P\Leftrightarrow P$；$P\wedge P\Leftrightarrow P$

同一律：$P\vee F\Leftrightarrow P$；$P\wedge T\Leftrightarrow P$

否定律：$P\vee\neg P\Leftrightarrow T$；$P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$

零　律：$P\vee T\Leftrightarrow T$；$P\wedge F\Leftrightarrow F$

结论：（1）和（2）是互为对偶的。

§7 对偶与范式

如何判定命题公式为永真式、永假式和可满足的呢？或两个命题公式等价？归纳有三种方法：

（1）**真值表法**：对于变元的所有真值指派，看对应命题公式的真值。

（2）**命题演算方法**：化简命题公式至最简式，看它是否与（P∨¬P）或（P∧¬P）等价，若是，则为永真式或永假式；若不是，则为可满足的。

（3）**范式方法**：下面介绍此法。

什么叫范式？

把命题公式化等价地归为一种**标准的形式**，称此标准形式为**范式**。

什么叫判定？

通过有限次的命题演算来决定命题公式是否为永真式、永假式，还是可满足式，或者判定两个命题公式是否等价等这样的一类问题，统称为**判定问题**。

讨论范式和主范式的目的就是为了进行判定。

§7 对偶与范式

1．析取范式和合取范式：

设有命题变元P、Q、R，则命题公式$P \vee Q \vee \neg R$称为析取式或“和”；$P \wedge \neg Q \wedge R$称为合取式或“积”。

《**定义**》：命题变元或其否定的合取或积称为**合取式或基本积**，而变元或其否定的析取或和称为**析取式或基本和**。

例：两个命题变元P、Q的析取式或基本和有

$$P \vee P，Q \vee Q，P \vee Q，\neg P \vee Q，P \vee \neg Q，\neg Q \vee \neg P；$$

合取式或基本积有

$$P \wedge P，Q \wedge Q，P \wedge Q，\neg P \wedge Q，P \wedge \neg Q，\neg Q \wedge \neg P。$$

定义： 析取式（“基本和”）或合取式（“基本积”）中的子公式称为它的**因子**。

例：合取式$\neg Q \wedge P \wedge \neg P$的因子有：

$\neg Q$、P、$\neg P$、$\neg Q \wedge P$、$P \wedge \neg P$、…。

§7 对偶与范式

《**定理**》：一个**合取式或基本积是永假式**的充分必要条件是它至少包含一对**互为否定的**因子。

证明：（ⅰ）充分条件：若 P、¬P 为基本积中一对互为否定的因子，则该基本积一定为永假式，这是因为

$$((P\wedge\neg P)\wedge(\ldots))\Leftrightarrow(F\wedge(\ldots))\Leftrightarrow F.\text{(零律)}$$

（ⅱ）必要条件：若基本积为永假式，则基本积中必包含一对因子P、¬P。这是因为，假设**基本积**中不包含互为否定的因子P、¬P，而它为永假式。

若给基本积中的命题变元指派“T”，而否定的命题变元指派为“F”，由于在基本积中不包含互为否定的因子P、¬P，所以在这样的指派下基本积的真值为“T”，这和假设相矛盾。从而基本积中必然包含P、¬P这一对因子才能使基本积为“F”。

《**定理**》：一个**析取式或基本和必为永真式**的充要条件（当且仅当）是，它至少包含一对**互为否定的**因子。

《**定义**》：一个命题公式的等价公式，如果是由基本积之和组成（即合取式的析取），则称它为该命题公式的**析取范式**，并记为：

$$A\Leftrightarrow A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_n\ (n\in I_+)\ 。$$

其中A_1，A_2，．．．，A_n均为**合取式或基本积**。

§7 对偶与范式

说明:

如何求命题公式的析取范式? 可按下列三步或四步进行:

（1）利用等价公式对联结词“→”、“↔”等进行转化，把命题公式变为仅用{¬，∧，∨}表达的等价公式。

例: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，

$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$。

（2）将“¬”等价地移到原子命题变元之前，并使变元之前最多只有一个“¬”词。

例: $\neg(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg\neg P \wedge \neg\neg Q \Leftrightarrow P \wedge Q$。

（3）利用“∧”对“∨”的分配律，将公式化成为等价的析取范式。

（4）除去永假项得**最简析取范式**。（同一律）

§7 对偶与范式

例：求$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$的析取范式。

解：$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$

$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\wedge(P\wedge Q))\vee(\neg\neg(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))$

----- (1) 化去↔词

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$

----- (2) 将"¬"深入到变元前面，并最多保留一个¬

$\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee((P\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)$

$\vee(\neg P\wedge Q)\vee(Q\wedge\neg Q))$

----- (3) "∧"对或"∨"的分配，化成为析取范式

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

----- (4) 除去永假项得最简析取范式

注：一般地，求命题公式的析取范式即是**求其最简析取范式**。

§7 对偶与范式

说明：

（1）从上例看出，一个命题公式的析取范式不是唯一的，但同一命题公式的析取范式一定是等价的。

（2）若一个命题公式的析取范式中每一个合取式或基本积均为永假式，则该命题公式也一定为永假式。即若

$A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$（$A_1$，$A_2$, …, A_n均为合取式或基本积），

则当$A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A_n \Leftrightarrow F$ 时，A一定为永假式。

(可用来判定是否为永假式)

例： $P \leftrightarrow \neg P$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge P)$

$\Leftrightarrow F$ -------永假式

前内容回顾：

1、其他联结词：与非、条件否定；

2、命题公式的不同类型或不同真值表的个数

3、（最小）全功能联结词集合；

4、对偶与对偶公式；推广的摩根定理；

5、等价的命题公式，对偶公式也等价；

6、范式、判定；

7、合取式、析取式；合取式为永假、析取式为永真的充要条件；

8、析取范式、求命题公式析取范式的步骤。

§7 对偶与范式

定义1-7.3：一个命题公式的等价公式，如果它是由析取式或基本和的**合取**或积所组成（即**析取式的合取**），则称它是该命题公式的**合取范式**。

合取范式可表示成：

$$Q \Leftrightarrow Q_1 \wedge Q_2 \wedge \ldots \wedge Q_n,\ (n \in I_+),$$

其中$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$均为**析取式或基本和**。-----总体合取、部分析取

求一个命题公式的合取范式的方法与求析取范式的方法相似：

第(1)、(2)步与求析取范式相同；

(3)利用“∨”对“∧”的分配律化为等价的合取范式；

(3)利用“∧”对“∨”的分配律化为等价的析取范式。

(4)去掉永真的析取项得**最简合取范式**。（同一律）

(4)除去永假的合取项得**最简析取范式**。（同一律）

（1）利用等价公式对联结词“→”、“↔”等进行转化，把命题公式变为仅用{¬，∧，∨}表达的等价公式。

（2）将“¬”等价地移到原子命题变元之前，并使变元之前最多只有一个“¬”词。

§7 对偶与范式

例： 求$Q\vee\neg(P\rightarrow Q)\vee\neg(P\vee Q)$的合取范式。

解： 原式$\Leftrightarrow Q\vee\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg(P\vee Q)$

——化去“→”词

$\Leftrightarrow Q\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

——“¬”深入到变元前，并最多保留一个

$\Leftrightarrow((Q\vee P)\wedge(Q\vee\neg Q))\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

——“∨”对“∧”的分配

$\Leftrightarrow(Q\vee P)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$

$\Leftrightarrow(Q\vee P\vee\neg P)\wedge(Q\vee P\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow T$（最简合取范式）

§7 对偶与范式

说明：

（1）命题公式的合取范式不是唯一的，但同一命题公式的合取范式一定是等价的。（上例中的最后两个公式都是合取范式）

（2）若一个命题公式的合取范式中的各析取式或基本和的真值均为"T"，则该命题公式一定是永真式。

(可用来判定是否为永真式)

例： $(P \leftrightarrow P) \Leftrightarrow (\neg P \vee P) \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow T$。

对一个命题公式，什么样的析取范式或合取范式是唯一的?

--------主析取范式或主合取范式

§7 对偶与范式

2．主析取范式

《**定义**》：在由n个变元组成的合取式或基本积中，若每个变元及其否定不能同时出现，且两者之一必须出现且仅出现一次，则称此合取式为**小项或布尔合取**。

n个变元的小项格式：_∧_∧ … ∧_ .

例：1) 对一个命题变元讲，小项有$2^1=2$个，即：P、¬P。

2) 对二个命题变元讲，小项有$2^2=4$个，即：P∧Q、¬P∧Q、P∧¬Q、¬P∧¬Q。

3) 对三个命题变元讲，小项有$2^3=8$个，分别为：

P∧Q∧R、P∧Q∧¬R、P∧¬Q∧R、P∧¬Q∧¬R、¬P∧Q∧R、¬P∧Q∧¬R、¬P∧¬Q∧R、¬P∧¬Q∧¬R。

一般地，n个命题变元可构成2^n个不同的小项（$n\in I_+$）。

注：（1）对任意一个小项，共有2^n个指派，使其**真值为T**的指派或赋值仅有一个；

（2）对任意一个指派，在2^n个小项中只有一个小项的真值为T，其余小项真值均为F。

§7 对偶与范式

例：两个变元的小项有$2^2=4$个，分别为：$P\wedge Q$、$P\wedge\neg Q$、$\neg P\wedge Q$、$\neg P\wedge\neg Q$，它们的真值表为

P	Q	$P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge Q$	$\neg P\wedge\neg Q$	
F	F	F	F	F	T	$\neg P\wedge\neg Q$
F	T	F	F	T	F	$\neg P\wedge Q$
T	F	F	T	F	F	$P\wedge\neg Q$
T	T	T	F	F	F	$P\wedge Q$

- 没有两个小项是等价的；
- 对每个小项，使其真值为T的指派只有一个（这是合取式本身的特点）。
- 对命题变元的任意一组指派，均对应一个真值为“T”的小项：当变元真值为F时，该变元在小项中以其否定出现；当变元真值为T时，该变元在小项中以其本身出现。

n个命题变元的指派对应一个小项；反之，n个命题变元的小项也对应一个指派。

§7 对偶与范式

小项的编码：若真值T和F分别记为“1”和“0”，则使得小项的真值为1的命题变元的真值指派称为**该小项的编码**。

例：对三个命题变元P、Q、R，其8个小项的真值表为：

P	Q	R	$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$	$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$	$\neg P\wedge Q\wedge R$	$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	$P\wedge\neg Q\wedge R$	$P\wedge Q\wedge\neg R$	$P\wedge Q\wedge R$
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

各小项的编码分别为：

$m_{000}\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$, $m_{001}\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q\wedge R$, $m_{010}\Leftrightarrow\neg P\wedge Q\wedge\neg R$, $\cdots$, $m_{111}\Leftrightarrow P\wedge Q\wedge R$。

注：对一个小项，其变元对应1，变元的否定对应0，即可得其编码。

§7 对偶与范式

注：二进制编码也可以转为十进制，如

$m_{000}=m_0, m_{001}=m_1, m_{010}=m_2, \ldots, m_{111}=m_7.$

小项的性质：

（1）每个小项当其真值指派与编码相同时，其真值为T，而在其余指派下均为F。

（2）任意两个小项的合取式为永假的。

例如

$$m_{001}\wedge m_{100} \Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\wedge(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$$
$$\Leftrightarrow \neg P\wedge P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg R$$
$$\Leftrightarrow F。$$

（3）全体小项的析取式或和为**永真的**，即

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee\cdots\vee m_{2^n-1}\Leftrightarrow T$$

§7 对偶与范式

定义1-7.5：对一个命题公式的析取范式，如它仅由小项的析取组成，则称它为该命题公式的**主析取范式**。

如何求命题公式的主析取范式?

（1）真值表法求命题公式的主析取范式

定理1-7.3：在命题公式的真值表中，真值为T的指派所对应的小项的析取，即为该命题公式的主析取范式。

证明 设命题公式A的真值为T的指派所对应的所有小项为$m_1,m_2,\ldots,m_k$，它们的析取记为B，只需证明$B \Leftrightarrow A$，即对命题变元的任意一组指派，A与B的真值相同。

1）对使A的真值为T的一个指派，其对应的小项为m_i，则在该指派下m_i的真值为T，而其它小项的真值均为F，故由B的定义知B的真值也为T。

2）对使A的真值为F的指派，这些指派所对应的小项不可能出现在m_1，$m_2,\ldots,m_k$中，即在该指派下m_1, m_2，$\ldots,m_k$均为F，从而B也是F。

注：真值表中命题公式的真值为“T”的个数等于主析取范式中小项的个数。

§7 对偶与范式

例： 求$P\rightarrow Q$、$P\vee\neg Q$、$\neg(P\wedge Q)$、$P\wedge\neg Q$的主析取范式。

解： 各命题公式的真值表为

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$P\wedge\neg Q$	指派所对应的小项
F	F	T	T	T	F	$\neg P\wedge\neg Q$
F	T	T	F	T	F	$\neg P\wedge Q$
T	F	F	T	T	T	$P\wedge\neg Q$
T	T	T	T	F	F	$P\wedge Q$

则它们的主析取范式分别为：

$$P\rightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge Q)$$

$$P\vee\neg Q \Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$$

$$\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$$

$$P\wedge\neg Q \Leftrightarrow (P\wedge\neg Q)$$

§7 对偶与范式

说明:

1）只要命题公式不是永假式，则一定可以根据该命题公式的真值表直接写出它的主析取范式，其**方法是**：找出该公式真值为“T”的所有行，对应地写出各小项，然后将它们析取即可，且这种**表示是唯一的**。

2）若命题公式是含有n个变元的**永真式**，则它的主析取范式一定含有所有2^n个小项。

3）若两个命题公式对应的**主析取范式相同**，则这两个命题公式一定是**等价的**。

4）命题公式的主析取范式中小项的个数一定等于其对应真值表中真值为“T”的个数。

§7 对偶与范式

(2) 命题演算的方法

利用等价公式进行演算，分四步:

1）求命题公式的**析取范式**;

2）除去永假项，合并合取式或基本积中相同的因子（例：$P\wedge P\wedge Q\Leftrightarrow P\wedge Q$），变为**最简析取范式**;

3）如在某合取式中没有出现命题变元P，则通过添加(析取)项($P\vee\neg P$）并使用合取对析取的分配律将所有合取式变为小项。

例：两个变元P、Q，利用"∧"对"∨"的分配律添加项。

$P\Leftrightarrow P\wedge(Q\vee\neg Q)$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$，

$Q\Leftrightarrow Q\wedge(P\vee\neg P)$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)$。

4）合并相同的小项变为一项。

例：求（P∧（P→Q））∨Q的主析取范式。

解：原式⇔（P∧¬P）∨（P∧Q）∨Q

---- (1) 化为析取范式

⇔（P∧Q）∨Q

---- (2) 消去永假项，变为最简析取范式

⇔（P∧Q）∨（Q∧（P∨¬P））-----添加(P∨¬P)

⇔（P∧Q）∨（P∧Q）∨（¬P∧Q）

---利用∧对∨的分配律

⇔（P∧Q）∨（¬P∧Q）

---- (4) 合并相同的小项

§7 对偶与范式

例： 证明$P\vee(\neg P\wedge Q)\Leftrightarrow P\vee Q$

证明： 求两个命题公式的主析取范式，看它们是否相同。

$$
\begin{aligned}
&P\vee(\neg P\wedge Q)\\
&\Leftrightarrow((Q\vee\neg Q)\wedge P)\vee(\neg P\wedge Q)\\
&\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
P\vee Q&\Leftrightarrow(P\wedge(Q\vee\neg Q))\vee(Q\wedge(P\vee\neg P))\\
&\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\\
&\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)
\end{aligned}
$$

因为主析取范式相同，所以$P\vee(\neg P\wedge Q)\Leftrightarrow P\vee Q$。

§7 对偶与范式

3. 主合取范式

定义1-7.6：在n个变元的析取式或基本和中，若每个变元与其否定不同时出现，且两者之一必须出现且仅出现一次，则称这种析取式为**大项或布尔析取**。

n个变元的大项格式：_ ∨__∨… ∨__。

例：两个变元P,Q的大项有2^2=4个：

P∨Q、P∨¬Q、¬P∨Q、¬P∨¬Q。

若有n个变元，则有2^n个大项（$n \in I_+$）。

§7 对偶与范式

大项的编码：若对命题变元，真值T和F分别记为"1"和"0"，则使得大项真值为0的一组真值指派称为**大项的编码**。

例：对三个命题变元P、Q、R，其8个大项的真值表为

P	Q	R	$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$	$\neg P\vee\neg Q\vee R$	$\neg P\vee Q\vee\neg R$	$\neg P\vee Q\vee R$	$P\vee\neg Q\vee\neg R$	$P\vee\neg Q\vee R$	$P\vee Q\vee\neg R$	$P\vee Q\vee R$
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

各大项的编码分别为：

$M_{000}=P\vee Q\vee R$, $M_{001}=P\vee Q\vee\neg R$, $M_{010}=P\vee\neg Q\vee R$, …, $M_{111}=\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$.

注：对一个大项，其变元对应0，变元的否定对应1，即得其编码Q（使大项的真值为0的指派）。

§7 对偶与范式

注：二进制编码也可以转为十进制，如

$M_{000}=M_0, M_{001}=M_1, M_{010}=M_2, \ldots, M_{111}=M_7.$

大项的性质：

（1）每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为F，其余指派下均为T。

（2）任意两个大项的析取式为永真的。

例如

$$M_{001} \vee M_{100} = (P \vee Q \vee \neg R) \vee (\neg P \vee Q \vee R)$$
$$\Leftrightarrow P \vee \neg P \vee Q \vee \neg R \vee R$$
$$\Leftrightarrow T。$$

（3）全体大项的合取式为永假的，即

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$$

§7 对偶与范式

定义1-7.7：一个命题公式的等价公式，仅由大项的合取组成，则称此等价公式为原命题公式的**主合取范式**。

如何求一个命题公式的主合取范式?

（1）真值表法

定理1-7.4：在真值表中，使命题公式的真值为F的指派所对应大项的**合取**，即为此公式的**主合取范式**。

注：真值表中命题公式的真值为“F”的个数等于主合取范式中大项的个数。

§7 对偶与范式

例：分别求出（P∨Q）、¬（P∧Q）、（P∧Q）、（P→Q）的主合取范式。

解：四个命题公式的真值表为

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$
F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	F	F
T	T	T	F	T	T

小项	大项
$\neg P \wedge \neg Q$	$P \vee Q$
$\neg P \wedge Q$	$P \vee \neg Q$
$P \wedge \neg Q$	$\neg P \vee Q$
$P \wedge Q$	$\neg P \vee \neg Q$

于是，各公式的主合取范式分别为：

$(P \vee Q) \Leftrightarrow (P \vee Q)$ -----主合取范式

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ ---主析取范式

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ -----主合取范式

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ ------主析取范式

$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ ------主析取范式

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ -----主合取 范式

$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ -----------主合取范式

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$ -----主析取范式

§7 对偶与范式

讨论：

(1)命题公式的主合取范式中大项的个数等于其真值为“F”的个数。**由真值表找大项的方法为：**找出命题公式真值为“F”的所有指派，写出对应的大项，将它们取**合取**即得。

(2)只要命题公式不是永真式，则一定可以写出与其等价的唯一的主合取范式。

(3)若命题公式为含有n个变元的永假式，则主合取范式为所有2^n个大项的合取。

(4)可用主合取范式判定二个命题公式是否等价。

(5)已知一个命题公式的主析取范式，则一定可以**直接写出**与其等价的主合取范式来；反之也行。

(只要将其中的变元写成否定、变元的否定写成变元、析取与合取互换，最后对所得的公式再取否定------**推广的摩根定理**)

例： $P\vee\neg Q\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$ -------主析取范式

$\Leftrightarrow\neg((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$ ------**推广的摩根定理**

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\wedge Q)\Leftrightarrow P\vee\neg Q$------------主合取范式

(6) 含n个变元的命题公式，有

主析取范式小项数＋主合取范式大项数＝2^n。

对应命题公式的真值为T

对应命题公式的真值为F

(这是因为，在命题公式的真值表中，其真值为T和F的总个数即为命题变元指派的个数)

§7 对偶与范式

（2）命题演算的方法

1）将命题公式转换为等价的**合取范式**;

2）去掉真值为“T”的析取项和去掉析取项中相同变元且只保留一个，得到等价的**最简合取范式**;

3）如有析取项不是大项，则添加(合取)项（$P\wedge\neg P$）使得**析取项均变为大项**;

例如：P、Q为二个变元，则

$$P\Leftrightarrow P\vee(Q\wedge\neg Q)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)。$$

（4）合并相同的大项，保留一项。

§7 对偶与范式

例： 求 $P\wedge(P\rightarrow Q)\vee Q$ 的主合取范式。

解： 原式 $\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)\vee Q$ ------**消去→**

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee Q$

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge Q$ -------**合取范式**

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(Q\vee(\neg P\wedge P))$

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge((Q\vee\neg P)\wedge(Q\vee P))$

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)$ -------主合取范式

前内容回顾：

1、合取式、析取式，析取范式、合取范式；

2、小项、n个变元的小项个数；小项的编码、小项的性质；

3、主析取范式，如何求主析取范式(真值表法和命题演算法)；

4、大项、n个变元的大项个数；大项的编码、大项的性质；

5、主合取范式，如何求主合取范式(真值表法和命题演算法)。

§7 对偶与范式

4．主范式排序（列）后的唯一性

为了确保主范式的唯一性，还需要做以下两个处理：

（a）将各命题变元按大写字母的顺序进行排列；

（b）将所有小项或大项按编码由小到大的次序进行排列。

(1) 小项与主析取范式

对于有 n 个变元的命题公式，则最多可有2^n个小项，用m_0、m_1、⋯、m_{2^n-1}来表示。

例：对三个变元的小项（8个）进行排序。设三个变元为 P、Q、R，它们已按字母的顺序排序，则所有小项的排序为

$m_{(i)}$	十进制数	二进制数	小项表示
$m_{(0)}$	0	000	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
$m_{(1)}$	1	001	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$
$m_{(2)}$	2	010	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$
$m_{(3)}$	3	011	$\neg P \wedge Q \wedge R$
$m_{(4)}$	4	100	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
$m_{(5)}$	5	101	$P \wedge \neg Q \wedge R$
$m_{(6)}$	6	110	$P \wedge Q \wedge \neg R$
$m_{(7)}$	7	111	$P \wedge Q \wedge R$

小项与编码之间的相互表示:

对一个小项，变元对应1、变元否定对应0，即得其编码；反之亦然。

§7 对偶与范式

例：设有5个命题变元P_0,P_1,P_2,P_3,P_4（次序已定），则必可写出$2^5=32$个小项。

例如，小项$m_{(11)_{十}}$和$m_{(18)_{十}}$分别为

$m_{(11)_{十}} \Leftrightarrow m_{(01011)_{二}} \Leftrightarrow (\neg P_0 \wedge P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3 \wedge P_4)$，

$m_{(18)_{十}} \Leftrightarrow m_{(10010)_{二}} \Leftrightarrow (P_0 \wedge \neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3 \wedge \neg P_4)$。

这样，可得<u>求小项$m_{(i)_{十}}$的方法</u>:

(a)把$(i)_{十}$变换成等价的$(J_0,J_1\ldots J_{n-1})_{二}$，

(b)由二进制写出对应的小项：0对应变元否定，1对应变元，最后取合取。

例：求命题公式$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$的编码表达式（设P、Q、R次序已定）。

解：原式$\Leftrightarrow (\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

$\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)$ ----**主析取范式**

$\Leftrightarrow m_{(001)_{二}} \vee m_{(011)_{二}} \vee m_{(111)_{二}} \vee m_{(110)_{二}}$

$\Leftrightarrow m_{(1)_{十}} \vee m_{(3)_{十}} \vee m_{(7)_{十}} \vee m_{(6)_{十}}$

$\Leftrightarrow \sum m_1,m_3,m_7,m_6$

$\Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7}$。

§7 对偶与范式

（2）大项和主合取范式

对 n 个变元，最多有2^n个大项，用M_0、M_1、…、M_{2^n-1}表示。求大项的方法：

(a)把$_{(i)_{十}}$变换成等价的$(J_0,J_1...J_{n-1})_{二}$；

(b)由二进制数写出对应的大项：0对应变元，1对应变元否定，最后取析取。

例： 求（P∧Q）∨（¬P∧R）的大项编码表示（设P、Q、R次序已定）。

解： 原式⇔（P∨Q∨R）∧（P∨¬Q∨R）∧（¬P∨Q∨R）

∧（¬P∨Q∨¬R）------**主合取范式**

$\Leftrightarrow M_{(000)_{二}} \wedge M_{(010)_{二}} \wedge M_{(100)_{二}} \wedge M_{(101)_{二}}$

$\Leftrightarrow M_{(0)_{十}} \wedge M_{(2)_{十}} \wedge M_{(4)_{十}} \wedge M_{(5)_{十}}$

$\Leftrightarrow \prod M_0,M_2,M_4,M_5$

$\Leftrightarrow \prod_{0,2,4,5}$

注： 一个命题公式的小项和大项的编码表示是互补的！

在上例中，（P∧Q）∨（¬P∧R）$\Leftrightarrow \sum_{1,3,6,7} \Leftrightarrow \prod_{0,2,4,5}$

§7对偶与范式

例： 写出（P ∨ ¬Q）的主析取范式和主合取范式的编码表示。

解： 命题公式的真值表为

P	Q	P ∨¬Q
F	F	T
F	T	F
T	F	T
T	T	T

每个指派对应的小项

¬P ∧ ¬Q

¬P ∧ Q

P ∧¬Q

P ∧ Q

每个指派对应的大项

P ∨ Q

P ∨ ¬Q

¬P ∨ Q

¬P ∨¬Q

由真值表得

$P\vee\neg Q\Leftrightarrow\sum_{0,2,3}\Leftrightarrow\prod_{1}$

$\sum_{0,1,3}\Leftrightarrow\prod_{1}$

于是，主析取范式为：

$$(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q),$$

主合取范式为：P ∨¬Q，

且 $P\vee\neg Q\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(P\wedge Q)$。

§7 对偶与范式

5．主范式的个数

在介绍联结词总结时讲到：

一个原子命题变元有四个不同的真值表（2^{2^1}个）；

二个原子命题变元有16个不同的真值表（2^{2^2}个）；

一般地，若有 n 个变元，则可构成2^{2^n}个不同的真值表。

于是，得到以下**结论**：

对于 n 个原子命题变元，必定可写出2^{2^n}个不同的主范式；若排除永真式或永假式，则实际可写出（$2^{2^n}-1$）个主析取（或主合取）范式。

§8 推理理论

定义：如按公认的一些推理规则，从前提集合中推导出一个结论，这样的推导过程称为**演绎**，或者叫**形式证明**。

在任何演绎中，若认定前提是真的，则称从前提集合出发根据逻辑规则推导出的结论为**合法的**。

根据逻辑规则推导出来的任何合法的结论称为**有效结论**。

推理规则：指确定论证有效性的**前提或判据**。

注：**推理（论）规则**通常用命题公式的形式来表示，而不涉及实际命题和它的真值。

逻辑推理的方法，归纳分成三类：

（一）真值表法；

（二）推理规则法；

（三）间接证明法。

这里，真值表法的主要依据是"→"的真值表定义。即：

若 $P \Rightarrow Q$ 当且仅当（$P \to Q$）为永真式。

P	Q	P→Q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

§8 推理理论

一、真值表法

《**定义**》：给定两个命题公式A和B，当且仅当A→B是一个永真式（即A⇒B，A蕴含B）时才可以说B是从A推导出来的，或称B是前提A的**有效结论**。

《**定义**》：设H_1，$H_2,\ldots,H_m$，C都是命题公式，当且仅当$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \Rightarrow$C，才可以说C是前提集合$\{H_1, H_2,\ldots,H_m\}$的**有效结论**。

真值表法又分为两种：

（1）检查真值表中H_1，$H_2,\ldots H_m$全部为"T"的所有行，看结论C是否也均为"T"，若C均为"T"，则结论C是有效的，否则结论是无效的。

（2）看结论C为"F"的所有行，检查每行看前提H_1，$H_2, \ldots H_m$中是否至少有一个为F，若有"F"，则结论是有效的；否则结论是无效的。

§8 推理理论

例：判别下列结论是否有效：

（1）$P, P \to Q \Rightarrow Q$；（2）$P \to Q, \neg P \Rightarrow Q$

（3）$P \to Q, \neg(P \land Q) \Rightarrow \neg P$；

（4）$\neg P, P \leftrightarrow Q \Rightarrow \neg(P \land Q)$；（5）$P \to Q, Q \Rightarrow P$。

解：各命题公式的真值表为

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \land Q)$	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	F
T	F	F	F	T	T	F
T	T	T	F	F	F	T

由真值表可见，（1）、（3）、（4）是有效的，而（2）、（5）是无效的。

例：H_1：如果大连是一个大城市，则大寨是一个乡村；$P \to Q$

H_2：大寨是一个乡村；Q

C：大连是一个大城市；P

则：$P \to Q, Q \Rightarrow P$ 是无效的；或者说，P 不能从前提集合中推导出来。

§8 推理理论

二、推理规则法

在逻辑推理中，只讨论命题论证的有效性，而不去讨论命题的真假值，所以推理规则不需要用到真值表，也不需要对命题进行真值指派。

推理规则的依据是常用的16个永真蕴含式和22个等价公式。

(1) 16个常见的蕴含式:

I_1 : $P \wedge Q \Rightarrow P$

I_2 : $P \wedge Q \Rightarrow Q$

I_3 : $P \Rightarrow P \vee Q$

I_4 : $Q \Rightarrow P \vee Q$

I_5 : $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_6 : $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_7 : $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

I_8 : $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

I_9 : $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$

I_{10} : $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$

I_{11} : $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$

I_{12} : $\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$

I_{13} : $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$

I_{14} : $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$

I_{15} : $A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$

I_{16} : $A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$

§8推理理论

（2）22个常见的等价式：

E_1 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

E_2 $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

E_3 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

E_4 $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

E_5 $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

E_6 $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

E_7 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

E_8 $\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

E_9 $\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

E_{10} $P \vee P \Leftrightarrow P$

E_{11} $P \wedge P \Leftrightarrow P$

E_{12} $R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$

E_{13} $R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$

E_{14} $R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow T$

E_{15} $R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow F$

E_{16} $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

E_{17} $\neg (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

E_{18} $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

E_{19} $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$

E_{20} $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

E_{21} $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

E_{22} $\neg (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \leftrightarrow \neg Q$

§8 推理理论

下面再介绍两个规则：

P规则：在推导过程的任何一步都可以引入前提（条件）。

T规则：在推导过程中，如果前面有一个或多个公式**永真蕴含S**，则可以把S引入推导过程之中。

例1：证明：$P\to Q, Q\to R, P\Rightarrow R$。

证明: 步骤 推理过程 规则 根据

步骤	推理过程	规则	根据
(1)	$P\to Q$	P	
(2)	P	P	
(3)	Q	T (1)(2)	I
(4)	$Q\to R$	P	
(5)	R	T(3)(4)	I

也可以这样推理：

(1)	$P\to Q$	P	
(2)	$Q\to R$	P	
(3)	$P\to R$	T(1)(2)	I
(4)	P	P	
(5)	R	T(3)(4)	I

所以$P\to Q, Q\to R, P\Rightarrow R$成立。

例2 证明：$(P\vee Q), (P\to R), (Q\to S)\Rightarrow S\vee R$。

证明：

(1)	$P\vee Q$	P	
(2)	$\neg P\to Q$	T (1)	E_{16}
(3)	$Q\to S$	P	
(4)	$\neg P\to S$	T(2)(3)	I_6
(5)	$\neg S\to P$	T(4)	E_{18}
(6)	$P\to R$	P	
(7)	$\neg S\to R$	T(5)(6)	I_6
(8)	$S\vee R$	T(7)	E_{16}

所以$(P\vee Q), (P\to R), (Q\to S)\Rightarrow S\vee R$。

§8 推理理论

下面引进附加前提的证明规则CP：

CP规则：如果能从Q（附加前提）和给定的前提集合P推导出R，则就能从前提集合P推导出（$Q \to R$），即

如 $(P, Q \Rightarrow R)$，则 $P \Rightarrow (Q \to R)$。

例1：$P \to (Q \to S)$，$\neg R \vee P$，$Q \Rightarrow R \to S$。

证：

(1)	R	附加前提	
(2)	$\neg R \vee P$	P	
(3)	$R \to P$	T(2)	E
(4)	P	T(1)(3)	I
(5)	$P \to (Q \to S)$	P	
(6)	$Q \to S$	T(4)(5)	I
(7)	Q	P	
(8)	S	T(6)(7)	I
(9)	$R \to S$	CP	

所以 $P \to (Q \to S)$，$\neg R \vee P$，$Q \Rightarrow R \to S$ 成立。

例2：$P \to Q \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$。

证明：

(1)	P	附加前提	
(2)	$P \to Q$	P	
(3)	Q	T(1)(2)	I
(4)	$P \wedge Q$	T(1)(3)	I
(5)	$P \to (P \wedge Q)$	CP	

所以 $P \to Q \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$ 成立。

§8 推理理论

三、间接证明法（反证法、归谬法）

《**定义**》对给定的命题公式H_1、H_2、…、H_m，若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m$为永真的，则称命题公式集合$\{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$是一致的。否则（即$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m$为永假的）称$\{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$是非一致的。

《**定理**》设命题公式集合$\{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$是一致的，C是一个命题公式。如果前提集合$\{H_1, H_2, \ldots, H_m, \neg C\}$是非一致的($\neg C$ 称为假设前提)，则一定有$H_1, H_2, \ldots, H_m \Rightarrow C$成立。

证明：由条件知$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge \neg C \Leftrightarrow F$，即$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge \neg C$为永假式。而$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m$是一致的（即为永真式），从而只有$\neg C$为永假式，所以C 一定为永真式，故

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \Rightarrow C$$

成立。

§8 推理理论

例：证明：$\neg P\wedge\neg Q \Rightarrow \neg(P\wedge Q)$。

证明:

(1)	$\neg(\neg(P\wedge Q))$	假设前提
(2)	$P\wedge Q$	T(1)E
(3)	P	T(2)I
(4)	$\neg P\wedge\neg Q$	P
(5)	$\neg P$	T(4)I
(6)	$P\wedge\neg P$	T(3)(5)I
(7)	F	T(6)E

所以$\neg P\wedge\neg Q \Rightarrow \neg(P\wedge Q)$成立。

例2: 证明: $\underline{R\rightarrow\neg Q, R\vee S, S\rightarrow\neg Q, P\rightarrow Q}\Rightarrow \neg P$。

证明:

(1)	$\neg(\neg P)$	假设前提
(2)	P	T(1)E
(3)	$P\rightarrow Q$	P
(4)	Q	T(2)(3)I
(5)	$S\rightarrow\neg Q$	P
(6)	$Q\rightarrow\neg S$	T(5)E
(7)	$\neg S$	T(4)(6)I
(8)	$R\vee S$	P
(9)	R	T(7)(8)I
(10)	$R\rightarrow\neg Q$	P
(11)	$\neg Q$	T(9)(10)I
(12)	$Q\wedge\neg Q$	T(4)(11)I
(13)	F	T(12)E

所以$R\rightarrow\neg Q, R\vee S, S\rightarrow\neg Q, P\rightarrow Q \Rightarrow \neg P$成立。

§8 推理理论

说明：

由以上两例可见，**间接证明法**在结论较为简单时使用是比较方便的，实际上间接证明法也可以用CP规则代替它。

因为$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge \neg C \Rightarrow F$，则由CP规则得

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_m \Rightarrow \neg C \rightarrow F \Leftrightarrow C \vee F \Leftrightarrow C,$$

所以 $H_1,H_2 \ldots H_m \Rightarrow C$成立。

前内容回顾：

1、主范式排序（列）后的唯一性;

2、推理理论：有效结论、推理规则;

3、逻辑推理的方法:

（一）真值表法;

（二）推理规则法:

依据是常用的16个永真蕴含式和22个等价公式;

P规则：在推导过程的任何一步都可以引入前提（条件）;

T规则：如果前面有一个或多个公式永真蕴含S，则引入S;

附加前提的CP规则：如 (P，Q⇒R)，则 P ⇒ (Q→R)。

（三）间接证明法（反证法、归谬法）：引入假设前提（即结论的否定）。

§8 推理理论

例：一位计算机工作者协助公安人员审查一起谋杀案，经调查，他认为下列情况均是**真的**。

（1）会计张某或邻居王某谋害了厂长。

（2）如果会计张某谋害了厂长，则谋害不可能发生在半夜。

（3）如果邻居王某的证词不正确，则在半夜时房里灯光未灭。

（4）如果邻居王某的证词是正确的，则谋害发生在半夜。

（5）在半夜房子里的灯光灭了，且会计张某曾贪污过。

试通过逻辑推理的方法说明究竟谁谋害了厂长。

(1) 会计张某或邻居王某谋害了厂长。
(2) 如果会计张某谋害了厂长，则谋害不可能发生在半夜。
(3) 如果邻居王某的证词不正确，则在半夜时房里灯光未灭。
(4) 如果邻居王某的证词是正确的，则谋害发生在半夜。
(5) 在半夜房子里的灯光灭了，且会计张某曾贪污过。

解：设 P：会计张某谋害了厂长

Q：邻居王某谋害了厂长

N：谋害发生在半夜

O：邻居王某的证词是正确的

R：半夜时房子的灯光灭了

A：会计张某曾贪污

则列出各条件对应的命题公式：

（1）会计张某或邻居王某谋害了厂长。 $P \vee Q$

（2）如果会计张某谋害了厂长，则谋害不可能发生在半夜。 $P \rightarrow \neg N$

（3）如果邻居王某的证词不正确，则在半夜时房里灯光未灭。$\neg O \rightarrow \neg R$

（4）如果邻居王某的证词是正确的，则谋害发生在半夜。 $O \rightarrow N$

（5）在半夜房子里的灯光灭了，且会计张某曾贪污过。 $R \wedge A$

下面由以上5个条件推出有效结论。

§8 推理理论

推导过程为：

(1)	$R \wedge A$	P
(2)	R	T(1)I
(3)	$\neg O \rightarrow \neg R$	P
(4)	O	T(2)(3)I
(5)	$O \rightarrow N$	P
(6)	N	T(4)(5)I
(7)	$P \rightarrow \neg N$	P
(8)	$\neg P$	T(6)(7)I
(9)	$P \vee Q$	P
(10)	Q	T(8)(9)E

结论：邻居王某谋害了厂长！

5个前提或条件：

1) $P \vee Q$

2) $P \rightarrow \neg N$

3) $\neg O \rightarrow \neg R$

4) $O \rightarrow N$

5) $R \wedge A$

P：会计张某谋害了厂长
Q：邻居王某谋害了厂长
N：谋害发生在半夜
O：邻居王某的证词是正确的
R：半夜时房子的灯光灭了
A：会计张某曾贪污

第一章小结

学习第一章要注意以下几点：

（1）弄清命题与陈述句的关系。

（2）弄清由5种基本联结词构成的复合命题的逻辑关系及其真值。特别是要弄清条件命题“P→Q”的逻辑关系及其真值。

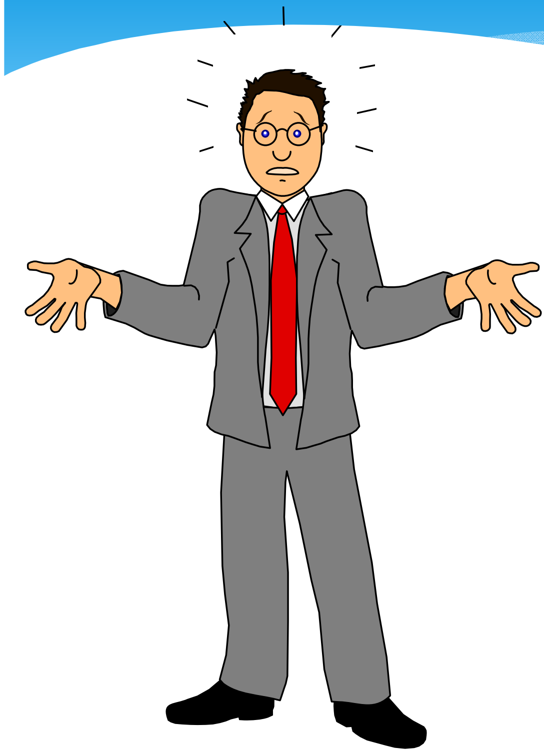
（3）记住常用的蕴含式和等价式，这是学好命题逻辑的关键问题。

（4）会准确地求出给定命题公式的主析取范式和主合取范式。掌握主析取范式与真值表、成真赋值、主合取范式的关系。

（5）会用多种方法判断公式的类型及判断两个公式是否等价。

（6）会用等价变换法将一个联结词集中的公式等价地化为一个全功能联结词集中的公式。

（7）掌握推理和判断推理是否正确的方法。



第一章内容结束！

THANKS

109

例题选讲

例1.符号化下列命题：

（1）辱骂和恐吓决不是战斗；

（2）除非天气好，否则我是不会去公园的；

（3）如果晚上做完作业且没有其它的事，他就会去看电视或听音乐。

解：（1）设P：辱骂不是战斗。

Q：恐吓不是战斗。

$P \vee Q$

（2）设P：今天天气好。

Q：我去公园。　　$Q \rightarrow P$

（3）设P：他晚上做完了作业。

Q：他晚上没有其它事情。

R：他看电视。

S：他听音乐。

$(P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S)$

以下句式均可符号化为 $P \rightarrow Q$：

(1)如P，则Q；

(2)因为P，所以Q；

(3)只要P，就Q；

(4)P仅当Q；

(5)只有Q，才P；

(6)除非Q，才P；

(7)除非Q，否则非P；

例题选讲

例2. 证明： $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$ 。

给出本题的各种证明：

（1）列真值表：设 $M \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$, $K \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$,

$S \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

P	Q	R	$Q \rightarrow R$	M	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	K	S
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

↑
永真

例题选讲

a)直接证法：$P\to(Q\to R)$的真值为T，其对应指派下$(P\to Q)\to(P\to R)$的真值均为T。

b)反证法：$(P\to Q)\to(P\to R)$的真值为F，其对应指派下$P\to(Q\to R)$的真值为F。

c)条件永真式：$(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$的真值都为T，即它为永真式。

（2）逻辑推证

a)直接证法：设$P\to$（$Q\to R$）为T，则

①P为T，$Q\to R$为T，有三种情况：

P为T，Q为T，R为T，则$(P\to Q)\to(P\to R)$为T。

P为T，Q为F，R为T，则$(P\to Q)\to(P\to R)$为T。

P为T，Q为F，R为F，则（$P\to Q$）→（$P\to R$）为T。

②P为F，$Q\to R$为F，则P为F，Q为T，R为F，所以$P\to Q$为T，$P\to R$为T，从而（$P\to Q$）→（$P\to R$）为T。

③P为F，$Q\to R$为T，则：

P为F，Q为T，R为T，则（$P\to Q$）→（$P\to R$）为T。

P为F，Q为F，R为F，则（$P\to Q$）→（$P\to R$）为T。

P为F，Q为F，R为T，则（$P\to Q$）→（$P\to R$）为T。

综上各点：当$P\to$（$Q\to R$）为T时，必有（$P\to Q$）→（$P\to R$）为T。

b)间接证法：

设（$P\to Q$）→（$P\to R$）为F，则必有$P\to Q$为T，$P\to R$为F，故得P为T，Q为T，R为F。所以$P\to$（$Q\to R$）为F。

例题选讲

（3）等价变换

$S \Leftrightarrow (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \to ((\neg P \vee Q) \to (\neg P \vee R))$

$\Leftrightarrow \neg (\neg P \vee \neg Q \vee R) \vee (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee ((\neg P \vee R \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \neg (P \wedge Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow T$

例题选讲

例3.证明 {↔，¬} 不是最小联结词组。

证明：设变元P，Q，用联结词↔，¬作用于P，Q得到 P，Q，¬P，¬Q，P↔Q，P↔P，Q↔Q，Q↔P。但(P↔Q)⇔(Q↔P)，(P↔P)⇔(Q↔Q)，故实际有：

P，Q，¬P，¬Q，P↔Q，P↔P(T)　　　(A)

用¬作用于(A)类,得到扩大的公式类(包括原公式类):

P，Q，¬P，¬Q，P↔Q，¬(P↔Q)，T，F　　(B)

用↔作用于(A)类得到：

P↔Q，P↔¬P(F)，P↔¬Q⇔¬(P↔Q)，P↔(P↔Q)⇔Q，P↔(P↔P)⇔P，

Q↔¬P⇔¬(P↔Q)，Q↔¬Q(F)，Q↔(P↔Q)⇔P, Q↔T⇔Q，¬P↔¬Q⇔(P↔Q)，

¬P↔(P↔Q)⇔¬Q，¬P↔T⇔¬P，¬Q↔(P↔Q)⇔¬P，¬Q↔T⇔¬Q，

(P↔Q)↔(P↔P)⇔P↔Q。

因此(A)类使用↔运算后，仍在(B)类中。

同样，对(B)类使用↔，¬运算后，结果仍在(B)中。

由上证明：用↔，¬两个联结词，反复作用在两个变元的公式中，结果只能产生(B)类中的公式，总共仅八个不同公式，而两个变元所形成的公式共有$2^{2^2}=16$个彼此不等价的公式，因此 {↔，¬} 不是功能完备的，更不可能是最小联结词组。

例题选讲

例4. 求$(A\rightarrow B\wedge C)\wedge(\neg A\leftrightarrow(\neg B\wedge\neg C))$的主析取范式与主合取范式。

解：(1)列表法：设

$S\Leftrightarrow(A\rightarrow B\wedge C)\wedge(\neg A\leftrightarrow(\neg B\wedge\neg C))$，$R\Leftrightarrow A\rightarrow B\wedge C$，$M\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow(\neg B\wedge\neg C)$，

根据真值表中S真值为T的指派，所对应的小项析取即为S的主析取范式，S真值为F的指派，所对应的大项合取即为主合取范式。S的真值表如下：

A	B	C	$B\wedge C$	R	$\neg A$	$\neg B\wedge\neg C$	M	S
T	T	T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F	F	T	F
T	F	T	F	F	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	T	T	F	F	F
F	F	T	F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T	T	T	T

$S\Leftrightarrow(A\wedge B\wedge C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)$ ——主析取范式

$S\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(A\vee\neg B\vee C)\wedge(A\vee B\vee\neg C)$

——主合取范式

例题选讲

(2)公式推导法:

$$
\begin{aligned}
S &\Leftrightarrow (A\to B\wedge C)\wedge(\neg A\leftrightarrow(\neg B\wedge\neg C))\\
&\Leftrightarrow (\neg A\vee(B\wedge C))\wedge(\neg A\to(\neg B\wedge\neg C))\wedge((\neg B\wedge\neg C)\to\neg A)\\
&\Leftrightarrow (\neg A\vee(B\wedge C))\wedge(A\vee(\neg B\wedge\neg C))\wedge((B\vee C)\vee\neg A)\\
&\Leftrightarrow ((\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge C))\wedge(B\vee C\vee\neg A)\\
&\Leftrightarrow (\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge C)\Leftrightarrow m_{000}\vee m_{111}\Leftrightarrow\Sigma_{0,7}
\end{aligned}
$$

当求出主析取范式的编码表达式后可直接利用编码关系，解出主合取范式。即:

$$
\begin{aligned}
S &\Leftrightarrow (A\to B\wedge C)\wedge(\neg A\leftrightarrow(\neg B\wedge\neg C))\\
&\Leftrightarrow (\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(A\wedge B\wedge C)\Leftrightarrow m_{000}\vee m_{111}\Leftrightarrow\Sigma_{0,7}\\
&\Leftrightarrow\prod_{1,2,3,4,5,6}\Leftrightarrow M_{001}\wedge M_{010}\wedge M_{011}\wedge M_{100}\wedge M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{110}\\
&\Leftrightarrow (\neg A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee C)\\
&\qquad\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(A\vee\neg B\vee C)\wedge(A\vee B\vee\neg C)
\end{aligned}
$$

例题选讲

例5. 用推理规则论证下述问题：

或者是天晴，或者是下雨。如果是天晴，我去看电影。如果我去看电影，我就不看书。所以，如果我在看书，则天在下雨。

解：设 S：今天天晴，R：今天下雨，E：我去看电影，B：我去看书，则本题符号化为：

$S \nabla R$，$S \to E$，$E \to \neg B \Rightarrow B \to R$。

因为 $S \nabla R \Leftrightarrow \neg(S \leftrightarrow R)$，故本题为 $\neg(S \leftrightarrow R)$，$S \to E$，$E \to \neg B \Rightarrow B \to R$。

①直接证法：

(1) $\neg(S \leftrightarrow R)$	P
(2) $S \leftrightarrow \neg R$	T(1),E
(3) $(S \to \neg R) \wedge (\neg R \to S)$	T(2),E
(4) $\neg R \to S$	T(3),I
(5) $S \to E$	P
(6) $\neg R \to E$	T(4)(5),I
(7) $E \to \neg B$	P
(8) $\neg R \to \neg B$	T(6)(7),I
(9) $B \to R$	T(8),E

例题选讲

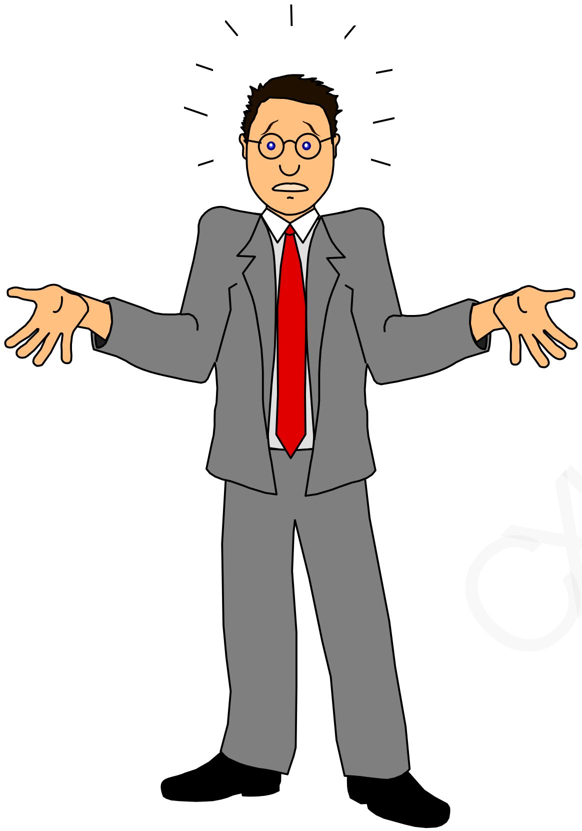
②间接证法：

a)

(1) $\neg(S\leftrightarrow R)$	P
(2) $S\leftrightarrow\neg R$	T(1)
(3) $(S\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\rightarrow S)$	T(2)
(4) $\neg R\rightarrow S$	T(3)
(5) $\neg(B\rightarrow R)$	P(附加前提)
(6) $B\wedge\neg R$	T(5)
(7) B	T(6)
(8) $\neg R$	T(6)
(9) S	T(4)(8)
(10) $S\rightarrow E$	P
(11) E	T(4)(10)
(12) $E\rightarrow\neg B$	P
(13) $\neg B$	T(11)(12)
(14) $B\wedge\neg B$	矛盾(7)(13)

b)

(1) B	P(附加前提)
(2) $E\rightarrow\neg B$	P
(3) $\neg E$	T(1)(2)
(4) $S\rightarrow E$	P
(5) $\neg S$	T(3)(4)
(6) $\neg(S\leftrightarrow R)$	P
(7) $S\leftrightarrow\neg R$	T(6)
(8) $(S\rightarrow\neg R)\wedge(\neg R\rightarrow S)$	T(7)
(9) $\neg R\rightarrow S$	T(8)
(10) $\neg S\rightarrow R$	T(9)
(11) R	T(5)(10)
(12) $B\rightarrow R$	CP



第一章结束了！

THANKS

119