实验 4 数值积分

201311211914

赵帅帅

2016–5–24

一、实验问题

选用复化梯形公式、复化 **Simpson**公式，计算积分

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.4987111176) \\
I &= \int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.9460830704) \\
I &= \int_0^{1} \frac{e^x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.3908118456) \\
I &= \int_0^{1} \frac{ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.2721982613)
\end{aligned}
$$

二、实验要求

1. 编制出数值积分的算法程序。
2. 分别两种求积公式计算同一个积分，并比较计算结果。
3. 分别取不同步长 $h=\frac{b-a}{n}$，比较计算结果 (如 $n=10,20$ 等)。
4. 给定精度要求 ε，试确定达到精度要求的步长选取。

三、实验目的与意义

1. 掌握各种数值积分方法。
2. 了解数值积分精度与步长的关系。
3. 体验各种数值积分方法的精度和计算量。

四、算法

1. 复化梯形公式本算法采用复化梯形公式计算定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，计算公式为

$$
S_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]
$$

其中，$h=\frac{b-a}{n}$, $x_i = a+ih$, $i=0,1,\cdots,n$。

输入 端点 a,b，正整数 n

输出 定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的近似值 SN

(1) 置

$$h=\frac{b-a}{n}$$

(2) 置

$$\begin{aligned} F0 &= f(a)+f(b) \\ F1 &= 0 \end{aligned}$$

(3) 对 $i=1,2,\cdots,n-1$ 循环执行步 4 至步 5

(4) 置 $x=a+ih$

(5) $F1=F1+f(x_i)$

(6) 置

$$SN=\frac{h(F0+2F1)}{2}$$

(7) 输出 SN，停机

2. 复化 **Simpson**公式

本算法采用复化 **Simpson**公式计算定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，计算公式为

$$S_n=\frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i})+f(b)\right]$$

其中，$h=\frac{b-a}{2n}$，$x_i=a+ih$，$i=0,1,\cdots,2n$。

输入 端点 a,b，正整数 n

输出 定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的近似值 SN

(1) 置

$$h=\frac{b-a}{2n}$$

(2) 置

$$\begin{aligned} F0 &= f(a)+f(b) \\ F1 &= 0 \\ F2 &= 0 \end{aligned}$$

(3) 对 $i=1,2,\cdots,2n-1$ 循环执行步 4 至步 5

(4) 置 $x=a+ih$

(5) 如果 i 是偶数，则 $F2=F2+f(x_i)$，否则 $F1=F1+f(x_i)$

(6) 置

$$SN=\frac{h(F0+2F2+4F1)}{3}$$

(7) 输出 SN，停机

五、实验代码

```
// 复化梯形
float Trapezium(float (*func)(float x), float a, float b, float n)
{
    // 计算步长
    float h = (b - a) / n;
    // 计算两个端点的值
    float F0 = func(a) + func(b);
    float F1 = 0;
    // 梯形公式
    for(int i = 1; i <= n - 1; i ++)
    {
        // 计算下一步
        float x = a + i * h;
        F1 += func(x);
    }
    return h * (F0 + 2 * F1) / 2;
}

// 复化Simpson
float Simpson(float (*func)(float x), float a, float b, float n)
{
    // 计算步长
    float h = (b - a) / (2 * n);
    // 计算两个端点的值
    float F0 = func(a) + func(b);
    float F1 = 0, F2 = 0;
    for(int i = 1 ; i <= 2 * n -1; i ++)
    {
        // 计算下一步
        float x = a + i * h;
        i % 2? F1 += func(x) : F2 += func(x);
    }
    return h *(F0 + 2 * F2 + 4 * F1) / 3;
}
```

六、实验结果

操作系统： Windows 10 企业版

GCC 版本： 4.9.2

G++ 版本： 4.9.2

1. 比较不同积分和不同步长方法对求解的积分的误差。[1]

(1) 函数 1

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{4 - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.4987111176)$$

[1]所有值均四舍五入到小数点后十位。

算法	$n=10$	$n=20$	$n=30$
复化梯形公式	-0.0000062911	-0.0000015727	-0.0000006990
复化 Simpson 公式	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

(2) 函数 2

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.9460830704)$$

算法	$n=10$	$n=20$	$n=30$
复化梯形公式	-0.0002509985	-0.0000627450	-0.0000278863
复化 Simpson 公式	0.0000000061	0.0000000004	0.0000000000

(3) 函数 3

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{4+x^2}\, \mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.3908118456)$$

算法	$n=10$	$n=20$	$n=30$
复化梯形公式	0.0000634671	0.0000158719	0.0000070546
复化 Simpson 公式	0.0000000069	0.0000000004	0.0000000000

(4) 函数 4

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{4-\sin^2 x}\, \mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.4987111176)$$

算法	$n=10$	$n=20$	$n=30$
复化梯形公式	-0.0009145438	-0.0002284985	-0.0001015436
复化 Simpson 公式	0.0000001833	0.0000000114	0.0000000022

总结:

1) 复化 Simpson 公式计算误差比复化梯形公式计算误差小。
2) 在使用同一种积分方法时，n 越大，积分步长 ($h = \frac{b-a}{n}$) 越短，积分计算误差越小。

2. 定精度要求 ε，比较到达到精度要求的步长。

(1) 函数 1

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{4-\sin^2 x}\, \mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.4987111176)$$

算法	$\varepsilon=0.001$	$\varepsilon=0.0001$	$\varepsilon=0.00001$	$\varepsilon=0.000001$
复化梯形公式	10	10	10	30
复化 Simpson 公式	10	10	10	10

(2) 函数 2

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.9460830704)$$

算法	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$	$\varepsilon = 0.00001$	$\varepsilon = 0.000001$
复化梯形公式	10	20	50	160
复化 Simpson 公式	10	10	10	10

(3) 函数 3

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.3908118456)$$

算法	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$	$\varepsilon = 0.00001$	$\varepsilon = 0.000001$
复化梯形公式	10	10	30	90
复化 Simpson 公式	10	10	10	10

(4) 函数 4

$$I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{4-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \qquad (I \approx 0.4987111176)$$

算法	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$	$\varepsilon = 0.00001$	$\varepsilon = 0.000001$
复化梯形公式	10	40	100	300
复化 Simpson 公式	10	10	10	10

总结:

1) 复化 Simpson 公式相对于复化梯形公式收敛更快。

2) 精度要求越高，n 越大，步长 ($h = \frac{b-a}{n}$) 越短。

七、实验感受

1. 求积分数值步长越短，精度越高，计算量越大。
2. 复化 Simpson 公式相对复化梯形公式要好很多。
3. 写实验报告比写代码难多了。