数论问题集

作者：虞朝阳

版本：1.00

Wir müssen wissen, wir werden wissen. (我们必须知道，我们必将知道) - David.Hilbert

目录

引言

这里的题目来自《1001 Problems in Classical Number Theory》，作者为 Jean-Marie De Koninck, Armel Mercier。

第一部分

理论

第一章 理论要点

1.1 Basic Axioms and Examples

In this section the basic algebraic structure to be studied in Part I is introduced and some examples are given.

定义 1.1

(1) A binary operation $\star$ on a set G is a function $\star$: $G \times G \to G$. For any $a, b \in G$ we shall write $a \star b$ for $\star(a, b)$.

(2) A binary operation $\star$ on a set G is associative if for all $a, b, c \in G$, $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.

(3) If $\star$ is a binary operation on a set G we say elements a and b of G commute if $a \star b = b \star a$. We say $\star$(or G) is commutative if for all $a, b \in G$, $a \star b = b \star a$. ♣

例 1.1

(1) $+$ (usual addition) is a commutative binary operation on $\mathbb{Z}$ (or on $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ respectively).

(2) $\times$ (usual multiplication) is a commutative binary operation on $\mathbb{Z}$ (or on $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ respectively).

第二部分

问题

第二章 数学归纳法和组合

✍ **练习 2.1** 证明对每一个正整数 n 成立如下等式：

$$\sum_{k=1}^{k} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{k} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \sum_{k=1}^{k} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

✍ **练习 2.2** 证明任意一个正整数的立方都可以表示为两个平方数之差。

✍ **练习 2.3** 求公式：$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2-1}$. 这里 n 为正整数。

✍ **练习 2.4** 求公式：前 n 个正偶数之和。

✍ **练习 2.5**

✍ **练习 2.6**

第三部分

解答

第三章 解答