朴素集合论

P.R.Halmos

January 17, 2018

前言

最近开始看P.R.Halmos的《Naive Set Theory》,这里是一些简单的笔记.

Contents

0.1 2013年04月21日

集合是一个不加定义的概念,就像几何中的点,线之类的.首先引入的概念是"属于"和"相等",这是集合论的两个基本关系.他们也是通过外延公理相互联系.

公理 0.1.1 (外延公理(Axiom of extension)) 两个集合相等,当且仅当他们有相同的元素.

外延公理界定了一个集合的元素,它非常明显,却绝不寻常:

我们考虑人类之间的关系:设$x \in A$,如果x是A的祖先,此时,"仅当(only if)"部分是成立的,"当(if)"部分不成立.也就是有相同的祖先,不一定能得出相同的A.

属于是"元素"和集合之间的关系,不过应该注意,我们这里的元素是没有预先定义,足够宽泛.集合也可以作为元素.有了属于,我们可以考虑集合之间的关系:$x \in A \Rightarrow x \in B$,则称$A \subset B$.包含关系满足:

(1)自反的:$A \subset A$;

(2)传递的:$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$;

(3)反对称的:$A \subset B$不能得出$B \subset A$,如果两者同时成立,必有$A = B$,这也可以认为是外延公理的等价描述.

显然,"属于"和"包含"是完全不同的东西:"属于"一般来说不是自反的,也不满足传递性.对于满足$A \in A$这样的集合,一般情况不在我们的考虑之内.

要想得到更多的集合,我们需要其他的公理,还需要一些基本的逻辑:"属于"和"等于"是两个基本的语句,其余的通过以下七个组合得到:and(且);or(或者,包括either ... or ...);nnot(非);if - then -(如果...就...);if and only if(当且仅当);for some(对某些...);for all(对所有...).

公理 0.1.2 (Axiom of specification) 对于每一个集合A和条件$S(x)$,存在集合B,使得B中的元素x属于A,且$S(x)$成立.

我搜索了一下网络,大部分把"Axiom of specification"翻译为"分类公理".有此公理,通常把B记作$B = \{x \in A : S(x)\}$,这里有一个极为有趣也非常有意义的集合:$B = \{x \in A : x \notin x\}$.对于这个集合,必有$B \notin A$,证明比较简单,反证法即可,书中给出了详细讨论,这意味着:不存在万物之集,或者说,不存在包含一切的集合,这实际上就是罗素悖论的另一个说法.而哥德尔关于数学基础的一些结论,说明了存在缺陷是世界的本性,上帝也不是万能的,有阴才有阳.

为了有具体的讨论对象,我们需要构造出一些集合.如果我们假设:存在一个集合,那么由axiom of specification可知,存在一个不包含任何元素的集合$\emptyset$,$\emptyset \subset A$对任意的集合A成立.这几个结论的证明有些意思,书中也给出了详细的描述,它涉及到了对于空集的处理:反证,如果不成立,那就是存在一个元素$x \in \emptyset$,但是$x \notin A$,但是这样的元素不存在.

公理 0.1.3 (Axiom of pairing) 对任意两个集合,存在一个集合,使得这两个集合是该集合的元素.

用数学语言描述是:$\forall a, b, \exists A, a \in A, b \in A. B = \{a, b\}$.
有了这个公理,我们可以构造出无限多个集合了:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \cdots$$
$$\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \cdots$$

这里面的任意两个集合互不相等.这是书中的一道习题,至于严格证明他们互不相等,目前还没有思路.我觉得至少应该证明:上述公理中的集合A和a, b是不相同.$\emptyset$和$\{\emptyset\}$不相等比较好说明:$\emptyset$不包含任何元素,而$\{\emptyset\}$包含了一个元素:$\emptyset$,两者自然不相等,习题中的,我觉得只能是通过外延公理,一层一层脱去花括号,最后归结到这个结论上.

0.2 2013年04月29日

并集和交集:

前面无序对给出了拥有两个元素的集合,我们通过并集可以得到包含更多元素的集合.

公理 0.2.1 (并集公理-Axiom of unions) 对任意一簇集合,存在一个集合,包含所有这样的元素,这个元素至少是这一簇集合中的某一个集合的元素.

使用数学符号表示为:$\forall \mathcal{C}, \exists \mathcal{U}$,若$x \in X, X \in \mathcal{C}$,则$x \in \mathcal{U}$.
关于并集有如下公式:

1. $A \cup \emptyset = A$;
2. $A \cup B = B \cup A$.交换律(commutativity)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.结合律(associativity)
4. $A \cup A = A$.幂等(idempotence)
5. $A \subset B$当且仅当$A \cup B = B$.

注意到无序对只有两个元素,通过它和并集的关系:$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$,可以推广到三元集,四元集,...

$$\{a, b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}.$$

交集:

$$A \cap B = \{x : x \in A\text{且}x \in B\}$$

它可以推广到一簇集合$\mathscr{C}$的交集,此时$\mathscr{C} \neq \emptyset$;此时

$$\cap\{X; X \in \mathscr{C}\} = \{x : x \in X, \forall X \in \mathscr{C}\}$$

交集的性质:

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
2. $A \cap B = B \cap A$.交换律(commutativity)
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.结合律(associativity)
4. $A \cap A = A$.幂等(idempotence)
5. $A \subset B$当且仅当$A \cap B = A$.

特殊的,当$A \cap B = \emptyset$时,称A与B不相交(disjoint).两两不相交(pairwise disjoint).

交与并的分配律(distributive law)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

习题:$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$的充要条件是$C \subset A$.

若$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$,要证明$C \subset A$:$\forall x \in C$,则$x \in (A \cap B) \cup C$,由此得到,$x \in A \cap (B \cup C)$,因此$x \in A$,获证.

反之,如果$C \subset A$,需要证明:$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

$x \in (A \cap B) \cup C$,则或者$x \in (A \cap B)$,或者$x \in C$,若$x \in A \cap B$,则$x \in A$且$x \in B$,$x \in A$,且$x \in B \cup C$,于是$x \in A \cap (B \cup C)$.

若$x \in C$,则$x \in A$,$x \in B \cup C$,于是$x \in A \cap (B \cup C)$.

$x \in A \cap (B \cup C)$,$x \in A$,且$x \in B \cup C$,若$x \in B$,则$x \in A \cap B$,这样$x \in (A \cap B) \cup C$,若$x \in C$,则$x \in (A \cap B) \cup C$.

补集和幂集:

相对补集:$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$,很多时候,我们考虑一种特殊情形下的补集,固定一个集合E,此时$E - A = A'$.

补集的一些性质:$(A')' = A$;$\emptyset' = E$,$E' = \emptyset$;$A \cap A' = \emptyset$;$A \cup A' = E$;$A \subset B$当且仅当$B' \subset A'$.

和补集相关的一个非常重要的性质(De morgan法则):

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

这一法则揭示了一个重要的现象,常称为对偶原理,在包含了并集,交集,以及补集的包含关系或者等式中,只要把每一个集合替换为它的补集,交换并与交的位置,把包含关系反向,则对应的关系仍旧成立.

关于补集的一些结论:

1. $A - B = A \cap B'$;
2. $A \subset B$当且仅当$A - B = \emptyset$;
3. $A - (A - B) = A \cap B$;
4. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$;
5. $A \cap B \subset (A \cap C) \cup (B \cap C')$;
6. $(A \cup C) \cap (B \cup C') \subset A \cup B$;

A与B的对称差(布尔和)定义为:$A + B = (A - B) \cup (B - A)$.

对称差满足交换律;结合律以及$A + \emptyset = A, A + A = \emptyset$.

关于一组集合的交集,有一点需要讨论一下,在定义中要求这一组集合中至少有一个集合,如果出现空的集合簇,即讨论:$x \in X$,对任意的$X \in \emptyset$,会引发出$\cap\emptyset$为一个万物之集,为了取消非空的集合簇这一限制,可以把所有的集合限制在一个所谓全集E上,此时$\cap\emptyset = E, \mathcal{C} \cup \{E\}$.

公理 0.2.2 (幂集公理:Axiom of powers) 对每一个集合,存在一个集合簇,它包含所有这个给定集合的子集.

集合E的幂集常记作$P(E)$.

对于有限集E,其中有n个元素,则$P(E)$中有2^n个元素,这也是幂集这个称谓的来源吧.这个结论可以使用归纳法证明,不过这里只能使用以前的关于自然数的信息,从更严格的角度来看,需要首先定义自然数的含义,也就是这里n和2^n的含义.

习题:证明$P(E) \cap P(F) = P(E \cap F), P(E) \cup P(F) \subset P(E \cup F)$,它们可以推广到

$$\bigcap_{X\in\mathcal{C}} P(X) = P(\bigcap_{X\in\mathcal{C}} X), \quad \bigcup_{X\in\mathcal{C}} P(X) \subset P(\bigcup_{X\in\mathcal{C}} X).$$

$P(E) \cap P(F)$中的元素是集合$X, X \subset E, X \subset F \Leftrightarrow A \subset E \cap F \Leftrightarrow X \in P(E \cap F)$.

$X \in P(E) \cup P(F) \Rightarrow X \in P(E)$或$X \in P(F) \Rightarrow X \subset E$或$X \subset F \Rightarrow X \subset E \cup F, \Rightarrow X \in P(E \cup F)$.

反过来为什么不一定成立?$X \in P(E \cup F) \Rightarrow X \subset E \cup F$;此时$X$中可能一部分属于$E$,一部分属于$F$, $X \notin P(E)$或$P(F)$.只要$E - F \neq \emptyset$,或$F - E \neq \emptyset$,上面的包含关系就是真包含.

0.3 2013年5月1日

有序对:对于$A=\{a,b,c,d\}$,如何来定义一个次序呢?对于一个次序c,b,d,a,和如下集合有一个一一对应关系:

$$\{\{c\},\{c,b\},\{c,b,d\},\{c,b,d,a\}\}.$$

a和b的有序对定义为$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$. 这里需要证明这个定义的合理性, 也就是, 若$(a,b)=(x,y)$, 必有$a=x, b=y$. 书中给出了详细的证明.

接下里的问题是:对于集合A,B, 是否存在集合包含所有的(a,b), 其中$a\in A, b\in B$, 通过说明$(a,b)\in P(P(a\cup B))$, 可以证明这样的集合石存在的, 由此引出了笛卡尔积的定义, 反过来, 对于任一笛卡尔积, 都能表示为$A\times B$的形式, 书中同样给出了讨论.

习题:

1. $(A\cup B)\times X=(A\cup X)\cup(B\cup X)$;
2. $(A\cap B)\times(X\cap Y)=(A\times X)\cap(B\times Y)$;
3. $(A-B)\times X=(A\times X)-(B\times Y)$.

1. $\forall(a,b)\in(A\cup B)\times X\Rightarrow a\in A\cup B, b\in X\Rightarrow a\in A$或$a\in B\Rightarrow(a,b)\in A\times X$或$(a,b)\in B\times X\Rightarrow(a,b)\in(A\times X)\cup(B\times X)$;反之也是成立的.
2. $(a,b)\in(A\cap B)\times(X\cap Y)\Leftrightarrow a\in A\cap B, b\in X\cap Y\Leftrightarrow(a,b)\in A\times X,(a,b)\in B\times Y\Leftrightarrow(a,b)\in(A\times X)\cap(B\times Y)$.
3. $(a,b)\in(A-B)\times X\Leftrightarrow a\in A-B, b\in X\Leftrightarrow a\in A, a\notin B\Leftrightarrow(a,b)\in A\times X,(a,b)\notin B\times X\Leftrightarrow(A\times X)-(B\times X)$.

我们看看:$(A\cap B)\times X=(A\times X)\cap(B\times X)$成立吗?

$(a,b)\in(A\cap B)\times X\Leftrightarrow a\in A\cap B, b\in X\Leftrightarrow a\in A$且$a\in B, b\in X\Leftrightarrow(a,b)\in A\times X,\ (a,b)\in B\times X\Leftrightarrow(a,b)\in(A\times X)\cap(B\times X)$.

关系:关系是一组有序对的集合, a和b有关系R是指$(a,b)\in R$.

几个例子:相等关系$(x,x)\in X\times X$;属于关系$(x,A)\in X\times P(X)$.

一种特殊的关系:等价关系是指满足自反, 对称和传递三个性质的关系. 所谓自反是指aRa, 对称是指$aRb\Rightarrow bRa$;传递是指$aRb, bRc\Rightarrow aRc$. 这里书中有一道题目, 实际上是要求说明这三条性质不能从其中两条件性质推出第三条. 这里试着做一下:

(1) 集合的包含关系满足自反和传递, 不一定满足对称.

(2) 考虑$X=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(2,1),(3,2)\}$, 那么自反成立, 对称也是成立的, 但是不满足传递:$1R2, 2R3$, 无法得到$1R3$.

(3)接下来需要构造一个自反不成立,其他两个性质成立的关系,可是我们应该注意到,一旦有两个不同的a,b,满足aRb,那么根据对称bRa,根据传递,必有aRa和bRb.于是我们需要的是一个小队孤立的a.构造如下:$X=\{1,2,3\}$,R={(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)},注意到自反不成立,因为存在$1\in A$,$1R1$不成立.对称和传递是成立的.

等价关系在数学中具有特殊重要性,尤其在抽象代数中.等价关系和集合的划分有着直接的联系,首先引进几个概念和记号.

集合X的划分是指一簇集合$\mathcal{C}$,这簇集合的并集等于X,但是集合簇$\mathcal{C}$是两两不相交的.

所谓等价关系R的x的等价类是指所有和x等价的元素组成的集合,记作x/R:$x/R=\{y\in X:xRy\}$.我们把X的所有等价类组成的集合记作X/R.

我们说的等价类和集合划分的关系实际上可以用等式

$$\mathcal{C}=X/R$$

表示:等价关系R生成的等价类的集合是X的一个划分,同样任何一个划分$\mathcal{C}$都能够决定一个等价关系(记作$X/\mathcal{C}$).

证明参考课本,难度不大.

0.4 2013年05月11日

首先讨论映射,书中使用的是函数(function),我在这里为了和其他书本相一致,采取映射这个术语.首先需要了解前面遗漏的两个符号或者术语:关系R的定义域和值域.

$$\mathrm{dom}R=\{x:\exists y(xRy)\};\quad \mathrm{ran}R=\{y:\exists x(xRy)\}.$$

集合X到Y的映射是一种特殊的关系f:$\mathrm{dom}f=X$,对每一个$x\in X$,存在唯一的$y\in Y$,使$(x,y)\in f$,此时,满足$(x,y)\in f$的y记作$f(x)$.X到Y的所有映射组成的集合是$P(X\times Y)$的子集,记为Y^X.

书中讨论了一些术语相关的知识,这里不叙述了.有时$\{(a,b)|(a,b)\in f\}$,称为f的图像(graph).

如果$\mathrm{ran}f=Y$,则称f是映上(onto)的(X映到Y上的).

设$A\subset X$,记号$f(A)$的含义如下:

$$f(A)=\{y:y=f(x),\exists x\in A\},$$

这里存在一个问题,我们考虑的集合中,可能出现$A\in X$这个情形,此时$f(A)$的含义具有歧义.这个问题以前从没想过,因为以前很少遇到,或者说几乎不会遇到.

函数的限制与延拓.

设f是Y到Z的函数, $X \subset Y$, 对于如下方式构造的X到Z的函数g:

$$g(x) = f(x), x \in X,$$

称g为f在X上的限制, f为g在Y上的延拓. 记$g = f|X$, $\mathrm{ran}(f|X) = f(X)$.

下面是几个映射的例子:

(1) $X \times Y$到X的映射: $f(x, y) = x$; $X \times Y$到Y的映射: $f(x, y) = y$.

(2) R是X上的等价关系, X到X/R的映射: $f(x) = x/R$, 称为canonical map.

对于映射f, 可以定义X上的等价关系如下:

$$x/R = \{y : f(y) = f(x)\},$$

也就是说$aRb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. 令$y \in Y$, $g(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$, 此时, $g(y) = x/R$.

(3) $A \subset X$, A的特征函数: $\chi(x) = 1, x \in A$, $\chi(x) = 0, x \notin A$, 对于$A \subset X$, 或者$A \in P(X)$, 则$A \to \chi_A$也是一个一一映射.

习题: (i) $Y^{\emptyset}$恰好有一个元素, $\emptyset$, 无论Y是否为空集; (ii) 如果X不是$\emptyset$, 则$\emptyset^X$为空.

这里涉及到了空集, 证明方法通常是反证.

$Y^{\emptyset}$表示的是所有$\emptyset$到Y的映射, 需要证明$\emptyset$是映射, 而映射又是特殊的关系R, 需要证明$\emptyset$是关系, 或者说$\emptyset$是有序对的集合, 反证, 如果$\emptyset$不是关系, 那么应该存在元素α不是有序对, 而这是不可能的. 接下来, $\emptyset$是一个映射, 也就是对每一个$x \in \emptyset$, 存在唯一的$y \in Y$, 使$x\emptyset y$, 这是成立的, 也就是如果$\emptyset$不是一个映射, 也就是存在$x \in \emptyset$, 或者不存在$y \in Y$, 使得$x\emptyset y$, 或者有两个以上的y_1, y_2, 使得$x\emptyset y_1, x\emptyset y_2$, 这都不可能. 对于任何其他映射或者关系, 都要求有元素$x \in \emptyset$, 这是不可能的, 因此, $\emptyset$是$Y^{\emptyset}$的唯一元素.

假设存在$f \in \emptyset^X$, 则对于$x \in X$, $\exists y \in \emptyset$使$f(x) = y$, 这是不可能的.

簇: 从指标集I到X的映射. 把并集和交集运算推广到集合簇,

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{或} \bigcup_i A_i$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i \text{或} \bigcap_i A_i$$

$\{I_j\}$是J上的集合簇, $K = \bigcup_j I_j$, $\{A_k\}$为K上的集合簇, 结合律就是

$$\bigcup_{k \in K} A_k = \bigcup_{j \in J} (\bigcup_{i \in I_j} A_i).$$

交换律的推广:

$$(\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcup_{j \in J} A_j) = (\bigcup_{j \in J} A_j) \cup (\bigcup_{i \in I} A_i).$$

设$\{A_i\}$是X的子集簇, $B \subset X$, 则

$$B \cap \bigcup_i A_i = \bigcup_i (B \cap A_i)$$
$$B \cup \bigcap_i A_i = \bigcap_i (B \cup A_i)$$

这是分配律.

如果$\{A_i\}$和$\{B_j\}$均为集合簇, 则

$$(\bigcup_i A_i) \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{ij} (A_i \cap B_j)$$
$$(\bigcap_i A_i) \cup (\bigcap_j B_j) = \bigcap_{ij} (A_i \cup B_j)$$

这里$\bigcup_{ij}$是指$\bigcup_{(i,j)\in I\times J}$.

设$x \in (\bigcup_i A_i) \cap (\bigcup_j B_j) \Leftrightarrow x \in \bigcup_i A_i$且$x \in \bigcup_j B_j$, $\exists i_0, j_0, x \in A_{i_0}, x \in B_{j_0} \Leftrightarrow x \in A_{i_0} \cap B_{j_0} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{ij} (A_i \cap B_j)$.

另一等式的证明方法类似.

笛卡尔积的推广, 笛卡尔积是集合

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\},$$

考虑集合$\{a, b\}$, $a \neq b$; Z为$\{a, b\}$上的集合簇

$$Z = \{\{z_a, z_b\} | z_a \in X, z_b \in Y\},$$

于是Z到$X \times Y$有一个映射: $f(z) = (z_a, z_b)$. 推广到一般情形,

$$\times_{i\in I} X_i = \{\{x_i\}_{i\in I} | x_i \in X_i\},$$

若$X_i = X$, 则记号$\times_i X_i$变为X^I.

设$\{X_i\}_{i\in I}$为集合簇, $X = \times_i X_i$, $J \subset I$, 此时存在一个自然的映射, 所谓的投影映射. $X \to \times_{i\in J} X_i$.

$x \in X$, $f(x) = y \in \times_{i\in J} X_i$, 其中$y_i = x_i$, $i \in J$.

习题: 证明$(\bigcup_i A_i) \times (\bigcup_j B_j) = \bigcup_{ij} (A_i \times B_j)$, 对交也是成立的, 另外, $\bigcap_i X_i \subset X_j \subset \bigcup_i X_i$, 有这个结论, 可以把交集和并集定义为包含关系的极大极小值.

(1) 设$(a, b) \in (\bigcup_i A_i) \times (\bigcup_j B_j) \Leftrightarrow a \in \bigcup_i A_i, b \in \bigcup_j B_j \Leftrightarrow a \in A_{i_0}, b \in B_{j_0} \Leftrightarrow (a, b) \in A_{i_0} \times B_{j_0} \Leftrightarrow (a, b) \in \bigcup_{ij} (A_i \times B_j)$.

(2) $\forall x \in \bigcap_i X_i \Rightarrow x \in X_j \Rightarrow \bigcap_i X_i \subset X_j$; $\forall x \in X_j \Rightarrow x \in \bigcup_i X_i \Rightarrow X_j \subset \bigcup_i X_i$.

设$X_j \subset Y$, 对任意j成立, 则$\bigcup_i X_i \subset Y$成立; 这意味着$\bigcup_i X_i$是满足对所有的j, $X_j \subset Y$的Y中的最小的.

若对每一个j, $Y \subset X_j$, 则$Y \subset \bigcap_i X_i$, 这意味着$\bigcap_i X_i$是满足对所有的j, $Y \subset X_j$中的最大的集合.

0.5 2013年05月12日

反函数与复合函数

首先是概念.

(1) f为X到Y的映射, 定义f^{-1}为$P(Y)$到$P(X)$的映射, 即$B \subset Y$,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\},$$

这里$f^{-1}(B)$称为B在f下的逆像(inverse image). f^{-1}还有另一个含义:从f的值域到X的一个函数, $f^{-1}(y) = \{x\} \Leftrightarrow f(x) = y$, 不过这只是对于一一对应成立.

(2) f是X到Y的映射, g是Y到Z的映射, 可以定义一个X到Z的映射h如下: $h(x) = g(f(x)), x \in X$, 称h为f与g的复合映射.

下面是一些重要的关系式:

(1) $\{A_i\}$为X的子集簇, 则

$$f(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f(A_i)$$
$$f(\bigcap_i A_i) \subset \bigcap_i f(A_i)$$

第一个关系式: $y \in f(\bigcup_i A_i) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_i A_i, f(x) = y \Leftrightarrow x \in A_{i_0}, f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(A_{i_0}) \Leftrightarrow y \in \bigcup_i f(A_i)$.

第二个关系式: $y \in f(\bigcap_i A_i) \exists x \in \bigcap_i A_i, f(x) = y \Rightarrow y \in f(A_i), \forall i \Leftrightarrow y \in \bigcap_i f(A_i)$.

第二个等式之所以不能成立等式, 原因在于$y \in f(A_i), \forall i$, 是无法得出$\exists x \in \bigcap_i A_i, f(x) = y$. 除非映射是一一的. 下面是一个例子: $A_1 = \{1, 2\}, f(1) = 1, f(2) = 2, A_2 = \{1, 3\}, f(1) = 1, f(3) = 1$, 此时$f(A_1) = \{1, 2\}, f(A_2) = \{1, 2\}$, 这说明$2 \in f(A_2)$, 但是不存在$x \in A_1 \cap A_2$, 使$f(x) = 2$.

(2) f是X到Y上(onto)的函数的充要条件是Y的任一非空子集在f下的逆像是X的非空子集.

$\Rightarrow$ 设y属于Y的任一非空子集B, 则由于f是X到Y上(onto)的, 则存在x, 使得$f(x) = y$, 于是$x \in f^{-1}(y), f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B), f^{-1}(B)$非空.

$\Leftarrow$ 考虑单元素集$\{y\}$, 由于$f^{-1}(y)$非空, 存在$x \in f^{-1}(y)$, 则$f(x) = y$.

f是一一对应(one-to-one)的充要条件是f的值域中的每一个单元素集合在f下的逆像是X的单元素集合.

(3) $B \subset Y, f(f^{-1}(B)) \subset B$. f是X到Y上(onto)的函数, $f(f^{-1}(B)) = B$.

证明难度不大, 书中给出详细的过程.

(4) $A \subset X$, 则$A \subset f^{-1}(f(A))$. f是一一对应, 则$A = f^{-1}(f(A))$.

证明难度不大, 书中给出详细的过程.

(5) $\{B_i\}$为Y的子集簇, 则

$$f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i); \quad f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i).$$

(6) $f^{-1}(Y-B) = X - f^{-1}(B)$;

(7) 函数的复合不满足交换律, 但是满足结合律: $h(gf) = (hg)f$.

(8) 把逆映射和复合映射联系起来的等式特别重要. f是X到Y的映射, g是Y到Z的映射, 此时, f^{-1}是$P(Y)$到$P(X)$的映射, g^{-1}映$P(Z)$到$P(Y)$, 此时, gf与$f^{-1}g^{-1}$都有意义, 且有$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

这里的一些关系可以推广到更一般的关系上去, 书中给出了详细的过程, 这里不叙述了. 考虑X上的关系: I为X上的相等关系, 此时I类似于乘法单位元的作用, $IR = RI = R$对于X中的每一个关系成立, 使用代数形式来表示等价关系为: (i) 自反: $I \subset R$; (ii) 对称: $R \subset R^{-1}$; (iii) 传递: $RR \subset R$.

习题: f为X到Y的映射: (i) 设g是Y到X的映射, 若gf是X上的恒等映射, 则f是一一对应, 而g是Y到X上(onto)的. (ii) 对X的任意子集A, B, $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$成立的充要条件是$f$是一一对应; (iii) 对$X$的任意子集$A$, $f(X-A) \subset Y - f(A)$成立的充要条件是f是一一对应; (iv) 对X的任意子集A, $Y - f(A) \subset f(X-A)$成立的充要条件是f是X到Y上(onto)的映射.

(i) 设$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow gf(x_1) = gf(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, 从而$f$是一一对应; 对于$\forall x \in X$, 令$y = f(x)$, 则$g(y) = gf(x) = x$, 即$g$是$Y$到$X$上的.

(ii) 设$f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$, 对任意$A, B$成立, 欲证$f$是一一对应, 设$f(x_1) = f(x_2)$, 令$A = \{x_1\}, B = \{x_2\}$, 则$f(A)\cap f(B) \neq \emptyset$, 设$y \in f(A)\cap f(B)$, 这意味着$A\cap B \neq \emptyset$, 这只有在$x_1 = x_2$时才可能.

反之, 如果f是一一对应. $\forall y \in f(A\cap B) \Leftrightarrow \exists x \in A\cap B$, 使$y = f(x)$ $\Leftrightarrow \exists x \in A$且$x \in B \Leftrightarrow y \in f(A)$, 且$y \in f(B)$(这一步使用了$f$是一一的)$\Leftrightarrow$ $y \in f(A)\cap f(B)$.

(iii) 设$f(X-A) \subset Y - f(A)$对任意$A \subset X$成立, 欲证f是一一对应, 设$f(x_1) = f(x_2) = y$, 令$A = \{x_1\}$, 我们要证明$x_2 \in A$, 从而$x_1 = x_2$, 若$x_2 \neq A$, 则$y \notin Y - f(x_1)$, $x_2 \in X - A$, 从而$y \in f(X-A)$, 矛盾.

反之, 若f是一一对应, $\forall y \in f(X-A) \Rightarrow \exists x \in X - A$, 使$f(x) = y \Rightarrow$ $x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)$ (这里面使用了f是一一的) $\Rightarrow f(x) \in Y - f(A)$.

(iv) $Y - f(A) \subset f(X-A)$, $\forall y \in Y$, 我们要找一个x, 使$f(x) = y$. 对于$B = Y - \{y\}$, 令$A = f^{-1}(B)$, 则$f(A) = B \Rightarrow Y - f(A) = \{y\} \subset f(X-A)$ $\Rightarrow \exists x \in X - A$, 使$f(x) = y$.

反之, f是X到Y上(onto)的, 则$\forall y \in Y - f(A)$, 设$f(x) = y \Leftrightarrow y \notin f(A)$ $\Rightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in X - A \Rightarrow f(x) \in f(X-A)$.

上面的推导过程中有几个$\Rightarrow$, 这也是关系式为$\subset$而不是$=$的原因所在, 这里简单讨论: $f(x) \notin f(A) \Rightarrow x \notin A$, 若$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$. 反过来是不一定成立的. 也就是$f(x) \in f(A)$, 不一定能够得出$x \in A$, 因为有可能有另一个$x'$, 使得$f(x') = f(x)$.

0.6 2013年5月18日

数是什么?这一节开始从集合论的角度建立起自然数体系,我个人的看法是:整个过程中有些思想方法值得学习,其余的可以仅仅做个了解,或者说类似书中引言的说法(read it,absorb it, and forget it),掌握之后,就可以把它忘记了,我们在使用的时候,继续遵循我们一致接收的中小学教育即可.北师大郇中丹老师的一个网络课程(数学分析,强烈推荐,即使不看其他的,至少应该看看第一讲绪论,这一讲虽然不涉及任何数学知识,但是很精彩!)中表示过这样一个意思(在第二讲集合论初步中):数学就是把我们生活中的一些事实说明白(我稍微扩充了一下).那么这一节以及接下来的几节内容,就是为了把数说明白,为数建立更严密的逻辑基础.我认为它有理论上的重要性,对于应用基本上意义不大.书中作了一个类比,我觉得很能说明一些东西.我们如何来定义"米"这个单位呢?或者如何定义长度呢?我们是通过指定一个物体的长度作为基准,然后所有其他的长度与之作比较.这里面,其实我们还有一个疑问,长度本身又是什么含义?在这里,我们其实并没有给出长度或者"米"本身的明确的定义,我们通过比较来给出我们需要的.

类似的,我们如何来定义自然数呢?我们其实无法说出自然数是什么?但是我们可以通过一些关系建立起自然数.例如,我们不知道2到底是什么?但是我们知道它是排在1后面的,在3前面的,2是1的后继,3是2的后继,这说明我们需要一个后继的概念,用什么方法来定义这个后继呢:$x^+ = x \cup \{x\}$.这是目前常用的一个方法,首先这个方法只涉及集合的概念,需要的很少,我们再定义$0 = \emptyset$,于是通过$\emptyset$,并集等就得到了自然数,这里我们需要一个公理:

公理 0.6.1 (无限公理(Axiom of infinity)) 存在一个集合,包含0和它的每一个元素的后继(successor).

集合A称为successor set,如果$\emptyset \in A$,且$\forall x \in A$,必有$x^+ \in A$.于是无限公理可以描述为:存在一个successor set A.

任一非空的successor簇的交集是一个successor set.证明如下:令$A = \bigcup_i A_i, i \in I$,$I$非空,由于$0 \in A_i, \forall i \in I$,于是$0 \in \bigcap_i A_i$,也就是$0 \in A$.设$x \in A$,则$x \in A_i, \forall i \in I$,于是$x^+ \in A_i, \forall i \in I$,故$x^+ \in \bigcap_i A_i$.

由此我们可以令ω为每一个successor set的子集,这样的ω是存在的并且是唯一的.ω中的元素就是自然数.

书中的这一节的后面是定义了一个序列sequence,并且把交,并,笛卡尔积推广到序列上,这里不讨论了.

0.7 2013年05月25日

Peano公理

这一节继续自然数的讨论.从上一节关于自然数的定义,可以得到如下结论:

(I) $0 \in \omega$;

(II)如果$n \in \omega$, 则$n^+ \in \omega$;这里$n^+ = n \cup \{n\}$.

(III)(数学归纳原理)设$S \subset \omega$, 若$0 \in \S$, 并且当$n \in S$时必有$n^+ \in S$, 则$S = \omega$;

(IV) $n^+ \neq 0$, 对所有$n \in \omega$成立;因为n^+包含n, 非空, 自然有$n^+ \neq 0$.

(V)若$n, m \in \omega$, 且$n^+ = m^+$, 则$n = m$.

这一个结论的证明比较费劲,书中给出了详细的过程,由于这个过程是归纳法,反证法相关方法的典型应用,这里给出详细过程.它的证明需要两个辅助命题:(i)不存在自然数,它是其元素的子集,由此可以得到$n \notin n$.(ii)一个自然数的每一个元素都是它的子集.对于(ii),引入一个概念:transitive set.集合E称为transitive set,如果集合E包含所有它的元素,或者说:$x \in y, y \in E$, 必有$x \in E$, 也就是$y \subset E$. 于是(ii)实际上是说每一个自然数都是transitive set.

(i)我们实际上需要证明:对于每一个自然数n, $x \in n$, 那么n不可能是x的子集.如果令$S = \{n \in \omega | \forall x \in n, n \subset x$不成立$\}$, 我们需要证明$S = \omega$. 使用归纳法:

(a) $0 \in S$成立,因为不存在$x \in 0$, 也就无所谓$0 \subset x$问题了.

(b)若$n \in S$, 要证明$n^+ \in S$.

首先n本身是n的子集,这也就意味着不可能有$n \in n$, 即$n \notin n$, 于是n^+不是n的子集,因为$n \in n^+ = n \cup \{n\}$. 若$n^+ \subset x$, 则$n \subset x$, 而$n \in S$, 故$x \notin n$, 也就是说n^+也不可能是n的任一元素的子集,有了这两点,说明n^+不是n^+的元素的子集, $n^+ \in S$. 获证.

(ii)令$S = \{n \in \omega | n$为transitive set$\}$. 需要证明$S = \omega$, 同样使用归纳法.

(a)首先$0 \in S$成立,否则意味着存在$y \in 0$, 使得y不是0的子集,这是不可能的.

(b)若$n \in S$, 要证明$n^+ \in S$;要时刻注意$n^+ = n \cup \{n\}$, 若$x \in n^+$, 则或者$x \in n$, 或者$x = n$, 若$x \in n$, 而$n \in S$, 于是$x \subset n \subset n^+$, 若$x = n$, 则$x \subset n^+$也成立,这意味着x是n^+的子集. $n^+ \in S$. 获证.

有了这两个辅助命题的帮助,可以来证明(V)了. $n^+ = m^+$, 而$n \in n^+$, 于是$n \in m^+$, 于是$n \in m$或者$n = m$, 由对称性,从另一方面推导将有$m \in n$或$m = n$, 若$m \neq n$, 则有$n \in m$和$m \in n$同时成立,根据(ii)每一个自然数满足transitive,有$n \in n$, 注意到$n \subset n$总是成立,又和(i)发生矛盾.

上述五条也常被称为Peano公理,这可能是用的最多的自然数的公理体系.德国数学家E.Landau写了一本《分析基础》(Foundations of Analysis),其中从Peano公理出发,完整推导了自然数到整数,到有理数,实数,复数的整个过程.

数学归纳法不仅仅可以用于证明,还可以用作定义.

设f是X到X的映射, $a \in X$, 一个比较自然的想法是按如下方式定义一个序列$\{u(n)\}$(从ω到X的映射): $u(0) = a, u(1) = f(u(0)), u(2) = f(u(1)), \ldots$

使用数学归纳法可以证明只要存在这样的$u(n)$,它就是唯一的,接下来还需要证明存在性,这就是下面的定理:

定理 0.7.1 (归纳定理(Recursion Theorem)) 若a是X中的元素,f是X到X的映射,那么存在一个ω到X的映射u,使得$u(0)=a$,且对所有$n\in\omega$,有$u(n^+)=f(n(n))$.

这个定理的应用就是所谓的递归定义,书中给出了详细的证明.这里复述如下:证明的总的思路是构造一个u,然后证明u是一个映射,并且满足条件.

首先注意到ω到X的映射是$\omega\times X$的一个特殊子集,令$\mathcal{C}$为所有满足如下条件的A的集合:A是有序对的集合,也就是$A\subset\omega\times X$,且$(0,a)\in A$,对于任意的$(n,x)\in A$,必有$(n^+,f(x))\in A$.

这个$\mathcal{C}$是非空的,因为$\omega\times X$本身满足条件,令u为所有$\mathcal{C}$中元素的交集,

$$u=\bigcap_{A\in\mathcal{C}}A.$$

下面证明$u\in\mathcal{C}$,首先$(0,a)\in A,\forall A\in\mathcal{C}$,故$(0,a)\in u$,其次,若$(n,x)\in u$,则$(n,x)\in A,\forall A\in\mathcal{C}$,故$(n^+,f(x))\in A,\forall A\in\mathcal{C}$,于是$(n^+,f(x))\in u$.

接下来若能证明u是一个映射,那么u就是满足条件的,也就是说对于每一个自然数$n\in\omega$,都有一个唯一的$x\in X$,使得$(n,x)\in u$.从u的构造可以知道,x的存在是成立的,接下来只要证明唯一性,也就是如果$(n,x)\in u,(n,y)\in u$,那么必有$x=y$.同样使用归纳法来证明,先构造集合$S=\{n\in\omega:(n,x)\in u,(n,y)\in u\Rightarrow x=y\}$.证明中要使用$u$的一个在包含关系下的极小性质,需要一些反证技巧.

(a) $0\in S$,如果不成立,在存在b使得$(0,b)\in u$,于是考虑$u-\{(0,b)\}$,它同样是$\mathcal{C}$中的元素,这与u的定义矛盾.

(b) 设$n\in S$,欲证$n^+\in S$. $n\in S\Rightarrow(n,x)\in u$, x是唯一的,于是$(n^+,f(x))\in u$,(这是u的定义),若$n^+\notin S,\exists y\neq f(x),(n^+,y)\in u$,考虑$u-\{(n^+,y)\}$,此时再次得到一个$u$的真子集同样属于$\mathcal{C}$,从而引发矛盾.

习题:(1)若n为自然数,则$n\neq n^+$;(2)若$n\neq 0$,则存在m使得$n=m^+$;(3)证明ω是reansitive set.(4)若E是某个自然数的非空子集,则存在$k\in E$,使得对于任意的异于k的$m\in E$,有$k\in m$.

(1)令$S=\{n\in\omega:n\neq n^+\}$,证明$S=\omega$.

首先$0\in S$,因为$0\neq o^+$.

其次,若$n\in S$,要证明$n^+\in S$,否则,意味着$n^+=(n^+)^+$,于是$n=n^+$,与假设矛盾.

(2)结论很明显,问题在于我们如何表示出这个m, $n\neq 0$,说明存在$x\in n$.我们令

$$m=\bigcup_{A\in n}A.$$

下面证明$n=m^+$.

$\forall x \in n \Rightarrow x \subset m \Rightarrow x \in m^+$.

$\forall x \in m^+$, 意味着$x = m$或$x \in m$, 若$x \in m$, $\exists A_0, x \in A_0, A_0 \in n, A_0 \subset n$(前面的辅助命题(ii)), 于是$x \in n$. 获证.

这里似乎有问题:第一部分$x \subset m \Rightarrow x \in m^+$恐怕不严密, 因为对于一般集合不成立, 只是自然数满足, 第二部分缺少$x = m$的情形. $m \in n$的证明并不轻松.

(3)它实际上是要证明每一个自然数是ω的子集. 使用归纳法. 0显然是ω的子集;假设n是ω的子集, 欲证n^+是ω的子集, $\forall \in n^+$, 应该证明$x \in \omega$, 此时$x = n$或者$x \in n$, $x = n \in \omega$; $x \in n \subset \omega$, 同样有$x \in \omega$. 获证.

(4)实际上是寻找集合E中的最小自然数. 令$k = \bigcap_{A \in E} A$即可. 因为E非空, k的存在性不是问题. 但是需要证明$k \in E$, 以及$k \in m, m \in E$, 且$m \neq k$.

(2)和(4)的构造我觉得是没有问题的, 可是严密的证明总是没有得到, 想了几天没有太好的思路.

0.8 2013年05月26日

算术

使用归纳定义, 可以给出自然数的加法, 乘法和幂的定义, 减法和除法在自然数并不总是可行的, 可以定义为加法和乘法的逆运算.

加法:$s_m(0) = m$, $s_m(n^+) = (s_m(n))^+$;也就是$s_M(n) = m + n$.

乘法:$p_m(0) = 0$, $p_m(n^+) = p_m(n) + m$;也就是$p_M(n) = m \cdot n$.

幂次:$e_m(0) = 1$, $e_m(n^+) = e_m(n) \cdot m$;也就是$e_M(n) = m^n$.

书中给出了加法结合律的证明, 作为数学归纳法的典型应用, 这里也记录之:

要证明

$$(k + m) + n = k + (m + n).$$

对n作归纳.

(i)$(k + m) + 0 = k + m = k + (m + 0)$;

(ii)假设对于n成立, 对于n^+来说,

$$(k+m)+n^+ = ((k+m)+n)^+ = (k+(m+N))^+ = k+(m+n)^+ = k+(m+n^+).$$

对于交换律:$m + n = n + m$, 在使用归纳法的时候, 需要一些技巧. 直接对m或者n做归纳, 都不容易成功, 因为$m + 0 = 0 + m$这一步本身就很麻烦, 于是我们分两步走:

(1)$0 + n = n + 0$.

(i)$n = 0$显然成立:$0 + 0 = 0$.

(ii)$0 + n^+ = (0 + n)^+ = (n + 0)^+ = n^+ = n^+ + 0$. 最后一步自然数加法的定义.

(2)$m^+ + n = (m + n)^+$.

仍然是对n归纳:

(i)$m^+ + 0 = m^+ = (m+0)^+$;

(ii)假设对n成立,$m^+ + n^+ = (m^+ + n)^+ = ((m+n)^+)^+ = (m+n^+)^+$.

接下来证明交换律,对m进行归纳.(i)$m=0$已经成立,(ii)假设交换律对于m成立,对于m^+来说,$m^+ + n = (m+n)^+ = (n+m)^+ = n+m^+$.

乘法的交换律和结合律可以用同样的方法证明.

两个自然数m和n是可比较的(comparable),若$m \in n$,或$m = n$,或$n \in m$.我们有结论:任意两个自然数是可比较的.这个结论比较重要,书中给出了详细证明.令

$$S(n) = \{m \in \omega : m\text{与}n\text{是可比较的}\},$$

以及$S = \{n \in \omega : S(n) = \omega\}$.我们需要证明$S = \omega$,这里同样应用数学归纳法.

(i)$0 \in S$,或者$S(0) = \omega$,使用归纳法:(a)$0 \in S(0)$,(b)$m \in S(0)$,则$m^+ \in S(0)$.

(ii)若$n \in S$,则$n^+ \in S$,首先$0 \in S(n^+)$,因为$n^+ \in S(0)$.接下来需要从$m \in S(n^+)$出发推导出$m^+ \in S(n^+)$.$m \in S(n^+)$,意味着$m \in n^+$,或者$m = n^+$,或者$n^+ \in m$,后两者立即可以得到$n^+ \in m$,故只要讨论$m \in n^+ = n \cup \{n\}$情形.于是$m = n$或$m \in n$,从$m = n$可以得到$m^+ = n^+$.于是接下来讨论$m \in n$这一情形,从$S(n) = \omega$可知$m^+ \in S(n)$,于是$m^+ \in n$,或者$m^+ = n$,或者$n \in m^+$.前面两个可以得到$m^+ \in n^+$,这就讨论一个情形:$n \in m^+$,但是它不能和$m \in n$同时成立.因为$n \in m^+$会得到$n = m$,或者$n \in m$,都有$n \subset m$,这与$m \in n$不能同时成立(前一节的结论).

$m \in n, m = n$和$n \in m$有且仅有一个成立.

若$m \in n$和$m = n$同时成立,$m = n \Rightarrow n \subset m$,不可能;若$m \in n$和$n \in m \Rightarrow m \in m$(transitive),$m \subset m$不可能.若$m = n, n \in m, \Rightarrow m \subset n$,同样不成立.

任一自然数不可能是它的元素的子集,另一个结论是不相同的m, n满足$m \in n$的充要条件是$m \subset n$.$m \in n \Rightarrow m \subset n$可以同$n$的transitive性质得到;$m \subset n, n \in m$不可能,否则$m$是它的某个元素$m$的子集.

$m \in n$定义为$m \subset n$,$m \in n$或者$m = n$定义为$m \leq n$.

习题:若$m < n$,则$m + k < n + k$,若$m < n, k \neq 0$,则$m \cdot k < n \cdot k$,若E是非空的自然数集,则存在$k \in E$,使得$k \leq m$对所有的$m \in E$成立.

(i)对k施加归纳法,(a)$k = 0$时,就是题设本身,结论成立;(b)假设结论对于k成立,对于k^+来说,$m + k^+ = (m+k)^+ < (n+k)^+ = n + k^+$.我们需要证明若$m < n$,则$m^+ < n^+$,这里一点可以这样得到:$m < n$,可以得到$m \in n \Rightarrow m \subset n \Rightarrow m \subset n^+$,$m \in n \Rightarrow m \in n^+ m \subset n^+$,因此$m^+ \in n^+$,$m^+ < n^+$.

(ii)似乎不是很容易,我们换一个思路,我们证明,对于任意自然数k,有$mk^+ < nk^+$.使用归纳法以及刚刚证明的关于加法的结论即可.

(a)$k = 0, mk^+ = m < n = nk^+$;(b)$m(k^+)^+ = mk^+ + m < nk^+ + m < nk^+ + n = n(k^+)^+$.

(iii)这实际上是前一节已经出现过的题目.

0.9 2013年06月01日

继续上一节的算术.

我们称集合E和F是对等(equivalent)的,如果存在一个E和F之间的一一对应,这是一个等价关系.

自然数n的每一个真子集对等于某个比n小的自然数,或者说n的元素.证明使用归纳法.$n=0$是平凡的,如果对于n成立,那么对于n^+来说,对于n^+的真子集E,可能出现这样几个情形:E是n的真子集,此时根据归纳假设,结论成立;若$E=n$,那结论自然成立,n中恒等映射;最后一个情形是$n\in E$,此时,存在$k\in n$,但是$k\notin E$,定义E上的映射f如下:当$i\neq n$时,$f(i)=i$,否则$f(n)=k$,这个f是E到n的一一对应.再使用归纳假设,以及一一对应关系的传递性,可以知道结论成立.

一个多少令人有些意味的事实是:一个集合可以和它的真子集对等.一个最好的例子就是$f(n)=n^+$,自然数集与非零自然数集之间的一个一一对应关系.但是对于自然数n,它不能和n的任一真子集对等.同样可以使用归纳法证明.从n到n^+这一步,分$n\in E$和$n\notin E$来讨论,$n\in E$时,取$E-\{n\}$.

集合E称为有限(finite)的,如果它与某个自然数对等,否则就称为无限的(infinite),

习题:用这个定义证明自然数集ω是无限的.

我们使用反证法,通过构造出一个自然数n和它的真子集之间的一一对应来得到矛盾.首先ω显然不可能和0对等,于是假设$\omega\sim n$,那么$n\neq 0$,前面已经证明过,此时存在自然数m,$n=m^+$.

假设f是ω和n之间一一对应,设$f(0)=k$,则$k\leq n$,我们构造$\omega-\{0\}$到m之间的映射g如下:若$x<k$,令$g(x)=f(x)$,当$x\geq m$时,$g(x)=f(x^+)$,那么这个g是一一的,于是我们有了$n\sim\omega\sim\omega-\{0\}\sim m$,于是自然数集和它的一个真子集对等了,发生矛盾.

一个集合最多与一个自然数对等.

任何两个不同的自然数m,n,必有$m\in n$或$n\in m$,无论如何其中一个是另一个的真子集,而自然数不可能与其真子集对等.由此可知有限集不可能和它的真子集对等,即对于有限集来说,整体大于部分成立.

习题:使用有限的定义的这个推论证明ω是无限的.

因为ω可以与$\omega-\{0\}$对等,从而不是有限的.

一个自然数的每一个子集与某个自然数对等,自然说明有限集的每一个子集是有限的.

有限集E的元素个数定义为与E对等的那个自然数,记为$\#E$,这个自然数是唯一的,$\#E$是$P(X)$到ω的一个映射.

(1)$E\subset F$,则$\#E\leq\#F$,E,F都是有限集.

$E\sim\#E$,$F\sim\#F$,$\#E$对等于F的某个子集,$\#E\leq\#F$.

(2)E,F为有限集,则$E\cup F$也是有限的,而且当E与F不相交时:$\#(E\cup F)=\#(E)+\#(F)$.

若m与n为自然数,则m在$m+n$中的补集与n对等.对n使用归纳法.

(3)E,F为有限集,则$E\times F$与E^F均为有限集,且$\#(E\times F)-\#(E)\cdot\#(F)$,$\#(E^F)=(\#(E))^{(\#(F))}$.

习题:有限个有限集的并集是有限的,若E是有限的,则$P(E)$是有限的,$\#(P(E))=2^{\#(E)}$,若E是非空的自然数的有限集,则存在$k\in E$,使得$m\leq k,\forall m\in E$.

0.10 2013年06月09日

次序(order)

这一节主要是各种定义:

(1)集合X中的关系R称为是反对称的(antisymmetric),如果xRy,yRx同时成立,必有$x=y$.

(2)关系R称为偏序(partial order),如果关系R满足自反的(reflexive),反对称的(antisymmetric),传递的(transitive),此时通常使用符号$\leq$.$\forall x,y,z\in X$,(i)$x\leq x$;(ii)若$x\leq y,y\leq x$,必有$x=y$;(iii)若$x\leq y,y\leq z$,则$x\leq z$.

这里之所以使用偏序,是因为有可能在X中存在元素x,y,无法确定序关系,如果对于X中的每一个元素x和y,或者$x\leq y$,或者$y\leq x$,则称$\leq$为全序(total order, simple order, linear order).一个全序集常称为链(chain).

偏序集是指带有偏序关系的集合,记作$(X,\leq)$.类似的,全序集是指带有全序关系的集合.

(3)对于X中的偏序$\leq$,我们称$y\geq x$,如果$x\leq y$;$x<y$或者$y>x$,如果$x\leq y$,且$x\neq y$,称x是predecessor of y,y是successor of x.

对于关系$<$,有(i)$x<y$和$y<x$不能同时成立;(ii)$x<y,y<z$,则有$x<z$,也就是$<$是传递的.

反过来,我们可以从$<$出发定义$\leq$,如果关系$<$满足(i)和(ii),然后定义$x\leq y$,如果$x<y$或者$x=y$,那么$\leq$是一个偏序.

可以把$\leq$和$<$的这种关系推广到一半的关系,对于关系R和S,满足xSy,如果xRy,且$x\neq y$,此时称S是strict relation corresponding R.R是weak relation corresponding S.

(4)对于偏序集$(X,\leq)$,$a\in X$,集合$s(a)=\{x\in X:x<a\}$,称为the initial segment determined by a,$\bar{s}(a)=\{x\in X:x\leq a\}$称为the weak initial segment determined by a.

(5)若$x\leq y,y\leq z$,称y位于x和z之间(between x and z),若$x<y,y<z$,称y是严格位于x和z之间(strictly between x and z).若$x<y$,并且不存在元素严格位于x和y之间,称x是immediate predecessor of y,或者说y是immediate successor of x.

(6) X为偏序集,若存在$a\in X$,使得$a\le x,\forall x\in X$,则称a为least (first, smallest) element of X,从反对称性可知这个元素是唯一的,类似,若存在元素$a\in X$,使得$x\le a,\forall x\in X$,称a为greatest (last, largest) element of X.对于自然数集,按照通常的次序,0是first element,而不存在last element,如果把次序颠倒过来,那么0是last element,而不存在first element.

(7)对于偏序集X, $a\in X$称为minimal element,如果不存在X中的元素严格小于a (strictly smaller than a),也就是从$x\le a$,将得到$x=a$;类似的,如果不存在元素严格大于a,称a为maximal element,于是从$a\le x$,必有$x=a$.

必须注意least element和minimal element是有差别的,非空集合X的非空子集构成的集合C,以包含关系作为偏序关系,此时每个单元素集合是minimal的,但是C中一般情况下不存在least element,除非X中只有一个元素.

(8) X为偏序集, $a\in X$, $E\subset X$,称a为E的下界(lower bound),若$\forall x\in E, a\le x$;称a为E的上界$upperbound$,若$\forall x\in E, x\le a$.注意,E中可以不存在上界或下界,也可以有多个上界或下界.后一种情况可以以自然数集作例子,n为E的上界,那么所有大于n的自然数都是E的上界.引入两个记号:

$$E_*=\{a\in X:\forall x\in E, a\le x\}$$
$$E^*=\{a\in X:\forall x\in E, x\le a\}$$

E_*以及$E_*\cap E$都可能是$\emptyset$,如果$E_*\cap E\neq\emptyset$,此时它必然只有一个元素.对于E_*来说,如果存在一个greatest element a,则称a为E的下确界(greatest lower bound或者infimum),记作g.l.b.或inf,类似,若E^*中包含一个least element a,则称a为E的上确界(least upper bound或supremum),记作l.u.b.或者sup.

下面给出几个例子:

(1)作为偏序的第一个例子,自然就是集合的包含关系,它是$P(X)$上的偏序,仅当X是单元素集的时候是全序.

(2)全序的例子可以在自然数集中得到,

(3)另一个偏序的例子是映射的扩张,给定集合X和Y, F为所有定义域在X中而值域在Y中的映射组成的集合.定义F上的关系R如下: fRg如果$\mathrm{dom}f\subset\mathrm{dom}g$,且$f(x)=g(x),\forall x\in\mathrm{dom}f$.也就是这意味着$f$是$g$的限制,而$g$是$f$的扩张.如果注意到映射是$X\times Y$的子集,那么$fRg$实际上就是$f\subset g$.

(4)对于集合$\omega\times\omega$,我们可以定义不同的偏序: (i) $(a,b)R(x,y)$,如果$(2a+1)\cdot 2^y\le(2x+1)\cdot 2^b$, (ii) $(a,b)S(x,y)$,如果$a<x$,或者$a=x$且$b\le y$;这个次序称为字典序(lexicographical order). (iii) $(a,b)T(x,y)$,如果$a\le x$且$b\le y$.

习题:使用R以及逆来表述关系R的反对称性和totality.

$RR^{-1}\subset I, R=E\times E$.

0.11 2013年06月10日

选择公理

对于很多有限情形下的操作,我们基本上不需要任何犹豫,但是在无限的情况下,很多操作需要精心考虑(其实在陶哲轩的《实分析》一书的第一章有不少例子).例如本节中出现的选择公理,它主要是针对无限的.

一个集合,或者是空集,或者非空,对于非空集合,必然存在一个元素.对于两个集合X和Y,对于它们的笛卡尔积$X\times Y$,如果X和Y中至少有一个为$\emptyset$时,笛卡尔积为$\emptyset$,如果都不是空集,$X\times Y$必定不是空集.这个结论很容易推广到有限个$\{X_i\}$的情形.可以对于无限个$\{X_i\}$的情形,我们需要本节的选择公理(Axiom of choice).

公理 0.11.1 (选择公理) 非空集合的非空簇的笛卡尔乘积是非空的(The Cartesian of a non-empty family of non-empty sets is non-empty).

用数学语言表示:考虑集合簇$\{X_i\}_{i\in I}$,这里每一个X_i都是非空集合,并且指标集I也是非空,此时存在一簇元素$\{x_i\}$, $i\in I$,使得$x_i\in X_i$,对每一个$i\in I$.

设$\mathcal{C}$是非空集合簇,此时我们完全可以把$\mathcal{C}$作为指标集,于是可以应用选择公理,这样就存在一个定义在$\mathcal{C}$上的映射f,只要$A\in\mathcal{C}$,就有$f(A)\in A$.特别地,令$\mathcal{C}$为非空集X的所有非空子集组成的集合,也就是$P(X)-\{\emptyset\}$,于是存在映射$f,\forall A\in\mathcal{C}, f(A)\in A$,这个映射称为$X$上的选择映射(choice function).直观上说,我们的映射f能够从每一个集合中选择出一个元素,这里也是”选择公理”名称的由来.有限的情形是可以证明的,而对于无限情形,则有这个公理来保证.

设$\mathcal{C}$是两两不相交的非空集合簇,此时存在集合A,使得$A\cap C$是单元素集合,$\forall C\in\mathcal{C}$.

作为选择公理的应用,我们证明如下结论:若集合X是无限的,那么存在一个子集对等于ω.直观的,既然X非空,那么存在$x_0\in X$,由于X不与1对等,$X-\{x_0\}$是非空的,于是存在$x_1\in X-\{x_0\}$,如此继续,存在$x_2\in X-\{x_0,x_1\}$,等等,这将形成一个无限序列$\{x_n\}$,这里x_n互相不等.这里出现了一个需要无限选择的情形,需要依赖于选择公理.书中给出了完整的过程.作为选择公理的应用,这里也给出完整过程.

考虑X中的选择映射$f\colon P(X)-\{\emptyset\}\to X, f(A)\in A,\forall A\in\operatorname{dom}f$.令$\mathcal{C}$表示$X$中所有的有限子集组成的集合簇.由于$X$是无限的,$\forall A\in\mathcal{C}$, $X-A$非空,因而$X-A\in\operatorname{dom}f$.接下来定义映射$g\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, $g(A)=A\cup\{f(X-A)\}$,我们从$\emptyset$出发,对于g使用归纳原理,存在ω到$\mathcal{C}$的映射U,使得$U(0)=\emptyset, U(n^+)=U(n)\cup\{f(X-U(n))\},\forall n\in\omega$.此时我们定义映射$v(n)=f(X-U(n))$,只要证明$v$是一个$\omega$到$X$的一个一一映射.那么$\omega$对等于$X$的一个子集($v$的值域).这只需要注意到:

(i) $v(n)\notin U(n),\forall n\in\omega$.理由:因为$f(X-U(n))\in X-U(n)$,于是$v(n)\notin U(n)$.

(ii)$v(n)\in U(n^+), \forall n\in\omega$. $U(n^+)$的定义.

(iii)对于自然数$n,m,n\le m$,则$U(n)\subset U(m)$.这同样可以由$U(n)$的定义得到,$U(m)$可以通过$U(n)$添加一个个元素得到的.

(iv)对于自然数$n,m,n<m$,则$v(n)\neq v(m)$.因为根据(ii)和(iii),$v(n)\in U(m)$,而根据(i),$v(m)\notin U(m)$,因此两者不可能相等.

这里最后的(iv)就是说明v把不同的自然数映射到X中不同的元素.因为任意两个不同的自然数,必有一个是严格小于另一个的.

上述结论一个更重要的推论,它涉及到了无限的本质:一个集合是无限的,当且仅当它能够对等于一个真子集.前面已经证明过有限集合不能和真子集对等;下面假设X是无限的,设v是ω到X的一一映射(单射),若x属于v的值域,即$x=v(n)$,令$h(x)=v(n^+)$,若x不属于v的值域,则令$h(x)=x$,此时h是X到X的一一映射,并且h的值域是X的真子集($v(0)\notin \mathrm{ran}(h)$).Dedekind使用这个结论来定义无限集.

0.12 2013年06月11日

Zorn引理

这一节只有一个主题:Zorn引理,证明过程很长!

很多存在性定理,经常会归结到一个偏序集以及一个最大元的存在性,这其中Zorn引理是最重要的一个.

引理 0.12.1 (Zorn引理(Zorn’s lemma)) 若X是一个偏序集(partially set),它的每一个链(chain)都存在上界(upper bound),那么X中包含一个最大元(maximal element).

链(chain)是一个全序集,这里所谓X中的chain是指X的子集,它自身构成一个全序集.

设A是X中的一个链,则根据题设要求,X中存在A的一个上界,这个上界不一定属于A,Zorn引理的结论是,存在一个元素$a\in X$,对于任意$x\in X$,如果$a\le x$,那么必有$a=x$.

直观的,既然X非空,那么存在$x_0\in X$,如果它是最大元,那就可以停止了.否则,存在x_1严格大于x_0,若x_1是最大元,停止,否则继续,Zorn引理是说,这个过程最终将能得到有一个最大元.

这里面前面部分没有问题,问题在于最后一步,因为这里是可能是一个无限过程,它会停止吗?这也是这里的困难所在,因为完全可能出现,上面的过程永远得不到最大元,或者说得到是一个non-maximal elements序列,此时怎么办?其实此时这个序列本身是X中的链,从而有上界,于是从这个上界开始,继续上述过程,这个过程何时结束,会如何结束,在这里还是不清晰的,我们需要更明确的证明过程,书中的方法来自Zermelo.

首先把抽象的偏序具体化:使用集合的包含关系.把问题进行转化,把抽象的变具体,通常是我们解决问题的思路所在.考虑weak initial segment $\bar{s}(x)$.用$\mathcal{S}$来表示$\bar{s}$的值域.$\mathcal{S}$是$P(X)$的子集.可以用包含关系形成一个偏序.$\bar{s}$是一个一一映射.并且$\bar{s}(x)\subset\bar{s}(y)$的充分必要条件是$x\leq y$.于是寻找$X$中的最大元,实际上成了寻找$\mathcal{S}$中的最大元.关于$X$中的链的假设对应于$\mathcal{S}$中的链.

用$\mathcal{X}$表示X中所有链的集合.这样的话$\mathcal{X}$也是$P(X)$的子集.$\mathcal{X}$中的每一个元素包含在某个$\bar{s}(x)$中,$\mathcal{X}$非空,我们以包含关系作偏序.若$\mathcal{C}$是$\mathcal{X}$中的一个链,那么$\bigcup_{A\in\mathcal{C}}A$属于$\mathcal{X}$,由于$\mathcal{X}$中的每一个集合包含在$\mathcal{S}$的某个集合中,从$\mathcal{S}$到$\mathcal{X}$这一个过程中没有引入新的最大元(maximal element).

$\mathcal{X}$的好处:首先它把条件中关于链的假设更加具体化了,对于$\mathcal{S}$中的每一个链$\mathcal{C}$有上界,$\mathcal{C}$中集合的并集是$\mathcal{C}$的上界,它属于$\mathcal{X}$;另一方面,$\mathcal{X}$包含它的每一个元素的所有子集,这使得我们可以通过每次给non-maximal集合添加一个元素来逐步放大.

至此,我们可以抛开X中的偏序,只需要考虑非空集合X的子集簇$\mathcal{X}$.根据上面的讨论$\mathcal{X}$满足两个条件:(1)$\mathcal{X}$的每一个元素的任一子集属于$\mathcal{X}$.它说明$\emptyset\in\mathcal{X}$;(2)$\mathcal{X}$中的每一个链中集合的并集属于$\mathcal{X}$.我们需要证明$\mathcal{X}$中存在最大元.

设f为X上的选择函数,即$f:P(X)-\{\emptyset\}\to X$,并且$f(A)\in A,\forall A\in \mathrm{dom}f$,对于$A\in\mathcal{X}$,我们定义$\hat{A}=\{x\in X:A\cup\{x\}\in\mathcal{X}\}$,定义映射$g:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$,

$$g(A)=\begin{cases}A\cup\{f(\hat{A}-A)\}, & \hat{A}-A\neq\emptyset\\ g(A)=A, & \hat{A}-A=\emptyset\end{cases}$$

若$\hat{A}-A\neq\emptyset$,令$g(A)=A\cup\{f(\hat{A}-A)\}$,若$\hat{A}-A=\emptyset$,令$g(A)=A$.根据$\hat{A}$的定义,$\hat{A}-A=\emptyset$当且仅当$A$是一个最大元.也就是说我们需要证明存在$A\in\mathcal{X}$,使得$g(A)=A$.注意到$A\subset g(A)$,并且$g(A)$最多比$A$多一个元素.

为方便,引入一个临时定义:称$\mathcal{X}$的一个子集$\mathcal{J}$是tower,如果

(i) $\emptyset\in\mathcal{J}$;

(ii) 若$A\in\mathcal{J}$,则$g(A)\in\mathcal{J}$;

(iii) 若$\mathcal{C}$是$\mathcal{J}$中的链,则并集$\bigcup_{A\in\mathcal{C}}A\in\mathcal{J}$.

Tower是存在的,$\mathcal{X}$本身就是一个,并且Tower的交集还是一个Tower,于是令$\mathcal{J}_0$表示所有tower的交集.则$\mathcal{J}_0$是最小的tower,我们来证明$\mathcal{J}_0$是一个链.

称$\mathcal{J}_0$中的集合C是comparable,如果它和$\mathcal{J}_0$中的任意元素都是comparable.于是$\forall A\in\mathcal{J}_0$,或者$A\subset C$,或者$C\subset A$.我们要证$\mathcal{J}_0$是一个链,意味着要证明$\mathcal{J}_0$中所有元素(集合)是comparable.comparable集合是存在的,$\emptyset$就是其中之一.下面的讨论暂时把注意力集中在一个任意的但是预先固定的comparable集合C.

设$A\in\mathcal{J}_0$, A是C的真子集,我们有$g(A)\subset C$. 由于C是comparable,于是或者$g(A)\subset C$,或者C是$g(A)$的真子集,对于后一情形,A是$g(A)$的真子集的真子集,$g(A)-A$将会超过1个元素,不可能.

令$\mathcal{U}=\{A\in\mathcal{J}_0 : A\subset C$或$g(C)\subset A\}$, $\mathcal{U}$中的所有元素和$g(C)$是comparable. 因为若$A\in\mathcal{U}$,则由于$C\subset g(C)$,或者$A\subset g(C)$,或者$g(C)\subset A$. 接下来证明$\mathcal{U}$是一个tower.

(i) $\emptyset\in\mathcal{U}$,因为$\emptyset\subset C$;

(ii) 欲证$A\in\mathcal{U}$,必有$g(A)\in\mathcal{U}$,分三步:(1)A是C的真子集;则$g(A)\subset C$,故$g(A)\in\mathcal{U}$;(2)$A=C$,则$g(A)=g(C)$, $g(C)\subset g(A)$, $g(A)\in\mathcal{U}$. (3)$g(C)\subset A$,则$g(C)\subset g(A)$,故$g(A)\in\mathcal{U}$.

(iii) 从$\mathcal{U}$的定义可知,$\mathcal{U}$中一个链的并集属于$\mathcal{U}$.

于是$\mathcal{U}$是一个tower,它包含于$\mathcal{J}_0$中,而$\mathcal{J}_0$是最小的tower,于是$\mathcal{U}=\mathcal{J}_0$.

上面的结论说明对于每一个comparable集合C, $g(C)$是comparable集合:给定C,按上述方式构造$\mathcal{U}$,从$\mathcal{U}=\mathcal{J}_0$说明若$A\in\mathcal{J}_0$,则或者$A\subset C$(从而$A\subset g(C)$),或者$g(C)\subset A$.

我们已经知道$\emptyset$是comparable, g把comparable集合映射到comparable集合,comparable集合构成的链的并集还是comparable集合,这说明$\mathcal{J}_0$中的comparable集合构成一个tower,comparable集合穷尽了$\mathcal{J}_0$,于是$\mathcal{J}_0$是一个链. $\mathcal{J}_0$中任一集合是comparable. 既然$\mathcal{J}_0$是一个链,$\mathcal{J}_0$中所有集合的并集A属于$\mathcal{J}_0$,于是$g(A)\subset A$,另一方面$A\subset g(A)$,故$A=g(A)$. Zorn引理证毕.

习题:Zorn引理等价于选择公理. 考察下面的结论,证明它们也等价于选择公理:(i)任一偏序集有一个最大链(maximal chain),也就是这个链不可能是其他链的真子集;(ii)偏序集的任一链包含在某个最大链中;(iii)每一个偏序集,如果任一链都有下界,那么这个偏序集必有一最大元(这里书中恐怕有问题,似乎应该是最小元).

对于集合X,考虑映射f:dom$f\subset P(X)$, ran$f\subset X$, $f(A)\in A, \forall A\in$ dom$f$. 以映射的扩张作为偏序,使用Zorn引理寻找一个最大元,并且证明若f是最大元,必有dom$f=P(X)-\{\emptyset\}$.

0.13 2013年06月16日

良序(well ordering)

一个偏序集可能不存在smallest element,即使存在,也可能对于某些子集不存在smallest element.若它的每一个子集有一个smallest element,则称该集合为良序集(well ordered set).它的order称为良序(well ordering).

值得指出:每一个良序集必是全序的(totally order).因为$\{x,y\}$构成一个子集,那么无论是x为first element,还是y是first element,都有$x\leq y$或者$y\leq x$.

例子:

(i)每一个自然数n,n的所有predecessor组成的集合.即集合n是良序的,以大小关系为序.

(ii)全体自然数组成的集合ω是良序的,同样以大小为序.

(iii)集合$\omega\times\omega$,序关系$(a,b)\leq(x,y)\Leftrightarrow(2a+1)2^y\leq(2x+1)2^b$,不是良序,$(a,b+1)\leq(a,b)\forall a,b$,这意味着$\omega\times\omega$不存在least element.

考察集合$\omega\times\omega$的子集$E=\{(a,b)|(1,1)\leq(a,b)\}$,则$E$有least element $(1,1)$,但是E仍然不是良序的,因为E的某些子集不存在least element,所有$(a,b)\neq(1,1)$组成的集合不存在least element.

(iv)$\omega\times\omega$对于字典序构成良序集.

对于良序集,我们有类似于数学归纳法的过程:考察良序集X的子集S,若任意X中的元素x满足:entire initial segment $s(x)$包含在S中,则x本身属于S.于是Principle of transifinite induction (超限归纳法)断言:$S=X$.

一般的归纳法与超限归纳法有两点明显的差异:(1)一般归纳法是从predecessor到当前元素,而超限归纳法要求当前元素的所有predecessor是一个集合.(2)超限归纳法没有要求归纳基础.对于(1),在良序集中,一个元素可能不存在直接前导(immediate predecessor).在自然数集ω上,超限归纳法等价于数学归纳法,在一般的良序集上,两者不等价.

例:令$X=\omega^+$,即$X=\omega\cup\{\omega\}$,序关系如下:ω中元素的序保持不变,$\forall n\in\omega,n<\omega$,此时$X$是一个良序集,问:是否存在一个子集$S\subset X$,使得$0\in S$,当$n\in S$时,有$n+1\in S$,答:有,即$S=\omega$.

第二个差异更多的是语言方面的,而不是概念上(本质的)的,或者说其实超限归纳法已经包含这部分内容.设x_0为X的smallest element,则$s(x_0)=\emptyset$,于是$s(x_0)\subset S$,根据超限归纳法的假设,$x_0\in S$.

需要证明这个超限归纳原理,证明不是很难:若$X-S$非空,则存在smallest element $x\in X-S$,这意味着它的initial segment $s(x)$中的每一个元素属于S,根据假设,$x\in S$,导致矛盾,故$X-S$只能是空集.

定义 0.13.1 称良序集A为良序集B的continuation,如果满足:(1)B是A的子集,即B是A的一个initial segment;(2)B中元素的序和它们在A中元素的序一致.

X为良序集,$a,b\in X,b<a$,则$s(a)$是$s(b)$的continuation,自然,X是$s(a)$和$s(b)$的continuation.

设$\mathcal{C}$为某个良序集的initialsegments组成的集合,则$\mathcal{C}$相对于continuation是一个链(chain).

$\mathcal{C}$中元素是良序集,任意两个不同的元素来说,其中一个是另一个的continuation.若一簇良序集构成的集合$\mathcal{C}$对于continuation构成一个chain,U是$\mathcal{C}$中集合的并集,那么存在一个唯一的U中的良序,使得U是$\mathcal{C}$中每一个不为U集合的continuation.或者说良序集的chain的并仍然是一个良序的,必须注意,这里的序必须是相对于continuation而言的,若order是inclusion,结论不成立.

证明如下:$a, b \in U$, $\exists A, B \in \mathcal{C}$, 使得$a \in A, b \in B$, 于是,或者$A = B$,或者$A$和$B$中的一个是另一个的continuation.无论何种情形,a, b属于$\mathcal{C}$中某一个集合,定义U中order如下:对于每一对$\{a, b\}$,它的序取G中某个集合(它包含a和b)中的顺序,$\mathcal{C}$是一个chain,这个order是确定的.也就是说刚才定义的序确实是一个order,同时是一个well ordering.

U的非空子集必有非空交集(因为这里面的集合非常特殊,一般的交集没有这种性质),必有first element,$\mathcal{C}$为一个continuation,可以得出:集合的first element同时是U的first element.

习题:偏序集X的子集A称为在X中是共尾(cofinal)的.若X中每一个元素x,存在A中元素a,使得$x \leq a$.证明每一个全序集含有一个cofinal well ordered subset.

良序集之所以重要,是因为下面的结论:

定理 0.13.1 (Well ordering theorem) 每一个集合可以良序化.

更好的说法是:对于每一个集合X,存在以X为domain的良序,必须注意,这里并没有说此良序和给定集合X上的原来的某些结构有关系.因此如果说偏序集或者全序集中的序不是一个良序时,并不意味着无法将它良序化.

证明这个结论使用Zorn引理.给定集合X,考虑X中所有良序子集构成的集簇W,W中元素是X中的子集A和A中的良序,我们通过continuation定义W中的一个偏序.

W非空,因为$\emptyset \in W$.若$X \neq \emptyset, \forall x \in X, \{(x, x)\}$.

若$\mathcal{C}$是W中的一个chain,则$\mathcal{C}$中集合的并集U拥有唯一的良序,使得U大于或等于$\mathcal{C}$中的每一个集合.这意味着Zorn引理的假设成立,于是存在maximal well ordered set,设它为$M \in W$,集合M必然等于整个集合X.

若存在X中元素$x \notin M$,那么M可以继续扩大,把x放在M中所有元素之后即可.

习题:一个全序集是良序的,当且仅当每一个元素的严格前驱构成的集合是well ordered.这个条件能否用于偏序集?Well ordering theorem包含选择公理.R为集合X的一个偏序,存在X中的一个全序S,使得$R \subset S$,也就是任何一个偏序可以在不扩大定义域的情形下扩展为全序.

0.14 2013年08月24日

超限递归(transfinite recursion)

$$2 < 2\sqrt{2} - 6\sqrt{6} + 4$$

分情况讨论:

如果$x > 0$,那么必然有$-b < 0 < \frac{1}{x}$,只需要考虑后半部分,此时有

$$\frac{1}{a} < x,$$

两者结合得到$x > \frac{1}{a}$;

如果$x < 0$,那么必然有$\frac{1}{x} < a$,只需要考虑前半部分,此时有

$$(-b)x > 1x < -\frac{1}{b}$$

这里面一定要注意两边乘以x的时候,$x < 0$是需要改变不等号的方向的,后面一步同时除以$-b < 0$,不等号再次变号. 两者结合得到

$$x < -\frac{1}{b};$$

最后的答案结合两个得到

$$x < -\frac{1}{b}\text{或者}x > \frac{1}{a}$$

首先是完全的排列一共有$6! = 720$个数字. 不过这个数字没有什么用途.

下面使用条件(大于345012)逐个计算:

首位数字只能是345中的一个:

345021 345102 345120 345201 345210

35开头的话,后面就是0124的任意排列一共有4!=24个.

其余不存在了如果是4或者5开头,后面是5个数字的任意排列,一共2*5!=240个,所以总数为 5 + 24 + 240 =149