数学专业研究生考试试题

虞朝阳

December 31, 2017

前言

本文档是我从网络(主要是博士家园)上收集的各个学校的研究生考试数学方面的试题. 这里无法保证每一道题目的准确性, 甚至有一些题目还是不完整的.

目 录

第 1 章　北京大学硕士研究生入学试题

1.1　1995年

1.1.1　解析几何与高等代数

1. 在空间仿射坐标系中，直线L_1, L_2有方程

$$L_1:\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-4y-z-2=0, \end{cases} \quad L_2:\begin{cases} x-y+z-2=0, \\ 4x-2y+1=0, \end{cases}$$

   (a) 设直线L过原点O，并且与L_1, L_2都相交，求L的方程(普通方程或标准方程)；

   (b) 设平面π过L_1，并且与L_2平行，求π的方程.

2. 设直角坐标系中，一圆柱面的轴线L有方程

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2},$$

   并且点$P(1,0,1)$在这个圆柱面上，求这个圆柱面的方程.

3. (a) 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R^n$，证明：如果向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则向量组$\alpha_1+2\alpha_2, -\alpha_2+3\alpha_3, 4\alpha_1-\alpha_3$也线性无关.

   (b) 设

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   求A的秩以及A的列向量组的一个极大线性无关组.

4. 用正交线性替换把下述二次型化成标准型，并且写出所作的正交线性替换：

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3.$$

5. 设V是数域K上所有2级矩阵组成的线性空间，定义V的一个变换$\underline{A}$如下：

$$\underline{A}(X)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1},\quad \forall X\in V$$

   (a) 证明$\underline{A}$是V的一个线性变换；
   (b) 求$\underline{A}$在V的一组基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵，其中$E_{ij}$表示$(i,j)$元为1，其余元全为零的2级矩阵.

6. 设A是一个n级正定矩阵，证明：存在一个n级正定矩阵B，使得$A=B^2$.

7. 设A是数域K上n维线性空间V的一个线性变换，设$f(x)$是数域K上的一个一元多项式，并且$f(x)=f_1(x)f_2(x)$，其中$f_1(x)$与$f_2(x)$互素，用$kerB$表示线性变换B的核．证明：

$$\ker f(A)=\ker f_1(A)\oplus\ker f_2(A).$$

1.1.2 数学分析

1. 求下列极限：
   (a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.

2. (a) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可微，且满足

$$\int_0^x tf(t)dt=\frac{x}{3}\int_0^x f(t)dt,\quad x>0,$$

   求$f(x)$.

   (b) 设$z=f(x,y)$是二次可微函数，又有关系式：

$$u=x+ay,\quad v=x-ay.\qquad (a\text{是常数})$$

   证明

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}.$$

3. (a) 设$f(x)$是$[1,+\infty)$上的可微函数，且当$x\to+\infty$时，$f(x)$是单调下降趋于零．若积分

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx$$

   收敛，证明积分$\int_1^{+\infty}xf'(x)dx$收敛.

(b) 判别级数

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$$

的敛散性.

4. (a) 设$f(x,y)$是R^2上的连续函数，试交换累次积分

$$\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2+x}^{x+1}f(x,y)dy$$

的求积次序.

(b) 求线积分

在下列两种曲线C的情形下的值.

i. $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$，逆时针方向；

ii. $C:|x|+|y|=1$，逆时针方向.

1.2 1996年

1.2.1 解析几何与高等代数

1. 在仿射坐标系中，求过点$M_0(0,0,-2)$，与平面$\pi_1:3x-y+2z-1=0$平行，且与直线l_1:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$$

相交的直线l的方程.

2. 作直角坐标变换，把下述二次曲面方程化成标准方程，并且指出它是什么曲面：

$$x^2+4y^2+z^2-4xy-8xz-4yz+2x+y+2z-\frac{25}{16}=0.$$

3. 设线性空间V中的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关.

(a) 试问：向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$是否线性无关？要求说明理由.

(b) 求向量组$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$生成的线性子空间$W$的一个基以及$W$的维数.

4. 设V是数域K上的n维线性空间，并且$V\ \ U\oplus W$. 任给$\alpha\in V$，设$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in U,\alpha_2\in W$，令

$$P(\alpha)=\alpha_1.$$

证明:

(a) P是V上的线性变换，并且$P^2=P$;

(b) P的核$\ker P=W$，P的象(值域)$\operatorname{Im}P=U$;

(c) V中存在一个基，使得P在这个基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中I_r表示r级单位矩阵；请指出r等于什么?

5. n级矩阵A称为周期矩阵，如果存在正整数m，使$A^m=I$，其中I是单位矩阵. 证明：复数域上的周期矩阵一定可以对角化.

6. 用$R[x]_4$表示实数域上次数小于4的一元多项式组成的集合，它是一个欧几里德空间，其上的内积:

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

设W是由零次多项式组成的子空间，求$W^\perp$以及它的一个基.

1.2.2 数学分析

1. 判断下列命题的真伪，不必说明理由.

(a) 对数列$\{a_n\}$作和$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，若$\{s_n\}$是有界数列，则$\{a_n\}$是有界列.

(b) 数列$\{a_n\}$存在极限$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$的充要条件是：对任一自然数$p$，都有

$$\lim_{n\to}|a_{n+p}-a_n|=0.$$

(c) 设$f(x)$是$[a,+\infty)$上的递增连续函数，若$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界，则$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

(d) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且在(a,b)上可微，若存在极限

$$\lim_{x\to a+0}f'(x)=l,$$

则右导数$f'_+(a)$存在且等于l.

(e) 若$f(x)$是$[a,+\infty)$上的非负连续函数，且积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. 设$f(x)$在$x=a$处可微，$f(a)\neq 0$，求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\Big)^n.$$

3. (a) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad (|x|<1)$$

的和.

(b) 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{3^n}$的和.

4. 求积分

$$I=\iiint\limits_D (x+y+z)dxdydz,$$

的值，其中D是由平面$x+y+z=1$以及三个坐标平面所围成的区域.

5. 设$a_n\neq 0\,(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$. 若存在极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$$

证明：$|l|\leqslant 1$.

6. 设在$[a,b]$上，$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$，$g_n(x)$一致收敛于$g(x)$. 若存在正数列$\{M_n\}$，使得

$$|f_n(x)|\leqslant M_n, |g_n(x)|\leqslant M_n \quad (x\in[a,b], n=1,2,\cdots)$$

证明$f_n(x)g_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)g(x)$.

1.3 1997年

1.3.1 解析几何与高等代数

1. 判断下列二次曲线类型

   (a) $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$；

   (b) $x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0$.

2. 过x轴和y轴分别作动平面，交角α是常数，求交线轨迹的方程，并证明它是一个锥面.

3. 设A,B是数域K上的n阶方阵，X是未知量$x_1,\cdots,x_n$所成的$n\times 1$矩阵. 已知齐次线性方程组$AX=0$和$BX=0$分别有l，m个线性无关解向量，这里$l\geqslant 0$，$m\geqslant 0$.

   (a) 证明$(AB)X=0$至少有$\max(l,m)$个线性无关解向量.

   (b) 如果$l+m>n$，证明$(A+B)X=0$必有非零解.

   (c) 如果$AX=0$和$BX=0$无公共非零解向量，且$l+m=n$，证明R^n中任一向量α可唯一表成$\alpha=\beta+\gamma$，这里β,γ分别是$AX=0$和$BX=0$的解向量.

4. 设A是实数域R上的3维线性空间V内的一个线性变换，对V的一组基$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$，有

$$
\begin{aligned}
A\epsilon_1&=3\epsilon_1+6\epsilon_2+6\epsilon_3,\\
A\epsilon_2&=4\epsilon_1+3\epsilon_2+4\epsilon_3,\\
A\epsilon_3&=-5\epsilon_1-4\epsilon_2-6\epsilon_3.
\end{aligned}
$$

   (a) 求A的全部特征值和特征向量.

   (b) 设$B=A^3-5A$，求B的一个非平凡的不变子空间.

5. 设$f(x)$是有理数域Q上的一个m次多项式$(m\geqslant 0)$，n是大于m的正整数，证明：$\sqrt[n]{2}$不是$f(x)$的实根.

6. 设A是n维欧氏空间V内的一个线性空间，满足

$$(A\alpha,\beta)=-(\alpha,A\beta),\quad (\forall\alpha,\beta\in V)$$

   (a) 若λ是A的一个特征值，证明$\lambda=0$.

   (b) 证明V内存在一组标准正交基，使A^2在此组基下的矩阵为对角矩阵.

   (c) 设A在V的某组标准正交基下的矩阵为A，证明：把A看作复数域C上的n阶方阵，其特征值必为0或纯虚数.

1.3.2 数学分析

1. 将函数$f(x)=\arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$，在$x=0$点展开为幂级数，并指出收敛区间.

2. 判别广义积分的收敛性:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx.$$

3. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有任意阶导数$f^{(n)}(x)$，且对任意有限闭区间$[a,b]$，$f^{(n)}(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$\phi(x)\,(n\to+\infty)$，求证：$\phi(x)=ce^x$，c为常数.

4. 设$x_n>0\,(n=1,2,\cdots)$及$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. 用$\epsilon-N$语言证明$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

5. 求第二型曲面积分

$$\oiint_S(xdydz+\cos ydzdx+dxdy)$$

其中S为$x^2+y^2+z^2=1$的外侧.

6. 设$x=f(u,v),y=g(u,v)$，$w=w(x,y)$有二阶连续偏导数，满足

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v},\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,$$

证明:

(a) $\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial v^2}=0$;

(b) $w(u,v)=w(f(u,v),g(u,v))$满足$\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

7. 计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant 2x}(x^2+y^2+z^2)^{5/2}dxdydz.$$

1.4 1998年

1.4.1 解析几何与高等代数

1. 设在直角坐标系中给出了两条互相异面的直线l_1, l_2的普通方程：

$$l1:\begin{cases} x+y+z-1=0 & 3x+y+1=0 \\ x+y+2z+1=0 & y+3z+2=0 \end{cases} \quad l2:\{$$

   (a) 过l_1作平面π，使π与l_2平行；

   (b) 求l_1与l_2间的距离；

   (c) 求l_1与l_2的公垂线的方程.

2. 在直角坐标系中，球面的方程为：

$$(x-1)^{+}y^2+(z+1)^2=4,$$

   求所有与向量$u(1,1,1)$平行的球面的切线所构成的曲面的方程.

3. 讨论a, b满足什么条件时，数域K上的下述线性方程组有唯一解，有无穷多个解，无解？当有解时，求出该方程组全部解.

$$\begin{cases} ax_1+3x_2+3x_3=3 \\ x_1+4x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+bx_3=2 \end{cases}$$

4. 设V是定义域为实数集R的所有实值函数组成的集合，对于$f, g \in V$，$a \in R$，分别用下列式子定义$f+g$与af：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (af)(x)=a(f(x)), \quad \forall x \in R$$

   则V成为实数域上的一个线性空间.

   设$f_0(x)=1$，$f_1(x)=\cos x$，$f_2(x)=\cos 2x$，$f_3(x)=\cos 3x$，

   (a) 判断f_0, f_1, f_2, f_3是否线性无关，写出理由；

   (b) 用$< f, g >$表示f, g生成的线性子空间，判断$< f_0, f_1 > + < f_2, f_3 >$是否为直和，写出理由.

5. 用J表示元素全为1的n级矩阵，$n \geqslant 2$. 设$f(x)=a+bx$是有理数域上的一元多项式，令$A=f(J)$.

   (a) 求J的全部特征值和全部特征向量；

(b) 求A的所有特征子空间；

(c) A是否可以对角化？如果可对角化，求出有理数域上的一个可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵，并且写出这个对角矩阵.

6. 用$M_2(C)$表示复数域C上所有2级矩阵组成的集合. 令

$$V=\{A\in M_2(C)|\mathrm{Tr}\,(A)=0,\text{且}A^*=A\},$$

其中$\mathrm{Tr}\,(A)$表示A的迹，A^*表示A的转置共轭矩阵.

(a) 证明V对于矩阵的加法，以及实数与矩阵的数量乘法成为实数域上的线性空间，并且说明V中元素形如

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2+ia_3 \\ a_2-ia_3 & -a_1 \end{pmatrix},$$

其中a_1,a_2,a_3都是实数，$i=\sqrt{-1}$.

(b) 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2+ia_3 \\ a_2-ia_3 & -a_1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2+ib_3 \\ b_2-ib_3 & -b_1 \end{pmatrix}$$

考虑V上的一个二元函数：

$$(A,B)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

证明这个二元函数是V上的一个内积，从而V成为欧几里德空间；并且求出V的一个标准正交基，要求写出理由.

(c) 设T是一个酉矩阵(即，T满足$T^*T=I$，其中I是单位矩阵)，对任意$A\in V$，规定$\Psi_T(A)=TAT^{-1}$，证明Ψ_T是V上的正交变换.

(d) Ψ_T的意义同第(3)小题，求下述集合

$$S=\{T|\det T=1,\text{且}\Psi_T=1_V\},$$

其中$\det T$表示T的行列式，1_V表示V上的恒等变换.

1.4.2 数学分析

1. 选一个最确切的答案，填入括号中.

(a) 设$f(x)$定义在$[a,b]$上. 若对任意的$g\in R([a,b])$，有$f\cdot g\in R([a,b])$，则 ( )

i. $f\in R([a,b])$,

ii. $f \in C([a,b])$,

iii. f可微,

iv. f可导.

(b) 设$f \in C((a,b))$. 若存在

$$\lim_{x\to a+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to b-} f(x) = 2,$$

则 ( )

i. $f(x)$在$[a,b]$一致连续,

ii. $f(x)$在$[a,b]$连续,

iii. $f(x)$在(a,b)一致连续,

iv. $f(x)$在(a,b)可微.

(c) 若反常(广义)积分$\int_0^1 f(x)dx$, $\int_0^1 g(x)dx$都存在, 则反常积分

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

( )

i. 收敛,

ii. 发散,

iii. 不一定收敛,

iv. 一定不收敛.

(d) 若$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 1$, 则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ( )

i. 发散,

ii. 收敛,

iii. 不一定收敛,

iv. 绝对收敛.

(e) 设$f(x,y)$在区域$\{(x,y) : x^2+y^2<1\}$上有定义, 若存在偏导数

$$f'_x(0,0) = 0 = f'_y(0,0).$$

则$f(x,y)$ ( )

i. 在点$(0,0)$处连续,

ii. 在点$(0,0)$处可微,

iii. 在点$(0,0)$处不一定连续,

iv. 在点$(0,0)$处不可微.

2. 计算下列极限(写出演算过程)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}\quad(a>0)$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x})$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0+}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

3. 求下列积分值.

(a) $\iint\limits_S x^3dydz+x^2ydzdx+x^2zdxdy\qquad S: z=0, z=b, x^2+y^2=a^2$;

(b) $\int_C \frac{1}{y}dx+\frac{1}{x}dy\qquad C: y=1, x=4, y=\sqrt{x}$逆时针一周.

4. 解答下列问题

(a) 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\frac{n}{e})^n x^n$的收敛半径.

(b) 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$的和.

5. 试证明下列命题:

(a) 反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx\,(p\geqslant 0)$是收敛的.

(b) 设$f(x,y)$在$G=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$上有定义. 若$f(x,0)$在$x=0$处连续, 且$f'_y(x,y)$在G上有界, 则$f(x,y)$在$(0,0)$处连续.

1.5 1999年

1.5.1 解析几何与高等代数

1. 在仿射坐标系中, 已知直线l_1,l_2的方程分别是

$$\frac{x+13}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1},\quad \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}.$$

(a) 判断直线l_1与l_2的位置关系s，要求写出理由；

(b) 设直线l的一个方向向量为$\vec{v}(8,7,1)$，并且l与l_1和l_2都相交，求直线l的方程.

2. 在直角坐标系$Oxyz$中，设顶点在原点的二次锥面S的方程为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=0$$

(a) 如果三条坐标轴都是S的母线，求a_{11},a_{22},a_{33}；

(b) 证明：如果S有三条互相垂直的直母线，则

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=0.$$

3. 设实数域上的矩阵A为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\-3&0&0\end{pmatrix}$$

(a) 求A的特征多项式$f(\lambda)$；

(b) $f(\lambda)$是否为实数域上的不可约多项式；

(c) 求A的最小多项式，要求写出理由；

(d) 实数域上的矩阵A是否可对角化，要求写出理由.

4. 设实数域上的矩阵A为

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&6&-2\\1&-2&2\end{pmatrix}$$

(a) 判断A是否为正定矩阵，要求写出理由；

(b) 设V是实数域上的3维线性空间，V上的一个双线性函数$f(\alpha,\beta)$在V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的度量矩阵为$A$. 证明$f(\alpha,\beta)$是$V$的一个内积；并且求出$V$对于这个内积所成的欧氏空间的一个标准正交基.

5. 设V是数域K上的一个n维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$V$的一个基，用$V_1$表示由$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$生成的线性子空间；令

$$V_2=\{\sum_{i=1}^n k_i\alpha_i|\sum_{i=1}^n k_i=0,k_i\in K\}.$$

(a) 证明V_2是V的子空间;

(b) 证明$V = V_1 \oplus V_2$;

(c) 设V上的一个线性变换A在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的矩阵$A$是置换矩阵(即，$A$的每一行与每一列都只有一个元素是1，其余元素全为0)，证明V_1与V_2都是A的不变子空间.

6. 设V和U分别是数域K上的n维，m维线性空间，A是V到U的一个线性映射，即A是V到U的映射，且满足

$$A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta, \quad \forall \alpha, \beta \in V,$$
$$A(k\alpha) = kA\alpha, \quad \forall \alpha \in V, k \in K,$$

令

$$\operatorname{Ker} A := \{\alpha \in V | A\alpha = 0\},$$

称$\operatorname{Ker} A$是A的核，它是V的一个子空间，用$\operatorname{Im} A$表示A的象(即值域).

(a) 证明：$\dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \dim V$;

(b) 证明：如果$\dim V = \dim U$，则A是单射当且仅当A是满射.

7. 设V是实数域R上的n维线性空间. V上的所有复值函数组成集合，对于函数的加法以及复数与函数的数量乘法，形成复数域C上的一个线性空间，记作C^V.

证明：如果$f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}$是$C^V$中$n+1$个不同的函数，并且它们满足

$$f_i(\alpha+\beta) = f_i(\alpha) + f_i(\beta), \quad \alpha, \beta \in V,$$
$$f_i(k\alpha) = kf_i(\alpha), \quad \forall k \in R, \alpha \in V.$$

则$f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}$是$C^V$中的线性相关的向量组.

1.5.2 数学分析

1. 判断下列命题的真伪:

(a) 设$\{a_n\}$是一个数列. 若在任一子列$\{a_{n_k}\}$中均存在收敛子列$\{a_{n_{k_i}}\}$，则$\{a_n\}$必为收敛列.

(b) 设$f \in C((a,b))$. 若存在

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A < 0, \quad \lim_{x \to b-} f(x) = B > 0,$$

则必存在$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = 0$.

(c) 设$f(x)$在$[a,b]$上有界. 若对任意的$\delta>0$，$f(x)$在$[a+\delta,b]$上可积. 则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

(d) 设$f(x)$，$g(x)$在$[0,1]$上的瑕积分均存在，则乘积$f(x)\cdot g(x)$在$[0,1]$上的瑕积分必存在.

(e) 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，若有$a_n \leqslant b_n$，$(n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$必收敛.

2. 求下列极限(写出计算过程).

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{\alpha\log(1-x)+\beta(1-e^{-x^2})}$, $\quad(a^2+\alpha^2\neq 0)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}})$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n dx$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n}$, $\quad(a>0)$.

3. 求解下列命题.

(a) 求级数$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}2^n$之和;

(b) 设$f\in C([0,1])$，且在$(0,1)$上可微，若有$8\displaystyle\int_{7/8}^{1}f(x)dx=f(0)$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.

(c) 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$收敛.

(d) 证明：积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy$在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

(e) 设$u=f(x,y,z)$，$g(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，且已知f与g都有一阶连续偏导数，$\dfrac{\partial g}{\partial z}\neq 0$. 求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(f) 设$f(x)$在$[-1,1]$上二次连续可微，且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

证明：级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛.

1.6 2000年

1.6.1 解析几何与高等代数

1. (a) 在直角坐标系中，一个柱面的准线方程为

$$\begin{cases} xy = 4, \\ z = 0, \end{cases}$$

母线方向为$(1, -1, 1)$，求这个柱面的方程.

(b) 在平面直角坐标系Oxy中，二次曲线的方程为

$$x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0,$$

求I_1, I_2, I_3；指出这是什么二次曲线，并且确定其形状.

2. (a) 设实数域上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵T，使得$T^{-1}AT$为对角矩阵，并且写出这个对角矩阵.

(b) 在直角坐标系$Oxyz$中，二次曲面S的方程为

$$2x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 8xz = 1,$$

作直角坐标变换，把S的方程化成标准方程. 并且指出它是什么二次曲面.

3. 设实数域上的$s \times n$矩阵A的元素只有0和1，并且A的每一行元素的和是常数r，A的每两个行向量的内积为常数m，其中$m < r$.

(a) 求$|AA'|$；

(b) 证明$s \leqslant n$；

(c) 证明AA'的特征值全为正实数.

4. 设V是数域K上的n维线性空间，$\mathcal{A}$是V上的线性变换，且满足$\mathcal{A}^3 - 7\mathcal{A} = -6\mathcal{I}$，其中$\mathcal{I}$表示$V$上的恒等变换. 判断$\mathcal{A}$是否可对角化，写出理由.

5. 设V和V'都是数域K上的有限维线性空间，A是V到V'的一个线性映射，证明：存在直和分解

$$V = U \oplus W, \quad V' = M \oplus N,$$

使得$\mathrm{Ker}\, A = U$，并且$W \cong M$.

6. 设$f(x)$和$p(x)$都是首项系数为1的整系数多项式，且$p(x)$在有理数域Q上不可约．如果$p(x)$与$f(x)$有公共复根α，证明：

(a) 在$Q[x]$中，$p(x)$整除$f(x)$;

(b) 存在首项系数为1的整系数多项式$g(x)$，使得

$$f(x) = p(x)g(x).$$

7. (a) 设V是实数域上的线性空间，f是V上的正定的对称双线性函数，U是V的有限维子空间，证明

$$V = U \oplus U^{\perp},$$

其中$U^{\perp} = \{\alpha \in V | f(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in U\}$.

(b) 设V是数域K上的n维线性空间，g是V上的非退化的对称双线性函数，W是V的子空间，令

$$W^{\perp} = \{\alpha \in V | g(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \in W\}.$$

证明：

i. $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$;

ii. $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

1.6.2　数学分析

1. 计算：

(a) 求极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}, \quad a > 0.$$

(b) 求e^{2x-x^2}到含x^3项的Taylor展开式.

(c) 求积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx,$$

其中$a > b > 0$.

(d) 求积分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^\alpha dxdydz.$$

V是实心球$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$，$\alpha > 0$.

(e) 求积分

$$\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy,$$

S是$x^2+y^2+z^2=a^2$的外表面.

2. 叙述定义

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;

(b) 当$x\to a-0$时，$f(x)$不以A为极限.

3. 函数$f(x)$在$[a,b]$上一致连续，又在$[b,c]$上一致连续，$a<b<c$，用定义证明$f(x)$在$[a,c]$上一致连续.

4. 构造一个二元函数$f(x,y)$，使得它在原点$(0,0)$两个偏导数都存在，但在原点不可微.

5. 函数$f(x)$在$[a,b]$连续，证明不等式

$$[\int_a^b f(x)dx]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

6. (a) 在区间$(0,2\pi)$内展开$f(x)$的Fourier级数：

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2};$$

(b) 证明它的Fourier级数在$(0,2\pi)$内每一点上收敛于$f(x)$.

1.7 2001年

1.7.1 解析几何与高等代数

1. 在空间直角坐标系中，点A,B,C的坐标依次为：

$$(-2,1,4),\quad (-2,-3,-4),\quad (-1,3,3)$$

(a) 求四面体$OABC$的体积;

(b) 求三角形ABC的面积.

2. 在空间直角坐标系中,

$$l_1 : \frac{x-a}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$$

与

$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$$

是一对相交直线.

(a) 求a.

(b) 求l_2绕l_1旋转出的曲面的方程.

3. 设ω是复数域C上的本原n次单位根(即$\omega^n = 1$, 而当$0 < l < n$时, $\omega^l \neq 1$), s, b都是正整数, 而且$s < n$, 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega^b & \omega^{2b} & \cdots & \omega^{(n-1)b} \\ 1 & \omega^{b+1} & \omega^{2(b+1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(b+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{b+s-1} & \omega^{2(b+s-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)(b+s-1)} \end{pmatrix}$$

任取$\beta \in C^s$, 判断线性方程组$AX = \beta$有无解? 有多少解? 写出理由.

4. (a) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

i. 若把A看成有理数域上的矩阵, 判断A是否可对角化, 写出理由;

ii. 若把A看成复数域上的矩阵, 判断A是否可对角化, 写出理由.

(b) 设A是有理数域上的n级对称矩阵, 并且在有理数域上A合同于单位矩阵I. 用δ表示元素全为1的列向量, b是有理数. 证明: 在有理数域上

$$\begin{pmatrix} A & b\delta \\ b\delta' & b \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & b - b^2\delta' A^{-1}\delta \end{pmatrix}$$

5. 在实数域上的n维列向量空间R^n中，定义内积为$(\alpha, \beta) = \alpha'\beta$，从而$R^n$成为欧几里得空间.

   (a) 设实数域上的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

   求齐次线性方程组$AX = 0$的解空间的一个正交基.

   (b) 设A是实数域R上的$s \times n$矩阵，用W表示齐次线性方程组$AX = 0$的解空间，用U表示A'的列空间(即A'的列向量组生成的子空间). 证明：$U = W^{\perp}$.

6. 设A是数域K上n维线性空间V上的一个线性变换. 在$K[x]$中，$f(x) = f_1(x)f_2(x)$，且$f_1(x)$与$f_2(x)$互素，用$\mathrm{Ker}\, A$表示线性变换A的核. 证明:

$$\mathrm{Ker}\, f(A) = \mathrm{Ker}\, f_1(A) \oplus \mathrm{Ker}\, f_2(A).$$

7. 设A是数域K上n维线性空间V上的一个线性变换，I是恒等变换. 证明：$A^2 = A$的充分必要条件是

$$\mathrm{rank}\,(A) + \mathrm{rank}\,(A - I) = n.$$

1.7.2 数学分析

1. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n}}{1 + a^{2n}}.$$

2. 设$f(x)$在点a可导，$f(a) \neq 0$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n.$$

3. 证明函数$f(x) = \sqrt{x}\ln x$在$[1, +\infty]$上一致连续.

4. 设D是包含原点的平面凸区域，$f(x, y)$在D上可微,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

   证明：$f(x, y)$在D上恒为常数.

5. 计算第一型曲面积分
$$\iint\limits_{\Sigma} x dS,$$
其中Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=ax(a>0)$割下的部分.

6. 求极限
$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz,$$
其中f在$[0,1]$上连续，$f(0)=0$，$f'(0)=1$.

7. 求常数λ，使得曲线积分
$$\int_L \frac{x}{y}r^{\lambda}dx-\frac{x^2}{y^2}r^{\lambda}dy=0 \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2})$$
对上半平面的任何光滑闭曲线L成立.

8. 证明函数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,\infty)$上无穷次可微.

9. 求广义积分
$$\int_0^{\infty}\frac{\arctan bx^2-\arctan ax^2}{x}dx, \quad b>a>0.$$

10. 设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，且$f(x)=x$，$-\pi\leqslant x<\pi$. 求$f(x)$与$|f(x)|$的Fourier级数. 它们的Fourier级数是否一致收敛(给出证明)？

1.8 2002年

1.8.1 解析几何与高等代数

1. 在空间直角坐标系中，直线l_1和l_2分别有方程
$$\begin{cases} x+y+z-1=0\\ x+y+2z+1=0\end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y+z=0\\ x+3z+2=0\end{cases}$$
   (a) 求过l_1平行于l_2的平面的方程；
   (b) 求l_1和l_2的距离；

(c) 求l_1和l_2的公垂线的方程.

2. 在空间直角坐标系中，求直线

$$\begin{cases} x = 3x + 2 \\ y = 2y - 1 \end{cases}$$

绕z轴旋转所得旋转曲面的方程.

3. 用正交变换化下面二次型为标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

(要求写出正交变换的矩阵和相应的标准形)

4. 对于任意非负整数n，令$f_n(x) = x^{n+2} - (x+1)^{2n+1}$，证明:

$$(x^2 + x + 1, f_n(x)) = 1.$$

5. 设正整数$n \geqslant 2$，用$M_n(K)$表示数域K上全体$n \times n$矩阵关于矩阵加法和数乘所构成的K上的线性空间. 在$M_n(K)$中定义变换σ如下:

$$\sigma((a_{ij})_{n\times n}) = (a'_{ij})_{n\times n}, \quad \forall (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(K),$$

其中

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq j; \\ i \cdot \mathrm{tr}\,(A), & i = j. \end{cases}$$

(a) 证明σ是$M_n(K)$上的线性变换.

(b) 求出$\ker \sigma$的维数与一组基.

(c) 求出σ的全部特征子空间.

6. 用R表示实数域，定义R^n到R的映射f如下

$$f(X) = |x_1| + \cdots + |x_r| - |x_{r+1}| - \cdots - |x_{r+s}|, \quad \forall X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n,$$

其中$r \geqslant s \geqslant 0$. 证明:

(a) 存在R^n的一个$n-r$维子空间W，使得$f(X) = 0$，$\forall X \in W$;

(b) 若W_1, W_2是R^n的两个$n-r$维子空间，且满足

$$f(X) = 0, \quad \forall X \in W_1 \cup W_2,$$

则一定有$\dim(W_1 \cap W_2) \geqslant n - (r+s)$.

7. 设V是数域K上的n维线性空间，$V_1, \cdots V_n$是V的s个真子空间，证明:

(a) 存在$\alpha \in V$，使得$\alpha \notin V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$;

(b) 存在V中的一组基$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$，使得

$$\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\} \cap (V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_s) = \varnothing.$$

1.8.2 数学分析

1. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

2. 设$\alpha \geqslant 0$，$x_1 = \sqrt{2+\alpha}$，$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$，$n = 1,2,\cdots$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求极限值.

3. 设$f(x)$在$[a, a+2\alpha]$上连续，证明存在$x \in [a, a+\alpha]$，使得$f(x+\alpha) - f(x) = \dfrac{1}{2}(f(a+2\alpha) - f(a))$.

4. 设$f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$，求$f'(x)$.

5. 设$u(x,y)$有二阶连续偏导数，证明u满足偏微分方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$当且仅当：存在二阶连续可微函数$\varphi(t), \psi(t)$，使得$u(x,y) = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y)$.

6. 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$，其中$\Omega$是曲面$z = \sqrt{x^2+y^2}$与$z = x^2+y^2$围成的有界区域.

7. 计算第二型曲面积分$I = \iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2 = az (a > 0)$的外侧.

8. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\cos\dfrac{1}{n}$的收敛性并给出证明.

9. 证明：（1）函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$在区间$(0,\infty)$上不一致收敛；（2）函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}$在区间$(0,\infty)$上可逐项求导.

10. 设$f(x)$连续，$g(x) = \int_0^x yf(x-y)dy$，求$g''(x)$.

1.9 2005年

1.9.1 解析几何与高等代数

1. 在直角坐标系中，求直线$l:\begin{cases}2x+y-z=0\\x+y+2z=1\end{cases}$到平面$\pi:3x+By+z=0$的正交投影轨迹的方程.

2. 在直角坐标系中对于参数λ的不同取值，判断下面平面二次曲线的形状：$x^2+y^2+2\lambda xy+\lambda=0$.

   对于中心型曲线，写出对称中心的坐标；

   对于线心型曲线，写出对称直线的方程.

3. 设数域K上的n阶矩阵A的(i,j)元为a_i-b_j.

   (a) 求$|A|$;

   (b) 当$n\geqslant 2$时，$a_1\neq a_2,b_1\neq b_2$，求齐次线性方程组$AX=0$的解空间的维数和一个基.

4. (a) 设数域K上n阶矩阵，对任意正整数m，求C^m.

   (b) 用$M_n(K)$表示数域K上所有n级矩阵组成的集合，它对于矩阵的加法和数量乘法成为K上的线性空间. 数域K上n级矩阵$A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\ddots&\cdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{bmatrix}$称为循环矩阵. 用$U$表示$K$上所有$n$级循环矩阵组成的集合.

   证明U是$M_n(K)$的一个子空间，并求U的一个基和维数.

5. (a) 设实数域R上n级矩阵H的(i,j)元为$\dfrac{1}{i+j-1}(n>1)$. 在实数域上n维线性空间R^n中，对于$\alpha,\beta\in R^n$，令$f(\alpha,\beta)=\alpha^{\boldsymbol{T}}H\beta$. 试问：$f$是不是$R^n$上的一个内积，写出理由.

   (b) 设A是n级正定矩阵$(n>1),\alpha\in R^n$. 且α是非零向量. 令$B=A\alpha\alpha'$，求B的最大特征值以及B的属于这个特征值的特征子空间的维数和一个基.

6. 设A是数域R上n维线性空间V上的一个线性变换，用I表示V上的恒等变换，证明：$A^3=I\Leftrightarrow \operatorname{rank}(I-A)+\operatorname{rank}(I+A+A^2)=n$.

1.9.2 数学分析

1. 设$f(x)=\dfrac{x^2\sin x-1}{x^2-\sin x}\sin x$，试求$\lim\limits_{x\to+\infty}\sup f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}\inf f(x)$.

2. 证明下列各题：

   (a) 设$f(x)$在开区间可微，且$f'(x)$在(a,b)有界，证明$f(x)$在(a,b)一致连续.

   (b) 设$f(x)$在开区间$(a,b)$$(-\infty<a<b<+\infty)$可微且一致连续，试问$f'(x)$在$(a,b)$是否一定有界.（若肯定回答，请证明；若否定回答，举例说明）

3. 设$f(x)=\sin^2(x^2+1)$.

   (a) 求$f(x)$的麦克劳林展开式.

   (b) 求$f^{(n)}(0)$.（$n=1,2,3,\cdots$）

4. 试作出定义在R^2中的一个函数$f(x,y)$，使得它在原点处同时满足以下三个条件：

   (a) $f(x,y)$的两个偏导数都存在；

   (b) 任何方向导数都存在；

   (c) 原点不连续.

5. 计算$\displaystyle\int_L x^2ds$，其中$L$是球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线.

6. 设函数列$\{f_n(x)\}$满足下列条件：

   (a) $\forall n$，$f_n(x)$在$[a,b]$连续且有$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)(x\in[a,b])$，

   (b) $\{f_n(x)\}$点点收敛于$[a,b]$上的连续函数$s(x)$，

   证明：$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$s(x)$.

1.10 2006年

1.10.1 解析几何与高等代数

1. (a) 设A，B分别是数域K上$s\times n,s\times m$矩阵，叙述矩阵方程$AX=B$有解的充要条件．并且给予证明.

(b) 设A是数域K上$s\times n$列满秩矩阵，试问：方程$XA=E_n$是否有解？有解，写出它的解集；无解，说明理由.

(c) 设A是数域K上$s\times n$列满秩矩阵，试问：对于数域K上任意$s\times m$矩阵B，矩阵方程$AX=B$是否一定有解？当有解时，它有多少个解？求出它的解集；要求说明理由.

2. (a) 设A,B分别是数域K上的$s\times n, n\times s$矩阵，证明：

$$\mathrm{rank}(A-ABA)=\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(E_n-BA)-n.$$

(b) 设A,B分别是实数域上n阶矩阵. 证明：矩阵A与矩阵B的相似关系不随数域扩大而改变.

3. (a) 设A是数域K上的n阶矩阵，证明：如果矩阵A的各阶顺序主子式都不为0，那么A可以分唯一的分解成$A=BC$，其中B是主对角元都为1的下三角矩阵，C是上三角阵.

(b) 设A是数域K上n阶可逆矩阵，试问：A是否可以分解成$A=BC$，其中B是主对角元都为1的下三角矩阵，C是上三角阵？说明理由.

4. (a) 设A是实数域R上的n阶对称矩阵，它的特征多项式$f(\lambda)$的所有不同的复根为实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，把$A$的最小多项式$m(\lambda)$分解成$R$上不可约多项式的乘积. 说明理由.

(b) 设A是n阶实对称矩阵，令$A(\alpha)=A\alpha,\forall\alpha\in R^n$，根据第(1)问中$m(\lambda)$的因式分解，把$R^n$分解成线性变换$A$的不变子空间的直和. 说明理由.

5. 设$X=\{1,2,\cdots,n\}$，用C^X表示定义域为X的所有复值函数组成的集合，它对于函数的加法和数量乘法成为复数域C上的一个线性空间.

对于$f(x),g(x)\in C^X$，规定$\rangle f(x),g(x)\langle=\sum\limits_{j=1}^{n}f(j)g(\bar{j})$,

这个二元函数是复线性空间C^X上的一个内积，从而C^X成为一个酉空间.

设$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)\in C^X$，且满足$p_k(j)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\omega^{kj},\forall j\in X$，其中$\omega=e^{\frac{2\pi}{n}i}$.

(a) 求复线性空间C^X的维数；

(b) 证明：$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$是酉空间的一个标准正交基；

(c) 令$\sigma(f(x)) = \hat{f}(x), \forall f(x) \in C^X$，其中$\hat{f}(x)$在$x = k$处的函数值$\hat{f}(k)$是$f(x)$在标准正交基$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$下的坐标的第$k$个分量．证明：$\sigma$是酉空间$C^X$上的一个线性变换，并且求$\sigma$在标准正交基$p_1(x), p_2(x), \cdots, p_n(x)$下的矩阵；

(d) 证明第(3)题中的σ是酉空间C^X上的一个酉变换.

6. 设V是域K上的n维线性空间，$A_1, A_2, \cdots, A_s$为V上的线性变换，令$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_s$，求证：$A$为幂等变换且$\text{rank}(A) = \text{rank}(A_1) + \cdots + \text{rank}(A_s)$的充要条件是：各$A_i$均为幂等变换，且$A_iA_j = 0, i \neq j$.

7. 求一个过x轴的平面π，使得其与单叶双曲面$\dfrac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$的交线为一个圆.

8. 证明四面体的每一个顶点到对面重心的线段共点，且这点到顶点的距离是它到对面重心距离的3倍.

9. 一条直线与坐标平面yoz面，xoz面，xoy面的交点分别是A, B, C，当直线变动时，直线上的三个定点A, B, C也分别在坐标平面上变动．此外，直线上有第四点P，点P到三点的距离分别是a, b, c，求该直线按照保持点A, B, C分别在坐标平面上的规则移动时，点P的轨迹.

10. 在一个仿射坐标系中，已知直线l_1的方程为$\begin{cases} x - y + z + 7 = 0 \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases}$，$l_2$经过点$M(-1, 1, 2)$，平行于向量$\boldsymbol{u}(1, 2, -3)$．判别这两条直线的位置关系，并说明理由.

1.10.2　数学分析

1. 确界存在原理是关于实数域完备性的一种描述，试给出一个描述实数域完备性的其他定理，并证明其与确界存在原理的等价性.

2. 设函数$f(x, y) = x^3 + 3xy - y^2 - 6x + 2y + 1$，求$f(x, y)$在$(-2, 2)$处二阶二阶带Peano余项的Taloy展开；问$f(x, y)$在$R^2$上有哪些关于极值的判别点，这些点是否为极值点，说明理由.

3. 设$F(x, y) = x^2y^3 + |x|y + y - 5$,

   (a) 证明方程$F(x, y) = 0$在$(-\infty, +\infty)$上确定唯一的隐函数$y = f(x)$;

   (b) 求$f(x)$的极值点.

4. 计算第二型曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$，其中曲面$\Sigma$是椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$外侧.

5. 证明广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛，并计算此积分.

6. 设$f(x,y)$是定义在$D=(a,b)\times[c,d]$上，x固定时，对y连续；设$x_0\in(a,b)$取定，对于任意$y\in[a,b]$，极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=g(y)$收敛. 证明：重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=g(y_0)$对任意$y_0\in[c,d]$成立的充分必要条件是，极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=g(y)$在$[c,d]$上一致连续.

7. 若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，给出并证明$f(x)$在$[a,b]$上Riemann和的极限$\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$收敛的Cauchy准则.

8. 设$\{f_n(x)\}$是$(-\infty,+\infty)$上一连续函数列，满足存在常数M，使得对于任意$f_n(x)$和$x\in(-\infty,+\infty)$恒有$|f_n(x)|\leqslant M$. 假定对$(-\infty,+\infty)$中任意区间$[a,b]$都有$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(x)dx=0$. 证明：对任意区间$[c,d]\subset(-\infty,+\infty)$以及$[c,d]$上绝对可积函数$h(x)$，恒有$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(x)h(x)dx=0$.

9. 设存在一区间$[a,b]$使得两个Fourier级数$\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$，$\dfrac{\alpha_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx$都在$[a,b]$上收敛，并且其和函数在$[a,b]$上连续且相等，问对于任意自然数$n$，$a_n=\alpha_n, b_n=\beta_n$是否成立？如成立，请证明；如不成立，加上什么条件后能保证成立，说明理由.

10. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上内闭Riemann可积，证明：广义积分$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$绝对可积的充分必要条件是：对于任意满足$x_0=0$，$x_n\to+\infty$的单调递增序列$\{x_n\}$，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)dx$绝对收敛.

1.11 2007年

1.11.1 解析几何与高等代数

1. 回答下列问题:

   (a) 问何时存在n阶方阵A, B，满足$AB - BA = E$(单位矩阵)？又，是否存在n维线性空间上的线性变换$\mathcal{A}, \mathcal{B}$，满足$\mathcal{AB}-\mathcal{BA} = \mathcal{E}$(恒等变换)？若是，举出例子；若否，给出证明.

   (b) 设n阶矩阵的各行元素之和为常数c，则A^3的各行元素之和是否为常数？若是，是多少？说明理由.

   (c) 设$m \times n$矩阵A的秩为r，任取A的r个线性无关的行向量，再取A的r个线性无关的列向量，组成的r阶子式是否一定不为0？若是，给出证明；若否，举出反例.

   (d) 设A, B都是$m \times n$矩阵，线性方程组$AX = 0$与$BX = 0$同解，则A与B的列向量组是否等价？行向量组是否等价？若是，给出证明；若否，举出反例.

   (e) 把实数域R看成有理数域Q上的线性空间，$b = p^2q^2r$，这里的$p, q, r \in Q$是互不相同的素数，判断向量组$1, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{b^2}, \cdots, \sqrt[n]{b^{n-1}}$是否线性相关？说明理由.

2. 设n阶矩阵A, B可交换，证明：$\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - \operatorname{rank}(AB)$.

3. 设f为双线性函数，且对任意的α, β, γ都有$f(\alpha, \beta)f(\gamma, \alpha) = f(\beta, \alpha)f(\alpha, \gamma)$. 求证：$f$为对称的或反对称的.

4. 设V是欧几里德空间，U是V的子空间，$\beta \in U$，求证：β是$\alpha \in V$在U上的正交投影的充分必要条件为：$\forall \gamma \in U$，都有$|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha - \gamma|$.

5. 设n阶复矩阵A满足：对于任意正整数k，都有$\mathrm{tr}(A^k) = 0$. 求A的特征值.

6. 设n维线性空间V上的线性变换$\mathcal{A}$的最小多项式与特征多项式相同. 求证：$\exists \alpha \in V$，使得$\alpha, \mathcal{A}\alpha, \mathcal{A}^2\alpha, \cdots, \mathcal{A}^{n-1}\alpha$为$V$的一个基.

7. 设P是球内一定点，A, B, C是球面上三动点，$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \dfrac{\pi}{2}$，以$PA, PB, PC$为棱作平行六面体，记与$P$相对的顶点为$Q$，求$Q$点的轨迹.

8. 设直线L的方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

问系数满足什么条件时，直线L

(a) 过原点；

(b) 平行于x轴，但不与x轴重合；

(c) 与y轴相交；

(d) 与z轴重合.

9. 证明双曲抛物面$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$的相互垂直的直母线的交点在双曲线上.

10. 求椭球面$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 1$被点$(2, 1, -1)$平分的弦.

1.11.2 数学分析

1. 用有限覆盖定理证明连续函数的介值性定理.

2. $f(x), g(x)$在有界区间上一致连续，证明：$f(x)g(x)$在此区间上也一致连续.

3. 已知$f(x)$在$[a, b]$上有4阶导数，且有$f^{(4)}(\beta) \neq 0, f'''(\beta) = 0, \beta \in (a, b)$，证明：存在$x_1, x_2 \in (a, b)$，使得$f(x_1) - f(x_2) = f'(\beta)(x_1 - x_2)$成立.

4. 构造一函数在$\mathbb{R}$上无穷次可微，且$f^{(2n+1)}(0) = n$，$f^{(2n)}(0) = 0$，$n = 0, 1, \cdots$，并说明满足条件的函数有任意多个.

5. 设$D = [0, 1] \times [0, 1]$，$f(x, y)$是D上的连续函数，证明：满足$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = f(\xi, \eta)$的点$(\xi, \eta)$有无穷多个.

6. 求$\iint\limits_\Sigma \sin^4 xdydz + e^{-|y|}dzdx + z^2dxdy$，其中$\Sigma$是$x^2 + y^2 + z^2 = 1$，$z > 0$方向向上.

7. $f(x, y)$是R^2上的连续函数，试作一无界区域D，使$f(x, y)$在D上的广义积分收敛.

8. $f(x) = \ln(1 + \dfrac{\sin x}{x^p})$，讨论不同$p$对$f(x)$在$(1, +\infty)$上积分的敛散性.

9. 记$F(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nye^{-n(x+y)}$，是否存在$a>0$以及函数$h(x)$在$(1-a,1+a)$上可导，且$h(1)=0$，使得$F(x,h(x))=0$.

10. 设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上黎曼可积，证明：$f(x),g(x)$的傅立叶展开式有相同系数的充要条件是$\int_a^b|f(x)-g(x)|dx=0$.

1.12 2008年

1.12.1 解析几何与高等代数

1. (a) 若A是$m\times n$矩阵，非齐次线性方程组$Ax=\beta$有解，且$r(A)=r$，则方程组$Ax=\beta$的解向量中线性无关的最多有多少个？并找出一组最多的线性无关的解向量.

   (b) 若$Ax=\beta$对所有m维非零向量β都有解，求$r(A)$.

2. (a) 若A是$s\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，$r(AB)=r(B)$. 则对于所有$m\times l$矩阵C是否有$r(ABC)=r(BC)$？并给出理由.

   (b) A是n阶实矩阵，A的每一元素的代数余子式都等于此元素，求$r(A)$.

3. (a) 设A,C分别为n,m阶实对称矩阵，B是$n\times m$实矩阵，$\begin{pmatrix}A & B\\ B^{\boldsymbol{T}} & C\end{pmatrix}$是正定矩阵(实)，证明：$\begin{vmatrix}A & B\\ B^{\boldsymbol{T}} & C\end{vmatrix}\leqslant |A|\cdot|C|$，等号当且仅当$B=0$时成立.

   (b) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是n阶实矩阵，$|a_{ij}|\leqslant 1$，求证：$|A|^2\leqslant n^n$.

4. 设$f(x)$为一整系数多项式，n不能整除$f(0),f(1),\cdots,f(n-1)$，证明：$f(x)$无整数根.

5. A是数域K上的n阶矩阵，A的特征多项式的根都属于K，则A相似于上三角矩阵.

6. V是数域K上的线性空间，A,B是数域V上的线性变换，A,B的最小多项式互素，求满足：$AC=CB$的所有线性变换C.

7. A是n维欧氏空间V上的正交变换. 证明：A是第一类的当且仅当存在V上的正交变换B满足$A=B^2$.

8. 求过直线$l:\begin{cases}x-y+z+4=0\\x+y-3z=0\end{cases}$且与$\pi_1:x+y+2z=0$垂直的平面$\pi_2$.

9. 平面$Ax+By+Cz+D=0$与单叶双曲面$x^2+y^2-z^2=1$的交线是两条直线，证明：$A^2+B^2=C^2+D^2$.

10. 直线l_1过点$(1,1,1)$，与$l_2:\begin{cases}x+y+z=0\\x-y-3z=0\end{cases}$相交，交角为$\dfrac{\pi}{3}$，求直线$l_1$方程.

11. 证明球面$S_1:x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+2=0$与球面$S_2:x^2+y^2+z^2+2x-6y+1=0$有交点，并求出交圆的圆心坐标.

1.12.2 数学分析

1. 证明有界闭区间上的连续函数一致连续.

2. 是否存在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数$f(x)$，满足$f(f(x))=e^{-x}$？证明你的结论.

3. 数列$\{x_n\}(n\geqslant 1)$，满足$\forall n<m,|x_n-x_m|>\dfrac{1}{n}$，求证$\{x_n\}$无界.

4. $f(x)$是$(-1,1)$上的无穷次可导函数，$f(0)=1,|f'(0)|\leqslant 2$，令$g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)},|g^{(n)}(0)|\leqslant 2n!$，证明对所有正整数$n$，$|f^{(n)}(0)|\leqslant (n+1)!$.

5. $\displaystyle\iint_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$，

   Σ：球面$x^2+y^2+z^2=2Rx$被圆柱面$x^2+y^2=2rx(-<r<R)$所截得的部分，定向取外侧.

6. 证明$F(x,y)=2-\sin x+y^3e^{-y}$在全平面有唯一解$y=y(x)$，且$y(x)$连续，可微.

7. $f(x)$在$[0,+\infty)$上内闭Riemann可积，且$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛，求证$\displaystyle\lim_{a\to 0^+}\int_0^{+\infty}e^{-ax}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx$.

8. $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的二阶连续可导函数，满足：1) $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-|x|)=0$；2) $\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$，满足$f(x_0)\leqslant 0$. 求证：$f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$上变号.

9. $g(x)$是周期为1的连续函数，$\int_0^1 g(x)dx = 0$，$f(x)$在$[0,1]$上有连续一阶导函数，$f(0)=f(1)$，$a_n = \int_0^1 f(x)g(nx)dx$，求证$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

10. $f(x)$在$[0,1]$上Riemann可积，且对$[0,1]$上任何有限个两两不交的闭区间$[a_i,b_i]$，$1\leqslant i\leqslant n$，都有$|\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i} f(x)dx|\leqslant 1$，求证$\int_0^1 |f(x)|dx\leqslant 2$.

1.13 2009年

1.13.1 解析几何与高等代数

1. 一般说来一个向量组的极大线性无关部分组是不唯一的，那么什么向量组的极大线性无关部分组是唯一的？证明你的结论.

2. 设多项式$f(x)$的所有复根都是实数，证明：如果a是$f(x)$的导数$f'(x)$的重根，则a也是$f(x)$的根.

3. 设S为n阶实对称矩阵，S_1,S_2都是m阶实对称矩阵，证明：若准对角矩阵$\begin{pmatrix} S & \\ & S_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} S & \\ & S_2 \end{pmatrix}$合同，则$S_1$与$S_2$合同.

4. 解方程组$\begin{cases} x+y+z=2 \\ (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=14 \\ x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2=2 \end{cases}$.

5. 设A为n阶实方阵且有$AA'=A^2$，证明：A是对称矩阵.

6. 设$n\leqslant 2$，$M_n(K)$为K上所有n阶方阵所成集合，$M_n(K)$上的一个函数f即为映射$f: M_n(K)\to K$，$M_n(K)$上的所有函数组成的集合记为$F(K)$，在$F(K)$中定义加法和数乘运算如下：对任意$f,g\in F(K)$，对任意$k\in K$和任意$A\in M_n(K)$，$(f+g)(A)=f(A)+g(A),(kf)(A)=kf(A)$，则$F(K)$关于此运算成为数域$K$上的一个线性空间．对于$f\in F(K)$，$f$称为是列线性函数如果$f$对于矩阵的每一列都是线性的，即对$K^n$中任意列向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta$，任意$1\leqslant j\leqslant n$，以及任意$k\in K$，都有$f(\beta_1,\cdots,\beta_{j-1},\beta_j+\beta,\beta_{j+1},\cdots,\beta_n)=f(\beta_1,\cdots,\beta_{j-1},\beta_j,\beta_{j+1},\cdots,\beta_n)+f(\beta_1,\cdots,\beta_{j-1},\beta,\beta_{j+1},\cdots,\beta_n)$和$f(\beta_1,\cdots,\beta_{j-1},k\beta_j,$ $kf(\beta_1,\cdots,\beta_{j-1},\beta_j,\beta_{j+1},\cdots,\beta_n)$，（其中的矩阵用它们的列向量组表示出），而$f$称为是反对称的若$A\in M_n(K)$有两列向量相同时必有$f(A)=0$．用$SP(K)$表示$F(K)$中所有反对称列线性函数所成的集

合，证明：$SP(K)$是$F(K)$的一个子空间，并求$SP(K)$的维数和一组基.

7. 设U为齐次线性方程组$ABX = 0$的解空间，其中A为$n \times m$矩阵，B为$m \times p$矩阵，X为$p \times 1$矩阵，证明：m维向量空间K^m中子集合$W = \{Y = BX | X \in U\}$是子空间，它的维数等于$\mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB)$，并利用此结论证明对任意三个矩阵$A, B, C$有$\mathrm{rank}(AB) + \mathrm{rank}(BC) \leqslant \mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(ABC)$.

8. 设R为实数域，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$是$n$维欧氏空间$R^n$中的一线性无关向量组，其中$R^n$中的内积为标准内积$(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta'$，这里的向量$\alpha$和$\beta$都看成是$1 \times n$矩阵，用$B$表示$(i, j)$元为$(\alpha_i, \alpha_j)$，$1 \leqslant i, j \leqslant s$，的$s \times s$矩阵，对向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$施行施密特(Schmidt)正交化过程后得到向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，证明：$|B| = \prod\limits_{i=1}^{s} \|\beta_i\|^2$，其中$\|\beta_i\|$表示向量$\beta_i$的长度.

9. 请问直线$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$的系数满足什么条件时才具有以下性质？

   (a) 经过原点；
   (b) 与x轴平行但不重合；
   (c) 和y轴相交；
   (d) 与z轴垂直(不必相交).

10. 设平面$Ax + By + Cz + D = 0$与双曲抛物面$2z = x^2 - y^2$的交线为两条直线，证明：$A^2 - B^2 - 2CD = 0$.

11. 设空间直角坐标系中的曲面Q方程为$x^2 + y^2 - z^2 = 1$，取一个过z轴的平面Σ并考虑全体与之平行的平面族．问：这些平行平面与Q的截线是什么类型的曲线？当它们与Σ的距离变动时，截线的形状如何变化？请给出清楚的描述并说明判断理由.

12. 给出空间中半径为1的球面S和到球心距离为2的一点P，考虑过P点且与S相交的任一条直线，取两个交点的中点，用解析几何的方法证明这些中点的轨迹在一个球面上，并求出球心和半径.

1.13.2 数学分析

1. 证明闭区间上的连续函数能取到最大值和最小值.

2. 设$f(x)$和$g(x)$是R上的有界一致连续函数，求证：$f(x)g(x)$在R上一致连续.

3. 设$f(x)$是周期为2π的连续函数，且其Fourier级数$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$处处收敛，求证：这个Fourier级数处处收敛到$d(x)$.

4. 设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$都是有界数列，且$a_{n+1}+2a_n=b_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$存在，求证$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$也存在.

5. 是否存在$R\to R$的连续可导函数$f(x)$满足：$f(x)>0$，且$f'(x)=f(f(x))$?

6. 已知$f(x)$是$[0,+\infty)$上的单调连续函数，且$\lim]limits_{x\to\infty}f(x)=0$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx dx=0$.

7. 求曲线积分$\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中$L$是球面$x^2+y^2+z^2=1$与球面$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$交成的曲线.

8. 设$x,y,z\geqslant 0,x+y+z=\pi$，求$2\cos x+2\cos y+4\cos z$的最大最小值.

9. 设$f(x)\in C(a,b)$，对任何$x\in(a,b)$都有$\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\geqslant 0$，求证：$f(x)$在$(a,b)$上单调不减.

10. 已知$f(x)$是$[0,+\infty)$上的正的连续函数，且$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}dx<+\infty$，求证$\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{A^2}\int_0^A f(x)dx=+\infty$.

1.14 2010年

1.14.1 解析几何与高等代数

1. 整系数多项式$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k(n\geqslant 2010)$. 若存在素数$p$满足:

i）$p\nmid a_n$，ii）$p\mid a_i,i=0,1,2,\cdots,2008$，iii）$p^2\nmid a_0$

证明：$f(x)$必有次数不低于2009的不可约整系数因式.

2. 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关，且可以由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$线性表出，证明必存在某个向量$\beta_j\,(j = 1, 2, \cdots, t)$使得向量组$\beta_j, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

3. 设A是非零矩阵，证明A可以写成某个列满秩矩阵与某个行满秩矩阵的乘积.

4. AB是n阶矩阵，且满足$A = (B - \frac{1}{110}E)'(B + \frac{1}{110}E)$，证明：对任意的$n$维列向量$\xi$，方程组$A'(A^2 + A)X = A'\xi$必有非零解.

5. 设A是n阶正定矩阵，向量组$\beta_1, beta_2, \cdots, \beta_n$满足$\beta_i' A \beta_j = 0 (1 \leqslant i < j \leqslant n)$. 问向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$的秩可能是多少，证明你的结论.

6. 线性变换A是对称变换，且A是正交变换，证明A是某个对合(即满足$A^2 = E$，E是单位变换)

7. V是内积空间，ξ, η是V中两个长度相等的向量，证明必存在某个正交变换，将ξ变到η.

8. A是复矩阵，B是幂零矩阵，且$AB = BA$，证明$|A + 2010B| = |A|$.

9. 求过z轴且与平面$x + 2y + 3z = 1$夹角为60°的平面的方程.

10. 求直线$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$绕$z$轴旋转所成旋转曲面的方程，并指出这是什么曲面.

11. 定义仿射坐标系XOY中的一个变换$f = \begin{cases} x' = 7x - y + 1 \\ y' = 4x + 2y + 4 \end{cases}$,

    (a) 求在f下的不变直线.

    (b) 以两条不变直线为坐标轴建立仿射坐标系$X'O'Y'$，求此坐标系中f的变换公式.

12. 用不过圆锥顶点的平面切割圆锥，证明所截的曲线只可能为椭圆，双曲线和抛物线. 并说明曲线类型随切割角度的变换规律.

1.14.2 数学分析

1. 用有限覆盖定理证明聚点定理.

2. 是否存在数列$\{x_n\}$，其极限点构成的集合为$M = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$，说明理由.

3. 设I是无穷区间，$f(x)$为I上的非多项式连续函数．证明：不存在I上一致收敛的多项式序列$\{P_n(x)\}$，其极限函数为$f(x)$.

4. $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$可导，且满足$f(1)=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}e^{1-x^2}f(x)dx$，求证：存在$\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

5. $f(x)\in C^1(R)$，I是有界闭区间，$F_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$，证明函数序列$\{F_n(x)\}$在$I$上一致收敛．如果$I$是有界开区间，问$\{F_n(x)\}$在$I$上是否仍然一致收敛？说明理由.

6. 构造R上的函数$f(x)$，使其在Q上间断，其他点连续．（Q表示有理数集）

7. 广义积分$\int_0^{+\infty}xf(x)dx$与$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$均收敛，证明$I(t)=\int_0^{+\infty}x^tf(x)dx$在$(-1,1)$上有定义，并且有连续导函数.

8. 计算曲线积分$I=\oint\limits_{\Gamma}ydx+zdy+xdz$，其中$\Gamma$为$x^2+y^2+z^2=1$与$x+y+z=0$的交线，从$x$轴正向看是逆时针.

9. 证明下面的方程在点$(0,0,0)$附近唯一确定了隐函数$z=f(x,y)$，

$$x+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}z+\sin z=0$$

并将$f(x,y)$在点$(0,0)$展开为带佩亚诺余项的泰勒公式，展开到二阶.

10. $f(x),g(x)$是$[0,+\infty)$上的非负单调递减连续函数，且$\int_0^{+\infty}f(x)dx$和$\int_0^{+\infty}g(x)dx$均发散，设$h(x)=\min(f(x),g(x))$，试问$\int_0^{+\infty}h(x)dx$是否一定发散？说明理由.

1.15 2011年

1.15.1 解析几何与高等代数

1. 判断题，并说明理由:

(a) 矩阵A的秩是5，其中A的第3，4行线性无关，第1，3列线性无关，A的这些行列组成的子式$A\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}\neq 0$

(b) 对于数域F，W是F^5的子空间，那么存在线性变换$\varphi: F^6\to F^5$，使$\varphi(F^6)=W$；

(c) 若$AX=0$有唯一解，则$AX=\beta$有唯一解.

(d) 有限维空间的非零线性变换必有非零特征根.

(e) 对任何正整数n，存在有理数域上的n次不可约多项式$p(x)\in Q[x]$.

(f) V^*是V的对称空间，W是V的真子空间，则存在$f\in V^*$使$f(W)=0$;.

(g) φ是复数域上C^{13}的线形变换，一定存在一个φ的10维不变子空间.

(h) φ是欧氏空间的线性变换，φ^*是φ的共轭变换，那么$\ker\varphi^*\varphi=\ker\varphi$.

(i) 对角元素互不相同的上三角矩阵可以转化为对角矩阵.

(j) 对于$A\in M_n(F)$是可逆矩阵，那么存在$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in F$使得

$$A^{-1}=a_{n-1}A^{n-1}+a_{n-2}A^{n-2}+\cdots+a_1A+a_0I_n.$$

2. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$；

(a) 求A的最小多项式；

(b) 求A^{15}；

(c) 求A的若尔当标准型.

(d) 设$Q[A]=\{\sum\limits_{i=0}^{n}a_iA^i|a_i\in Q,n\in Z^+\}$，求$Q[A]$的维数，要求说明理由.

3. 设$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

(a) 把f写成$X'AX$的形式，求A的特征值和特征向量.

(b) 求正交矩阵C和对角矩阵D，使得$A=CDC'$.

(c) 求$f(x_1,x_2,x_3)$在$x_1^2+x_2^2+x_3^3=1$中的最大值和最小值，并说明何时取到.

4. U, V, W分别是F上的r, s, t维线性空间， $\mathrm{Hom}_F(U, V)$表示U到V上的线性变换的集合.

   (a) 证明$\dim \mathrm{Hom}_F(U, V) = rs$;

   (b) 设σ^*为$\mathrm{Hom}(W, U)$到$\mathrm{Hom}(W, V)$上线性映射，则存在单射σ，使$\sigma^*(f)w = \sigma \circ (fw)$，其中$w \in W$;

   (c) 证明$\dim Im\sigma^* = \dim Ker(I - \sigma^*) + \dim Im\sigma$.

5. a, b, c, d是起点相同的向量， 证明a, b, c, d终点共面当且仅当$[a, b, c] \cdot [b, c, d] + [c, d, a] \cdot [d, a, b] = 0$. （$[a, b, c]$表示向量$a, b, c$的混合积.）

6. 距两条异面直线距离相等的点的轨迹是什么？ 用解析几何的方法加以证明.

7. E是一个椭球面， 中心是O.

   (a) 取与E相交的一族平行平面，则截线都是椭圆，而且中心共线.

   (b) 对E外侧任意的点p， 由p向E作切线， 可能的切点在一个平面Π_p上.

   (c) 同上过E外侧另一点q向E作切线，切点落在平面Π_q上，如果q在Oq连线上， 则$\Pi_p \parallel \Pi_q$， 而且两个平面截E所得的椭圆中心O与p, q共线.

1.15.2 数学分析

1. 使用确界存在原理证明： 连续函数$f(x)$定义在区间I上， 证明$f(I)$是一个区间.

2. 函数$f(x)$在x_0连续并且$|f(x)|$在x_0可导， 求证$f(x)$在x_0可导.

3. 函数$f(x)$在$(0, 1)$可导，f'有界， $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$不存在，求证存在数列$\{x_n\}$满足条件：（1） $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$; （2） 对所有$n$， $f'(x_n) = 0$.

4. 构造两个以2π为周期的函数， 使之在$[0, \pi]$上其Fourier级数一致收敛于0.

5. 证明$f(x)$在$[0, 1]$上可积， 其充要条件是： 对$F(x, y) = f(x)$在$[0, 1] \times [0, 1]$上可积.

6. $f(x, y)$在其定义域中的某个点上存在方向导数， 且在三个方向上的方向向量均存在且相等. 证明$f(x, y)$不可微.

7. 设D为R^2上的无界闭集，试构造一个函数$f(x,y)$，使它在一个由光滑曲线所围成的无界闭区域D上的二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$发散.

8. 设$T(x)$，x属于R^n的一个子集D，D是一个凸区域，$T(x)$在D上有连续二阶偏导数，其Jaccobi行列式正定. 证明$T(x)$是单调的.

9. $a_n>0$，并且$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛，求证

$$\lim_{n\to+\infty}n^2(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n})^{-1}$$

收敛.

10. $f_n(x)$在$[a,b]$可导，$f_n'(x)$在$[a,b]$上一致有界，并且$\{f_n(x)\}$点态收敛于有界函数$f(x)$，求证$f(x)$在$[a,b]$上连续.

1.16 2018年

1.16.1 数学分析

1. 设$f\in C(0,1)$，且存在$x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1)$, 使得

$$\alpha=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}=\beta,$$

证明：对任意$\lambda\in(\alpha,\beta)$, 存在$x_5,x_6\in(0,1)$, 使得$\lambda=\frac{f(x_6)-f(x_5)}{x_6-x_5}$.
定义

$$F(x,y)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x},0<x<y<1.$$

则F在连通开集$D=\{(x,y):0<x<y<1\}$上连续. 不妨设$x_1<x_2$, $x_3<x_4$, 则$(x_1,x_2)\in D$，$(x_3,x_4)\in D$, 且

$$\alpha=F(x_1,x_2)<\lambda<F(x_3,x_4)=\beta.$$

根据连通集上连续函数的节值定理, 存在$(x_5,x_6)\in D$, 使得

$$\lambda=F(x_5,x_6),$$

即

$$\lambda=\frac{f(x_6)-f(x_5)}{x_6-x_5}.$$

另一种方法是考虑函数

$$G(t)=\frac{f((1-t)x_2+tx_4)-f((1-t)x_1+tx_3)}{(1-t)(x_2-x_1)+t(x_4-x_3)}$$

此时$\alpha=G(0)$，$\beta=G(1)$. 剩下的就是使用中值定理即可。

2. 设A，$B\in R^3$；γ是以A，B为端点的光滑曲线，弧长为L；U是一个包含γ的开集；f是U上连续可微的函数，它的梯度向量长度的上界是M. 求证：

$$|f(A)-f(B)\leqslant ML.|$$

不妨设$\gamma=\gamma(t)$，$t\in[0,1]$，$\gamma(0)=B$，$\gamma(1)=A$, 则

$$\begin{aligned}|f(A)-f(B)|=|\int_0^1\frac{df(\gamma(t))}{dt}dt|&\leqslant\int_0^1|\frac{df(\gamma(t))}{dt}|dt\\&=\int_0^1|(\mathrm{grad}f(\gamma(t)),\gamma'(t))|dt\leqslant M\int_0^1|\gamma'(t)|dt\\&=ML,\end{aligned}$$

其中$(\cdot,\cdot)$是R^3中的内积.

第 2 章　中国科学院研究生院入学考试

2.1　2007年

2.1.1　高等代数

1. 设多项式$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$只有非零常数公因子，证明：存在多项式$u(x)$，$v(x)$，$w(x)$，使得$u(x)f(x)+v(x)g(x)+w(x)h(x)=1$.

2. 设m,n,p都是非负整数，证明：(x^2+x+1)整除$(x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2})$.

3. 设A是n阶实数矩阵，$A\neq 0$，而且A的每个元素都和它的代数余子式相等．证明A是可逆矩阵.

4. 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\alpha & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2\cos\alpha & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in R^n$是齐次线性方程组$AX=0$的基础解系，$s,t\in R$，$\beta_1=s\alpha_1+t\alpha_2$，$\cdots$，$\beta_{k-1}=s\alpha_{k-1}+t\alpha_k$，$\beta_k=s\alpha_k+t\alpha_1$．试问：$s,t$应该满足什么关系，使得$\beta_1,\cdots,\beta_{k-1},\beta_k$是方程组$AX=0$的基础解系，反之，当$\beta_1,\cdots,\beta_{k-1},\beta_k$是方程组$AX=0$的基础解系时，这个关系必须成立.

6. 设A是实对称矩阵，如果A是半正定的，则存在实的半正定矩阵B，使得$A=B^2$.

7. 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，试证明对于$n\geqslant 3$有$A^n=A^{n-2}+A^2-I$，并计算$A^{100}$，其中$I$表示单位矩阵.

8. 设二次型$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 4bx_2x_3$通过正交变换化为标准形$f = y_2^2 + 2y_3^2$，求参数$a, b$及所用的正交变换.

9. 设A是复数域上6维线性空间V的线性变换，A的特征多项式为$(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2(\lambda+2)$，证明$V$能够分解成三个不变子空间的直和，而且它们的维数分别是1，2，3.

2.1.2 数学分析

1. 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$的收敛域，并求其和.

2. 讨论积分$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$的绝对收敛和条件收敛.

3. 计算曲面积分$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} yzdydz + (x^2+z^2)ydzdx + xydxdy$，其中$\Sigma$为曲面$4-y = x^2+z^2$在$xoz$平面的右侧部分的外侧.

4. 证明下列不等式：

   (a) $x^n(1-x) < \dfrac{1}{ne}$ $\quad(0 < x < 1$，n为正整数)；

   (b) $x^y + y^x > 1$ $\quad$(x，y ＞ 0).

5. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$绝对收敛. 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

6. 假设$f(x)$为二次连续可微实值函数，对于所有的实数x，满足$|f(x)| \leqslant 1$且满足$(f(0))^2 + (f'(0))^2 = 4.$. 证明存在实数$x_0$，满足$f(x_0) + f''(x_0) = 0$.

7. 假设$|f(x)| \leqslant 1$和$|f''(x)| \leqslant 1$对一切成立，证明：在$[0,2]$上有$|f'(x)| \leqslant 2$.

8. 设$D = [0,1]\times[0,1]$，$f(x,y)$是定义在D上的二元函数，$f(0,0) = 0$，且$f(x,y)$在$(0,0)$处可微. 求极限：

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} dt \int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du}{1 - e^{\frac{x^4}{4}}}$$

9. 设$-\infty < x_0 < +\infty$，$\varphi(x)$和$f(x)$在$[x_0, x_0+h]$上连续，且存在$M>0$，$K>0$，使得

$$|\varphi(x)| \leqslant M\Big(1+K\int_{x_0}^{x}|\varphi(t)f(t)|dt\Big), \quad x\in(x_0,x_0+h).$$

证明：$\varphi(x)$必满足

$$|\varphi(x)| \leqslant M\exp\{KM\int_{x_0}^{x}|f(t)|dt\}, x\in(x_0,x_0+h).$$

10. 设$\alpha\in(0,1)$，记$e=(1,1,\cdots,1)^T\in R^n$，$S(\frac{e}{n},\frac{\alpha}{n})=\{x\in R^n: \Big\|x-\frac{e}{n}\Big\|\leqslant\frac{\alpha}{n}\}$，对于$x\in S(\frac{e}{n},\frac{\alpha}{n})$且$e^Tx=1$，证明：

$$-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \leqslant n\ln n+\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}.$$

2.2　2012年

2.2.1　高等代数

1. 证明多项式$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$没有重根.

2. 设多项式$g(x)=p^k(x)g_1(x)(k\geqslant 1)$，多项式$p(x)$与$g_1(x)$互素. 证明：对任意多项式$f(x)$有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{p^(x)}+\frac{f_1(x)}{p^{k-1}(x)g_1(x)}$$

其中，$r(x)$，$f_1(x)$都是多项式，$r(x)=0$或$\deg(r(x))<\deg(p(x))$.

3. 已知n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1\\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

其中，$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=n$.

1）求A的全部特征值；

2）求A的行列式$\det(A)$和迹$\mathrm{tr}\,(A)$.

4. 设数域k上的n阶方阵A满足$A^2 = A$，V_1，V_2分别是齐次线性方程组$Ax = 0$和$(A - I_n)x = 0$在k^n中的解空间，试证明：$k^n = V_1 \oplus V_2$，其中I_n代表n阶单位矩阵，$\oplus$表示直和.

5. 设n阶矩阵A可逆，α，β均为n维列向量，且$1+\beta^T A^{-1}\alpha \neq 0$, 其中$\beta^T$表示$\beta$的转置.

   1）证明矩阵$P = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}$可逆，并求其逆矩阵.

   2）证明矩阵$Q = A + \alpha\beta^T$可逆，并求其逆矩阵.

6. 证明：任何复数方阵A都与它的转置矩阵A^T相似.

7. 在二阶实数矩阵构成的线性空间$R^{2\times2}$中定义：

$$(A, B) = \mathrm{tr}\,(A^T B), \quad \forall A, B \in R^{2\times2}$$

   其中，A^T表示矩阵A的转置，$\mathrm{tr}\,(X)$表示矩阵X的迹.

   1）证明(A, B)是线性空间$R^{2\times2}$的内积.

   2）设W是由$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$生成的子空间. 试求$W^\perp$的一组标准正交基.

8. 设$T_1, T_2, \cdots, T_n$是数域上线性空间V的非零线性变换，试证明存在向量$\alpha \in V$，使得$T_i(\alpha) \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

2.3 2018

2.3.1 数学分析

1. 设$x > 0$，证明$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta}}$, 其中$\theta = \theta(x) > 0$, 并且$\lim_{x\to0} \theta(x) = \frac{1}{4}$.

   根据Lagrange中值定理有

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta}}$$

$$
\begin{aligned}
\theta(x) &= (\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{2})^2 - x = \frac{1+2\sqrt{x(x+1)}-2x}{4} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)} - x] \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}] \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}]
\end{aligned}
$$

易知

$$0 < \frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}] < \frac{1}{4}$$

则有

$$0 < \frac{1}{4} < \theta(x) < \frac{1}{2}$$

同时根据

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}],$$

可得

$$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{4}.$$

第 3 章　南开大学研究生入学考试

3.1　2018

3.1.1　高等代数

3.1.2　数学分析

1. 求$f(x) = 4\ln x + x^2 - 6x$的极值.

2. 已知区域$D = \{(x, y)|x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+2y \leqslant 1\}$, 求二重积分$\iint_D e^{x+2y}dxdy$.

第 4 章　中山大学研究生入学考试

4.1　数学分析

1. 计算

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$;

   (b) $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}}{1-e^{\sqrt{x}}}$;

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{\cos\frac{1}{x}})^{x^2}$;

   (e) 设$z=z(x,y)$由方程$e^{-xy}-2z+e^z=0$确定，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

   (f) 求曲面$x^2+2y^2+3z^2=6$在$(1,1,1)$点处的切平面方程.

2. 判别下列级数或广义积分的收敛性，条件收敛还是绝对收敛.

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{(\ln 3)^n}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{\pi}{2n^2}+\sin\frac{\pi}{n})$;

   (c) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$;

   (d) $\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx$.

3. 求平面曲线$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$上对应于$t=t_0$点的法线方程，并讨论曲线在$t\in(0,\pi)$一段的凹凸性.

4. 讨论函数$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$在$P_0(0,0)$点处

   (a) 连续性;

   (b) 可微性;

   (c) 沿$\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$的方向导数的存在性.

5. 计算曲线积分$\oint\limits_C xyzdy$，其中曲线$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=z \end{cases}$，其方向与$z$轴构成右手系.

6. 对幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$

   (a) 求收敛域;

   (b) 求和函数;

   (c) 讨论幂级数在收敛域上的一致收敛性.

7. 在Oxy平面上，光滑曲线L过$(1,0)$点，并且曲线L上任意一点$P(x,y)(x\neq 0)$处的切线斜率与直线OP的斜率之差等于ax($a>0$为常数).

   (a) 求曲线L的方程;

   (b) 如果L与直线$y=ax$所围成的平面图形的面积为8，确定a的值.

8. 设$f(x)$在$[0,1]$连续，令

$$f_n(t)=\int_0^t f(x^n)dx,\quad t\in[0,1],n=1,2,\cdots$$

   证明函数列$\{f_n(t)\}$在$[0,1]$一致收敛于函数$g(t)=tf(0)$.

第 5 章　其他

1. $\int_0^1 \sin(\pi x)\cdot x^x(1-x)^{1-x}dx$；

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)\ln x}{x(1-x)}dx$；

3. $\int_0^1 \frac{\ln x\ln^2(1-x)}{x}dx$；

4. $\int_0^{+\infty} \tan\frac{x}{\sqrt{x^2+x^3}}\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}dx$；

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(k\ln(\tan(x)))dx, k\in R$；

6. $\int_0^{+\infty} x^n\sin(\sqrt[4]{x})e^{-\sqrt[4]{x}}dx, n\in N$；

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\cos x)dx$；

8. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{xe^x}dx$；

9. $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)(1+x^3)^2}dx$；

10. $\int_0^{+\infty} (\frac{x}{e^x-e^{-x}}-\frac{1}{2})\frac{1}{x^2}dx$；

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arccos(\frac{\cos x}{1+2\cos x})dx$；

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \arccos(\frac{\cos x}{1+2\cos x})dx$;

13. 若$f:[0,1]\times[0,1]\to R$可积，求

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{(2n+1)!}{(n!)^2})^2\int_0^1\int_0^1(xy(1-x)(1-y))^n f(x,y)dxdy;$$

14. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1|\sin nx|^3dx$;

15. $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_0^x \ln\frac{|\sin(t-\frac{x}{2})|}{\sin\frac{x}{2}}\frac{dt}{\sin t}$;

16. $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{n^3})$;

17. $\displaystyle\int_0^{\arccos\frac{1}{3}}\arccos\left(\frac{1-\cos x}{2\cos x}\right)dx$;

18. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arccos\sqrt{\frac{\cos x}{1+2\cos x}}dx$;

19. 求$\displaystyle 1+\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{4}\right)^2+\cdots$;

20. 求$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{((n-1)k)!}{(nk)!}$;

21. 求$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{n^3}$;

22. 求$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(e^{n\pi}-e^{-n\pi})^2}$;

23. 求和：$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{C_{2n}^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nC_{2n}^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2C_{2n}^n}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4C_{2n}^n}$；