Treatise on Analysis

J.Dieudonne

August 2, 2018

前言

This book is the first volume of a treatise which will eventually consist of four volumes. It is also an enlarged and

Contents

Chapter 1

集合以及相关概念

集合是一个不加定义的概念.

1.1 集合运算

首先引入的概念是"属于"和"相等",这是集合论的两个基本关系.他们也是通过外延公理相互联系.

公理 1.1.1 (外延公理(Axiom of extension)) 两个集合相等,当且仅当他们有相同的元素.

外延公理界定了一个集合的元素,它非常明显,却绝不寻常:

我们考虑人类之间的关系:设$x \in A$,如果x是A的祖先,此时,"仅当(only if)"部分是成立的,"当(if)"部分不成立.也就是有相同的祖先,不一定能得出相同的A.

属于是"元素"和集合之间的关系,不过应该注意,我们这里的元素是没有预先定义,足够宽泛.集合也可以作为元素.有了属于,我们可以考虑集合之间的关系:$x \in A \Rightarrow x \in B$,则称$A \subset B$.包含关系满足:

(1)自反的:$A \subset A$;

(2)传递的:$A \subset B, B \subset C \ \Rightarrow \ A \subset C$;

(3)反对称的:$A \subset B$不能得出$B \subset A$,如果两者同时成立,必有$A = B$,这也可以认为是外延公理的等价描述.

显然,"属于"和"包含"是完全不同的东西:"属于"一般来说不是自反的,也不满足传递性.对于满足$A \in A$这样的集合,一般情况不在我们的考虑之内.

要想得到更多的集合,我们需要其他的公理,还需要一些基本的逻辑:"属于"和"等于"是两个基本的语句,其余的通过以下七个组合得到:and(且);or(或者,包括either ... or ...);nnot(非);if - then -(如果...就...);if and only if(当且仅当);for some(对某些...);for all(对所有...).

公理 1.1.2 (Axiom of specification) 对于每一个集合A和条件$S(x)$,存在集合B,使得B中的元素x属于A,且$S(x)$成立.

我搜索了一下网络,大部分把”Axiom of specification”翻译为”分类公理”.有此公理,通常把B记作$B = \{x \in A : S(x)\}$,这里有一个极为有趣也非常有意义的集合:$B = \{x \in A : x \notin x\}$.对于这个集合,必有$B \notin A$,证明比较简单,反证法即可,书中给出了详细讨论,这意味着:不存在万物之集,或者说,不存在包含一切的集合,这实际上就是罗素悖论的另一个说法.而哥德尔关于数学基础的一些结论,说明了存在缺陷是世界的本性,上帝也不是万能的,有阴才有阳.

为了有具体的讨论对象,我们需要构造出一些集合.如果我们假设:存在一个集合,那么由axiom of specification可知,存在一个不包含任何元素的集合$\emptyset$,$\emptyset \subset A$对任意的集合A成立.这几个结论的证明有些意思,书中也给出了详细的描述,它涉及到了对于空集的处理:反证,如果不成立,那就是存在一个元素$x \in \emptyset$,但是$x \notin A$,但是这样的元素不存在.

公理 1.1.3 (Axiom of pairing) 对任意两个集合,存在一个集合,使得这两个集合是该集合的元素.

用数学语言描述是:$\forall a, b, \exists A, a \in A, b \in A$. $B = \{a, b\}$.

有了这个公理,我们可以构造出无限多个集合了:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \cdots$$
$$\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \cdots$$

这里面的任意两个集合互不相等.这是书中的一道习题,至于严格证明他们互不相等,目前还没有思路.我觉得至少应该证明:上述公理中的集合A和a, b是不相同.$\emptyset$和$\{\emptyset\}$不相等比较好说明:$\emptyset$不包含任何元素,而$\{\emptyset\}$包含了一个元素:$\emptyset$,两者自然不相等,习题中的,我觉得只能是通过外延公理,一层一层脱去花括号,最后归结到这个结论上.

1.2 2013年04月29日

并集和交集:

前面无序对给出了拥有两个元素的集合,我们通过并集可以得到包含更多元素的集合.

公理 1.2.1 (并集公理-Axiom of unions) 对任意一簇集合,存在一个集合,包含所有这样的元素,这个元素至少是这一簇集合中的某一个集合的元素.

使用数学符号表示为:$\forall\mathcal{C},\exists\mathcal{U}$,若$x\in X, X\in\mathcal{C}$,则$x\in\mathcal{U}$.
关于并集有如下公式:

1. $A\cup\emptyset=A$;
2. $A\cup B=B\cup A$.交换律(commutativity)
3. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.结合律(associativity)
4. $A\cup A=A$.幂等(idempotence)
5. $A\subset B$当且仅当$A\cup B=B$.

注意到无序对只有两个元素,通过它和并集的关系:$\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}$,可以推广到三元集,四元集,...

$$\{a,b,c\}=\{a\}\cup\{b\}\cup\{c\}.$$

交集:

$$A\cap B=\{x:x\in A\text{且}x\in B\}$$

它可以推广到一簇集合$\mathcal{C}$的交集,此时$\mathcal{C}\neq\emptyset$;此时

$$\cap\{X;X\in\mathcal{C}\}=\{x:x\in X,\forall X\in\mathcal{C}\}$$

交集的性质:

1. $A\cap\emptyset=\emptyset$;
2. $A\cap B=B\cap A$.交换律(commutativity)
3. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.结合律(associativity)
4. $A\cap A=A$.幂等(idempotence)
5. $A\subset B$当且仅当$A\cap B=A$.

特殊的,当$A\cap B=\emptyset$时,称A与B不相交(disjoint).两两不相交(pairwise disjoint).
交与并的分配律(distributive law)

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

习题:$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$的充要条件是$C\subset A$.
若$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)$,要证明$C\subset A$:$\forall x\in C$,则$x\in(A\cap B)\cup C$,由此得到,$x\in A\cap(B\cup C)$,因此$x\in A$,获证.

反之,如果$C \subset A$,需要证明:$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

$x \in (A \cap B) \cup C$,则或者$x \in (A \cap B)$,或者$x \in C$,若$x \in A \cap B$,则$x \in A$且$x \in B$,$x \in A$,且$x \in B \cup C$,于是$x \in A \cap (B \cup C)$.

若$x \in C$,则$x \in A$,$x \in B \cup C$,于是$x \in A \cap (B \cup C)$.

$x \in A \cap (B \cup C)$,$x \in A$,且$x \in B \cup C$,若$x \in B$,则$x \in A \cap B$,这样$x \in (A \cap B) \cup C$,若$x \in C$,则$x \in (A \cap B) \cup C$.

补集和幂集:

相对补集:$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$,很多时候,我们考虑一种特殊情形下的补集,固定一个集合E,此时$E - A = A'$.

补集的一些性质:$(A')' = A$;$\emptyset' = E, E' = \emptyset$;$A \cap A' = \emptyset$;$A \cup A' = E$;$A \subset B$当且仅当$B' \subset A'$.

和补集相关的一个非常重要的性质(De morgan法则):

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

这一法则揭示了一个重要的现象,常称为对偶原理,在包含了并集,交集,以及补集的包含关系或者等式中,只要把每一个集合替换为它的补集,交换并与交的位置,把包含关系反向,则对应的关系仍旧成立.

关于补集的一些结论:

1. $A - B = A \cap B'$;
2. $A \subset B$当且仅当$A - B = \emptyset$;
3. $A - (A - B) = A \cap B$;
4. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$;
5. $A \cap B \subset (A \cap C) \cup (B \cap C')$;
6. $(A \cup C) \cap (B \cup C') \subset A \cup B$;

A与B的对称差(布尔和)定义为:$A + B = (A - B) \cup (B - A)$.

对称差满足交换律;结合律以及$A + \emptyset = A$, $A + A = \emptyset$.

关于一组集合的交集,有一点需要讨论一下,在定义中要求这一组集合中至少有一个集合,如果出现空的集合簇,即讨论:$x \in X$,对任意的$X \in \emptyset$,会引发出$\cap\emptyset$为一个万物之集,为了取消非空的集合簇这一限制,可以把所有的集合限制在一个所谓全集E上,此时$\cap\emptyset = E$, $\mathcal{C} \cup \{E\}$.

公理 1.2.2 (幂集公理:Axiom of powers) 对每一个集合,存在一个集合簇,它包含所有这个给定集合的子集.

集合E的幂集常记作$P(E)$.

对于有限集E, 其中有n个元素, 则$P(E)$中有2^n个元素, 这也是幂集这个称谓的来源吧. 这个结论可以使用归纳法证明, 不过这里只能使用以前的关于自然数的信息, 从更严格的角度来看, 需要首先定义自然数的含义, 也就是这里n和2^n的含义.

习题: 证明$P(E)\cap P(F)=P(E\cap F), P(E)\cup P(F)\subset P(E\cup F)$, 它们可以推广到

$$\bigcap_{X\in\mathcal{C}} P(X)=P(\bigcap_{X\in\mathcal{C}} X),\quad \bigcup_{X\in\mathcal{C}} P(X)\subset P(\bigcup_{X\in\mathcal{C}} X).$$

$P(E)\cap P(F)$中的元素是集合$X, X\subset E, X\subset F \Leftrightarrow A\subset E\cap F \Leftrightarrow X\in P(E\cap F)$.

$X\in P(E)\cup P(F) \Rightarrow X\in P(E)$或$X\in P(F) \Rightarrow X\subset E$或$X\subset F \Rightarrow X\subset E\cup F, \Rightarrow X\in P(E\cup F)$.

反过来为什么不一定成立?$X\in P(E\cup F)\Rightarrow X\subset E\cup F$;此时$X$中可能一部分属于$E$, 一部分属于$F$, $X\notin P(E)$或$P(F)$. 只要$E-F\neq\emptyset$, 或$F-E\neq\emptyset$, 上面的包含关系就是真包含.

1.3 2013年5月1日

有序对: 对于$A=\{a,b,c,d\}$, 如何来定义一个次序呢?对于一个次序c,b,d,a, 和如下集合有一个一一对应关系:

$$\{\{c\},\{c,b\},\{c,b,d\},\{c,b,d,a\}\}.$$

a和b的有序对定义为$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$. 这里需要证明这个定义的合理性, 也就是, 若$(a,b)=(x,y)$, 必有$a=x, b=y$. 书中给出了详细的证明.

接下里的问题是: 对于集合A, B, 是否存在集合包含所有的(a,b), 其中$a\in A, b\in B$, 通过说明$(a,b)\in P(P(a\cup B))$, 可以证明这样的集合石存在的, 由此引出了笛卡尔积的定义, 反过来, 对于任一笛卡尔积, 都能表示为$A\times B$的形式, 书中同样给出了讨论.

习题:

1. $(A\cup B)\times X=(A\cup X)\cup(B\cup X)$;
2. $(A\cap B)\times(X\cap Y)=(A\times X)\cap(B\times Y)$;
3. $(A-B)\times X=(A\times X)-(B\times Y)$.

1. $\forall(a,b)\in(A\cup B)\times X \Rightarrow a\in A\cup B, b\in X \Rightarrow a\in A$或$a\in B \Rightarrow (a,b)\in A\times X$或$(a,b)\in B\times X \Rightarrow (a,b)\in(A\times X)\cup(B\times X)$;反之也是成立的.

2. $(a,b)\in(A\cap B)\times(X\cap Y)\Leftrightarrow a\in A\cap B, b\in X\cap Y \Leftrightarrow (a,b)\in A\times X,(a,b)\in B\times Y \Leftrightarrow (a,b)\in(A\times X)\cap(B\times Y)$.

3. $(a,b)\in(A-B)\times X \Leftrightarrow a\in A-B, b\in X \Leftrightarrow a\in A, a\notin B \Leftrightarrow (a,b)\in A\times X,(a,b)\notin B\times X \Leftrightarrow (A\times X)-(B\times X)$.

我们看看:$(A\cap B)\times X=(A\times X)\cap(B\times X)$成立吗?

$(a,b)\in(A\cap B)\times X \Leftrightarrow a\in A\cap B, b\in X \Leftrightarrow a\in A$且$a\in B, b\in X \Leftrightarrow (a,b)\in A\times X,\ (a,b)\in B\times X \Leftrightarrow (a,b)\in(A\times X)\cap(B\times X)$.

关系:关系是一组有序对的集合,a和b有关系R是指$(a,b)\in R$.

几个例子:相等关系$(x,x)\in X\times X$;属于关系$(x,A)\in X\times P(X)$.

一种特殊的关系:等价关系是指满足自反,对称和传递三个性质的关系.所谓自反是指aRa,对称是指$aRb\Rightarrow bRa$;传递是指$aRb,bRc \Rightarrow aRc$.这里书中有一道题目,实际上是要求说明这三条性质不能从其中两条件性质推出第三条.这里试着做一下:

(1)集合的包含关系满足自反和传递,不一定满足对称.

(2)考虑$X=\{1,2,3\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3),(2,1),(3,2)\}$,那么自反成立,对称也是成立的,但是不满足传递:$1R2,2R3$,无法得到$1R3$.

(3)接下来需要构造一个自反不成立,其他两个性质成立的关系,可是我们应该注意到,一旦有两个不同的a,b,满足aRb,那么根据对称bRa,根据传递,必有aRa和bRb.于是我们需要的是一个小队孤立的a.构造如下:$X=\{1,2,3\}$,R={(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)},注意到自反不成立,因为存在$1\in A$, $1R1$不成立.对称和传递是成立的.

等价关系在数学中具有特殊重要性,尤其在抽象代数中.等价关系和集合的划分有着直接的联系,首先引进几个概念和记号.

集合X的划分是指一簇集合$\mathcal{C}$,这簇集合的并集等于X,但是集合簇$\mathcal{C}$是两两不相交的.

所谓等价关系R的x的等价类是指所有和x等价的元素组成的集合,记作x/R:$x/R=\{y\in X : xRy\}$.我们把X的所有等价类组成的集合记作X/R.

我们说的等价类和集合划分的关系实际上可以用等式

$$\mathcal{C}=X/R$$

表示:等价关系R生成的等价类的集合是X的一个划分,同样任何一个划分$\mathcal{C}$都能够决定一个等价关系(记作$X/\mathcal{C}$).

证明参考课本,难度不大.

1.4 2013年05月11日

首先讨论映射,书中使用的是函数(function),我在这里为了和其他书本相一致,采取映射这个术语.首先需要了解前面遗漏的两个符号或者术语:关

系R的定义域和值域.

$$\mathrm{dom}R = \{x : \exists y(xRy)\}; \quad \mathrm{ran}R = \{y : \exists x(xRy)\}.$$

集合X到Y的映射是一种特殊的关系f:dom$f = X$, 对每一个$x \in X$, 存在唯一的$y \in Y$, 使$(x, y) \in f$, 此时, 满足$(x, y) \in f$的y记作$f(x)$. X到Y的所有映射组成的集合是$P(X \times Y)$的子集, 记为Y^X.

书中讨论了一些术语相关的知识, 这里不叙述了. 有时$\{(a, b)|(a, b) \in f\}$, 称为f的图像(graph).

如果ran$f = Y$, 则称f是映上(onto)的(X映到Y上的).

设$A \subset X$, 记号$f(A)$的含义如下:

$$f(A) = \{y : y = f(x), \exists x \in A\},$$

这里存在一个问题, 我们考虑的集合中, 可能出现$A \in X$这个情形, 此时$f(A)$的含义具有歧义. 这个问题以前从没想过, 因为以前很少遇到, 或者说几乎不会遇到.

函数的限制与延拓.

设f是Y到Z的函数, $X \subset Y$, 对于如下方式构造的X到Z的函数g:

$$g(x) = f(x), x \in X,$$

称g为f在X上的限制, f为g在Y上的延拓. 记$g = f|X$, $\mathrm{ran}(f|X) = f(X)$.

下面是几个映射的例子:

(1) $X \times Y$到X的映射: $f(x, y) = x$; $X \times Y$到Y的映射: $f(x, y) = y$.

(2) R是X上的等价关系, X到X/R的映射: $f(x) = x/R$, 称为canonical map.

对于映射f, 可以定义X上的等价关系如下:

$$x/R = \{y : f(y) = f(x)\},$$

也就是说$aRb \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. 令$y \in Y$, $g(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$, 此时, $g(y) = x/R$.

(3) $A \subset X$, A的特征函数: $\chi(x) = 1, x \in A$, $\chi(x) = 0, x \notin A$, 对于$A \subset X$, 或者$A \in P(X)$, 则$A \to \chi_A$也是一个一一映射.

习题: (i) $Y^\emptyset$恰好有一个元素, $\emptyset$, 无论Y是否为空集; (ii) 如果X不是$\emptyset$, 则$\emptyset^X$为空.

这里涉及到了空集, 证明方法通常是反证.

$Y^\emptyset$表示的是所有$\emptyset$到Y的映射, 需要证明$\emptyset$是映射, 而映射又是特殊的关系R, 需要证明$\emptyset$是关系, 或者说$\emptyset$是有序对的集合, 反证, 如果$\emptyset$不是关系, 那么应该存在元素α不是有序对, 而这是不可能的. 接下来, $\emptyset$是一个映射, 也就是对每一个$x \in \emptyset$, 存在唯一的$y \in Y$, 使$x\emptyset y$, 这是成立的, 也就是如果$\emptyset$不是一个映射, 也就是存在$x \in \emptyset$, 或者不存在$y \in Y$, 使得$x\emptyset y$, 或者有两个以上

的y_1, y_2, 使得$x\emptyset y_1, x\emptyset y_2$, 这都不可能. 对于任何其他映射或者关系, 都要求有元素$x\in\emptyset$, 这是不可能的, 因此, $\emptyset$是$Y^\emptyset$的唯一元素.

假设存在$f\in\emptyset^X$, 则对于$x\in X$, $\exists y\in\emptyset$使$f(x)=y$, 这是不可能的.

簇: 从指标集I到X的映射. 把并集和交集运算推广到集合簇,

$$\bigcup_{i\in I} A_i \text{或} \bigcup_i A_i$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i \text{或} \bigcap_i A_i$$

$\{I_j\}$是J上的集合簇, $K=\bigcup_j I_j$, $\{A_k\}$为K上的集合簇, 结合律就是

$$\bigcup_{k\in K} A_k = \bigcup_{j\in J}(\bigcup_{i\in I_j} A_i).$$

交换律的推广:

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)\cup(\bigcup_{j\in J} A_j) = (\bigcup_{j\in J} A_j)\cup(\bigcup_{i\in I} A_i).$$

设$\{A_i\}$是X的子集簇, $B\subset X$, 则

$$B\cap\bigcup_i A_i = \bigcup_i (B\cap A_i)$$
$$B\cup\bigcap_i A_i = \bigcap_i (B\cup A_i)$$

这是分配律.

如果$\{A_i\}$和$\{B_j\}$均为集合簇, 则

$$(\bigcup_i A_i)\cap(\bigcup_j B_j) = \bigcup_{ij}(A_i\cap B_j)$$
$$(\bigcap_i A_i)\cup(\bigcap_j B_j) = \bigcap_{ij}(A_i\cup B_j)$$

这里$\bigcup_{ij}$是指$\bigcup_{(i,j)\in I\times J}$.

设$x\in(\bigcup_i A_i)\cap(\bigcup_j B_j)\Leftrightarrow x\in\bigcup_i A_i$且$x\in\bigcup_j B_j$, $\exists i_0, j_0, x\in A_{i_0}, x\in B_{j_0}\Leftrightarrow x\in A_{i_0}\cap B_{j_0}\Leftrightarrow x\in\bigcup_{ij}(A_i\cap B_j)$.

另一等式的证明方法类似.

笛卡尔积的推广, 笛卡尔积是集合

$$X\times Y=\{(x,y)|x\in X, y\in Y\},$$

考虑集合$\{a,b\}, a\neq b$;Z为$\{a,b\}$上的集合簇

$$Z=\{\{z_a,z_b\}|z_a\in X, z_b\in Y\},$$

于是Z到$X\times Y$有一个映射:$f(z)=(z_a,z_b)$. 推广到一般情形,

$$\times_{i\in I}X_i=\{\{x_i\}_{i\in I}|x_i\in X_i\},$$

若$X_i=X$,则记号$\times_i X_i$变为X^I.

设$\{X_i\}_{i\in I}$为集合簇, $X=\times_i X_i$, $J\subset I$,此时存在一个自然的映射,所谓的投影映射. $X\to\times_{i\in J}X_i$.

$x\in X$, $f(x)=y\in\times_{i\in J}X_i$,其中$y_i=x_i, i\in J$.

习题:证明$(\bigcup_i A_i)\times(\bigcup_j B_j)=\bigcup_{ij}(A_i\times B_j)$,对交也是成立的,另外,$\bigcap_i X_i\subset X_j\subset\bigcup_i X_i$,有这个结论,可以把交集和并集定义为包含关系的极大极小值.

(1) 设$(a,b)\in(\bigcup_i A_i)\times(\bigcup_j B_j)\Leftrightarrow a\in\bigcup_i A_i, b\in\bigcup_j B_j\Leftrightarrow a\in A_{i_0}, b\in B_{j_0}\Leftrightarrow(a,b)\in A_{i_0}\times B_{j_0}\Leftrightarrow(a,b)\in\bigcup_{ij}(A_i\times B_j)$.

(2) $\forall x\in\bigcap_i X_i\Rightarrow x\in X_j\Rightarrow\bigcap_i X_i\subset X_j$;$\forall x\in X_j\Rightarrow x\in\bigcup_i X_i\Rightarrow X_j\subset\bigcup_i X_i$.

设$X_j\subset Y$,对任意j成立,则$\bigcup_i X_i\subset Y$成立;这意味着$\bigcup_i X_i$是满足对所有的j, $X_j\subset Y$的Y中的最小的.

若对每一个j, $Y\subset X_j$,则$Y\subset\bigcap_i X_i$,这意味着$\bigcap_i X_i$是满足对所有的j, $Y\subset X_j$中的最大的集合.

1.5 2013年05月12日

反函数与复合函数

首先是概念.

(1) f为X到Y的映射,定义f^{-1}为$P(Y)$到$P(X)$的映射,即$B\subset Y$,

$$f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\},$$

这里$f^{-1}(B)$称为B在f下的逆像(inverse image). f^{-1}还有另一个含义:从f的值域到X的一个函数, $f^{-1}(y)=\{x\}\Leftrightarrow f(x)=y$,不过这只是对于一一对应成立.

(2) f是X到Y的映射, g是Y到Z的映射,可以定义一个X到Z的映射h如下:$h(x)=g(f(x)), x\in X$,称h为f与g的复合映射.

下面是一些重要的关系式:

(1) $\{A_i\}$为X的子集簇,则

$$f(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i f(A_i)$$

$$f(\bigcap_i A_i)\subset\bigcap_i f(A_i)$$

第一个关系式:$y \in f(\bigcup_i A_i) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_i A_i, f(x) = y \Leftrightarrow x \in A_{i_0}, f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(A_{i_0}) \Leftrightarrow y \in \bigcup_i f(A_i)$.

第二个关系式:$y \in f(\bigcap_i A_i) \exists x \in \bigcap_i A_i, f(x) = y \Rightarrow y \in f(A_i), \forall i \Leftrightarrow y \in \bigcap_i f(A_i)$.

第二个等式之所以不能成立等式,原因在于$y \in f(A_i), \forall i$,是无法得出$\exists x \in \bigcap_i A_i, f(x) = y$.除非映射是一一的.下面是一个例子:$A_1 = \{1,2\}, f(1) = 1, f(2) = 2, A_2 = \{1,3\}, f(1) = 1, f(3) = 1$,此时$f(A_1) = \{1,2\}, f(A_2) = \{1,2\}$,这说明$2 \in f(A_2)$,但是不存在$x \in A_1 \cap A_2$,使$f(x) = 2$.

(2) f是X到Y上(onto)的函数的充要条件是Y的任一非空子集在f下的逆像是X的非空子集.

$\Rightarrow$ 设y属于Y的任一非空子集B,则由于f是X到Y上(onto)的,则存在x,使得$f(x) = y$,于是$x \in f^{-1}(y)$, $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$, $f^{-1}(B)$非空.

$\Leftarrow$ 考虑单元素集$\{y\}$,由于$f^{-1}(y)$非空,存在$x \in f^{-1}(y)$,则$f(x) = y$.

f是一一对应(one-to-one)的充要条件是f的值域中的每一个单元素集合在f下的逆像是X的单元素集合.

(3) $B \subset Y, f(f^{-1}(B)) \subset B$. f是X到Y上(onto)的函数, $f(f^{-1}(B)) = B$.

证明难度不大,书中给出详细的过程.

(4) $A \subset X$,则$A \subset f^{-1}(f(A))$. f是一一对应,则$A = f^{-1}(f(A))$.

证明难度不大,书中给出详细的过程.

(5) $\{B_i\}$为Y的子集簇,则

$$f^{-1}(\bigcup_i B_i) = \bigcup_i f^{-1}(B_i); \quad f^{-1}(\bigcap_i B_i) = \bigcap_i f^{-1}(B_i).$$

(6) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$;

(7)函数的复合不满足交换律,但是满足结合律:$h(gf) = (hg)f$.

(8)把逆映射和复合映射联系起来的等式特别重要. f是X到Y的映射,g是Y到Z的映射,此时,f^{-1}是$P(Y)$到$P(X)$的映射,g^{-1}映$P(Z)$到$P(Y)$,此时,gf与$f^{-1}g^{-1}$都有意义,且有$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$.

这里的一些关系可以推广到更一般的关系上去,书中给出了详细的过程,这里不叙述了.考虑X上的关系:I为X上的相等关系,此时I类似于乘法单位元的作用,$IR = RI = R$对于X中的每一个关系成立,使用代数形式来表示等价关系为:(i)自反:$I \subset R$;(ii)对称:$R \subset R^{-1}$;(iii)传递:$RR \subset R$.

习题:f为X到Y的映射:(i)设g是Y到X的映射,若gf是X上的恒等映射,则f是一一对应,而g是Y到X上(onto)的.(ii)对X的任意子集A, B, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$成立的充要条件是$f$是一一对应;(iii)对$X$的任意子集$A$, $f(X - A) \subset Y - f(A)$成立的充要条件是$f$是一一对应;(iv)对$X$的任意子集$A$, $Y - f(A) \subset f(X - A)$成立的充要条件是$f$是$X$到$Y$上(onto)的映射.

(i)设$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow gf(x_1) = gf(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,从而$f$是一一对应;对于$\forall x \in X$,令$y = f(x)$,则$g(y) = gf(x) = x$,即$g$是$Y$到$X$上的.

(ii) 设$f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$, 对任意$A, B$成立, 欲证$f$是一一对应, 设$f(x_1) = f(x_2)$, 令$A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$, 则$f(A)\cap f(B) \neq \emptyset$, 设$y \in f(A)\cap f(B)$, 这意味着$A\cap B \neq \emptyset$, 这只有在$x_1 = x_2$时才可能.

反之, 如果f是一一对应. $\forall y \in f(A\cap B) \Leftrightarrow \exists x \in A\cap B$, 使$y = f(x)$ $\Leftrightarrow \exists x \in A$且$x \in B \Leftrightarrow y \in f(A)$, 且$y \in f(B)$(这一步使用了$f$是一一的)$\Leftrightarrow$ $y \in f(A)\cap f(B)$.

(iii) 设$f(X - A) \subset Y - f(A)$对任意$A \subset X$成立, 欲证$f$是一一对应, 设$f(x_1) = f(x_2) = y$, 令$A = \{x_1\}$, 我们要证明$x_2 \in A$, 从而$x_1 = x_2$, 若$x_2 \neq A$, 则$y \notin Y - f(x_1)$, $x_2 \in X - A$, 从而$y \in f(X - A)$, 矛盾.

反之, 若f是一一对应, $\forall y \in f(X - A) \Rightarrow \exists x \in X - A$, 使$f(x) = y \Rightarrow$ $x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)$ (这里面使用了f是一一的) $\Rightarrow f(x) \in Y - f(A)$.

(iv) $Y - f(A) \subset f(X - A)$, $\forall y \in Y$, 我们要找一个x, 使$f(x) = y$. 对于$B = Y - \{y\}$, 令$A = f^{-1}(B)$, 则$f(A) = B \Rightarrow Y - f(A) = \{y\} \subset f(X - A)$ $\Rightarrow \exists x \in X - A$, 使$f(x) = y$.

反之, f是X到Y上(onto)的, 则$\forall y \in Y - f(A)$, 设$f(x) = y \Leftrightarrow y \notin f(A)$ $\Rightarrow x \notin A \Leftrightarrow x \in X - A \Rightarrow f(x) \in f(X - A)$.

上面的推导过程中有几个$\Rightarrow$, 这也是关系式为$\subset$而不是$=$的原因所在, 这里简单讨论: $f(x) \notin f(A) \Rightarrow x \notin A$, 若$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$. 反过来是不一定成立的. 也就是$f(x) \in f(A)$, 不一定能够得出$x \in A$, 因为有可能有另一个$x'$, 使得$f(x') = f(x)$.

1.6 2013年5月18日

数是什么?这一节开始从集合论的角度建立起自然数体系,我个人的看法是:整个过程中有些思想方法值得学习,其余的可以仅仅做个了解,或者说类似书中引言的说法(read it,absorb it, and forget it),掌握之后,就可以把它忘记了,我们在使用的时候,继续遵循我们一致接收的中小学教育即可.北师大郇中丹老师的一个网络课程(数学分析,强烈推荐,即使不看其他的,至少应该看看第一讲绪论,这一讲虽然不涉及任何数学知识,但是很精彩!)中表示过这样一个意思(在第二讲集合论初步中):数学就是把我们生活中的一些事实说明白(我稍微扩充了一下).那么这一节以及接下来的几节内容,就是为了把数说明白,为数建立更严密的逻辑基础.我认为它有理论上的重要性,对于应用基本上意义不大.书中作了一个类比,我觉得很能说明一些东西.我们如何来定义”米”这个单位呢?或者如何定义长度呢?我们是通过指定一个物体的长度作为基准,然后所有其他的长度与之作比较.这里面,其实我们还有一个疑问,长度本身又是什么含义?在这里,我们其实并没有给出长度或者”米”本身的明确的定义,我们通过比较来给出我们需要的.

类似的,我们如何来定义自然数呢?我们其实无法说出自然数是什么?但是我们可以通过一些关系建立起自然数.例如,我们不知道2到底是什么?但是我们知道它是排在1后面的,在3前面的,2是1的后继,3是2的后继,这说明

我们需要一个后继的概念,用什么方法来定义这个后继呢:$x^+ = x \cup \{x\}$.这是目前常用的一个方法,首先这个方法只涉及集合的概念,需要的很少,我们再定义$0 = \emptyset$,于是通过$\emptyset$,并集等就得到了自然数,这里我们需要一个公理:

公理 1.6.1 (无限公理(Axiom of infinity)) 存在一个集合,包含0和它的每一个元素的后继(successor).

集合A称为successor set,如果$\emptyset \in A$,且$\forall x \in A$,必有$x^+ \in A$.于是无限公理可以描述为:存在一个successor set A.

任一非空的successor簇的交集是一个successor set.证明如下:令$A = \bigcup_i A_i, i \in I$, I非空,由于$0 \in A_i, \forall i \in I$,于是$0 \in \bigcap_i A_i$,也就是$0 \in A$.设$x \in A$,则$x \in A_i, \forall i \in I$,于是$x^+ \in A_i, \forall i \in I$,故$x^+ \in \bigcap_i A_i$.

由此我们可以令ω为每一个successor set的子集,这样的ω是存在的并且是唯一的.ω中的元素就是自然数.

书中的这一节的后面是定义了一个序列sequence,并且把交,并,笛卡尔积推广到序列上,这里不讨论了.

1.7 2013年05月25日

Peano公理

这一节继续自然数的讨论.从上一节关于自然数的定义,可以得到如下结论:

(I)$0 \in \omega$;

(II)如果$n \in \omega$,则$n^+ \in \omega$;这里$n^+ = n \cup \{n\}$.

(III)(数学归纳原理)设$S \subset \omega$,若$0 \in \S$,并且当$n \in S$时必有$n^+ \in S$,则$S = \omega$;

(IV)$n^+ \neq 0$,对所有$n \in \omega$成立;因为n^+包含n,非空,自然有$n^+ \neq 0$.

(V)若$n, m \in \omega$,且$n^+ = m^+$,则$n = m$.

这一个结论的证明比较费劲,书中给出了详细的过程,由于这个过程是归纳法,反证法相关方法的典型应用,这里给出详细过程.它的证明需要两个辅助命题:(i)不存在自然数,它是其元素的子集,由此可以得到$n \notin n$.(ii)一个自然数的每一个元素都是它的子集.对于(ii),引入一个概念:transitive set.集合E称为transitive set,如果集合E包含所有它的元素,或者说:$x \in y, y \in E$,必有$x \in E$,也就是$y \subset E$.于是(ii)实际上是说每一个自然数都是transitive set.

(i)我们实际上需要证明:对于每一个自然数n, $x \in n$,那么n不可能是x的子集.如果令$S = \{n \in \omega | \forall x \in n, n \subset x\text{不成立}\}$,我们需要证明$S = \omega$.使用归纳法:

(a)$0 \in S$成立,因为不存在$x \in 0$,也就无所谓$0 \subset x$问题了.

(b)若$n \in S$,要证明$n^+ \in S$.

首先n本身是n的子集,这也就意味着不可能有$n \in n$,即$n \notin n$,于是n^+不是n的子集,因为$n \in n^+ = n \cup \{n\}$.若$n^+ \subset x$,则$n \subset x$,而$n \in S$,故$x \notin n$,也就是说n^+也不可能是n的任一元素的子集,有了这两点,说明n^+不是n^+的元素的子集,$n^+ \in S$.获证.

(ii)令$S = \{n \in \omega | n$为transitive set$\}$.需要证明$S = \omega$,同样使用归纳法.

(a)首先$0 \in S$成立,否则意味着存在$y \in 0$,使得y不是0的子集,这是不可能的.

(b)若$n \in S$,要证明$n^+ \in S$;要时刻注意$n^+ = n \cup \{n\}$,若$x \in n^+$,则或者$x \in n$,或者$x = n$,若$x \in n$,而$n \in S$,于是$x \subset n \subset n^+$,若$x = n$,则$x \subset n^+$也成立,这意味着x是n^+的子集.$n^+ \in S$.获证.

有了这两个辅助命题的帮助,可以来证明(V)了.$n^+ = m^+$,而$n \in n^+$,于是$n \in m^+$,于是$n \in m$或者$n = m$,由对称性,从另一方面推导将有$m \in n$或$m = n$,若$m \neq n$,则有$n \in m$和$m \in n$同时成立,根据(ii)每一个自然数满足transitive,有$n \in n$,注意到$n \subset n$总是成立,又和(i)发生矛盾.

上述五条也常被称为Peano公理,这可能是用的最多的自然数的公理体系.德国数学家E.Landau写了一本《分析基础》(Foundations of Analysis),其中从Peano公理出发,完整推导了自然数到整数,到有理数,实数,复数的整个过程.

数学归纳法不仅仅可以用于证明,还可以用作定义.

设f是X到X的映射,$a \in X$,一个比较自然的想法是按如下方式定义一个序列$\{u(n)\}$(从ω到X的映射):$u(0) = a, u(1) = f(u(0)), u(2) = f(u(1)), \ldots$使用数学归纳法可以证明只要存在这样的$u(n)$,它就是唯一的,接下来还需要证明存在性,这就是下面的定理:

定理 1.7.1 (归纳定理(Recursion Theorem)) 若a是X中的元素,f是X到X的映射,那么存在一个ω到X的映射u,使得$u(0) = a$,且对所有$n \in \omega$,有$u(n^+) = f(n(n))$.

这个定理的应用就是所谓的递归定义,书中给出了详细的证明.这里复述如下:证明的总的思路是构造一个u,然后证明u是一个映射,并且满足条件.

首先注意到ω到X的映射是$\omega \times X$的一个特殊子集,令$\mathcal{C}$为所有满足如下条件的A的集合:A是有序对的集合,也就是$A \subset \omega \times X$,且$(0, a) \in A$,对于任意的$(n, x) \in A$,必有$(n^+, f(x)) \in A$.

这个$\mathcal{C}$是非空的,因为$\omega \times X$本身满足条件,令u为所有$\mathcal{C}$中元素的交集,

$$u = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A.$$

下面证明$u \in \mathcal{C}$,首先$(0, a) \in A, \forall A \in \mathcal{C}$,故$(0, a) \in u$,其次,若$(n, x) \in u$,则$(n, x) \in A, \forall A \in \mathcal{C}$,故$(n^+, f(x)) \in A, \forall A \in \mathcal{C}$,于是$(n^+, f(x)) \in u$.

接下来若能证明u是一个映射，那么u就是满足条件的，也就是说对于每一个自然数$n \in \omega$，都有一个唯一的$x \in X$，使得$(n,x) \in u$. 从u的构造可以知道，x的存在是成立的，接下来只要证明唯一性，也就是如果$(n,x) \in u, (n,y) \in u$，那么必有$x = y$. 同样使用归纳法来证明，先构造集合$S = \{n \in \omega : (n,x) \in u, (n,y) \in u \Rightarrow x = y\}$. 证明中要使用$u$的一个在包含关系下的极小性质，需要一些反证技巧.

(a) $0 \in S$，如果不成立，在存在b使得$(0,b) \in u$，于是考虑$u - \{(0,b)\}$，它同样是$\mathcal{C}$中的元素，这与u的定义矛盾.

(b) 设$n \in S$，欲证$n^+ \in S$. $n \in S \Rightarrow (n,x) \in u$，$x$是唯一的，于是$(n^+, f(x)) \in u$，(这是$u$的定义)，若$n^+ \notin S, \exists y \neq f(x), (n^+, y) \in u$，考虑$u - \{(n^+, y)\}$，此时再次得到一个$u$的真子集同样属于$\mathcal{C}$，从而引发矛盾.

习题：(1) 若n为自然数，则$n \neq n^+$；(2) 若$n \neq 0$，则存在m使得$n = m^+$；(3) 证明ω是reansitive set. (4) 若E是某个自然数的非空子集，则存在$k \in E$，使得对于任意的异于k的$m \in E$，有$k \in m$.

(1) 令$S = \{n \in \omega : n \neq n^+\}$，证明$S = \omega$.

首先$0 \in S$，因为$0 \neq o^+$.

其次，若$n \in S$，要证明$n^+ \in S$，否则，意味着$n^+ = (n^+)^+$，于是$n = n^+$，与假设矛盾.

(2) 结论很明显，问题在于我们如何表示出这个$m, n \neq 0$，说明存在$x \in n$. 我们令

$$m = \bigcup_{A \in n} A.$$

下面证明$n = m^+$.

$\forall x \in n \Rightarrow x \subset m \Rightarrow x \in m^+$.

$\forall x \in m^+$，意味着$x = m$或$x \in m$，若$x \in m, \exists A_0, x \in A_0, A_0 \in n, A_0 \subset n$(前面的辅助命题(ii))，于是$x \in n$. 获证.

这里似乎有问题：第一部分$x \subset m \Rightarrow x \in m^+$恐怕不严密，因为对于一般集合不成立，只是自然数满足，第二部分缺少$x = m$的情形. $m \in n$的证明并不轻松.

(3) 它实际上是要证明每一个自然数是ω的子集. 使用归纳法. 0显然是ω的子集；假设n是ω的子集，欲证n^+是ω的子集，$\forall \in n^+$，应该证明$x \in \omega$，此时$x = n$或者$x \in n$，$x = n \in \omega$；$x \in n \subset \omega$，同样有$x \in \omega$. 获证.

(4) 实际上是寻找集合E中的最小自然数. 令$k = \bigcap_{A \in E} A$即可. 因为E非空，k的存在性不是问题. 但是需要证明$k \in E$，以及$k \in m, m \in E$，且$m \neq k$.

(2) 和(4) 的构造我觉得是没有问题的，可是严密的证明总是没有得到，想了几天没有太好的思路.

1.8 2013年05月26日

算术

使用归纳定义,可以给出自然数的加法,乘法和幂的定义,减法和除法在自然数并不总是可行的,可以定义为加法和乘法的逆运算.

加法:$s_m(0) = m, s_m(n^+) = (s_m(n))^+$;也就是$s_M(n) = m + n$.

乘法:$p_m(0) = 0, p_m(n^+) = p_m(n) + m$;也就是$p_M(n) = m \cdot n$.

幂次:$e_m(0) = 1, e_m(n^+) = e_m(n) \cdot m$;也就是$e_M(n) = m^n$.

书中给出了加法结合律的证明,作为数学归纳法的典型应用,这里也记录之:

要证明

$$(k + m) + n = k + (m + n).$$

对n作归纳.

(i)$(k + m) + 0 = k + m = k + (m + 0)$;

(ii)假设对于n成立,对于n^+来说,

$$(k+m)+n^+ = ((k+m)+n)^+ = (k+(m+N))^+ = k+(m+n)^+ = k+(m+n^+).$$

对于交换律:$m + n = n + m$,在使用归纳法的时候,需要一些技巧.直接对m或者n做归纳,都不容易成功,因为$m + 0 = 0 + m$这一步本身就很麻烦,于是我们分两步走:

(1)$0 + n = n + 0$.

(i)$n = 0$显然成立:$0 + 0 = 0$.

(ii)$0 + n^+ = (0 + n)^+ = (n + 0)^+ = n^+ = n^+ + 0$.最后一步自然数加法的定义.

(2)$m^+ + n = (m + n)^+$.

仍然是对n归纳:

(i)$m^+ + 0 = m^+ = (m + 0)^+$;

(ii)假设对n成立,$m^+ + n^+ = (m^+ + n)^+ = ((m + n)^+)^+ = (m + n^+)^+$.

接下来证明交换律,对m进行归纳.(i)$m = 0$已经成立,(ii)假设交换律对于m成立,对于m^+来说,$m^+ + n = (m + n)^+ = (n + m)^+ = n + m^+$.

乘法的交换律和结合律可以用同样的方法证明.

两个自然数m和n是可比较的(comparable),若$m \in n$,或$m = n$,或$n \in m$.我们有结论:任意两个自然数是可比较的.这个结论比较重要,书中给出了详细证明.令

$$S(n) = \{m \in \omega : m\text{与}n\text{是可比较的}\},$$

以及$S = \{n \in \omega : S(n) = \omega\}$.我们需要证明$S = \omega$,这里同样应用数学归纳法.

(i)$0 \in S$,或者$S(0) = \omega$,使用归纳法:(a)$0 \in S(0)$,(b)$m \in S(0)$,则$m^+ \in S(0)$.

(ii)若$n \in S$,则$n^+ \in S$,首先$0 \in S(n^+)$,因为$n^+ \in S(0)$.接下来需要从$m \in S(n^+)$出发推导出$m^+ \in S(n^+)$.$m \in S(n^+)$,意味着$m \in n^+$,或

者$m = n^+$, 或者$n^+ \in m$, 后两者立即可以得到$n^+ \in m$, 故只要讨论$m \in n^+ = n \cup \{n\}$情形. 于是$m = n$或$m \in n$, 从$m = n$可以得到$m^+ = n^+$. 于是接下来讨论$m \in n$这一情形, 从$S(n) = \omega$可知$m^+ \in S(n)$, 于是$m^+ \in n$, 或者$m^+ = n$, 或者$n \in m^+$. 前面两个可以得到$m^+ \in n^+$, 这就讨论一个情形:$n \in m^+$, 但是它不能和$m \in n$同时成立. 因为$n \in m^+$会得到$n = m$, 或者$n \in m$, 都有$n \subset m$, 这与$m \in n$不能同时成立(前一节的结论).

$m \in n, m = n$和$n \in m$有且仅有一个成立.

若$m \in n$和$m = n$同时成立, $m = n \Rightarrow n \subset m$, 不可能;若$m \in n$和$n \in m \Rightarrow m \in m$(transitive), $m \subset m$不可能. 若$m = n, n \in m, \Rightarrow m \subset n$, 同样不成立.

任一自然数不可能是它的元素的子集, 另一个结论是不相同的m, n满足$m \in n$的充要条件是$m \subset n$. $m \in n \Rightarrow m \subset n$可以同$n$的transitive性质得到;$m \subset n, n \in m$不可能, 否则$m$是它的某个元素$m$的子集.

$m \in n$定义为$m \subset n$, $m \in n$或者$m = n$定义为$m \leq n$.

习题:若$m < n$, 则$m + k < n + k$, 若$m < n, k \neq 0$, 则$m \cdot k < n \cdot k$, 若E是非空的自然数集, 则存在$k \in E$, 使得$k \leq m$对所有的$m \in E$成立.

(i)对k施加归纳法, (a)$k = 0$时, 就是题设本身, 结论成立;(b)假设结论对于k成立, 对于k^+来说, $m + k^+ = (m + k)^+ < (n + k)^+ = n + k^+$. 我们需要证明若$m < n$, 则$m^+ < n^+$, 这里一点可以这样得到:$m < n$, 可以得到$m \in n \Rightarrow m \subset n \Rightarrow m \subset n^+$, $m \in n \Rightarrow m \in n^+ m \subset n^+$, 因此$m^+ \in n^+$, $m^+ < n^+$.

(ii)似乎不是很容易, 我们换一个思路, 我们证明, 对于任意自然数k, 有$mk^+ < nk^+$. 使用归纳法以及刚刚证明的关于加法的结论即可.

(a)$k = 0, mk^+ = m < n = nk^+$;(b)$m(k^+)^+ = mk^+ + m < nk^+ + m < nk^+ + n = n(k^+)^+$.

(iii)这实际上是前一节已经出现过的题目.

1.9 2013年06月01日

继续上一节的算术.

我们称集合E和F是对等(equivalent)的, 如果存在一个E和F之间的一一对应, 这是一个等价关系.

自然数n的每一个真子集对等于某个比n小的自然数, 或者说n的元素. 证明使用归纳法. $n = 0$是平凡的, 如果对于n成立, 那么对于n^+来说, 对于n^+的真子集E, 可能出现这样几个情形:E是n的真子集, 此时根据归纳假设, 结论成立;若$E = n$, 那结论自然成立, n中恒等映射;最后一个情形是$n \in E$, 此时, 存在$k \in n$, 但是$k \notin E$, 定义E上的映射f如下:当$i \neq n$时, $f(i) = i$, 否则$f(n) = k$, 这个f是E到n的一一对应. 再使用归纳假设, 以及一一对应关系的传递性, 可以知道结论成立.

一个多少令人有些意味的事实是:一个集合可以和它的真子集对等. 一个最好的例子就是$f(n) = n^+$, 自然数集与非零自然数集之间的一个一一对应

关系. 但是对于自然数n, 它不能和n的任一真子集对等. 同样可以使用归纳法证明. 从n到n^+这一步, 分$n \in E$和$n \notin E$来讨论, $n \in E$时, 取$E - \{n\}$.

集合E称为有限(finite)的, 如果它与某个自然数对等, 否则就称为无限的(infinite),

习题:用这个定义证明自然数集ω是无限的.

我们使用反证法, 通过构造出一个自然数n和它的真子集之间的一一对应来得到矛盾. 首先ω显然不可能和0对等, 于是假设$\omega \sim n$, 那么$n \neq 0$, 前面已经证明过, 此时存在自然数m, $n = m^+$.

假设f是ω和n之间一一对应, 设$f(0) = k$, 则$k \leq n$, 我们构造$\omega - \{0\}$到m之间的映射g如下:若$x < k$, 令$g(x) = f(x)$, 当$x \geq m$时, $g(x) = f(x^+)$, 那么这个g是一一的, 于是我们有了$n \sim \omega \sim \omega - \{0\} \sim m$, 于是自然数集和它的一个真子集对等了, 发生矛盾.

一个集合最多与一个自然数对等.

任何两个不同的自然数m, n, 必有$m \in n$或$n \in m$, 无论如何其中一个是另一个的真子集, 而自然数不可能与其真子集对等. 由此可知有限集不可能和它的真子集对等, 即对于有限集来说, 整体大于部分成立.

习题:使用有限的定义的这个推论证明ω是无限的.

因为ω可以与$\omega - \{0\}$对等, 从而不是有限的.

一个自然数的每一个子集与某个自然数对等, 自然说明有限集的每一个子集是有限的.

有限集E的元素个数定义为与E对等的那个自然数, 记为$\#E$, 这个自然数是唯一的, $\#E$是$P(X)$到ω的一个映射.

(1) $E \subset F$, 则$\#E \leq \#F$, E, F都是有限集.

$E \sim \#E$, $F \sim \#F$, $\#E$对等于F的某个子集, $\#E \leq \#F$.

(2) E, F为有限集, 则$E \cup F$也是有限的, 而且当E与F不相交时:$\#(E \cup F) = \#(E) + \#(F)$.

若m与n为自然数, 则m在$m + n$中的补集与n对等. 对n使用归纳法.

(3) E, F为有限集, 则$E \times F$与E^F均为有限集, 且$\#(E \times F) - \#(E) \cdot \#(F)$, $\#(E^F) = (\#(E))^{(\#(F))}$.

习题:有限个有限集的并集是有限的, 若E是有限的, 则$P(E)$是有限的, $\#(P(E)) = 2^{\#(E)}$, 若E是非空的自然数的有限集, 则存在$k \in E$, 使得$m \leq k, \forall m \in E$.

1.10 2013年06月09日

次序(order)

这一节主要是各种定义:

(1)集合X中的关系R称为是反对称的(antisymmetric), 如果xRy, yRx同时成立, 必有$x = y$.

(2)关系R称为偏序(partial order), 如果关系R满足自反的(reflexive), 反对称的(antisymmetric), 传递的(transitive), 此时通常使用符

号$\leq$. $\forall x, y, z \in X$, (i) $x \leq x$; (ii) 若$x \leq y, y \leq x$, 必有$x = y$; (iii) 若$x \leq y, y \leq z$, 则$x \leq z$.

这里之所以使用偏序,是因为有可能在X中存在元素x, y,无法确定序关系,如果对于X中的每一个元素x和y,或者$x \leq y$,或者$y \leq x$,则称$\leq$为全序(total order, simple order, linear order).一个全序集常称为链(chain).

偏序集是指带有偏序关系的集合,记作$(X, \leq)$.类似的,全序集是指带有全序关系的集合.

(3)对于X中的偏序$\leq$,我们称$y \geq x$,如果$x \leq y$;$x < y$或者$y > x$,如果$x \leq y$,且$x \neq y$,称x是predecessor of y, y是successor of x.

对于关系$<$,有(i) $x < y$和$y < x$不能同时成立;(ii) $x < y, y < z$,则有$x < z$,也就是$<$是传递的.

反过来,我们可以从$<$出发定义$\leq$,如果关系$<$满足(i)和(ii),然后定义$x \leq y$,如果$x < y$或者$x = y$,那么$\leq$是一个偏序.

可以把$\leq$和$<$的这种关系推广到一半的关系,对于关系R和S,满足xSy,如果xRy,且$x \neq y$,此时称S是strict relation corresponding R. R是weak relation corresponding S.

(4)对于偏序集$(X, \leq)$, $a \in X$,集合$s(a) = \{x \in X : x < a\}$,称为the initial segment determined by a, $\bar{s}(a) = \{x \in X : x \leq a\}$称为the weak initial segment determined by a.

(5)若$x \leq y, y \leq z$,称y位于x和z之间(between x and z),若$x < y, y < z$,称y是严格位于x和z之间(strictly between x and z).若$x < y$,并且不存在元素严格位于x和y之间,称x是immediate predecessor of y,或者说y是immediate successor of x.

(6) X为偏序集,若存在$a \in X$,使得$a \leq x, \forall x \in X$,则称$a$为least (first, smallest) element of X,从反对称性可知这个元素是唯一的,类似,若存在元素$a \in X$,使得$x \leq a, \forall x \in X$,称$a$为greatest (last, largest) element of X.对于自然数集,按照通常的次序,0是first element,而不存在last element,如果把次序颠倒过来,那么0是last element,而不存在first element.

(7)对于偏序集X, $a \in X$称为minimal element,如果不存在X中的元素严格小于a (strictly smaller than a),也就是从$x \leq a$,将得到$x = a$;类似的,如果不存在元素严格大于a,称a为maximal element,于是从$a \leq x$,必有$x = a$.

必须注意least element和minimal element是有差别的,非空集合X的非空子集构成的集合$\mathcal{C}$,以包含关系作为偏序关系,此时每个单元素集合是minimal的,但是$\mathcal{C}$中一般情况下不存在least element,除非X中只有一个元素.

(8) X为偏序集, $a \in X$, $E \subset X$,称a为E的下界(lower bound),若$\forall x \in E, a \leq x$;称$a$为$E$的上界$upperbound$,若$\forall x \in E, x \leq a$.注意,$E$中可以不存在上界或下界,也可以有多个上界或下界.后一种情况可以以自然数集作例

子,n为E的上界,那么所有大于n的自然数都是E的上界.引入两个记号:

$$E_* = \{a \in X : \forall x \in E, a \le x\}$$
$$E^* = \{a \in X : \forall x \in E, x \le a\}$$

E_*以及$E_* \cap E$都可能是$\emptyset$,如果$E_* \cap E \neq \emptyset$,此时它必然只有一个元素.对于$E_*$来说,如果存在一个greatest element a,则称a为E的下确界(greatest lower bound或者infimum),记作g.l.b.或inf,类似,若E^*中包含一个least element a,则称a为E的上确界(least upper bound或supremum),记作l.u.b.或者sup.

下面给出几个例子:

(1)作为偏序的第一个例子,自然就是集合的包含关系,它是$P(X)$上的偏序,仅当X是单元素集的时候是全序.

(2)全序的例子可以在自然数集中得到,

(3)另一个偏序的例子是映射的扩张,给定集合X和Y,F为所有定义域在X中而值域在Y中的映射组成的集合.定义F上的关系R如下:fRg如果$\mathrm{dom}f \subset \mathrm{dom}g$,且$f(x) = g(x), \forall x \in \mathrm{dom}f$.也就是这意味着$f$是$g$的限制,而$g$是$f$的扩张.如果注意到映射是$X \times Y$的子集,那么$fRg$实际上就是$f \subset g$.

(4)对于集合$\omega \times \omega$,我们可以定义不同的偏序:(i)$(a,b)R(x,y)$,如果$(2a+1)\cdot 2^y \le (2x+1)\cdot 2^b$,(ii)$(a,b)S(x,y)$,如果$a < x$,或者$a = x$且$b \le y$;这个次序称为字典序(lexicographical order).(iii)$(a,b)T(x,y)$,如果$a \le x$且$b \le y$.

习题:使用R以及逆来表述关系R的反对称性和totality.

$RR^{-1} \subset I, R = E \times E$.

1.11 2013年06月10日

选择公理

对于很多有限情形下的操作,我们基本上不需要任何犹豫,但是在无限的情况下,很多操作需要精心考虑(其实在陶哲轩的《实分析》一书的第一章有不少例子).例如本节中出现的选择公理,它主要是针对无限的.

一个集合,或者是空集,或者非空,对于非空集合,必然存在一个元素.对于两个集合X和Y,对于它们的笛卡尔积$X \times Y$,如果X和Y中至少有一个为$\emptyset$时,笛卡尔积为$\emptyset$,如果都不是空集,$X \times Y$必定不是空集.这个结论很容易推广到有限个$\{X_i\}$的情形.可以对于无限个$\{X_i\}$的情形,我们需要本节的选择公理(Axiom of choice).

公理 1.11.1 (选择公理) 非空集合的非空簇的笛卡尔乘积是非空的(The Cartesian of a non-empty family of non-empty sets is non-empty).

用数学语言表示:考虑集合簇$\{X_i\}_{i\in I}$,这里每一个X_i都是非空集合,并且指标集I也是非空,此时存在一簇元素$\{x_i\}$, $i \in I$,使得$x_i \in X_i$,对每一个$i \in I$.

设$\mathcal{C}$是非空集合簇,此时我们完全可以把$\mathcal{C}$作为指标集,于是可以应用选择公理,这样就存在一个定义在$\mathcal{C}$上的映射f,只要$A \in \mathcal{C}$,就有$f(A) \in A$.特别地,令$\mathcal{C}$为非空集X的所有非空子集组成的集合,也就是$P(X) - \{\emptyset\}$,于是存在映射$f, \forall A \in \mathcal{C}, f(A) \in A$,这个映射称为$X$上的选择映射(choice function).直观上说,我们的映射f能够从每一个集合中选择出一个元素,这里也是"选择公理"名称的由来.有限的情形是可以证明的,而对于无限情形,则有这个公理来保证.

设$\mathcal{C}$是两两不相交的非空集合簇,此时存在集合A,使得$A \cap C$是单元素集合,$\forall C \in \mathcal{C}$.

作为选择公理的应用,我们证明如下结论:若集合X是无限的,那么存在一个子集对等于ω.直观的,既然X非空,那么存在$x_0 \in X$,由于X不与1对等,$X - \{x_0\}$是非空的,于是存在$x_1 \in X - \{x_0\}$,如此继续,存在$x_2 \in X - \{x_0, x_1\}$,等等,这将形成一个无限序列$\{x_n\}$,这里x_n互相不等.这里出现了一个需要无限选择的情形,需要依赖于选择公理.书中给出了完整的过程.作为选择公理的应用,这里也给出完整过程.

考虑X中的选择映射$f: P(X) - \{\emptyset\} \to X, f(A) \in A, \forall A \in \mathrm{dom} f$.令$\mathcal{C}$表示$X$中所有的有限子集组成的集合簇.由于$X$是无限的,$\forall A \in \mathcal{C}$, $X - A$非空,因而$X - A \in \mathrm{dom} f$.接下来定义映射$g: \mathcal{C} \to \mathcal{C}, g(A) = A \cup \{f(X - A)\}$,我们从$\emptyset$出发,对于$g$使用归纳原理,存在$\omega$到$\mathcal{C}$的映射$U$,使得$U(0) = \emptyset, U(n^+) = U(n) \cup \{f(X - U(n))\}, \forall n \in \omega$.此时我们定义映射$v(n) = f(X - U(n))$,只要证明$v$是一个$\omega$到$X$的一个一一映射.那么$\omega$对等于$X$的一个子集($v$的值域).这只需要注意到:

(i)$v(n) \notin U(n), \forall n \in \omega$.理由:因为$f(X - U(n)) \in X - U(n)$,于是$v(n) \notin U(n)$.

(ii)$v(n) \in U(n^+), \forall n \in \omega$. $U(n^+)$的定义.

(iii)对于自然数$n, m, n \leq m$,则$U(n) \subset U(m)$.这同样可以由$U(n)$的定义得到,$U(m)$可以通过$U(n)$添加一个个元素得到的.

(iv)对于自然数$n, m, n < m$,则$v(n) \neq v(m)$.因为根据(ii)和(iii), $v(n) \in U(m)$,而根据(i), $v(m) \notin U(m)$,因此两者不可能相等.

这里最后的(iv)就是说明v把不同的自然数映射到X中不同的元素.因为任意两个不同的自然数,必有一个是严格小于另一个的.

上述结论一个更重要的推论,它涉及到了无限的本质:一个集合是无限的,当且仅当它能够对等于一个真子集.前面已经证明过有限集合不能和真子集对等;下面假设X是无限的,设v是ω到X的一一映射(单射),若x属于v的值域,即$x = v(n)$,令$h(x) = v(n^+)$,若x不属于v的值域,则令$h(x) = x$,此时h是X到X的一一映射,并且h的值域是X的真子集($v(0) \notin \mathrm{ran}(h)$). Dedekind使用这个结论来定义无限集.

1.12 2013年06月11日

Zorn引理

这一节只有一个主题:Zorn引理,证明过程很长!

很多存在性定理,经常会归结到一个偏序集以及一个最大元的存在性,这其中Zorn引理是最重要的一个.

引理 1.12.1 (Zorn引理(Zorn’s lemma)) 若X是一个偏序集(partially set),它的每一个链(chain)都存在上界(upper bound),那么X中包含一个最大元(maximal element).

链(chain)是一个全序集,这里所谓X中的chain是指X的子集,它自身构成一个全序集.

设A是X中的一个链,则根据题设要求,X中存在A的一个上界,这个上界不一定属于A,Zorn引理的结论是,存在一个元素$a \in X$,对于任意$x \in X$,如果$a \leq x$,那么必有$a = x$.

直观的,既然X非空,那么存在$x_0 \in X$,如果它是最大元,那就可以停止了.否则,存在x_1严格大于x_0,若x_1是最大元,停止,否则继续,Zorn引理是说,这个过程最终将能得到有一个最大元.

这里面前面部分没有问题,问题在于最后一步,因为这里是可能是一个无限过程,它会停止吗?这也是这里的困难所在,因为完全可能出现,上面的过程永远得不到最大元,或者说得到是一个non-maximal elements序列,此时怎么办?其实此时这个序列本身是X中的链,从而有上界,于是从这个上界开始,继续上述过程,这个过程何时结束,会如何结束,在这里还是不清晰的,我们需要更明确的证明过程,书中的方法来自Zermelo.

首先把抽象的偏序具体化:使用集合的包含关系.把问题进行转化,把抽象的变具体,通常是我们解决问题的思路所在.考虑weak initial segment $\bar{s}(x)$.用$\mathcal{S}$来表示$\bar{s}$的值域.$\mathcal{S}$是$P(X)$的子集.可以用包含关系形成一个偏序.$\bar{s}$是一个一一映射.并且$\bar{s}(x) \subset \bar{s}(y)$的充分必要条件是$x \leq y$.于是寻找$X$中的最大元,实际上成了寻找$\mathcal{S}$中的最大元.关于$X$中的链的假设对应于$\mathcal{S}$中的链.

用$\mathcal{X}$表示X中所有链的集合.这样的话$\mathcal{X}$也是$P(X)$的子集.$\mathcal{X}$中的每一个元素包含在某个$\bar{s}(x)$中,$\mathcal{X}$非空,我们以包含关系作偏序.若$\mathcal{C}$是$\mathcal{X}$中的一个链,那么$\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$属于$\mathcal{X}$,由于$\mathcal{X}$中的每一个集合包含在$\mathcal{S}$的某个集合中,从$\mathcal{S}$到$\mathcal{X}$这一个过程中没有引入新的最大元(maximal element).

$\mathcal{X}$的好处:首先它把条件中关于链的假设更加具体化了,对于$\mathcal{S}$中的每一个链$\mathcal{C}$有上界,$\mathcal{C}$中集合的并集是$\mathcal{C}$的上界,它属于$\mathcal{X}$;另一方面,$\mathcal{X}$包含它的每一个元素的所有子集,这使得我们可以通过每次给non-maximal集合添加一个元素来逐步放大.

至此,我们可以抛开X中的偏序,只需要考虑非空集合X的子集簇$\mathcal{X}$.根据上面的讨论$\mathcal{X}$满足两个条件:(1)$\mathcal{X}$的每一个元素的任一子集属于$\mathcal{X}$.它说

明$\emptyset \in \mathcal{X}$;(2)$\mathcal{X}$中的每一个链中集合的并集属于$\mathcal{X}$.我们需要证明$\mathcal{X}$中存在最大元.

设f为X上的选择函数,即$f : P(X) - \{\emptyset\} \to X$,并且$f(A) \in A, \forall A \in \mathrm{dom} f$,对于$A \in \mathcal{X}$,我们定义$\hat{A} = \{x \in X : A \cup \{x\} \in \mathcal{X}\}$,定义映射$g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,

$$g(A) = \begin{cases} A \cup \{f(\hat{A} - A)\}, & \hat{A} - A \neq \emptyset \\ g(A) = A, & \hat{A} - A = \emptyset \end{cases}$$

若$\hat{A} - A \neq \emptyset$,令$g(A) = A \cup \{f(\hat{A} - A)\}$,若$\hat{A} - A = \emptyset$,令$g(A) = A$.根据$\hat{A}$的定义,$\hat{A} - A = \emptyset$当且仅当$A$是一个最大元.也就是说我们需要证明存在$A \in \mathcal{X}$,使得$g(A) = A$.注意到$A \subset g(A)$,并且$g(A)$最多比$A$多一个元素.

为方便,引入一个临时定义:称$\mathcal{X}$的一个子集$\mathcal{J}$是tower,如果

(i) $\emptyset \in \mathcal{J}$;

(ii) 若$A \in \mathcal{J}$,则$g(A) \in \mathcal{J}$;

(iii) 若$\mathcal{C}$是$\mathcal{J}$中的链,则并集$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{J}$.

Tower是存在的,$\mathcal{X}$本身就是一个,并且Tower的交集还是一个Tower,于是令$\mathcal{J}_0$表示所有tower的交集.则$\mathcal{J}_0$是最小的tower,我们来证明$\mathcal{J}_0$是一个链.

称$\mathcal{J}_0$中的集合C是comparable,如果它和$\mathcal{J}_0$中的任意元素都是comparable.于是$\forall A \in \mathcal{J}_0$,或者$A \subset C$,或者$C \subset A$.我们要证$\mathcal{J}_0$是一个链,意味着要证明$\mathcal{J}_0$中所有元素(集合)是comparable.comparable集合是存在的,$\emptyset$就是其中之一.下面的讨论暂时把注意力集中在一个任意的但是预先固定的comparable集合C.

设$A \in \mathcal{J}_0$,A是C的真子集,我们有$g(A) \subset C$.由于C是comparable,于是或者$g(A) \subset C$,或者C是$g(A)$的真子集,对于后一情形,A是$g(A)$的真子集的真子集,$g(A) - A$将会超过1个元素,不可能.

令$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{J}_0 : A \subset C$或$g(C) \subset A\}$,$\mathcal{U}$中的所有元素和$g(C)$是comparable.因为若$A \in \mathcal{U}$,则由于$C \subset g(C)$,或者$A \subset g(C)$,或者$g(C) \subset A$.接下来证明$\mathcal{U}$是一个tower.

(i) $\emptyset \in \mathcal{U}$,因为$\emptyset \subset C$;

(ii) 欲证$A \in \mathcal{U}$,必有$g(A) \in \mathcal{U}$,分三步:(1)A是C的真子集;则$g(A) \subset C$,故$g(A) \in \mathcal{U}$;(2)$A = C$,则$g(A) = g(C)$,$g(C) \subset g(A)$,$g(A) \in \mathcal{U}$.(3)$g(C) \subset A$,则$g(C) \subset g(A)$,故$g(A) \in \mathcal{U}$.

(iii) 从$\mathcal{U}$的定义可知,$\mathcal{U}$中一个链的并集属于$\mathcal{U}$.

于是$\mathcal{U}$是一个tower,它包含于$\mathcal{J}_0$中,而$\mathcal{J}_0$是最小的tower,于是$\mathcal{U} = \mathcal{J}_0$.

上面的结论说明对于每一个comparable集合C, $g(C)$是comparable集合:给定C,按上述方式构造$\mathcal{U}$,从$\mathcal{U}=\mathcal{J}_0$说明若$A\in\mathcal{J}_0$,则或者$A\subset C$(从而$A\subset g(C)$),或者$g(C)\subset A$.

我们已经知道$\emptyset$是comparable, g把comparable集合映射到comparable集合, comparable集合构成的链的并集还是comparable集合,这说明$\mathcal{J}_0$中的comparable集合构成一个tower, comparable集合穷尽了$\mathcal{J}_0$,于是$\mathcal{J}_0$是一个链. $\mathcal{J}_0$中任一集合是comparable.既然$\mathcal{J}_0$是一个链, $\mathcal{J}_0$中所有集合的并集A属于$\mathcal{J}_0$,于是$g(A)\subset A$,另一方面$A\subset g(A)$,故$A=g(A)$. Zorn引理证毕.

习题:Zorn引理等价于选择公理.考察下面的结论,证明它们也等价于选择公理:(i)任一偏序集有一个最大链(maximal chain),也就是这个链不可能是其他链的真子集;(ii)偏序集的任一链包含在某个最大链中;(iii)每一个偏序集,如果任一链都有下界,那么这个偏序集必有一最大元(这里书中恐怕有问题,似乎应该是最小元).

对于集合X,考虑映射f:dom$f\subset P(X)$, ran$f\subset X$, $f(A)\in A,\forall A\in$ dom$f$.以映射的扩张作为偏序,使用Zorn引理寻找一个最大元,并且证明若f是最大元,必有dom$f=P(X)-\{\emptyset\}$.

1.13 2013年06月16日

良序(well ordering)

一个偏序集可能不存在smallest element,即使存在,也可能对于某些子集不存在smallest element.若它的每一个子集有一个smallest element,则称该集合为良序集(well ordered set).它的order称为良序(well ordering).

值得指出:每一个良序集必是全序的(totally order).因为$\{x,y\}$构成一个子集,那么无论是x为first element,还是y是first element,都有$x\leq y$或者$y\leq x$.

例子:

(i)每一个自然数n, n的所有predecessor组成的集合.即集合n是良序的,以大小关系为序.

(ii)全体自然数组成的集合ω是良序的,同样以大小为序.

(iii)集合$\omega\times\omega$,序关系$(a,b)\leq(x,y)\Leftrightarrow(2a+1)2^y\leq(2x+1)2^b$,不是良序, $(a,b+1)\leq(a,b)\forall a,b$,这意味着$\omega\times\omega$不存在least element.

考察集合$\omega\times\omega$的子集$E=\{(a,b)|(1,1)\leq(a,b)\}$,则$E$有least element $(1,1)$,但是E仍然不是良序的,因为E的某些子集不存在least element,所有$(a,b)\neq(1,1)$组成的集合不存在least element.

(iv)$\omega\times\omega$对于字典序构成良序集.

对于良序集,我们有类似于数学归纳法的过程:考察良序集X的子集S,若任意X中的元素x满足:entire initial segment $s(x)$包含在S中,则x本

身属于S. 于是Principle of transifinite induction (超限归纳法)断言:$S = X$.

一般的归纳法与超限归纳法有两点明显的差异:(1)一般归纳法是从predecessor到当前元素,而超限归纳法要求当前元素的所有predecessor是一个集合. (2)超限归纳法没有要求归纳基础. 对于(1),在良序集中,一个元素可能不存在直接前导(immediate predecessor). 在自然数集ω上,超限归纳法等价于数学归纳法,在一般的良序集上,两者不等价.

例:令$X = \omega^+$,即$X = \omega \cup \{\omega\}$,序关系如下:$\omega$中元素的序保持不变,$\forall n \in \omega, n < \omega$,此时$X$是一个良序集,问:是否存在一个子集$S \subset X$,使得$0 \in S$,当$n \in S$时,有$n + 1 \in S$,答:有,即$S = \omega$.

第二个差异更多的是语言方面的,而不是概念上(本质的)的,或者说其实超限归纳法已经包含这部分内容. 设x_0为X的smallest element,则$s(x_0) = \emptyset$,于是$s(x_0) \subset S$,根据超限归纳法的假设,$x_0 \in S$.

需要证明这个超限归纳原理,证明不是很难:若$X - S$非空,则存在smallest element $x \in X - S$,这意味着它的initial segment $s(x)$中的每一个元素属于S,根据假设,$x \in S$,导致矛盾,故$X - S$只能是空集.

定义 1.13.1 称良序集A为良序集B的continuation,如果满足:(1)B是A的子集,即B是A的一个initial segment;(2)B中元素的序和它们在A中元素的序一致.

X为良序集,$a, b \in X$, $b < a$,则$s(a)$是$s(b)$的continuation,自然,X是$s(a)$和$s(b)$的continuation.

设$\mathcal{C}$为某个良序集的initialsegments组成的集合,则$\mathcal{C}$相对于continuation是一个链(chain).

$\mathcal{C}$中元素是良序集,任意两个不同的元素来说,其中一个是另一个的continuation. 若一簇良序集构成的集合$\mathcal{C}$对于continuation构成一个chain,U是$\mathcal{C}$中集合的并集,那么存在一个唯一的U中的良序,使得U是$\mathcal{C}$中每一个不为U集合的continuation. 或者说良序集的chain的并仍然是一个良序的,必须注意,这里的序必须是相对于continuation而言的,若order是inclusion,结论不成立.

证明如下:$a, b \in U$, $\exists A, B \in \mathcal{C}$,使得$a \in A, b \in B$,于是,或者$A = B$,或者$A$和$B$中的一个是另一个的continuation. 无论何种情形,a, b属于$\mathcal{C}$中某一个集合,定义U中order如下:对于每一对$\{a, b\}$,它的序取G中某个集合(它包含a和b)中的顺序,$\mathcal{C}$是一个chain,这个order是确定的. 也就是说刚才定义的序确实是一个order,同时是一个well ordering.

U的非空子集必有非空交集(因为这里面的集合非常特殊,一般的交集没有这种性质),必有first element,$\mathcal{C}$为一个continuation,可以得出:集合的first element同时是U的first element.

习题:偏序集X的子集A称为在X中是共尾(cofinal)的. 若X中每一个元素x,存在A中元素a,使得$x \leq a$. 证明每一个全序集含有一个cofinal well ordered subset.

良序集之所以重要,是因为下面的结论:

定理 1.13.1 (Well ordering theorem) 每一个集合可以良序化.

更好的说法是:对于每一个集合X,存在以X为domain的良序,必须注意,这里并没有说此良序和给定集合X上的原来的某些结构有关系.因此如果说偏序集或者全序集中的序不是一个良序时,并不意味着无法将它良序化.

证明这个结论使用Zorn引理.给定集合X,考虑X中所有良序子集构成的集簇W,W中元素是X中的子集A和A中的良序,我们通过continuation定义W中的一个偏序.

W非空,因为$\emptyset \in W$.若$X \neq \emptyset, \forall x \in X, \{(x,x)\}$.

若$\mathcal{C}$是W中的一个chain,则$\mathcal{C}$中集合的并集U拥有唯一的良序,使得U大于或等于$\mathcal{C}$中的每一个集合.这意味着Zorn引理的假设成立,于是存在maximal well ordered set,设它为$M \in W$,集合M必然等于整个集合X.

若存在X中元素$x \notin M$,那么M可以继续扩大,把x放在M中所有元素之后即可.

习题:一个全序集是良序的,当且仅当每一个元素的严格前驱构成的集合是well ordered.这个条件能否用于偏序集?Well ordering theorem包含选择公理.R为集合X的一个偏序,存在X中的一个全序S,使得$R \subset S$,也就是任何一个偏序可以在不扩大定义域的情形下扩展为全序.

Chapter 2

数的概念

超限递归(transfinite recursion)

$$2 < 2\sqrt{2} - 6\sqrt{6} + 4$$

分情况讨论:

如果$x > 0$,那么必然有$-b < 0 < \frac{1}{x}$,只需要考虑后半部分,此时有

$$\frac{1}{a} < x,$$

两者结合得到$x > \frac{1}{a}$;

如果$x < 0$,那么必然有$\frac{1}{x} < a$,只需要考虑前半部分,此时有

$$(-b)x > 1x < -\frac{1}{b}$$

这里面一定要注意两边乘以x的时候,$x < 0$是需要改变不等号的方向的,后面一步同时除以$-b < 0$,不等号再次变号.两者结合得到

$$x < -\frac{1}{b};$$

最后的答案结合两个得到

$$x < -\frac{1}{b}\text{或者}x > \frac{1}{a}$$

首先是完全的排列一共有$6! = 720$个数字.不过这个数字没有什么用途.

下面使用条件(大于345012)逐个计算:

首位数字只能是345中的一个:

345021 345102 345120 345201 345210

35开头的话,后面就是0124的任意排列一共有4!=24个.

其余不存在了如果是4或者5开头,后面是5个数字的任意排列,一共2*5!=240个,所以总数为 5 + 24 + 240 =149