数学女孩

读书笔记

作者：虞朝阳

组织：西北工业大学

更新：October 8, 2019

版本：1.00

Wir müssen wissen, wir werden wissen. (我们必须知道，我们必将知道) *- David.Hilbert*

前言

这里把《数学女孩》**I?**中的一些问题收集整理到一起。

目录

第 1 章 质因数之和

首先看一个具体的例子，看看1024的所有约数的和。1024的所有约数是

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10},$$

这些约数的和

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 2^{11} - 1.$$

$n = p^m$的情形，这里p为素数，p^m的所有约数之和为

$$p^0 + p^1 + \cdots + p^m = \frac{1 - p^{m+1}}{1 - p}.$$

对于一般情形，将正整数n进行素因数分解，

$$n = p_0^{a_0} \times p_1^{a_1} \times \cdots \times p_m^{a_m},$$

n的约数具有形式

$$p_0^{b_0} \times p_1^{b_1} \times \cdots \times p_m^{b_m},$$

其中b_k从0到a_k。所有的约数的和是:

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= (1 + p_0 + p_0^2 + \cdots + p_0^{a_0}) \\
&\times (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{a_1}) \\
&\times \cdots \\
&\times (1 + p_m + p_m^2 + \cdots + p_m^{a_m}) \\
&= \frac{1 - p_0^{a_0+1}}{1 - p_0} \cdot \frac{1 - p_1^{a_1+1}}{1 - p_1} \cdots \frac{1 - p_m^{a_m+1}}{1 - p_m} \\
&= \prod_{k=0}^{m} \frac{1 - p_k^{a_k+1}}{1 - p_k}.
\end{aligned}$$

使用符号，这样来理解，

$$\begin{aligned}&\sum_{b_0=0}^{a_0}\cdots\sum_{b_m=0}^{a_m}p_0^{b_0}\times\cdots\times p_m^{b_m}\\=&\sum_{b_0=0}^{a_0}p_0^{b_0}\times\cdots\times\sum_{b_m=0}^{a_m}p_m^{b_m}.\end{aligned}$$

这个乘积的形式可以和组合联系起来，在m个组成各个因子的和式中，从中各自选择一个$p_k^{b_k}$就可以组合得到n的一个约数.

第 2 章 复数

复数$x+iy$可以和点(x,y)相联系,也可以和矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

相联系,与矩阵联系的是复数$\cos\theta+i\sin\theta$.从几何上讲,复数的相乘,矩阵相乘都可以和旋转相联系.这里我们有棣莫弗公式:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+\sin n\theta.$$

说明n次旋转角度θ,等于一次旋转角度$n\theta$.由此可以推导三角函数中的各种倍角公式之类的.

第 3 章 斐波那契数列和生成函数

我们把一个数列和无穷级数对应起来，如下图所示：

$$\begin{array}{ccc} \text{数列} & \longleftrightarrow & \text{函数} \\ (a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots) & \longleftrightarrow & a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \end{array}$$

这个无穷级数就称为生成函数。这一节的目的是通过生成函数来求出数列的通项公式。通过生成函数把数列中的各项作为整体进行考虑，可以把离散问题，转化为连续问题，使用微积分中的一些方法。

$$\begin{array}{ccc} \text{数列} & \longrightarrow & \text{生成函数} \\ & & \downarrow \\ \text{数列的通项} & \longleftarrow & \text{生成函数的有限项代数式} \end{array}$$

对于斐波那契数列$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots)$有如下递推公式：

$$F_n = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ 1 & (n = 1) \\ F_{n-2} + F_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

对应的生成函数

$$\begin{aligned} F(x) &= F_0 x^0 + F_1 x^1 + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \cdots + F_n x^n + \cdots \\ &= 0x^0 + 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + \cdots \\ &= x + x^2 + 2x^3 + \cdots \end{aligned}$$

接下来需要找出$F(x)$的有限项代数式,这里需要使用F_n的递推式。只需要如下所示：

$$\begin{array}{llllll} A: & F(x) \cdot x^2 & = & & & F_0 x^2 + F_1 x^3 + F_2 x^4 + \cdots \\ B: & F(x) \cdot x^1 & = & & F_0 x^1 + & F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + \cdots \\ C: & F(x) \cdot x^0 & = & F_0 x^0 + & F_1 x^1 + & F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \cdots \end{array}$$

于是我们看看$A + B - C$得到什么。左边变为

$$F(x) \cdot (x^2 + x^1 - x^0) = F(x)(x^2 + x - 1)$$

右边是

$$
\begin{aligned}
&F_0x^1 - F_0x^0 - F_1x^1 \\
&+ (F_0 + F_1 - F_2) \cdot x^2 \\
&+ (F_1 + F_2 - F_3) \cdot x^3 \\
&+ (F_2 + F_3 - F_4) \cdot x^4 \\
&+ \cdots \\
&+ (F_{n-2} + F_{n-1} - F_n) \cdot x^n \\
&+ \cdots \\
&= -x
\end{aligned}
$$

于是我们得到

$$F(x) \cdot (x^2 + x - 1) = -x,$$

进一步得到$F(x)$的有限项代数式:

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2},$$

接下来需要重新把这个$F(x)$的有限项代数式表示为无穷级数，对于这个有理分式，相对简单，如果是其他的，应该借助于泰勒展开式。

对于有理分式，在复数范围内，最终可以分解为如下形式的和

$$\frac{1}{x + a},$$

而在实数范围，可以表示成如下两种形式的分式之和：

$$\frac{1}{x + a}, \quad \frac{a + bx}{x^2 + cx + d},$$

对于

$$\frac{1}{x + a},$$

可以通过提取一个常数，最终转化为形式

$$\frac{1}{1 - ax},$$

注意到等比级数的和的公式，我们有

$$\frac{1}{1 - ax} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n x^n.$$

所以对于斐波那契数列的生成函数$F(x)$只需进行有理分式的分解即可，分解方

法使用待定系数法。

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{R}{1-rx}+\frac{S}{1-sx}\\ &= \frac{(R+S)-(rS+sR)x}{1-(r+s)x+rsx^2}.\end{aligned}$$

由此可得4个未知数4个独立等式的方程组，

$$\begin{cases} R+S=0 \\ rS+sR=-1 \\ r+s=1 \\ rs=-1 \end{cases}$$

解出这4个未知数，然后利用等比级数，最终可以得到斐波那契数列的通项公式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

第 4 章 微分和差分

微分对应的是连续函数，差分对应的就是离散函数，我们需要经常在两个世界进行转换。为了方便，首先定义一个符号，下降阶乘幂：

$$x^{\underline{n}} = (x-0)(x-1)\cdots(x-(n-1)),$$

这里的n是正整数，那么对于n为负整数的时候，如何定义呢？通过如下方式类推：

- 将$x^{\underline{3}}$除以$(x-2)$得到$x^{\underline{2}}$,
- 将$x^{\underline{2}}$除以$(x-1)$得到$x^{\underline{1}}$,

那么后面应该是

- 将$x^{\underline{1}}$除以$(x-0)$得到$x^{\underline{0}}$,
- 将$x^{\underline{0}}$除以$(x+1)$得到$x^{\underline{-1}}$,
- 将$x^{\underline{-1}}$除以$(x+2)$得到$x^{\underline{-2}}$,

于是我们又有这个针对所有整数的下降阶乘幂的定义

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} (x-0)(x-1)\cdots(x-(n-1)) & (n>0) \\ 1 & (n=0) \\ \dfrac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+(-n))} & (n<0) \end{cases}$$

微分的定义如下（注意这里的符号和一般微积分中有点差异，一般书中是$df(x) = f'(x)dx$）：

$$df(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{(x+h)-(x+0)},$$

差分的定义如下：

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \frac{f(x+1)-f(x+0)}{(x+1)-(x+0)} \\ &= f(x+1)-f(x),\end{aligned}$$

与“微分与差分”对应的还有“积分与和分”，综合在一起有：

$$
\begin{aligned}
\text{连续函数的世界} &\longleftrightarrow \text{离散函数的世界}\\
df(x) &\longleftrightarrow \Delta f(x)\\
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{(x+h)-(x+0)} &\longleftrightarrow \frac{f(x+1)-f(x+0)}{(x+1)-(x+0)}\\
dx=1 &\longleftrightarrow \Delta x=1\\
dx^2=2x &\longleftrightarrow \Delta x^{\underline{2}}=2x^{\underline{1}}\\
dx^3=3x^2 &\longleftrightarrow \Delta x^{\underline{3}}=3x^{\underline{2}}\\
dx^n=nx^{n-1} &\longleftrightarrow \Delta x^{\underline{n}}=nx^{\underline{n-1}}\\
de^x=e^x &\longleftrightarrow \Delta 2^x=2^x\\
d\ln x=x^{-1} &\longleftrightarrow \Delta H(x)=x^{\underline{-1}}\\
\int 1=x &\longleftrightarrow \sum 1=x\\
\int t=\frac{x^2}{2} &\longleftrightarrow \sum t=\frac{x^{\underline{2}}}{2}\\
\int t^2=\frac{x^3}{3} &\longleftrightarrow \sum t^{\underline{2}}=\frac{x^{\underline{3}}}{3}\\
\int t^n=\frac{x^{n+1}}{n} &\longleftrightarrow \sum t^{\underline{n}}=\frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}\\
\int_1^x\frac{1}{t}=\ln x &\longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=H_n
\end{aligned}
$$

这里所有的$\int$都是$\int_0^x$，$\sum$都是$\sum_0^{x-1}$。另外关于$\Delta E(x)=E(x)$，根据定义，最终得到$E(x)=2^x$.这里的$H(x)=\sum_{k=1}^{x}\frac{1}{k}$。

我们需要学会自由地在这两个世界，四种运算中出入。

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{微分}d} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{对应}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{逆运算}"] & & \boxed{\text{差分}\Delta} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{逆运算}"] \\
\boxed{\text{积分}\int} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{对应}"] & & \boxed{\text{和分}\sum}
\end{tikzcd}
$$

第 5 章 加法组合数

$$0 + 1 = (0 + 1),$$

如果有1个加号的话，只有1种加法组合($C_1 = 1$)。

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 &= (0 + (1 + 2)) \\ &= ((0 + 1) + 2) \end{aligned}$$

如果有2个加号的话，只有2种加法组合($C_2 = 2$)。

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + 3 &= (0 + (1 + (2 + 3))) \\ &= (0 + ((1 + 2) + 3)) \\ &= ((0 + 1) + (2 + 3)) \\ &= ((0 + (1 + 2)) + 3) \\ &= (((0 + 1) + 2) + 3) \end{aligned}$$

如果有3个加号的话，只有5种加法组合($C_3 = 5$)。

那么对于$0 + 1 + 2 + \cdots + n$一共有n个加号的时候，有几种加法组合(C_n)呢？

书中给出了两个方法，分别说明。

5.1 米尔嘉的解

把问题进行变形，变形的思路经常在组合数学中出现，值得关注。

首先，去掉所有右括号，也能恢复到原来的结果，这是因为“加号连接着前后两项”。例如

$$((0 + 1) + (2 + (3 + 4)))$$

可以转化为

$$((0 + 1 + (2 + (3 + 4$$

进一步，连数字都是不必要的

$$((+ + (+(+$$

于是问题转化为4个左括号和4个加号的排列组合问题，只不过不是所有排列组合都是满足要求的。$2n$个符号中，选择n个符号变成左括号，其余的变成加号，

一共有$\binom{2n}{n}$个组合。这样的组合数和下图中从S到G的最短路径的数值是一致的。

但是很显然，我们需要排除掉一些，如下图（可以对应$((++++(()$：

在排列过程中，有一个限制：加号的个数不能超过括号的个数。也就是上图中的路径不能通过圆圈所在的位置。如果不通过圆圈，从S到G的路径数量就和C_n相等了。对于穿过圆圈的情形，假设第一个穿过的圆圈的地方为P，从P开始前进的方向都将发生变化，如下图所示，将几个圆圈用虚线连接，形成一条斜线，可以把这条斜线作为镜子，从P到G的过程中，原本向右水平移动的转变为向上移动，原本向上移动的转变为向右水平移动，这样终点成为G'，而不再是G。

G'就是G通过镜子的反射得到的点。$((++++(($就变成了$((+++(++$，通过圆圈的所有情况的个数和从S到G'的路径的个数一一对应。从纵横共有$2n$根短线中选择$n+1$根横线路径，进行组合，一共有$\binom{2n}{n+1}$个。于是有以下式子：

$$\begin{aligned}
C_n &= (\text{从}S\text{到}G\text{的路径数}) - (\text{从}S\text{到}G'\text{的路径数}) \\
&= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

5.2 "我"的解法

下面通过找到C_n的递推公式，然后使用生成函数得到通项公式。

首先引入一个概念—“卷积”。两个数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的卷积是

$$< a_n > * < b_n > = \left\langle \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right\rangle$$

注意这里和式中要求a_k和b_{n-k}下标的和固定。

下面首先找出C_n的递推公式。首先数字不是必须的，我们换成A。接下来我们关注最后一个加号，这里说的最后，是指最后一次进行加法计算的加号。例如

$$((A) \oplus (A + A + A + A))$$
$$((A + A) \oplus (A + A + A))$$
$$((A + A + A) \oplus (A + A))$$
$$((A + A + A + A) \oplus (A))$$

可以发现C_4是以下各项的和

$$C_0 \times C_3, C_1 \times C_2, C_2 \times C_1, C_3 \times C_0,$$

也即是

$$C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0,$$

至于一般情形，有

$$C_{n+1} = C_0C_{n-0} + C_1C_{n-1} + \cdots + C_kC_{n-k} + \cdots + C_{n-0}C_0,$$

再加上$C_0 = 1$，$C_1 = 1$就可以得到递推式：

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_kC_{n-k} \quad (n \geq 0) \end{cases}$$

接下来就是使用生成函数了

$$C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n + \cdots .$$

我们计算$C(x)^2$，可以得到

$$C(x)^2 = (C_0C_0) + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + \cdots$$

这里x^n的系数就是

$$C_0C_{n-0} + C_1C_{n-1} + \cdots + C_kC_{n-k} + \cdots + C_{n-0}C_0,$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
C(x)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k})x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1}x^n
\end{aligned}
$$

两边乘以x有

$$
\begin{aligned}
x \cdot C(x)^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1}x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n - C_0 \\
&= C(x) - C_0
\end{aligned}
$$

这里是$C(x)$的二次方程，会得到$C(x)$的两个代数式。

$$
C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.
$$

我们注意到$C_0 = 1$，通过这一个可以排除掉一个，对于

$$
C(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}
$$

当$x \to 0$的时候，不可能趋于1，事实上，它会变成$\frac{1}{0}$形式。所以最后得到

$$
C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x},
$$

接下来需要把$C(x)$展开为无穷级数，使用泰勒展开即可。具体细节就不展开了，主要是$\sqrt{1-4x}$的泰勒展开式。最终得到的结果和前面是一致的。

第 6 章　黎曼ζ函数，调和级数，巴塞尔问题

所谓黎曼ζ函数是指

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (s \in \mathbb{C}).$$

所谓调和函数是指

$$H_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

所谓巴塞尔问题就是求和式

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

本书没有具体讨论黎曼ζ函数，这里主要讨论两个，一是和调和级数相关的，证明素数有无穷多个，另一个就是求解巴塞尔问题。

6.1　素数有无穷多个

欧几里德在《几何原本》中已经证明了素数有无穷多个，只是这里使用一个不同的方法，事实上，这个方法可以认为是黎曼ζ函数的起源，解析数论的起源，源于欧拉。需要说明这里的证明过程是有些缺漏的，不是完全严格的，同时借助于调和技术的发散性。

首先假设只有有限个素数（可以从小到大排列）：

$$p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots, p_m.$$

那么我们接下来考虑一下无限和的有限积

$$\begin{aligned}
Q_m &= \left(\frac{1}{p_1^0} + \frac{1}{p_1^1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots\right) \cdot \left(\frac{1}{p_2^0} + \frac{1}{p_2^1} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots\right) \\
&\quad \cdots \left(\frac{1}{p_m^0} + \frac{1}{p_m^1} + \frac{1}{p_m^2} + \cdots\right) \\
&= \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{p_k^0} + \frac{1}{p_k^1} + \frac{1}{p_k^2} + \cdots\right) \\
&= \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}.
\end{aligned}$$

注意到$p_k \geq 2$,所以乘积中的那些无限级数是收敛的，也就是最后一步是成立的，从而Q_m是有限值。这一步的推导式严格的，没有逻辑问题。

另一方面，Q_m的乘积可以展开成和式：

$$\begin{aligned}
Q_m &= (\frac{1}{p_1^0} + \frac{1}{p_1^1} + \frac{1}{p_1^2} + \cdots) \cdot (\frac{1}{p_2^0} + \frac{1}{p_2^1} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots) \\
&\cdots (\frac{1}{p_m^0} + \frac{1}{p_m^1} + \frac{1}{p_m^2} + \cdots) \\
&= (\frac{1}{p_1^0 p_2^0 \cdots p_m^0}) + (\frac{1}{p_1^1 p_2^0 \cdots p_m^0} + \cdots + \frac{1}{p_1^0 p_2^0 \cdots p_m^1}) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum \frac{1}{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}}
\end{aligned}$$

后面的$\sum \frac{1}{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}}$中，各个$p_k$的指数和$r_1+r_2+\cdots+r_m$等于$n$，那么这个$p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}$是什么含义呢？我们假设了$p_1, \cdots, p_m$是全部的素数，而根据素因数唯一分解定理，这意味着所有的$p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}$刚好遍历所有正整数。也就是说

$$Q_m = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots .$$

右边出现了调和级数，于是有了

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

左边是有限值，右边是发散的，产生矛盾了。这里面后面部分逻辑上没有问题，但是$Q_m = H_\infty$的推导，直观上没有问题，但是需要更严格的证明，因为这里的乘积展开涉及到了无限，在无限项能否这样展开需要严格证明，正如无线项相加的时候是不能随意更改加法顺序的。

6.2 巴塞尔问题

这里求解巴塞尔问题的过程也不是非常严格的，方法同样来源于欧拉，这里是一个类比的经典案例。

首先根据代数基本定理，任何一个复系数n次方程至少有一个复数根，从而必有n个根，包括重根，重根按照重数计算。假设n次方程$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$有$n$个解$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，那么我们有

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

把右边的乘积展开，然后对比$x^k(k=0,\cdots,n)$的系数，我们可以得到根与系数的关系：

$$\begin{aligned}
-\frac{a_{n-1}}{a_n} &= \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \\
+\frac{a_{n-2}}{a_n} &= \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n \\
-\frac{a_{n-3}}{a_n} &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n \\
&\vdots \\
(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n} &= \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k} \\
&\vdots \\
(-1)^n\frac{a_0}{a_n} &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.
\end{aligned}$$

接下来高能部分来了，我们知道$\sin x=0$的所有根是$x=n\pi$，$n\in\mathbb{Z}$，那么我们也可以进行因式分解：

$$\sin x = x(x+\pi)(x-\pi)(x+2\pi)(x-2\pi)\cdots,$$

但是很显然，问题没有这么简单，因为我们知道

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

可是上述因式分解中，右边的式子恐怕没有这样的结论。失败了，别急，我们想想是否有可能是x^∞前面的系数不是1呢？于是我们转换一下因式分解的方式，按照下面的方式：

$$\sin x = x(1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{2\pi})(1-\frac{x}{2\pi})\cdots,$$

我们把$x=0$排除掉，再变换一下

$$\frac{\sin x}{x} = (1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{2\pi})(1-\frac{x}{2\pi})\cdots,$$

这下看着似乎能满足$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，我们继续变换上述表达式

$$\frac{\sin x}{x} = (1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2})(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2})\cdots,$$

我们通过泰勒展开可以得到$\sin x$的幂级数表达式：

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

于是有
$$(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2})(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2})\cdots=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots,$$
前面我们得到n次方程的根与系数的关系是通过对比x^k的系数得到的，那么我们展开左边，对比x^2的系数，将得到
$$-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{2^2\pi^2}-\frac{1}{3^2\pi^2}-\cdots=-\frac{1}{3!},$$
有了
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$
巴塞尔问题得解，不过上述过程不是严格的，$\sin x$的分解是否可行，这同样是因为涉及无限的问题。

这个解答中有一个神奇的地方，这些整数的倒数平方和，居然和π相关。这个问题的严格求解，可以使用傅里叶级数的相关知识，对展开式
$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}()^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi)$$
利用Parseval等式。这一块的细节本人也有些遗忘，等后面重新复习之后再处理。

第 7 章 分拆数

先提出问题：假设有面值为1元、2元、3元、4元......的硬币，为了支付n元，请思考硬币的组合方式有几种。假设组合方式的个数为P_n（各种支付方法称为n的分拆方式，分拆方式的个数P_n称为n的分拆数）。不过这个问题其实是很难的，所以书中是要做两个相对容易的问题：（1）P_9是多少；（2）$P_{15} < 1000$是否成立。

正如前面所说，求出P_n的表达式不是很容易，不过好在对于P_9由于数字不算太大，还是可以直接一步步直接表示出来。这里直接给出答案$P_9 = 30$，于是主要精力放在第二问上。15虽然看着还是不大，但是这样的组合数通常增长速度很快，所以仍旧把组合表达式全部列出来已经有些困难了，于是比较合理的方式是对P_n进行估计。在高等数学里，其实使用的更多的就是估计，或者说不等式，得到等式是很难的。

首先给出前面几个数据

$$P_0 = 1, P_1 = 1, P_2 = 2, P_3 = 3, P_4 = 5, P5_7, P_6 = 11, P_7 = 15, P_8 = 22, P_9 = 30.$$

7.1 第一个估计$P_n \leq F_{n+1}$

这里F_n是斐波那契数列。

我们首先观察前面几个P_n,可以发现

$$\begin{aligned} P_0 &= F_1 = 1; \\ P_1 &= F_2 = 1; \\ P_2 &= F_3 = 2; \\ P_3 &= F_4 = 3; \\ P_4 &= F_5 = 5; \end{aligned}$$

但是从5开始，有$P_5 < F_6$，我们猜测对于一般有$P_n \leq F_n$。对于使用数学归纳法，只需要想办法证明第二步即可。

我们考虑$k+2$元的支付方法，可以分为三种情况：

1. 最小面值的硬币为①的时候：去掉1枚①，问题变为$k+1$元的支付问题。

2. 最小面值的硬币为2的时候：去掉1枚②，问题转化为k元支付问题，但是有一个限制，最小面值不能是①。
3. 最小面值的硬币大于等于3的时候：假设最小面值为ⓜ，取1枚ⓜ，进行如下变换：
$$m = 2 + 1 + \cdots + 1,$$
这样变换之后，将②去掉，剩下的就是k元的支付方法了，而且这种支付方式中，最小面值是①，和上一个方式不会发生冲突。

于是通过上面的讨论，我们有

$$P_{k+2} \leq P_{k+1} + P_k\text{fi}$$

这个不等式对于所有的整数$k \geq 0$成立。这样就很容易得到数学归纳法中的第二步了，因为$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$，于是有

$$\begin{aligned} P_{k+2} &\leq P_{k+1} + P_k \\ &\leq F_{k+2} + F_{k+1} \\ &= F_{k+3}. \end{aligned}$$

由此不等式获证。

很容易得到$F_{15} = 610$，第二问得解。

7.2 第二个估计$P_n < e^{K\cdot\sqrt{n}}$

这里$K = \frac{\sqrt{6}\pi}{3}$。

对于这个估计，我们需要从生成函数出发。可是我们不知道P_n的递推公式，如何求解生成函数呢？从P_n的含义出发，这里面再次涉及“和式”和“积式”的一个关系。P_n实际上是指不定方程$n = \sum_{k=1}^{+\infty} kx_i$的非负整数解$(x_1, x_2, \cdots)$的个数，可是这个和式，在组合的意义下，其实是以下积式展开后x^n的系数。

$$(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{1\cdot k})(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2\cdot k})(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{3\cdot k})\cdots.$$

那么根据生成函数的定义，上面乘积恰好就应该是生成函数，把x限制在$(0,1)$中，

就可以使用等比级数的求和公式，于是我们可以得到生成函数$P(x)$：

$$
\begin{aligned}
P(x) = & \frac{1}{1-x^1} \\
& \frac{1}{1-x^2} \\
& \frac{1}{1-x^3} \\
& \cdots \\
& \frac{1}{1-x^k} \\
& \cdots,
\end{aligned}
$$

简洁一点是

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

按照以前思路，应该把这个生成函数表示为有限代数式，可是这个难度不小，所以这里就此止步，而是转而用它来做估计。

我们注意到$P(x)$的定义，然后把x限制到$0 < x < 1$后，应该有$P_n x^n < P(x)$，也就是

$$P_n x^n < \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k},$$

两边除以x^n得到

$$P_n < \frac{1}{x^n} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k},$$

我们可以进一步把无限表达式变为有限，那就是限制最大的面值为n，这样就有

$$P_n \le \frac{1}{x^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x^k},$$

而乘积形式比较复杂，我们一般是把它转化为和式，取对数即可，就可以得到如下不等式：

$$\ln P_n \le \ln \frac{1}{x^n} + \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{1-x^k},$$

上述不等式右边分成两部分，把第一部分记为A，第二部分记作B，也就是

$$
\begin{aligned}
A &= \ln \frac{1}{x^n} \\
B &= \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{1-x^k},
\end{aligned}
$$

下面分别估计A和B。

首先估计A，我们注意到一个常见的关于对数函数的不等式

$$\ln(1+u) < u,$$

这里$u > 0$，这个不等式的一个直观理解是在直角坐标系中画出曲线$y = \frac{1}{1+u}$，然后注意到$\ln(1+u)$的几何意义恰是这曲线下面包含的面积。

有了这个不等式，我们需要把A转化到相似的地方，那就需要做一个变换$t = \frac{x}{1-x}$，$x = \frac{t}{1+t}$，就有

$$A = \ln\frac{1}{x^n} = n\ln\frac{1}{x} = n\ln(1+\frac{1}{t}) < \frac{n}{t},$$

这里$t = \frac{x}{1-x} > 0$。

下面估计B部分。对于B部分，有一个相对一致的形式，于是我们先看看这个统一的形式部分：

$$f(t) = \ln\frac{1}{1-t} \quad 0 < t < 1,$$

把这个式子进行泰勒展开，有

$$\ln\frac{1}{1-t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k},$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{1}{1-x^k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{mk}}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{mk}}{m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}x^{mk} \\
&< \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}x^{mk} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\frac{x^m}{1-x^m}
\end{aligned}$$

这里面的交换和式是允许的，因为对于正项级数，或者更一般的绝对收敛的级数，可以随意更改加法顺序，而不会影响收敛性以及最终的结果。另外最后的

不等式缩放，是加了无限多个正项。

下面看看$\frac{x^m}{1-x^m}$能做什么样的缩放(需要注意我们的x的范围)：

$$\begin{aligned}\frac{x^m}{1-x^m} &= \frac{x^m}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})} \\ &< \frac{x^m}{(1-x)(x^{m-1}+x^{m-1}+\cdots+x^{m-1})} \\ &= \frac{x^m}{(1-x)\cdot m\cdot x^{m-1}} \\ &= \frac{x}{m(1-x)}\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}B &< \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{x^m}{1-x^m} \\ &< \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{x}{m(1-x)} \\ &< \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\frac{x}{1-x} \\ &= \frac{x}{1-x}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} \\ &= \frac{x}{1-x}\cdot\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

如果令$t=\frac{x}{1-x}$，就有$B<\frac{\pi^2}{6}t$。

现在可以合并A和B了，

$$\ln P_n < \frac{n}{t}+\frac{\pi^2}{6}t \quad t>0,$$

注意我们的这个不等式是对所有$t>0$成立的，那么接下来应该求出函数

$$g(t)=\frac{n}{t}+\frac{\pi^2}{6}t \quad t>0,$$

的最小值。而对于求一元函数的最小值的方法，在高等数学里面，是有模式的，那就是求出一阶导数的零点（称为临界点），然后比较各个端点处的函数值，以及这些临界点出的函数值，最小的那个就是函数的最小值。对于$g(t)$，只需要求出临界点处的函数值即可。

$$g'(t)=-\frac{n}{t^2}+\frac{\pi^2}{6},$$

可以得到$t=\pm\frac{\sqrt{6n}}{\pi}$，而$t>0$，所以临界点为$t=\frac{\sqrt{6n}}{\pi}$，画出增减表，或者求出二阶

导数，通过二阶导数可以判断这个临界点时极小值点还是极大值点。

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{6n}}{\pi}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

至于二阶导数的方法，注意到$g''(t) = \frac{2n}{t^3}$，在$t > 0$的时候恒大于零，表明$g(t)$在上述临界点是极小值。

最终我们得到最小值

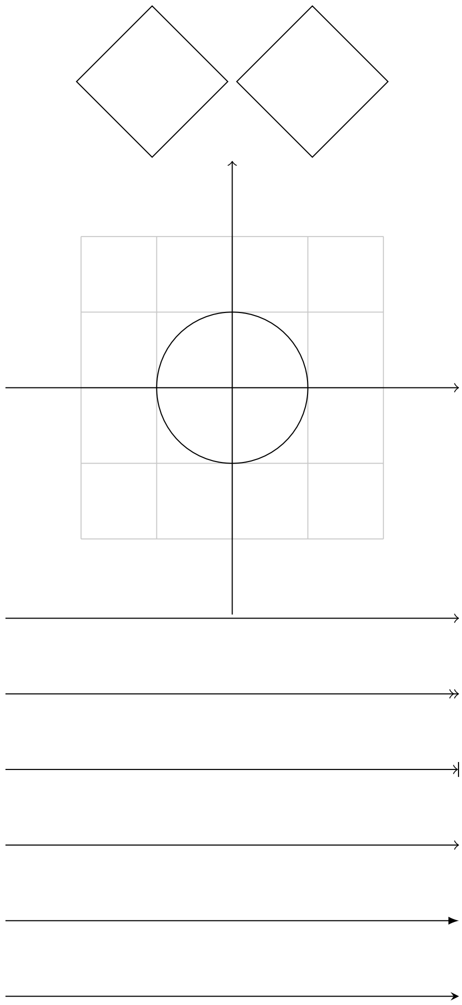
$$g(\frac{\sqrt{6n}}{\pi}) = \frac{\sqrt{6}\pi}{3} \cdot \sqrt{n} = K\sqrt{n},$$

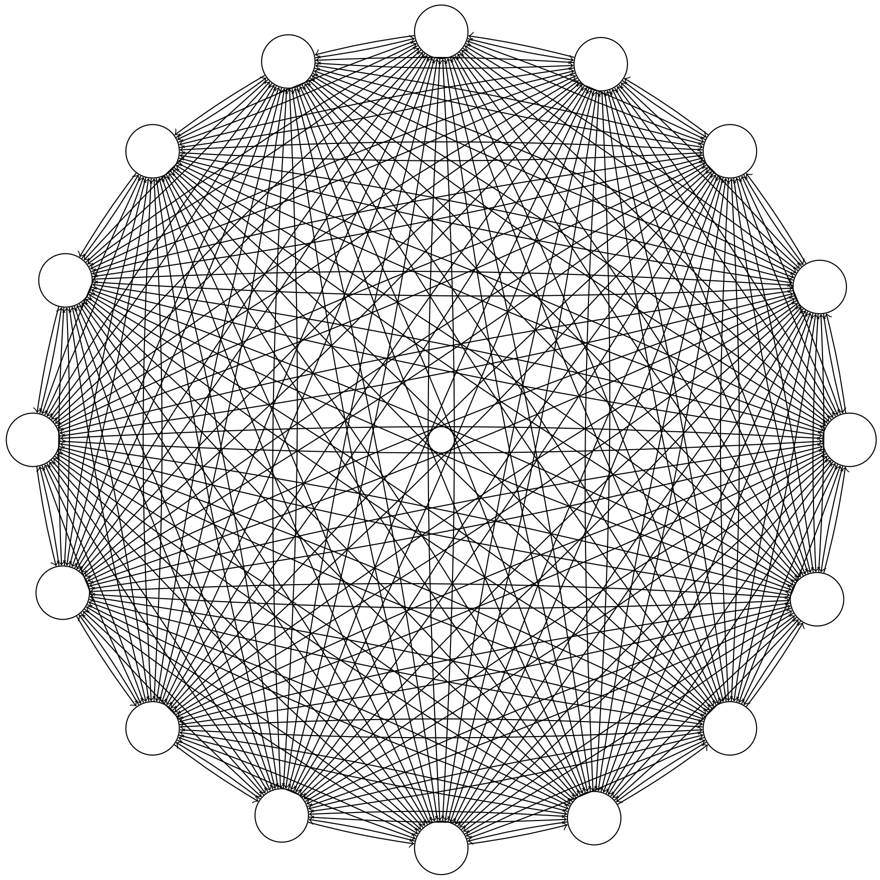
这里$K = \frac{\sqrt{6}\pi}{3}$，于是

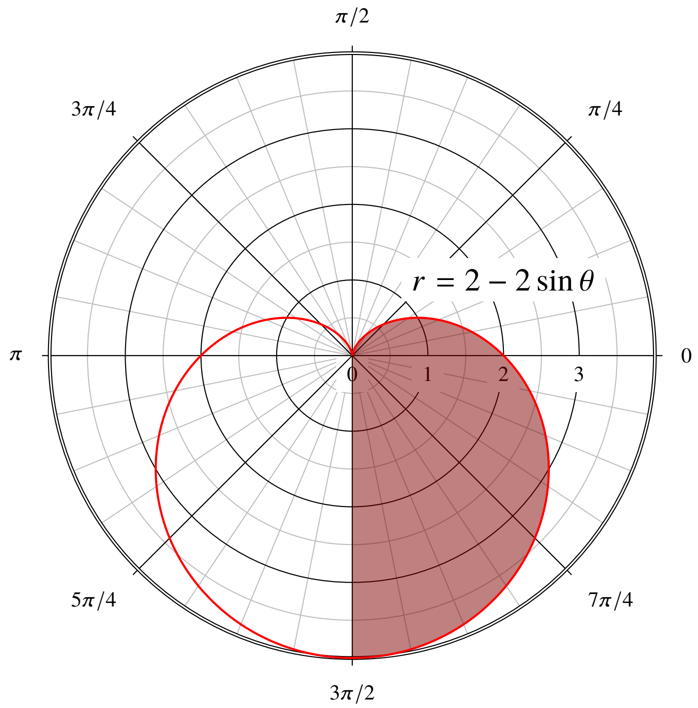
$$\ln P_n < K \cdot \sqrt{n},$$
$$P_n < e^{K\cdot\sqrt{n}}.$$

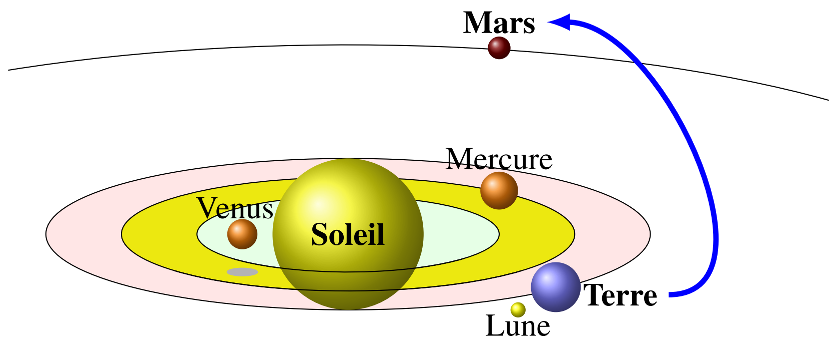
估计不等式获证。

附录 Tikz绘制的一些图形






π/2
3π/4
π/4
r = 2 − 2 sin θ
π
0
0
1
2
3
5π/4
7π/4
3π/2


Mars
Mercure
Venus
Soleil
Terre
Lune