

姓名	学号	班级	选题	论述	结论	总分
赵玥	2013301020083	物基一班				

# 单摆的振动

赵玥

物理科学与技术学院

2013301020083

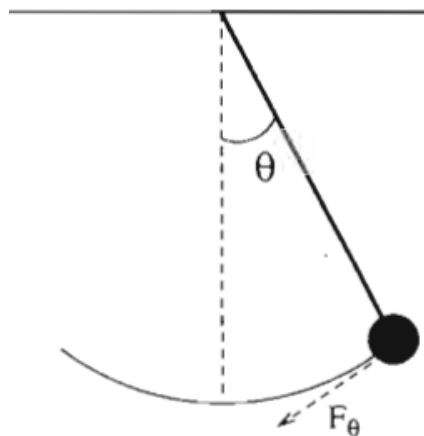
摘要：通过最理想化、最简单的单摆模型探讨四种计算单摆振幅与时间关系的方法的差异。在逐渐使模型变复杂后，从增加阻尼系数，到增加外界压力，到非线性处理，选择其中一种方法对单摆的运动进行讨论。

## 一、背景介绍

振动现象无处不在，大到石子投入湖面激起的阵阵涟漪，小到原子周围的电子运动，都是振动，简谐振动，是其中最简单的一种。说到简谐振动，就不能不想到单摆，自从伽利略一次无意之中发现了单摆的等时性之后，人们对于这个看似简单、实则复杂的系统就产生了莫大的兴趣，从而有了今天的课题，单摆运动的各种算法及其会产生混沌现象。

## 二、简化模型下的算法分析

我们考虑一个最理想化的单摆系统。在忽视摩擦力、外界作用力时，仅考虑一小球由不可伸长的轻绳紧密悬挂在一悬挂点，且悬线与竖直方向所成夹角  $\theta$  较小的情况下，小球在引力作用下的往复运动。（如右图所示）



简单的受力分析后我们很容易得到垂直于悬线方向小球所受的力：

$$F_{\theta} = -mg \sin \theta \quad (1)$$

且在沿着运动轨迹方向由牛顿第二定律有：  $F_{\theta} = m \frac{d^2 s}{dt^2}$  其中，  $s = l\theta$ ，  $l$  为悬线

长度。在  $\theta$  很小的情况下取近似  $\sin \theta = \theta$ ，则有：

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \quad (2)$$

很容易得到一个通解为：

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi) \quad (3)$$

其中  $\Omega = \sqrt{g/l}$ ， $\theta_0$  和  $\phi$  是常数。

想要得到一个  $\theta(t)$  的函数，就要解出 (2) 式这个二阶微分方程。考虑将其写成两个一阶微分方程：

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l} \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (4)$$

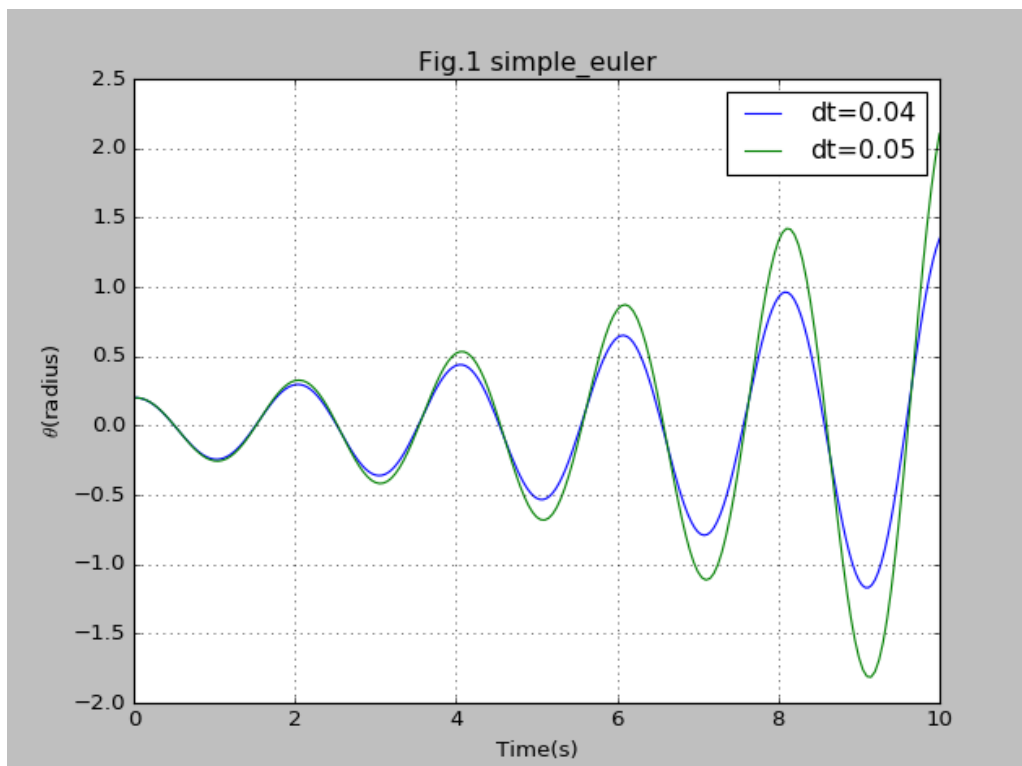
其中  $\omega$  是单摆的角速度。

### 1.Euler Method 及其局限性

Euler Method 的基本原理是将微分方程改写为差分方程并取一阶近似，在  $t = n\Delta t$  ( $n$  为整数) 的条件下，将 (4) 式改写为：

$$\begin{aligned} \omega_{i+1} &= \omega_i - \frac{g}{l} \theta_i \Delta t \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \omega_i \Delta t \end{aligned} \quad (5)$$

在悬线长度  $l = 1m$ ,  $dt = 0.05s$  和  $dt = 0.04s$  时，得到下图：



显而易见，虽然在减小时间间隔的情况下误差会减小，但在任何时间间隔不为 0

的情况下，Euler Method 下,单摆的能量总是伴随着时间的增大越来越大，这是与事实不符的。

由  $x(t + \Delta t) = x(t) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_m} \Delta t$  可知，Euler Method 每一步都舍去了一个二阶小

量，每一步的运算总取左端点作为中值，因此只要用更接近中间的中值即可较好的减小误差，因此便有了下面的 Euler-Cromer Method。

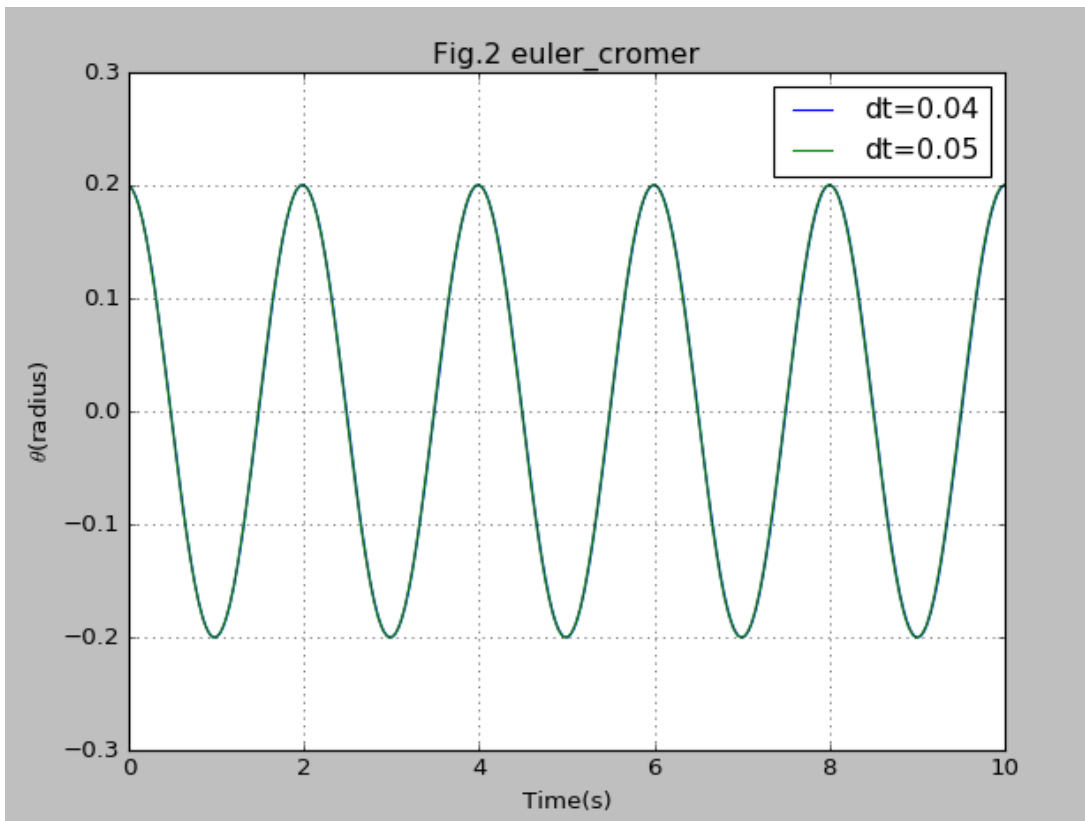
## 2.Euler-Cromer Method

Euler-Cromer Method 只做了一个小小的变动，就是在计算  $\omega_{i+1}$  时采用左端点作

为中值，而在计算  $\theta_{i+1}$  时采用右端点作为中值。即将（4）式改写为：

$$\begin{aligned}\omega_{i+1} &= \omega_i - \frac{g}{l} \theta_i \Delta t \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t\end{aligned}\quad (6)$$

在悬线长度  $l = 1m$ ,  $dt = 0.05s$  和  $dt = 0.04s$  时，得到下图



由图可见计算结果是非常稳定的，在题设的理想模式下该系统将永远运动下去。

## 3.Second-order Runge-Kutta Method

各阶 Runge-Kutta Method 通过给出中值的估计值来给出中值的估计值，即将（4）式

整理为:

$$\begin{aligned}\omega_{i+1} &= \omega_i - \frac{g}{l} \theta_{t_m} \Delta t \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \omega_{t_m} \Delta t\end{aligned}\quad (7)$$

在悬线长度  $l = 1m$  和步长  $dt = 0.02s$  时得到图曲线同上 Euler-Cromer Method。

#### 4.Verlet Method

Verlet Method 利用中心差分, 将 (4) 式改写为:

$$\begin{aligned}\theta_{i+1} &= 2\theta_i - \theta_{i-1} + \frac{d^2\theta}{dt^2} \times \Delta t^2 \\ \omega_i &= \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta t}\end{aligned}\quad (8)$$

在悬线长度  $l = 1m$  和步长  $dt = 0.02s$  时得到图曲线同上 Euler-Cromer Method。

### 三、 线性简谐振动 (用 Euler-Cromer Method 处理)

#### 1. 考虑损耗情况

则 (2) 式变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{d\theta}{dt}\quad (9)$$

解上述方程得到三种不同的物理模型。

$$\textcircled{1} \text{欠阻尼: } \theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{qt}{2}} \sin\left(\sqrt{\Omega^2 - \frac{q^2}{4}}t + \phi\right)$$

$$\textcircled{2} \text{过阻尼: } \theta(t) = \theta_0 e^{-\left(q/2 \pm \sqrt{q^2/4 - \Omega^2}\right)t}$$

$$\textcircled{3} \text{临界阻尼: } \theta(t) = (\theta_0 + Ct)e^{-qt/2}$$

#### 2. 考虑到阻尼系数 $q$ 以及外加压力 $F_D$

则 (2) 式变为:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F_D(\sin\Omega_D t)\quad (10)$$

为了方便我们考虑  $F_D$  为一个随时间变化的正弦函数,  $\Omega_D$  为它的角速度。

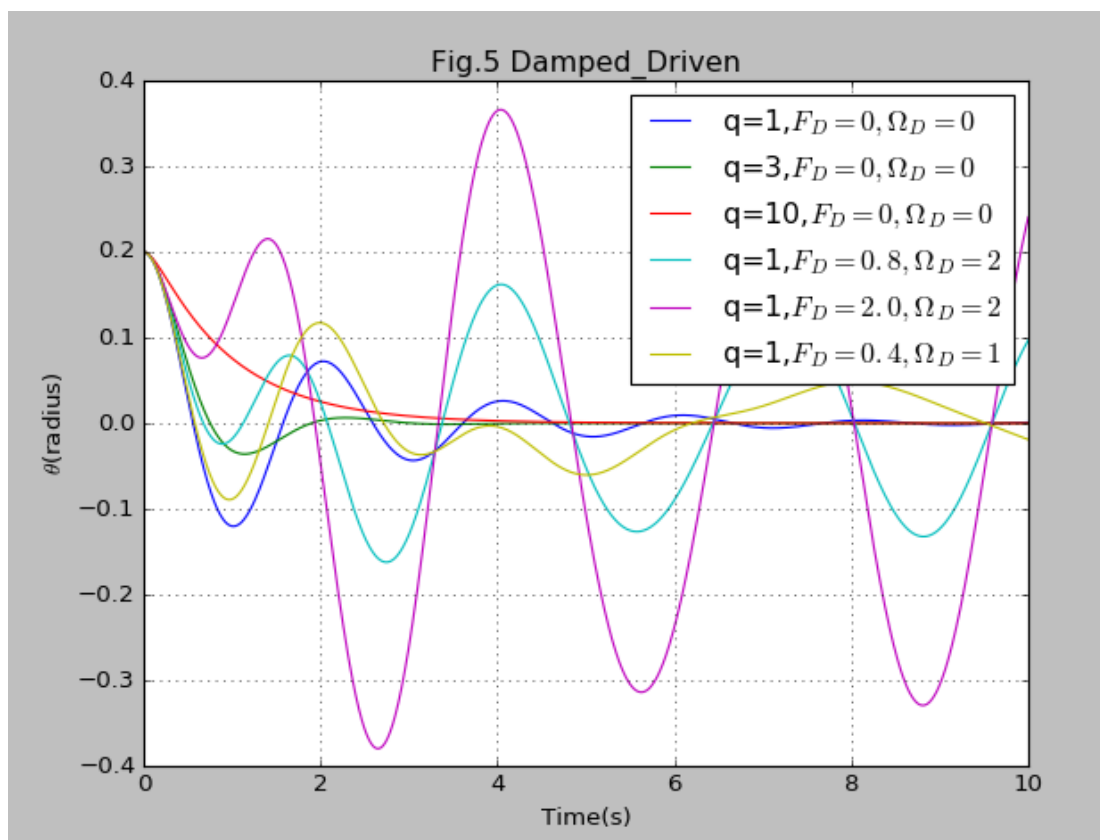
得到通解为:

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega_D t + \phi)\quad (11)$$

其中，

$$\theta_0 = \frac{F_D}{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_D^2)^2 + (q\Omega_D)^2}} \quad (12)$$

改变阻尼系数  $q$  和外加压力  $F_D$ ，得到下图：



由上图可知，在不考虑外加压力的情况下（蓝、绿、红线），分别对应了欠阻尼、临界阻尼和过阻尼现象。

在阻尼系数相同时，外加压力的大小以及外加压力的频率会对单摆的振动频率即振幅产生影响，系统的能量也会有所改变。

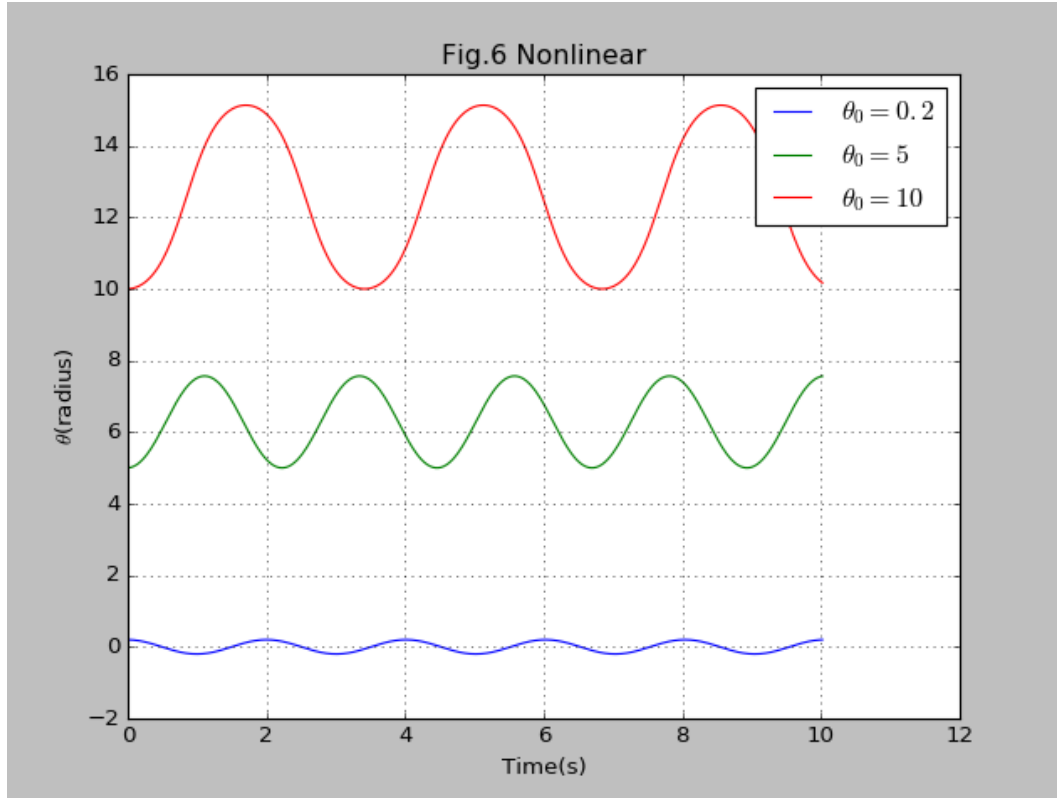
## 四、非线性单摆

到这里为止我们已经改变的几乎所有的在理想模型中我们设定的条件，除了一个“悬线与竖直方向所成夹角较小”。考虑到当  $\theta$  变大后不可再用  $\sin \theta \approx \theta$  的近似，则在理想模型中的（2）式变为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (13)$$

1. 暂不考虑系统耗散及外加压力的情况下，我们易知系统的总能量始终是守恒的。那么单摆的运动必然是周期性的。

通过 Euler-Kutta Method 进行简单计算得到如下曲线：



由上图可见，单摆的运动周期及振幅与初始角度有关。

2.在同时具有系统耗散及外加压力的情况下，（13）式写做：

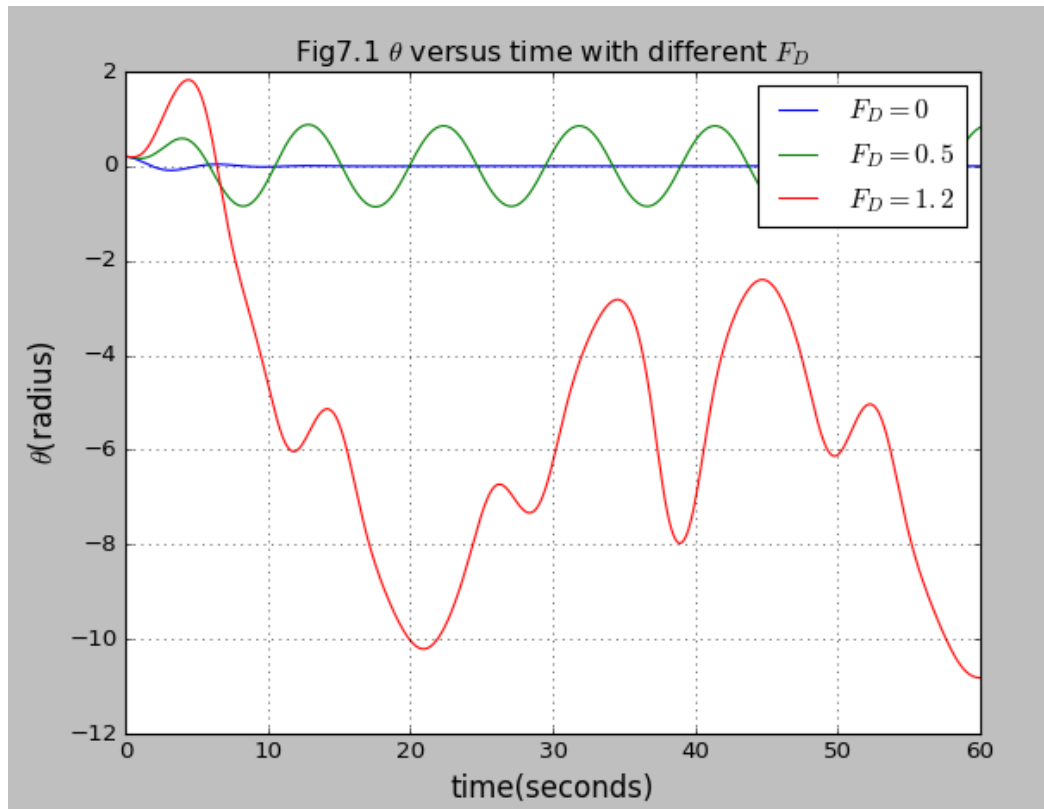
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta - q\frac{d\theta}{dt} + F_D\sin(\Omega_D t) \quad (14)$$

我们仍可用相同的处理方式将（14）写成：

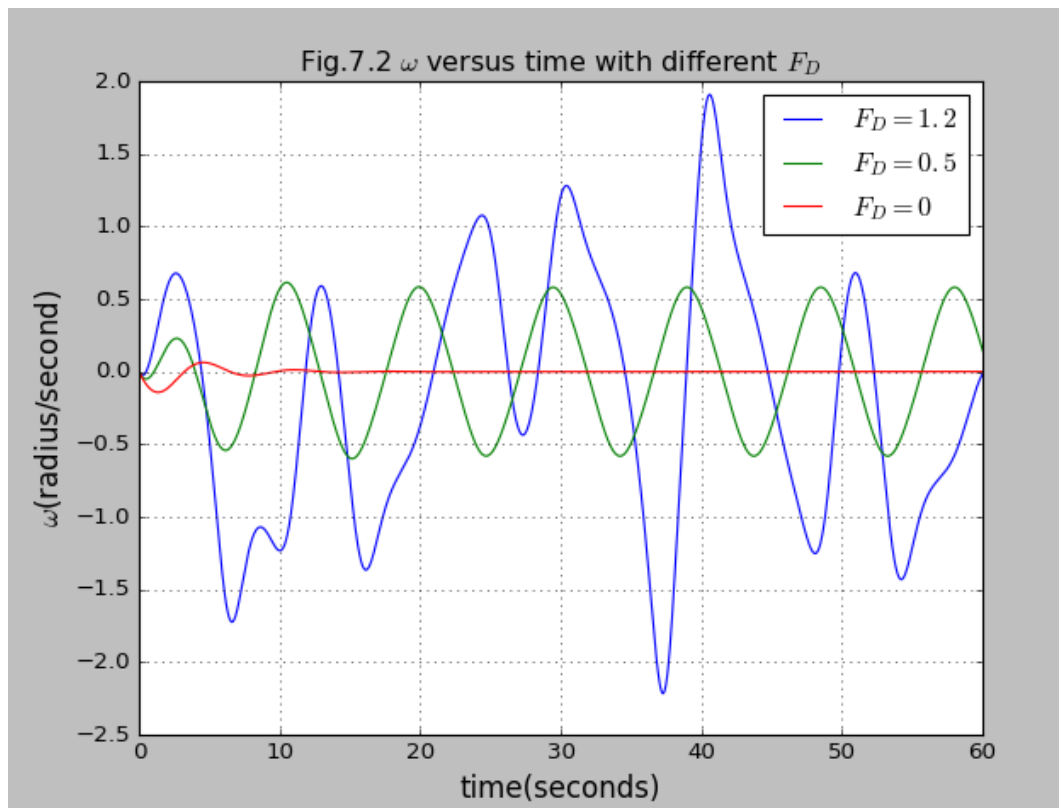
$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l}\sin(\theta) - q\frac{d\theta}{dt} + F_D\sin(\Omega_D t) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \quad (15)$$

在用 Euler-Cromer Method 处理该问题时，需要额外注意的  $\theta$  的范围，为了使计算有意义且简便，我们使  $|\theta| \leq \pi$ 。

在  $\theta$  和  $\omega$  含时以及不同大小的外加压力的情况下，单摆会具有不同的振动模式，通过计算得到的数值结果如下图：



$\theta(t)$  及不同外加压力  $F_D$  图像。



$\omega(t)$  及不同外加压力  $F_D$  的图像。

由上面两幅图可知，在没有外加压力的情况下，系统因自身耗散而逐渐停止摆动。在外加压力较小的情况下，在短暂的耗散后，单摆开始做稳定的频率等同于外加压力频率的周期性摆动。在外加压力大到一定程度的情况下，摆动变得毫无规律可言。

## 五、 结论

经过上述讨论，从最简单的理想模型到后来复杂的现实模型，在对参量的一步步讨论中，我们更好地了解了单摆的运动方式，从而能够更好地理解振动这一普遍存在于我们生活方方面面却又常被我们忽略的问题。而在数值计算方面，几种不同的计算方法更是给我们提供了多种思路，以后若遇到类似问题必然可以举一反三，得到最优解。

## 六、 致谢

1. 上官俊怡同学的耐心指导及陈洋遥同学的深入分析。
2. Computational Physics , Nicholas J . Giordano , Hisao Nakanishi
3. Handbook of Mathematical Functions with Formulas ,Graphs, and Mathematical Tables ,M.Abramowitz and I.A.Stegun
4. Classical Dynamics of Particles and Systems , J.B.Marion and S.T.Thornton