

计算流体力学期末大作业

郑恒 2200011086

2025 年 6 月 19 日

1 问题介绍

针对 Sod 激波管问题，需求解一维欧拉方程：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

其中：

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad f(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad E = \rho e = \rho \left(C_v T + \frac{1}{2} u^2 \right).$$

在 $t = 0$ 时刻，初始条件为：

$$\begin{cases} x < 0 \text{ 处, } (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1) \\ x \geq 0 \text{ 处, } (\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1) \end{cases}$$

要求采用数值方法求解密度、速度、压强分布，并与精确解进行比较。Sod 问题的 Riemann 精确解可查询网络或参考书获得。具体要求如下：

1. 计算域与网格由用户设定，并进行相关讨论；
2. 激波捕捉格式：要求至少完成 TVD、群速度控制（GVC）、WENO 各一种；
3. 通量处理方法：要求至少完成 FVS（Flux Vector Splitting）和 FDS（Flux Difference Splitting）各一种；
4. 时间推进格式选用三阶 Runge-Kutta。

2 算法原理

2.1 一维 Riemann 问题精确解

根据空气动力学原理，Sod 激波管中可能出现三种波类型：

- **激波：**密度、速度、压力均发生突变，满足 Rankine-Hugoniot (R-H) 关系式
- **接触间断：**仅密度发生突变，速度与压力不变
- **膨胀波（稀疏波）：**等熵波，内部物理量连续光滑，头尾物理量连续但导数不连续（弱间断），Riemann 不变量不变

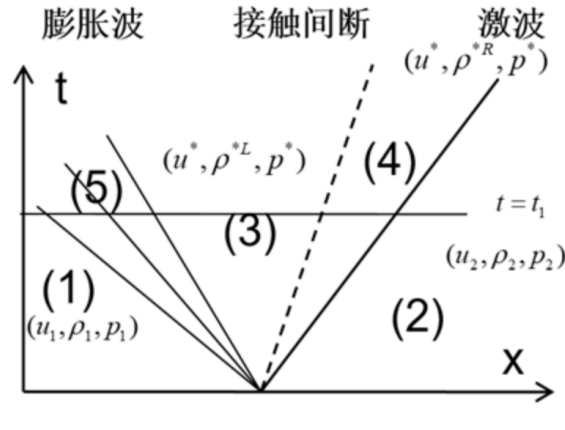


图 1: Sod 激波管问题示意图

针对 Sod 激波管实际工况（初始条件： $(\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1)$, $(\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1)$ ），其流场演化属于**右激波 + 左膨胀波**组合。基于质量、动量、能量通量守恒，可建立方程组求解。

2.1.1 Sod 管实际工况：右激波 + 左膨胀波

分区列写方程如下：

左膨胀波区 (1-3 区): 满足等熵关系和 Riemann 不变量守恒:

$$p^*/(\rho^{*L})^\gamma = p_1/(\rho_1)^\gamma \quad (1)$$

$$u_1 + \frac{2c_1}{\gamma-1} = u^* + \frac{2c^L}{\gamma-1} \quad (2)$$

其中 $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ 为左初始区的声速, $c^L = \sqrt{\gamma p^*/\rho^{*L}}$ 为膨胀波后的声速。

右激波区 (2-4 区): 满足激波的 Rankine-Hugoniot 条件:

$$\begin{cases} \rho_2(u_2 - Z_2) = \rho^{*R}(u^* - Z_2) \\ \rho_2 u_2(u_2 - Z_2) + p_2 = \rho^{*R} u^*(u^* - Z_2) + p^* \\ E_2(u_2 - Z_2) + u_2 p_2 = E^{*R}(u^* - Z_2) + p^* u^* \end{cases} \quad (3)$$

其中总能 $E_k = p_k/(\gamma-1) + \rho_k u_k^2/2$ 。

激波和膨胀波引起的速度-压力变化可统一表示为:

$$\text{左膨胀波: } u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1) \quad (4)$$

$$\text{右激波: } u^* = u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2) \quad (5)$$

其中 f 函数定义为分段形式:

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p^* - p_i}{\rho_i c_i \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p^*}{p_i} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{1/2}}, & p^* > p_i \quad (\text{激波情况}) \\ \frac{2c_i}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p^*}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right], & p^* < p_i \quad (\text{膨胀波情况}) \end{cases} \quad (6)$$

联立方程 (4) 和 (5), 得到关于 p^* 的非线性方程:

$$u_1 - u_2 = f(p^*, p_1, \rho_1) + f(p^*, p_2, \rho_2) \quad (7)$$

此方程可通过 Newton 迭代法求解 p^* , 进而计算 u^* 和各区密度。

2.1.2 膨胀波内部物理量计算

膨胀波范围由波头速度 $u_1 - c_1$ 和波尾速度 $u^* - c^{*L}$ 确定 ($c^{*L} = \sqrt{\gamma p^*/\rho^{*L}}$)。波区内物理量由自相似解给出：

$$c(t, x) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(u_1 - \frac{x}{t} \right) + \frac{2}{\gamma + 1} c_1 \quad (8)$$

$$u(x, t) = c + \frac{x}{t} \quad (9)$$

$$p(x, t) = p_1 \left(\frac{c}{c_1} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (10)$$

$$\rho(x, t) = \gamma p / c^2 \quad (11)$$

此解仅适用于 $u_1 - c_1 \leq x/t \leq u^* - c^{*L}$ 区域。

综上所述，一维 Riemann 问题的精确解的求解思路与方程介绍完毕。本文 Sod 激波管参考精确解程序来自于 github 开源项目, 地址为

<https://github.com/sbakkerm/Sod-Shock-Tube/tree/main>。

2.2 时间推进格式

时间推进采用三阶 Runge-Kutta 方法，整个离散格式为：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \quad (12)$$

$$U^{(1)} = U^n - \Delta t \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^n) \quad (13)$$

$$U^{(2)} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(1)}) \quad (14)$$

$$U^{(3)} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(2)}) \quad (15)$$

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{6} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(1)}) + 2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(2)}) + 2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(3)}) \right) \quad (16)$$

其中 \mathbf{F} 是通量函数， Δt 是时间步长。

其中守恒向量 U 和通量函数 \mathbf{F} 为：

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}$$

2.3 流通矢量分裂技术 (FVS)

目前，数值求解守恒型一维 Euler 方程的主要技术包括流通矢量分裂 (Flux Vector Splitting, FVS) 与流通差分分裂 (Flux Difference Splitting, FDS) 两类。

流通矢量分裂方法基于特征线方法，将方程的解表示为特征向量的组合。该方法将代表质量、动量和能量的流通矢量按照雅可比矩阵的特征值进行分裂，并据此构造迎风格式或激波捕捉格式。

流通差分分裂方法则是对流通矢量的导数进行分裂：首先运用差分格式构造网格半点处的守恒变量，再利用各类近似 Riemann 解构造通量。

2.3.1 基本变量与方程

守恒变量 \mathbf{U} 与流通矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 定义为：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + p \\ \frac{w_2}{w_1}(w_3 + p) \end{bmatrix}$$

总能量 E 满足：

$$E = \rho e = \rho \left(c_v T + \frac{1}{2} u^2 \right)$$

考虑完全气体状态方程 $p = \rho R T$ ，压力可表示为：

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) = (\gamma - 1) \left(w_3 - \frac{1}{2} \frac{w_2^2}{w_1} \right)$$

流通矢量可简化为：

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{3 - \gamma}{2} \frac{w_2^2}{w_1} + (\gamma - 1) w_3 \\ \frac{\gamma w_2 w_3}{w_1} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{w_2^3}{w_1^2} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Jacobian 矩阵与特征值

守恒变量的微分关系：

$$\begin{cases} dw_1 = d\rho \\ dw_2 = u d\rho + \rho du \\ dw_3 = \frac{dp}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}u^2 d\rho + \rho u du \end{cases}$$

Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ ：

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma - 3}{2} \frac{w_2^2}{w_1^2} & (3 - \gamma) \frac{w_2}{w_1} & \gamma - 1 \\ -\frac{\gamma w_2 w_3}{w_1^2} + (\gamma - 1) \frac{w_2^3}{w_1^3} & \frac{\gamma w_3}{w_1} - \frac{3(\gamma - 1)}{2} \frac{w_2^2}{w_1^2} & \frac{\gamma w_2}{w_1} \end{bmatrix}$$

声速 c 满足：

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma(\gamma - 1) \left(\frac{w_3}{w_1} - \frac{1}{2} \frac{w_2^2}{w_1^2} \right)$$

Jacobian 矩阵的特征值为：

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c$$

当状态方程 $p = \rho g(e)$ 时，流通矢量满足一次齐次性：

$$\mathbf{F}(\alpha \mathbf{U}) = \alpha \mathbf{F}(\mathbf{U}) \quad \forall \alpha$$

对 α 求导并令 $\alpha = 1$ 得：

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A} \mathbf{U}$$

2.3.3 分裂方法原理

在构造耗散型格式时，需要将流通矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 按照特征值进行分裂。

对单波方程流通量的分裂为：

$$f^\pm = c^\pm u, \quad c^\pm = \frac{c \pm |c|}{2}, \quad f = f^+ + f^-$$

对流通矢量，通过 Jacobian 矩阵特征值分裂：

$$\lambda_k = \lambda_k^+ + \lambda_k^-, \quad \lambda_k^+ \geq 0, \quad \lambda_k^- \leq 0$$

分裂后的特征值对角矩阵：

$$\Lambda^\pm = \begin{bmatrix} \lambda_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^\pm \end{bmatrix}$$

定义分裂：

$$\mathbf{A}^\pm = S^{-1} \Lambda^\pm S, \quad \mathbf{F}^\pm = \mathbf{A}^\pm \mathbf{U}$$

满足 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$ ， $\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-$ 。

Steger-Warming (S-W) 分裂法：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm |\lambda_k|}{2}$$

为避免奇点可修正为：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm \sqrt{\lambda_k^2 + \varepsilon^2}}{2}$$

Lax-Friedrichs (L-F) 分裂法：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm \lambda^*}{2}$$

$$\mathbf{F}^+ = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \lambda^* \mathbf{U}), \quad \mathbf{F}^- = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \lambda^* \mathbf{U})$$

其中 λ^* 可取局部值 $|u| + c$ 或全局 $\max(|u| + c)$ 。

van Leer 分裂法： 基于马赫数 $\text{Ma} = u/c$ 的分裂：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho c \text{Ma} \\ \rho c^2 \left(\text{Ma}^2 + \frac{1}{\gamma} \right) \\ \rho c^3 \text{Ma} \left(\frac{1}{2} \text{Ma}^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_{\text{mas}} \\ f_{\text{mom}} \\ f_{\text{ene}} \end{bmatrix}$$

分裂策略：

1. $\text{Ma} \geq 1$: $\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^- = 0$
2. $\text{Ma} \leq -1$: $\mathbf{F}^+ = 0$, $\mathbf{F}^- = \mathbf{F}$
3. $|\text{Ma}| \leq 1$: 按马赫数分裂

分量分裂:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{mas}}^{\pm} &= \pm \frac{1}{4} \rho c (1 \pm \text{Ma})^2 \\
 f_{\text{mom}}^{\pm} &= f_{\text{mas}}^{\pm} \frac{2c}{\gamma} \left[\frac{(\gamma - 1)}{2} \text{Ma} \pm 1 \right] \\
 f_{\text{ene}}^{\pm} &= \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2 - 1)} \frac{(f_{\text{mom}}^{\pm})^2}{f_{\text{mas}}^{\pm}}
 \end{aligned}$$

统一矢量形式:

$$\mathbf{F}^{\pm} = \pm \frac{1}{4} \rho c (1 \pm \text{Ma})^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2c}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma} \pm 1 \right) \\ \frac{2c^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma} \pm 1 \right)^2 \end{bmatrix}$$

2.4 流通差分分裂技术 (FDS)

2.4.1 基本流程

流通差分分裂技术 (FDS) 的基本流程可分为以下三个步骤:

1. 如图 1 所示, 运用各类差分格式, 计算在格点间同一位置 $(j + \frac{1}{2})$ 的左右数值守恒通量 $U_{j+\frac{1}{2}}^L$ 与 $U_{j+\frac{1}{2}}^R$
2. 运用近似 Riemann 解, 计算 $F_{j+\frac{1}{2}} = F(U_{j+\frac{1}{2}}^L, U_{j+\frac{1}{2}}^R)$
3. 进行差分重构:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j = \frac{F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

图 2: FDS 格式计算格点间左右数值守恒通量

2.4.2 Roe 格式 - 单方程情况

在 FDS 类方法中应用最广泛的近似 Riemann 解是 Roe 格式。

对于一般非线性单波方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

可化为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其中 $a(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}$ 为非线性项。

将该项线性化，目标是在 $[j, j+1]$ 区间内，采用平均变化率代替变化的 $a(u)$ 。如图 2 所示，根据 Lagrange 中值定理，在 $[u_L, u_R]$ 内必有一点 u_{Roe} ，该点的斜率为区间平均变化率：

$$\tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} = a(u_{Roe}) = \frac{f(u_{j+1}) - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j}$$

图 3: 确定代替区间平均变化率的 u_{Roe} 点位置

考虑一阶迎风差分，根据 $\tilde{a}_{j+\frac{1}{2}}$ 的符号构造数值通量：

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_j & \tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} > 0 \\ f_{j+1} & \tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

或写为：

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [f_j + f_{j+1}] - \frac{1}{2} \left| \tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} \right| (u_{j+1} - u_j)$$

2.4.3 Roe 格式 - 方程组情况

对于一般的双曲守恒律方程组：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0$$

可化为：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

其中 Jacobian 矩阵 $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$ 。

在 $[j, j+1]$ 或 $[R, L]$ 区间内，寻找一个矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ 作为平均变化率矩阵，满足：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) &= \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \\ \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) &\text{ 可通过相似变换进行对角化} \end{aligned}$$

则原方程组可化为常矩阵系数方程：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

数值通量为：

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)] - \frac{1}{2} \left| \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) \right| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

其中 $\left| \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) \right| = \mathbf{S}^{-1} |\mathbf{S}|$ 。

2.4.4 Roe 矩阵构造

由于原始流通矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 与守恒矢量 \mathbf{U} 不满足二次齐次函数关系，有两种构造思路：

1. **直接寻找 \mathbf{U}_{Roe} ：**在 $[\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R]$ 内寻找 \mathbf{U}_{Roe} 使得 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = \mathbf{U}_{Roe}$ 。但实际实现困难。
2. **坐标变换法：**若 \mathbf{F} 是某个自变量的二次齐函数，则区间中点即为 Roe 点。通过坐标变换将 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 化为齐次函数：

引入新变量：

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \rho^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix}$$

则有：

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} w_1 w_2 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} w_1 w_3 + \frac{1+\gamma}{2\gamma} w_2^2 \\ w_3 w_2 \end{bmatrix}$$

增长矩阵为：

$$\mathbf{C}(\mathbf{W}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_2 & w_1 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} w_3 & 2w_2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} w_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma} w_1 \\ 0 & w_3 & w_2 \end{bmatrix}$$

在 $[R, L]$ 区间内有：

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \mathbf{C}(\bar{\mathbf{W}})(\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L)$$

其中 $\bar{\mathbf{W}} = (\mathbf{W}_R + \mathbf{W}_L)/2$ 为 Roe 点，对应的守恒矢量为：

$$\mathbf{U}_{Roe} = \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\bar{\mathbf{W}})$$

平均增长矩阵为：

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}})$$

Roe 平均变量计算公式：

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \left[\frac{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}{2} \right]^2 \\ \bar{u} &= \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \bar{H} &= \frac{\sqrt{\rho_L} H_L + \sqrt{\rho_R} H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \end{aligned}$$

其他量计算：

$$\bar{p} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\bar{\rho} \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}^2 \right), \quad \bar{c}^2 = (\gamma-1) \left(\bar{H} - \frac{\bar{u}^2}{2} \right)$$

2.4.5 Roe 格式计算步骤

设 n 时刻所有网格点物理量已知，构造 $\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right)_j$ ：

1. 运用差分格式计算 $j + \frac{1}{2}$ 处的左右数值守恒通量 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$ 与 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^R$
2. 采用 Roe 平均公式计算平均守恒矢量 $\bar{\mathbf{U}}$, 获得 $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{H}, \bar{p}, \bar{c}$ 值
3. 将 Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ 特征分解: $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}$
4. 计算 $|\tilde{\mathbf{A}}| = \mathbf{S}^{-1} |\mathbf{S}|$, 其中 $|| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$
5. 进行熵修正 (接近零的特征值处增加耗散):

$$f(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & |\lambda| > \varepsilon \\ \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & |\lambda| \leq \varepsilon \end{cases}$$

6. 计算数值通量:

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)] - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

7. 差分重构:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right)_j = \frac{\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

2.4.6 方法评价

相比 FVS 类方法, 以 Roe 格式为代表的 FDS 类方法:

- 优点:
 - 严格保持方程守恒性和特征方向
 - 耗散低, 分辨率高
 - 便于推广到高精度格式
- 缺点:
 - 原始格式仅有一阶精度
 - 高维推广时特征方向无法严格保证, 可能出现数值振荡
 - 计算量大于 FVS 类方法

3 代码实现

4 结果分析

5 AI 工具使用说明表

AI 名称	生成代码功能	使用内容
Copilot	latex 格式框架	figure 参数调整、图片插入
Deepseek	python 绘图调整	68-90 行图绘制的具体参数调整
Deepseek	gitignore 文件忽略	全由 ai 添加

6 commit 信息

commit 图如下：