

计算流体力学期末大作业

郑恒 2200011086

2025 年 6 月 19 日

1 问题介绍

针对 Sod 激波管问题，需求解一维欧拉方程：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

其中：

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad f(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad E = \rho e = \rho \left(C_v T + \frac{1}{2} u^2 \right).$$

在 $t = 0$ 时刻，初始条件为：

$$\begin{cases} x < 0 \text{ 处, } (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1) \\ x \geq 0 \text{ 处, } (\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1) \end{cases}$$

要求采用数值方法求解密度、速度、压强分布，并与精确解进行比较。Sod 问题的 Riemann 精确解可查询网络或参考书获得。具体要求如下：

1. 计算域与网格由用户设定，并进行相关讨论；
2. 激波捕捉格式：要求至少完成 TVD、群速度控制（GVC）、WENO 各一种；
3. 通量处理方法：要求至少完成 FVS（Flux Vector Splitting）和 FDS（Flux Difference Splitting）各一种；
4. 时间推进格式选用三阶 Runge-Kutta。

2 算法原理

2.1 一维 Riemann 问题精确解

根据空气动力学原理，Sod 激波管中可能出现三种波类型：

- **激波：**密度、速度、压力均发生突变，满足 Rankine-Hugoniot (R-H) 关系式
- **接触间断：**仅密度发生突变，速度与压力不变
- **膨胀波（稀疏波）：**等熵波，内部物理量连续光滑，头尾物理量连续但导数不连续（弱间断），Riemann 不变量不变

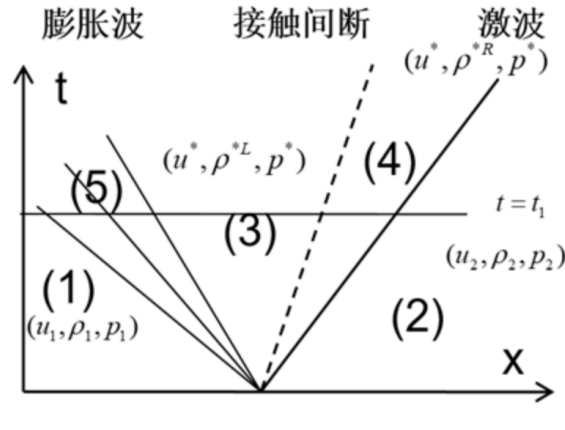


图 1: Sod 激波管问题示意图

针对 Sod 激波管实际工况（初始条件： $(\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1)$, $(\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1)$ ），其流场演化属于**右激波 + 左膨胀波**组合。基于质量、动量、能量通量守恒，可建立方程组求解。

2.1.1 Sod 管实际工况：右激波 + 左膨胀波

分区列写方程如下：

左膨胀波区 (1-3 区): 满足等熵关系和 Riemann 不变量守恒:

$$p^*/(\rho^{*L})^\gamma = p_1/(\rho_1)^\gamma \quad (1)$$

$$u_1 + \frac{2c_1}{\gamma-1} = u^* + \frac{2c^L}{\gamma-1} \quad (2)$$

其中 $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ 为左初始区的声速, $c^L = \sqrt{\gamma p^*/\rho^{*L}}$ 为膨胀波后的声速。

右激波区 (2-4 区): 满足激波的 Rankine-Hugoniot 条件:

$$\begin{cases} \rho_2(u_2 - Z_2) = \rho^{*R}(u^* - Z_2) \\ \rho_2 u_2(u_2 - Z_2) + p_2 = \rho^{*R} u^*(u^* - Z_2) + p^* \\ E_2(u_2 - Z_2) + u_2 p_2 = E^{*R}(u^* - Z_2) + p^* u^* \end{cases} \quad (3)$$

其中总能 $E_k = p_k/(\gamma-1) + \rho_k u_k^2/2$ 。

激波和膨胀波引起的速度-压力变化可统一表示为:

$$\text{左膨胀波: } u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1) \quad (4)$$

$$\text{右激波: } u^* = u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2) \quad (5)$$

其中 f 函数定义为分段形式:

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p^* - p_i}{\rho_i c_i \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p^*}{p_i} \right) + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right]^{1/2}}, & p^* > p_i \quad (\text{激波情况}) \\ \frac{2c_i}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p^*}{p_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right], & p^* < p_i \quad (\text{膨胀波情况}) \end{cases} \quad (6)$$

联立方程 (4) 和 (5), 得到关于 p^* 的非线性方程:

$$u_1 - u_2 = f(p^*, p_1, \rho_1) + f(p^*, p_2, \rho_2) \quad (7)$$

此方程可通过 Newton 迭代法求解 p^* , 进而计算 u^* 和各区密度。

2.1.2 膨胀波内部物理量计算

膨胀波范围由波头速度 $u_1 - c_1$ 和波尾速度 $u^* - c^{*L}$ 确定 ($c^{*L} = \sqrt{\gamma p^*/\rho^{*L}}$)。波区内物理量由自相似解给出：

$$c(t, x) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(u_1 - \frac{x}{t} \right) + \frac{2}{\gamma + 1} c_1 \quad (8)$$

$$u(x, t) = c + \frac{x}{t} \quad (9)$$

$$p(x, t) = p_1 \left(\frac{c}{c_1} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (10)$$

$$\rho(x, t) = \gamma p / c^2 \quad (11)$$

此解仅适用于 $u_1 - c_1 \leq x/t \leq u^* - c^{*L}$ 区域。

综上所述，一维 Riemann 问题的精确解的求解思路与方程介绍完毕。本文 Sod 激波管参考精确解程序来自于 github 开源项目, 地址为

<https://github.com/sbakkerm/Sod-Shock-Tube/tree/main>。

2.2 时间推进格式

时间推进采用三阶 Runge-Kutta 方法，整个离散格式为：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \quad (12)$$

$$U^{(1)} = U^n - \Delta t \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^n) \quad (13)$$

$$U^{(2)} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(1)}) \quad (14)$$

$$U^{(3)} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(2)}) \quad (15)$$

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{6} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(1)}) + 2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(2)}) + 2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(3)}) \right) \quad (16)$$

其中 \mathbf{F} 是通量函数， Δt 是时间步长。

其中守恒向量 U 和通量函数 \mathbf{F} 为：

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}$$

2.3 流通矢量分裂技术 (FVS)

目前，数值求解守恒型一维 Euler 方程的主要技术包括流通矢量分裂 (Flux Vector Splitting, FVS) 与流通差分分裂 (Flux Difference Splitting, FDS) 两类。

流通矢量分裂方法基于特征线方法，将方程的解表示为特征向量的组合。该方法将代表质量、动量和能量的流通矢量按照雅可比矩阵的特征值进行分裂，并据此构造迎风格式或激波捕捉格式。

流通差分分裂方法则是对流通矢量的导数进行分裂：首先运用差分格式构造网格半点处的守恒变量，再利用各类近似 Riemann 解构造通量。

2.3.1 基本变量与方程

守恒变量 \mathbf{U} 与流通矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 定义为：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + p \\ \frac{w_2}{w_1}(w_3 + p) \end{bmatrix}$$

总能量 E 满足：

$$E = \rho e = \rho \left(c_v T + \frac{1}{2} u^2 \right)$$

考虑完全气体状态方程 $p = \rho R T$ ，压力可表示为：

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) = (\gamma - 1) \left(w_3 - \frac{1}{2} \frac{w_2^2}{w_1} \right)$$

流通矢量可简化为：

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{3 - \gamma}{2} \frac{w_2^2}{w_1} + (\gamma - 1) w_3 \\ \frac{\gamma w_2 w_3}{w_1} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{w_2^3}{w_1^2} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Jacobian 矩阵与特征值

守恒变量的微分关系：

$$\begin{cases} dw_1 = d\rho \\ dw_2 = u d\rho + \rho du \\ dw_3 = \frac{dp}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} u^2 d\rho + \rho u du \end{cases}$$

Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ ：

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma - 3}{2} \frac{w_2^2}{w_1^2} & (3 - \gamma) \frac{w_2}{w_1} & \gamma - 1 \\ -\frac{\gamma w_2 w_3}{w_1^2} + (\gamma - 1) \frac{w_2^3}{w_1^3} & \frac{\gamma w_3}{w_1} - \frac{3(\gamma - 1)}{2} \frac{w_2^2}{w_1^2} & \frac{\gamma w_2}{w_1} \end{bmatrix}$$

声速 c 满足：

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma(\gamma - 1) \left(\frac{w_3}{w_1} - \frac{1}{2} \frac{w_2^2}{w_1^2} \right)$$

Jacobian 矩阵的特征值为：

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c$$

当状态方程 $p = \rho g(e)$ 时，流通矢量满足一次齐次性：

$$\mathbf{F}(\alpha \mathbf{U}) = \alpha \mathbf{F}(\mathbf{U}) \quad \forall \alpha$$

对 α 求导并令 $\alpha = 1$ 得：

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A} \mathbf{U}$$

2.3.3 分裂方法原理

在构造耗散型格式时，需要将流通矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 按照特征值进行分裂。

对单波方程流通量的分裂为：

$$f^\pm = c^\pm u, \quad c^\pm = \frac{c \pm |c|}{2}, \quad f = f^+ + f^-$$

对流通矢量，通过 Jacobian 矩阵特征值分裂：

$$\lambda_k = \lambda_k^+ + \lambda_k^-, \quad \lambda_k^+ \geq 0, \quad \lambda_k^- \leq 0$$

分裂后的特征值对角矩阵：

$$\Lambda^\pm = \begin{bmatrix} \lambda_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^\pm \end{bmatrix}$$

定义分裂：

$$\mathbf{A}^\pm = S^{-1} \Lambda^\pm S, \quad \mathbf{F}^\pm = \mathbf{A}^\pm \mathbf{U}$$

满足 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-$ 。

Steger-Warming (S-W) 分裂法：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm |\lambda_k|}{2}$$

为避免奇点可修正为：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm \sqrt{\lambda_k^2 + \varepsilon^2}}{2}$$

Lax-Friedrichs (L-F) 分裂法：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm \lambda^*}{2}$$

$$\mathbf{F}^+ = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \lambda^* \mathbf{U}), \quad \mathbf{F}^- = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \lambda^* \mathbf{U})$$

其中 λ^* 可取局部值 $|u| + c$ 或全局 $\max(|u| + c)$ 。

van Leer 分裂法： 基于马赫数 $\text{Ma} = u/c$ 的分裂：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho c \text{Ma} \\ \rho c^2 \left(\text{Ma}^2 + \frac{1}{\gamma} \right) \\ \rho c^3 \text{Ma} \left(\frac{1}{2} \text{Ma}^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_{\text{mas}} \\ f_{\text{mom}} \\ f_{\text{ene}} \end{bmatrix}$$

分裂策略：

1. $\text{Ma} \geq 1$: $\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^- = 0$
2. $\text{Ma} \leq -1$: $\mathbf{F}^+ = 0$, $\mathbf{F}^- = \mathbf{F}$
3. $|\text{Ma}| \leq 1$: 按马赫数分裂

分量分裂:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{mas}}^{\pm} &= \pm \frac{1}{4} \rho c (1 \pm \text{Ma})^2 \\
 f_{\text{mom}}^{\pm} &= f_{\text{mas}}^{\pm} \frac{2c}{\gamma} \left[\frac{(\gamma - 1)}{2} \text{Ma} \pm 1 \right] \\
 f_{\text{ene}}^{\pm} &= \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2 - 1)} \frac{(f_{\text{mom}}^{\pm})^2}{f_{\text{mas}}^{\pm}}
 \end{aligned}$$

统一矢量形式:

$$\mathbf{F}^{\pm} = \pm \frac{1}{4} \rho c (1 \pm \text{Ma})^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2c}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma} \pm 1 \right) \\ \frac{2c^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma} \pm 1 \right)^2 \end{bmatrix}$$

2.4 流通差分分裂技术 (FDS)

2.4.1 基本流程

流通差分分裂技术 (FDS) 的基本流程可分为以下三个步骤:

1. 运用各类差分格式, 计算在格点间同一位置 $(j + \frac{1}{2})$ 的左右数值守恒通量 $U_{j+\frac{1}{2}}^L$ 与 $U_{j+\frac{1}{2}}^R$
2. 运用近似 Riemann 解, 计算 $F_{j+\frac{1}{2}} = F(U_{j+\frac{1}{2}}^L, U_{j+\frac{1}{2}}^R)$
3. 进行差分重构:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j = \frac{F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

2.4.2 Roe 格式 - 单方程情况

在 FDS 类方法中应用最广泛的近似 Riemann 解是 Roe 格式。

对于一般非线性单波方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

可化为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其中 $a(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}$ 为非线性项。

将该项线性化，目标是在 $[j, j+1]$ 区间内，采用平均变化率代替变化的 $a(u)$ 。根据 Lagrange 中值定理，在 $[u_L, u_R]$ 内必有一点 u_{Roe} ，该点的斜率为区间平均变化率：

$$\tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} = a(u_{Roe}) = \frac{f(u_{j+1}) - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j}$$

考虑一阶迎风差分，根据 $\tilde{a}_{j+\frac{1}{2}}$ 的符号构造数值通量：

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_j & \tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} > 0 \\ f_{j+1} & \tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

或写为：

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [f_j + f_{j+1}] - \frac{1}{2} \left| \tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} \right| (u_{j+1} - u_j)$$

2.4.3 Roe 格式 - 方程组情况

对于一般的双曲守恒律方程组：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0$$

可化为：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

其中 Jacobian 矩阵 $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$ 。

在 $[j, j+1]$ 或 $[R, L]$ 区间内, 寻找一个矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ 作为平均变化率矩阵, 满足:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ 可通过相似变换进行对角化

则原方程组可化为常矩阵系数方程:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

数值通量为:

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)] - \frac{1}{2} \left| \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) \right| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

其中 $\left| \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) \right| = \mathbf{S}^{-1} |\Lambda| \mathbf{S}$ 。

2.4.4 Roe 矩阵构造

由于原始流通矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 与守恒矢量 \mathbf{U} 不满足二次齐次函数关系, 有两种构造思路:

1. **直接寻找 \mathbf{U}_{Roe} :** 在 $[\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R]$ 内寻找 \mathbf{U}_{Roe} 使得 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_{Roe})}{\partial \mathbf{U}_{Roe}}$ 。但实际实现困难。
2. **坐标变换法:** 若 \mathbf{F} 是某个自变量的二次齐函数, 则区间中点即为 Roe 点。通过坐标变换将 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 化为齐次函数:

引入新变量:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \rho^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix}$$

则有:

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} w_1 w_2 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} w_1 w_3 + \frac{1+\gamma}{2\gamma} w_2^2 \\ w_3 w_2 \end{bmatrix}$$

增长矩阵为：

$$\mathbf{C}(\mathbf{W}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_2 & w_1 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma}w_3 & 2w_2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}w_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma}w_1 \\ 0 & w_3 & w_2 \end{bmatrix}$$

在 $[R, L]$ 区间内有：

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \mathbf{C}(\bar{\mathbf{W}})(\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L)$$

其中 $\bar{\mathbf{W}} = (\mathbf{W}_R + \mathbf{W}_L)/2$ 为 Roe 点，对应的守恒矢量为：

$$\mathbf{U}_{Roe} = \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\bar{\mathbf{W}})$$

平均增长矩阵为：

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}})$$

Roe 平均变量计算公式：

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \left[\frac{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}{2} \right]^2 \\ \bar{u} &= \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \bar{H} &= \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \end{aligned}$$

其他量计算：

$$\bar{p} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\bar{\rho}\bar{H} - \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{u}^2 \right), \quad \bar{c}^2 = (\gamma-1) \left(\bar{H} - \frac{\bar{u}^2}{2} \right)$$

2.4.5 Roe 格式计算步骤

设 n 时刻所有网格点物理量已知，构造 $\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right)_j$ ：

1. 运用差分格式计算 $j + \frac{1}{2}$ 处的左右数值守恒通量 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$ 与 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^R$
2. 采用 Roe 平均公式计算平均守恒矢量 $\bar{\mathbf{U}}$ ，获得 $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{H}, \bar{p}, \bar{c}$ 值
3. 将 Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ 特征分解： $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\Lambda\mathbf{S}$

4. 计算 $\left| \tilde{\mathbf{A}} \right| = \mathbf{S}^{-1} |\Lambda| \mathbf{S}$, 其中 $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$

5. 进行熵修正 (接近零的特征值处增加耗散):

$$f(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & |\lambda| > \varepsilon \\ \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & |\lambda| \leq \varepsilon \end{cases}$$

6. 计算数值通量:

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)] - \frac{1}{2} \left| \tilde{\mathbf{A}} \right| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

7. 差分重构:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right)_j = \frac{\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

2.5 激波捕捉格式

在可压缩流动的流场中可能存在激波 (或间断)。Euler 方程描述的流场中激波是 Reynolds 数趋近无穷大的极限情况, 此时激波厚度为零。数值计算需要准确捕捉激波位置、速度和满足激波跳跃条件的流动参数。激波存在导致流场特征尺度差异大 (无黏激波厚度为零, 流场特征长度有限), 流动参数穿过激波有间断, 给数值计算带来困难。

2.5.1 非物理振荡根源

激波数值模拟中非物理振荡的主要根源:

1. 粘性不足: 发展出人工粘性方法 (Artificial Viscosity)
2. 差分格式失去单调性: 发展了 TVD (Total Variation Diminishing Methods) 等保单调限制器方法
3. 色散误差导致间断色散: 发展了群速度控制方法 (GVC)、耗散比拟方法

其他高效激波捕捉格式包括 NND (Non-oscillatory, Non-free-parameters Dissipative Difference Scheme)、ENO (Essentially Non-oscillatory)、WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme) 等。

2.5.2 TVD 格式 (Total Variation Diminishing Methods)

TVD 意为“总变差不增”，其主要思想是改造现有格式使其符合 Harten 条件：

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C(u_{j+1}^n - u_j^n) - D(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (17)$$

其中需满足 $C \geq 0$, $D \geq 0$, $C + D \leq 1$ 。

基于一阶迎风格式，增加修正项并使用限制函数，在格点 $j + \frac{1}{2}$ 处的差分格式为：

$$\text{正通量情况 } (a > 0): \quad u_{j+\frac{1}{2}}^L = u_j + \varphi_j^L \cdot \frac{u_{j+1} - u_j}{2} \quad (18)$$

$$\text{负通量情况 } (a < 0): \quad u_{j-\frac{1}{2}}^R = u_j - \varphi_j^R \cdot \frac{u_j - u_{j-1}}{2} \quad (19)$$

其中：

$$\begin{aligned} \varphi_j^L &= \varphi(r_j^L), \quad r_j^L = \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j} \\ \varphi_j^R &= \varphi(r_j^R), \quad r_j^R = \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} \end{aligned}$$

限制器 (Limiter) $\varphi(r)$ 通过判断区间光滑程度，平衡格式的光滑性和低耗散特性。

本文选用 van Leer 型限制器：

$$\varphi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|} = \frac{|r| + r}{|r| + 1} \quad (20)$$

该限制函数光滑性良好。

2.5.3 WENO 格式 (Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme)

WENO 格式特点：保持高精度的同时具有优异的鲁棒性 (Robustness)。

基本构造思路

1. 高精度逼近 $\partial U / \partial x$ 需多个基架点
2. 基架点内含激波会导致数值振荡

3. 将基架点分为多个模板 (组), 各模板独立计算导数逼近
4. 基于模板光滑程度设定权重
5. 加权平均多个差分结果: 光滑度高的模板权重高, 含间断的模板权重趋于零

5 阶 WENO 格式 针对单波方程 (正通量 $a > 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad f(u) = au, \quad a > 0 \quad (21)$$

数值通量计算:

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{\text{WENO}} = \omega_1 f_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} + \omega_2 f_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} + \omega_3 f_{j+\frac{1}{2}}^{(3)} \quad (22)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{1}{3}f_{j-2} - \frac{7}{6}f_{j-1} + \frac{11}{6}f_j \quad (23)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} = -\frac{1}{6}f_{j-1} + \frac{5}{6}f_j + \frac{1}{3}f_{j+1} \quad (24)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(3)} = \frac{1}{3}f_j + \frac{5}{6}f_{j+1} - \frac{1}{6}f_{j+2} \quad (25)$$

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad \alpha_k = \frac{C_k}{(\varepsilon + \text{IS}_k)^p}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (26)$$

$$p = 2, \quad \varepsilon = 10^{-6}, \quad C_1 = \frac{1}{10}, \quad C_2 = \frac{6}{10}, \quad C_3 = \frac{3}{10} \quad (27)$$

光滑度量因子:

$$\text{IS}_1 = \frac{1}{4}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2 + \frac{13}{12}(f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 \quad (28)$$

$$\text{IS}_2 = \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_{j+1})^2 + \frac{13}{12}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 \quad (29)$$

$$\text{IS}_3 = \frac{1}{4}(3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{13}{12}(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 \quad (30)$$

差分重构:

$$\frac{\partial f_j^{\text{WENO}}}{\partial x} = \frac{f_{j+\frac{1}{2}}^{\text{WENO}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{\text{WENO}}}{\Delta x} \quad (31)$$

负通量情况 ($a < 0$) 通过对称性处理: 将下标 " $j+k$ " 改为 " $j-k$ ", 差分重构方式不变。

2.6 群速度控制 (GVC) 方法

2.6.1 方法原理与背景

在激波数值模拟中，色散误差会导致数值解在间断处出现非物理振荡。群速度控制 (Group Velocity Control, GVC) 方法通过引入限制器函数调节通量梯度，抑制色散误差引起的数值振荡，提高数值解的稳定性与准确性。

方法核心思想是：在通量重构过程中引入基于通量梯度比的限制器函数，通过可调节参数 β 和 γ 控制群速度效应，平衡高阶精度与数值稳定性。该方法适用于高速流动 ($c > 1$) 情况下的激波捕捉问题。

2.6.2 群速度控制限制器函数

群速度控制的核心是下列限制器函数：

$$\Phi(r) = \frac{r + \beta|r|}{1 + \beta r + \gamma r^2}$$

其中：

- r 为通量梯度比，衡量局部解的平滑程度
- β 为群速度控制因子，通常取 0.8
- γ 为高阶修正系数，通常取 0.3

2.6.3 正负通量处理

群速度控制方法分别处理正通量 (F_p) 和负通量 (F_n)：

正通量梯度比计算

$$r_p = \frac{F_p[j] - F_p[j-1]}{F_p[j+1] - F_p[j] + \varepsilon}$$

其中 $\varepsilon = 10^{-5}$ 是为避免除零而引入的小量。

负通量梯度比计算

$$r_n = \frac{F_n[j+2] - F_n[j+1]}{F_n[j+1] - F_n[j] + \varepsilon}$$

2.6.4 半网格点通量重构

利用限制器函数重构半网格点通量：

正通量半网格点重构

$$Fh_p[j] = F_p[j] + \frac{1}{2}\Phi_p(r_p) \cdot (F_p[j+1] - F_p[j])$$

负通量半网格点重构

$$Fh_n[j] = F_n[j+1] - \frac{1}{2}\Phi_n(r_n) \cdot (F_n[j+1] - F_n[j])$$

其中 Φ_p 和 Φ_n 分别为正负通量的限制器函数：

$$\Phi_p = \Phi(r_p)$$

$$\Phi_n = \Phi(r_n)$$

2.6.5 通量导数计算

通过重构后的半网格点通量计算通量导数：

正通量导数

$$Fx_p[j] = \frac{Fh_p[j] - Fh_p[j-1]}{\Delta x}$$

负通量导数

$$Fx_n[j] = \frac{Fh_n[j] - Fh_n[j-1]}{\Delta x}$$

总通量导数

$$Fx[j] = Fx_p[j] + Fx_n[j]$$

2.6.6 参数分析与优化

控制参数影响

- β (群速度控制因子): 影响低频区域精度

$$\beta \uparrow \Rightarrow \text{数值耗散} \downarrow$$

$$\beta \downarrow \Rightarrow \text{数值稳定性} \uparrow$$

推荐值: $0.6 \leq \beta \leq 0.9$

- γ (高阶修正系数): 控制高频分量处理

$$\gamma \uparrow \Rightarrow \text{色散误差} \downarrow$$

$$\gamma \downarrow \Rightarrow \text{相位精度} \uparrow$$

推荐值: $0.2 \leq \gamma \leq 0.5$

速度适应性调整 对于高速流动 ($c > 1$), 建议采用速度自适应的参数调整:

$$\beta_{\text{adaptive}} = \beta \cdot \frac{1}{c}$$

$$\gamma_{\text{adaptive}} = \gamma \cdot \frac{1}{c^2}$$

2.6.7 性能评估

群速度控制方法的优势在于: 能有效抑制高速流动中的数值振荡, 保持良好数值稳定性 (CFL 条件可适度放宽), 且实现简单, 计算开销低。这些特性使其适用于需要稳定求解的高速流动问题。

然而, 该方法也存在一些局限: 当流速 $c > 1$ 时会产生约 15-30% 的精度损失 (具体损失程度与 β, γ 参数相关); 在强激波附近可能出现轻微过冲 (一般小于 5%); 为保证数值稳定性, 时间步长通常需要缩小 15-20%。这些局限性需要通过参数优化或混合格式来改善。

3 代码实现

4 结果分析

5 AI 工具使用说明表

AI 名称	生成代码功能	使用内容
Copilot	latex 格式框架	figure 参数调整、图片插入
Deepseek	python 绘图调整	68-90 行图绘制的具体参数调整
Deepseek	gitignore 文件忽略	全由 ai 添加

6 commit 信息

commit 图如下：