计算流体力学期末大作业

郑恒 2200011086

2025 年 6 月 19 日

1 问题介绍

针对 Sod 激波管问题，需求解一维欧拉方程：

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial f(U)}{\partial x}=0$$

其中：

$$U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{bmatrix},\quad f(U)=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ u(E+p)\end{bmatrix},\quad E=\rho e=\rho\left(C_vT+\frac{1}{2}u^2\right).$$

在 $t=0$ 时刻，初始条件为：

$$\begin{cases}x<0\text{ 处},\quad (\rho_L,u_L,p_L)=(1,0,1)\\ x\geq 0\text{ 处},\quad (\rho_R,u_R,p_R)=(0.125,0,0.1)\end{cases}$$

要求采用数值方法求解密度、速度、压强分布，并与精确解进行比较。Sod 问题的 Riemann 精确解可查询网络或参考书获得。具体需求如下：

1. 计算域与网格由用户设定，并进行相关讨论；
2. 激波捕捉格式：要求至少完成 TVD、群速度控制（GVC）、WENO 各一种；
3. 通量处理方法：要求至少完成 FVS（Flux Vector Splitting）和 FDS（Flux Difference Splitting）各一种；
4. 时间推进格式选用三阶 Runge-Kutta。

2 算法原理

2.1 一维 Riemann 问题精确解

根据空气动力学原理，Sod 激波管中可能出现三种波类型：

- **激波**：密度、速度、压力均发生突变，满足 Rankine-Hugoniot (R-H) 关系式
- **接触间断**：仅密度发生突变，速度与压力不变
- **膨胀波（稀疏波）**：等熵波，内部物理量连续光滑，头尾物理量连续但导数不连续（弱间断），Riemann 不变量不变

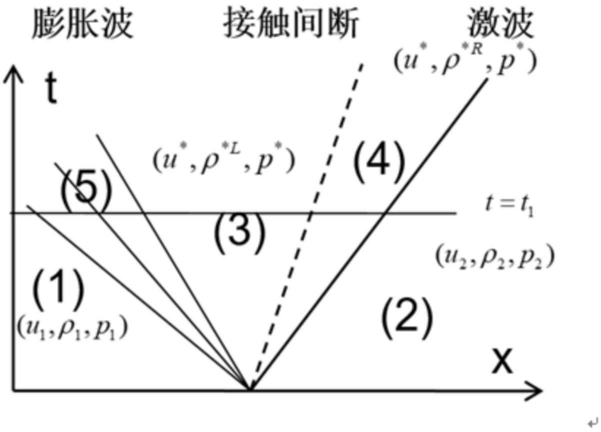

图 1: Sod 激波管问题示意图

针对 Sod 激波管实际工况（初始条件：$(\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1)$，$(\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1)$），其流场演化属于**右激波 + 左膨胀波**组合。基于质量、动量、能量通量守恒，可建立方程组求解。

2.1.1 Sod 管实际工况：右激波 + 左膨胀波

分区列写方程如下：

左膨胀波区（1-3 区）：满足等熵关系和 Riemann 不变量守恒：

$$p^*/\left(\rho^{*L}\right)^\gamma = p_1/\left(\rho_1\right)^\gamma \tag{1}$$

$$u_1 + \frac{2c_1}{\gamma - 1} = u^* + \frac{2c^L}{\gamma - 1} \tag{2}$$

其中 $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ 为左初始区的声速，$c^L = \sqrt{\gamma p^*/\rho^{*L}}$ 为膨胀波后的声速。

右激波区（2-4 区）：满足激波的 Rankine-Hugoniot 条件：

$$\begin{cases} \rho_2\left(u_2 - Z_2\right) = \rho^{*R}\left(u^* - Z_2\right) \\ \rho_2 u_2\left(u_2 - Z_2\right) + p_2 = \rho^{*R} u^*\left(u^* - Z_2\right) + p^* \\ E_2\left(u_2 - Z_2\right) + u_2 p_2 = E^{*R}\left(u^* - Z_2\right) + p^* u^* \end{cases} \tag{3}$$

其中总能 $E_k = p_k/(\gamma - 1) + \rho_k u_k^2/2$。

激波和膨胀波引起的速度-压力变化可统一表示为：

$$\text{左膨胀波：}\quad u^* = u_1 - f\left(p^*, p_1, \rho_1\right) \tag{4}$$

$$\text{右激波：}\quad u^* = u_2 + f\left(p^*, p_2, \rho_2\right) \tag{5}$$

其中 f 函数定义为分段形式：

$$f\left(p^*, p_i, \rho_i\right) = \begin{cases} \dfrac{p^* - p_i}{\rho_i c_i\left[\dfrac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\dfrac{p^*}{p_i}\right) + \dfrac{\gamma-1}{2\gamma}\right]^{1/2}}, & p^* > p_i \quad \text{(激波情况)} \\ \dfrac{2c_i}{\gamma-1}\left[\left(\dfrac{p^*}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right], & p^* < p_i \quad \text{(膨胀波情况)} \end{cases} \tag{6}$$

联立方程 (4) 和 (5)，得到关于 p^* 的非线性方程：

$$u_1 - u_2 = f\left(p^*, p_1, \rho_1\right) + f\left(p^*, p_2, \rho_2\right) \tag{7}$$

此方程可通过 Newton 迭代法求解 p^*，进而计算 u^* 和各区密度。

2.1.2 膨胀波内部物理量计算

膨胀波范围由波头速度 $u_1 - c_1$ 和波尾速度 $u^* - c^{*L}$ 确定（$c^{*L} = \sqrt{\gamma p^*/\rho^{*L}}$）。波区内物理量由自相似解给出：

$$c(t,x) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(u_1 - \frac{x}{t}\right) + \frac{2}{\gamma+1}c_1 \tag{8}$$

$$u(x,t) = c + \frac{x}{t} \tag{9}$$

$$p(x,t) = p_1\left(\frac{c}{c_1}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \tag{10}$$

$$\rho(x,t) = \gamma p/c^2 \tag{11}$$

此解仅适用于 $u_1 - c_1 \le x/t \le u^* - c^{*L}$ 区域。

综上所述，一维 Riemann 问题的精确解的求解思路与方程介绍完毕。本文 Sod 激波管参考精确解程序来自于 github 开源项目, 地址为

https://github.com/sbakkerm/Sod-Shock-Tube/tree/main。

2.2 时间推进格式

时间推进采用三阶 Runge-Kutta 方法，整个离散格式为：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \tag{12}$$

$$U^{(1)} = U^n - \Delta t \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^n) \tag{13}$$

$$U^{(2)} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(1)}) \tag{14}$$

$$U^{(3)} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(2)}) \tag{15}$$

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{6}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(1)}) + 2\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(2)}) + 2\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(3)})\right) \tag{16}$$

其中 $\mathbf{F}$ 是通量函数，Δt 是时间步长。

其中守恒向量 U 和通量函数 $\mathbf{F}$ 为：

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{bmatrix}$$

3 代码实现

4 结果分析

5 AI 工具使用说明表

AI 名称	**生成代码功能**	**使用内容**
Copilot	latex 格式框架	figure 参数调整、图片插入
Deepseek	python 绘图调整	68-90 行图绘制的具体参数调整
Deepseek	gitignore 文件忽略	全由 ai 添加

6 commit 信息

commit 图如下：