

计算流体力学期末大作业

郑恒 2200011086

2025 年 6 月 19 日

1 问题介绍

针对 Sod 激波管问题，需求解一维欧拉方程：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

其中：

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad f(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}, \quad E = \rho e = \rho \left(C_v T + \frac{1}{2} u^2 \right).$$

在 $t = 0$ 时刻，初始条件为：

$$\begin{cases} x < 0 \text{ 处, } (\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1) \\ x \geq 0 \text{ 处, } (\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1) \end{cases}$$

要求采用数值方法求解密度、速度、压强分布，并与精确解进行比较。Sod 问题的 Riemann 精确解可查询网络或参考书获得。具体需求如下：

1. 计算域与网格由用户设定，并进行相关讨论；
2. 激波捕捉格式：要求至少完成 TVD、群速度控制 (GVC)、WENO 各一种；
3. 通量处理方法：要求至少完成 FVS (Flux Vector Splitting) 和 FDS (Flux Difference Splitting) 各一种；
4. 时间推进格式选用三阶 Runge-Kutta。

2 算法原理

2.1 一维 Riemann 问题精确解

根据空气动力学原理, Sod 激波管中可能出现三种波类型:

- **激波:** 密度、速度、压力均发生突变, 满足 Rankine-Hugoniot (R-H) 关系式
- **接触间断:** 仅密度发生突变, 速度与压力不变
- **膨胀波 (稀疏波):** 等熵波, 内部物理量连续光滑, 头尾物理量连续但导数不连续 (弱间断), Riemann 不变量不变

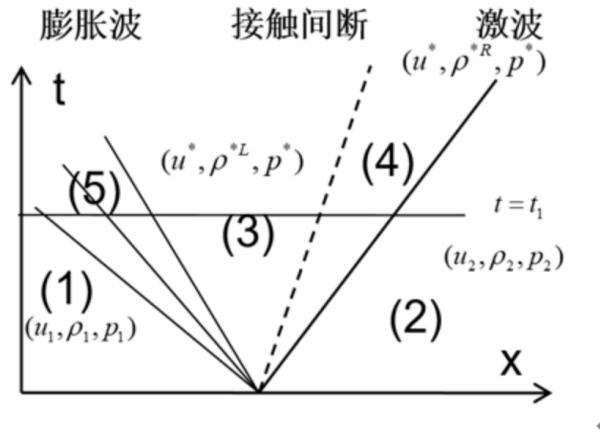


图 1: Sod 激波管问题示意图

针对 Sod 激波管实际工况(初始条件: $(\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1)$, $(\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1)$), 其流场演化属于右激波 + 左膨胀波组合。基于质量、动量、能量通量守恒, 可建立方程组求解。

2.1.1 Sod 管实际工况: 右激波 + 左膨胀波

分区列写方程如下:

左膨胀波区 (1-3 区): 满足等熵关系和 Riemann 不变量守恒:

$$p^*/(\rho^{*L})^\gamma = p_1/(\rho_1)^\gamma \quad (1)$$

$$u_1 + \frac{2c_1}{\gamma - 1} = u^* + \frac{2c^L}{\gamma - 1} \quad (2)$$

其中 $c_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ 为左初始区的声速, $c^L = \sqrt{\gamma p^*/\rho^{*L}}$ 为膨胀波后的声速。

右激波区 (2-4 区): 满足激波的 Rankine-Hugoniot 条件:

$$\begin{cases} \rho_2(u_2 - Z_2) = \rho^{*R}(u^* - Z_2) \\ \rho_2 u_2(u_2 - Z_2) + p_2 = \rho^{*R} u^*(u^* - Z_2) + p^* \\ E_2(u_2 - Z_2) + u_2 p_2 = E^{*R}(u^* - Z_2) + p^* u^* \end{cases} \quad (3)$$

其中总能 $E_k = p_k/(\gamma - 1) + \rho_k u_k^2/2$ 。

激波和膨胀波引起的速度-压力变化可统一表示为:

$$\text{左膨胀波: } u^* = u_1 - f(p^*, p_1, \rho_1) \quad (4)$$

$$\text{右激波: } u^* = u_2 + f(p^*, p_2, \rho_2) \quad (5)$$

其中 f 函数定义为分段形式:

$$f(p^*, p_i, \rho_i) = \begin{cases} \frac{p^* - p_i}{\rho_i c_i \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{p^*}{p_i} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right]^{1/2}}, & p^* > p_i \quad (\text{激波情况}) \\ \frac{2c_i}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p^*}{p_i} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right], & p^* < p_i \quad (\text{膨胀波情况}) \end{cases} \quad (6)$$

联立方程 (4) 和 (5), 得到关于 p^* 的非线性方程:

$$u_1 - u_2 = f(p^*, p_1, \rho_1) + f(p^*, p_2, \rho_2) \quad (7)$$

此方程可通过 Newton 迭代法求解 p^* , 进而计算 u^* 和各区密度。

2.1.2 膨胀波内部物理量计算

膨胀波范围由波头速度 $u_1 - c_1$ 和波尾速度 $u^* - c^{*L}$ 确定 ($c^{*L} = \sqrt{\gamma p^*/\rho^{*L}}$)。波区内物理量由自相似解给出：

$$c(t, x) = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(u_1 - \frac{x}{t} \right) + \frac{2}{\gamma + 1} c_1 \quad (8)$$

$$u(x, t) = c + \frac{x}{t} \quad (9)$$

$$p(x, t) = p_1 \left(\frac{c}{c_1} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (10)$$

$$\rho(x, t) = \gamma p / c^2 \quad (11)$$

此解仅适用于 $u_1 - c_1 \leq x/t \leq u^* - c^{*L}$ 区域。

综上所述，一维 Riemann 问题的精确解的求解思路与方程介绍完毕。
本文 Sod 激波管参考精确解程序来自于 github 开源项目，地址为
<https://github.com/sbakerm/Sod-Shock-Tube/tree/main>。

2.2 时间推进格式

时间推进采用三阶 Runge-Kutta 方法，整个离散格式为：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \quad (12)$$

$$U^{(1)} = U^n - \Delta t \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^n) \quad (13)$$

$$U^{(2)} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(1)}) \quad (14)$$

$$U^{(3)} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(2)}) \quad (15)$$

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{6} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(1)}) + 2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(2)}) + 2 \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(U^{(3)}) \right) \quad (16)$$

其中 \mathbf{F} 是通量函数， Δt 是时间步长。

其中守恒向量 U 和通量函数 \mathbf{F} 为：

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}$$

2.3 流通矢量分裂技术 (FVS)

目前，数值求解守恒型一维 Euler 方程的主要技术包括流通矢量分裂 (Flux Vector Splitting, FVS) 与流通差分分裂 (Flux Difference Splitting, FDS) 两类。

流通矢量分裂方法基于特征线方法，将方程的解表示为特征向量的组合。该方法将代表质量、动量和能量的流通矢量按照雅克比矩阵的特征值进行分裂，并据此构造迎风格式或激波捕捉格式。

流通差分分裂方法则是对流通矢量的导数进行分裂：首先运用差分格式构造网格半点处的守恒变量，再利用各类近似 Riemann 解构造通量。

2.3.1 基本变量与方程

守恒变量 \mathbf{U} 与流通矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 定义为：

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{w_2^2}{w_1} + p \\ \frac{w_2}{w_1}(w_3 + p) \end{bmatrix}$$

总能量 E 满足：

$$E = \rho e = \rho \left(c_v T + \frac{1}{2} u^2 \right)$$

考虑完全气体状态方程 $p = \rho RT$ ，压力可表示为：

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) = (\gamma - 1) \left(w_3 - \frac{1}{2} \frac{w_2^2}{w_1} \right)$$

流通矢量可简化为：

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{3 - \gamma}{2} \frac{w_2^2}{w_1} + (\gamma - 1) w_3 \\ \frac{\gamma w_2 w_3}{w_1} - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{w_2^3}{w_1^2} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Jacobian 矩阵与特征值

守恒变量的微分关系:

$$\begin{cases} dw_1 = d\rho \\ dw_2 = u d\rho + \rho du \\ dw_3 = \frac{dp}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} u^2 d\rho + \rho u du \end{cases}$$

Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma - 3}{2} \frac{w_2^2}{w_1^2} & (3 - \gamma) \frac{w_2}{w_1} & \gamma - 1 \\ -\frac{\gamma w_2 w_3}{w_1^2} + (\gamma - 1) \frac{w_2^3}{w_1^3} & \frac{\gamma w_3}{w_1} - \frac{3(\gamma - 1)}{2} \frac{w_2^2}{w_1^2} & \frac{\gamma w_2}{w_1} \end{bmatrix}$$

声速 c 满足:

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma(\gamma - 1) \left(\frac{w_3}{w_1} - \frac{1}{2} \frac{w_2^2}{w_1^2} \right)$$

Jacobian 矩阵的特征值为:

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c$$

当状态方程 $p = \rho g(e)$ 时, 流通矢量满足一次齐次性:

$$\mathbf{F}(\alpha \mathbf{U}) = \alpha \mathbf{F}(\mathbf{U}) \quad \forall \alpha$$

对 α 求导并令 $\alpha = 1$ 得:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{A}\mathbf{U}$$

2.3.3 分裂方法原理

在构造耗散型格式时, 需要将流通矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 按照特征值进行分裂。

对单波方程流通量的分裂为:

$$f^\pm = c^\pm u, \quad c^\pm = \frac{c \pm |c|}{2}, \quad f = f^+ + f^-$$

对流通矢量，通过 Jacobian 矩阵特征值分裂：

$$\lambda_k = \lambda_k^+ + \lambda_k^-, \quad \lambda_k^+ \geq 0, \quad \lambda_k^- \leq 0$$

分裂后的特征值对角矩阵：

$$\Lambda^\pm = \begin{bmatrix} \lambda_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^\pm \end{bmatrix}$$

定义分裂：

$$\mathbf{A}^\pm = S^{-1} \Lambda^\pm S, \quad \mathbf{F}^\pm = \mathbf{A}^\pm \mathbf{U}$$

满足 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^-$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-$ 。

Steger-Warming (S-W) 分裂法：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm |\lambda_k|}{2}$$

为避免奇点可修正为：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm \sqrt{\lambda_k^2 + \varepsilon^2}}{2}$$

Lax-Friedrichs (L-F) 分裂法：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm \lambda^*}{2}$$

$$\mathbf{F}^+ = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \lambda^* \mathbf{U}), \quad \mathbf{F}^- = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \lambda^* \mathbf{U})$$

其中 λ^* 可取局部值 $|u| + c$ 或全局 $\max(|u| + c)$ 。

van Leer 分裂法： 基于马赫数 $\text{Ma} = u/c$ 的分裂：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho c \text{Ma} \\ \rho c^2 \left(\text{Ma}^2 + \frac{1}{\gamma} \right) \\ \rho c^3 \text{Ma} \left(\frac{1}{2} \text{Ma}^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_{\text{mas}} \\ f_{\text{mom}} \\ f_{\text{ene}} \end{bmatrix}$$

分裂策略：

1. $\text{Ma} \geq 1$: $\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^- = 0$
2. $\text{Ma} \leq -1$: $\mathbf{F}^+ = 0$, $\mathbf{F}^- = \mathbf{F}$
3. $|\text{Ma}| \leq 1$: 按马赫数分裂

分量分裂:

$$\begin{aligned} f_{\text{mas}}^\pm &= \pm \frac{1}{4} \rho c (1 \pm \text{Ma})^2 \\ f_{\text{mom}}^\pm &= f_{\text{mas}}^\pm \frac{2c}{\gamma} \left[\frac{(\gamma - 1)}{2} \text{Ma} \pm 1 \right] \\ f_{\text{ene}}^\pm &= \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2 - 1)} \frac{(f_{\text{mom}}^\pm)^2}{f_{\text{mas}}^\pm} \end{aligned}$$

统一矢量形式:

$$\mathbf{F}^\pm = \pm \frac{1}{4} \rho c (1 \pm \text{Ma})^2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2c}{\gamma} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma} \pm 1 \right) \\ \frac{2c^2}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{\gamma - 1}{2} \text{Ma} \pm 1 \right)^2 \end{bmatrix}$$

2.4 流通差分分裂技术 (FDS)

2.4.1 基本流程

流通差分分裂技术 (FDS) 的基本流程可分为以下三个步骤:

1. 运用各类差分格式, 计算在格点间同一位置 $(j + \frac{1}{2})$ 的左右数值守恒通量 $U_{j+\frac{1}{2}}^L$ 与 $U_{j+\frac{1}{2}}^R$
2. 运用近似 Riemann 解, 计算 $F_{j+\frac{1}{2}} = F(U_{j+\frac{1}{2}}^L, U_{j+\frac{1}{2}}^R)$
3. 进行差分重构:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_j = \frac{F_{j+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

2.4.2 Roe 格式 - 单方程情况

在 FDS 类方法中应用最广泛的近似 Riemann 解是 Roe 格式。

对于一般非线性单波方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

可化为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其中 $a(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}$ 为非线性项。

将该项线性化, 目标是在 $[j, j+1]$ 区间内, 采用平均变化率代替变化的 $a(u)$ 。根据 Lagrange 中值定理, 在 $[u_L, u_R]$ 内必有一点 u_{Roe} , 该点的斜率为区间平均变化率:

$$\tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} = a(u_{Roe}) = \frac{f(u_{j+1}) - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j}$$

考虑一阶迎风差分, 根据 $\tilde{a}_{j+\frac{1}{2}}$ 的符号构造数值通量:

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_j & \tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} > 0 \\ f_{j+1} & \tilde{a}_{j+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}$$

或写为:

$$f_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [f_j + f_{j+1}] - \frac{1}{2} |\tilde{a}_{j+\frac{1}{2}}| (u_{j+1} - u_j)$$

2.4.3 Roe 格式 - 方程组情况

对于一般的双曲守恒律方程组:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0$$

可化为:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

其中 Jacobian 矩阵 $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}$ 。

在 $[j, j+1]$ 或 $[R, L]$ 区间内，寻找一个矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ 作为平均变化率矩阵，满足：

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$ 可通过相似变换进行对角化

则原方程组可化为常矩阵系数方程：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

数值通量为：

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)] - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

其中 $|\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)| = \mathbf{S}^{-1} |\Lambda| \mathbf{S}$ 。

2.4.4 Roe 矩阵构造

由于原始流通矢量 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 与守恒矢量 \mathbf{U} 不满足二次齐次函数关系，有两种构造思路：

1. **直接寻找 \mathbf{U}_{Roe}** : 在 $[\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R]$ 内寻找 \mathbf{U}_{Roe} 使得 $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}_{Roe})}{\partial \mathbf{U}_{Roe}}$ 。但实际实现困难。
2. **坐标变换法**: 若 \mathbf{F} 是某个自变量的二次齐函数，则区间中点即为 Roe 点。通过坐标变换将 $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ 化为齐次函数：

引入新变量：

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \rho^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix}$$

则有：

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} w_1 w_2 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} w_1 w_3 + \frac{1+\gamma}{2\gamma} w_2^2 \\ w_3 w_2 \end{bmatrix}$$

增长矩阵为:

$$\mathbf{C}(\mathbf{W}) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_2 & w_1 & 0 \\ \frac{\gamma-1}{\gamma}w_3 & 2w_2 - \frac{\gamma-1}{\gamma}w_2 & \frac{\gamma-1}{\gamma}w_1 \\ 0 & w_3 & w_2 \end{bmatrix}$$

在 $[R, L]$ 区间内有:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \mathbf{C}(\bar{\mathbf{W}})(\mathbf{W}_R - \mathbf{W}_L)$$

其中 $\bar{\mathbf{W}} = (\mathbf{W}_R + \mathbf{W}_L)/2$ 为 Roe 点, 对应的守恒矢量为:

$$\mathbf{U}_{Roe} = \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}(\bar{\mathbf{W}})$$

平均增长矩阵为:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}})$$

Roe 平均变量计算公式:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \left[\frac{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}{2} \right]^2 \\ \bar{u} &= \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \bar{H} &= \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \end{aligned}$$

其他量计算:

$$\bar{p} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\bar{\rho}\bar{H} - \frac{1}{2}\bar{\rho}\bar{u}^2 \right), \quad \bar{c}^2 = (\gamma-1) \left(\bar{H} - \frac{\bar{u}^2}{2} \right)$$

2.4.5 Roe 格式计算步骤

设 n 时刻所有网格点物理量已知, 构造 $\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right)_j$:

1. 运用差分格式计算 $j + \frac{1}{2}$ 处的左右数值守恒通量 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$ 与 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^R$
2. 采用 Roe 平均公式计算平均守恒矢量 $\bar{\mathbf{U}}$, 获得 $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{H}, \bar{p}, \bar{c}$ 值
3. 将 Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ 特征分解: $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\Lambda\mathbf{S}$

4. 计算 $|\tilde{\mathbf{A}}| = \mathbf{S}^{-1}|\Lambda|\mathbf{S}$, 其中 $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$

5. 进行熵修正（接近零的特征值处增加耗散）：

$$f(\lambda) = \begin{cases} |\lambda| & |\lambda| > \varepsilon \\ \frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon} & |\lambda| \leq \varepsilon \end{cases}$$

6. 计算数值通量：

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_L)] - \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{A}}| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

7. 差分重构：

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right)_j = \frac{\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

2.5 激波捕捉格式

在可压缩流动的流场中可能存在激波（或间断）。Euler 方程描述的流场中激波是 Reynolds 数趋近无穷大的极限情况，此时激波厚度为零。数值计算需要准确捕捉激波位置、速度和满足激波跳跃条件的流动参数。激波存在导致流场特征尺度差异大（无黏激波厚度为零，流场特征长度有限），流动参数穿过激波有间断，给数值计算带来困难。

2.5.1 非物理振荡根源

激波数值模拟中非物理振荡的主要根源：

1. 粘性不足：发展出人工粘性方法 (Artificial Viscosity)
2. 差分格式失去单调性：发展了 TVD (Total Variation Diminishing Methods) 等保单调限制器方法
3. 色散误差导致间断色散：发展了群速度控制方法 (GVC)、耗散比拟方法

其他高效激波捕捉格式包括 NND (Non-oscillatory, Non-free-parameters Dissipative Difference Scheme)、ENO (Essentially Non-oscillatory)、WENO (Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme) 等。

2.5.2 TVD 格式 (Total Variation Diminishing Methods)

TVD 意为“总变差不增”，其主要思想是改造现有格式使其符合 Harten 条件：

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C(u_{j+1}^n - u_j^n) - D(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (17)$$

其中需满足 $C \geq 0, D \geq 0, C + D \leq 1$ 。

基于一阶迎风格式，增加修正项并使用限制函数，在格点 $j + \frac{1}{2}$ 处的差分格式为：

$$\text{正通量情况 } (a > 0): \quad u_{j+\frac{1}{2}}^L = u_j + \varphi_j^L \cdot \frac{u_{j+1} - u_j}{2} \quad (18)$$

$$\text{负通量情况 } (a < 0): \quad u_{j-\frac{1}{2}}^R = u_j - \varphi_j^R \cdot \frac{u_j - u_{j-1}}{2} \quad (19)$$

其中：

$$\begin{aligned} \varphi_j^L &= \varphi(r_j^L), & r_j^L &= \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j} \\ \varphi_j^R &= \varphi(r_j^R), & r_j^R &= \frac{u_{j+1} - u_j}{u_j - u_{j-1}} \end{aligned}$$

限制器 (Limiter) $\varphi(r)$ 通过判断区间光滑程度，平衡格式的光滑性和低耗散特性。

本文选用 van Leer 型限制器：

$$\varphi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|} = \frac{|r| + r}{|r| + 1} \quad (20)$$

该限制函数光滑性良好。

2.5.3 WENO 格式 (Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme)

WENO 格式特点：保持高精度的同时具有优异的鲁棒性 (Robustness)。

基本构造思路

1. 高精度逼近 $\partial U / \partial x$ 需多个基架点
2. 基架点内含激波会导致数值振荡

3. 将基架点分为多个模板(组), 各模板独立计算导数逼近
4. 基于模板光滑程度设定权重
5. 加权平均多个差分结果: 光滑度高的模板权重高, 含间断的模板权重趋于零

5 阶 WENO 格式 针对单波方程(正通量 $a > 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad f(u) = au, \quad a > 0 \quad (21)$$

数值通量计算:

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{\text{WENO}} = \omega_1 f_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} + \omega_2 f_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} + \omega_3 f_{j+\frac{1}{2}}^{(3)} \quad (22)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} = \frac{1}{3}f_{j-2} - \frac{7}{6}f_{j-1} + \frac{11}{6}f_j \quad (23)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} = -\frac{1}{6}f_{j-1} + \frac{5}{6}f_j + \frac{1}{3}f_{j+1} \quad (24)$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{(3)} = \frac{1}{3}f_j + \frac{5}{6}f_{j+1} - \frac{1}{6}f_{j+2} \quad (25)$$

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}, \quad \alpha_k = \frac{C_k}{(\varepsilon + \text{IS}_k)^p}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (26)$$

$$p = 2, \quad \varepsilon = 10^{-6}, \quad C_1 = \frac{1}{10}, \quad C_2 = \frac{6}{10}, \quad C_3 = \frac{3}{10} \quad (27)$$

光滑度量因子:

$$\text{IS}_1 = \frac{1}{4}(f_{j-2} - 4f_{j-1} + 3f_j)^2 + \frac{13}{12}(f_{j-2} - 2f_{j-1} + f_j)^2 \quad (28)$$

$$\text{IS}_2 = \frac{1}{4}(f_{j-1} - f_{j+1})^2 + \frac{13}{12}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1})^2 \quad (29)$$

$$\text{IS}_3 = \frac{1}{4}(3f_j - 4f_{j+1} + f_{j+2})^2 + \frac{13}{12}(f_j - 2f_{j+1} + f_{j+2})^2 \quad (30)$$

差分重构:

$$\frac{\partial f_j^{\text{WENO}}}{\partial x} = \frac{f_{j+\frac{1}{2}}^{\text{WENO}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{\text{WENO}}}{\Delta x} \quad (31)$$

负通量情况($a < 0$)通过对称性处理: 将下标" $j+k$ "改为" $j-k$ ", 差分重构方式不变。

2.6 群速度控制 (GVC) 方法

2.6.1 方法原理与背景

在激波数值模拟中，色散误差会导致数值解在间断处出现非物理振荡。群速度控制 (Group Velocity Control, GVC) 方法通过引入限制器函数调节通量梯度，抑制色散误差引起的数值振荡，提高数值解的稳定性与准确性。

方法核心思想是：在通量重构过程中引入基于通量梯度比的限制器函数，通过可调节参数 β 和 γ 控制群速度效应，平衡高阶精度与数值稳定性。该方法适用于高速流动 ($c > 1$) 情况下的激波捕捉问题。

2.6.2 群速度控制限制器函数

群速度控制的核心是下列限制器函数：

$$\Phi(r) = \frac{r + \beta|r|}{1 + \beta r + \gamma r^2}$$

其中：

- r 为通量梯度比，衡量局部解的平滑程度
- β 为群速度控制因子，通常取 0.8
- γ 为高阶修正系数，通常取 0.3

2.6.3 正负通量处理

群速度控制方法分别处理正通量 (F_p) 和负通量 (F_n)：

正通量梯度比计算

$$r_p = \frac{F_p[j] - F_p[j-1]}{F_p[j+1] - F_p[j] + \varepsilon}$$

其中 $\varepsilon = 10^{-5}$ 是为避免除零而引入的小量。

负通量梯度比计算

$$r_n = \frac{F_n[j+2] - F_n[j+1]}{F_n[j+1] - F_n[j] + \varepsilon}$$

2.6.4 半网格点通量重构

利用限制器函数重构半网格点通量：

正通量半网格点重构

$$Fh_p[j] = F_p[j] + \frac{1}{2}\Phi_p(r_p) \cdot (F_p[j+1] - F_p[j])$$

负通量半网格点重构

$$Fh_n[j] = F_n[j+1] - \frac{1}{2}\Phi_n(r_n) \cdot (F_n[j+1] - F_n[j])$$

其中 Φ_p 和 Φ_n 分别为正负通量的限制器函数：

$$\Phi_p = \Phi(r_p)$$

$$\Phi_n = \Phi(r_n)$$

2.6.5 通量导数计算

通过重构后的半网格点通量计算通量导数：

正通量导数

$$Fx_p[j] = \frac{Fh_p[j] - Fh_p[j-1]}{\Delta x}$$

负通量导数

$$Fx_n[j] = \frac{Fh_n[j] - Fh_n[j-1]}{\Delta x}$$

总通量导数

$$Fx[j] = Fx_p[j] + Fx_n[j]$$

2.6.6 参数分析与优化

控制参数影响

- β (群速度控制因子): 影响低频区域精度

$$\beta \uparrow \Rightarrow \text{数值耗散} \downarrow$$

$$\beta \downarrow \Rightarrow \text{数值稳定性} \uparrow$$

推荐值: $0.6 \leq \beta \leq 0.9$

- γ (高阶修正系数): 控制高频分量处理

$$\gamma \uparrow \Rightarrow \text{色散误差} \downarrow$$

$$\gamma \downarrow \Rightarrow \text{相位精度} \uparrow$$

推荐值: $0.2 \leq \gamma \leq 0.5$

速度适应性调整 对于高速流动 ($c > 1$), 建议采用速度自适应的参数调整:

$$\begin{aligned}\beta_{\text{adaptive}} &= \beta \cdot \frac{1}{c} \\ \gamma_{\text{adaptive}} &= \gamma \cdot \frac{1}{c^2}\end{aligned}$$

2.6.7 性能评估

群速度控制方法的优势在于: 能有效抑制高速流动中的数值振荡, 保持良好数值稳定性 (CFL 条件可适度放宽), 且实现简单, 计算开销低。这些特性使其适用于需要稳定求解的高速流动问题。

然而, 该方法也存在一些局限: 当流速 $c > 1$ 时会产生约 15-30% 的精度损失 (具体损失程度与 β, γ 参数相关); 在强激波附近可能出现轻微过冲 (一般小于 5%); 为保证数值稳定性, 时间步长通常需要缩小 15-20%。这些局限性需要通过参数优化或混合格式来改善。

2.7 特征重构方法在 FVS 框架中的应用与影响

2.7.1 应用方法

在流通矢量分裂 (FVS) 框架中应用特征重构方法的核心是通过以下步骤实现:

1. 特征场投影:

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{W}$$

其中 \mathbf{L} 为左特征向量矩阵, \mathbf{W} 为特征变量。

2. 特征空间重构:

$$\mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^L = \mathbf{W}_j + \frac{1}{2}\phi_j^L(\mathbf{W}_j - \mathbf{W}_{j-1})$$

$$\mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^R = \mathbf{W}_{j+1} - \frac{1}{2}\phi_{j+1}^R(\mathbf{W}_{j+1} - \mathbf{W}_j)$$

其中 ϕ 为特征空间限制器函数。

3. 物理空间反投影:

$$\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^L = \mathbf{R}\mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^L, \quad \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^R = \mathbf{R}\mathbf{W}_{j+\frac{1}{2}}^R$$

\mathbf{R} 为右特征向量矩阵。

4. FVS 通量分裂:

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}^+(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^L) + \mathbf{F}^-(\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^R)$$

5. 通量梯度计算:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

3 代码实现

模拟激波管的代码实现如下:

首先是基本参数设定和边界条件设定:

```
1 # 管道 特征长度 (x = [-L/2, L/2])
2
3 L = 1.0
4
5 # 流动 参数
6 Gamma = 1.4 # 比热比
7 R = 286.9 # 气体常数 (J/kg · K)
8 Cv = R / (Gamma - 1) # 定容比热容
```

```

9 Cp = (Gamma * R) / (Gamma - 1) # 定压比热容
10
11 # 网格生成
12 N = 201 # x方向网格数
13 xp = np.linspace(-L / 2, L / 2, N) # 网格点的x坐标
14 dx = L / (N - 1) # 网格间距
15
16 xp_mid = N // 2 # x=0位置的网格索引(中点)
17
18 # 物理量数组初始化
19 u_arr = np.zeros(N) # 速度数组
20 rho_arr = np.zeros(N) # 密度数组
21 p_arr = np.zeros(N) # 压力数组
22
23 # 辅助数组
24 rho = np.zeros(N)
25 u = np.zeros(N)
26 p = np.zeros(N)
27 E = np.zeros(N)
28 T = np.zeros(N)
29 c = np.zeros(N)
30
31 # 时间步长
32 dt = 0.001
33
34 # 最大计算步数
35 max_step = 200
36
37 # 最大模拟时间
38 max_tot_time = max_step * dt
39
40 # 设置初始条件
41 # 当x < 0时, (左侧: ul, rhol, pl) = (0.0, 1.0, 1.0)

```

```

42 # 当 x >= 0 时, (右侧: ur, rho_r, pr) = (0.0, 0.125, 0.1)
43 u_arr[0:xp_mid-1] = 0.0
44 rho_arr[0:xp_mid-1] = 1.0
45 p_arr[0:xp_mid-1] = 1.0
46
47 u_arr[xp_mid-1:] = 0.0
48 rho_arr[xp_mid-1:] = 0.125
49 p_arr[xp_mid-1:] = 0.1

```

Listing 1: 基础参数设定和边界条件

其中边界条件设定由题意, 左边界为 $P_1 = 1, \rho_1 = 1$, 右边界为 $P_2 = 0.1, \rho_2 = 0.125$ 。网格数为 $N = 200$, 时间步长为 $\Delta t = 0.001s$, 总时间为 $T = 0.2s$ 。

接下来是数据初始化和算法预处理选择:

```

1 # 预处理: 算法选择设置
2 # 通量分裂方法选择
3 class FluxSplittingMethod(Enum):
4     FVS = 1    # 通量向量分裂
5     FDS = 2    # 通量差分裂
6 # 通量向量分裂方法FVS选择
7 class FVSMETHODS(Enum):
8     STEGER_WARMING = 1    # Steger-Warming方法
9     LAX_FRIEDRICH = 2    # Lax-Friedrich方法
10    VAN_LEER = 3          # Van Leer方法
11 # 通量差分裂方法FDS选择
12 class FDMSMETHODS(Enum):
13     ROE = 1    # ROE格式
14 # 空间离散格式选择
15 class SpatialDiscretizationType(Enum):
16     SHOCK_CAPTURING = 1    # 激波捕捉格式
17 # 激波捕捉格式选择
18 class ShockCapturingScheme(Enum):
19     TVD_VAN_LEER = 1    # TVD格式(Van Leer限制器)
20     WENO = 2            # 5阶WENO格式

```

```

21 GVC = 3          #群速度控制格式
22
23
24 # 指定通量分裂方法
25 # 1 - 通量向量分裂(FVS)
26 # 2 - 通量差分裂(FDS)
27 flag_flu_spl = FluxSplittingMethod.FVS.value
28
29 # FVS方法家族选择
30 # 1 - Steger-Warming (S-W)
31 # 2 - Lax-Friedrich (L-F)
32 # 3 - Van Leer
33 flag_fvs_met = FVSMETHODS.STEGER_WARMING.value
34
35 # 指定通量重构方法
36 # 1 - 直接重构(针对F(U))
37 # 2 - 特征重构
38 flag_flu_rec = 1
39
40 # FDS方法家族选择(FDS-ROE格式)
41 flag_fds_met = FDSDMETHODS.ROE.value
42
43 # 指定高分辨率通量空间离散格式
44 flag_spa_typ = SpatialDiscretizationType.SHOCK_CAPTURING.
    value # 激波捕捉格式
45
46 # 激波捕捉格式类型选择
47 flag_scs_typ = ShockCapturingScheme.WENO.value
48
49 #数组初始化
50 lambda_arr = np.zeros(3) # 特征值矩阵
51 lambda_p_arr = np.zeros(3) # 正特征值矩阵
52 lambda_n_arr = np.zeros(3) # 负特征值矩阵

```

```

53
54 # 初始化解向量数组
55 U = np.zeros((N, 3)) # 守恒变量向量
56 F_p = np.zeros((N, 3)) # 正通量向量
57 F_n = np.zeros((N, 3)) # 负通量向量
58 Fx = np.zeros((N, 3)) # 通量散度项
59 Fx_p = np.zeros((N, 3)) # 正通量散度项
60 Fx_n = np.zeros((N, 3)) # 负通量散度项
61
62 # 半网格点通量数组
63 Fh_p = np.zeros((N - 1, 3)) # (j + 1/2)半网格点正通量向量
64 Fh_n = np.zeros((N - 1, 3)) # (j + 1/2)半网格点负通量向量
65
66 # 计算初始密度、速度、压力、温度、声速和守恒变量
67 for i in range(N):
68     # 从数组获取当前网格点的值
69     rho_val = rho_arr[i]
70     u_val = u_arr[i]
71     p_val = p_arr[i]
72
73     # 计算温度 (理想气体状态方程)
74     T_val = p_val / (rho_val * R)
75
76     # 计算声速 (等熵关系)
77     c_val = np.sqrt(Gamma * p_val / rho_val)
78
79     # 计算总能量 (内能 + 动能)
80     E_val = rho_val * ((Cv * T_val) + (0.5 * u_val * u_val))
81         )
82
83     # 存储守恒变量
84     # U = [密度, 动量, 总能量]
85     U[i, 0] = rho_val # 密度 (kg/m3)

```

```

85     U[i, 1] = rho_val * u_val # 动量 (kg/m2 · s)
86     U[i, 2] = E_val # 总能量 (J/m3)
87
88     # 存储热力学量
89     T[i] = T_val
90     c[i] = c_val

```

Listing 2: 算法格式预处理

其中主要是通过选择不同的 flag 参数来选择不同的算法格式进行计算。

接下来是主循环部分，进行时间推进和数据更新：

```

1 # 开始计算和时间步进
2 # 实际计算时间
3 t = 0.0
4 cnt_step = 0
5
6 # 主计算循环
7 while cnt_step < max_step:
8
9     # 更新时间
10    t += dt
11    cnt_step += 1
12
13    # 时间离散格式选择三阶TVD龙格-库塔法
14    if flag_fiu_spl == 1:
15        # 1 - 通量向量分裂法 (FVS)
16        F_p, F_n = Flux_Vect_Split(U, N, Gamma, Cp, Cv, R,
17                                      flag_fvs_met)
18        _, _, _, _, Fx, _, _ = Diff_Cons(N, dx, F_p, F_n,
19                                           flag_spa_typ, flag_scs_typ)
20
21    # 第一步: U1 = U^n + Δt * Q(U^n)
22    U_1 = U + (dt * ((-1) * Fx))

```

```

22      # 使用 U1 计算 Q(U1)
23      F_p_1, F_n_1 = Flux_Vect_Split(U_1, N, Gamma, Cp,
24          Cv, R, flag_fvs_met)
25      _, _, _, _, Fx_1, _, _ = Diff_Cons(N, dx, F_p_1,
26          F_n_1, flag_spa_typ, flag_scs_typ)
27
28      # 第二步: U2 = (3/4)U^n + (1/4)U1 + (1/4)Δt * Q(U1)
29      U_2 = ((3 / 4) * U) + ((1 / 4) * U_1) + (((1 * dt)
30          / 4) * ((-1) * Fx_1))
31
32      # 使用 U2 计算 Q(U2)
33      F_p_2, F_n_2 = Flux_Vect_Split(U_2, N, Gamma, Cp,
34          Cv, R, flag_fvs_met)
35      xs_new, xt_new, Fh_p, Fh_n, Fx_2, Fx_p, Fx_n =
36          Diff_Cons(N, dx, F_p_2, F_n_2, flag_spa_typ,
37          flag_scs_typ)
38
39      # 最终更新: U^{n+1} = (1/3)U^n + (2/3)U2 + (2/3)Δt
40          * Q(U2)
41      U = ((1 / 3) * U) + ((2 / 3) * U_2) + (((2 / 3) *
42          dt) * ((-1) * Fx_2))
43
44      elif flag_fiu_spl == 2:
45          xs_new, xt_new, Fx = Flux_Diff_Split(U, N, dx,
46              Gamma, Cp, Cv, R, flag_fds_met, flag_spa_typ,
47              flag_scs_typ)
48
49          # 第一步: 计算中间解 U_1
50          U_1 = U + (dt * (-1 * Fx))
51
52          # 使用 U_1 再次计算通量
53          _, _, Fx_1 = Flux_Diff_Split(U_1, N, dx, Gamma, Cp,
54              Cv, R, flag_fds_met, flag_spa_typ, flag_scs_typ)

```

```

44
45      # 第二步：计算中间解U_2
46      U_2 = ((3 / 4) * U) + ((1 / 4) * U_1) + ((1 / 4) *
47          dt * (-1 * Fx_1))
48
49      # 使用U_2再次计算通量
50      _, _, Fx_2 = Flux_Diff_Split(U_2, N, dx, Gamma, Cp,
51          Cv, R, flag_fds_met, flag_spa_typ, flag_scs_typ)
52
53      # 最终更新：计算新时间步的解
54      U = ((1 / 3) * U) + ((2 / 3) * U_2) + ((2 / 3) * dt
55          * (-1 * Fx_2))
56
57      # 保存时间t_end时刻的最终解U
58      U_end = U.copy()
59      t_end = t
60
61      # 计算时间t_end时刻的最终物理量
62      # 根据守恒变量U计算rho, u, E, T, p, c, H
63      rho_end = U_end[:, 0]           # 密度
64      u_end = U_end[:, 1] / rho_end  # 速度
65      E_end = U_end[:, 2]           # 单位质量总内能
66      # 计算温度：T = (e_total - 0.5*u^2) / Cv
67      T_end = (E_end / rho_end - 0.5 * u_end**2) / Cv
68      # 计算压力：p = RT
69      p_end = rho_end * R * T_end
70      # 计算声速：c = sqrt(p / rho_end)
71      c_end = np.sqrt(Gamma * p_end / rho_end)
72      # 计算焓：H = 0.5*u^2 + Cp*T
73      H_end = 0.5 * u_end**2 + Cp * T_end
74      # 计算内能：e = E/ - 0.5*u^2
75      e_end = E_end / rho_end - 0.5 * u_end**2

```

Listing 3: 主循环部分

其中采用了三阶 Runge-Kutta 方法进行时间推进，计算每个时间步的守恒量和通量。然后根据之前选择的 flag 参数，进入不同的分支计算 F_x 。比如如果 flag_flu_spl 为 1，则使用通量矢量分裂法 Flux_Vect_Split 进行计算。如果 flag_flu_spl 为 2，则使用流通差分分裂法 Flux_Diff_Split 计算。

给出通量矢量分裂法的具体实现：

```

1 # 通量向量分裂方法(FVS)通用函数(Steger-Warming,Lax-Friedrich
2 , Van Leer)
3 def Flux_Vect_Split(U, N, Gamma, Cp, Cv, R, flag_fvs_met):
4     if flag_fvs_met == 1:
5         # FVS - Steger-Warming (S-W)方法
6
7         # 初始化变量
8         F_p = np.zeros((N, 3)) # 正通量分量
9         F_n = np.zeros((N, 3)) # 负通量分量
10        em = 1e-3 # 小量防止除零
11
12        for i in range(N):
13            # 计算密度、速度、温度、压力、声速
14            rho = U[i, 0]
15            u = U[i, 1] / rho
16            E = U[i, 2]
17            # 计算温度: T = (e_total - 0.5*u^2) / Cv
18            T = (E / rho - 0.5 * u ** 2) / Cv
19            p = rho * R * T
20            c = np.sqrt(Gamma * p / rho)
21
22            # 计算特征值
23            lambda_vals = np.array([u, u - c, u + c])
24
25            # 分裂特征值(S-W方法)
26            sqrt_term = np.sqrt(lambda_vals ** 2 + em ** 2)
lambda_p = (lambda_vals + sqrt_term) / 2

```

```

27 lambda_n = (lambda_vals - sqrt_term) / 2
28
29 # 计算F+和F-
30 # 计算w项
31 w_p = ((3 - Gamma) * (lambda_p[1] + lambda_p
32 [2]) * c ** 2) / (2 * (Gamma - 1))
33 w_n = ((3 - Gamma) * (lambda_n[1] + lambda_n
34 [2]) * c ** 2) / (2 * (Gamma - 1))
35
36 # 计算正通量分量
37 F_p[i, 0] = (rho / (2 * Gamma)) * (2 * (Gamma -
38 1) * lambda_p[0] + lambda_p[1] + lambda_p
39 [2])
40 F_p[i, 1] = (rho / (2 * Gamma)) * (
41 2 * (Gamma - 1) * lambda_p[0] * u +
42 lambda_p[1] * (u - c) +
43 lambda_p[2] * (u + c))
44 F_p[i, 2] = (rho / (2 * Gamma)) * ((Gamma - 1)
45 * lambda_p[0] * u ** 2 + (lambda_p[1] * (u -
46 c) ** 2) / 2 + (
47 lambda_p[2] * (u + c) ** 2) / 2 +
48 w_p)
49
50 # 计算负通量分量
51 F_n[i, 0] = (rho / (2 * Gamma)) * (2 * (Gamma -
52 1) * lambda_n[0] + lambda_n[1] + lambda_n
53 [2])
54 F_n[i, 1] = (rho / (2 * Gamma)) * (
55 2 * (Gamma - 1) * lambda_n[0] * u +
56 lambda_n[1] * (u - c) +
57 lambda_n[2] * (u + c))
58 F_n[i, 2] = (rho / (2 * Gamma)) * ((Gamma - 1)
59 * lambda_n[0] * u ** 2 + (lambda_n[1] * (u -
60 c) ** 2) / 2 + (
61 lambda_n[2] * (u + c)) / 2)

```

```

        c) ** 2) / 2 + (
46                         lambda_n[2] * (u + c) ** 2) / 2 +
47                         w_n)
48
49     elif flag_fvs_met == 2:
50         # FVS - Lax-Friedrich (L-F) 方法
51
52         # 初始化变量
53         F_p = np.zeros((N, 3)) # 正通量分量
54         F_n = np.zeros((N, 3)) # 负通量分量
55
56         # 先循环计算全局最大特征值
57         lambda_s_global = 0
58         for i in range(N):
59             rho = U[i, 0]
60             u = U[i, 1] / rho
61             E = U[i, 2]
62             T = (E / rho - 0.5 * u ** 2) / Cv
63             p = rho * R * T
64             c = np.sqrt(Gamma * p / rho)
65
66             # 计算局部特征值并更新全局最大值
67             lambda_s_local = abs(u) + c
68             if lambda_s_local > lambda_s_global:
69                 lambda_s_global = lambda_s_local
70
71         # 再次循环计算通量分量
72         for i in range(N):
73             # 计算物理量
74             rho = U[i, 0]
75             u = U[i, 1] / rho
76             E = U[i, 2]
77             T = (E / rho - 0.5 * u ** 2) / Cv

```

```

77     p = rho * R * T
78     c = np.sqrt(Gamma * p / rho)
79
80     # 计算特征值
81     lambda_vals = np.array([u, u - c, u + c])
82
83     # 分裂特征值 (L-F方法使用全局最大特征值)
84     lambda_p = (lambda_vals + lambda_s_global) / 2
85     lambda_n = (lambda_vals - lambda_s_global) / 2
86
87     # 计算w项
88     w_p = ((3 - Gamma) * (lambda_p[1] + lambda_p
89             [2]) * c ** 2) / (2 * (Gamma - 1))
90     w_n = ((3 - Gamma) * (lambda_n[1] + lambda_n
91             [2]) * c ** 2) / (2 * (Gamma - 1))
92
93     # 计算正通量分量
94     F_p[i, 0] = (rho / (2 * Gamma)) * (2 * (Gamma -
95             1) * lambda_p[0] + lambda_p[1] + lambda_p
96             [2])
97     F_p[i, 1] = (rho / (2 * Gamma)) * (
98             2 * (Gamma - 1) * lambda_p[0] * u +
99             lambda_p[1] * (u - c) +
             lambda_p[2] * (u + c))
100    F_p[i, 2] = (rho / (2 * Gamma)) * ((Gamma - 1)
101            * lambda_p[0] * u ** 2 + (lambda_p[1] * (u -
102            c) ** 2) / 2 +
103            lambda_p[2] * (u + c) ** 2) / 2 +
104            w_p)
105
106    # 计算负通量分量
107    F_n[i, 0] = (rho / (2 * Gamma)) * (2 * (Gamma -
108            1) * lambda_n[0] + lambda_n[1] + lambda_n
109            [2])

```

```

[2])

100   F_n[i, 1] = (rho / (2 * Gamma)) * (
101       2 * (Gamma - 1) * lambda_n[0] * u +
102       lambda_n[1] * (u - c) +
103       lambda_n[2] * (u + c))
104
105   F_n[i, 2] = (rho / (2 * Gamma)) * ((Gamma - 1)
106       * lambda_n[0] * u ** 2 + (lambda_n[1] * (u -
107       c) ** 2) / 2 + (
108           lambda_n[2] * (u + c) ** 2) / 2 +
109           w_n)
110
111
112   elif flag_fvs_met == 3:
113       # Van Leer 方法
114
115       # 初始化变量
116       F_p = np.zeros((N, 3)) # 正通量分量
117       F_n = np.zeros((N, 3)) # 负通量分量
118
119       for i in range(N):
120           # 计算物理量
121           rho = U[i, 0]
122           u = U[i, 1] / rho
123           E = U[i, 2]
124           T = (E / rho - 0.5 * u ** 2) / Cv
125           p = rho * R * T
126           c = np.sqrt(Gamma * p / rho)

127
128           # 计算马赫数
129           Ma = u / c if c != 0 else 0
130
131
132           # Van Leer通量分量计算公式
133           if Ma >= 1:
134               # 纯超音速正向流

```

```

127     F_p[i, 0] = U[i, 1] # rho * u
128     F_p[i, 1] = (Gamma - 1) * U[i, 2] + ((3 -
129         Gamma) / 2) * (U[i, 1] ** 2 / U[i, 0])
130     F_p[i, 2] = Gamma * (U[i, 1] * U[i, 2]) / U
131         [i, 0] + ((Gamma - 1) / 2) * (U[i, 1] **
132             3 / U[i, 0] ** 2)
133
134     F_n[i, :] = 0.0
135
136     elif Ma <= -1:
137         # 纯超音速负向流
138         F_n[i, 0] = U[i, 1] # rho * u
139         F_n[i, 1] = (Gamma - 1) * U[i, 2] + ((3 -
140             Gamma) / 2) * (U[i, 1] ** 2 / U[i, 0])
141         F_n[i, 2] = Gamma * (U[i, 1] * U[i, 2]) / U
142             [i, 0] + ((Gamma - 1) / 2) * (U[i, 1] **
143                 3 / U[i, 0] ** 2)
144
145     F_p[i, :] = 0.0
146
147     else:
148         # 亚音速/跨音速区域
149         # 计算质量通量
150         F1_p = rho * c * ((Ma + 1) / 2) ** 2
151         F1_n = -rho * c * ((Ma - 1) / 2) ** 2
152
153         # 计算正通量分量
154         F_p[i, 0] = F1_p
155         F_p[i, 1] = (F1_p / Gamma) * ((Gamma - 1) *
156             u + 2 * c)
157         F_p[i, 2] = (F1_p / (2 * (Gamma ** 2 - 1)))
158             * ((Gamma - 1) * u + 2 * c) ** 2

```

```

152     # 计算负通量分量
153     F_n[i, 0] = F1_n
154     F_n[i, 1] = (F1_n / Gamma) * ((Gamma - 1) *
155         u - 2 * c)
155     F_n[i, 2] = (F1_n / (2 * (Gamma ** 2 - 1))) *
156         ((Gamma - 1) * u - 2 * c) ** 2
156
157     return F_p, F_n

```

Listing 4: 通量矢量分裂法实现

根据不同 `flag_fvs_met` 参数，通量矢量分裂法的三种实现如下：

1. **Steger-Warming (`flag_fvs_met=1`)** Steger-Warming 分裂法将特征值分为正负部分，并在实际实现中引入小量 ε 避免零点奇异：

$$\lambda_k^\pm = \frac{\lambda_k \pm \sqrt{\lambda_k^2 + \varepsilon^2}}{2}$$

其中 λ_k 为雅可比矩阵的特征值， ε 为极小正数。

对每个网格点，首先计算密度 ρ 、速度 u 、总能 E 、温度 T 、压力 p 和声速 c ，再得到特征值 $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u - c$, $\lambda_3 = u + c$ ，并进行正负分裂。

通量分裂公式为：

$$\begin{aligned} F_0^+ &= \frac{\rho}{2\gamma} [2(\gamma - 1)\lambda_1^+ + \lambda_2^+ + \lambda_3^+] \\ F_1^+ &= \frac{\rho}{2\gamma} [2(\gamma - 1)\lambda_1^+ u + \lambda_2^+(u - c) + \lambda_3^+(u + c)] \\ F_2^+ &= \frac{\rho}{2\gamma} \left[(\gamma - 1)\lambda_1^+ u^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^+(u - c)^2 + \frac{1}{2}\lambda_3^+(u + c)^2 + w^+ \right] \end{aligned}$$

其中

$$w^+ = \frac{3 - \gamma}{2(\gamma - 1)} (\lambda_2^+ + \lambda_3^+) c^2$$

负通量 F^- 同理， λ_k^+ 换为 λ_k^- ， w^+ 换为 w^- 。

这种实现方式无需显式构造特征向量矩阵，直接利用特征值分裂和物理量表达式完成通量分裂，数值稳定性好，适合实际编程实现。

2. **Lax-Friedrichs (flag_fvs_met=2)** Lax-Friedrichs 分裂法采用全局最大特征值 λ^* 进行分裂。具体实现如下：

首先，遍历所有网格点，计算每个点的速度 u 和声速 c ，得到局部特征值 $|u| + c$ ，并取其最大值作为全局 λ^* 。

然后，对每个网格点，计算守恒量 ρ, u, E ，温度 T ，压力 p ，声速 c ，以及特征值 $\lambda_1 = u, \lambda_2 = u - c, \lambda_3 = u + c$ 。L-F 方法将特征值分裂为：

$$\lambda_k^+ = \frac{\lambda_k + \lambda^*}{2}, \quad \lambda_k^- = \frac{\lambda_k - \lambda^*}{2}$$

其中 $\lambda^* = \max(|u| + c)$ 。

正通量和负通量分量分别为：

$$\begin{aligned} F_0^+ &= \frac{\rho}{2\gamma} [2(\gamma - 1)\lambda_1^+ + \lambda_2^+ + \lambda_3^+] \\ F_1^+ &= \frac{\rho}{2\gamma} [2(\gamma - 1)\lambda_1^+ u + \lambda_2^+(u - c) + \lambda_3^+(u + c)] \\ F_2^+ &= \frac{\rho}{2\gamma} \left[(\gamma - 1)\lambda_1^+ u^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^+(u - c)^2 + \frac{1}{2}\lambda_3^+(u + c)^2 + w^+ \right] \\ F_0^- &= \frac{\rho}{2\gamma} [2(\gamma - 1)\lambda_1^- + \lambda_2^- + \lambda_3^-] \\ F_1^- &= \frac{\rho}{2\gamma} [2(\gamma - 1)\lambda_1^- u + \lambda_2^-(u - c) + \lambda_3^-(u + c)] \\ F_2^- &= \frac{\rho}{2\gamma} \left[(\gamma - 1)\lambda_1^- u^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^-(u - c)^2 + \frac{1}{2}\lambda_3^-(u + c)^2 + w^- \right] \end{aligned}$$

其中

$$w^+ = \frac{3 - \gamma}{2(\gamma - 1)}(\lambda_2^+ + \lambda_3^+)c^2, \quad w^- = \frac{3 - \gamma}{2(\gamma - 1)}(\lambda_2^- + \lambda_3^-)c^2$$

这样即可实现 Lax-Friedrichs 分裂的 FVS 通量计算。

3. **van Leer (flag_fvs_met=3)** van Leer 分裂法基于马赫数 $\text{Ma} = u/c$ ，其数值实现如下：

在计算过程中，对于每个网格点，首先计算密度 ρ 、速度 u 、总能 E 、温度 T 、压力 p 和声速 c ，进而得到马赫数 $\text{Ma} = u/c$ 。根据马赫数范围进行通量分裂处理：

当 $\text{Ma} \geq 1$ 时，正通量 \mathbf{F}^+ 取完整物理通量，即 $\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}$ ，同时负通量 \mathbf{F}^- 设为零；当 $\text{Ma} \leq -1$ 时，负通量 \mathbf{F}^- 取完整物理通量 $\mathbf{F}^- = \mathbf{F}$ ，同时正通量 \mathbf{F}^+ 设为零。

当 $|Ma| < 1$ 时，通量按以下公式分裂：

$$\begin{aligned} F_1^+ &= \rho c \left(\frac{Ma + 1}{2} \right)^2, \quad F_1^- = -\rho c \left(\frac{Ma - 1}{2} \right)^2 \\ F_2^+ &= \frac{F_1^+}{\gamma} [(\gamma - 1)u + 2c], \quad F_2^- = \frac{F_1^-}{\gamma} [(\gamma - 1)u - 2c] \\ F_3^+ &= \frac{F_1^+}{2(\gamma^2 - 1)} [(\gamma - 1)u + 2c]^2, \quad F_3^- = \frac{F_1^-}{2(\gamma^2 - 1)} [(\gamma - 1)u - 2c]^2 \end{aligned}$$

最终，正负通量分量分别构造为 $\mathbf{F}^+ = (F_1^+, F_2^+, F_3^+)$ 和 $\mathbf{F}^- = (F_1^-, F_2^-, F_3^-)$ 。

这种实现方式可有效区分超音速与亚音速区域，保证通量分裂的物理一致性和数值稳定性。

实际代码实现中，通过判断 `flag_fvs_met` 的值，选择对应的分裂方法进行通量计算。这样可灵活切换不同的 FVS 分裂策略，便于对比分析其对激波捕捉和数值耗散的影响。

根据通量矢量分裂法，使用激波捕捉格式进行激波管模拟：

```

1 # 通用通量差分计算函数(TVD,WENO,GVC)，返回索引和通量导数
2 def Diff_Cons(N, dx, F_p, F_n, flag_spa_typ, flag_scs_typ):
3     # 初始化输出数组
4     xs_new = 0
5     xt_new = 0
6     Fx = np.zeros((N, 3))    # 总通量导数
7     Fx_p = np.zeros((N, 3))   # 正通量导数
8     Fx_n = np.zeros((N, 3))   # 负通量导数
9     Fh_p = np.zeros((N, 3))   # 半网格点正通量 (j+1/2)
10    Fh_n = np.zeros((N, 3))   # 半网格点负通量 (j+1/2)
11    Fh = np.zeros((N, 3))    # 半网格点总通量 (j+1/2)
12
13    if flag_spa_typ == 1:
14        # 特殊激波捕捉格式
15
16        if flag_scs_typ == 1:
17            # 1 - TVD格式 (Van Leer限制器)
18            xs = 1    # 起始索引
19            xt = N - 2 # 结束索引

```

```

20      em = 1e-5 # 小量防止除零
21
22      for j in range(xs, xt):
23          # 计算正通量比例因子
24          r_p_num = F_p[j] - F_p[j - 1]
25          r_p_den = F_p[j + 1] - F_p[j] + em
26          r_p = r_p_num / r_p_den
27
28          # 计算负通量比例因子
29          r_n_num = F_n[j + 2] - F_n[j + 1]
30          r_n_den = F_n[j + 1] - F_n[j] + em
31          r_n = r_n_num / r_n_den
32
33          # Van Leer限制器
34          Phi_p = (r_p + np.abs(r_p)) / (1 + r_p)
35          Phi_n = (r_n + np.abs(r_n)) / (1 + r_n)
36
37          # 计算半网格点通量
38          Fh_p[j] = F_p[j] + 0.5 * Phi_p * (F_p[j +
39              1] - F_p[j])
40          Fh_n[j] = F_n[j + 1] - 0.5 * Phi_n * (F_n[j
41              + 1] - F_n[j])
42
43          # 更新索引范围
44          xs_new = xs + 1
45          xt_new = xt
46
47          # 计算通量导数
48          for j in range(xs_new, xt_new):
49              Fx_p[j] = (Fh_p[j] - Fh_p[j - 1]) / dx
50              Fx_n[j] = (Fh_n[j] - Fh_n[j - 1]) / dx
51              Fx[j] = Fx_p[j] + Fx_n[j]

```

```

51     elif flag_scs_typ == 2:
52         # 2 - WENO5 阶格式
53         C = np.array([1 / 10, 6 / 10, 3 / 10])
54         p = 2
55         em = 1e-6
56
57         xs = 2    # 起始索引
58         xt = N - 3    # 结束索引
59
60         for j in range(xs, xt + 1):
61             # a > 0 正通量部分
62             # 计算光滑指示器 beta
63             beta_p1 = (1 / 4) * (F_p[j - 2] - 4 * F_p[j -
64                 - 1] + 3 * F_p[j]) ** 2 + (13 / 12) * (
65                     F_p[j - 2] - 2 * F_p[j - 1] +
66                     F_p[j]) ** 2
67             beta_p2 = (1 / 4) * (F_p[j - 1] - F_p[j +
68                 1]) ** 2 + (13 / 12) * (F_p[j - 1] - 2 *
69                 F_p[j] + F_p[j + 1]) ** 2
70             beta_p3 = (1 / 4) * (3 * F_p[j] - 4 * F_p[j +
71                 1] + F_p[j + 2]) ** 2 + (13 / 12) * (
72                 F_p[j] - 2 * F_p[j + 1] + F_p[j +
73                 2]) ** 2
74
75             # 计算 alpha 和权重 omega
76             alpha_p = C / (em + np.array([beta_p1,
77                 beta_p2, beta_p3])) ** p
78             alpha_p_sum = np.sum(alpha_p, axis=0)
79             omega_p = alpha_p / alpha_p_sum
80
81             # 计算三个模板的通量值
82             Fh_p_c1 = (1 / 3) * F_p[j - 2] - (7 / 6) *
83                 F_p[j - 1] + (11 / 6) * F_p[j]

```

```

76     Fh_p_c2 = (-1 / 6) * F_p[j - 1] + (5 / 6) *
77         F_p[j] + (1 / 3) * F_p[j + 1]
78     Fh_p_c3 = (1 / 3) * F_p[j] + (5 / 6) * F_p[
79         j + 1] - (1 / 6) * F_p[j + 2]
80     Fh_p_c = np.array([Fh_p_c1, Fh_p_c2,
81                         Fh_p_c3])
82
83     # 加权组合得到 F+_{j+1/2}
84     Fh_p[j] = np.sum(omega_p * Fh_p_c, axis=0)
85
86     # a < 0 负通量部分
87     # 计算光滑指示器 beta
88     beta_n1 = (1 / 4) * (F_n[j + 2] - 4 * F_n[j
89         + 1] + 3 * F_n[j]) ** 2 + (13 / 12) * (
90             F_n[j + 2] - 2 * F_n[j + 1] +
91                 F_n[j]) ** 2
92     beta_n2 = (1 / 4) * (F_n[j + 1] - F_n[j -
93         1]) ** 2 + (13 / 12) * (F_n[j + 1] - 2 *
94             F_n[j] + F_n[j - 1]) ** 2
95     beta_n3 = (1 / 4) * (3 * F_n[j] - 4 * F_n[j
96         - 1] + F_n[j - 2]) ** 2 + (13 / 12) * (
97             F_n[j] - 2 * F_n[j - 1] + F_n[j
98                 - 2]) ** 2
99
100    # 计算 alpha 和权重 omega
101    alpha_n = C / (em + np.array([beta_n1,
102        beta_n2, beta_n3])) ** p
103    alpha_n_sum = np.sum(alpha_n, axis=0)
104    omega_n = alpha_n / alpha_n_sum
105
106    # 计算三个模板的通量值
107    Fh_n_c1 = (1 / 3) * F_n[j + 2] - (7 / 6) *
108        F_n[j + 1] + (11 / 6) * F_n[j]

```

```

98         Fh_n_c2 = (-1 / 6) * F_n[j + 1] + (5 / 6) *
99             F_n[j] + (1 / 3) * F_n[j - 1]
100            Fh_n_c3 = (1 / 3) * F_n[j] + (5 / 6) * F_n[
101                j - 1] - (1 / 6) * F_n[j - 2]
102            Fh_n_c = np.array([Fh_n_c1, Fh_n_c2,
103                           Fh_n_c3])
104
104
105        # 加权组合得到 F_{j-1/2}
106        Fh_n[j] = np.sum(omega_n * Fh_n_c, axis=0)
107
108
109        # 计算通量导数
110        xs_new = xs + 1    # 3
111        xt_new = xt - 1    # N-4
112
113
114        for j in range(xs_new, xt_new + 1):
115            Fx_p[j] = (Fh_p[j] - Fh_p[j - 1]) / dx
116            Fx_n[j] = (Fh_n[j + 1] - Fh_n[j]) / dx
117            Fx[j] = Fx_p[j] + Fx_n[j]
118
119
120        elif flag_scs_typ == 3:
121            # 群速度控制格式
122            # 参数设置
123            xs = 1    # 起始索引
124            xt = N - 2    # 结束索引
125            em = 1e-5    # 小量防止除零
126
127            # 群速度控制参数
128            beta = 0.8    # 群速度控制因子
129            gamma = 0.3    # 高阶修正系数
130
131
132            for j in range(xs, xt):
133                # 计算通量梯度比
134                # 正通量部分

```

```

128         r_p_num = F_p[j] - F_p[j - 1]
129         r_p_den = F_p[j + 1] - F_p[j] + em
130         r_p = r_p_num / r_p_den
131
132         # 负通量部分
133         r_n_num = F_n[j + 2] - F_n[j + 1]
134         r_n_den = F_n[j + 1] - F_n[j] + em
135         r_n = r_n_num / r_n_den
136
137         # 群速度控制限制器函数
138         # 正通量限制器
139         Phi_p = (r_p + beta * np.abs(r_p)) / (1 +
140             beta * r_p + gamma * r_p ** 2)
141         # 负通量限制器
142         Phi_n = (r_n + beta * np.abs(r_n)) / (1 +
143             beta * r_n + gamma * r_n ** 2)
144
145         # 计算半网格点通量(含群速度控制)
146         Fh_p[j] = F_p[j] + 0.5 * Phi_p * (F_p[j +
147             1] - F_p[j])
148         Fh_n[j] = F_n[j + 1] - 0.5 * Phi_n * (F_n[j +
149             1] - F_n[j])
150
151         # 更新索引范围
152         xs_new = xs + 1
153         xt_new = xt
154
155         # 计算通量导数
156         for j in range(xs_new, xt_new):
157             Fx_p[j] = (Fh_p[j] - Fh_p[j - 1]) / dx
158             Fx_n[j] = (Fh_n[j] - Fh_n[j - 1]) / dx
159             Fx[j] = Fx_p[j] + Fx_n[j]
160
161     return xs_new, xt_new, Fh_p, Fh_n, Fx, Fx_p, Fx_n

```

Listing 5: 激波捕捉格式实现

根据不同 `flag_scs_typ` 参数，通量矢量分裂法的三种实现如下：

1. TVD (`flag_scs_typ=1`)

TVD 格式采用 Van Leer 限制器，具体实现过程如下：

设定起始索引 $xs = 1$ 和结束索引 $xt = N - 2$ ，其中引入小量 $\varepsilon = 10^{-5}$ 以防止除零情况。对于每个索引 j 在区间 $[xs, xt]$ 内执行以下计算步骤：

$$\text{首先计算正通量梯度比: } r_p = \frac{F_p[j] - F_p[j - 1]}{F_p[j + 1] - F_p[j] + \varepsilon};$$

$$\text{接着计算负通量梯度比: } r_n = \frac{F_n[j + 2] - F_n[j + 1]}{F_n[j + 1] - F_n[j] + \varepsilon};$$

$$\text{随后应用 Van Leer 限制器函数: } \Phi_p = \frac{r_p + |r_p|}{1 + r_p} \text{ 和 } \Phi_n = \frac{r_n + |r_n|}{1 + r_n};$$

最后进行半网格点通量重构：

$$Fh_p[j] = F_p[j] + 0.5 \Phi_p (F_p[j+1] - F_p[j]), \quad Fh_n[j] = F_n[j+1] - 0.5 \Phi_n (F_n[j+1] - F_n[j])$$

完成所有 j 的计算后，更新索引范围： $xs_{\text{new}} = xs + 1$, $xt_{\text{new}} = xt$ 。在新索引范围 $[xs_{\text{new}}, xt_{\text{new}}]$ 内计算通量导数：

$$Fx_p[j] = \frac{Fh_p[j] - Fh_p[j - 1]}{dx}, \quad Fx_n[j] = \frac{Fh_n[j] - Fh_n[j - 1]}{dx}$$

以及总通量导数：

$$Fx[j] = Fx_p[j] + Fx_n[j]$$

2. 五阶 WENO (`flag_scs_typ=2`)

五阶 WENO 格式实现过程如下：

设常数 $C = [1/10, 6/10, 3/10]$, 幂指数 $p = 2$, 小量 $\varepsilon = 10^{-6}$, 起始索引 $xs = 2$, 结束索引 $xt = N - 3$

对于每个 j 在 $[xs, xt]$ 区间：

正通量部分 ($a > 0$):

计算三个光滑指示器

$$\beta_1 = \frac{1}{4}(F_p[j - 2] - 4F_p[j - 1] + 3F_p[j])^2 + \frac{13}{12}(F_p[j - 2] - 2F_p[j - 1] + F_p[j])^2$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4}(F_p[j - 1] - F_p[j + 1])^2 + \frac{13}{12}(F_p[j - 1] - 2F_p[j] + F_p[j + 1])^2$$

$$\beta_3 = \frac{1}{4}(3F_p[j] - 4F_p[j + 1] + F_p[j + 2])^2 + \frac{13}{12}(F_p[j] - 2F_p[j + 1] + F_p[j + 2])^2$$

计算 $\alpha_k = C_k / (\varepsilon + \beta_k)^p$, 归一化得权重 $\omega_k = \alpha_k / \sum \alpha_k$
 计算三个模板的通量值

$$\begin{aligned} F_{j+1/2}^{(1)} &= \frac{1}{3}F_p[j-2] - \frac{7}{6}F_p[j-1] + \frac{11}{6}F_p[j] \\ F_{j+1/2}^{(2)} &= -\frac{1}{6}F_p[j-1] + \frac{5}{6}F_p[j] + \frac{1}{3}F_p[j+1] \\ F_{j+1/2}^{(3)} &= \frac{1}{3}F_p[j] + \frac{5}{6}F_p[j+1] - \frac{1}{6}F_p[j+2] \end{aligned}$$

加权组合 $Fh_p[j] = \omega_1 F_{j+1/2}^{(1)} + \omega_2 F_{j+1/2}^{(2)} + \omega_3 F_{j+1/2}^{(3)}$

负通量部分 ($a < 0$):

计算三个光滑指示器

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{4}(F_n[j+2] - 4F_n[j+1] + 3F_n[j])^2 + \frac{13}{12}(F_n[j+2] - 2F_n[j+1] + F_n[j])^2 \\ \beta_2 &= \frac{1}{4}(F_n[j+1] - F_n[j-1])^2 + \frac{13}{12}(F_n[j+1] - 2F_n[j] + F_n[j-1])^2 \\ \beta_3 &= \frac{1}{4}(3F_n[j] - 4F_n[j-1] + F_n[j-2])^2 + \frac{13}{12}(F_n[j] - 2F_n[j-1] + F_n[j-2])^2 \end{aligned}$$

计算 α_k 和归一化权重 ω_k , 同上

计算三个模板的通量值

$$\begin{aligned} F_{j-1/2}^{(1)} &= \frac{1}{3}F_n[j+2] - \frac{7}{6}F_n[j+1] + \frac{11}{6}F_n[j] \\ F_{j-1/2}^{(2)} &= -\frac{1}{6}F_n[j+1] + \frac{5}{6}F_n[j] + \frac{1}{3}F_n[j-1] \\ F_{j-1/2}^{(3)} &= \frac{1}{3}F_n[j] + \frac{5}{6}F_n[j-1] - \frac{1}{6}F_n[j-2] \end{aligned}$$

加权组合 $Fh_n[j] = \omega_1 F_{j-1/2}^{(1)} + \omega_2 F_{j-1/2}^{(2)} + \omega_3 F_{j-1/2}^{(3)}$

计算通量导数, $xs_{new} = xs + 1$, $xt_{new} = xt - 1$, 对 j 在 $[xs_{new}, xt_{new}]$:

$$\begin{aligned} Fx_p[j] &= \frac{Fh_p[j] - Fh_p[j-1]}{dx} \\ Fx_n[j] &= \frac{Fh_n[j+1] - Fh_n[j]}{dx} \\ Fx[j] &= Fx_p[j] + Fx_n[j] \end{aligned}$$

3 群速度控制 GVC (flag_scs_typ=3)

群速度控制 (GVC) 格式的实现过程如下:

设定起始索引 $xs = 1$, 结束索引 $xt = N - 2$, 并引入小量 $em = 10^{-5}$ 以防止除零情况。同时设置群速度控制参数: $\beta = 0.8$ 作为群速度控制因子, $\gamma = 0.3$ 作为高阶修正系数。

对于每个索引 j 在区间 $[xs, xt)$ 内进行如下计算: 首先计算正通量梯度比:

$$r_p = \frac{F_p[j] - F_p[j - 1]}{F_p[j + 1] - F_p[j] + em}$$

接着计算负通量梯度比:

$$r_n = \frac{F_n[j + 2] - F_n[j + 1]}{F_n[j + 1] - F_n[j] + em}$$

然后计算群速度控制限制器函数:

$$\Phi_p = \frac{r_p + \beta|r_p|}{1 + \beta r_p + \gamma r_p^2}, \quad \Phi_n = \frac{r_n + \beta|r_n|}{1 + \beta r_n + \gamma r_n^2}$$

最后计算含群速度控制的半网格点通量:

$$Fh_p[j] = F_p[j] + 0.5 \Phi_p (F_p[j+1] - F_p[j]), \quad Fh_n[j] = F_n[j+1] - 0.5 \Phi_n (F_n[j+1] - F_n[j])$$

完成上述计算后, 更新索引范围为 $xs_{\text{new}} = xs + 1$, $xt_{\text{new}} = xt$ 。在新索引区间 $[xs_{\text{new}}, xt_{\text{new}})$ 内计算通量导数:

$$Fx_p[j] = \frac{Fh_p[j] - Fh_p[j - 1]}{dx}, \quad Fx_n[j] = \frac{Fh_n[j] - Fh_n[j - 1]}{dx}$$

以及总通量导数:

$$Fx[j] = Fx_p[j] + Fx_n[j]$$

接下来是根据流通差分分裂法 (FDS), 实现激波模拟算法:

```

1 # 使用 ROE 格式实现通量差分裂法 (FDS)
2 def Flux_Diff_Split(U, N, dx, Gamma, Cp, Cv, R,
3     flag_fds_met, flag_spa_typ, flag_scs_typ):
4     # Roe 格式通量差分分裂
5     if flag_fds_met == 1:
6         # 初始化数组
7         Fh_l = np.zeros((N, 3))    # 左界面通量
8         Fh_r = np.zeros((N, 3))    # 右界面通量

```

```

8      U_ave = np.zeros((N, 3)) # Roe平均守恒变量
9      F_ave = np.zeros((N, 3)) # Roe平均通量
10     Fh = np.zeros((N, 3)) # 界面通量
11     Fx = np.zeros((N, 3)) # 空间导数
12
13     em = 1e-5 # 熵修正参数
14
15     # 调用守恒变量差分函数
16     xs, xt, Uh_l, Uh_r, _, _, _ = Diff_Cons(
17         N, dx, U, U, flag_spa_typ, 2
18     )
19
20     # WENO格式
21     if flag_spa_typ == 1 and flag_scs_typ == 2:
22         xt = xt - 1 # 调整计算域结束索引
23         # 右状态值向右平移一位
24         for j in range(xs, xt + 1):
25             Uh_r[j] = Uh_r[j + 1]
26
27     # 遍历所有网格界面
28     for j in range(xs, xt + 1):
29         # --- 计算左状态物理量 ---
30         rho_l = Uh_l[j, 0] # 左侧密度
31         u_l = Uh_l[j, 1] / rho_l # 左侧速度
32         E_l = Uh_l[j, 2] # 左侧总能
33         # 左侧温度
34         T_l = ((E_l / rho_l) - 0.5 * u_l ** 2) / Cv
35         p_l = rho_l * R * T_l # 左侧压力
36         H_l = 0.5 * u_l ** 2 + Cp * T_l # 左侧总焓
37
38         # 左侧通量计算
39         Fh_l[j, 0] = rho_l * u_l # 质量通量
40         Fh_l[j, 1] = rho_l * u_l ** 2 + p_l # 动量通量

```

```

41 Fh_l[j, 2] = u_l * (E_l + p_l) # 能量通量
42
43 # 计算右状态物理量
44 rho_r = Uh_r[j, 0] # 右侧密度
45 u_r = Uh_r[j, 1] / rho_r # 右侧速度
46 E_r = Uh_r[j, 2] # 右侧总能
47 # 右侧温度
48 T_r = ((E_r / rho_r) - 0.5 * u_r ** 2) / Cv
49 p_r = rho_r * R * T_r # 右侧压力
50 H_r = 0.5 * u_r ** 2 + Cp * T_r # 右侧总焓
51
52 # 右侧通量计算
53 Fh_r[j, 0] = rho_r * u_r # 质量通量
54 Fh_r[j, 1] = rho_r * u_r ** 2 + p_r # 动量通量
55 Fh_r[j, 2] = u_r * (E_r + p_r) # 能量通量
56
57 # 计算Roe平均量
58 sqrt_rho_l = np.sqrt(rho_l)
59 sqrt_rho_r = np.sqrt(rho_r)
60 # Roe平均密度
61 rho_ave = ((sqrt_rho_l + sqrt_rho_r) / 2) ** 2
62 # Roe平均速度
63 u_ave = (sqrt_rho_l * u_l + sqrt_rho_r * u_r) /
64     (np.sqrt(rho_ave) * 2)
65 # Roe平均总焓
66 H_ave = (sqrt_rho_l * H_l + sqrt_rho_r * H_r) /
67     (np.sqrt(rho_ave) * 2)
68 # Roe平均压力
69 p_ave = ((Gamma - 1) / Gamma) * (rho_ave *

```

```

70      # Roe平均总能
71      E_ave = rho_ave * H_ave - p_ave
72
73      # 存储Roe平均守恒变量
74      U_ave[j] = [rho_ave, rho_ave * u_ave, E_ave]
75      # 存储Roe平均通量
76      F_ave[j] = [rho_ave * u_ave, rho_ave * u_ave ** 2 + p_ave, u_ave * (E_ave + p_ave)]
77
78      # 构造Jacobian矩阵
79      A_ave = np.array([
80          [0, 1, 0],
81          [(-(3 - Gamma) / 2) * u_ave ** 2, (3 - Gamma) * u_ave, Gamma - 1],
82          [(Gamma - 2) / 2 * u_ave ** 3 - u_ave * c_ave ** 2 / (Gamma - 1),
83          c_ave ** 2 / (Gamma - 1) + (3 - Gamma) / 2 * u_ave ** 2,
84          Gamma * u_ave]
85      ])
86
87      # 特征分解
88      D, V = np.linalg.eig(A_ave)
89      S = np.linalg.inv(V)
90
91      # 熵修正处理特征值
92      D_abs = np.zeros(3)
93      for i in range(3):
94          if abs(D[i]) > em:
95              D_abs[i] = abs(D[i])
96          else:
97              # Harten修正公式
98              D_abs[i] = (D[i] ** 2 + em ** 2) / (2 *

```

```

    em)

99
100     # 构造绝对 Jacobian 矩阵
101     A_ave_abs = V @ np.diag(D_abs) @ S
102
103     # 计算界面通量
104     diff = (Uh_r[j] - Uh_l[j]).reshape(3, 1) # 状态差向量
105     # Roe 通量公式
106     roe_flux = 0.5 * (A_ave_abs @ diff).flatten()
107     Fh[j] = 0.5 * (Fh_l[j] + Fh_r[j]) - roe_flux
108
109     # 计算空间导数
110     xs_new = xs + 1 # 新计算域起始索引
111     xt_new = xt # 新计算域结束索引
112     for j in range(xs_new, xt_new + 1):
113         # 中心差分格式
114         Fx[j] = (Fh[j] - Fh[j - 1]) / dx
115
116     return xs_new, xt_new, Fx

```

Listing 6: 流通差分分裂法实现

目前只有 ROE 格式的实现，ROE 格式的实现过程如下：

1. 界面左右状态变量重构通过高阶差分（如 WENO）在每个界面 $j + \frac{1}{2}$ 处获得左右守恒变量 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^L$ 和 $\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^R$ 。
2. 物理量计算对于每个界面，分别计算左右状态的密度 $\rho_{L,R}$ 、速度 $u_{L,R}$ 、总能 $E_{L,R}$ 、温度 $T_{L,R}$ 、压力 $p_{L,R}$ 、总焓 $H_{L,R}$ ：

$$T_{L,R} = \frac{E_{L,R}/\rho_{L,R} - 0.5u_{L,R}^2}{C_v}$$

$$p_{L,R} = \rho_{L,R} R T_{L,R}$$

$$H_{L,R} = 0.5u_{L,R}^2 + C_p T_{L,R}$$

3. Roe 平均量计算

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \left(\frac{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}{2} \right)^2 \\ \tilde{u} &= \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{H} &= \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\ \tilde{p} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\tilde{\rho}\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{u}^2 \right) \\ \tilde{c}^2 &= (\gamma - 1) \left(\tilde{H} - \frac{1}{2}\tilde{u}^2 \right)\end{aligned}$$

4. Roe 平均 Jacobian 矩阵特征分解构造 Roe 平均 Jacobian 矩阵 $\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}})$, 进行特征分解:

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{-1}$$

其中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 为特征值对角阵。

5. 熵修正对每个特征值 λ_i , 采用 Harten 熵修正:

$$|\lambda_i|_{\text{mod}} = \begin{cases} |\lambda_i|, & |\lambda_i| > \varepsilon \\ \frac{\lambda_i^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}, & |\lambda_i| \leq \varepsilon \end{cases}$$

构造绝对 Jacobian 矩阵 $|\mathbf{A}| = \mathbf{V}|\Lambda|_{\text{mod}}\mathbf{V}^{-1}$ 。

6. Roe 界面通量计算

$$\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)] - \frac{1}{2} |\mathbf{A}| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

7. 空间导数离散用中心差分格式计算:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right)_j = \frac{\mathbf{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}$$

上述步骤即为 Roe 格式通量差分分裂法的完整实现流程。

最后是精确解的计算和结果输出, 由于是参考的网络, 故不再展示具体代码:

```

1 # 调用 analytic_sod.m 函数，获取解析解
2
3 data_end = analytic_sod(t_end)

```

Listing 7: 精确解计算和结果输出

4 结果分析

根据代码可以生成由各种格式计算的激波管模拟结果。我们先从网格数对结果的影响开始分析：采用 FVS-Steger-Warming-WENO 格式，网格数为 $N = 20 \sim 250$ 时的结果如下图 2-7 所示：

从上述不同网格数 N 的计算结果可以看出，随着 N 的增大，激波等间断结构的分辨率明显提升。当 N 增加到 200 及以上时，激波位置和幅值基本不再随网格加密发生明显变化，说明数值解已基本收敛，网格依赖性很小。因此，后续计算中选用 $N = 201$ 作为典型网格即可兼顾精度与计算效率。需要指出的是，在本题一维问题中，网格数量对计算量影响有限，但在更高维度或复杂几何问题中，网格收敛性分析对于保证数值结果可靠性和优化计算资源分配具有重要意义。

接下来我们分析不同格式对结果的影响。我们选择网格数为 $N = 200$ ，时间步长为 $\Delta t = 0.001s$ ，总时间为 $T = 0.2s$ ，采用不同格式进行计算，结果如下：

对 FVS 方法，考察不同分裂方法的影响，由图 8-10 可以看出：

4.1 性能分析

4.1.1 密度分布对比

三种方法在接触间断分辨率上的差异如下：

Lax-Friedrich 方法在 $x \approx 0.2\text{ m}$ 处接触间断区有明显扩散，数值解呈明显阶梯状分布

Steger-Warming 方法接触间断最清晰锐利，数值解与精确解贴合最紧密

Van Leer 方法接触间断区存在轻微扩散，但数值解过渡优于 Lax-Friedrich 方法

4.1.2 压力分布对比

不同方法在压力分布上的特征表现：

Lax-Friedrich 方法平台区域 ($x \in [-0.3 \text{ m}, 0.2 \text{ m}]$) 出现可见数值振荡

Steger-Warming 方法平台区保持最平稳， $x \approx 0.3 \text{ m}$ 激波位置偏移最小

Van Leer 方法平台区域整体维持良好，但激波位置存在轻微偏移

4.1.3 速度分布对比

稀疏波区域 ($x < 0$) 的速度分布特性：

Lax-Friedrich 方法出现显著非物理振荡，接触间断区速度分布失真

Steger-Warming 方法膨胀波区域过渡平滑，无明显振荡现象

Van Leer 方法膨胀波区域过渡最平滑，速度分布完全无振荡

4.1.4 比内能分布对比

比内能分布精度对比结果：

Lax-Friedrich 方法 $x \approx 0.2 \text{ m}$ 接触间断区误差最大，分辨率最低

Steger-Warming 方法整体精度最高，接触间断分辨率最佳

Van Leer 方法接触间断区附近存在轻微过冲现象

对 FVS 方法，考察不同激波捕捉格式的影响，分裂采用 Steger-Warming 方法：

4.1.5 密度分布对比

三种激波捕捉格式在密度分布上的表现如图 11-13 所示：

TVD (Van Leer Limiter) 接触间断位置 ($x \approx 0.2 \text{ m}$) 出现明显耗散，数值解与精确解偏差较大

5 阶 WENO 接触间断分辨率最高，数值解在 $x = 0.2 \text{ m}$ 处与精确解贴合最紧密

Group Velocity Control (GVC) 接触间断区域存在轻微数值耗散，分辨率介于 TVD 与 WENO 之间

4.1.6 压力分布对比

压力分布表现差异显著：

TVD (Van Leer Limiter) 平台区域 ($x \in [-0.3 \text{ m}, 0.2 \text{ m}]$) 有轻微振荡，激波位置 ($x \approx 0.3 \text{ m}$) 偏移明显

5 阶 WENO 平台区维持最平稳，激波位置捕捉最准确，与精确解基本重合

Group Velocity Control (GVC) 平台区域存在轻微数值波动，激波位置偏移小于 TVD 但大于 WENO

4.1.7 速度分布对比

稀疏波区域 ($x < 0$) 的速度特性：

TVD (Van Leer Limiter) 在膨胀波区 ($x < -0.2 \text{ m}$) 出现非物理振荡

5 阶 WENO 膨胀波区过渡最平滑，速度分布与精确解完全一致

Group Velocity Control (GVC) 膨胀波区存在轻微过冲现象，但振荡幅度小于 TVD 格式

4.1.8 比内能分布对比

比内能分布精度对比结果：

TVD (Van Leer Limiter) 接触间断位置 ($x \approx 0.2 \text{ m}$) 误差最大，数值解显著偏离精确解

5 阶 WENO 比内能分布整体精度最高，尤其在接触间断区最为准确

Group Velocity Control (GVC) 接触间断区存在中等程度过冲，误差小于 TVD 但大于 WENO

考察 FDS 方法，采用 Roe 格式，如图 14：

当采用激波捕捉格式时，Roe 格式计算结果能与精确解吻合较好，且数值振荡小，说明 Roe 格式耗散较低，与高效激波捕捉格式组合能达到较好的激波分辨率。

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + 5th-order WENO cell 20) at t = 0.200s

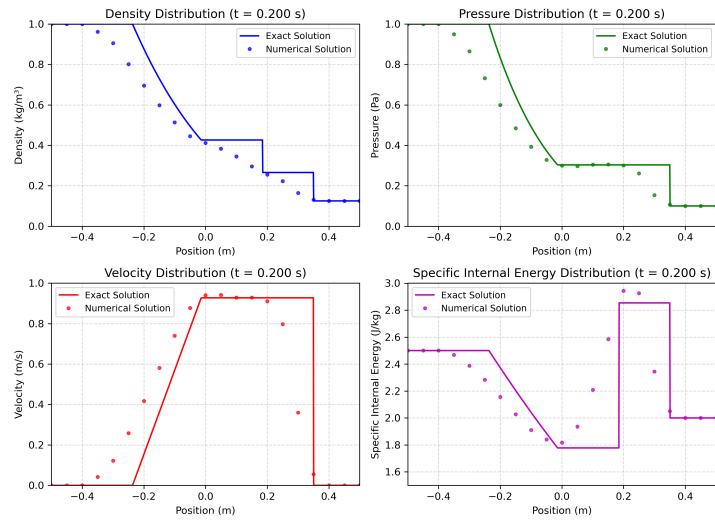


图 2: 网格数 $N=20$ 激波管模拟结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + 5th-order WENO cell 50) at t = 0.200s

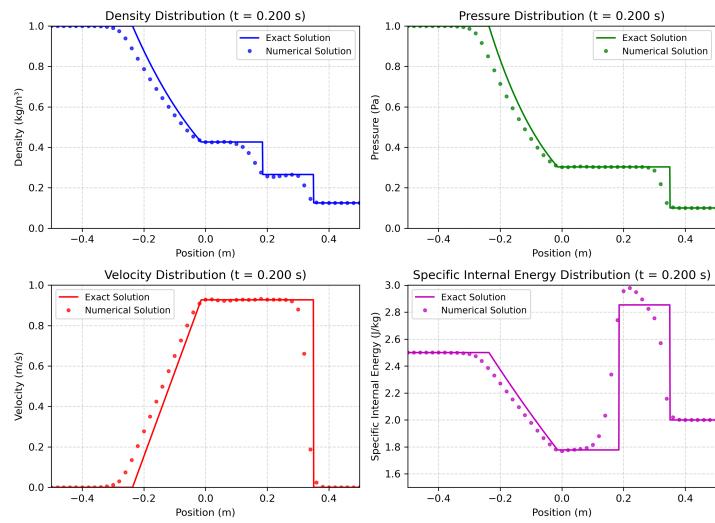


图 3: 网格数 $N=50$ 激波管模拟结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + 5th-order WENO cell 100) at t = 0.200s

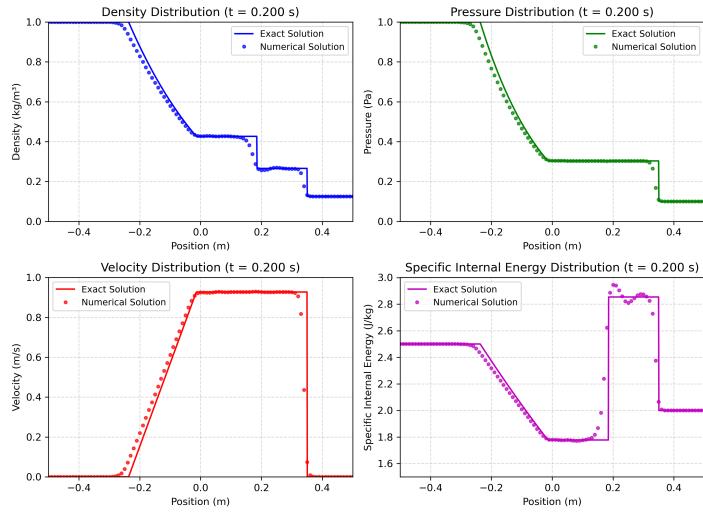


图 4: 网格数 $N=100$ 激波管模拟结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + 5th-order WENO cell 150) at t = 0.200s

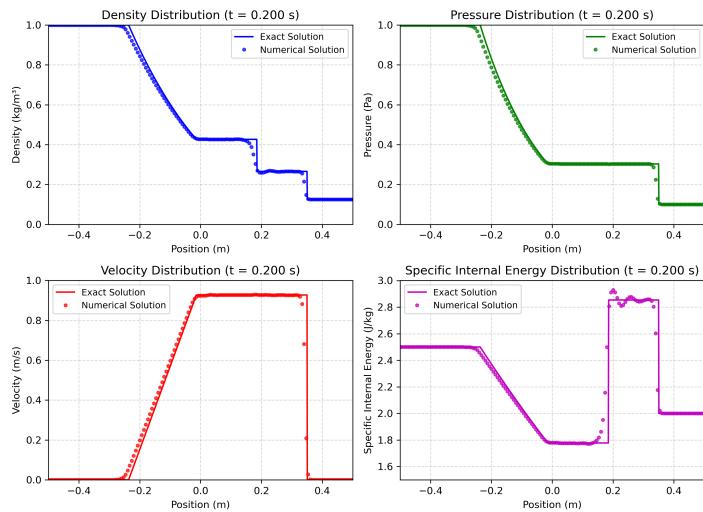


图 5: 网格数 $N=150$ 激波管模拟结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + 5th-order WENO cell 200) at t = 0.200s

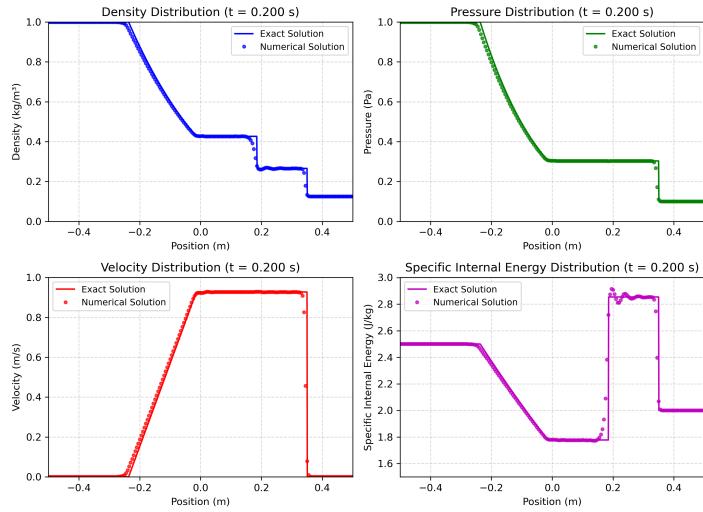


图 6: 网格数 $N=200$ 激波管模拟结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + 5th-order WENO cell 250) at t = 0.200s

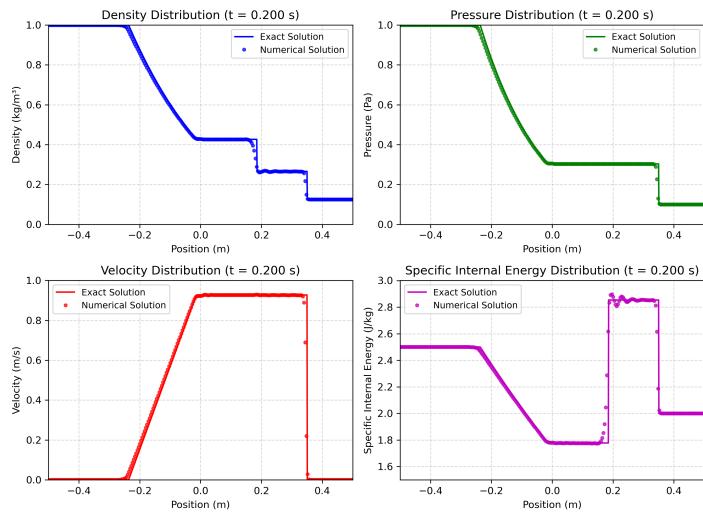


图 7: 网格数 $N=250$ 激波管模拟结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Lax-Friedrich + 5th-order WENO) at t = 0.200s

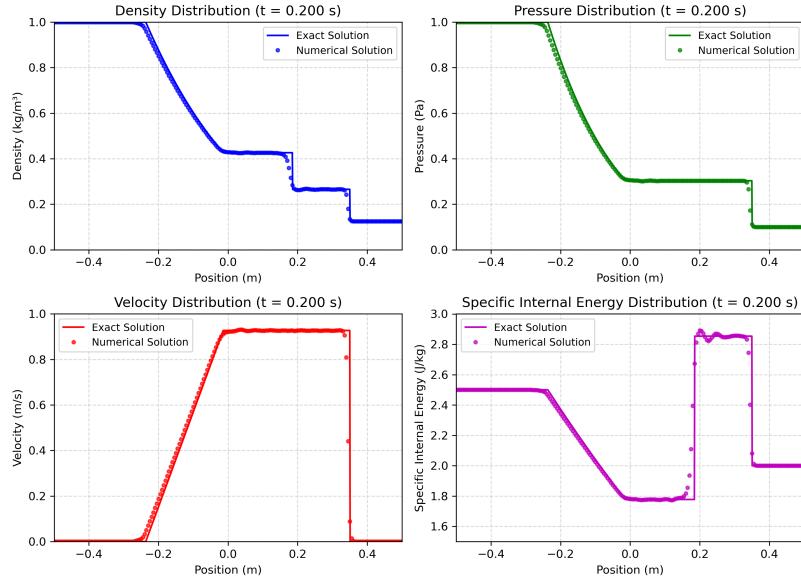


图 8: FVS-Lax-Friedrich + 5 阶 WENO 格式结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + 5th-order WENO) at t = 0.200s

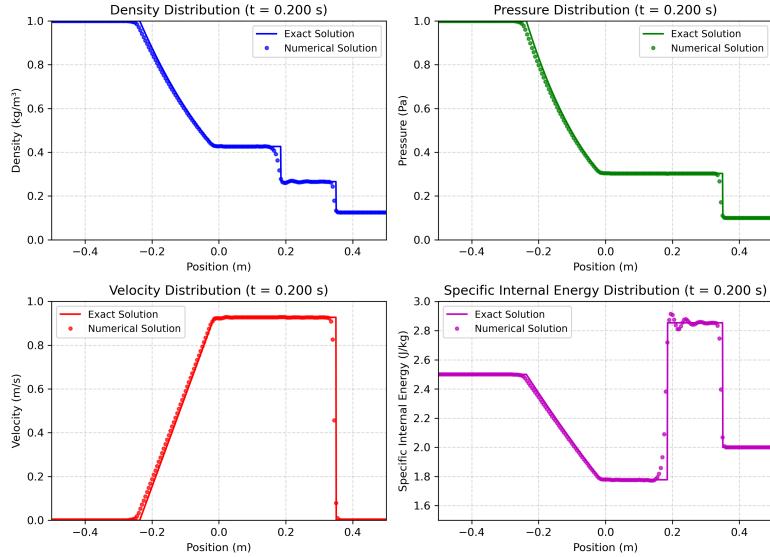


图 9: FVS-Steger-Warming + 5 阶 WENO 格式结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Van Leer + 5th-order WENO) at t = 0.200s

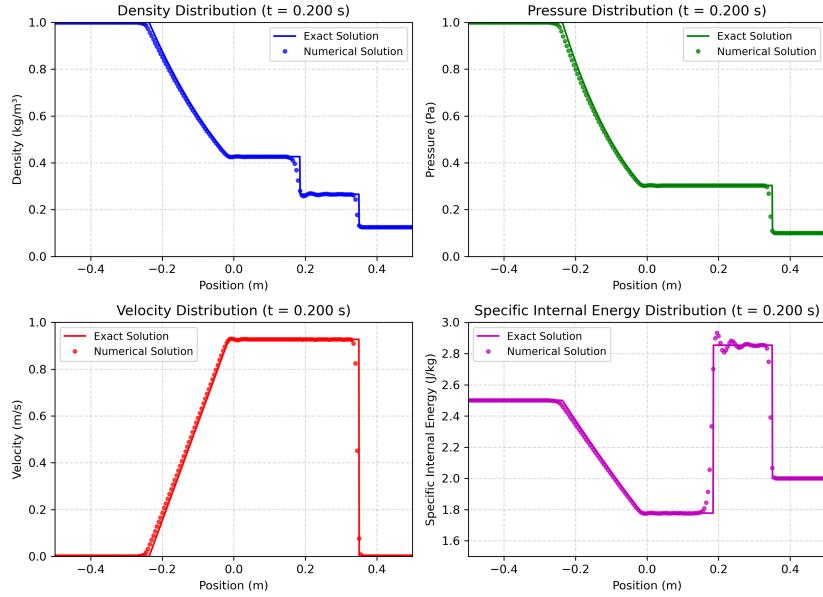


图 10: FVS-Van-Leer + 5 阶 WENO 格式结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + TVD (Van Leer Limiter)) at t = 0.200s

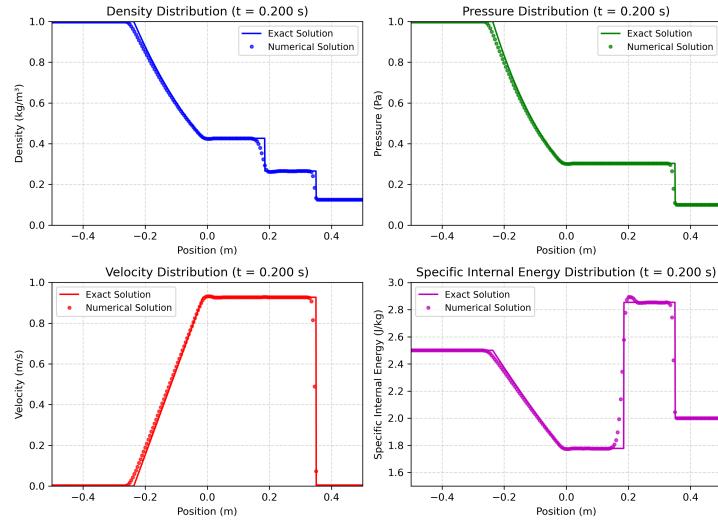


图 11: FVS-Steger-Warming + TVD 格式结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + 5th-order WENO) at t = 0.200s

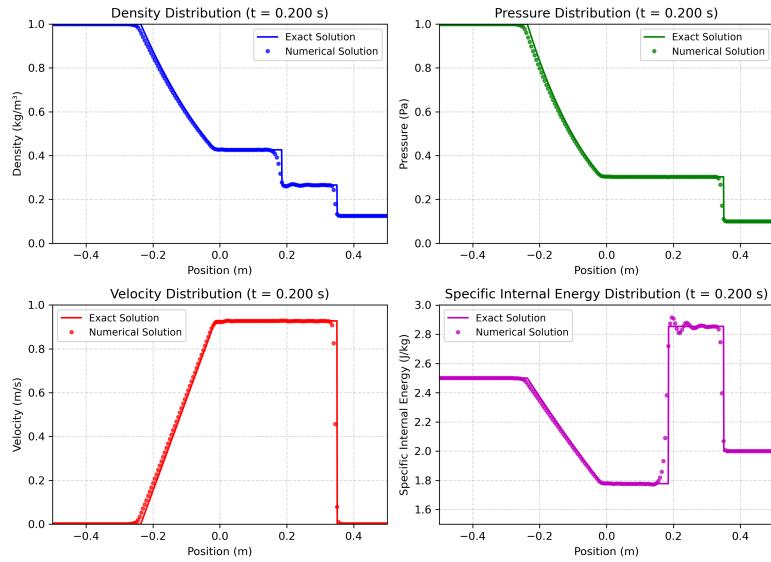


图 12: FVS-Steger-Warming + WENO 格式结果

Sod Shock Tube Simulation (FVS-Steger-Warming + Group Velocity Control (GVC)) at t = 0.200s

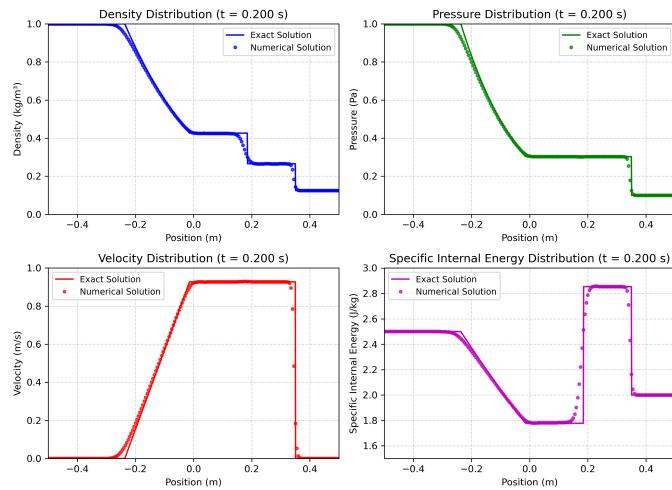


图 13: FVS-Steger-Warming + GVC 格式结果

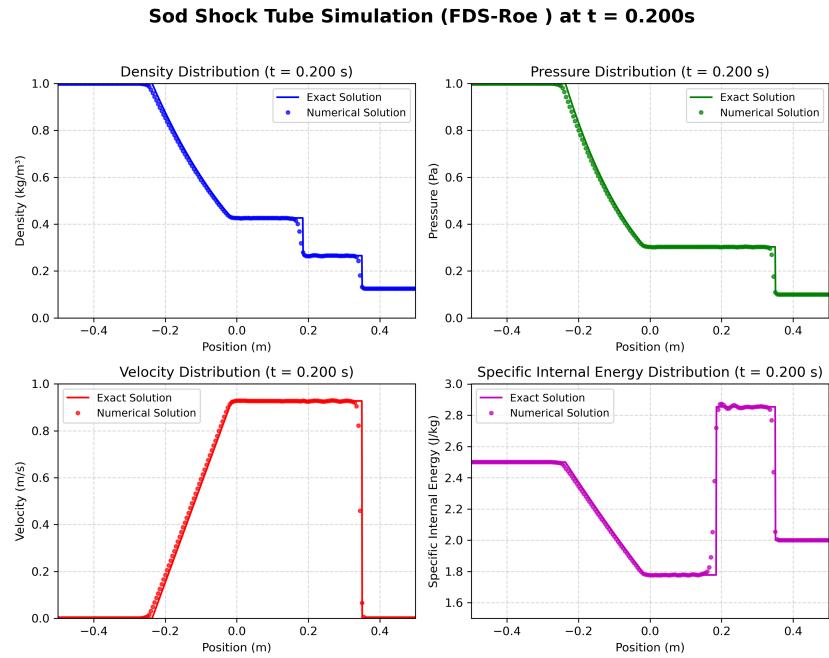


图 14: FDS-ROE + 5 阶 WENO 格式结果

5 AI 工具使用说明表

| AI 名称 | 生成代码功能 | 使用内容 |
|----------|----------------------|------------------------------|
| Copilot | latex 格式框架 | figure 参数调整、图片插入 |
| Deepseek | python 绘图调整 | 1033-1120 行图绘制的具体参数调整 |
| Deepseek | gitignore 文件忽略 | 全由 ai 添加 |
| github | sod.shock.tube 精确解获取 | 472-813 行 analytic_sod 函数的定义 |

6 commit 信息

commit 图如下：