



# 第三章

## 函数

作者：zheliku

时间：2026-01-01

版本：1.0.0

# 目录

<b>第一章 函数的概念 . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 映射 . . . . .	1
1.2 定义 . . . . .	2
1.3 三大要素 . . . . .	2
1.4 定义域选取方式 . . . . .	3
1.5 值域求解 . . . . .	3
1.6 表达式求解 . . . . .	4
<b>第二章 函数的性质 . . . . .</b>	<b>5</b>
2.1 单调性 . . . . .	5
2.2 奇偶性 . . . . .	6
2.3 周期性 . . . . .	7
2.4 类周期函数 . . . . .	8
<b>第三章 基本初等函数 . . . . .</b>	<b>10</b>
3.1 幂函数 . . . . .	10
3.2 二次函数 . . . . .	11
3.3 指数函数与对数函数 . . . . .	12
3.3.1 指数函数 . . . . .	12
3.3.2 对数函数 . . . . .	13
3.4 反函数 . . . . .	14
3.5 特殊函数 . . . . .	15
<b>第四章 函数的对称、平移和缩放 . . . . .</b>	<b>16</b>
4.1 对称性 . . . . .	16
4.2 平移与缩放 . . . . .	17
4.3 平移缩放探究 . . . . .	19
<b>第五章 抽象函数 . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>例题答案 . . . . .</b>	<b>22</b>

# 第一章 函数的概念

## 内容提要

- |                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 映射   | <input type="checkbox"/> 定义  |
| <input type="checkbox"/> 三大要素 | <input type="checkbox"/> 定义域 |
| <input type="checkbox"/> 值域   | <input type="checkbox"/> 表达式 |

## 1.1 映射

### 定义 1.1 映射

两个非空集合  $A$  与  $B$  间存在着对应关系，而且对于  $A$  中的每一个元素  $a$ ， $B$  中总有唯一的一个元素  $b$  与它对应，则将这种对应称为从  $A$  到  $B$  的映射，记作：

$$f : A \rightarrow B \quad (1.1)$$

其中：

1.  $b$  称为  $a$  在映射  $f$  下的像，记作  $b = f(a)$ 。
2.  $a$  称为  $b$  关于映射  $f$  的原像，记作  $a = f^{-1}(b)$ 。
3. 集合  $A$  中所有元素的像的集合称为映射的值域，记作  $f(A)$ 。

### 笔记

1. 像必须唯一，原像可以不唯一。
2.  $B$  中不是所有元素都需要有来自  $A$  的对应。

### 分类：

1. 单射
2. 满射
3. 双射（一一映射）

**思考 1.1**

看看下面哪些是映射?如果是,是什么集合到什么集合的映射?又是哪一类映射?反过来还成立吗?

1. 学生与班级的对应关系
2. 学生与学号的对应关系
3. 商场里物品与价格的对应关系

## 1.2 定义

**定义 1.2 函数**

在某个变化过程中有两个变量  $x, y$ , 如果对于  $x$  在某个实数集合  $D$  内的每一个确定的值, 按照某个对应法则  $f$ ,  $y$  都有唯一确定的实数值与它对应, 那么  $y$  就是  $x$  的函数, 记作:

$$y = f(x), x \in D \quad (1.2)$$

其中:

1.  $x$  叫做自变量(原像)
2.  $y$  叫做因变量(像)
3.  $x$  的取值范围  $D$  叫做函数的定义域(集合  $A$ )
4.  $y$  值的集合叫做函数的值域(集合  $B$ )

**例 1.1** 定义集合  $A = \{-1, 0, 1\}$ , 集合  $B = \{\dots\}$ ,  $f$  为  $A \rightarrow B$  的映射, 则下列说法不正确的是( )

- A. 若  $f$  为一一映射, 则集合  $B$  的真子集个数为 3
- B. 若  $f: x \rightarrow -x$ , 则集合  $A = B$
- C. 若集合  $B = \{0, 1\}$ , 则可能为  $f: x \rightarrow x^2$
- D. 若  $f$  为满射, 则可将  $f$  看成是定义在集合  $A$  上的函数, 且值域为  $B$

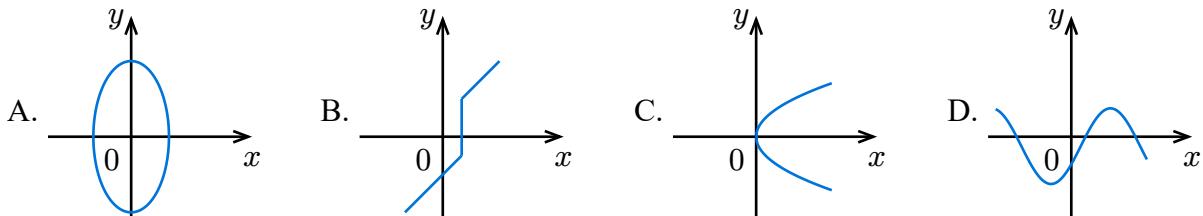
## 1.3 三大要素

定义域  $\xrightarrow{\text{对应法则}}$  值域

**例 1.2** 下面各组函数中是同一函数的是 ( )

- A.  $y = \sqrt{-2x^3}$  与  $y = \sqrt{-2x}$   
 B.  $y = (\sqrt{x})^2$  与  $y = |x|$   
 C.  $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$  与  $y = \sqrt{x^2-1}$   
 D.  $f(x) = x^2 - 2x - 1$  与  $g(t) = t^2 - 2t - 1$

**例 1.3** 如图, 可以表示函数  $f(x)$  的图象的是 ( )



## 1.4 定义域选取方式

1. 给定定义域, 则使用该定义域。
2. 未给定定义域, 则尽可能取最大值:
  - 分母不为零
  - 偶数次根内非负
  - 其他 (如对数真数大于 0 等)

**例 1.4** 【2023·朝阳二模, 11】函数  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}$  的定义域为 \_\_\_\_\_。

**例 1.5** 已知函数  $f(2x-1)$  的定义域为  $(0, 1)$ , 则函数  $f(1-3x)$  的定义域为 \_\_\_\_\_。

## 1.5 值域求解

**例 1.6** 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

$$(1) y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5} \quad (2) y = 4 - \sqrt{3 + 2x - x^2} \quad (3) y = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$$

**例 1.7** 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

$$(1) y = \frac{x+2}{3x-4} \quad (2) y = \frac{3+x}{4-x} \quad (3) y = \frac{3x+1}{x-2}$$

**例 1.8** 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

$$(1) y = \sqrt{1-2x} - x \quad (2) y = x + \sqrt{1-2x} \\ (3) y = x + \sqrt{1-x^2} \quad (4) y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$$

**例 1.9** 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

$$(1) y = \frac{2x^2 - x + 1}{2x - 1} \left( x > \frac{1}{2} \right) \quad (2) y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6}$$

$$(3) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 1}$$

## 1.6 表达式求解

**例 1.10** 【2024 全国高三练习】求解下列函数的表达式

$$(1) f(x^2 - 2) = x^4 + 3x^2 - 4 \quad (2) f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - 1$$

**例 1.11** 【2024 全国高三练习】求解下列函数的表达式

$$(1) f(x - 1) + 2f(1 - x) = 2x - 3 \quad (2) f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 1$$
$$(3) f(x) = 2x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) - 3x$$

**例 1.12** 【2024 全国高三练习】求解下列函数的表达式

$$(1) f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x + 1$$

## 第二章 函数的性质

### 内容提要

- 单调性
- 奇偶性
- 周期性
- 类周期

### 2.1 单调性

1.  $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$ , 则  $f(x)$  单调递增, 记为  $f(x) \uparrow$
2.  $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$ , 则  $f(x)$  单调递减, 记为  $f(x) \downarrow$

等价表示:

1.  $f(x) \uparrow \Leftrightarrow x_1 - x_2$  与  $f(x_1) - f(x_2)$  同号
2.  $f(x) \downarrow \Leftrightarrow x_1 - x_2$  与  $f(x_1) - f(x_2)$  异号
3.  $f(x) \uparrow \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

#### 思考 2.1

1.  $f(x) = \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  上均单调递减, 能说  $f(x)$  在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上单调递减吗?

2. 增函数与增函数相加, 结果还是增函数吗?

- 增 + 增 = \_\_\_\_\_
- 增 - 减 = \_\_\_\_\_
- 增 × 增 = \_\_\_\_\_
- 增 / 减 = \_\_\_\_\_

**例 2.1** 判断下列函数的单调性, 并给出证明:

(1)  $f(x) = \sqrt{x}$

(2)  $f(x) = x^2$

(3)  $f(x) = x + \frac{a}{x} (a \in \mathbb{R})$

**例 2.2** (多选) 如果函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增,  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ , 下列结论中正确的  
是 ( )

- A.  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$   
 B.  $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$   
 C.  $f(a) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(b)$   
 D.  $f(x_1) > f(x_2)$

**例 2.3** 【2022 陕西安康六校高一期末联考】已知函数  $f(x)$  在定义域  $(-1, 1)$  上单调递减，且  $f(1-a) < f(2a-1)$ ，则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**例 2.4** 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0 \\ 4x - x^2, & x < 0 \end{cases}$ ，若  $f(2 - a^2) > f(a)$ ，则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$   
 B.  $(-1, 2)$   
 C.  $(-2, 1)$   
 D.  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

**例 2.5** 【2022 安徽江淮十校高一联考】已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - mx, & x \geq 2 \\ -\frac{m}{x}, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$  对于  $\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ ，都有  $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0$ ，则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

## 2.2 奇偶性

	奇函数	偶函数
图像	关于原点对称	关于 $y$ 轴对称
定义域	关于原点对称	关于原点对称
特点	$f(x) + f(-x) = 0$ $f(0) = 0$ (如果 $x = 0$ 有意义)	$f(x) - f(-x) = 0$

### 思考 2.2

1. 下列函数是奇函数还是偶函数？还是都不是？

$$(1) f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \quad (2) f(x) = \frac{3^x}{3^x + 1} \quad (3) f(x) = \frac{2-x}{2+x}$$

2. 奇偶函数相运算得到的函数有什么性质？

- 奇  $\pm$  奇 = \_\_\_\_\_；奇  $\times$  奇 = \_\_\_\_\_；奇 / 奇 = \_\_\_\_\_
- 偶  $\pm$  偶 = \_\_\_\_\_；偶  $\times$  偶 = \_\_\_\_\_；偶 / 偶 = \_\_\_\_\_
- 奇  $\pm$  偶 = \_\_\_\_\_；奇  $\times$  偶 = \_\_\_\_\_；奇 / 偶 = \_\_\_\_\_

3. 如何将一个定义域对称的函数写成一个奇函数与一个偶函数之和？

**例 2.6** 【2020 河南实验中学月考】设函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  的定义域都为  $\mathbb{R}$ ,  $f(x)$  为奇函数,  $g(x)$  为偶函数, 则下列结论正确的是 ( )

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数   | B. $ f(x)  \cdot g(x)$ 是奇函数 |
| C. $f(x) \cdot  g(x) $ 是奇函数 | D. $ f(x) \cdot g(x) $ 是奇函数 |

**例 2.7** 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟练习改编】已知函数  $f(x), g(x)$  分别是定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数、奇函数, 且满足  $f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ , 则  $f(-2) + g(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**例 2.8** 【宁夏银川一中、昆明一中 2024 届高三联合二模】已知函数  $f(x) = ax^5 + b \sin x + c$ , 若  $f(-1) + f(1) = 2$ , 则  $c$  的值为 ( )

- |       |      |      |                  |
|-------|------|------|------------------|
| A. -1 | B. 0 | C. 1 | D. $\frac{2}{3}$ |
|-------|------|------|------------------|

**例 2.9** 【2020 贵州贵阳一中月考】设函数  $f(x) = 3 + x + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$  的最大值为  $M$ , 最小值为  $N$ , 则  $M + N$  的值为 ( )

- |      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| A. 3 | B. 2 | C. 6 | D. 4 |
|------|------|------|------|

## 2.3 周期性

若函数满足  $f(x+a) = f(x)$ , 则函数的周期  $T = a$ 。(经过  $a$  个单位一个周期)

序号	条件	周期
1	$f(x+a) = f(x-a)$ , $f(x+a) + f(x) = k$	$T = 2a$
2	$f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ , $f(x+a) = \pm \frac{1}{f(x)}$ $f(x+a) = \frac{1}{1-f(x)}$ , $f(x) = 1 - \frac{1}{f(x+a)}$	$T = 3a$ (部分情况)
3	$f(x+a) = -\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ , $f(x+a) = -\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$	$T = 4a$
4	$f(x+a) = f(x+b)$	$T =  a-b $

### 笔记

1. 有印象即可, 写题时尝试代值观察得出  $T$ 。
2. 核心处理思想: 作图。
3. 常伴有接近当年年份的值出现, 如 2025, 2024...

**例 2.10** 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足下列各条件, 不能得出函数  $f(x)$  具有周期性的是 ( )

- A.  $f(x)f(x+2) = 2022$       B.  $f(x) = f(4-x)$   
 C.  $f(x+1) = f(x) + f(x+2)$       D.  $f(x)$  为奇函数且  $f(x) = f(2-x)$

**例 2.11** 已知函数  $f(x) = \begin{cases} f(x-2), & x > 1 \\ |x| - 1, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ , 关于  $x$  的方程  $f(x) = \log_a(x+1)$  恰有 5 个解, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right)$       B.  $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right)$   
 C.  $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$       D.  $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$

**例 2.12** 【2023 上海同济大学第一附属中学月考】若函数  $y = f(x), x \in R$ , 满足  $f(x+2) = f(x)$ , 且  $x \in (-1, 1]$  时,  $f(x) = |x|$ , 则函数  $f(x)$  的图象与函数  $y = \log_4|x|$  的图象的交点的个数为 ( )

- A. 3      B. 4      C. 6      D. 8

**例 2.13** 定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$ , 且当  $x \in [0, 2]$  时,  $f(x) = 2x$ , 则  $f\left(-\frac{9}{2}\right)$  的值为 ( )

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

**例 2.14** 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数  $f(x)$  满足  $f(x) \cdot f(x+2) = 13$ .

- (1) 求证:  $f(x)$  是周期函数。  
 (2) 若  $f(1) = 2$ , 求  $f(99)$  的值。  
 (3) 若  $x \in [0, 2]$  时,  $f(x) = x$ , 试求  $x \in [4, 8]$  时, 函数  $f(x)$  的解析式。

## 2.4 类周期函数

形如下列的函数称为类周期函数:

$$f(x+a) = \lambda f(x) \quad (2.1)$$

主要处理手段: 数形结合。

**例 2.15** 【2022 云南保山第一次质检】已知函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = 2f(x)$ , 当  $x \in [0, 2)$  时,  $f(x) = x$ , 那么  $f(21)$  的值为 ( )

- A.  $2^{10}$       B.  $2^{11}$       C.  $2^{20}$       D.  $2^{21}$

**例 2.16** 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟练习】定义域为  $\mathbb{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) = 2f(x)$ , 且当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = x^2 - x$ , 当  $x \in [-2, -1]$  时,  $f(x)$  的最小值为 ( )

- A.  $-\frac{1}{16}$       B.  $-\frac{1}{8}$       C.  $-\frac{1}{4}$       D. 0

**例 2.17** 【2022 云南保山第一次质检】已知函数  $f(x) = \begin{cases} 1 - |1 - x|, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2f(x-2), & 2 < x \leq 8 \end{cases}$ , 若方程  $f(x) - kx = 0$  恰好有 4 个实数根, 则实数  $k$  的取值范围是 ( )

- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| A. $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{7}\right)$ | B. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ |
| C. $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{7}\right)$ | D. $\left(\frac{4}{5}, 1\right)$ |

**例 2.18** 【2022 河北沧州一中月考】定义在  $[0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = \frac{1}{2}f(x)$ , 当  $x \in [0, 2)$  时,  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ . 若直线  $y = a$  与  $f(x)$  的图像恰有 8 个交点  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_8, y_8)$ , 则  $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

# 第三章 基本初等函数

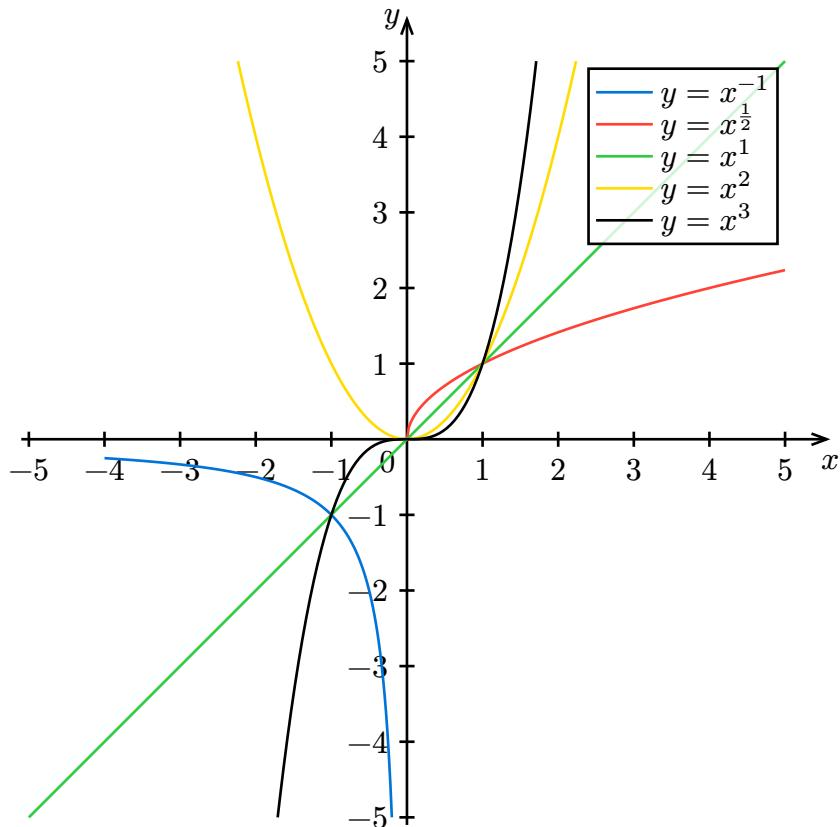
## 内容提要

- 幂函数
- 指数与对数
- 特殊函数

- 二次函数
- 反函数

## 3.1 幂函数

$$y = x^k \quad (k \in \mathbb{Q}) \quad (3.1)$$



常见幂函数特征：

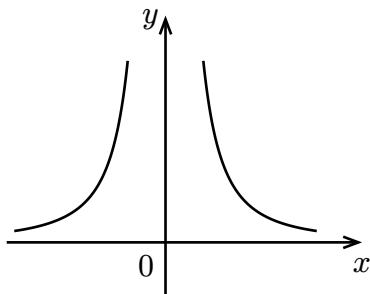
1. 在  $(0, +\infty)$  上都有定义
  - (a).  $k > 0$  时，单调递增；
  - (b).  $k < 0$  时，单调递减。
2. 所有幂函数图像都经过  $(1, 1)$  点。
3. 当  $k$  为整数时：
  - $k$  为奇数时，定义域为  $\mathbb{R}$ ，图像关于原点对称（奇函数）；

- $k$  为偶数时, 定义域为  $\mathbb{R}$ , 图像关于  $y$  轴对称 (偶函数)。

**例 3.1** 【2024 宁夏固原高三隆德县中学校联考期中】已知函数  $f(x) = (m^2 - 2m - 2) \cdot x^{m-2}$  是幂函数, 且在  $(0, +\infty)$  上递减, 则实数  $m$  的值为 ( )

- A. -1      B. -1 或 3      C. 3      D. 2

**例 3.2** 【2024 全国高三专题练习】已知幂函数  $y = x^{\frac{p}{q}}$  ( $p, q \in \mathbb{Z}$  且  $p, q$  互质) 的图象关于  $y$  轴对称, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 则 ( )



- A.  $p, q$  均为奇数, 且  $\frac{p}{q} > 0$       B.  $q$  为偶数,  $p$  为奇数, 且  $\frac{p}{q} > 0$   
 C.  $q$  为奇数,  $p$  为偶数, 且  $\frac{p}{q} < 0$       D.  $q$  为奇数,  $p$  为偶数, 且  $\frac{p}{q} < 0$

## 3.2 二次函数

对于二次函数:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

### 1. 对称轴:

$$x = -\frac{b}{2a} \quad (3.2)$$

### 2. 零点公式:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.3)$$

### 3. 判别式:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (3.4)$$

### 4. 韦达定理:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (3.5)$$

**例 3.3** 【2024 全国高三专题练习】设  $a$  为实数, 若方程  $x^2 - 2ax + a = 0$  在区间  $(-1, 1)$  上有两个不相等的实数解, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| A. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ | B. $(-1, 0)$  |
| C. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$   | D. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (1, +\infty)$ |

**例 3.4** 【2024 全国高三专题练习】方程  $x^2 + (m-2)x + 5-m = 0$  的一根在区间  $(2, 3)$  内, 另一根在区间  $(3, 4)$  内, 则  $m$  的取值范围是 ( )

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| A. $(-5, -4)$                       | B. $\left(-\frac{13}{3}, -2\right)$ |
| C. $\left(-\frac{13}{3}, -4\right)$ | D. $(-5, -2)$                       |

**例 3.5** 【2024 全国高三专题练习】关于  $x$  的方程  $ax^2 + (a+2)x + 9a = 0$  有两个不相等的实数根  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < 1 < x_2$ , 那么  $a$  的取值范围是 ( )

- |                                     |                            |
|-------------------------------------|----------------------------|
| A. $-\frac{2}{7} < a < \frac{2}{5}$ | B. $a > \frac{2}{5}$       |
| C. $a < -\frac{2}{7}$               | D. $-\frac{2}{11} < a < 0$ |

**例 3.6** 【2024 上海高三专题练习】已知  $f(x) = ax^2 + 2bx + 4c$ . ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ )。

(1) 若  $f(0) = -1, a + 2b = 0$ , 解关于  $x$  的不等式  $f(x) < (a+1)x - 3$ 。

(2) 若  $a + c = 0, f(x)$  在  $[-2, 2]$  上的最大值为  $\frac{2}{3}$ , 最小值为  $-\frac{1}{2}$ , 求证:  $|\frac{b}{a}| \leq 2$ 。

## 3.3 指数函数与对数函数

### 指数运算

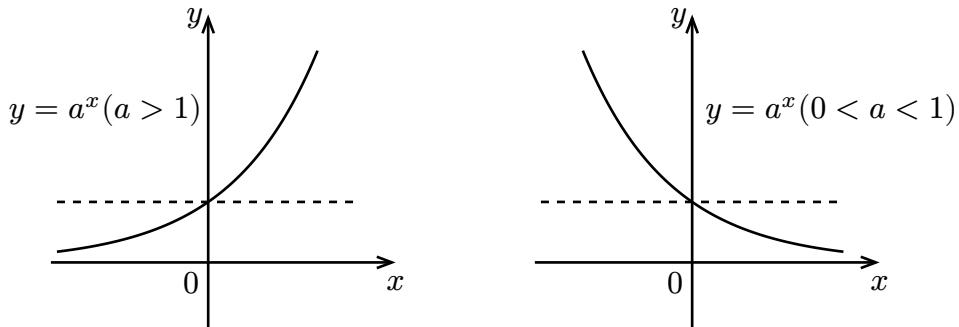
$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y}, & \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, & (a^x)^y &= a^{xy} \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, & a^{\frac{1}{x}} &= \sqrt[x]{a}, & (ab)^x &= a^x b^x \end{aligned} \tag{3.6}$$

### 3.3.1 指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1) \tag{3.7}$$

1. 定义域  $\mathbb{R}$ , 值域  $(0, +\infty)$
2. 图像过点  $(0, 1)$
3.  $a > 1$  单调递增;  $0 < a < 1$  单调递减
4.  $y = a^x$  与  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  图像关于  $y$  轴对称

$$5. f(x)f(-x) = 1$$



### 思考 3.1

为什么  $a$  不能小于 0?

## 对数运算

$$\log_a m + \log_a n = \log_a(mn), \quad \log_a m - \log_a n = \log_a\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$n \log_a m = \log_a m^n, \quad \frac{1}{n} \log_a m = \log_{a^n} m \quad (3.8)$$

$$-\log_a m = \log_{\frac{1}{a}} m = \log_{\frac{1}{a}} m$$

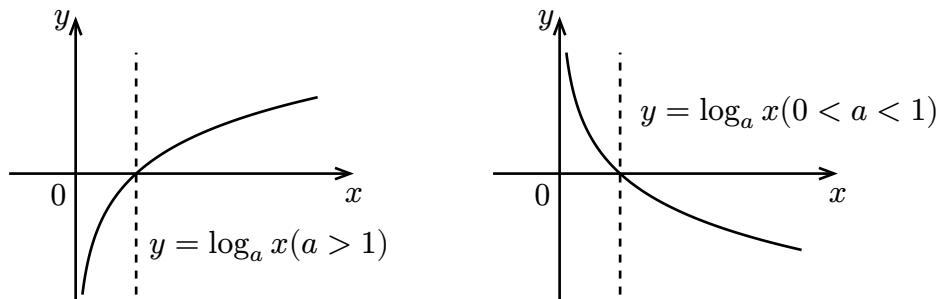
## 换底公式

$$\begin{aligned} \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \\ \log_n m &= \frac{1}{\log_m n} \end{aligned} \quad (3.9)$$

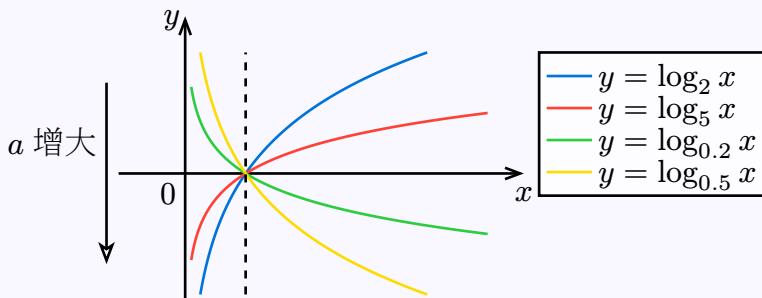
## 3.3.2 对数函数

$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1) \quad (3.10)$$

1. 定义域  $(0, +\infty)$ , 值域  $\mathbb{R}$
2. 图像过点  $(1, 0)$
3.  $a > 1$  单调递增;  $0 < a < 1$  单调递减
4.  $y = \log_a x$  与  $y = \log_{\frac{1}{a}} x$  图像关于  $x$  轴对称

**扩展 3.1**

1.  $a$  与图像陡峭程度的关系。



2. 常见对数值

$$\begin{aligned}\ln 2 &\approx 0.693, \quad \ln 3 \approx 1.098, \quad \ln 5 \approx 1.609 \\ \log_{10} 2 &\approx 0.301, \quad \log_{10} 3 \approx 0.477\end{aligned}\tag{3.11}$$

**例 3.7** 【2024 全国高三专题练习】已知  $x_1$  是方程  $x \cdot 3^x = 2$  的根,  $x_2$  是方程  $x \cdot \log_3 x = 2$  的根, 则  $x_1 x_2$  的值为 ( )

- A. 2      B. 3      C. 6      D. 10

**例 3.8** 【2024 全国高三专题练习】若  $x_1$  满足  $e^x = 3 - x$ ,  $x_2$  满足  $x + \log_2 x = 3$ , 令  $a + b = x_1 + x_2$ , 其中  $a, b > 0$ , 则  $\frac{7b^2 + 1}{ab}$  的最小值为 ( )

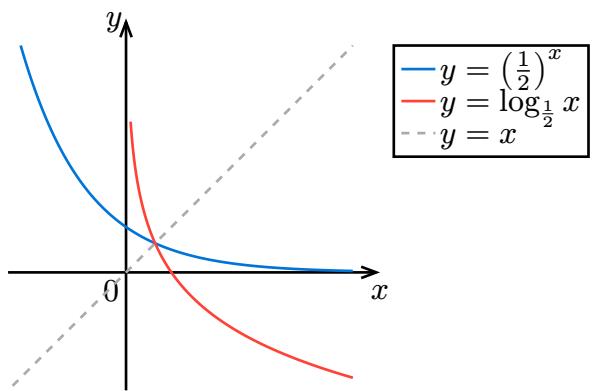
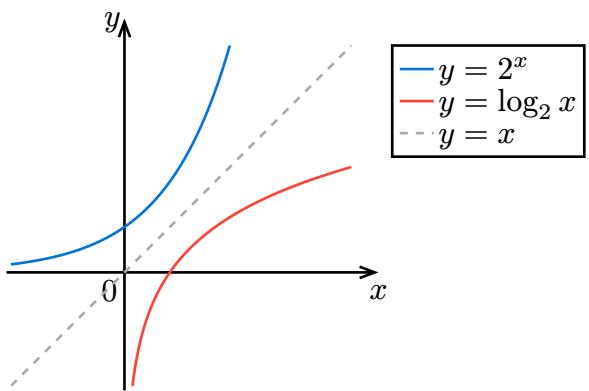
- A. 1      B.  $\frac{7}{3}$       C.  $\frac{67}{9}$       D. 2

## 3.4 反函数

原函数  $y = f(x)$  的反函数为  $x = f^{-1}(y)$ , 通常记为  $y = f^{-1}(x)$ 。

1. **条件:** 原函数为一一映射。
2. **特点:** 定义域和值域互换; 图像关于  $y = x$  对称。

举例: 指数函数  $y = a^x$  的反函数为对数函数  $y = \log_a x$ 。



## 3.5 特殊函数

**指对中的奇/偶函数:**

1.  $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} (a > 0)$  (奇函数)
2.  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$  (奇函数)
3.  $f(x) = \ln\left(\frac{a - x}{a + x}\right) (a > 0)$  (奇函数)
4.  $f(x) = \ln(e^{2ax} + 1) - ax (a > 0)$  (偶函数)

**指对中的对称函数**

1.  $f(x) = \frac{a^x}{a^x + 1} (a > 0)$

# 第四章 函数的对称、平移和缩放

## 内容提要

- 对称性
- 缩放

- 平移
- 探究

## 4.1 对称性

**点对称:** 函数  $f(x)$  关于点  $(a, b)$  对称, 则有

$$f(a-x) + f(a+x) = 2b \quad (4.1)$$

或

$$f(m-x) + f(n+x) = 2b \quad (4.2)$$

其中  $m+n=2a$ 。

**轴对称:** 函数  $f(x)$  关于直线  $x=a$  对称

$$f(a-x) = f(a+x) \quad (4.3)$$

或

$$f(m-x) = f(n+x) \quad (4.4)$$

其中  $m+n=2a$ 。

### 思考 4.1

1. 为什么没有  $f(x)$  关于直线  $y=a$  对称的情况?
2. 对称性与周期性的特点有什么不同?
3. 寻找下列函数的中心对称点:

$$(1) f(x) = \frac{3^x}{3^x+1} \quad (2) f(x) = \frac{2-x}{2+x} \quad (3) f(x) = \frac{1}{x-1}$$

**例 4.1** 已知二次函数  $f(x) = x^2 + bx + c$  满足  $f(3-x) = f(x)$ , 若其在  $(a, 2a-1)$  上单调递减, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$       B.  $\left(1, \frac{5}{4}\right]$   
C.  $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$       D.  $(-\infty, 2]$

**例 4.2** 【2021 江苏无锡大桥中学高一期中】若函数  $f(x) = \frac{x}{x+1}$ , 则  $f(1) + f(2) + \dots + f(50) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{50}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**例 4.3** 【2023-2024 安徽省部分学校高一上期末】已知函数  $f(x) = \frac{2}{1+3^x}$ , 则  $f(-2024) + \dots + f(-1) + f(0) + f(1) + \dots + f(2024)$  的值为 ( )

A. 4047

B. 4048

C. 4049

D. 4050

### 笔记 二次对称周期

1. 若  $f(x)$  有两条对称轴  $x = a, x = b$ , 则  $T = 2|b - a|$ 。
2. 若  $f(x)$  有两个对称中心  $(a, c), (b, c)$ , 则  $T = 2|b - a|$ 。
3. 若  $f(x)$  有一条对称轴  $x = a$  和一个对称中心  $(b, c)$ , 则  $T = 4|b - a|$ 。

**例 4.4** 【广东省广州市三校 2023-2024 高一上期末联考】已知奇函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 1$  对称, 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = 2^x + b$ , 则  $f\left(\frac{2023}{2}\right)$  的值为 ( )

A.  $-1 - \sqrt{2}$ B.  $1 - \sqrt{2}$ C.  $\sqrt{2} + 1$ D.  $\sqrt{2} - 1$ 

**例 4.5** 【广东省佛山市 2023-2024 高一上期末】(多选) 已知函数  $f(x)$  满足: 对任意的  $x \in R$ , 都存在  $f(-x) = -f(x)$ ,  $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{3}{2} + x\right)$ , 且  $f(1) = 2$ , 则 ( )

A.  $y = f(x)$  关于  $(1, 0)$  对称B.  $f(4 - x) = -f(x)$ C.  $f(x)$  的值域为  $[-2, 2]$ D.  $\sum_{k=0}^{19} f(k) = 0$ 

## 4.2 平移与缩放

### 平移变换

#### 1. $x$ 轴平移 《左加右减》

探究:  $f(x) = x^2$  与  $f(x) = (x - 1)^2$  的位置关系。

- (a).  $f(x)$  向左平移  $a$  个单位得到  $f(x + a)$  的图像 ( $a > 0$ )。
- (b).  $f(x)$  向右平移  $a$  个单位得到  $f(x - a)$  的图像 ( $a > 0$ )。

#### 2. $y$ 轴平移 《下加上减》

探究:  $f(x) = x^2$  与  $f(x) + 2$  的位置关系。

- (a).  $f(x)$  向上平移  $a$  个单位得到  $f(x) + a$  的图像 ( $a > 0$ )。
- (b).  $f(x)$  向下平移  $a$  个单位得到  $f(x) - a$  的图像 ( $a > 0$ )。

## 缩放变换

### 1. $x$ 轴缩放 《扩除缩乘》

探究:  $f(x) = x^2 - 1$  与  $f(x) = (2x)^2 - 1$  的位置关系。

- (a).  $f(x)$  所有横坐标缩小为原来的  $\frac{1}{a}$  倍, 得到  $f(ax)$  的图像 ( $a > 1$ )。
- (b).  $f(x)$  所有横坐标扩大为原来的  $a$  倍, 得到  $f\left(\frac{x}{a}\right)$  的图像 ( $a > 1$ )。

### 2. $y$ 轴缩放 《扩除缩乘》

探究:  $f(x) = x^2 - 1$  与  $f(x) = 2(x^2 - 1)$  的位置关系。

- (a).  $f(x)$  所有纵坐标扩大为原来的  $a$  倍, 得到  $af(x)$  的图像 ( $a > 1$ )。
- (b).  $f(x)$  所有纵坐标缩小为原来的  $\frac{1}{a}$  倍, 得到  $\frac{1}{a}f(x)$  的图像 ( $a > 1$ )。

## 思考 4.2

1. 下列情况中,  $g(x)$  的图像可以由  $f(x)$  经过哪些变换得到?

- $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 3\sqrt{2x+1}$
- $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = 2x^2 - 4x + 3$

2. 如何将  $f(x)$  变换得到  $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$ ?

(a). 方式一: 先向 \_\_\_\_\_ 平移 \_\_\_\_\_ 个单位, 然后将横坐标缩放为原来的 \_\_\_\_\_。

(b). 方式二: 先将横坐标缩放为原来的 \_\_\_\_\_, 然后向 \_\_\_\_\_ 平移 \_\_\_\_\_ 个单位。

(c). 两种方式的不同之处在于?

3.  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  的图像由哪个基础函数变换得到?

**例 4.6** 【2023 丰台二模, 7】为了得到函数  $y = \log_2(2x - 2)$  的图象, 只需把函数  $y = \log_2 x$  的图象上的所有点 ( )

- A. 向左平移 2 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度
- B. 向右平移 2 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度
- C. 向左平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
- D. 向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

**例 4.7** 【2019 海淀二模】把函数  $y = 2^x$  的图象向右平移  $t$  个单位长度, 所得图象对应的函数解析式为  $y = \frac{2^x}{3}$ , 则  $a$  的值为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\log_2 3$       C.  $\log_3 2$       D.  $\sqrt{3}$

**例 4.8** 【2020 山东曲阜一中月考】函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且  $f(x+2)$  的图像关于直线  $x = -2$  对称。若  $f(-2) = 1$ , 则  $f(x-2) \leq 1$  的  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**例 4.9** 【重庆市第八中学校 2023-2024 高一上期末】设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ ,  $f(x+1)$  为奇函数,  $f(x+2)$  为偶函数, 当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x) = ax^2 + b$ 。若  $f(3) + f(4) = 6$ , 则  $f\left(\frac{13}{3}\right)$  的值为 ( )

- A.  $-\frac{4}{3}$       B.  $\frac{32}{9}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{4}{3}$

**例 4.10** 【湖南长沙市长郡中学 2023-2024 高一上期末】(多选) 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(4-x) = -f(x)$ ,  $f(2x+1)$  为偶函数,  $f(1) = 2$ 。函数  $g(x)(x \in \mathbb{R})$  满足  $g(x) = g(2-x)$ , 若  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  恰有 2023 个交点, 从左至右依次为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{2023}, y_{2023})$ , 则下列说法正确的是 ( )

- A.  $f(x)$  为奇函数      B. 2 为  $y = f(x)$  的一个周期  
C.  $y_{1012} = 2$       D.  $x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} = 2023$

## 4.3 平移缩放探究

### 扩展反比例函数:

1. 基础形式:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (4.5)$$

2. 扩展形式:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (4.6)$$

对称中心?

### 扩展对勾函数:

1. 基础形式:

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (4.7)$$

2. 扩展形式:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (4.8)$$

# 第五章 抽象函数

## 定义 5.1 抽象函数

只告诉了函数的关系式，而没有告诉具体的表达式。

### 处理方式

- 寻找已学过的函数模型进行匹配，探究其函数特征。
- 寻找特殊值带入（赋值法）。

### 常见模型

1. 一次函数： $f(x+y) = f(x) + f(y) + b$
2. 幂函数： $f(xy) = f(x)f(y)$
3. 指数函数： $f(x+y) = f(x)f(y)$
4. 对数函数： $f(xy) = f(x) + f(y)$
5. 周期函数： $f(x+a) + f(x) = k$

**例 5.1** 已知函数  $f(x)$  满足  $\forall x, y \in R, f(xy) = f(x)f(y)$ ，且  $f(-1) = 1, f(27) = 9$ ，当  $x \in [0, 1)$  时， $f(x) \in [0, 1)$ 。

- (1) 判断  $f(x)$  的奇偶性。
- (2) 判断  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上的单调性。
- (3) 若  $a \geq 0, f(a+1) \leq \sqrt[3]{9}$ ，求  $a$  的取值范围。

**例 5.2** 已知非常数函数  $f(x)$  满足  $\forall x, y \in R, f(x+y) = f(x)f(y)$ 。求证： $f(x) > 0$ 。

**例 5.3** 定义在  $(0, +\infty)$  的单调递增函数  $f(x)$  满足  $\forall x, y \in (0, +\infty), f(xy) = f(x) + f(y), f(3) = 1$ 。

- (1) 求  $f(1)$ 。
- (2) 若  $f(x) + f(x-8) \leq 2$ ，求  $x$  的取值范围。

**例 5.4** 已知函数  $f(x)$  满足  $\forall x, y \in R, f(x+y) = f(x) + f(y), f(-1) = -2, x > 0$  时， $f(x) > 0$ 。求  $f(x)$  在  $[-2, 1]$  上的值域？

**例 5.5** 【2022 全国新高考 II】已知  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ ，且  $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y), f(1) = 1$ ，则  $\sum_{k=1}^{22} f(k) = (\quad)$

A. -3

B. -2

C. 0

D. 1

**例 5.6**【安徽省蚌埠市 2024 学年高三上学期期末】已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x), g(x)$  满足：

1.  $f(0) = 1$ ;
2.  $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x - y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$ .

(1) 求  $f^2(x) - g^2(x)$  的值。

(2) 判断并证明函数  $f(x)$  的奇偶性。

(3) 若  $g(x)$  为奇函数，且  $\forall x > 0, g(x) > 0$ ，证明： $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增。

### 思考 5.1

1. 满足  $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) (\forall x, y \in \mathbb{R})$  的  $f(x)$  是偶函数吗？

# 例题答案

例 1.1

A

例 1.2

D

例 1.3

D

例 1.4

$[1, +\infty)$

例 1.5

$\left(0, \frac{2}{3}\right)$

例 1.6

(1)  $[0, 2]$

(2)  $[2, 4]$

(3)  $(0, 5]$

例 1.7

(1)  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

(2)  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

(3)  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

### 例 1.8

(1)  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(2)  $(-\infty, -1]$

(3)  $[-1, \sqrt{2}]$

(4)  $[\sqrt{2}, 2]$

### 例 1.9

(1)  $\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}, +\infty\right)$

(2)  $\left\{y \mid y \neq 1, y \neq \frac{2}{5}\right\}$

(3)  $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$

### 例 1.10

(1)  $f(x) = x^2 + 7x + 6 (x \geq -2)$

(2)  $f(x) = x^2 - 2x (x \neq 1)$

### 例 1.11

(1)  $f(x) = -2x - \frac{1}{3}$

(2)  $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

(3)  $f(x) = x + 2$

### 例 1.12

(1)  $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x - 1)}$

### 例 2.1

略

例 2.2

**AB**

例 2.3

$$\left(0, \frac{2}{3}\right)$$

例 2.4

**C**

例 2.5

$$\left(0, \frac{4}{3}\right]$$

例 2.6

**C**

例 2.7

$$-2$$

例 2.8

**C**

例 2.9

**C**

例 2.10

**B**

例 2.11

D

例 2.12

D

例 2.13

B

例 2.14

$$(1) T = 4$$

$$(2) \frac{13}{2}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x - 4, & 4 \leq x \leq 6 \\ \frac{13}{x-6}, & 6 < x \leq 8 \end{cases}$$

例 2.15

A

例 2.16

A

例 2.17

D

例 2.18

$$32 \quad \left( \frac{1}{16}, \frac{1}{8} \right)$$

### 例 3.1

A

### 例 3.2

D

### 例 3.3

C

### 例 3.4

C

### 例 3.5

D

### 例 3.6

(1) 若  $a = 0$ , 解集为  $(2, +\infty)$ ;

若  $a < 0$ , 解集为  $(2, +\infty) \cup \left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$ ;

若  $0 < a < \frac{1}{2}$ , 解集为  $\left(2, \frac{1}{a}\right)$ ;

若  $a = \frac{1}{2}$ , 解集为  $\emptyset$ ;

若  $a > \frac{1}{2}$ , 解集为  $\left(\frac{1}{a}, 2\right)$ 。

(2) 略

### 例 3.7

A

例 3.8

D

例 4.1

B

例 4.2

49.5

例 4.3

B

例 4.4

B

例 4.5

BD

例 4.6

D

例 4.7

B

例 4.8

[0, 4]

例 4.9

B

例 4.10

ACD

例 5.1

(1) 偶函数

(2) 单调递增

(3)  $[0, 2]$

例 5.2

略 (提示: 令  $x = y = \frac{x}{2}$ , 得  $f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$ , 再证  $f(x) \neq 0$ )

例 5.3

(1) 0

(2)  $(8, 9]$

例 5.4

$[-4, 2]$

例 5.5

A

例 5.6

(1) 1

(2) 偶函数

(3) 略