



第二章

一元二次函数和不等式

作者: zheliku

时间: 2025-12-16

版本: 1.0.0

目录

第一章 等式	1
1.1 不等式的基本性质	1
1.2 比较大小	1
1.3 高次不等式	2
1.4 分式不等式	2
第二章 一元二次函数	4
2.1 初中回顾	4
2.2 参数与图像的关系	5
第三章 基本不等式	7
3.1 均值不等式	7
3.2 算术平均值和几何平均值	7
3.3 基本不等式链	8
第四章 基本不等式的基本运用	9
4.1 基本不等式之间的关系	9
4.2 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的应用与变形	9
4.3 简化思想与设值回代	11
4.4 齐次	12
4.5 形变处理	13
4.6 总结回顾	14
第五章 基本不等式其他处理方式 (*)	15
第六章 不等式拓展 (*)	16
6.1 柯西不等式	16
6.2 排序不等式	16
例题答案	18

第一章 等式

内容提要

□ 不等式的基本性质

□ 比较大小

□ 高次不等式

□ 分式不等式

1.1 不等式的基本性质

性质	内容
对称性	$a > b \Leftrightarrow b < a$
传递性	$a > b, b > c \Rightarrow a > c$
可加性	$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$
可乘性	$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$
	$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$
同向可加性	$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$
同向同正可乘性	$a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$
可乘方性	$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$
可开方性	$a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$

例 1.1 已知 $a > b > 0, c < d < 0$, 则下列不等式一定成立的是 _____

A. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

B. $ac < bd$

C. $a - c > b - d$

D. $a + c > b + d$

例 1.2 已知 $a > b, ab > 0$, 则 $\frac{1}{a}$ _____ $\frac{1}{b}$

例 1.3 (1) 已知 $1 < a < 4, 2 < b < 8$, 求 $2a + 3b$ 、 $a - b$ 和 $\frac{a}{b}$ 的取值范围。

(2) 已知 $-6 < a < 8, 2 < b < 3$, 求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围。

(3) 已知 $-1 < a + b < 5, -4 < a - b < 2$, 求 $2a - 4b$ 的取值范围。

1.2 比较大小

1. 作差法: $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$ (常用)

2. 作商法: $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b (b > 0)$ (需要确定分母的符号)

例 1.4 已知 $a > b > 0$, 比较 $\frac{2a+b}{a+2b}$ 与 1 的大小。

例 1.5 已知 $a > b > 0, m > 0$, 则:

$$(1) \frac{b}{a} \frac{b+m}{a+m}$$

$$(2) \frac{a}{b} \frac{a+m}{b+m}$$

例 1.6 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 比较 $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ 与 $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ 的大小。

例 1.7 已知 n 为正整数, 则当 n 取多大时, $f(n) = -n^3 + 8n^2 + 4n + 3$ 取得最大值?

例 1.8 已知 n 为正整数, 则当 n 取多大时, $f(n) = (n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$ 取得最大值?

1.3 高次不等式

对于形如

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots > 0 \quad (1.1)$$

的不等式:

1. 数形结合法: 作出 $f(x)$ 的图像 (穿根法)

2. 根据图像确定不等式的解集

例 1.9 解不等式:

$$(x+1)(2-x)(x-3) > 0 \quad (1.2)$$

笔记 对于多项式 $f(x)$, 若 $f(n) = 0$, 则 $x-n$ 是 $f(x)$ 的因式, 即 $f(x) = (x-n) \cdot g(x)$

例 1.10 解不等式:

$$(1) x^3 - 7x + 6 < 0$$

$$(2) x^3 - x^2 - 17x - 15 > 0$$

1.4 分式不等式

对于 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 型:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \iff f(x) \cdot g(x) > 0 \quad (1.3)$$

对于 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ 型:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

例 1.11 解不等式:

$$\frac{x+2}{2x-1} \geq 0 \quad (1.5)$$

例 1.12 解不等式：

$$(1) \quad \frac{x^2 + x - 2}{4 - x} < 0$$

$$(2) \quad 2 + \frac{4}{x-1} > 0$$

$$(3) \quad \frac{1}{x} \geq x$$

第二章 一元二次函数

内容提要

□ 初中回顾

□ 参数与图像的关系

2.1 初中回顾

一元二次函数的一般形式：

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \quad (2.1)$$

1. 对称轴：

$$x = -\frac{b}{2a} \quad (2.2)$$

2. 顶点坐标：

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) \quad (2.3)$$

3. 判别式：

- $\Delta > 0$ ：两个不相等的实数根
- $\Delta = 0$ ：两个相等的实数根
- $\Delta < 0$ ：无实数根

4. 与 x 轴的交点个数：

- $\Delta > 0$ ：2 个交点
- $\Delta = 0$ ：1 个交点
- $\Delta < 0$ ：0 个交点

5. 单调性：

- $a > 0$ 时：

在 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递增

- $a < 0$ 时：

在 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递减

例 2.1 【2023 海南新高考模拟】函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的部分函数值如下表所示：

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	6	0	-4	-6	-6

则函数 $f(x)$ 的零点个数为 _____。

例 2.2 【2023 浙江省高一联考】已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ ，若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为 _____。

例 2.3 【2022 天津滨海新区阶段考试】若不等式 $(a-2)x^2 + 4(a-2)x + 3 > 0$ 的解集为 \mathbf{R} ，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left(2, \frac{11}{4}\right)$

B. $\left[2, \frac{11}{4}\right)$

C. $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$

D. $(-\infty, 2] \cup \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$

例 2.4 【2020 四川泸县上学期】已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(2, 3)$ ，则关于 x 的不等式 $cx^2 + bx + a < 0$ 的解集为 _____。

例 2.5 【2022 山东枣庄滕州期中】(多选) 已知关于 x 的不等式 $(x+2)(x-4) + a < 0$ ($a < 0$) 的解集为 (x_1, x_2) ，则 ()

A. $x_1 + x_2 = 2$

B. $x_1 x_2 < -8$

C. $-2 < x_1 < x_2 < 4$

D. $x_2 - x_1 > 6$

例 2.6 【2017 湖北襄阳襄城区校级模拟】设 a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$ 的两个实根，则 $(a-1)^2 + (b-1)^2$ 的最小值为 ()

A. $-\frac{49}{4}$

B. 18

C. 8

D. -6

2.2 参数与图像的关系

1. a 决定开口方向：

- $a > 0$: 开口向上
- $a < 0$: 开口向下

2. $|a|$ 决定开口大小: $|a|$ 越大, 开口越小

3. c 决定与 y 轴的交点: $(0, c)$

例 2.7 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且满足 $x_1 < -2, x_2 > 0, 0 < |c| < 1$, 则 ()

A. a 与 c 一定同号B. 若 $a > 0$, 则 $2a > b$ C. $2c(2a - b) + c^2 < 0$ D. 若 $a = 1$, 则 $0 < x_2 < \frac{1}{2}$ **思考 2.1**已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像, 判断以下结论:

1. 对称轴在哪里?

2. a 、 b 、 c 如何影响图像的形状、位置?

例 2.8 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 有两个零点 x_1 、 x_2 , 且满足 $-2 \leq x_1 \leq -1$, $3 \leq x_2 \leq 5$, 则下列说法不正确的是 ()

A. $-4a \leq b \leq -a$ B. 若 $a = 1$, 则 c 的取值范围是 $[-10, -3]$ C. $a + c \geq b$ D. 记 $f(x)$ 的最小值为 m , 则 m 的最大值为 $-4a$

例 2.9 【2022 浙江五校联考】已知关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 3a < 0$ 在 $(0, 2]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{4}{7}\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ D. $\left(\frac{4}{7}, +\infty\right)$

例 2.10 【2020 黑龙江齐齐哈尔第八中学月考】已知关于 x 的不等式 $ax^2 - (a + 1)x < -a + 13x$ 在区间 $[2, 3]$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____。

第三章 基本不等式

内容提要

□ 均值不等式

□ 算术/几何平均值

□ 基本不等式链

3.1 均值不等式

$$m^2 + n^2 \geq 2mn \quad (m, n \in \mathbb{R})$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a, b > 0) \quad (3.1)$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a, b > 0)$$

始终注意等号成立的条件：当且仅当 $a = b$ 时等号成立。

例 3.1 已知 $x > 0$ ，则 $x + \frac{16}{x}$ 的最小值为 _____。

例 3.2 函数 $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} (x > 1)$ 的最小值是 _____。

例 3.3 求下列函数的最大值。

(1) $y = x(4 - x)$

(2) $y = x(5 - 2x)$

(3) $y = 3x(6 - 2x)$

扩展 3.1

(1) $f(x) = ax + \frac{b}{x} (a, b > 0)$ 的图像（对勾函数）。

(2) 探究下列表达式之间的关系：

1) $a + \frac{1}{a}$ 、 $a - \frac{1}{a}$ 2) $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 3) $a^2 - \frac{1}{a^2}$

3.2 算术平均值和几何平均值

1. 算术平均值：

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \quad (3.2)$$

2. 几何平均值:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (3.3)$$

3. 高阶均值不等式:

算术平均值 \geq 几何平均值 ($a_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots$)

例 3.4 已知 $x > 0$, 则 $x^2 + \frac{16}{x}$ 的最小值为 _____。

例 3.5 求 $3x^2(6-2x)$ 的最大值?

例 3.6 【2021 天津卷】若 $a, b > 0$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 的最小值为 _____。

3.3 基本不等式链

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a > 0, b > 0) \quad (3.4)$$

(调和平均值 \leq 几何平均值 \leq 算术平均值 \leq 平方平均值)

第四章 基本不等式的基本运用

核心方法:换元法

4.1 基本不等式之间的关系

1. $a + b$
2. ab
3. $a^2 + b^2$

时刻注意新变量的取值范围

例 4.1 【2020 四川绵阳线上测试】已知 $a > 0, b > 0, 2a + b = ab$, 则当且仅当 $a =$ _____ 时, ab 取得最小值 _____。

例 4.2 【2020 河南郑州质量预测】已知 $a > 0, b > 0, 2a + b = 4$, 则 $\frac{3}{ab}$ 的最小值为 _____。

例 4.3 【2020 山东烟台期中】已知 $x > 0, y > 0, x + 3y + xy = 9$, 则 $x + 3y$ 的最小值为 _____。

例 4.4 已知正实数 x, y 满足 $x^2 + 4y^2 + x + 2y = 1$, 则 xy 的最大值为 _____。

例 4.5 已知正实数 a, b 满足 $(2a + b)^2 = 1 + 6ab$, 则 $\frac{ab}{2a + b + 1}$ 的最大值为 _____。

例 4.6 已知正实数 a, b 满足 $9a^2 + b^2 = 1$, 则 $\frac{ab}{3a + b}$ 的最大值为 _____。

扩展 4.1

(1) $a^3 + b^3$ 与 $a^3 - b^3$

4.2 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的应用与变形

1. $a + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
2. $a + b = 4 (a > 1, b > 2) \Rightarrow \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-2}$
3. $a + b = 1 (a > b > 0) \Rightarrow \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b}$
4. $a + b = 1 \Rightarrow \frac{(a+1)^2}{a} + \frac{(b+2)^2}{b}$
5. $a + b = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+2}$

6. $a + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{a}{b}$

例 4.7 【2020 福建漳平第一中学月考】若 $m > 0, n > 0, m + n = 1$, 且 $\frac{t}{m} + \frac{1}{n} (t > 0)$ 的最小值为 9, 则 $t =$ _____。

例 4.8 【2020 陕西咸阳期末】已知 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 (x, y > 0)$, 则 $2x + y$ 的最小值为 ()

A. 10 B. 9 C. 8 D. 7

例 4.9 设 $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = k$, 且 $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{4}{b^2 + 1}$ 的最小值为 1, 则 k 的值为 ()

A. 1 B. 4 C. 7 D. 9

例 4.10 设 $x > 1$, 则 $x + \frac{4}{x-1}$ 的最小值为 _____。

例 4.11 设 $a \geq 0$, 则 $a + \frac{1}{2a+5}$ 的最小值为 _____。

例 4.12 【2022 安徽部分重点高中高一联考】若 $x > 2$, 则 $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ 的最小值为 ()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 8

例 4.13 已知 $a > b > 0, a + b = 1$, 则 $\frac{4}{a-b} + \frac{1}{2b}$ 的最小值为 _____。

例 4.14 【2022 辽宁铁岭六校联考】若实数 $x + 3y = 3 \left(x > 1, y > \frac{1}{3} \right)$, 则 $\frac{x}{x-1} + \frac{3y}{3y-1}$ 的最小值为 ()

A. 6 B. 4 C. 3 D. 2

例 4.15 已知正实数 x, y 满足 $2x + y = 2$, 则 $\frac{4x^2}{y+1} + \frac{y^2}{2x+2}$ 的最小值为 _____。

例 4.16 【2020 吉林梅河口五中期中】若 $m, n > 0, m + 2n = 1$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{m+1}{n}$ 的最小值为 ()

A. 4 B. 5 C. 7 D. 6

例 4.17 【2022 黑龙江大庆实验中学高一期末】已知 $0 < x < \frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1+2x}{1-2x}$ 的最小值为 ()

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

4.3 简化思想与设值回代

方法 4.1 简化

1. 条件简化
2. 结论简化

例 4.18 【2022 天津部分区期末】已知 $a, b > 0, a + 2b = 1$, 则 $\frac{1}{b} + \frac{b}{2a+b}$ 的最小值为 _____。

例 4.19 若正数 a, b 满足 $2a + \frac{1}{b} = 1$, 则 $\frac{2}{a} + b$ 的最小值为 ()

- A. $4\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. 8 D. 9

例 4.20 【2022 湖北黄石期末】设 $x, y > 0$, 且满足 $\left(x - \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{16y}{x}$, 则当 $x + \frac{1}{y}$ 取最小值时, $x^2 + \frac{1}{y^2} =$ _____。

例 4.21 【2022 云南曲靖一中二模 (改编)】已知正数 a, b 满足 $\frac{2}{3a+b} + \frac{1}{a+2b} = 4$, 则 $7a + 4b$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{9}{4}$ B. 5 C. $\frac{5+2\sqrt{2}}{4}$ D. 9

例 4.22 【2018 湖南长沙一中月考】设正实数 a, b, c 满足 $a + 2b + c = 1$, 则 $\frac{1}{a+b} + \frac{9(a+b)}{b+c}$ 的最小值为 _____。

例 4.23 【2020 山东曲阜一中检测】已知实数 a, b 满足 $ab > 0$, 则 $\frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+2b}$ 的最大值为 ()

- A. $2 - \sqrt{2}$ B. $2 + \sqrt{2}$
C. $3 - 2\sqrt{2}$ D. $3 + 2\sqrt{2}$

例 4.24 已知实数 x, y 满足 $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$, 则 $x\sqrt{2+y^2}$ 的最大值为 _____。

方法 4.2 设值回代

针对需要求解的数学式, 设其值为某个参数 t , 将 t 带入题目所给的约束条件, 从而确定 t 的范围。

例 4.25 【2020 山东烟台期中, 同例 4-1-3】已知 $x > 0, y > 0, x + 3y + xy = 9$, 则 $x + 3y$ 的最小值为 _____。

例 4.26 非负实数 x, y 满足 $x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x^2y^2 = 32$

(1) $x + 2y$ 的最小值为多少?

(2) 求 $\sqrt{7}(x + 2y) + 2xy$ 的最大值。

例 4.27 【2020 浙江萧山二中等校联考】已知 a, b 是正实数, 且 $a + 2b - 3ab = 0$, 则 ab 的最小值为 _____, $a + b$ 的最小值为 _____。

例 4.28 已知正实数 $xy + 2x + 3y = 42$, 则 $xy + 5x + 4y$ 的最小值为 _____。

例 4.29 已知实数 x, y 满足 $xy - 2 = x + y$, 且 $x > 1$, 则 $y(x + 11)$ 的最小值为 ()

A. 21

B. 24

C. 25

D. 27

扩展 4.2

1. $ab + p \cdot a + n \cdot b + r = 0$ 的处理方式

4.4 齐次

回顾均值不等式:

$$\begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \quad (a, b > 0) \\ \frac{a + b}{2} &\geq \sqrt{ab} \quad (a, b > 0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

回顾 $a + b$ 与 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的不等关系

方法 4.3 齐次配平

若题目中出现多个不同次数的项, 可以尝试通过配平使得各项次数相同, 从而使用均值不等式进行求解。

例 4.30 【2017 河南适应性测试】已知正数 x, y 满足 $x + 4y = 4$, 则 $\frac{x + 28y + 4}{xy}$ 的最小值为 ()

A. $\frac{85}{2}$

B. 24

C. 20

D. 18

例 4.31 【2017 天津卷·文】若 $ab > 0$, 则 $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$ 的最小值为 _____。

例 4.32 【2020 天津卷】已知 $a, b > 0, ab = 1$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a + b}$ 的最小值为 _____。

例 4.33 【2022 西南名校第一次诊断】已知 x, y 为正实数, 且 $x + y = 2$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{xy}$ 的最小值为 _____。

例 4.34 已知 $x > y > 0, x + y = 3$, 则 $\frac{1}{x-y} + \frac{xy+y^2+2}{y}$ 的最小值为 _____。

例 4.35 已知 $a, b, c > 0$, 求证: $2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) \leq 3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right)$

例 4.36 已知 $a, b, c > 0, a + b + c = 1$, 求证: $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$

方法 4.4 构造 0 次式消元

观察如果分式上下分母次数相同, 则可以尝试该方法

例 4.37 已知 $x, y > 0$, 则 $\frac{6xy}{x^2+9y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$ 的最大值为 _____。

例 4.38 已知正实数 a, b 满足 $\frac{1}{(2a+b)b} + \frac{2}{(2b+a)a} = 1$, 则 ab 的最大值为 _____。

例 4.39 【2018 江苏南京三模】若正数 a, b, c 成等差数列 (即 $a - b = b - c$), 则 $\frac{c}{2a+b} + \frac{b}{a+2c}$ 的最小值为 _____。

4.5 形变处理

对于陌生的形式, 尝试设值, 变换得到我们熟悉的形式。

例 4.40 【2020 湖南师范大学附属中学月考】设 $a > b > 0, ab = 2$, 则 $a^2 + \frac{1}{a(a-b)}$ 的最小值为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

例 4.41 【2022 辽宁名校第四次联考】若 a, b, c 均为正数, 且 $c(a+b+c) + ab = 8$, 则 $a+b+2c$ 的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. 4 C. $4\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{2}$

例 4.42 【2022 浙江宁波二模】正实数 a, b, c 互不相等, 且满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + bc$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $2a > b > c$ B. $2a > c > b$
C. $2c > a > b$ D. $2c > b > a$

例 4.43 若存在正实数 y , 使得 $\frac{xy}{y-x} = \frac{1}{5x+4y}$, 则实数 x 的最大值为 _____。

例 4.44 已知正实数 a, b, c, d 满足 $a+b=1, c+d=1$, 则 $\frac{1}{abc} + \frac{1}{d}$ 的最小值为 ()

- A. 10 B. 9 C. $4\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{3}$

例 4.45 已知实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 则 $ab+c$ 的最小值为 ()

A. -2

B. $-\frac{3}{2}$

C. -1

D. $-\frac{1}{2}$

例 4.46 若正数 a, b, c 满足 $ab = a + 2b, abc = a + 2b + c$, 则 c 的最大值为 _____。

例 4.47 已知 $x + y = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + 8 (x, y > 0)$, 则 $x + y$ 的最小值为 ()

A. $5\sqrt{3}$

B. 9

C. $4 + 2\sqrt{26}$

D. 10

例 4.48 已知正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 $\frac{2a}{a^2 + b} + \frac{b}{a + b^2}$ 的最大值为 ()

A. 2

B. $1 + \sqrt{2}$ C. $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $1 + \frac{3\sqrt{2}}{3}$

例 4.49 已知正实数 a, b, c 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}, \frac{a}{c} + \frac{b}{c+b} > t$, 则 t 的最大值为 _____。

例 4.50 【2023 江西五市九校协作体第一次联考】已知 a, b, c 是正实数, 且 $b + c = \sqrt{6}$, 则 $\frac{ac^2 + 2a}{bc} + \frac{8}{a+1}$ 的最小值为 _____。

4.6 总结回顾

1. 基本不等式及其简单应用

2. 核心处理手段：换元法

善于设置新的变量来简化问题, 得到自己熟悉的情况

注意事项——新变量的取值范围

3. 基本思想：简化

- 条件简化
- 结论简化

从简单情况入手。条件简单利用条件

4. 重要思想：齐次

5. 特殊处理方式：

- 设值回代
- 构造 0 次式

6. 注意事项：形变处理

第五章 基本不等式其他处理方式 (*)

例 5.1 若 a, b, c 均为正实数, 则 $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + 2bc}$ 的最小值为 _____。

例 5.2 已知 x, y, z 均为正实数, 且满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 则 $3xy + yz$ 的最大值为 _____。

例 5.3 已知 x, y, z 均为正实数, $2x + 2y + z = 1$, 求证: $3xy + yz + zx \leq \frac{1}{5}$ 。

例 5.4 若正数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc = 1$, 则 c 的最大值为 _____。

例 5.5 已知 $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{19}{4} (x, y > 0)$, 则 $\frac{3}{x} - \frac{7}{16y}$ 的最小值为 _____。

例 5.6 已知 $a, b > 0$, 记 $h = \max \left\{ \frac{2}{\sqrt{a}}, \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}}, \frac{2}{\sqrt{b}} \right\}$, 则 h 的最小值为 _____。

第六章 不等式拓展 (*)

6.1 柯西不等式

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$
$$\text{iff } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{取等号} \quad (6.1)$$

常见形式:

1. $n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$
2. $\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \right) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$

例 6.1 已知 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1$, 求 $x + y + z$ 的取值范围。

例 6.2 已知 a, b, c 均为正实数, 且 $a + b + c = 1$, 求证:

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$$

$$(3) \quad \sqrt{3a+2} + \sqrt{3b+2} + \sqrt{3c+2} \leq 3\sqrt{3}$$

$$(4) \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1$$

例 6.3 已知 a, b, c 为三角形三边长, 求证: $\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{a + b + c} > 2$

例 6.4 已知 a, b, c 均为正实数, 且 $abc = 1$, 求证: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$

6.2 排序不等式

若

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \quad (6.2)$$

则对于

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (6.3)$$

的任何其他轮换

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{6.4}$$

都有：

$$a_1 b_n + a_2 b_{\{n-1\}} + \dots + a_n b_1 \leq x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \tag{6.5}$$

即：**反序和** \leq **乱序和** \leq **正序和**。

例题答案

例 1.1

C

例 1.2

<

例 1.3

$$(1) 2a + 3b \in (8, 32), a - b \in (-7, 2), \frac{a}{b} \in \left(\frac{1}{8}, 2\right)$$

$$(2) \frac{a}{b} \in (-3, 4)$$

$$(3) 2a - 4b \in (-17, 7)$$

例 1.4

解：

$$\frac{2a+b}{a+2b} - 1 = \frac{2a+b-a-2b}{a+2b} = \frac{a-b}{a+2b} \quad (6.6)$$

因为 $a > b > 0$ ，所以 $a - b > 0, a + 2b > 0$ ，

故 $\frac{a-b}{a+2b} > 0$ ，即 $\frac{2a+b}{a+2b} > 1$ 。

例 1.5

(1) <

(2) >

例 1.6

解：

$$\begin{aligned}
\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + b^2}{a + b} &= \frac{(a^3 + b^3)(a + b) - (a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)} \\
&= \frac{a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4}{(a^2 + b^2)(a + b)} \\
&= \frac{a^3b + ab^3 - 2a^2b^2}{(a^2 + b^2)(a + b)} \\
&= \frac{ab(a^2 + b^2 - 2ab)}{(a^2 + b^2)(a + b)} \\
&= \frac{ab(a - b)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

因为 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 所以 $ab > 0, (a - b)^2 \geq 0, a^2 + b^2 > 0, a + b > 0$,

故 $\frac{ab(a - b)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)} \geq 0$,
 即 $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{a^2 + b^2}{a + b}$ 。

例 1.7

$n = 6$ 时取得最大值

解析：考虑相邻两项的差：

$$\begin{aligned}
f(n + 1) - f(n) &= -(n + 1)^3 + 8(n + 1)^2 + 4(n + 1) + 3 - (-n^3 + 8n^2 + 4n + 3) \\
&= -(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 8(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4 + 3 - \\
&\quad (-n^3 + 8n^2 + 4n + 3) \\
&= -n^3 - 3n^2 - 3n - 1 + 8n^2 + 16n + 8 + 4n + 7 + n^3 - 8n^2 - 4n \\
&\quad - 3 \\
&= -3n^2 + 13n + 11
\end{aligned} \tag{6.8}$$

令

$$f(n + 1) - f(n) = -3n^2 + 13n + 11 \leq 0 \tag{6.9}$$

解这个不等式：

$$n = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 132}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{301}}{6} \quad (6.10)$$

因为 $\sqrt{301} \approx 17.35$, 所以 $n \approx \frac{13 \pm 17.35}{6}$

解得 $n \in \left[\frac{-4.35}{6}, \frac{30.35}{6} \right] \approx [-0.73, 5.06]$

因为 n 为正整数, 所以 $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 时 $f(n+1) > f(n)$,

当 $n \geq 6$ 时 $f(n+1) < f(n)$ 。

因此 $n = 6$ 时取得最大值:

$$f(6) = -216 + 288 + 24 + 3 = 99 \quad (6.11)$$

例 1.8

$n = 8$ 或 9 时取得最大值

解析: 考虑相邻两项的比值:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{(n+2) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{(n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9(n+2)}{10(n+1)} \quad (6.12)$$

令 $\frac{f(n+1)}{f(n)} \geq 1$:

$$\frac{9(n+2)}{10(n+1)} \geq 1 \quad (6.13)$$

$$9(n+2) \geq 10(n+1) \quad (6.14)$$

$$9n + 18 \geq 10n + 10 \quad (6.15)$$

$$n \leq 8 \quad (6.16)$$

因此, 当 $n \leq 8$ 时, $f(n+1) \geq f(n)$, 函数递增; 且当 $n = 8$ 时, $f(n+1) = f(n)$ 。

当 $n > 9$ 时, $f(n+1) < f(n)$, 函数递减。

所以 $n = 8$ 或 9 时取得最大值。

例 1.9

解：原不等式等价于

$$(x+1)(x-2)(x-3) < 0 \quad (6.17)$$

令 $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$,

根的排列为： $-1 < 2 < 3$

使用穿根法，从右向左穿根，得解集为：

$$x \in (-1, 2) \cup (3, +\infty) \quad (6.18)$$

例 1.10

$$(1) \quad x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$$

$$(2) \quad x \in (-3, -1) \cup (5, +\infty)$$

例 1.11

$$x \in (-\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

解：原不等式等价于

$$\begin{cases} (x+2)(2x-1) \geq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

$$\text{解得：} x \in (-\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

例 1.12

$$(1) \quad x \in (-2, 1) \cup (4, +\infty)$$

$$(2) \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$(3) \quad x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1]$$

例 2.1

解析：从表格可以看出：

1. $f(-2) = 0$ ，所以 $x = -2$ 是一个零点
2. $f(-3) = 6 > 0, f(-1) = -4 < 0$ ，由零点存在定理，在 $(-3, -1)$ 内还有一个零点
3. $f(0) = -6 < 0, f(1) = -6 < 0$ ，无法判断 $(0, 1)$ 内是否有零点

但由于二次函数最多有 2 个零点，且已经找到 2 个，故零点个数为 2。

例 2.2

$$a \leq 1$$

解析：二次函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ 的对称轴为 $x = a$ 。

要使 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增，需要对称轴在区间左侧或左端点，即 $a \leq 1$

例 2.3

B

例 2.4

$$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

例 2.5

A、B、D

例 2.6

C

例 2.7

D

例 2.8

C

例 2.9

A

例 2.10

$(-\infty, 6)$

例 3.1

8

例 3.2

8

例 3.3

(1) 4

(2) $\frac{25}{8}$

(3) $\frac{27}{2}$

例 3.4

12

例 3.5

24

例 3.6

$$2\sqrt{2}$$

例 4.1

$$2 \quad 8$$

例 4.2

$$\frac{3}{2}$$

例 4.3

$$6$$

例 4.4

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

例 4.5

$$\frac{1}{6}$$

例 4.6

$$\frac{\sqrt{2}}{12}$$

例 4.7

$$4$$

例 4.8

$$C$$

例 4.9

C

例 4.10

5

例 4.11

$\frac{1}{5}$

例 4.12

C

例 4.13

9

例 4.14

A

例 4.15

$\frac{4}{5}$

例 4.16

C

例 4.17

C

例 4.18

$$\frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

例 4.19

D

例 4.20

12

例 4.21

A

例 4.22

7

例 4.23

C

例 4.24

$$\frac{9}{4}$$

例 4.25

6

例 4.26

(1) 4

(2) 16

例 4.27

$$\frac{8}{9} \quad 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

例 4.28

55

例 4.29

D

例 4.30

D

例 4.31

4

例 4.32

4

例 4.33

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 4.34

6

例 4.35

略

例 4.36

略

例 4.37

 $\sqrt{3}$

例 4.38

 $2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

例 4.39

 $\frac{2\sqrt{5}}{9}$

例 4.40

D

例 4.41

C

例 4.42

A

例 4.43

 $\frac{1}{5}$

例 4.44

B

例 4.45

C

例 4.46

$\frac{8}{7}$

例 4.47

B

例 4.48

C

例 4.49

2

例 4.50

6

例 5.1

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

例 5.2

$\frac{\sqrt{10}}{2}$

例 5.3

略

例 5.4

$$\frac{\sqrt{6}}{2}$$

例 5.5

$$-\frac{1}{4}$$

例 5.6

2

例 6.1

$$[-5, 5]$$

例 6.2

略

例 6.3

略

例 6.4

略