第 3 章

函数的应用

作者：Typst 专家

时间：2026-01-05

版本：1.0.0

目录

第一章 函数性质

内容提要

- 单调性+其他
- 奇偶性
- 周期性+对称性
- 综合应用

1.1 单调性+其他

方法 1.1

借助函数 $f(x)$ 的单调性，通过 $f(x)$ 的大小判断 x 的大小。

例 1.1 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，且 $f(a) \leq f(2-a)$，则 a 的取值范围是 ______。

例 1.2 已知函数 $f(x) = x^3 - e^{-x}$，$f(a) \leq f(2-a)$，则 a 的取值范围是 ______。

例 1.3 【2017 全国卷 I】已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，且为奇函数，若 $f(1) = -1$，则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[0,4]$　　D. $[1,3]$

例 1.4 【2024 北京市西城区第五十六中学届高三数学一模】已知函数 $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{|x|}+1\right) + \sqrt{\frac{1}{x^2}+3}$，则不等式 $f(\lg x) > 3$ 的解集为（　　）

A. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$

B. $\left(-\infty, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$

C. $(1, 10)$

D. $\left(\frac{1}{10}, 1\right) \cup (1, 10)$

例 1.5 定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 为增函数，则 $f(x) + f(2x-1) < 0$ 的解集为 ______。

例 1.6 【2020 山东烟台诊断】已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$，实数 m, n 满足 $f(2m-n) + f(2-n) > 0$，则下列不等关系成立的是（　　）

A. $m+n>1$

B. $m+n<1$

C. $m-n>-1$

D. $m-n<-1$

例 1.7 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = 2024^x - \log_{2024}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) - 2024^{-x} + 2$，则不等式 $f(3x+1) + f(x) \geq 4$ 的解集为 ______。

例 1.8【2025 北京 6 年高考 3 年模拟改编】已知函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x+1$，且 $f(a)+f(a+1)>2$，则实数的取值范围是（　　）

A. $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},1\right)$

例 1.9【2023 江苏淮安高一期中】函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，$g(x)=f(x)-x^2+2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，则不等式 $f(x)-f(x-2)>4x-4$ 的解集为 ______。

例 1.10【2024 四川成都校考三模】已知函数 $f(x)=e^{x-2}+e^{2-x}+2x^2-8x+7$，则不等式 $f(2x+3)>f(x+2)$ 的解集为（　　）

A. $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$　　B. $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$

C. $\left(-\frac{1}{3},1\right)$　　D. $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

例 1.11【2024 黑龙江哈尔滨哈九中校考模拟预测】已知函数 $f(x)=\sin(2x-2)+e^{1-x}-e^{x-1}+2$，若 $f(a^2+1)+f(2a-2)>4$，则实数范围是（　　）

A. $(-\infty,-3)$　　B. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

C. $(-3,1)$　　D. $(1,+\infty)$

例 1.12 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-2x^2-5, & x<0\\ 4^{x+2022}, & x\geq 0\end{cases}$，则不等式 $f\left(x+\frac{7}{2}\right)<8f(x^2)$ 的解集为 ______。

思考 1.1

1. 上述题目有什么相似之处？请说出你的观点。

1.2 奇偶性

例 1.13【2024 福建省福州格致中学高三下学期期中考】已知 $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+b\sin x+2$，若 $f(-3)=7$，则 $f(3)$ 的值为（　　）

A. -7　　B. -5　　C. -3　　D. 无法确定

例 1.14【2024 重庆巴蜀中学高三适应性月考】已知函数 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 在区间 $[-5,5]$ 上的最大值是 M，最小值是 N，则 $f(M+N)$ 的值等于（　　）

A. 0　　B. 10　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

例 1.15【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x)=|x|+e^x+e^{-x}+a$ 有唯一零点，则实数 a 的值为（　　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

思考 1.2

1. 上述题目可以获得什么结论?
   - 奇函数: ____________________
   - 偶函数: ____________________

1.3 周期性+对称性

例 1.16 【2022 福建厦门二检】(多选) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=1-x$，则（　　）

A. $f(x)$ 是周期函数　　B. $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减

C. $f(x)$ 图像关于直线 $x=3$ 对称　　D. $f(x)$ 的图像关于点 $(2,0)$ 对称

例 1.17 【2023-2024 江苏省南京市南京师大附中高一上期末】(多选) 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，当 $x\geq 0$ 时，有 $f(x+1)=-f(x)$，且当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$。下列命题正确的是（　　）

A. $f(2023)+f(-2024)=0$　　B. $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数

C. 直线 $y=x$ 与 $f(x)$ 有且仅有 2 个交点　　D. $f(x)$ 的值域为 $(-1,1)$

例 1.18 【2024 山东滨州统考二模】函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的图象是一条连续不断的曲线，且满足 $f(3+x)-f(3-x)+6x=0$，函数 $f(1-2x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，则（　　）

A. $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称　　B. 8 是 $f(x)$ 的一个周期

C. $f(x)$ 一定存在零点　　D. $f(101)=-299$

思考 1.3

1. 上述题目体现了对称性和周期性的什么关系?

1.4 综合应用

例 1.19 【2025 北京 5 年高考 3 年模拟】设 $f(x)=2|x-1|+\log_3(x-1)^2$，不等式 $f(ax)\leq f(x+3)$ 在 $x\in(1,2]$ 上恒成立，则实数的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$　　B. $(100,2]$

C. $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$　　D. $\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\cup\left[1,\frac{5}{2}\right]$

例 1.20 【2024 广东省湛江市第一中学高一上期末多选压轴】(多选) 已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+x+1$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(\lg 3)+f\left(\lg\frac{1}{3}\right)=2$

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 在定义域上单调递减

D. 若实数 a,b 满足 $f(a)+f(b)>2$，则 $a+b>0$

例 1.21 【2024 重庆市西南大学附属中学校高一上期末多选次压轴】(多选) 已知函数 $f(x)=\log_2\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+3$，则下列说法正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,3)$ 对称

B. $f(\ln 2)+f\left(\ln\frac{1}{2}\right)=6$

C. 函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增

D. 若实数 a,b 满足 $f(a)+f(b)>6$，则 $a+b<0$

例 1.22 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，若 $f(2)=0$，则不等式 $(x^2-4)f(x)<0$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　B. $\mathbb{R}$

C. $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $\emptyset$

例 1.23 【2024 北京交大附中月考, 14】已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x+m}{2^x+1}$

(1) 当 $m=0$ 时，$f(x)$ 的值域为 ______；

(2) 若对于任意 $a,b,c\in\mathbb{R}$，$f(a),f(b),f(c)$ 的值总可作为某一个三角形的三边长，则实数 m 的取值范围是 ______。

思考 1.4

1. 上述所有题目涉及到的函数性质有哪些?
2. 关于函数性质的考查，说出你的理解。

第二章 处理手段

内容提要

- ❏ 分离参数
- ❏ 连等设值
- ❏ 构造函数
- ❏ 数形结合
- ❏ 嵌套处理
- ❏ 函数同构

2.1 分离参数

对于含有参数的不等式

$$f(x)\cdot a<g(x) \tag{2.1}$$

将参数分离，得到不等式

$$a<\frac{g(x)}{f(x)} \tag{2.2}$$

从而研究

$$h(x)=\frac{g(x)}{f(x)} \tag{2.3}$$

的最值。

例 2.1 【2024 全国高三专题练习】若关于 x 的不等式 $ax^2-2x+a\leq 0$ 在区间 $[0,4]$ 上有解，则实数 a 的取值范围是 ______。

例 2.2 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】设函数 $f(x)=mx^2-mx-1$，若对于 $x\in[1,3]$，$f(x)<-m+4$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $\left(0,\dfrac{5}{7}\right)$

C. $(-\infty,0)\cup\left(0,\dfrac{5}{7}\right)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{5}{7}\right)$

例 2.3 【2024 全国高三专题练习】若不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对任意 $m\in[-1,1]$ 恒成立，实数 x 的取值范围是 ______。

思考 2.1

1. 分离参数能解决所有含参问题吗?
2. 你认为分离参数的适用条件是什么?

2.2 数形结合

方法 2.1

借助函数图像，判断方程、图像交点等问题。

例 2.4 【2024 北京平谷零模, 15】已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le m\\ x^2-2mx+4m, & x>m\end{cases}$，设 $g(x)=f(x)-b$。给出下列四个结论：

① 当 $m=4$ 时，$f(x)$ 不存在最小值；

② 当 $0<m\le 3$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数；

③ 当 $m<0$ 时，存在实数 b，使得 $g(x)$ 有三个零点；

④ 当 $m>3$ 时，存在实数 b，使得 $g(x)$ 有三个零点。

其中正确结论的序号是 ______。

例 2.5 【2024 北京西城期末, 15】设 $a\in\mathbb{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3, & x>a\\ -x^2+a^2, & x\le a\end{cases}$。给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

② 当 $a\ge 0$ 时，$f(x)$ 存在最大值；

③ 当 $a<0$ 时，直线 $y=ax$ 与曲线 $y=f(x)$ 恰有 3 个交点；

④ 存在正数 a 及点 $M(x_1,f(x_1))(x_1>a)$ 和 $N(x_2,f(x_2))(x_2\le a)$，使 $|MN|\le\dfrac{1}{100}$。

其中正确结论的序号是 ______。

例 2.6 【2021 北京卷, 15】已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

① 当 $k=0$ 时，$f(x)$ 恰有 2 个零点；

② 存在负数 k，使得 $f(x)$ 恰有 1 个零点；

③ 存在负数 k，使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点；

④ 存在正数 k，使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点。

其中正确结论的序号是 ______。

例 2.7【2025 北京 5 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-|kx^2-2x|$ $(k\in\mathbb{R})$ 恰有 4 个零点，则 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,2\sqrt{2}\right)$

C. $(-\infty,0)\cup\left(0,2\sqrt{2}\right)$　　D. $(-\infty,0)\cup\left(2\sqrt{2},+\infty\right)$

2.3 连等设值

对于

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3) \tag{2.4}$$

的问题，令

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=t \tag{2.5}$$

从而使用 t 表示 x_1,x_2,x_3 的关系。

例 2.8 【2017 全国卷 I】设 x,y,z 均为正数，且 $2^x=3^y=5^z$，则（　　）

A. $2x<3y<5z$　　B. $5z<2x<3y$　　C. $3y<5z<2x$　　D. $3y<2x<5z$

例 2.9【2023 重庆第八中学期中】(多选) 已知正数 x,y,z 满足 $3^x=4^y=12^z$，则（　　）

A. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$　　B. $6z<3x<4y$

C. $xy<4z^2$　　D. $x+y>4z$

例 2.10 【2024 北京朝阳一模, 13】已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, x\leq 2\\ 5-x, \quad x>2\end{cases}$，若实数 $a,b,c(a<b<c)$ 满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 $a+b$ 的值为 ______，$a+b+c$ 的取值范围是 ______。

例 2.11 设函数 $f(x)=\begin{cases}|2^x-1|, x\leq 2\\ -x+5, \ x>2\end{cases}$，若互不相等的实数 a,b,c 满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 $2^a+2^b+2^c$ 的取值范围是（　　）

A. $(16,32)$　　B. $(18,34)$　　C. $(17,35)$　　D. $(6,7)$

例 2.12 【2024 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{4}{x}, & 0<x<4\\ -x^2+10x-20, & x\geq 4\end{cases}$，若存在实数 a,b,c 满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 $(ab+1)^c$ 的取值范围是 ______。

例 2.13 【2024 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_4 x|, & 0<x\leq 4\\ -\dfrac{1}{2}x+3, x>4\end{cases}$，若存在实数 $a,b,c,d\in(0,+\infty)$ 且 $a<b<c<d$，满足 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$，则 $abcd$ 的取值范围是 ______。

例 2.14 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, x\leq 0\\ |\log_2 x|, & x>0\end{cases}$，若方程 $f(x)=a$ 有四个不同的解 x_1,x_2,x_3,x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $x_3(x_1+x_2)+\dfrac{1}{x_3^2x_4}$ 的取值范围是（　　）

A. $(-1,1]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-1,1)$　　D. $(-1,1)$

例 2.15 【2024 浙江省温州市高一上期末 A 卷】函数 $f(x)=x^4-24x+16, g(x)=6x^3+ax^2$，方程 $f(x)=g(x)$ 恰有三个根 x_1,x_2,x_3，其中 $x_1<x_2<x_3$，则 $\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)(x_2+x_3)$ 的值为 ______。

思考 2.2

1. 连等设值的好处是什么？

2.4 嵌套处理

针对

$$h(x)=f(g(x)) \tag{2.6}$$

的情况，分为两步处理：

$$\begin{aligned}h(x)&=f(t)\\ t&=g(x)\end{aligned} \tag{2.7}$$

例 2.16 【2024 全国高三专题练习】已知不等式 $4^x-a\cdot 2^x+2>0$，对于 $a\in(-\infty,3]$ 恒成立，则实数 x 的取值范围是 ______。

例 2.17 已知函数 $f(x)=\begin{cases}kx+1, x\leq 0\\ \log_2 x, & x>0\end{cases}$，下列是关于函数 $y=f(f(x))+1$ 的零点个数的判断，其中正确的是（　　）

A. 当 $k>0$ 时，有 3 个零点　　B. 当 $k<0$ 时，有 2 个零点

C. 当 $k>0$ 时，有 4 个零点　　D. 当 $k<0$ 时，有 1 个零点

例 2.18 【2016 浙江卷】已知函数 $f(x)=x^2+bx$，则"$b<0$"是"$f(f(x))$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等"的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

例 2.19 【2023 北京朝阳二模, 10】已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=4-2^{-x}$。若关于 x 的方程 $f(f(x))=m$ 有且仅有两个不相等的实数解，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$　　B. $[-3,0)\cup(0,3]$

C. $(-4,-3]\cup[3,4)$　　D. $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

例 2.20 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+4, x\le 0\\ \ln x, \quad x>0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f^2(x)+3f(x)+m(m\in\mathbb{R})$ 有三个零点，则 m 的取值范围为（　　）

A. $m\le\dfrac{9}{4}$　　B. $m\le -28$

C. $-28\le m<\dfrac{9}{4}$　　D. $m>28$

例 2.21 【2024 四川资阳高三统考期末】定义在 $\mathbb{R}$ 上函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\in(0,1)\\ e^{x-1}-2, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$，且函数 $y=f(x-1)$ 关于点 $(1,0)$ 对称。若关于 x 的方程 $f^2(x)-2mf(x)=1(m\in\mathbb{R})$ 有 n 个不同的实数解，则 n 的所有可能的值为（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 2 或 4　　D. 2 或 4 或 6

例 2.22 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x)=|2^{|x|}-2|-1$，则关于 x 的方程 $f^2(x)+mf(x)+n=0$ 有 7 个不同实数解，则实数 m,n 满足（　　）

A. $m>0,n>0$　　B. $0<m<1,n=0$

C. $m<0$ 且 $n>0$　　D. $-1<m<0$ 且 $n=0$

例 2.23 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{2}x, & x\le 0\\ -|2x-1|+1, & x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f^2(x)-(k+1)xf(x)+kx^2=0$ 有且只有三个不同的实数解，则正实数 k 的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$

C. $(0,1)\cup(1,2)$　　D. $(2,+\infty)$

例 2.24 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x)=x^2e^{2x}+(a-1)xe^x+1-a$ 有三个不同的零点 x_1,x_2,x_3，其中 $x_1<x_2<x_3$，则 $(1-x_1e^{x_1})(1-x_2e^{x_2})(1-x_3e^{x_3})^2$ 的值为（　　）

A. 1　　B. $(a-1)^2$　　C. -1　　D. $1-a$

例 2.25 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x)=(ax+\ln x)(x-\ln x)-x^2$ 有三个不同的零点，其中 $x_1<x_2<x_3$，则 $\left(1-\dfrac{\ln x_1}{x_1}\right)^2\left(1-\dfrac{\ln x_2}{x_2}\right)\left(1-\dfrac{\ln x_3}{x_3}\right)$ 的值为（　　）

A. $a-1$　　B. $1-a$　　C. -1　　D. 1

2.5 构造函数

方法 2.2

将条件中的某个式子看成整体，构造新的函数进行研究。

例 2.26 【2024 江苏省盐城市第一中学高一上期末】已知 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，$f(2)=2$，若对于 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $(x_1-x_2)\left[\dfrac{f(x_1)}{x_2}-\dfrac{f(x_2)}{x_1}\right]<0$，则不等式 $(x+1)f(x+1)>4$ 的解集为（　　）

A. $(-3,1)$　　B. $(-3,-1)\cup(-1,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

例 2.27 【2024 广东省广州市高一上九区联考填空压轴】设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty),x_1\neq x_2$ 满足 $\dfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，若 $f(2)=4$，则不等式 $f(x)-2x\leq 0$ 的解集为 ______。

例 2.28 【2024 江苏省盐城市五校联盟高一上期中】已知函数 $f(x)=x^2-x$，若对于任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，都有 $x_2f(x_1)-x_1f(x_2)>ax_1x_2(x_2^2-x_1^2)$ 成立，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,+\infty)$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$　　C. $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

2.6 函数同构

方法 2.3

寻找出条件中具有结构相同的式子，研究其结构特点与对应的参数。

例 2.29 【2023 北京人大附中高一月考】已知 $x>0, y>0$，且 $(\sqrt{x})^3+2022\sqrt{x}=a$，$(\sqrt{y}-2)^3+2022(\sqrt{y}-2)=-a$，则 $x+y$ 的最小值是（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 4

例 2.30 【2024 黑龙江哈尔滨哈尔滨三中校考模拟预测】已知实数 x, y 满足 $\ln\sqrt{2y+1}+y=2, e^x+x=5$，则 $x+2y$ 的值为 ______。

例 2.31 【2024 广东省佛山市高一上期末填空压轴】已知 $2^x=11-3x, \log_2(6y-1)=4-2y$，则 $x+2y$ 的值为 ______。

例 2.32 【2024 湖南省长沙市长郡中学高一上期末压轴】若实数 x_1, x_2 满足 $e_1^x+x_1-2=0, x_2\ln x_2+2x_2-1=0$，则 $x_2(2-x_1)$ 的值为 ______。

例 2.33 【2024 江苏省南京市南京师大附中高一上期末填空压轴】设 a 为实数，若实数 x_0 是关于 x 的方程 $e^x+(1-a)x=\ln a+\ln x$ 的解，则 $\dfrac{e^{x_0-1}}{ax_0}=$ ______。

例 2.34 【2020 全国课标 I 卷, 理】若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则（　　）

A. $a>2b$　　B. $a<2b$　　C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

第三章 特殊问题

内容提要

- ❏ 比较大小
- ❏ 抽象函数

3.1 比较大小

基本方式：

1. 作差。
2. 作商。
3. 单调性。

3.1.1 区间比较问题

方法 3.1

判断数的大致区间，依据区间位置比较大小。

例 3.1 【2023 山东临沂平邑一中高一期末】已知 $a=\log_2 0.3, b=2^{0.2}, c=0.2^{0.3}$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

例 3.2 【2024 广东省华南师范大学附属中学高一上期末次压轴】已知 $a=\ln 2, b=\sin\dfrac{6\pi}{7}, c=3^{\frac{1}{2}}$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

例 3.3 【2024 北京西城二模, 5】设 $a=\lg\dfrac{2}{3}, b=\sqrt{\lg 3\cdot\lg 2}, c=\dfrac{1}{2}\lg 6$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

例 3.4 【2024 广东省深圳市南山区高一上期末质量监测】已知 $a=\sin 1+\cos 1, b=\log_{\cos 1}\sin 1, c=2^{\cos 1}$，则（　　）

A. $c>a>b$　　B. $a>b>c$　　C. $c>b>a$　　D. $a>c>b$

3.1.2 单调性比较问题

方法 3.2

相同结构的两个数，构造函数依据单调性比较大小。

例 3.5【2024 广东省佛山市高一上期末单选压轴】已知 $2^a=5, 3^b=10, 4^c=17$，则 a,b,c 的大小关系为（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

例 3.6【2024 重庆市南开中学校高一上期末单选压轴】已知 $5-a=\ln a, b=\log_4 3+\log_9 17, 7^b+24^b=25^c$，则以下关于 a,b,c 的大小关系正确的是（　　）

A. $b>c>a$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

3.1.3 数形结合问题

方法 3.3

做出图像，依据交点位置比较大小。

例 3.7【2023 天津部分区期中】已知 a,b,c 均为正数，且 $2^a=\log_{\frac{1}{2}} a, \left(\frac{1}{2}\right)^b=\log_{\frac{1}{2}} b, \left(\frac{1}{2}\right)^c=\log_2 c$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

例 3.8【2024 湖南省长沙市湖南师大附中高一上期末单选压轴】设方程 $\log_2 x-\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$，$\log_{\frac{1}{2}} x-\left(\frac{1}{2}\right)^x=0$ 的根分别为 x_1, x_2，则（　　）

A. $x_1x_2=1$　　B. $0<x_1x_2<1$　　C. $1<x_1x_2<2$　　D. $x_1x_2\geq 2$

3.2 抽象函数

方法 3.4

寻找已学过的函数模型进行匹配，探究其函数特征。或寻找特殊值带入。

例 3.9【2024 广东深圳高三深圳外国语学校校考阶段练习】写出一个满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 的函数解析式：______。

例 3.10 【2023 重庆一诊】已知定义域为 $(0,+\infty)$ 的减函数 $f(x)$ 满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f(2)=-1$，则不等式 $f(x+2)+f(x+4)>-3$ 的解集为 ______。

例 3.11 【2024 四川省遂宁市学年高三上学期期末】定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$，对任意 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$，满足下列条件：

① $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)-2$

② $f(2)=4$

(1) 是否存在一次函数 $f(x)$ 满足条件②，若存在，求出 $f(x)$ 的解析式；若不存在，说明理由。

(2) 证明：$g(x)=f(x)-2$ 为奇函数。

例 3.12 【2024 北京丰台一模, 14】已知函数 $f(x)$ 具有下列性质：

① 当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 时，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+1$；

② 在区间 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增；

③ $f(x)$ 是偶函数。

则 $f(0)=$ ______；函数 $f(x)$ 可能的一个解析式为 $f(x)=$ ______。

例 3.13 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，有 $f(x-y)=f(x)-f(y)$，$f(3)=1013$。

(1) 求 $f(0),f(6)$ 的值。

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论。

(3) 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，解不等式 $f(2x-4)>2026$。

例 3.14【2023 福建福州高一期中】(多选) 定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)$ 且当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)<0$，则下列说法正确的有（　　）

A. $f(0)=0$　　B. $f(x)$ 为奇函数

C. $f(x)$ 为减函数　　D. $f(x)$ 可能为 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

例 3.15【2024 湖南省岳阳市高一上期末】(多选) 已知函数 $f(x)(x\in\mathbb{R})$ 满足当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，且对任意实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)\neq f(x_2)$，则下列说法正确的是（　　）

A. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

B. $f(0)=0$ 或 1

C. 函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数

D. 对任意实数 x_1,x_2 满足 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

例 3.16 【2024 福建师范大学附属中学高一上期末】(多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，满足对任意 $x,y\in(0,+\infty)$，都有 $f(xy)=f(x)\cdot f(y)-f(x)-f(y)+2$，且 $x>1$ 时，$f(x)>2$。则下列说法正确的是（　　）

A. $f(1)=2$

B. 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<2$

C. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 是减函数

D. 存在实数 k 使得函数 $y=|f(x)+k|$ 在 $(0,1)$ 是减函数

第四章 思维训练

例 4.1 【2024 河南省届高三下学期仿真模拟考试数学试题】已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的单调函数，$f(f(x)-2^x-2x)=10$，则 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域为 ______。

例 4.2 【2023-2024 湖南省长沙市长郡中学高一上期末】已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的 $f(x)$ 是单调函数，且对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒有 $f\left(f(x)+\log_{\frac{1}{3}}x\right)=4$，则函数 $f(x)$ 的零点为（　　）

A. $\dfrac{1}{27}$　　B. $\dfrac{1}{9}$　　C. 9　　D. 27

例 4.3 【2024 全国高三专题练习】不等式 $\left(x^2-1\right)^{1011}+x^{2022}+2x^2-1\leq 0$ 的解集为 ______。

例题答案

例 1.1

$(-\infty, 1]$

例 1.2

$(-\infty, 1]$

例 1.3

D

例 1.4

D

例 1.5

$\left(0, \frac{1}{3}\right)$

例 1.6

C

例 1.7

$\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

例 1.8

B

例 1.9

$(1,+\infty)$

例 1.10

B

例 1.11

C

例 1.12

$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

例 1.13

C

例 1.14

C

例 1.15

D

例 1.16

ACD

例 1.17

AD

例 1.18

ACD

例 1.19

D

例 1.20

ABD

例 1.21

ABD

例 1.22

C

例 1.23

(1) $(0,1)$

(2) $\left[\frac{1}{2},2\right]$

例 2.1

$(-\infty,1]$

例 2.2

D

例 2.3

$\left(\sqrt{3}-1,2\right)$

例 2.4

②④

例 2.5

①②④

例 2.6

①②④

例 2.7

D

例 2.8

D

例 2.9

ABD

例 2.10

2 $[6,7)$

例 2.11

B

例 2.12

$(16, 64)$

例 2.13

$(96, 100)$

例 2.14

A

例 2.15

−25

例 2.16

$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

例 2.17

CD

例 2.18

A

例 2.19

C

例 2.20

B

例 2.21

B

例 2.22

C

例 2.23

B

例 2.24

A

例 2.25

D

例 2.26

B

例 2.27

$[\mathbf{0}, \mathbf{2}] \cup (-\infty, -\mathbf{2}]$

例 2.28

D

例 2.29

C

例 2.30

4

例 2.31

4

例 2.32

1

例 2.33

$\frac{1}{e}$

例 2.34

B

例 3.1

D

例 3.2

D

例 3.3

A

例 3.4

A

例 3.5

D

例 3.6

D

例 3.7

A

例 3.8

B

例 3.9

$f(x) = x^2$

例 3.10

$(-2, 0)$

例 3.11

(1) $f(x) = x + 2$

(2) 略

例 3.12

-1　　$|x| - 1$

例 3.13

(1) $f(0)=0, f(6)=2026$

(2) 奇函数

(3) $(5,+\infty)$

例 3.14

ABD

例 3.15

ACD

例 3.16

ABD

例 4.1

$\left[-\frac{7}{4}, 10\right]$

例 4.2

A

例 4.3

$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$