第三章

函数

作者：zheliku

时间：2026-01-03

版本：1.0.0

目录

第一章 函数的概念

内容提要

- ❑ 映射
- ❑ 定义
- ❑ 三大要素
- ❑ 定义域
- ❑ 值域
- ❑ 表达式

1.1 映射

定义 1.1 映射

两个非空集合 A 与 B 间存在着对应关系，而且对于 A 中的**每一个元素** a， B 中总有**唯一的一个元素** b 与它对应，则将这种对应称为从 A 到 B 的映射，记作:

$$f : A \to B \tag{1.1}$$

其中：

1. b 称为 a 在映射 f 下的像，记作 $b = f(a)$。
2. a 称为 b 关于映射 f 的原像，记作 $a = f^{-1}(b)$。
3. 集合 A 中所有元素的像的集合称为映射的值域，记作 $f(A)$。

笔记

1. 像必须唯一，原像可以不唯一。
2. B 中不是所有元素都需要有来自 A 的对应。

分类:

1. 单射
2. 满射
3. 双射 (一一映射)

思考 1.1

看看下面哪些是映射？如果是，是什么集合到什么集合的映射？又是哪一类映射？反过来还成立吗？

1. 学生与班级的对应关系
2. 学生与学号的对应关系
3. 商场里物品与价格的对应关系

1.2 定义

定义 1.2 函数

在某个变化过程中有两个变量 x, y，如果对于 x 在某个实数集合 D 内的每一个确定的值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一确定的实数值与它对应，那么 y 就是 x 的函数，记作：

$$y = f(x), x \in D \tag{1.2}$$

其中：

1. x 叫做自变量 (原像)
2. y 叫做因变量 (像)
3. x 的取值范围 D 叫做函数的定义域 (集合 A)
4. y 值的集合叫做函数的值域 (集合 B)

例 1.1 定义集合 $A = \{-1, 0, 1\}$，集合 $B = \{\cdots\}$，f 为 $A \to B$ 的映射，则下列说法不正确的是（　　）

A. 若 f 为一一映射，则集合 B 的真子集个数为 3
B. 若 $f : x \to -x$，则集合 $A = B$
C. 若集合 $B = \{0, 1\}$，则可能为 $f : x \to x^2$
D. 若 f 为满射，则可将 f 看成是定义在集合 A 上的函数，且值域为 B

1.3 三大要素

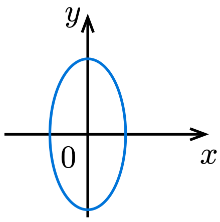
$$\text{定义域} \xrightarrow{\text{对应法则}} \text{值域}$$

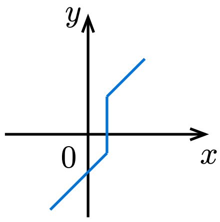
例 1.2 下面各组函数中是同一函数的是（　　　）

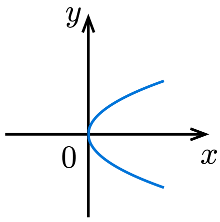
A. $y=\sqrt{-2x^3}$ 与 $y=\sqrt{-2x}$　　　B. $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=|x|$

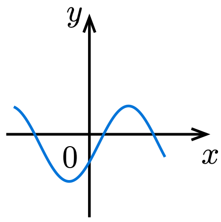
C. $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ 与 $y=\sqrt{x^2-1}$　　　D. $f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(t)=t^2-2t-1$

例 1.3 如图，可以表示函数 $f(x)$ 的图象的是（　　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

1.4 定义域选取方式

1. 给定定义域，则使用该定义域。
2. 未给定定义域，则尽可能取最大值：
   - 分母不为零
   - 偶数次根内非负
   - 其他（如对数真数大于 0 等）

例 1.4 【2023·朝阳二模, 11】函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$ 的定义域为 ______。

例 1.5 已知函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $(0,1)$，则函数 $f(1-3x)$ 的定义域为 ______。

1.5 值域求解

例 1.6 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

(1) $y=\sqrt{-x^2-6x-5}$　　(2) $y=4-\sqrt{3+2x-x^2}$　　(3) $y=\dfrac{5}{2x^2-4x+3}$

例 1.7 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

(1) $y=\dfrac{x+2}{3x-4}$　　(2) $y=\dfrac{3+x}{4-x}$　　(3) $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$

例 1.8 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

(1) $y=\sqrt{1-2x}-x$　　　(2) $y=x+\sqrt{1-2x}$

(3) $y=x+\sqrt{1-x^2}$　　　(4) $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$

例 1.9 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

(1) $y=\dfrac{2x^2-x+1}{2x-1}\left(x>\dfrac{1}{2}\right)$　　　(2) $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$

(3) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-x-1}$

1.6 表达式求解

例 1.10 【2024 全国高三练习】求解下列函数的表达式

(1) $f(x^2-2)=x^4+3x^2-4$

(2) $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}-1$

例 1.11 【2024 全国高三练习】求解下列函数的表达式

(1) $f(x-1)+2f(1-x)=2x-3$

(2) $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+1$

(3) $f(x)=2x\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)-3x$

例 1.12 【2024 全国高三练习】求解下列函数的表达式

(1) $f(x)+f\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=x+1$

第二章 函数的性质

内容提要

- 单调性
- 奇偶性
- 周期性
- 类周期

2.1 单调性

1. $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$，则 $f(x)$ 单调递增，记为 $f(x) \uparrow$
2. $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$，则 $f(x)$ 单调递减，记为 $f(x) \downarrow$

等价表示：

1. $f(x) \uparrow \Longleftrightarrow x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 同号
2. $f(x) \downarrow \Longleftrightarrow x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 异号
3. $f(x) \uparrow \Longleftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

思考 2.1

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上均单调递减，能说 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上单调递减吗?
2. 增函数与增函数相加，结果还是增函数吗?
   - 增 + 增 = ______
   - 增 - 减 = ______
   - 增 $\times$ 增 = ______
   - 增 / 减 = ______

例 2.1 判断下列函数的单调性，并给出证明：

(1) $f(x) = \sqrt{x}$

(2) $f(x) = x^2$

(3) $f(x) = x + \dfrac{a}{x}(a \in \mathbb{R})$

例 2.2 (多选) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增，$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$，下列结论中正确的是（　　　）

A. $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$　　B. $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$

C. $f(a)\le f(x_1)\le f(x_2)\le f(b)$　　D. $f(x_1)>f(x_2)$

例 2.3 【2022 陕西安康六校高一期末联考】已知函数 $f(x)$ 在定义域 $(-1,1)$ 上单调递减，且 $f(1-a)<f(2a-1)$，则实数 a 的取值范围是 ______。

例 2.4 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, x\ge 0\\ 4x-x^2, x<0\end{cases}$，若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-1,2)$

C. $(-2,1)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

例 2.5 【2022 安徽江淮十校高一联考】已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2-mx, x\ge 2\\ -\dfrac{m}{x}, & 1\le x<2\end{cases}$ 对于 $\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$，都有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\ge 0$，则实数 m 的取值范围是 ______。

2.2 奇偶性

	奇函数	**偶函数**
图像	关于原点对称	关于 y 轴对称
定义域	关于原点对称	关于原点对称
特点	$f(x)+f(-x)=0$ $f(0)=0$ (如果 $x=0$ 有意义)	$f(x)-f(-x)=0$

思考 2.2

1. 下列函数是奇函数还是偶函数？还是都不是？

(1) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$　　(2) $f(x)=\dfrac{3^x}{3^x+1}$　　(3) $f(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$

2. 奇偶函数相运算得到的函数有什么性质？

- 奇 ± 奇 = ______ ; 奇 × 奇 = ______ ; 奇 / 奇 = ______
- 偶 ± 偶 = ______ ; 偶 × 偶 = ______ ; 偶 / 偶 = ______
- 奇 ± 偶 = ______ ; 奇 × 偶 = ______ ; 奇 / 偶 = ______

3. 如何将一个定义域对称的函数写成一个奇函数与一个偶函数之和？

例 2.6 【2020 河南实验中学月考】设函数 $f(x)$、$g(x)$ 的定义域都为 $\mathbb{R}$，$f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则下列结论正确的是（　　）

A. $f(x)\cdot g(x)$ 是偶函数　　B. $|f(x)|\cdot g(x)$ 是奇函数

C. $f(x)\cdot|g(x)|$ 是奇函数　　D. $|f(x)\cdot g(x)|$ 是奇函数

例 2.7 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟练习改编】已知函数 $f(x),g(x)$ 分别是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数、奇函数，且满足 $f(x)-g(x)=x^3+3x^2+3x$，则 $f(-2)+g(2)=$______。

例 2.8【宁夏银川一中、昆明一中 2024 届高三联合二模】已知函数 $f(x)=ax^5+b\sin x+c$，若 $f(-1)+f(1)=2$，则 c 的值为（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. $\dfrac{2}{3}$

例 2.9 【2020 贵州贵阳一中月考】设函数 $f(x)=3+x+\sqrt{1-x^2}\cdot\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 的最大值为 M，最小值为 N，则 $M+N$ 的值为（　　）

A. 3　　B. 2　　C. 6　　D. 4

2.3 周期性

若函数满足 $f(x+a)=f(x)$，则函数的周期 $T=a$。（经过 a 个单位一个周期）

序号	条件	周期
1	$f(x+a)=f(x-a)$，　$f(x+a)+f(x)=k$	$T=2a$
2	$f(x+a)=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，　$f(x+a)=\pm\dfrac{1}{f(x)}$ $f(x+a)=\dfrac{1}{1-f(x)}$，　$f(x)=1-\dfrac{1}{f(x+a)}$	$T=3a$ （部分情况）
3	$f(x+a)=-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}$，　$f(x+a)=-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$	$T=4a$
4	$f(x+a)=f(x+b)$	$T=\lvert a-b\rvert$

笔记

1. 有印象即可，写题时尝试代值观察得出 T。
2. 核心处理思想：作图。
3. 常伴有接近当年年份的值出现，如 2025, 2024…

例 2.10 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足下列各条件，不能得出函数 $f(x)$ 具有周期性的是（　　）

A. $f(x)f(x+2)=2022$　　B. $f(x)=f(4-x)$

C. $f(x+1)=f(x)+f(x+2)$　　D. $f(x)$ 为奇函数且 $f(x)=f(2-x)$

例 2.11 已知函数 $f(x)=\begin{cases} f(x-2), x>1 \\ |x|-1, \quad -1\le x\le 1 \end{cases}$，关于 x 的方程 $f(x)=\log_{a(x+1)}$ 恰有 5 个解，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{5}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{7},\frac{1}{5}\right)$

C. $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right)$

例 2.12 【2023 上海同济大学第一附属中学月考】若函数 $y=f(x),x\in R$，满足 $f(x+2)=f(x)$，且 $x\in(-1,1]$ 时，$f(x)=|x|$，则函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y=\log_4|x|$ 的图象的交点的个数为（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

例 2.13 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$，且当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=2x$，则 $f\left(-\dfrac{9}{2}\right)$ 的值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

例 2.14 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cdot f(x+2)=13$。

(1) 求证：$f(x)$ 是周期函数。

(2) 若 $f(1)=2$，求 $f(99)$ 的值。

(3) 若 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x$，试求 $x\in[4,8]$ 时，函数 $f(x)$ 的解析式。

2.4 类周期函数

形如下列的函数称为类周期函数：

$$f(x+a)=\lambda f(x) \tag{2.1}$$

主要处理手段：数形结合。

例 2.15 【2022 云南保山第一次质检】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=2f(x)$，当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=x$，那么 $f(21)$ 的值为（　　）

A. 2^{10}　　B. 2^{11}　　C. 2^{20}　　D. 2^{21}

例 2.16 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟练习】定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=x^2-x$，当 $x\in[-2,-1]$ 时，$f(x)$ 的最小值为（　　）

A. $-\frac{1}{16}$　　B. $-\frac{1}{8}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. 0

例 2.17 【2022 云南保山第一次质检】已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-|1-x|, 0\le x\le 2\\ 2f(x-2),\ 2<x\le 8\end{cases}$，若方程 $f(x)-kx=0$ 恰好有 4 个实数根，则实数 k 的取值范围是（　　）

A. $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{8}{7}\right)$　　B. $\left(\dfrac{2}{3},1\right)$

C. $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{7}\right)$　　D. $\left(\dfrac{4}{5},1\right)$

例 2.18 【2022 河北沧州一中月考】定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=\dfrac{1}{2}f(x)$，当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=x^2-2x+1$。若直线 $y=a$ 与 $f(x)$ 的图像恰有 8 个交点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_8,y_8)$，则 $x_1+x_2+\dots+x_8=$ ______, a 的取值范围是 ______。

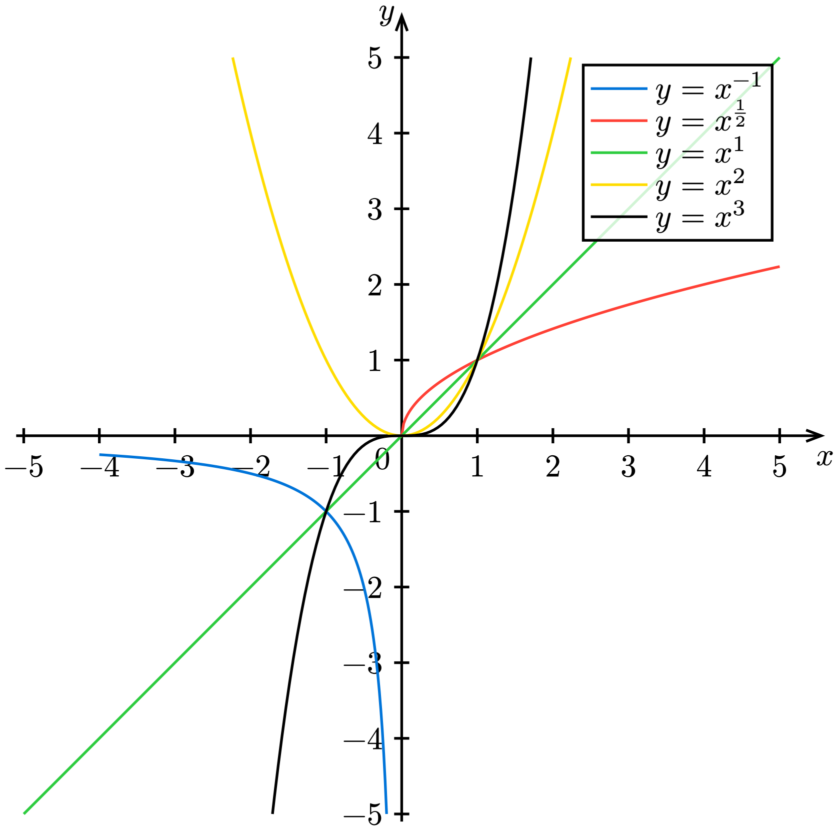
第三章 基本初等函数

内容提要

- ❑ 幂函数
- ❑ 二次函数
- ❑ 指数与对数
- ❑ 反函数
- ❑ 特殊函数

3.1 幂函数

$$y = x^k (k \in \mathbb{Q}) \tag{3.1}$$



常见幂函数特征：

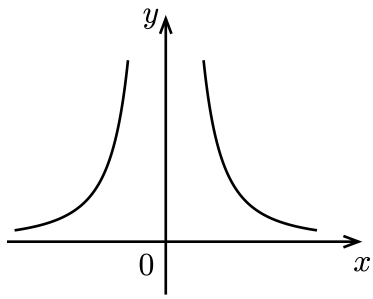
1. 在 $(0, +\infty)$ 上都有定义
   (a). $k > 0$ 时，单调递增；
   (b). $k < 0$ 时，单调递减。
2. 所有幂函数图像都经过 $(1, 1)$ 点。
3. 当 k 为整数时：
   - k 为奇数时，定义域为 $\mathbb{R}$，图像关于原点对称（奇函数）；

- k 为偶数时，定义域为 $\mathbb{R}$，图像关于 y 轴对称（偶函数）。

例 3.1 【2024 宁夏固原高三隆德县中学校联考期中】已知函数 $f(x)=(m^2-2m-2)\cdot x^{m-2}$ 是幂函数，且在 $(0,+\infty)$ 上递减，则实数 m 的值为（　　）

A. -1　　B. -1 或 3　　C. 3　　D. 2

例 3.2 【2024 全国高三专题练习】已知幂函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ $(p,q\in\mathbb{Z}$ 且 p,q 互质$)$ 的图象关于 y 轴对称，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则（　　）



A. p,q 均为奇数，且 $\frac{p}{q}>0$

B. q 为偶数，p 为奇数，且 $\frac{p}{q}>0$

C. q 为奇数，p 为偶数，且 $\frac{p}{q}<0$

D. q 为奇数，p 为偶数，且 $\frac{p}{q}<0$

3.2 二次函数

对于二次函数：$f(x)=ax^2+bx+c$

1. **对称轴：**

$$x=-\frac{b}{2a} \tag{3.2}$$

2. **零点公式：**

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{3.3}$$

3. **判别式：**

$$\Delta=b^2-4ac \tag{3.4}$$

4. **韦达定理：**

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a} \tag{3.5}$$

例 3.3 【2024 全国高三专题练习】设 a 为实数，若方程 $x^2-2ax+a=0$ 在区间 $(-1,1)$ 上有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-1,0)$

C. $\left(-\frac{1}{3},0\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{3},0\right)\cup(1,+\infty)$

例 3.4 【2024 全国高三专题练习】方程 $x^2+(m-2)x+5-m=0$ 的一根在区间 $(2,3)$ 内，另一根在区间 $(3,4)$ 内，则 m 的取值范围是（　　）

A. $(-5,-4)$　　B. $\left(-\frac{13}{3},-2\right)$

C. $\left(-\frac{13}{3},-4\right)$　　D. $(-5,-2)$

例 3.5 【2024 全国高三专题练习】关于 x 的方程 $ax^2+(a+2)x+9a=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2，且 $x_1<1<x_2$，那么 a 的取值范围是（　　）

A. $-\frac{2}{7}<a<\frac{2}{5}$　　B. $a>\frac{2}{5}$

C. $a<-\frac{2}{7}$　　D. $-\frac{2}{11}<a<0$

例 3.6 【2024 上海高三专题练习】已知 $f(x)=ax^2+2bx+4c.(a,b,c\in\mathbb{R})$。

(1) 若 $f(0)=-1,a+2b=0$，解关于 x 的不等式 $f(x)<(a+1)x-3$。

(2) 若 $a+c=0,f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 $\frac{2}{3}$，最小值为 $-\frac{1}{2}$，求证：$|\frac{b}{a}|\leq 2$。

3.3 指数函数与对数函数

指数运算

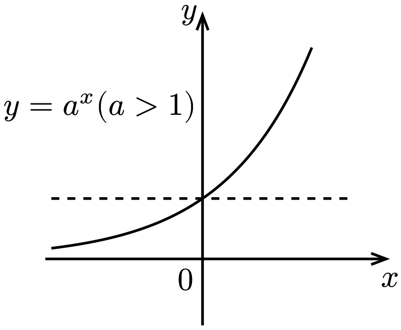
$$\begin{gathered} a^x\cdot a^y=a^{x+y},\quad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},\quad (a^x)^y=a^{xy} \\ a^{-x}=\frac{1}{a^x},\quad a^{\frac{1}{x}}=\sqrt[x]{a},\quad (ab)^x=a^xb^x \end{gathered} \tag{3.6}$$

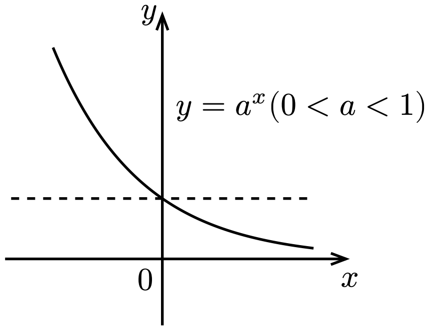
3.3.1 指数函数

$$y=a^x(a>0,a\neq 1) \tag{3.7}$$

1. 定义域 $\mathbb{R}$，值域 $(0,+\infty)$
2. 图像过点 $(0,1)$
3. $a>1$ 单调递增；$0<a<1$ 单调递减
4. $y=a^x$ 与 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 图像关于 y 轴对称

5. $f(x)f(-x)=1$





思考 3.1

为什么 a 不能小于 0?

对数运算

$$\log_a m+\log_a n=\log_a(mn),\quad \log_a m-\log_a n=\log_a\left(\frac{m}{n}\right)$$
$$n\log_a m=\log_a m^n,\quad \frac{1}{n}\log_a m=\log_{a^n} m \tag{3.8}$$
$$-\log_a m=\log_{\frac{1}{a}} m=\log_{\frac{1}{a}} m$$

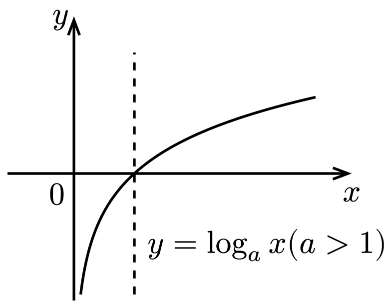
换底公式

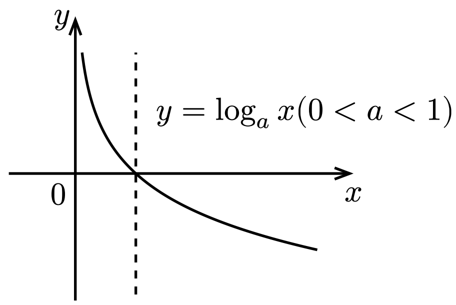
$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_n m=\frac{1}{\log_m n} \tag{3.9}$$

3.3.2 对数函数

$$y=\log_a x(a>0,a\neq 1) \tag{3.10}$$

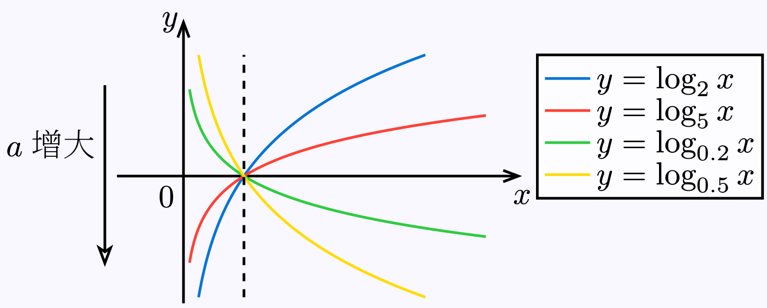
1. 定义域 $(0,+\infty)$，值域 $\mathbb{R}$
2. 图像过点 $(1,0)$
3. $a>1$ 单调递增；$0<a<1$ 单调递减
4. $y=\log_a x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 图像关于 x 轴对称





扩展 3.1

1. a 与图像陡峭程度的关系。



2. 常见对数值

$$\begin{gathered}\ln 2\approx 0.693,\quad \ln 3\approx 1.098,\quad \ln 5\approx 1.609\\ \log_{10}2\approx 0.301,\quad \log_{10}3\approx 0.477\end{gathered}\tag{3.11}$$

例 3.7 【2024 全国高三专题练习】已知 x_1 是方程 $x\cdot 3^x=2$ 的根，x_2 是方程 $x\cdot\log_3 x=2$ 的根，则 x_1x_2 的值为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 10

例 3.8 【2024 全国高三专题练习】若 x_1 满足 $e^x=3-x$，x_2 满足 $x+\log_2 x=3$，令 $a+b=x_1+x_2$，其中 $a,b>0$，则 $\dfrac{7b^2+1}{ab}$ 的最小值为（　　）

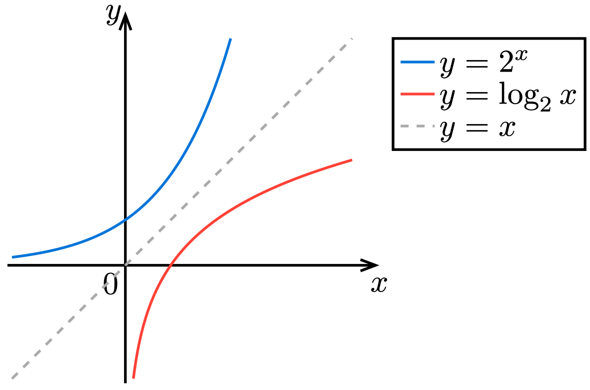
A. 1　　B. $\dfrac{7}{3}$　　C. $\dfrac{67}{9}$　　D. 2

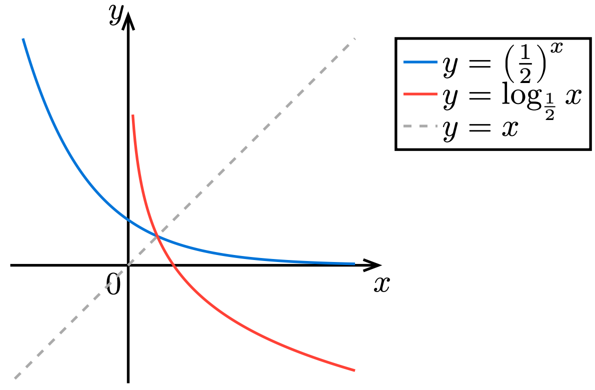
3.4 反函数

原函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)$，通常记为 $y=f^{-1}(x)$。

1. **条件**：原函数为一一映射。
2. **特点**：定义域和值域互换；图像关于 $y=x$ 对称。

举例：指数函数 $y=a^x$ 的反函数为对数函数 $y=\log_a x$。





3.5 特殊函数

指对中的奇/偶函数:

1. $f(x) = \dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}(a > 0)$ (奇函数)
2. $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$ (奇函数)
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{a - x}{a + x}\right)(a > 0)$ (奇函数)
4. $f(x) = \ln(e^{2ax} + 1) - ax(a > 0)$ (偶函数)

指对中的对称函数

1. $f(x) = \dfrac{a^x}{a^x + 1}(a > 0)$

第四章 函数的对称、平移和缩放

内容提要

- ❏ 对称性
- ❏ 平移
- ❏ 缩放
- ❏ 探究

4.1 对称性

点对称： 函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称，则有

$$f(a-x)+f(a+x)=2b \tag{4.1}$$

或

$$f(m-x)+f(n+x)=2b \tag{4.2}$$

其中 $m+n=2a$。

轴对称： 函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称

$$f(a-x)=f(a+x) \tag{4.3}$$

或

$$f(m-x)=f(n+x) \tag{4.4}$$

其中 $m+n=2a$。

思考 4.1

1. 为什么没有 $f(x)$ 关于直线 $y=a$ 对称的情况?
2. 对称性与周期性的特点有什么不同?
3. 寻找下列函数的中心对称点:

（1） $f(x)=\dfrac{3^x}{3^x+1}$ （2） $f(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$ （3） $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

例 4.1 已知二次函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 满足 $f(3-x)=f(x)$，若其在 $(a, 2a-1)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty, \dfrac{5}{4}\right]$　　B. $\left(1, \dfrac{5}{4}\right]$

C. $\left[-\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$　　D. $(-\infty, 2]$

例 4.2 【2021 江苏无锡大桥中学高一期中】若函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，则 $f(1)+f(2)+\ldots+f(50)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{1}{50}\right)=$ ______。

例 4.3 【2023-2024 安徽省部分学校高一上期末】已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{1+3^x}$，则 $f(-2024)+\ldots+f(-1)+f(0)+f(1)+\ldots+f(2024)$ 的值为（　　）

A. 4047　　B. 4048　　C. 4049　　D. 4050

笔记 二次对称产周期

1. 若 $f(x)$ 有两条对称轴 $x=a, x=b$，则 $T=2|b-a|$。
2. 若 $f(x)$ 有两个对称中心 $(a,c),(b,c)$，则 $T=2|b-a|$。
3. 若 $f(x)$ 有一条对称轴 $x=a$ 和一个对称中心 (b,c)，则 $T=4|b-a|$。

例 4.4 【广东省广州市三校 2023-2024 高一上期末联考】已知奇函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x+b$，则 $f\left(\dfrac{2023}{2}\right)$ 的值为（　　）

A. $-1-\sqrt{2}$　　B. $1-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\sqrt{2}-1$

例 4.5 【广东省佛山市 2023-2024 高一上期末】(多选) 已知函数 $f(x)$ 满足：对任意的 $x\in R$，都存在 $f(-x)=-f(x)$，$f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{3}{2}+x\right)$，且 $f(1)=2$，则（　　）

A. $y=f(x)$ 关于 $(1,0)$ 对称　　B. $f(4-x)=-f(x)$

C. $f(x)$ 的值域为 $[-2,2]$　　D. $\sum_{k=0}^{19} f(k)=0$

4.2 平移与缩放

平移变换

1. x 轴平移《左加右减》

   探究：$f(x)=x^2$ 与 $f(x)=(x-1)^2$ 的位置关系。

   (a). $f(x)$ 向左平移 a 个单位得到 $f(x+a)$ 的图像 $(a>0)$。

   (b). $f(x)$ 向右平移 a 个单位得到 $f(x-a)$ 的图像 $(a>0)$。

2. y 轴平移《下加上减》

   探究：$f(x)=x^2$ 与 $f(x)+2$ 的位置关系。

   (a). $f(x)$ 向上平移 a 个单位得到 $f(x)+a$ 的图像 $(a>0)$。

   (b). $f(x)$ 向下平移 a 个单位得到 $f(x)-a$ 的图像 $(a>0)$。

缩放变换

1. x 轴缩放《扩除缩乘》

   探究：$f(x)=x^2-1$ 与 $f(x)=(2x)^2-1$ 的位置关系。

   (a). $f(x)$ 所有横坐标缩小为原来的 $\dfrac{1}{a}$ 倍，得到 $f(ax)$ 的图像 $(a>1)$。

   (b). $f(x)$ 所有横坐标扩大为原来的 a 倍，得到 $f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ 的图像 $(a>1)$。

2. y 轴缩放《扩除缩乘》

   探究：$f(x)=x^2-1$ 与 $f(x)=2(x^2-1)$ 的位置关系。

   (a). $f(x)$ 所有纵坐标扩大为原来的 a 倍，得到 $af(x)$ 的图像 $(a>1)$。

   (b). $f(x)$ 所有纵坐标缩小为原来的 $\dfrac{1}{a}$ 倍，得到 $\dfrac{1}{a}f(x)$ 的图像 $(a>1)$。

思考 4.2

1. 下列情况中，$g(x)$ 的图像可以由 $f(x)$ 经过哪些变换得到？
   - $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=3\sqrt{2x+1}$
   - $f(x)=x^2-1$，$g(x)=2x^2-4x+3$

2. 如何将 $f(x)$ 变换得到 $g(x)=f\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)$?

   (a). 方式一：先向 ______ 平移 ______ 个单位，然后将横坐标缩放为原来的 ______。

   (b). 方式二：先将横坐标缩放为原来的 ______，然后向 ______ 平移 ______ 个单位。

   (c). 两种方式的不同之处在于?

3. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的图像由哪个基础函数变换得到?

例 4.6【2023 丰台二模, 7】为了得到函数 $y=\log_2(2x-2)$ 的图象，只需把函数 $y=\log_2 x$ 的图象上的所有点（　　）

A. 向左平移 2 个单位长度，再向上平移 2 个单位长度
B. 向右平移 2 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度
C. 向左平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度
D. 向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度

例 4.7【2019 海淀二模】把函数 $y=2^x$ 的图象向右平移 t 个单位长度，所得图象对应的函数解析式为 $y=\dfrac{2^x}{3}$，则 a 的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\log_2 3$　　C. $\log_3 2$　　D. $\sqrt{3}$

例 4.8 【2020 山东曲阜一中月考】函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(x+2)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称。若 $f(-2)=1$，则 $f(x-2)\leq 1$ 的 x 的取值范围是 ______。

例 4.9 【重庆市第八中学校 2023-2024 高一上期末】设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，$f(x+1)$ 为奇函数，$f(x+2)$ 为偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$。若 $f(3)+f(4)=6$，则 $f\left(\frac{13}{3}\right)$ 的值为（　　）

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $\frac{32}{9}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

例 4.10 【湖南长沙市长郡中学 2023-2024 高一上期末】(多选) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(4-x)=-f(x)$，$f(2x+1)$ 为偶函数，$f(1)=2$。函数 $g(x)(x\in\mathbb{R})$ 满足 $g(x)=g(2-x)$，若 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有 2023 个交点，从左至右依次为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_{2023},y_{2023})$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(x)$ 为奇函数　　B. 2 为 $y=f(x)$ 的一个周期

C. $y_{1012}=2$　　D. $x_1+x_2+\ldots+x_{2023}=2023$

4.3 平移缩放探究

扩展反比例函数：

1. 基础形式：

$$f(x)=\frac{1}{x} \tag{4.5}$$

2. 扩展形式：

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \tag{4.6}$$

对称中心？

扩展对勾函数：

1. 基础形式：

$$f(x)=ax+\frac{b}{x} \tag{4.7}$$

2. 扩展形式：

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e} \tag{4.8}$$

第五章 抽象函数

定义 5.1 抽象函数

只告诉了函数的关系式，而没有告诉具体的表达式。

处理方式

- 寻找已学过的函数模型进行匹配，探究其函数特征。
- 寻找特殊值带入（赋值法）。

常见模型

1. 一次函数：$f(x+y)=f(x)+f(y)+b$
2. 幂函数：$f(xy)=f(x)f(y)$
3. 指数函数：$f(x+y)=f(x)f(y)$
4. 对数函数：$f(xy)=f(x)+f(y)$
5. 周期函数：$f(x+a)+f(x)=k$

例 5.1 已知函数 $f(x)$ 满足 $\forall x,y\in R, f(xy)=f(x)f(y)$，且 $f(-1)=1, f(27)=9$，当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)\in[0,1)$。

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性。

(2) 判断 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性。

(3) 若 $a\geq 0, f(a+1)\leq\sqrt[3]{9}$，求 a 的取值范围。

例 5.2 已知非常数函数 $f(x)$ 满足 $\forall x,y\in R, f(x+y)=f(x)f(y)$。求证：$f(x)>0$。

例 5.3 定义在 $(0,+\infty)$ 的单调递增函数 $f(x)$ 满足 $\forall x,y\in(0,+\infty), f(xy)=f(x)+f(y), f(3)=1$。

(1) 求 $f(1)$。

(2) 若 $f(x)+f(x-8)\leq 2$，求 x 的取值范围。

例 5.4 已知函数 $f(x)$ 满足 $\forall x,y\in R, f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f(-1)=-2$，$x>0$ 时，$f(x)>0$。求 $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上的值域？

例 5.5 【2022 全国新高考 II】已知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y), f(1)=1$，则 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=$（　　）

A. -3 B. -2 C. 0 D. 1

例 5.6【安徽省蚌埠市2024学年高三上学期期末】已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x), g(x)$ 满足：

1. $f(0)=1$；
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x-y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$。

(1) 求 $f^2(x)-g^2(x)$ 的值。

(2) 判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性。

(3) 若 $g(x)$ 为奇函数，且 $\forall x>0, g(x)>0$，证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

思考 5.1

1. 满足 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)(\forall x, y \in \mathbb{R})$ 的 $f(x)$ 是偶函数吗?

例题答案

例 1.1

A

例 1.2

D

例 1.3

D

例 1.4

$[1, +\infty)$

例 1.5

$\left(0, \frac{2}{3}\right)$

例 1.6

(1) $[0, 2]$

(2) $[2, 4]$

(3) $(0, 5]$

例 1.7

(1) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

(2) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

(3) $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

例 1.8

(1) $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

(2) $(-\infty,-1]$

(3) $\left[-1,\sqrt{2}\right]$

(4) $\left[\sqrt{2},2\right]$

例 1.9

(1) $\left[\sqrt{2}+\frac{1}{2},+\infty\right)$

(2) $\left\{y \mid y \neq 1, y \neq \frac{2}{5}\right\}$

(3) $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{5}}{5},+\infty\right)$

例 1.10

(1) $f(x)=x^{2}+7x+6(x \geq -2)$

(2) $f(x)=x^{2}-2x(x \neq 1)$

例 1.11

(1) $f(x)=-2x-\frac{1}{3}$

(2) $f(x)=\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$

(3) $f(x)=x+2$

例 1.12

(1) $f(x)=\frac{x^{3}-x^{2}-1}{2x(x-1)}$

例 2.1

略

例 2.2

AB

例 2.3

$\left(0, \frac{2}{3}\right)$

例 2.4

C

例 2.5

$\left(0, \frac{4}{3}\right]$

例 2.6

C

例 2.7

-2

例 2.8

C

例 2.9

C

例 2.10

B

例 2.11

D

例 2.12

D

例 2.13

B

例 2.14

(1) $T = 4$

(2) $\frac{13}{2}$

(3) $f(x) = \begin{cases} x-4,\ 4 \le x \le 6 \\ \frac{13}{x-6}, 6 < x \le 8 \end{cases}$

例 2.15

A

例 2.16

A

例 2.17

D

例 2.18

32 $\quad \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$

例 3.1

A

例 3.2

D

例 3.3

C

例 3.4

C

例 3.5

D

例 3.6

(1) 若 $a = 0$，解集为 $(2, +\infty)$；

若 $a < 0$，解集为 $(2, +\infty) \cup \left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$；

若 $0 < a < \frac{1}{2}$，解集为 $\left(2, \frac{1}{a}\right)$；

若 $a = \frac{1}{2}$，解集为 $\emptyset$；

若 $a > \frac{1}{2}$，解集为 $\left(\frac{1}{a}, 2\right)$。

(2) 略

例 3.7

A

例 3.8

D

例 4.1

B

例 4.2

49.5

例 4.3

B

例 4.4

B

例 4.5

BD

例 4.6

D

例 4.7

B

例 4.8

$[0, 4]$

例 4.9

B

例 4.10

ACD

例 5.1

(1) 偶函数

(2) 单调递增

(3) $[0,2]$

例 5.2

略 (提示：令 $x=y=\frac{x}{2}$，得 $f(x)=f^2(\frac{x}{2})\geq 0$，再证 $f(x)ne0$)

例 5.3

(1) 0

(2) $(8,9]$

例 5.4

$[-4,2]$

例 5.5

A

例 5.6

(1) 1

(2) 偶函数

(3) 略