第二章

一元二次函数和不等式

作者：zheliku

时间：2026-01-06

版本：1.0.0

目录

第一章 等式

内容提要

- ❑ 不等式的基本性质
- ❑ 比较大小
- ❑ 高次不等式
- ❑ 分式不等式

1.1 不等式的基本性质

性质	内容
对称性	$a > b \iff b < a$
传递性	$a > b, b > c \Rightarrow a > c$
可加性	$a > b \iff a + c > b + c$
可乘性	$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc, \quad a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$
同向可加性	$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$
同向同正可乘性	$a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$
可乘方性	$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$
可开方性	$a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$

例 1.1 已知 $a > b > 0$，$c < d < 0$，则下列不等式一定成立的是______

A. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$　　B. $ac < bd$　　C. $a - c > b - d$　　D. $a + c > b + d$

例 1.2 已知 $a > b, ab > 0$，则 $\frac{1}{a}$ ______ $\frac{1}{b}$

例 1.3 (1) 已知 $1 < a < 4, 2 < b < 8$，求 $2a + 3b$、$a - b$ 和 $\frac{a}{b}$ 的取值范围。

(2) 已知 $-6 < a < 8, 2 < b < 3$，求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围。

(3) 已知 $-1 < a + b < 5, -4 < a - b < 2$，求 $2a - 4b$ 的取值范围。

1.2 比较大小

1. 作差法：$a - b > 0 \iff a > b$（常用）
2. 作商法：$\frac{a}{b} > 1 \iff a > b(b > 0)$（需要确定分母的符号）

例 1.4 已知 $a > b > 0$，比较 $\frac{2a + b}{a + 2b}$ 与 1 的大小。

例 1.5 已知 $a > b > 0, m > 0$，则：

（1） $\frac{b}{a}$ ______ $\frac{b + m}{a + m}$

（2）$\dfrac{a}{b}$ ______ $\dfrac{a+m}{b+m}$

例 1.6 已知 $a,b\in\mathbb{R}^+$，比较 $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ 与 $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$ 的大小。

例 1.7 已知 n 为正整数，则当 n 取多大时，$f(n)=-n^3+8n^2+4n+3$ 取得最大值？

例 1.8 已知 n 为正整数，则当 n 取多大时，$f(n)=(n+1)\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ 取得最大值？

1.3 高次不等式

对于形如

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots>0 \tag{1.1}$$

的不等式：

1. 数形结合法：作出 $f(x)$ 的图像（穿根法）
2. 根据图像确定不等式的解集

例 1.9 解不等式：

$$(x+1)(2-x)(x-3)>0 \tag{1.2}$$

笔记 对于多项式 $f(x)$，若 $f(n)=0$，则 $x-n$ 是 $f(x)$ 的因式，即 $f(n)=(x-n)\cdot g(x)$

例 1.10 解不等式：

（1）$x^3-7x+6<0$

（2）$x^3-x^2-17x-15>0$

1.4 分式不等式

对于 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 型：

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Longleftrightarrow f(x)\cdot g(x)>0 \tag{1.3}$$

对于 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0$ 型：

$$\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x)\cdot g(x)\geq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

例 1.11 解不等式：

$$\frac{x+2}{2x-1} \geq 0 \tag{1.5}$$

例 1.12 解不等式：

（1）$\dfrac{x^2+x-2}{4-x} < 0$

（2）$2+\dfrac{4}{x-1} > 0$

（3）$\dfrac{1}{x} \geq x$

第二章 一元二次函数

内容提要

- ❑ 初中回顾
- ❑ 参数与图像的关系

2.1 初中回顾

一元二次函数的一般形式：

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \tag{2.1}$$

1. 对称轴：

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{2.2}$$

2. 顶点坐标：

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \tag{2.3}$$

3. 判别式：
   - $\Delta > 0$：两个不相等的实数根
   - $\Delta = 0$：两个相等的实数根
   - $\Delta < 0$：无实数根
4. 与 x 轴的交点个数：
   - $\Delta > 0$：2 个交点
   - $\Delta = 0$：1 个交点
   - $\Delta < 0$：0 个交点
5. 单调性：
   - $a > 0$ 时:

     在 $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递增
   - $a < 0$ 时:

     在 $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递减

例 2.1 【2023 海南新高考模拟】函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的部分函数值如下表所示：

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	6	0	-4	-6	-6

则函数 $f(x)$ 的零点个数为 ______。

例 2.2 【2023 浙江省高一联考】已知函数 $f(x)=x^2-2ax+3$，若 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为 ______。

例 2.3 【2022 天津滨海新区阶段考试】若不等式 $(a-2)x^2+4(a-2)x+3>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(2,\dfrac{11}{4}\right)$　　B. $\left[2,\dfrac{11}{4}\right)$

C. $(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{11}{4},+\infty\right)$　　D. $(-\infty,2]\cup\left(\dfrac{11}{4},+\infty\right)$

例 2.4 【2020 四川泸县上学期】已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(2,3)$，则关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 ______。

例 2.5 【2022 山东枣庄滕州期中】（多选）已知关于 x 的不等式 $(x+2)(x-4)+a<0$（$a<0$）的解集为 (x_1,x_2)，则（　　）

A. $x_1+x_2=2$　　B. $x_1x_2<-8$

C. $-2<x_1<x_2<4$　　D. $x_2-x_1>6$

例 2.6 【2017 湖北襄阳襄城区校级模拟】设 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+m+6=0$ 的两个实根，则 $(a-1)^2+(b-1)^2$ 的最小值为（　　）

A. $-\dfrac{49}{4}$　　B. 18

C. 8　　D. -6

2.2 参数与图像的关系

1. a 决定开口方向：
    - $a>0$：开口向上
    - $a<0$：开口向下
2. $|a|$ 决定开口大小：$|a|$ 越大，开口越小
3. c 决定与 y 轴的交点：$(0,c)$

例 2.7 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 有两个零点 x_1、x_2，且满足 $x_1<-2,x_2>0,0<|c|<1$，则（　　）

A. a 与 c 一定同号

B. 若 $a>0$，则 $2a>b$

C. $2c(2a-b)+c^2<0$

D. 若 $a=1$，则 $0<x_2<\dfrac{1}{2}$

思考 2.1

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，判断以下结论：

1. 对称轴在哪里？
2. a、b、c 如何影响图像的形状、位置？

例 2.8 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 有两个零点 x_1、x_2，且满足 $-2\leq x_1\leq -1, 3\leq x_2\leq 5$，则下列说法不正确的是（　　　）

A. $-4a\leq b\leq -a$

B. 若 $a=1$，则 c 的取值范围是 $[-10,-3]$

C. $a+c\geq b$

D. 记 $f(x)$ 的最小值为 m，则 m 的最大值为 $-4a$

例 2.9 【2022 浙江五校联考】已知关于 x 的不等式 $ax^2-2x+3a<0$ 在 $(0,2]$ 上有解，则实数 a 的取值范围是（　　　）

A. $\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

B. $\left(-\infty,\dfrac{4}{7}\right)$

C. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

D. $\left(\dfrac{4}{7},+\infty\right)$

例 2.10 【2020 黑龙江齐齐哈尔第八中学月考】已知关于 x 的不等式 $ax^2-(a+1)x<-a+13x$ 在区间 $[2,3]$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是 ______。

第三章 基本不等式

内容提要

- ❑ 均值不等式
- ❑ 算术/几何平均值
- ❑ 基本不等式链

3.1 均值不等式

$$
\begin{aligned}
m^2+n^2 \geq 2mn \quad (m,n\in\mathbb{R}) \\
a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a,b>0) \\
\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a,b>0)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

始终注意等号成立的条件：当且仅当 $a=b$ 时等号成立。

例 3.1 已知 $x>0$，则 $x+\dfrac{16}{x}$ 的最小值为 ______。

例 3.2 函数 $f(x)=\dfrac{x^2+8}{x-1}(x>1)$ 的最小值是 ______。

例 3.3 求下列函数的最大值。

（1） $y=x(4-x)$

（2） $y=x(5-2x)$

（3） $y=3x(6-2x)$

扩展 3.1

（1） $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}(a,b>0)$ 的图像（对勾函数）。

（2）探究下列表达式之间的关系：

1） $a+\dfrac{1}{a}$ 、 $a-\dfrac{1}{a}$ 2） $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ 3） $a^2-\dfrac{1}{a^2}$

3.2 算术平均值和几何平均值

1. **算术平均值**：

$$
\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} \tag{3.2}
$$

2. **几何平均值**：

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \tag{3.3}$$

3. **高阶均值不等式**：

$$\text{算术平均值} \geq \text{几何平均值}（a_i \geq 0, i = 1, 2, 3...）$$

例 3.4 已知 $x > 0$，则 $x^2 + \dfrac{16}{x}$ 的最小值为 ______。

例 3.5 求 $3x^2(6-2x)$ 的最大值？

例 3.6 【2021 天津卷】若 $a, b > 0$，则 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{a}{b^2} + b$ 的最小值为 ______。

3.3 基本不等式链

$$\frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a > 0, b > 0) \tag{3.4}$$

（调和平均值 $\leq$ 几何平均值 $\leq$ 算术平均值 $\leq$ 平方平均值）

第四章 基本不等式的基本运用

核心方法:换元法

4.1 基本不等式之间的关系

1. $a+b$
2. ab
3. a^2+b^2

时刻注意新变量的取值范围

例 4.1 【2020 四川绵阳线上测试】已知 $a>0,b>0,2a+b=ab$，则当且仅当 $a=$ ______ 时，ab 取得最小值 ______。

例 4.2【2020 河南郑州质量预测】已知 $a>0,b>0,2a+b=4$，则 $\dfrac{3}{ab}$ 的最小值为 ______。

例 4.3 【2020 山东烟台期中】已知 $x>0,y>0,x+3y+xy=9$，则 $x+3y$ 的最小值为 ______。

例 4.4 已知正实数 x,y 满足 $x^2+4y^2+x+2y=1$，则 xy 的最大值为 ______。

例 4.5 已知正实数 a,b 满足 $(2a+b)^2=1+6ab$，则 $\dfrac{ab}{2a+b+1}$ 的最大值为 ______。

例 4.6 已知正实数 a,b 满足 $9a^2+b^2=1$，则 $\dfrac{ab}{3a+b}$ 的最大值为 ______。

扩展 4.1

a^3+b^3 与 a^3-b^3

4.2 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的应用与变形

1. $a+b=1 \Longrightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$
2. $a+b=4(a>1,b>2) \Longrightarrow \dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-2}$
3. $a+b=1(a>b>0) \Longrightarrow \dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b}$
4. $a+b=1 \Longrightarrow \dfrac{(a+1)^2}{a}+\dfrac{(b+2)^2}{b}$
5. $a+b=1 \Longrightarrow \dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{b^2}{b+2}$

6. $a+b=1 \Longrightarrow \frac{1}{a}+\frac{a}{b}$

例 4.7 【2020 福建漳平第一中学月考】若 $m>0, n>0, m+n=1$，且 $\frac{t}{m}+\frac{1}{n}(t>0)$ 的最小值为 9，则 $t=$ ______。

例 4.8 【2020 陕西咸阳期末】已知 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1(x, y>0)$，则 $2x+y$ 的最小值为（　　）

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 7

例 4.9 设 $a, b \in \mathbb{R}, a^2+b^2=k$，且 $\frac{1}{a^2+1}+\frac{4}{b^2+1}$ 的最小值为 1，则 k 的值为（　　）

A. 1　　B. 4　　C. 7　　D. 9

例 4.10 设 $x>1$，则 $x+\frac{4}{x-1}$ 的最小值为 ______。

例 4.11 设 $a \geq 0$，则 $a+\frac{1}{2a+5}$ 的最小值为 ______。

例 4.12 【2022 安徽部分重点高中高一联考】若 $x>2$，则 $y=\frac{x^2-2x+4}{x-2}$ 的最小值为（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 8

例 4.13 已知 $a>b>0, a+b=1$，则 $\frac{4}{a-b}+\frac{1}{2b}$ 的最小值为 ______。

例 4.14 【2022 辽宁铁岭六校联考】若实数 $x+3y=3\left(x>1, y>\frac{1}{3}\right)$，则 $\frac{x}{x-1}+\frac{3y}{3y-1}$ 的最小值为（　　）

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. 2

例 4.15 已知正实数 x, y 满足 $2x+y=2$，则 $\frac{4x^2}{y+1}+\frac{y^2}{2x+2}$ 的最小值为 ______。

例 4.16 【2020 吉林梅河口五中期中】若 $m, n>0, m+2n=1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{m+1}{n}$ 的最小值为（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 7　　D. 6

例 4.17 【2022 黑龙江大庆实验中学高一期末】已知 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1+2x}{1-2x}$ 的最小值为（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

4.3 简化思想与设值回代

方法 4.1 简化

1. 条件简化
2. 结论简化

例 4.18 【2022 天津部分区期末】已知 $a,b>0,a+2b=1$，则 $\frac{1}{b}+\frac{b}{2a+b}$ 的最小值为 ______。

例 4.19 若正数 a,b 满足 $2a+\frac{1}{b}=1$，则 $\frac{2}{a}+b$ 的最小值为（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $8\sqrt{2}$　　C. 8　　D. 9

例 4.20 【2022 湖北黄石期末】设 $x,y>0$，且满足 $\left(x-\frac{1}{y}\right)^2=\frac{16y}{x}$，则当 $x+\frac{1}{y}$ 取最小值时，$x^2+\frac{1}{y^2}=$ ______。

例 4.21 【2022 云南曲靖一中二模（改编）】已知正数 a,b 满足 $\frac{2}{3a+b}+\frac{1}{a+2b}=4$，则 $7a+4b$ 的最小值为（　　）

A. $\frac{9}{4}$　　B. 5　　C. $\frac{5+2\sqrt{2}}{4}$　　D. 9

例 4.22 【2018 湖南长沙一中月考】设正实数 a,b,c 满足 $a+2b+c=1$，则 $\frac{1}{a+b}+\frac{9(a+b)}{b+c}$ 的最小值为 ______。

例 4.23 【2020 山东曲阜一中检测】已知实数 a,b 满足 $ab>0$，则 $\frac{a}{a+b}-\frac{a}{a+2b}$ 的最大值为（　　）

A. $2-\sqrt{2}$　　B. $2+\sqrt{2}$

C. $3-2\sqrt{2}$　　D. $3+2\sqrt{2}$

例 4.24 已知实数 x,y 满足 $x^2+\frac{y^2}{16}=1$，则 $x\sqrt{2+y^2}$ 的最大值为 ______。

方法 4.2 设值回代

针对需要求解的数学式，设其值为某个参数 t，将 t 带入题目所给的约束条件，从而确定 t 的范围。

例 4.25 【2020 山东烟台期中，同例 4-1-3】已知 $x>0,y>0,x+3y+xy=9$，则 $x+3y$ 的最小值为 ______。

例 4.26 非负实数 x,y 满足 $x^2+4y^2+4xy+4x^2y^2=32$

（1）$x+2y$ 的最小值为多少？

（2）求 $\sqrt{7}(x+2y)+2xy$ 的最大值。

例 4.27 【2020 浙江萧山二中等校联考】已知 a,b 是正实数，且 $a+2b-3ab=0$，则 ab 的最小值为 ______，$a+b$ 的最小值为 ______。

例 4.28 已知正实数 $xy+2x+3y=42$，则 $xy+5x+4y$ 的最小值为 ______。

例 4.29 已知实数 x,y 满足 $xy-2=x+y$，且 $x>1$，则 $y(x+11)$ 的最小值为（　　）

A. 21　　B. 24　　C. 25　　D. 27

扩展 4.2

1. $ab+p\cdot a+n\cdot b+r=0$ 的处理方式

4.4 齐次

回顾均值不等式：

$$
\begin{aligned}
& a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a,b>0) \\
& \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a,b>0)
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

回顾 $a+b$ 与 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的不等关系

方法 4.3 齐次配平

若题目中出现多个不同次数的项，可以尝试通过配平使得各项次数相同，从而使用均值不等式进行求解。

例 4.30 【2017 河南适应性测试】已知正数 x,y 满足 $x+4y=4$，则 $\dfrac{x+28y+4}{xy}$ 的最小值为（　　）

A. $\dfrac{85}{2}$　　B. 24　　C. 20　　D. 18

例 4.31 【2017 天津卷·文】若 $ab>0$，则 $\dfrac{a^4+4b^4+1}{ab}$ 的最小值为 ______。

例 4.32 【2020 天津卷】已知 $a,b>0, ab=1$，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{8}{a+b}$ 的最小值为 ______。

例 4.33 【2022 西南名校第一次诊断】已知 x,y 为正实数，且 $x+y=2$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}$ 的最小值为 ______。

例 4.34 已知 $x>y>0,x+y=3$，则 $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{xy+y^2+2}{y}$ 的最小值为 ______。

例 4.35 已知 $a,b,c>0$，求证：$2\left(\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)\leq 3\left(\dfrac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)$

例 4.36 已知 $a,b,c>0,a+b+c=1$，求证：$\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)\geq 8$

方法 4.4 构造 0 次式消元

观察如果分式上下分母次数相同，则可以尝试该方法

例 4.37 已知 $x,y>0$，则 $\dfrac{6xy}{x^2+9y^2}+\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 的最大值为 ______。

例 4.38 已知正实数 a,b 满足 $\dfrac{1}{(2a+b)b}+\dfrac{2}{(2b+a)a}=1$，则 ab 的最大值为 ______。

例 4.39 【2018 江苏南京三模】若正数 a,b,c 成等差数列（即 $a-b=b-c$），则 $\dfrac{c}{2a+b}+\dfrac{b}{a+2c}$ 的最小值为 ______。

4.5 形变处理

对于陌生的形式，尝试设值，变换得到我们熟悉的形式。

例 4.40 【2020 湖南师范大学附属中学月考】设 $a>b>0,ab=2$，则 $a^2+\dfrac{1}{a(a-b)}$ 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

例 4.41 【2022 辽宁名校第四次联考】若 a,b,c 均为正数，且 $c(a+b+c)+ab=8$，则 $a+b+2c$ 的最小值为（　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $8\sqrt{2}$

例 4.42 【2022 浙江宁波二模】正实数 a,b,c 互不相等，且满足 $a^2+b^2+c^2=2ab+bc$，则下列结论正确的是（　　）

A. $2a>b>c$　　B. $2a>c>b$

C. $2c>a>b$　　D. $2c>b>a$

例 4.43 若存在正实数 y，使得 $\dfrac{xy}{y-x}=\dfrac{1}{5x+4y}$，则实数 x 的最大值为 ______。

例 4.44 已知正实数 a,b,c,d 满足 $a+b=1,c+d=1$，则 $\dfrac{1}{abc}+\dfrac{1}{d}$ 的最小值为（　　）

A. 10　　B. 9　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

例 4.45 已知实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$，则 $ab+c$ 的最小值为（　　）

A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. -1　　D. $-\frac{1}{2}$

例 4.46 若正数 a,b,c 满足 $ab=a+2b, abc=a+2b+c$，则 c 的最大值为 ______。

例 4.47 已知 $x+y=\frac{1}{x}+\frac{4}{y}+8(x,y>0)$，则 $x+y$ 的最小值为（　　）

A. $5\sqrt{3}$　　B. 9　　C. $4+2\sqrt{26}$　　D. 10

例 4.48 已知正实数 a,b 满足 $a+b=1$，则 $\frac{2a}{a^2+b}+\frac{b}{a+b^2}$ 的最大值为（　　）

A. 2　　B. $1+\sqrt{2}$

C. $1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $1+\frac{3\sqrt{2}}{3}$

例 4.49 已知正实数 a,b,c 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}, \frac{a}{c}+\frac{b}{c+b}>t$，则 t 的最大值为 ______。

例 4.50 【2023 江西五市九校协作体第一次联考】已知 a,b,c 是正实数，且 $b+c=\sqrt{6}$，则 $\frac{ac^2+2a}{bc}+\frac{8}{a+1}$ 的最小值为 ______。

4.6 总结回顾

1. 基本不等式及其简单应用
2. 核心处理手段：换元法

   善于设置新的变量来简化问题，得到自己熟悉的情况

   注意事项——新变量的取值范围
3. 基本思想：简化
   - 条件简化
   - 结论简化

   从简单情况入手。条件简单利用条件
4. 重要思想：齐次
5. 特殊处理方式：
   - 设值回代
   - 构造 0 次式
6. 注意事项：形变处理

第五章 基本不等式其他处理方式（*）

例 5.1 若 a,b,c 均为正实数，则 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+2bc}$ 的最小值为 ______。

例 5.2 已知 x,y,z 均为正实数，且满足 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $3xy+yz$ 的最大值为 ______。

例 5.3 已知 x,y,z 均为正实数，$2x+2y+z=1$，求证：$3xy+yz+zx\leq\dfrac{1}{5}$。

例 5.4 若正数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2-ab-bc=1$，则 c 的最大值为 ______。

例 5.5 已知 $x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{19}{4}(x,y>0)$，则 $\dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{16y}$ 的最小值为 ______。

例 5.6 已知 $a,b>0$，记 $h=\max\left\{\dfrac{2}{\sqrt{a}},\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}},\dfrac{2}{\sqrt{b}}\right\}$，则 h 的最小值为 ______。

第六章 不等式拓展（*）

6.1 柯西不等式

$$
\begin{aligned}
&(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \\
&iff \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n} \quad \text{取等号}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

常见形式：

1. $n(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2) \geq (a_1+a_2+...+a_n)^2$
2. $\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\right) \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$

例 6.1 已知 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{4}=1$，求 $x+y+z$ 的取值范围。

例 6.2 已知 a,b,c 均为正实数，且 $a+b+c=1$，求证：

（1） $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

（2） $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$

（3） $\sqrt{3a+2}+\sqrt{3b+2}+\sqrt{3c+2} \leq 3\sqrt{3}$

（4） $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq 1$

例 6.3 已知 a,b,c 为三角形三边长，求证：$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{a+b+c} > 2$

例 6.4 已知 a,b,c 均为正实数，且 $abc=1$，求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq a^2+b^2+c^2$

6.2 排序不等式

若

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \tag{6.2}$$

则对于

$$(a_1,a_2,...,a_n) \tag{6.3}$$

的任何其他轮换

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{6.4}$$

都有：

$$a_1 b_n + a_2 b_{\{n-1\}} + ... + a_n b_1 \le x_1 b_1 + x_2 b_2 + ... + x_n b_n \le a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \tag{6.5}$$

即：**反序和 $\le$ 乱序和 $\le$ 正序和**。

例题答案

例 1.1

C

例 1.2

$<$

例 1.3

(1) $2a+3b\in(8,32)$，$a-b\in(-7,2)$，$\dfrac{a}{b}\in\left(\dfrac{1}{8},2\right)$

(2) $\dfrac{a}{b}\in(-3,4)$

(3) $2a-4b\in(-17,7)$

例 1.4

解：

$$\frac{2a+b}{a+2b}-1=\frac{2a+b-a-2b}{a+2b}=\frac{a-b}{a+2b} \tag{6.6}$$

因为 $a>b>0$，所以 $a-b>0, a+2b>0$，

故 $\dfrac{a-b}{a+2b}>0$，即 $\dfrac{2a+b}{a+2b}>1$。

例 1.5

(1) $<$

(2) $>$

例 1.6

解：

$$
\begin{aligned}
\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}-\frac{a^2+b^2}{a+b} &= \frac{(a^3+b^3)(a+b)-(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)(a+b)} \\
&= \frac{a^4+a^3b+ab^3+b^4-a^4-2a^2b^2-b^4}{(a^2+b^2)(a+b)} \\
&= \frac{a^3b+ab^3-2a^2b^2}{(a^2+b^2)(a+b)} \\
&= \frac{ab(a^2+b^2-2ab)}{(a^2+b^2)(a+b)} \\
&= \frac{ab(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)}
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

因为 $a, b \in \mathbb{R}^+$，所以 $ab > 0, (a-b)^2 \geq 0, a^2+b^2 > 0, a+b > 0$，

故 $\dfrac{ab(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)} \geq 0$，

即 $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \geq \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$。

例 1.7

$n=6$ 时取得最大值

解析：考虑相邻两项的差：

$$
\begin{aligned}
f(n+1)-f(n) &= -(n+1)^3+8(n+1)^2+4(n+1)+3-(-n^3+8n^2+4n+3) \\
&= -(n^3+3n^2+3n+1)+8(n^2+2n+1)+4n+4+3- \\
&\quad (-n^3+8n^2+4n+3) \\
&= -n^3-3n^2-3n-1+8n^2+16n+8+4n+7+n^3-8n^2-4n \\
&\quad -3 \\
&= -3n^2+13n+11
\end{aligned} \tag{6.8}
$$

令

$$
f(n+1)-f(n) = -3n^2+13n+11 \leq 0 \tag{6.9}
$$

解这个不等式：

$$n=\frac{13\pm\sqrt{169+132}}{6}=\frac{13\pm\sqrt{301}}{6} \tag{6.10}$$

因为 $\sqrt{301}\approx 17.35$，所以 $n\approx\frac{13\pm 17.35}{6}$

解得 $n\in\left[\frac{-4.35}{6},\frac{30.35}{6}\right]\approx[-0.73,5.06]$

因为 n 为正整数，所以 $n\in\{1,2,3,4,5\}$ 时 $f(n+1)>f(n)$，

当 $n\geq 6$ 时 $f(n+1)<f(n)$。

因此 $n=6$ 时取得最大值：

$$f(6)=-216+288+24+3=99 \tag{6.11}$$

例 1.8

$n=8$ 或 9 时取得最大值

解析：考虑相邻两项的比值：

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{(n+2)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n}}=\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9(n+2)}{10(n+1)} \tag{6.12}$$

令 $\frac{f(n+1)}{f(n)}\geq 1$：

$$\frac{9(n+2)}{10(n+1)}\geq 1 \tag{6.13}$$

$$9(n+2)\geq 10(n+1) \tag{6.14}$$

$$9n+18\geq 10n+10 \tag{6.15}$$

$$n\leq 8 \tag{6.16}$$

因此，当 $n\leq 8$ 时，$f(n+1)\geq f(n)$，函数递增；且 当 $n=8$ 时，$f(n+1)=f(n)$。

当 $n>9$ 时，$f(n+1)<f(n)$，函数递减。

所以 $n=8$ 或 9 时取得最大值。

例 1.9

解：原不等式等价于

$$(x+1)(x-2)(x-3)<0 \tag{6.17}$$

令 $f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$，

根的排列为：$-1<2<3$

使用穿根法，从右向左穿根，得解集为：

$$x\in(-1,2)\cup(3,+\infty) \tag{6.18}$$

例 1.10

（1） $\boldsymbol{x\in(-\infty,-3)\cup(1,2)}$

（2） $\boldsymbol{x\in(-3,-1)\cup(5,+\infty)}$

例 1.11

$\boldsymbol{x\in(-\infty,-2]\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)}$

解：原不等式等价于

$$\begin{cases}(x+2)(2x-1)\geq 0\\ 2x-1\neq 0\end{cases} \tag{6.19}$$

解得：$x\in(-\infty,-2]\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

例 1.12

（1） $\boldsymbol{x\in(-2,1)\cup(4,+\infty)}$

（2） $\boldsymbol{x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)}$

（3） $\boldsymbol{x\in(-\infty,-1]\cup(0,1]}$

例 2.1

2

解析：从表格可以看出：

1. $f(-2)=0$，所以 $x=-2$ 是一个零点
2. $f(-3)=6>0, f(-1)=-4<0$，由零点存在定理，在 $(-3,-1)$ 内还有一个零点
3. $f(0)=-6<0, f(1)=-6<0$，无法判断 $(0,1)$ 内是否有零点

但由于二次函数最多有 2 个零点，且已经找到 2 个，故零点个数为 2。

例 2.2

$\boldsymbol{a \leq 1}$

解析：二次函数 $f(x)=x^2-2ax+3$ 的对称轴为 $x=a$。

要使 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，需要对称轴在区间左侧或左端点，即 $a\leq 1$

例 2.3

B

例 2.4

$\boldsymbol{\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}$

例 2.5

A、B、D

例 2.6

C

例 2.7

D

例 2.8

C

例 2.9

A

例 2.10

$(-\infty, 6)$

例 3.1

8

例 3.2

8

例 3.3

(1) 4

(2) $\frac{25}{8}$

(3) $\frac{27}{2}$

例 3.4

12

例 3.5

24

例 3.6

$2\sqrt{2}$

例 4.1

2　　8

例 4.2

$\frac{3}{2}$

例 4.3

6

例 4.4

$\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

例 4.5

$\frac{1}{6}$

例 4.6

$\frac{\sqrt{2}}{12}$

例 4.7

4

例 4.8

C

例 4.9

C

例 4.10

5

例 4.11

$\frac{1}{5}$

例 4.12

C

例 4.13

9

例 4.14

A

例 4.15

$\frac{4}{5}$

例 4.16

C

例 4.17

C

例 4.18

$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

例 4.19

D

例 4.20

12

例 4.21

A

例 4.22

7

例 4.23

C

例 4.24

$\frac{9}{4}$

例 4.25

6

例 4.26

(1) 4

(2) 16

例 4.27

$\frac{8}{9}$ $1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$

例 4.28

55

例 4.29

D

例 4.30

D

例 4.31

4

例 4.32

4

例 4.33

$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 4.34

6

例 4.35

略

例 4.36

略

例 4.37

$\sqrt{3}$

例 4.38

$2-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

例 4.39

$\dfrac{2\sqrt{5}}{9}$

例 4.40

D

例 4.41

C

例 4.42

A

例 4.43

$\dfrac{1}{5}$

例 4.44

B

例 4.45

C

例 4.46

$$\frac{8}{7}$$

例 4.47

B

例 4.48

C

例 4.49

2

例 4.50

6

例 5.1

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

例 5.2

$$\frac{\sqrt{10}}{2}$$

例 5.3

略

例 5.4

$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

例 5.5

$-\dfrac{1}{4}$

例 5.6

2

例 6.1

$[-5, 5]$

例 6.2

略

例 6.3

略

例 6.4

略