



# 第 3 章

## 函数的应用

作者: zheliku

时间: 2026-01-05

版本: 1.0.0

# 目录

<b>第一章 函数性质</b>	<b>1</b>
1.1 单调性+其他	1
1.2 奇偶性	2
1.3 周期性+对称性	3
1.4 综合应用	3
<b>第二章 处理手段</b>	<b>5</b>
2.1 分离参数	5
2.2 数形结合	6
2.3 连等设值	7
2.4 嵌套处理	8
2.5 构造函数	10
2.6 函数同构	10
<b>第三章 特殊问题</b>	<b>12</b>
3.1 比较大小	12
3.1.1 区间比较问题	12
3.1.2 单调性比较问题	13
3.1.3 数形结合问题	13
3.2 抽象函数	13
<b>第四章 思维训练</b>	<b>16</b>
<b>例题答案</b>	<b>17</b>

# 第一章 函数性质

## 内容提要

□ 单调性+其他

□ 奇偶性

□ 周期性+对称性

□ 综合应用

## 1.1 单调性+其他

### 方法 1.1

借助函数  $f(x)$  的单调性, 通过  $f(x)$  的大小判断  $x$  的大小。

**例 1.1** 已知函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增, 且  $f(a) \leq f(2-a)$ , 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**例 1.2** 已知函数  $f(x) = x^3 - e^{-x}$ ,  $f(a) \leq f(2-a)$ , 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**例 1.3** 【2017 全国卷 I】已知函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减, 且为奇函数, 若  $f(1) = -1$ , 则满足  $-1 \leq f(x-2) \leq 1$  的  $x$  的取值范围是 ( )

A.  $[-2, 2]$

B.  $[-1, 1]$

C.  $[0, 4]$

D.  $[1, 3]$

**例 1.4** 【2024 北京市西城区第五十六中学届高三数学一模】已知函数  $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{|x|} + 1\right) + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 3}$ , 则不等式  $f(\lg x) > 3$  的解集为 ( )

A.  $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$

B.  $\left(-\infty, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$

C.  $(1, 10)$

D.  $\left(\frac{1}{10}, 1\right) \cup (1, 10)$

**例 1.5** 定义在  $(-1, 1)$  上的奇函数  $f(x)$  在  $[0, 1)$  为增函数, 则  $f(x) + f(2x-1) < 0$  的解集为 \_\_\_\_\_。

**例 1.6** 【2020 山东烟台诊断】已知函数  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ , 实数  $m, n$  满足  $f(2m-n) + f(2-n) > 0$ , 则下列不等关系成立的是 ( )

A.  $m+n > 1$

B.  $m+n < 1$

C.  $m-n > -1$

D.  $m-n < -1$

**例 1.7** 已知定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x) = 2024^x - \log_{2024}(\sqrt{x^2+1} - x) - 2024^{-x} + 2$ , 则不等式  $f(3x+1) + f(x) \geq 4$  的解集为 \_\_\_\_\_。

**例 1.8** 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟改编】已知函数  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x + 1$ , 且  $f(a) + f(a+1) > 2$ , 则实数的取值范围是 ( )

- A.  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$       B.  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$       C.  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$       D.  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

**例 1.9** 【2023 江苏淮安高一期中】函数  $f(x)$  为定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数,  $g(x) = f(x) - x^2 + 2$  在区间  $(-\infty, 0]$  上单调递减, 则不等式  $f(x) - f(x-2) > 4x - 4$  的解集为 \_\_\_\_\_。

**例 1.10** 【2024 四川成都校考三模】已知函数  $f(x) = e^{x-2} + e^{2-x} + 2x^2 - 8x + 7$ , 则不等式  $f(2x+3) > f(x+2)$  的解集为 ( )

- A.  $\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$       B.  $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$   
C.  $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$       D.  $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

**例 1.11** 【2024 黑龙江哈尔滨哈九中校考模拟预测】已知函数  $f(x) = \sin(2x-2) + e^{1-x} - e^{x-1} + 2$ , 若  $f(a^2+1) + f(2a-2) > 4$ , 则实数范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -3)$       B.  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$   
C.  $(-3, 1)$       D.  $(1, +\infty)$

**例 1.12** 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 5, & x < 0 \\ 4^{x+2022}, & x \geq 0 \end{cases}$ , 则不等式  $f\left(x + \frac{7}{2}\right) < 8f(x^2)$  的解集为 \_\_\_\_\_。

### 思考 1.1

1. 上述题目有什么相似之处? 请说出你的观点。

## 1.2 奇偶性

**例 1.13** 【2024 福建省福州格致中学高三下学期期中考】已知  $f(x) = a \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + b \sin x + 2$ , 若  $f(-3) = 7$ , 则  $f(3)$  的值为 ( )

- A. -7      B. -5      C. -3      D. 无法确定

**例 1.14** 【2024 重庆巴蜀中学高三适应性月考】已知函数  $f(x) = \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  在区间  $[-5, 5]$  上的最大值是  $M$ , 最小值是  $N$ , 则  $f(M+N)$  的值等于 ( )

- A. 0      B. 10      C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{\pi}{2}$

**例 1.15** 【2024 全国高三专题练习】已知函数  $f(x) = |x| + e^x + e^{-x} + a$  有唯一零点, 则实数  $a$  的值为 ( )



A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

**思考 1.2**

1. 上述题目可以获得什么结论?

- 奇函数: \_\_\_\_\_
- 偶函数: \_\_\_\_\_

**1.3 周期性+对称性**

**例 1.16** 【2022 福建厦门二检】(多选) 定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = -f(x)$ , 且当  $x \in (0, 1]$  时,  $f(x) = 1 - x$ , 则 ( )

- A.  $f(x)$  是周期函数  
B.  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上单调递减  
C.  $f(x)$  图像关于直线  $x = 3$  对称  
D.  $f(x)$  的图像关于点  $(2, 0)$  对称

**例 1.17** 【2023-2024 江苏省南京市南京师大附中高一上期末】(多选) 已知  $f(x)$  为定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数, 当  $x \geq 0$  时, 有  $f(x+1) = -f(x)$ , 且当  $x \in [0, 1)$  时,  $f(x) = \log_2(x+1)$ 。下列命题正确的是 ( )

- A.  $f(2023) + f(-2024) = 0$   
B.  $f(x)$  是周期为 2 的周期函数  
C. 直线  $y = x$  与  $f(x)$  有且仅有 2 个交点  
D.  $f(x)$  的值域为  $(-1, 1)$

**例 1.18** 【2024 山东滨州统考二模】函数  $y = f(x)$  在区间  $(-\infty, +\infty)$  上的图象是一条连续不断的曲线, 且满足  $f(3+x) - f(3-x) + 6x = 0$ , 函数  $f(1-2x)$  的图象关于点  $(0, 1)$  对称, 则 ( )

- A.  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 1)$  对称  
B. 8 是  $f(x)$  的一个周期  
C.  $f(x)$  一定存在零点  
D.  $f(101) = -299$

**思考 1.3**

1. 上述题目体现了对称性和周期性的什么关系?

**1.4 综合应用**

**例 1.19** 【2025 北京 5 年高考 3 年模拟】设  $f(x) = 2|x-1| + \log_3(x-1)^2$ , 不等式  $f(ax) \leq f(x+3)$  在  $x \in (1, 2]$  上恒成立, 则实数的取值范围是 ( )

- A.  $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$   
B.  $(100, 2]$

C.  $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$

D.  $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[1, \frac{5}{2}\right]$

**例 1.20** 【2024 广东省湛江市第一中学高一上期末多选压轴】(多选) 已知函数  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + x + 1$ , 则下列说法正确的是 ( )

A.  $f(\lg 3) + f\left(\lg \frac{1}{3}\right) = 2$

B. 函数  $f(x)$  的图象关于点  $(0, 1)$  对称C. 函数  $f(x)$  在定义域上单调递减D. 若实数  $a, b$  满足  $f(a) + f(b) > 2$ , 则  $a + b > 0$ 

**例 1.21** 【2024 重庆市西南大学附属中学校高一上期末多选次压轴】(多选) 已知函数  $f(x) = \log_2(\sqrt{x^2+1}-x) + 3$ , 则下列说法正确的是 ( )

A. 函数  $f(x)$  的图象关于点  $(0, 3)$  对称

B.  $f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = 6$

C. 函数  $f(x)$  在定义域上单调递增D. 若实数  $a, b$  满足  $f(a) + f(b) > 6$ , 则  $a + b < 0$ 

**例 1.22** 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数, 且在  $(-\infty, 0]$  上单调递增, 若  $f(2) = 0$ , 则不等式  $(x^2 - 4)f(x) < 0$  的解集为 ( )

A.  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

B.  $\mathbb{R}$

C.  $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

D.  $\emptyset$

**例 1.23** 【2024 北京交大附中月考, 14】已知函数  $f(x) = \frac{2^x + m}{2^x + 1}$

(1) 当  $m = 0$  时,  $f(x)$  的值域为 \_\_\_\_\_;

(2) 若对于任意  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $f(a), f(b), f(c)$  的值总可作为某一个三角形的三边长, 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

#### 思考 1.4

1. 上述所有题目涉及到的函数性质有哪些?
2. 关于函数性质的考查, 说出你的理解。

## 第二章 处理手段

### 内容提要

- 分离参数
- 数形结合
- 连等设值
- 嵌套处理
- 构造函数
- 函数同构

### 2.1 分离参数

对于含有参数的不等式

$$f(x) \cdot a < g(x) \quad (2.1)$$

将参数分离，得到不等式

$$a < \frac{g(x)}{f(x)} \quad (2.2)$$

从而研究

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad (2.3)$$

的最值。

**例 2.1** 【2024 全国高三专题练习】若关于  $x$  的不等式  $ax^2 - 2x + a \leq 0$  在区间  $[0, 4]$  上有解，则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**例 2.2** 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】设函数  $f(x) = mx^2 - mx - 1$ ，若对于  $x \in [1, 3]$ ， $f(x) < -m + 4$  恒成立，则实数  $m$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, 0]$
- B.  $\left(0, \frac{5}{7}\right)$
- C.  $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{5}{7}\right)$
- D.  $\left(-\infty, \frac{5}{7}\right)$

**例 2.3** 【2024 全国高三专题练习】若不等式  $2x - 1 > m(x^2 - 1)$  对任意  $m \in [-1, 1]$  恒成立，实数  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**思考 2.1**

1. 分离参数能解决所有含参问题吗?
2. 你认为分离参数的适用条件是什么?

**2.2 数形结合****方法 2.1**

借助函数图像, 判断方程、图像交点等问题。

**例 2.4** 【2024 北京平谷零模, 15】已知函数  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$ , 设  $g(x) = f(x) - b$ 。给出下列四个结论:

- ① 当  $m = 4$  时,  $f(x)$  不存在最小值;
- ② 当  $0 < m \leq 3$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数;
- ③ 当  $m < 0$  时, 存在实数  $b$ , 使得  $g(x)$  有三个零点;
- ④ 当  $m > 3$  时, 存在实数  $b$ , 使得  $g(x)$  有三个零点。

其中正确结论的序号是 \_\_\_\_\_。

**例 2.5** 【2024 北京西城期末, 15】设  $a \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(x) = \begin{cases} -x^3, & x > a \\ -x^2 + a^2, & x \leq a \end{cases}$ 。给出下列四个结论:

- ①  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减;
- ② 当  $a \geq 0$  时,  $f(x)$  存在最大值;
- ③ 当  $a < 0$  时, 直线  $y = ax$  与曲线  $y = f(x)$  恰有 3 个交点;
- ④ 存在正数  $a$  及点  $M(x_1, f(x_1)) (x_1 > a)$  和  $N(x_2, f(x_2)) (x_2 \leq a)$ , 使  $|MN| \leq \frac{1}{100}$ 。

其中正确结论的序号是 \_\_\_\_\_。

**例 2.6** 【2021 北京卷, 15】已知函数  $f(x) = |\lg x| - kx - 2$ , 给出下列四个结论:

- ① 当  $k = 0$  时,  $f(x)$  恰有 2 个零点;
- ② 存在负数  $k$ , 使得  $f(x)$  恰有 1 个零点;
- ③ 存在负数  $k$ , 使得  $f(x)$  恰有 3 个零点;



④ 存在正数  $k$ , 使得  $f(x)$  恰有 3 个零点。

其中正确结论的序号是\_\_\_\_\_。

**例 2.7** 【2025 北京 5 年高考 3 年模拟】已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ , 若函数  $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) 恰有 4 个零点, 则  $k$  的取值范围是 ( )

A.  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

B.  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2\sqrt{2})$

C.  $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$

D.  $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

## 2.3 连等设值

对于

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) \quad (2.4)$$

的问题, 令

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = t \quad (2.5)$$

从而使用  $t$  表示  $x_1, x_2, x_3$  的关系。

**例 2.8** 【2017 全国卷 I】设  $x, y, z$  均为正数, 且  $2^x = 3^y = 5^z$ , 则 ( )

A.  $2x < 3y < 5z$

B.  $5z < 2x < 3y$

C.  $3y < 5z < 2x$

D.  $3y < 2x < 5z$

**例 2.9** 【2023 重庆第八中学期中】(多选) 已知正数  $x, y, z$  满足  $3^x = 4^y = 12^z$ , 则 ( )

A.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

B.  $6z < 3x < 4y$

C.  $xy < 4z^2$

D.  $x + y > 4z$

**例 2.10** 【2024 北京朝阳一模, 13】已知函数  $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \leq 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$ , 若实数  $a, b, c$  ( $a < b < c$ ) 满足  $f(a) = f(b) = f(c)$ , 则  $a+b$  的值为 \_\_\_\_\_,  $a+b+c$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**例 2.11** 设函数  $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ -x + 5, & x > 2 \end{cases}$ , 若互不相等的实数  $a, b, c$  满足  $f(a) = f(b) = f(c)$ , 则  $2^a + 2^b + 2^c$  的取值范围是 ( )

A.  $(16, 32)$

B.  $(18, 34)$

C.  $(17, 35)$

D.  $(6, 7)$

**例 2.12** 【2024 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{4}{x}, & 0 < x < 4 \\ -x^2 + 10x - 20, & x \geq 4 \end{cases}$ ,

若存在实数  $a, b, c$  满足  $f(a) = f(b) = f(c)$ , 则  $(ab+1)^c$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**例 2.13** 【2024 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数  $f(x) = \begin{cases} |\log_4 x|, & 0 < x \leq 4 \\ -\frac{1}{2}x + 3, & x > 4 \end{cases}$ , 若存在实数  $a, b, c, d \in (0, +\infty)$  且  $a < b < c < d$ , 满足  $f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$ , 则  $abcd$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**例 2.14** 【2024 全国高三专题练习】已知函数  $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$ , 若方程  $f(x) = a$  有四个不同的解  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 且  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , 则  $x_3(x_1 + x_2) + \frac{1}{x_3^2 x_4}$  的取值范围是 ( )

A.  $(-1, 1]$ B.  $[-1, 1]$ C.  $[-1, 1)$ D.  $(-1, 1)$ 

**例 2.15** 【2024 浙江省温州市高一上期末 A 卷】函数  $f(x) = x^4 - 24x + 16, g(x) = 6x^3 + ax^2$ , 方程  $f(x) = g(x)$  恰有三个根  $x_1, x_2, x_3$ , 其中  $x_1 < x_2 < x_3$ , 则  $\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)(x_2 + x_3)$  的值为 \_\_\_\_\_。

### 思考 2.2

1. 连等设值的好处是什么?

## 2.4 嵌套处理

针对

$$h(x) = f(g(x)) \quad (2.6)$$

的情况, 分为两步处理:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(t) \\ t &= g(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

**例 2.16** 【2024 全国高三专题练习】已知不等式  $4^x - a \cdot 2^x + 2 > 0$ , 对于  $a \in (-\infty, 3]$  恒成立, 则实数  $x$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

**例 2.17** 已知函数  $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$ , 下列是关于函数  $y = f(f(x)) + 1$  的零点个数的判断, 其中正确的是 ( )

A. 当  $k > 0$  时, 有 3 个零点B. 当  $k < 0$  时, 有 2 个零点C. 当  $k > 0$  时, 有 4 个零点D. 当  $k < 0$  时, 有 1 个零点

**例 2.18** 【2016 浙江卷】已知函数  $f(x) = x^2 + bx$ , 则“ $b < 0$ ”是“ $f(f(x))$  的最小值与  $f(x)$  的最小值相等”的 ( )

- A. 充分不必要条件  
B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件  
D. 既不充分也不必要条件

**例 2.19** 【2023 北京朝阳二模, 10】已知函数  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 当  $x < 0$  时,  $f(x) = 4 - 2^{-x}$ . 若关于  $x$  的方程  $f(f(x)) = m$  有且仅有两个不相等的实数解, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$   
B.  $[-3, 0) \cup (0, 3]$   
C.  $(-4, -3] \cup [3, 4)$   
D.  $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

**例 2.20** 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ , 若函数  $g(x) = f^2(x) + 3f(x) + m (m \in \mathbb{R})$  有三个零点, 则  $m$  的取值范围为 ( )

- A.  $m \leq \frac{9}{4}$   
B.  $m \leq -28$   
C.  $-28 \leq m < \frac{9}{4}$   
D.  $m > 28$

**例 2.21** 【2024 四川资阳高三统考期末】定义在  $\mathbb{R}$  上函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in (0, 1) \\ e^{x-1} - 2, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$ , 且函数  $y = f(x-1)$  关于点  $(1, 0)$  对称. 若关于  $x$  的方程  $f^2(x) - 2mf(x) = 1 (m \in \mathbb{R})$  有  $n$  个不同的实数解, 则  $n$  的所有可能的值为 ( )

- A. 2  
B. 4  
C. 2 或 4  
D. 2 或 4 或 6

**例 2.22** 【2024 全国高三专题练习】已知函数  $f(x) = |2^{|x|} - 2| - 1$ , 则关于  $x$  的方程  $f^2(x) + mf(x) + n = 0$  有 7 个不同实数解, 则实数  $m, n$  满足 ( )

- A.  $m > 0, n > 0$   
B.  $0 < m < 1, n = 0$   
C.  $m < 0$  且  $n > 0$   
D.  $-1 < m < 0$  且  $n = 0$

**例 2.23** 【2024 全国高三专题练习】已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}x, & x \leq 0 \\ -|2x-1| + 1, & x > 0 \end{cases}$ , 若关于  $x$  的方程  $f^2(x) - (k+1)xf(x) + kx^2 = 0$  有且只有三个不同的实数解, 则正实数  $k$  的取值范围为 ( )

- A.  $(0, \frac{1}{2})$   
B.  $[\frac{1}{2}, 1) \cup (1, 2)$   
C.  $(0, 1) \cup (1, 2)$   
D.  $(2, +\infty)$

**例 2.24** 【2024 全国高三专题练习】已知函数  $f(x) = x^2 e^{2x} + (a-1)xe^x + 1 - a$  有三个不同的零点  $x_1, x_2, x_3$ , 其中  $x_1 < x_2 < x_3$ , 则  $(1 - x_1 e^{x_1})(1 - x_2 e^{x_2})(1 - x_3 e^{x_3})^2$  的值为 ( )

- A. 1                      B.  $(a-1)^2$                       C. -1                      D.  $1-a$

**例 2.25** 【2024 全国高三专题练习】已知函数  $f(x) = (ax + \ln x)(x - \ln x) - x^2$  有三个不同的零点, 其中  $x_1 < x_2 < x_3$ , 则  $\left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right) \left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right)$  的值为 ( )

- A.  $a-1$                       B.  $1-a$                       C. -1                      D. 1

## 2.5 构造函数

### 方法 2.2

将条件中的某个式子看成整体, 构造新的函数进行研究。

**例 2.26** 【2024 江苏省盐城市第一中学高一上期末】已知  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上的奇函数,  $f(2) = 2$ , 若对于  $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 当  $x_1 > x_2$  时, 都有  $(x_1 - x_2) \left[ \frac{f(x_1)}{x_2} - \frac{f(x_2)}{x_1} \right] < 0$ , 则不等式  $(x+1)f(x+1) > 4$  的解集为 ( )

- A.  $(-3, 1)$                       B.  $(-3, -1) \cup (-1, 1)$   
C.  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$                       D.  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

**例 2.27** 【2024 广东省广州市高一上九区联考填空压轴】设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 对任意的  $x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2$  满足  $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ , 若  $f(2) = 4$ , 则不等式  $f(x) - 2x \leq 0$  的解集为 \_\_\_\_\_。

**例 2.28** 【2024 江苏省盐城市五校联盟高一上期中】已知函数  $f(x) = x^2 - x$ , 若对于任意的  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 都有  $x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) > ax_1 x_2 (x_2^2 - x_1^2)$  成立, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(0, +\infty)$                       B.  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$                       C.  $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$                       D.  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

## 2.6 函数同构

### 方法 2.3

寻找出条件中具有结构相同的式子, 研究其结构特点与对应的参数。

**例 2.29** 【2023 北京人大附中高一月考】已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $(\sqrt{x})^3 + 2022\sqrt{x} = a$ ,  $(\sqrt{y} - 2)^3 + 2022(\sqrt{y} - 2) = -a$ , 则  $x + y$  的最小值是 ( )

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C. 2                      D. 4

**例 2.30** 【2024 黑龙江哈尔滨哈尔滨三中校考模拟预测】已知实数  $x, y$  满足  $\ln \sqrt{2y+1} + y = 2, e^x + x = 5$ , 则  $x + 2y$  的值为 \_\_\_\_\_。

**例 2.31** 【2024 广东省佛山市高一上期末填空压轴】已知  $2^x = 11 - 3x, \log_2(6y - 1) = 4 - 2y$ , 则  $x + 2y$  的值为 \_\_\_\_\_。

**例 2.32** 【2024 湖南省长沙市长郡中学高一上期末压轴】若实数  $x_1, x_2$  满足  $e_1^x + x_1 - 2 = 0, x_2 \ln x_2 + 2x_2 - 1 = 0$ , 则  $x_2(2 - x_1)$  的值为 \_\_\_\_\_。

**例 2.33** 【2024 江苏省南京市南京师大附中高一上期末填空压轴】设  $a$  为实数, 若实数  $x_0$  是关于  $x$  的方程  $e^x + (1 - a)x = \ln a + \ln x$  的解, 则  $\frac{e^{x_0-1}}{ax_0} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**例 2.34** 【2020 全国课标 I 卷, 理】若  $2^a + \log_2 a = 4^b + 2 \log_4 b$ , 则 ( )

- A.  $a > 2b$                       B.  $a < 2b$                       C.  $a > b^2$                       D.  $a < b^2$

## 第三章 特殊问题

### 内容提要

□ 比较大小

□ 抽象函数

### 3.1 比较大小

基本方式：

1. 作差。
2. 作商。
3. 单调性。

#### 3.1.1 区间比较问题

##### 方法 3.1

判断数的大致区间，依据区间位置比较大小。

**例 3.1** 【2023 山东临沂平邑一中高一期末】已知  $a = \log_2 0.3$ ,  $b = 2^{0.2}$ ,  $c = 0.2^{0.3}$ , 则 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < c < a$       C.  $c < a < b$       D.  $a < c < b$

**例 3.2** 【2024 广东省华南师范大学附属中学高一上期末次压轴】已知  $a = \ln 2$ ,  $b = \sin \frac{6\pi}{7}$ ,  $c = 3^{\frac{1}{2}}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系是 ( )

- A.  $a > b > c$       B.  $a > c > b$       C.  $c > b > a$       D.  $c > a > b$

**例 3.3** 【2024 北京西城二模, 5】设  $a = \lg \frac{2}{3}$ ,  $b = \sqrt{\lg 3 \cdot \lg 2}$ ,  $c = \frac{1}{2} \lg 6$ , 则 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < a < c$       C.  $a < c < b$       D.  $b < c < a$

**例 3.4** 【2024 广东省深圳市南山区高一上期末质量监测】已知  $a = \sin 1 + \cos 1$ ,  $b = \log_{\cos 1} \sin 1$ ,  $c = 2^{\cos 1}$ , 则 ( )

- A.  $c > a > b$       B.  $a > b > c$       C.  $c > b > a$       D.  $a > c > b$



## 3.1.2 单调性比较问题

## 方法 3.2

相同结构的两个数，构造函数依据单调性比较大小。

**例 3.5** 【2024 广东省佛山市高一上期末单选压轴】已知  $2^a = 5, 3^b = 10, 4^c = 17$ ，则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < c < a$       C.  $c < a < b$       D.  $c < b < a$

**例 3.6** 【2024 重庆市南开中学校高一上期末单选压轴】已知  $5 - a = \ln a, b = \log_4 3 + \log_9 17, 7^b + 24^b = 25^c$ ，则以下关于  $a, b, c$  的大小关系正确的是 ( )

- A.  $b > c > a$       B.  $a > c > b$       C.  $b > a > c$       D.  $a > b > c$

## 3.1.3 数形结合问题

## 方法 3.3

做出图像，依据交点位置比较大小。

**例 3.7** 【2023 天津部分区期中】已知  $a, b, c$  均为正数，且  $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a, \left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_{\frac{1}{2}} b, \left(\frac{1}{2}\right)^c = \log_2 c$ ，则 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $c < b < a$       C.  $c < a < b$       D.  $b < a < c$

**例 3.8** 【2024 湖南省长沙市湖南师大附中高一上期末单选压轴】设方程  $\log_2 x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ ， $\log_{\frac{1}{2}} x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$  的根分别为  $x_1, x_2$ ，则 ( )

- A.  $x_1 x_2 = 1$       B.  $0 < x_1 x_2 < 1$       C.  $1 < x_1 x_2 < 2$       D.  $x_1 x_2 \geq 2$

## 3.2 抽象函数

## 方法 3.4

寻找已学过的函数模型进行匹配，探究其函数特征。或寻找特殊值带入。

**例 3.9** 【2024 广东深圳高三深圳外国语学校校考阶段练习】写出一个满足  $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$  的函数解析式：\_\_\_\_\_。

**例 3.10** 【2023 重庆一诊】已知定义域为  $(0, +\infty)$  的减函数  $f(x)$  满足  $f(xy) = f(x) + f(y)$ , 且  $f(2) = -1$ , 则不等式  $f(x+2) + f(x+4) > -3$  的解集为 \_\_\_\_\_。

**例 3.11** 【2024 四川省遂宁市学年高三上学期期末】定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$ , 对任意  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , 满足下列条件:

①  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 2$

②  $f(2) = 4$

(1) 是否存在一次函数  $f(x)$  满足条件②, 若存在, 求出  $f(x)$  的解析式; 若不存在, 说明理由。

(2) 证明:  $g(x) = f(x) - 2$  为奇函数。

**例 3.12** 【2024 北京丰台一模, 14】已知函数  $f(x)$  具有下列性质:

① 当  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$  时, 都有  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1$ ;

② 在区间  $(0, +\infty)$  上  $f(x)$  单调递增;

③  $f(x)$  是偶函数。

则  $f(0) =$  \_\_\_\_\_; 函数  $f(x)$  可能的一个解析式为  $f(x) =$  \_\_\_\_\_。

**例 3.13** 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $f(x)$  满足对任意  $x, y \in \mathbb{R}$ , 有  $f(x - y) = f(x) - f(y)$ ,  $f(3) = 1013$ 。

(1) 求  $f(0), f(6)$  的值。

(2) 判断  $f(x)$  的奇偶性, 并证明你的结论。

(3) 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ , 解不等式  $f(2x - 4) > 2026$ 。

**例 3.14** 【2023 福建福州高一期中】(多选) 定义在  $(-1, 1)$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$  且当  $x \in (-1, 0)$  时,  $f(x) < 0$ , 则下列说法正确的有 ( )

A.  $f(0) = 0$

B.  $f(x)$  为奇函数

C.  $f(x)$  为减函数

D.  $f(x)$  可能为  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

**例 3.15** 【2024 湖南省岳阳市高一上期末】(多选) 已知函数  $f(x) (x \in \mathbb{R})$  满足当  $x > 0$  时,  $f(x) > 1$ , 且对任意实数  $x_1, x_2$  满足  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时,  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则下列说法正确的是 ( )

A. 函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增

B.  $f(0) = 0$  或 1

C. 函数  $f(x)$  为非奇非偶函数

D. 对任意实数  $x_1, x_2$  满足  $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

**例 3.16** 【2024 福建师范大学附属中学高一上期末】(多选) 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 满足对任意  $x, y \in (0, +\infty)$ , 都有  $f(xy) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2$ , 且  $x > 1$  时,  $f(x) > 2$ . 则下列说法正确的是 ( )

A.  $f(1) = 2$

B. 当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) < 2$

C.  $f(x)$  在  $(0, 1)$  是减函数

D. 存在实数  $k$  使得函数  $y = |f(x) + k|$  在  $(0, 1)$  是减函数

## 第四章 思维训练

**例 4.1** 【2024 河南省届高三下学期仿真模拟考试数学试题】已知函数  $f(x)$  为定义在  $\mathbb{R}$  上的单调函数， $f(f(x) - 2^x - 2x) = 10$ ，则  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上的值域为 \_\_\_\_\_。

**例 4.2** 【2023-2024 湖南省长沙市长郡中学高一上期末】已知定义在  $(0, +\infty)$  上的  $f(x)$  是单调函数，且对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒有  $f(f(x) + \log_{\frac{1}{3}} x) = 4$ ，则函数  $f(x)$  的零点为 ( )

A.  $\frac{1}{27}$

B.  $\frac{1}{9}$

C. 9

D. 27

**例 4.3** 【2024 全国高三专题练习】不等式  $(x^2 - 1)^{1011} + x^{2022} + 2x^2 - 1 \leq 0$  的解集为 \_\_\_\_\_。

## 例题答案

例 1.1

$(-\infty, 1]$

例 1.2

$(-\infty, 1]$

例 1.3

**D**

例 1.4

**D**

例 1.5

$\left(0, \frac{1}{3}\right)$

例 1.6

**C**

例 1.7

$\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

例 1.8

**B**

例 1.9

$(1, +\infty)$

例 1.10

**B**

例 1.11

**C**

例 1.12

$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

例 1.13

**C**

例 1.14

**C**

例 1.15

**D**

例 1.16

**ACD**

例 1.17

**AD**



例 1.18

ACD

例 1.19

D

例 1.20

ABD

例 1.21

ABD

例 1.22

C

例 1.23

(1)  $(0, 1)$

(2)  $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

例 2.1

$(-\infty, 1]$

例 2.2

D

例 2.3

$$(\sqrt{3} - 1, 2)$$

例 2.4

②④

例 2.5

①②④

例 2.6

①②④

例 2.7

**D**

例 2.8

**D**

例 2.9

**ABD**

例 2.10

2      [6, 7)

例 2.11

**B**

例 2.12

$(16, 64)$

例 2.13

$(96, 100)$

例 2.14

$A$

例 2.15

$-25$

例 2.16

$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

例 2.17

$CD$

例 2.18

$A$

例 2.19

$C$

例 2.20

$B$

例 2.21

**B**

例 2.22

**C**

例 2.23

**B**

例 2.24

**A**

例 2.25

**D**

例 2.26

**B**

例 2.27

$[0, 2] \cup (-\infty, -2]$

例 2.28

**D**

例 2.29

**C**

例 2.30

4

例 2.31

4

例 2.32

1

例 2.33

$\frac{1}{e}$

例 2.34

B

例 3.1

D

例 3.2

D

例 3.3

A

例 3.4

A

例 3.5

**D**

例 3.6

**D**

例 3.7

**A**

例 3.8

**B**

例 3.9

$$f(x) = x^2$$

例 3.10

$(-2, 0)$

例 3.11

(1)  $f(x) = x + 2$

(2) 略

例 3.12

$$-1 \quad |x| - 1$$

例 3.13



(1)  $f(0) = 0, f(6) = 2026$

(2) 奇函数

(3)  $(5, +\infty)$

例 3.14

ABD

例 3.15

ACD

例 3.16

ABD

例 4.1

$$\left[-\frac{7}{4}, 10\right]$$

例 4.2

A

例 4.3

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$