第一章

集合与常用逻辑用语

作者：zheliku

时间：2026-01-01

版本：1.0.0

目录

第一章 集合

内容提要

- ❑ 集合定义
- ❑ 集合特性
- ❑ 集合的表示方法
- ❑ 常用数集符号

1.1 概念

定义 1.1（集合）

我们把研究对象统称为**元素**，一些元素组成的总体叫做**集合**。

1. 元素用小写字母表示，集合用大写字母表示。
2. 如果元素 a 属于集合 A，则表示为 $a \in A$;
3. 如果元素 a 不属于集合 A，则表示为 $a \notin A$。
4. 集合的元素个数可以是无限个。按照元素个数，可将集合分为 2 类：
   - 有限集。
   - 无限集。

1.2 特性

1. 确定性
   - 集合中的元素是确定的，任何人都能判断某个元素是否属于该集合。
2. 无序性
   - 集合中元素的排列顺序不影响集合本身。
3. 互异性
   - 集合中不能有重复的元素。

例 1.1 【223 四川南充高一月考】已知 a、b 为实数，若集合 $A=\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$ 与集合 $B=\{a^2, a+b, 0\}$ 相同，则下列说法正确的是(　　)

A. $a+b=1$　　B. a、b 可以是任意值

C. 集合 A 与集合 B 元素个数一定均为 3　　D. 以上说法均不正确

1.3 表示方法

若 $1 \leq x < 6$ 且 x 为整数：

1. 例举法：$\{1,2,3,4,5\}$
2. 描述法：$\{x|1 \leq x < 6, x \in N\}$ 或 $\{x \in N|1 \leq x < 6\}$
3. 图示法
    - Venn 图
    - 数轴表示法

思考 1.1

(1) a 和 $\{a\}$ 是否一样?

(2) 平面中的一点 $(1,4)$ 可以用 $\{x=1, y=4\}$ 表示吗?

1.4 常用数集符号

数集	符号
自然数集	$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$
正整数集	$\mathbb{N}^{+}(\mathbb{N}^{*})=\{1,2,3,...\}$
整数集	$\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$
有理数集	$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\|p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0\right\}$
实数集	$\mathbb{R}$

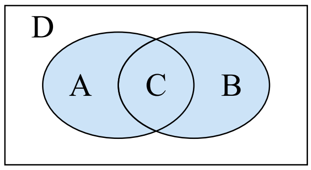
第二章 集合的基本关系

内容提要

- ❏ Venn 图
- ❏ 集合间的关系
- ❏ 特殊集合：空集
- ❏ 数轴表示法
- ❏ 区间

2.1 Venn 图

韦恩（Venn）图表示集合之间的包含/非包含关系。以右图为例：



- A 表示全集，包含所有其他集合。
- 集合 B 和集合 C 的共有部分为集合 D。

2.2 集合间的关系

符号	读法	关系	说明
$A \subseteq B$	A 包含于 B	A 是 B 的子集	集合 A 中的元素全部都在集合 B 中
$A = B$	A 等于 B	集合 A 与集合 B 相等	集合 A 与集合 B 中的元素完全相同
$A \not\subseteq B$	A 不包含于 B	A 不是 B 的子集	集合 A 中至少有一个元素不在集合 B 中

例 2.1 已知集合 $A=\{1,2,\{1,2,3\},\{1,2\},3,4\}, B=\{1,2\}, C=\{1,2,4\}$。则下列说法正确的是（　　）

A. $B \in A$，$C \in A$

B. $\{3,4\} \in A$，$B \subseteq A$

C. $C \subseteq A$，$\{1,2,3\} \in A$

D. $C \in A$，$\{1,2,3,4\} \subseteq A$

2.3 空集

定义 2.1（空集）

不包含任何元素的集合称为**空集**。记作 $\emptyset$ 或 $\{\}$.

1. 空集是任何集合的子集。
2. 空集是任何非空集合的真子集。
3. 空集只有一个子集，即其自己。

思考 2.1

$\emptyset$、0、$\{0\}$、$\{\emptyset\}$ 之间的关系?

2.4 有限集合的子集个数

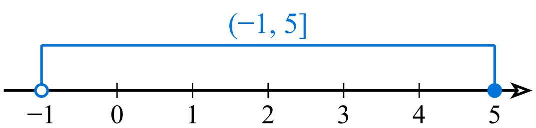
集合	子集	子集个数	真子集个数	非空真子集个数
$\{a\}$	$\{\emptyset\}$、$\{a\}$	2	1	0
$\{a,b\}$	$\{\emptyset\}$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{a,b\}$	4	3	2
$\{a,b,c\}$	$\{\emptyset\}$、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{a,b\}$、$\{c\}$、$\{a,c\}$、$\{b,c\}$、$\{a,b,c\}$	8	7	6
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$	$\cdots$	2^n	2^n-1	2^n-2

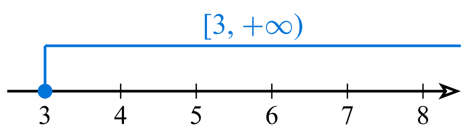
例 2.2 已知集合 $M=\{1,2,3,4\}, P=\{(x,y)\mid x\in M, y\in M, x-y\in M\}$。则 P 的非空子集的个数为 ______。

2.5 数轴表示法

对于由连续实数组成的集合，通常用数轴来表示，这也属于集合表示的图示法。在数轴上

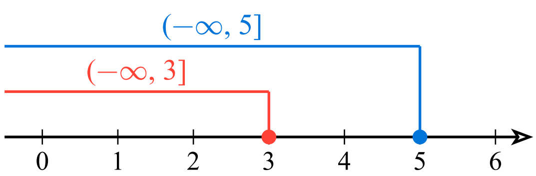
- 若端点值是集合中的元素，则用实心点表示；
- 若端点值不是集合中的元素，则用空心点表示。





左图表示集合 $\{x|-1<x\le 5\}$，右图表示集合 $\{x|x\ge 3\}$。

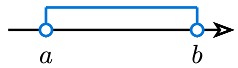
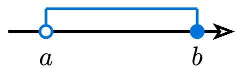
使用数轴表示集合间的关系：



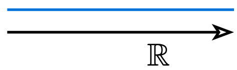
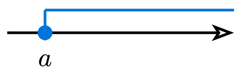
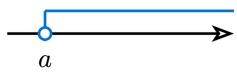
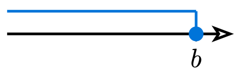
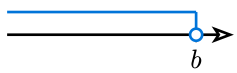
2.6 区间

定义 2.2（区间）

数轴某一段上所有点对应的所有<u>连续实数</u>组成的集合，称为**区间**。

集合	读法	符号	数轴表示
$\{x \mid a < x < b\}$	开区间	(a, b)	
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x \mid a < x \leq b\}$	左开右闭区间	$(a, b]$	
$\{x \mid a \leq x < b\}$	左闭右开区间	$[a, b)$	

- 实数 a 与 b 都叫做相应区间的端点。
- 用实心点表示包括在区间内的端点，用空心点表示不包括在区间内的端点。
- 区间的左端点 a 必须小于区间的右端点 b。
- $b - a$ 称为区间的长度。

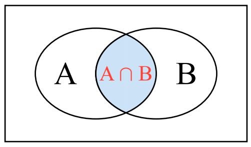
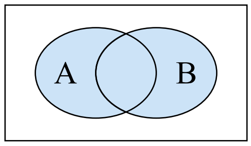
集合	符号	数轴表示
$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$	$(-\infty, +\infty)$	
$\{x \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$	

第三章 集合的基本运算

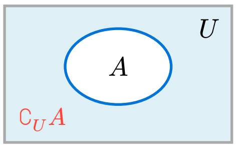
内容提要

- ❑ 交集与并集
- ❑ 全集与补集
- ❑ 德 • 摩根定律
- ❑ 容斥原理

3.1 交集与并集

运算	描述	符号	图示
交集	由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合	$A \cap B$	
并集	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合	$A \cup B$	 $A \cup B$

3.2 全集与补集



- 全集 U：研究问题中涉及的所有元素的集合。
- 集合 A 的补集：全集 U 中不属于集合 A 的元素组成的集合，符号表示为：

$$\complement_U A = \{x | x \in U, x \notin A\} \tag{3.1}$$

例 3.1 【2017 课标全国 I】已知集合 $A = \{x \mid x < 1\}, B = \{x \mid 3^x < 1\}$。则（　　）

A. $A \cap B = \{x \mid x < 0\}$　　B. $A \cup B = \mathbb{R}$

C. $A \cup B = \{x \mid x > 1\}$　　D. $A \cap B = \emptyset$

例 3.2 【2018 课标全国 I】已知集合 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$。则 $\complement_{\mathbb{R}} A =$（　　）

A. $\{x \mid -1 < x < 2\}$　　B. $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$

C. $\{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid x > 2\}$　　D. $\{x \mid x \leq -1\} \cup \{x \mid x \geq 2\}$

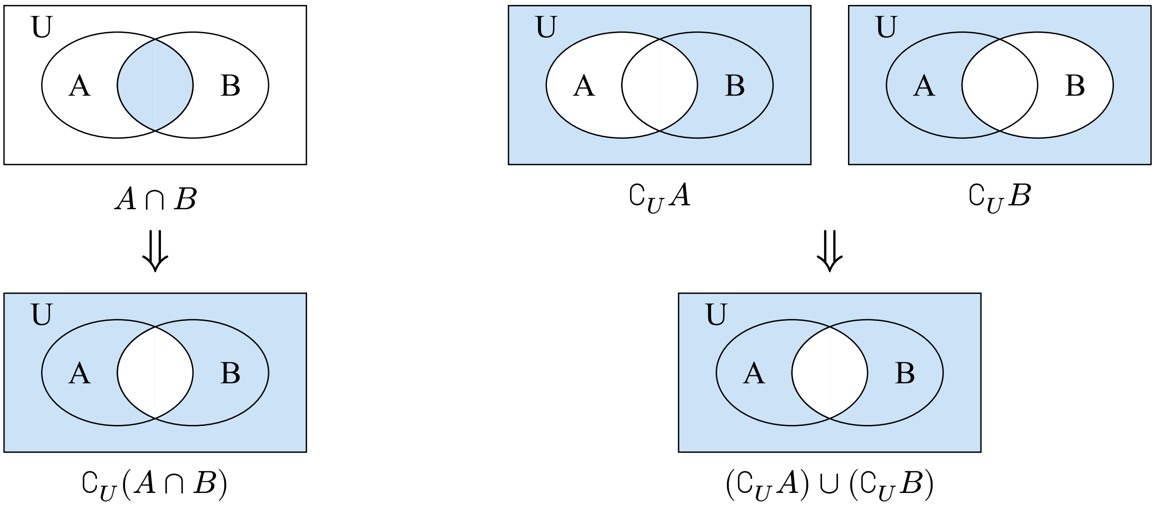
3.3 德 • 摩根定律

定义 3.1（德 • 摩根定律）

设 A 和 B 是全集 U 的子集，则有：

$$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B \tag{3.2}$$

$$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B \tag{3.3}$$



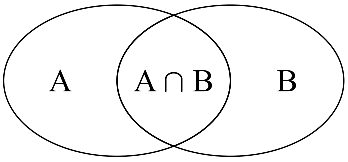
3.4 容斥原理

定义 3.2（容斥原理）

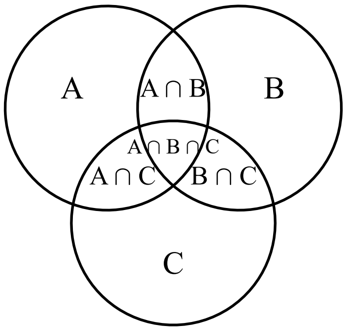
设 A 和 B 是全集 U 的子集，$|A|$ 表示集合 A 的元素个数，则有：

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B| \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C|=&|A|+|B|+|C|\\&-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|\\&+|A\cap B\cap C|\end{aligned} \tag{3.5}$$



(3.4)



(3.5)

例 3.3【2023 辽宁省实验中学高一月考】(多选)某校高一年级组织趣味运动会，有跳远、球类、跑步三项比赛，一共有 28 人参加比赛，其中有 16 人参加跳远比赛，有 8 人参加球类比赛，有 14 人参加跑步比赛，同时参加跳远和球类比赛的有 3 人，同时参加球类和跑步比赛的有 3 人，没有人同时参加三项比赛，则（　　）

A. 同时参加跳远和跑步比赛的有 4 人　　B. 仅参加跳远比赛的有 8 人

C. 仅参加跑步比赛的有 7 人　　D. 同时参加两项比赛的有 10 人

第四章 命题与条件

内容提要

- 命题的判断
- 四种命题
- 充分条件与必要条件

4.1 命题的判断

定义 4.1（命题）

我们把可以判断真假的陈述句，叫做**命题**。其中判断为真的陈述句叫做**真命题**，判断为假的陈述句叫做**假命题**。

1. 命题可以写成“若 p，则 q”、“如果 p，那么 q”的形式。
2. p 为命题的条件，q 为命题的结论。

思考 4.1

找出下列命题的 p 和 q:

1. 小明吃过饭了。
2. 今天是星期五。
3. 这个苹果很好吃。

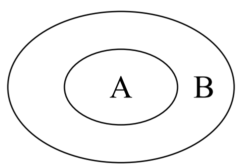
4.2 充分条件与必要条件

如果“若 p，则 q“为真命题，则表示 p 通过推理可以得出 q，记为

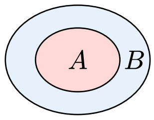
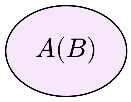
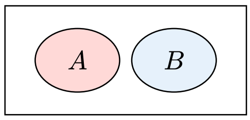
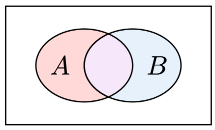
$$p \Rightarrow q \tag{4.1}$$

此时，p 是 q 的充分条件。q 是 p 的必要条件。

可将 p 的取值集合记为 A，q 的取值集合记为 B，用韦恩图表示:



可利用韦恩图表示为下面 3 种情况：p 的外延和 q 的外延成包含关系。

关系	韦恩图	充分必要性
$p \Rightarrow q$		p 是 q 的充分不必要条件 q 是 p 的必要不充分条件
$p \Longleftrightarrow q$		p 是 q 的充要条件
$p \nRightarrow q$		p 既不是 q 的充分条件 也不是 q 的必要条件
p 是 q 的非充分 非必要条件		p 与 q 有交集但互不包含

例 4.1

(1) $x > 1$ 是 $x^2 > 1$ 的 ______。

(2) $ab > 0$ 是 $a > 0$、$b > 0$ 的 ______。

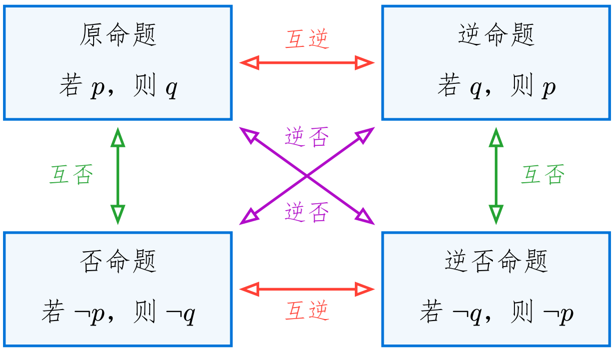
(3) $x^4 \leq 0$ 是 $x = 0$ 的 ______。

4.3 四种命题

名称	形式
原命题	若 p，则 q
逆命题	若 q，则 p
否命题	若 $\neg p$，则 $\neg q$
逆否命题	若 $\neg q$，则 $\neg p$

1. p 是原命题的条件，q 是原命题的结论；
2. $\neg p$ 表示 p 的否定；
3. 任意命题都有逆命题、否命题和逆否命题。
4. 原命题与逆否命题同真同假，互为逆否命题。
5. 否命题与原命题真假性没有关系。

6. 逆命题与原命题真假性没有关系。



思考 4.2

某食品的广告词为“幸福的人们都拥有”，那么不拥有的人们会不会幸福呢?

A. 不一定幸福。

B. 一定幸福。

C. 一定不幸福。

这说明了 ________________________________。

第五章 全称量词与存在量词

内容提要

- ❏ 全称量词
- ❏ 存在量词
- ❏ 含有量词的命题的否定

5.1 全称量词命题

1. 短语“所有”、“对一切”“任意一个”等在逻辑中称为**全称量词**。
2. 符号表示：$\forall x, p(x)$
3. 含有全称量词的命题称为**全称量词命题**。

5.2 存在量词命题

1. 短语“存在”、“至少有一个”、“有些”等在逻辑中称为**存在量词**。
2. 符号表示：$\exists x, p(x)$
3. 含有存在量词的命题称为**存在量词命题**。

命题类型	全称量词命题	存在量词命题
形式	$\forall x \in M, p(x)$	$\exists x \in M, p(x)$
否定形式	$\exists x \in M, \neg p(x)$	$\forall x \in M, \neg p(x)$

例 5.1 写出下列命题的否定，并判断其真假：

（1）“$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 > 0$” 的否定是：________________。

（2）“$\exists c_0 > 0$，方程 $x^2 - x + c_0 = 0$” 的否定是：________________。

例题答案

例 1.1

C

解析：因为集合 A 与集合 B 相同，且集合 A 中有 3 个不同元素，故集合 B 中也有 3 个不同元素，即 a^2、$a+b$、0 均不相等，从而可得 $a^2 \neq 0$，即 $a \neq 0$；又因为 $a^2 \neq a+b$，故 $a^2-a-b \neq 0$，即 $b \neq a^2-a$；又因为 $a+b \neq 0$，故 $b \neq -a$。综上所述，选项 C 正确。

例 2.1

C

解析：集合 A 的元素有 $1, 2, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 3, 4$，所以 $C \subseteq A$，$\{1, 2, 3\} \in A$。选项 C 正确。

例 2.2

63

解析：集合 M 有 4 个元素，则集合 P 为 $\{(4,3),(4,2),(4,1),(3,2),(3,1),(2,1)\}$。因此集合 P 有 6 个元素，其非空子集的个数为 $2^6-1=63$。

例 3.1

A

解析：$3^x<1 \Rightarrow x<0$，所以 $B=\{x \mid x<0\}$。因为 $A=\{x \mid x<1\}$，所以 $A \cap B = \{x \mid x<0\}$。

例 3.2

B

解析：$x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1$ 或 $x > 2$，所以 $A = \{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid x > 2\}$。因此 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$。

例 3.3

ACD

解析：设同时参加跳远和跑步比赛的有 x 人。根据容斥原理：

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (5.1)$$

代入数据：

$$28 = 16 + 8 + 14 - 3 - x - 3 + 0 \quad (5.2)$$

解得 $x = 4$，即同时参加跳远和跑步比赛的有 4 人，A 正确。

仅参加跳远比赛的人数为：$16 - 3 - 4 = 9$ 人，B 错误。

仅参加跑步比赛的人数为：$14 - 4 - 3 = 7$ 人，C 正确。

同时参加两项比赛的人数为：$3 + 4 + 3 = 10$ 人，D 正确。

因此选择 C。

例 4.1

(1) 充分不必要条件

解析：$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$，但 $x^2 > 1$ 不能推出 $x > 1$（反例：$x = -2$），所以 "$x > 1$" 是 "$x^2 > 1$" 的充分不必要条件。

(2) 必要不充分条件

解析：$a > 0$、$b > 0 \Rightarrow ab > 0$，但 $ab > 0$ 不能推出 $a > 0$、$b > 0$（反例：$a = -1, b = -1$），所以 "$ab > 0$" 是 "$a > 0$、$b > 0$" 的必要不充分条件。

(3) 充要条件

解析：$x = 0 \Rightarrow x^4 = 0 \leq 0$，且 $x^4 \leq 0 \Rightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$，所以 "$x^4 \leq 0$" 是 "$x = 0$" 的充要条件。

例 5.1

（1）$\boldsymbol{\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \leq 0}$

解析：全称量词命题的否定是存在量词命题，且将结论否定。当 $x = 1$ 时，$x^2 - 2x + 1 = 0$，所以否定命题为真。

（2）$\boldsymbol{\forall c_0 > 0}$**，方程** $\boldsymbol{x^2 - x + c_0 = 0}$ **无解**

解析：存在量词命题的否定是全称量词命题，且将结论否定。原命题："存在 $c_0 > 0$，使得方程有解"，否定："对于所有 $c_0 > 0$，方程都无解"。