



# 第二章

## 一元二次函数和不等式

作者：zheliku

时间：2026-01-01

版本：1.0.0

# 目录

|  |           |
|--|-----------|
| <b>第一章 等式</b>                          | <b>1</b>  |
| 1.1 不等式的基本性质                           | 1         |
| 1.2 比较大小                               | 1         |
| 1.3 高次不等式                              | 2         |
| 1.4 分式不等式                              | 2         |
| <b>第二章 一元二次函数</b>                      | <b>4</b>  |
| 2.1 初中回顾                               | 4         |
| 2.2 参数与图像的关系                           | 5         |
| <b>第三章 基本不等式</b>                       | <b>7</b>  |
| 3.1 均值不等式                              | 7         |
| 3.2 算术平均值和几何平均值                        | 7         |
| 3.3 基本不等式链                             | 8         |
| <b>第四章 基本不等式的基本运用</b>                  | <b>9</b>  |
| 4.1 基本不等式之间的关系                         | 9         |
| 4.2 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的应用与变形 | 9         |
| 4.3 简化思想与设值回代                          | 11        |
| 4.4 齐次                                 | 12        |
| 4.5 形变处理                               | 13        |
| 4.6 总结回顾                               | 14        |
| <b>第五章 基本不等式其他处理方式 (*)</b>             | <b>15</b> |
| <b>第六章 不等式拓展 (*)</b>                   | <b>16</b> |
| 6.1 柯西不等式                              | 16        |
| 6.2 排序不等式                              | 16        |
| <b>例题答案</b>                            | <b>18</b> |

# 第一章 等式

## 内容提要

□ 不等式的基本性质

□ 比较大小

□ 高次不等式

□ 分式不等式

## 1.1 不等式的基本性质

| 性质      | 内容   |
|---------|--|
| 对称性     | $a > b \Leftrightarrow b < a$  |
| 传递性     | $a > b, b > c \Rightarrow a > c$   |
| 可加性     | $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$  |
| 可乘性     | $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc, a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$             |
| 同向可加性   | $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$   |
| 同向同正可乘性 | $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$                                       |
| 可乘方性    | $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$                 |
| 可开方性    | $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$ |

**例 1.1** 已知  $a > b > 0, c < d < 0$ , 则下列不等式一定成立的是 \_\_\_\_\_

- A.  $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$       B.  $ac < bd$       C.  $a - c > b - d$       D.  $a + c > b + d$

**例 1.2** 已知  $a > b, ab > 0$ , 则  $\frac{1}{a}$  \_\_\_\_\_  $\frac{1}{b}$

**例 1.3** (1) 已知  $1 < a < 4, 2 < b < 8$ , 求  $2a + 3b, a - b$  和  $\frac{a}{b}$  的取值范围。

(2) 已知  $-6 < a < 8, 2 < b < 3$ , 求  $\frac{a}{b}$  的取值范围。

(3) 已知  $-1 < a + b < 5, -4 < a - b < 2$ , 求  $2a - 4b$  的取值范围。

## 1.2 比较大小

1. 作差法:  $a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$  (常用)

2. 作商法:  $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b (b > 0)$  (需要确定分母的符号)

**例 1.4** 已知  $a > b > 0$ , 比较  $\frac{2a+b}{a+2b}$  与 1 的大小。

**例 1.5** 已知  $a > b > 0, m > 0$ , 则:

(1)  $\frac{b}{a}$  \_\_\_\_\_  $\frac{b+m}{a+m}$

$$(2) \frac{a}{b} \text{ ——— } \frac{a+m}{b+m}$$

**例 1.6** 已知  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , 比较  $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$  与  $\frac{a^2+b^2}{a+b}$  的大小。

**例 1.7** 已知  $n$  为正整数, 则当  $n$  取多大时,  $f(n) = -n^3 + 8n^2 + 4n + 3$  取得最大值?

**例 1.8** 已知  $n$  为正整数, 则当  $n$  取多大时,  $f(n) = (n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$  取得最大值?

## 1.3 高次不等式

对于形如

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots > 0 \quad (1.1)$$

的不等式:

1. 数形结合法: 作出  $f(x)$  的图像 (穿根法)
2. 根据图像确定不等式的解集

**例 1.9** 解不等式:

$$(x+1)(2-x)(x-3) > 0 \quad (1.2)$$

**笔记** 对于多项式  $f(x)$ , 若  $f(n) = 0$ , 则  $x-n$  是  $f(x)$  的因式, 即  $f(x) = (x-n) \cdot g(x)$

**例 1.10** 解不等式:

$$(1) \quad x^3 - 7x + 6 < 0$$

$$(2) \quad x^3 - x^2 - 17x - 15 > 0$$

## 1.4 分式不等式

对于  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  型:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \iff f(x) \cdot g(x) > 0 \quad (1.3)$$

对于  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$  型:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

**例 1.11** 解不等式:

$$\frac{x+2}{2x-1} \geq 0 \quad (1.5)$$

**例 1.12** 解不等式：

$$(1) \quad \frac{x^2 + x - 2}{4 - x} < 0$$

$$(2) \quad 2 + \frac{4}{x-1} > 0$$

$$(3) \quad \frac{1}{x} \geq x$$

## 第二章 一元二次函数

### 内容提要

□ 初中回顾

□ 参数与图像的关系

### 2.1 初中回顾

一元二次函数的一般形式：

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \quad (2.1)$$

1. 对称轴：

$$x = -\frac{b}{2a} \quad (2.2)$$

2. 顶点坐标：

$$\left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) \quad (2.3)$$

3. 判别式：

- $\Delta > 0$ ：两个不相等的实数根
- $\Delta = 0$ ：两个相等的实数根
- $\Delta < 0$ ：无实数根

4. 与  $x$  轴的交点个数：

- $\Delta > 0$ ：2 个交点
- $\Delta = 0$ ：1 个交点
- $\Delta < 0$ ：0 个交点

5. 单调性：

- $a > 0$  时：

在  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$  上单调递减，在  $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  上单调递增

- $a < 0$  时：

在  $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$  上单调递增，在  $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$  上单调递减

**例 2.1** 【2023 海南新高考模拟】函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的部分函数值如下表所示：



|        |    |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|----|
| $x$    | -3 | -2 | -1 | 0  | 1  |
| $f(x)$ | 6  | 0  | -4 | -6 | -6 |

则函数  $f(x)$  的零点个数为 \_\_\_\_\_。

**例 2.2** 【2023 浙江省高一联考】已知函数  $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ ，若  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增，则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_。

**例 2.3** 【2022 天津滨海新区阶段考试】若不等式  $(a-2)x^2 + 4(a-2)x + 3 > 0$  的解集为  $\mathbf{R}$ ，则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $\left(2, \frac{11}{4}\right)$

B.  $\left[2, \frac{11}{4}\right)$

C.  $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$

D.  $(-\infty, 2] \cup \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$

**例 2.4** 【2020 四川泸县上学期】已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集为  $(2, 3)$ ，则关于  $x$  的不等式  $cx^2 + bx + a < 0$  的解集为 \_\_\_\_\_。

**例 2.5** 【2022 山东枣庄滕州期中】(多选) 已知关于  $x$  的不等式  $(x+2)(x-4) + a < 0$  ( $a < 0$ ) 的解集为  $(x_1, x_2)$ ，则 ( )

A.  $x_1 + x_2 = 2$

B.  $x_1 x_2 < -8$

C.  $-2 < x_1 < x_2 < 4$

D.  $x_2 - x_1 > 6$

**例 2.6** 【2017 湖北襄阳襄城区校级模拟】设  $a, b$  是关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 2mx + m + 6 = 0$  的两个实根，则  $(a-1)^2 + (b-1)^2$  的最小值为 ( )

A.  $-\frac{49}{4}$

B. 18

C. 8

D. -6

## 2.2 参数与图像的关系

1.  $a$  决定开口方向：

- $a > 0$ ：开口向上
- $a < 0$ ：开口向下

2.  $|a|$  决定开口大小： $|a|$  越大，开口越小

3.  $c$  决定与  $y$  轴的交点： $(0, c)$

**例 2.7** 已知二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  有两个零点  $x_1, x_2$ ，且满足  $x_1 < -2, x_2 > 0, 0 < |c| < 1$ ，则 ( )

A.  $a$  与  $c$  一定同号B. 若  $a > 0$ , 则  $2a > b$ C.  $2c(2a - b) + c^2 < 0$ D. 若  $a = 1$ , 则  $0 < x_2 < \frac{1}{2}$ **思考 2.1**已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图像, 判断以下结论:

1. 对称轴在哪里?

2.  $a$ 、 $b$ 、 $c$  如何影响图像的形状、位置?

**例 2.8** 已知二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$  有两个零点  $x_1$ 、 $x_2$ , 且满足  $-2 \leq x_1 \leq -1$ ,  $3 \leq x_2 \leq 5$ , 则下列说法不正确的是 ( )

A.  $-4a \leq b \leq -a$ B. 若  $a = 1$ , 则  $c$  的取值范围是  $[-10, -3]$ C.  $a + c \geq b$ D. 记  $f(x)$  的最小值为  $m$ , 则  $m$  的最大值为  $-4a$ 

**例 2.9** 【2022 浙江五校联考】已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 - 2x + 3a < 0$  在  $(0, 2]$  上有解, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B.  $\left(-\infty, \frac{4}{7}\right)$ C.  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ D.  $\left(\frac{4}{7}, +\infty\right)$ 

**例 2.10** 【2020 黑龙江齐齐哈尔第八中学月考】已知关于  $x$  的不等式  $ax^2 - (a + 1)x < -a + 13x$  在区间  $[2, 3]$  上恒成立, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。



## 第三章 基本不等式

### 内容提要

□ 均值不等式

□ 算术/几何平均值

□ 基本不等式链

### 3.1 均值不等式

$$m^2 + n^2 \geq 2mn \quad (m, n \in \mathbb{R})$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a, b > 0) \quad (3.1)$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a, b > 0)$$

始终注意等号成立的条件：当且仅当  $a = b$  时等号成立。

**例 3.1** 已知  $x > 0$ ，则  $x + \frac{16}{x}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 3.2** 函数  $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1} (x > 1)$  的最小值是 \_\_\_\_\_。

**例 3.3** 求下列函数的最大值。

(1)  $y = x(4 - x)$

(2)  $y = x(5 - 2x)$

(3)  $y = 3x(6 - 2x)$

#### 扩展 3.1

(1)  $f(x) = ax + \frac{b}{x} (a, b > 0)$  的图像（对勾函数）。

(2) 探究下列表达式之间的关系：

1)  $a + \frac{1}{a}$ 、 $a - \frac{1}{a}$       2)  $a^2 + \frac{1}{a^2}$       3)  $a^2 - \frac{1}{a^2}$

### 3.2 算术平均值和几何平均值

1. 算术平均值：

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \quad (3.2)$$

## 2. 几何平均值:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (3.3)$$

## 3. 高阶均值不等式:

算术平均值  $\geq$  几何平均值 ( $a_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots$ )

**例 3.4** 已知  $x > 0$ , 则  $x^2 + \frac{16}{x}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 3.5** 求  $3x^2(6 - 2x)$  的最大值?

**例 3.6** 【2021 天津卷】若  $a, b > 0$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

## 3.3 基本不等式链

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad (a > 0, b > 0) \quad (3.4)$$

(调和平均值  $\leq$  几何平均值  $\leq$  算术平均值  $\leq$  平方平均值)

## 第四章 基本不等式的基本运用

核心方法:换元法

### 4.1 基本不等式之间的关系

1.  $a + b$
2.  $ab$
3.  $a^2 + b^2$

时刻注意新变量的取值范围

**例 4.1** 【2020 四川绵阳线上测试】已知  $a > 0, b > 0, 2a + b = ab$ , 则当且仅当  $a =$  \_\_\_\_\_ 时,  $ab$  取得最小值 \_\_\_\_\_。

**例 4.2** 【2020 河南郑州质量预测】已知  $a > 0, b > 0, 2a + b = 4$ , 则  $\frac{3}{ab}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.3** 【2020 山东烟台期中】已知  $x > 0, y > 0, x + 3y + xy = 9$ , 则  $x + 3y$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.4** 已知正实数  $x, y$  满足  $x^2 + 4y^2 + x + 2y = 1$ , 则  $xy$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.5** 已知正实数  $a, b$  满足  $(2a + b)^2 = 1 + 6ab$ , 则  $\frac{ab}{2a + b + 1}$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.6** 已知正实数  $a, b$  满足  $9a^2 + b^2 = 1$ , 则  $\frac{ab}{3a + b}$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

#### 扩展 4.1

(1)  $a^3 + b^3$  与  $a^3 - b^3$

### 4.2 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的应用与变形

1.  $a + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
2.  $a + b = 4 (a > 1, b > 2) \Rightarrow \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-2}$
3.  $a + b = 1 (a > b > 0) \Rightarrow \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b}$
4.  $a + b = 1 \Rightarrow \frac{(a+1)^2}{a} + \frac{(b+2)^2}{b}$
5.  $a + b = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+2}$

6.  $a + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{a}{b}$

**例 4.7** 【2020 福建漳平第一中学月考】若  $m > 0, n > 0, m + n = 1$ , 且  $\frac{t}{m} + \frac{1}{n} (t > 0)$  的最小值为 9, 则  $t =$  \_\_\_\_\_。

**例 4.8** 【2020 陕西咸阳期末】已知  $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 (x, y > 0)$ , 则  $2x + y$  的最小值为 ( )

- A. 10                      B. 9                      C. 8                      D. 7

**例 4.9** 设  $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = k$ , 且  $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{4}{b^2 + 1}$  的最小值为 1, 则  $k$  的值为 ( )

- A. 1                      B. 4                      C. 7                      D. 9

**例 4.10** 设  $x > 1$ , 则  $x + \frac{4}{x-1}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.11** 设  $a \geq 0$ , 则  $a + \frac{1}{2a+5}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.12** 【2022 安徽部分重点高中高一联考】若  $x > 2$ , 则  $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$  的最小值为 ( )

- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 8

**例 4.13** 已知  $a > b > 0, a + b = 1$ , 则  $\frac{4}{a-b} + \frac{1}{2b}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.14** 【2022 辽宁铁岭六校联考】若实数  $x + 3y = 3 (x > 1, y > \frac{1}{3})$ , 则  $\frac{x}{x-1} + \frac{3y}{3y-1}$  的最小值为 ( )

- A. 6                      B. 4                      C. 3                      D. 2

**例 4.15** 已知正实数  $x, y$  满足  $2x + y = 2$ , 则  $\frac{4x^2}{y+1} + \frac{y^2}{2x+2}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.16** 【2020 吉林梅河口五中期中】若  $m, n > 0, m + 2n = 1$ , 则  $\frac{1}{m} + \frac{m+1}{n}$  的最小值为 ( )

- A. 4                      B. 5                      C. 7                      D. 6

**例 4.17** 【2022 黑龙江大庆实验中学高一期末】已知  $0 < x < \frac{1}{2}$ , 则  $\frac{1}{x} + \frac{1+2x}{1-2x}$  的最小值为 ( )

- A. 5                      B. 6                      C. 7                      D. 8

## 4.3 简化思想与设值回代

### 方法 4.1 简化

1. 条件简化
2. 结论简化

**例 4.18** 【2022 天津部分区期末】已知  $a, b > 0, a + 2b = 1$ , 则  $\frac{1}{b} + \frac{b}{2a+b}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.19** 若正数  $a, b$  满足  $2a + \frac{1}{b} = 1$ , 则  $\frac{2}{a} + b$  的最小值为 ( )

- A.  $4\sqrt{2}$                       B.  $8\sqrt{2}$                       C. 8                      D. 9

**例 4.20** 【2022 湖北黄石期末】设  $x, y > 0$ , 且满足  $\left(x - \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{16y}{x}$ , 则当  $x + \frac{1}{y}$  取最小值时,  $x^2 + \frac{1}{y^2} =$  \_\_\_\_\_。

**例 4.21** 【2022 云南曲靖一中二模 (改编)】已知正数  $a, b$  满足  $\frac{2}{3a+b} + \frac{1}{a+2b} = 4$ , 则  $7a + 4b$  的最小值为 ( )

- A.  $\frac{9}{4}$                       B. 5                      C.  $\frac{5+2\sqrt{2}}{4}$                       D. 9

**例 4.22** 【2018 湖南长沙一中月考】设正实数  $a, b, c$  满足  $a + 2b + c = 1$ , 则  $\frac{1}{a+b} + \frac{9(a+b)}{b+c}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.23** 【2020 山东曲阜一中检测】已知实数  $a, b$  满足  $ab > 0$ , 则  $\frac{a}{a+b} - \frac{a}{a+2b}$  的最大值为 ( )

- A.  $2 - \sqrt{2}$                       B.  $2 + \sqrt{2}$   
C.  $3 - 2\sqrt{2}$                       D.  $3 + 2\sqrt{2}$

**例 4.24** 已知实数  $x, y$  满足  $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$ , 则  $x\sqrt{2+y^2}$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

### 方法 4.2 设值回代

针对需要求解的数学式, 设其值为某个参数  $t$ , 将  $t$  带入题目所给的约束条件, 从而确定  $t$  的范围。

**例 4.25** 【2020 山东烟台期中, 同例 4-1-3】已知  $x > 0, y > 0, x + 3y + xy = 9$ , 则  $x + 3y$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.26** 非负实数  $x, y$  满足  $x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x^2y^2 = 32$

(1)  $x + 2y$  的最小值为多少?

(2) 求  $\sqrt{7}(x + 2y) + 2xy$  的最大值。

**例 4.27** 【2020 浙江萧山二中等校联考】已知  $a, b$  是正实数, 且  $a + 2b - 3ab = 0$ , 则  $ab$  的最小值为 \_\_\_\_\_,  $a + b$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.28** 已知正实数  $xy + 2x + 3y = 42$ , 则  $xy + 5x + 4y$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.29** 已知实数  $x, y$  满足  $xy - 2 = x + y$ , 且  $x > 1$ , 则  $y(x + 11)$  的最小值为 ( )

A. 21

B. 24

C. 25

D. 27

#### 扩展 4.2

1.  $ab + p \cdot a + n \cdot b + r = 0$  的处理方式

## 4.4 齐次

回顾均值不等式:

$$\begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \quad (a, b > 0) \\ \frac{a + b}{2} &\geq \sqrt{ab} \quad (a, b > 0) \end{aligned} \quad (4.1)$$

回顾  $a + b$  与  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的不等关系

#### 方法 4.3 齐次配平

若题目中出现多个不同次数的项, 可以尝试通过配平使得各项次数相同, 从而使用均值不等式进行求解。

**例 4.30** 【2017 河南适应性测试】已知正数  $x, y$  满足  $x + 4y = 4$ , 则  $\frac{x + 28y + 4}{xy}$  的最小值为 ( )

A.  $\frac{85}{2}$

B. 24

C. 20

D. 18

**例 4.31** 【2017 天津卷·文】若  $ab > 0$ , 则  $\frac{a^4 + 4b^4 + 1}{ab}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.32** 【2020 天津卷】已知  $a, b > 0, ab = 1$ , 则  $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a + b}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.33** 【2022 西南名校第一次诊断】已知  $x, y$  为正实数, 且  $x + y = 2$ , 则  $\frac{1}{x} + \frac{1}{xy}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.34** 已知  $x > y > 0, x + y = 3$ , 则  $\frac{1}{x-y} + \frac{xy+y^2+2}{y}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.35** 已知  $a, b, c > 0$ , 求证:  $2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) \leq 3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right)$

**例 4.36** 已知  $a, b, c > 0, a + b + c = 1$ , 求证:  $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$

#### 方法 4.4 构造 0 次式消元

观察如果分式上下分母次数相同, 则可以尝试该方法

**例 4.37** 已知  $x, y > 0$ , 则  $\frac{6xy}{x^2+9y^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2}$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.38** 已知正实数  $a, b$  满足  $\frac{1}{(2a+b)b} + \frac{2}{(2b+a)a} = 1$ , 则  $ab$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.39** 【2018 江苏南京三模】若正数  $a, b, c$  成等差数列 (即  $a - b = b - c$ ), 则  $\frac{c}{2a+b} + \frac{b}{a+2c}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

## 4.5 形变处理

对于陌生的形式, 尝试设值, 变换得到我们熟悉的形式。

**例 4.40** 【2020 湖南师范大学附属中学月考】设  $a > b > 0, ab = 2$ , 则  $a^2 + \frac{1}{a(a-b)}$  的最小值为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

**例 4.41** 【2022 辽宁名校第四次联考】若  $a, b, c$  均为正数, 且  $c(a+b+c) + ab = 8$ , 则  $a+b+2c$  的最小值为 ( )

- A.  $2\sqrt{2}$                       B. 4                      C.  $4\sqrt{2}$                       D.  $8\sqrt{2}$

**例 4.42** 【2022 浙江宁波二模】正实数  $a, b, c$  互不相等, 且满足  $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + bc$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $2a > b > c$                       B.  $2a > c > b$   
C.  $2c > a > b$                       D.  $2c > b > a$

**例 4.43** 若存在正实数  $y$ , 使得  $\frac{xy}{y-x} = \frac{1}{5x+4y}$ , 则实数  $x$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.44** 已知正实数  $a, b, c, d$  满足  $a+b=1, c+d=1$ , 则  $\frac{1}{abc} + \frac{1}{d}$  的最小值为 ( )

- A. 10                      B. 9                      C.  $4\sqrt{2}$                       D.  $3\sqrt{3}$

**例 4.45** 已知实数  $a, b, c$  满足  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , 则  $ab+c$  的最小值为 ( )



A.  $-2$ B.  $-\frac{3}{2}$ C.  $-1$ D.  $-\frac{1}{2}$ 

**例 4.46** 若正数  $a, b, c$  满足  $ab = a + 2b, abc = a + 2b + c$ , 则  $c$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.47** 已知  $x + y = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + 8 (x, y > 0)$ , 则  $x + y$  的最小值为 ( )

A.  $5\sqrt{3}$ 

B. 9

C.  $4 + 2\sqrt{26}$ 

D. 10

**例 4.48** 已知正实数  $a, b$  满足  $a + b = 1$ , 则  $\frac{2a}{a^2 + b} + \frac{b}{a + b^2}$  的最大值为 ( )

A. 2

B.  $1 + \sqrt{2}$ C.  $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ D.  $1 + \frac{3\sqrt{2}}{3}$ 

**例 4.49** 已知正实数  $a, b, c$  满足  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}, \frac{a}{c} + \frac{b}{c+b} > t$ , 则  $t$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

**例 4.50** 【2023 江西五市九校协作体第一次联考】已知  $a, b, c$  是正实数, 且  $b + c = \sqrt{6}$ , 则  $\frac{ac^2 + 2a}{bc} + \frac{8}{a+1}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

## 4.6 总结回顾

### 1. 基本不等式及其简单应用

### 2. 核心处理手段：换元法

善于设置新的变量来简化问题, 得到自己熟悉的情况

注意事项——新变量的取值范围

### 3. 基本思想：简化

- 条件简化
- 结论简化

从简单情况入手。条件简单利用条件

### 4. 重要思想：齐次

### 5. 特殊处理方式：

- 设值回代
- 构造 0 次式

### 6. 注意事项：形变处理

## 第五章 基本不等式其他处理方式 (\*)

**例 5.1** 若  $a, b, c$  均为正实数, 则  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + 2bc}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 5.2** 已知  $x, y, z$  均为正实数, 且满足  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 则  $3xy + yz$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

**例 5.3** 已知  $x, y, z$  均为正实数,  $2x + 2y + z = 1$ , 求证:  $3xy + yz + zx \leq \frac{1}{5}$ 。

**例 5.4** 若正数  $a, b, c$  满足  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc = 1$ , 则  $c$  的最大值为 \_\_\_\_\_。

**例 5.5** 已知  $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{19}{4} (x, y > 0)$ , 则  $\frac{3}{x} - \frac{7}{16y}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

**例 5.6** 已知  $a, b > 0$ , 记  $h = \max \left\{ \frac{2}{\sqrt{a}}, \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}}, \frac{2}{\sqrt{b}} \right\}$ , 则  $h$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

## 第六章 不等式拓展 (\*)

### 6.1 柯西不等式

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$
$$\text{iff } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \quad \text{取等号} \quad (6.1)$$

常见形式:

1.  $n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$
2.  $\left( \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \right) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$

**例 6.1** 已知  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1$ , 求  $x + y + z$  的取值范围。

**例 6.2** 已知  $a, b, c$  均为正实数, 且  $a + b + c = 1$ , 求证:

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$$

$$(3) \quad \sqrt{3a+2} + \sqrt{3b+2} + \sqrt{3c+2} \leq 3\sqrt{3}$$

$$(4) \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1$$

**例 6.3** 已知  $a, b, c$  为三角形三边长, 求证:  $\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{a + b + c} > 2$

**例 6.4** 已知  $a, b, c$  均为正实数, 且  $abc = 1$ , 求证:  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$

### 6.2 排序不等式

若

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \quad (6.2)$$

则对于

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (6.3)$$

的任何其他轮换

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.4)$$

都有：

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \quad (6.5)$$

即：反序和  $\leq$  乱序和  $\leq$  正序和。

## 例题答案

### 例 1.1

C

### 例 1.2

<

### 例 1.3

$$(1) 2a + 3b \in (8, 32), a - b \in (-7, 2), \frac{a}{b} \in \left(\frac{1}{8}, 2\right)$$

$$(2) \frac{a}{b} \in (-3, 4)$$

$$(3) 2a - 4b \in (-17, 7)$$

### 例 1.4

解：

$$\frac{2a+b}{a+2b} - 1 = \frac{2a+b-a-2b}{a+2b} = \frac{a-b}{a+2b} \quad (6.6)$$

因为  $a > b > 0$ ，所以  $a - b > 0, a + 2b > 0$ ，

故  $\frac{a-b}{a+2b} > 0$ ，即  $\frac{2a+b}{a+2b} > 1$ 。

### 例 1.5

(1) <

(2) >

### 例 1.6

解：

$$\begin{aligned}
\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} - \frac{a^2 + b^2}{a + b} &= \frac{(a^3 + b^3)(a + b) - (a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)} \\
&= \frac{a^4 + a^3b + ab^3 + b^4 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4}{(a^2 + b^2)(a + b)} \\
&= \frac{a^3b + ab^3 - 2a^2b^2}{(a^2 + b^2)(a + b)} \\
&= \frac{ab(a^2 + b^2 - 2ab)}{(a^2 + b^2)(a + b)} \\
&= \frac{ab(a - b)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

因为  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , 所以  $ab > 0, (a - b)^2 \geq 0, a^2 + b^2 > 0, a + b > 0$ ,

故  $\frac{ab(a - b)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)} \geq 0$ ,  
 即  $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{a^2 + b^2}{a + b}$ 。

### 例 1.7

#### $n = 6$ 时取得最大值

解析：考虑相邻两项的差：

$$\begin{aligned}
f(n + 1) - f(n) &= -(n + 1)^3 + 8(n + 1)^2 + 4(n + 1) + 3 - (-n^3 + 8n^2 + 4n + 3) \\
&= -(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 8(n^2 + 2n + 1) + 4n + 4 + 3 - \\
&\quad (-n^3 + 8n^2 + 4n + 3) \\
&= -n^3 - 3n^2 - 3n - 1 + 8n^2 + 16n + 8 + 4n + 7 + n^3 - 8n^2 - 4n \\
&\quad - 3 \\
&= -3n^2 + 13n + 11
\end{aligned} \tag{6.8}$$

令

$$f(n + 1) - f(n) = -3n^2 + 13n + 11 \leq 0 \tag{6.9}$$

解这个不等式：

$$n = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 132}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{301}}{6} \quad (6.10)$$

因为  $\sqrt{301} \approx 17.35$ , 所以  $n \approx \frac{13 \pm 17.35}{6}$

解得  $n \in \left[ \frac{-4.35}{6}, \frac{30.35}{6} \right] \approx [-0.73, 5.06]$

因为  $n$  为正整数, 所以  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  时  $f(n+1) > f(n)$ ,

当  $n \geq 6$  时  $f(n+1) < f(n)$ 。

因此  $n = 6$  时取得最大值:

$$f(6) = -216 + 288 + 24 + 3 = 99 \quad (6.11)$$

### 例 1.8

#### $n = 8$ 或 $9$ 时取得最大值

解析: 考虑相邻两项的比值:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{(n+2) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{(n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9(n+2)}{10(n+1)} \quad (6.12)$$

令  $\frac{f(n+1)}{f(n)} \geq 1$ :

$$\frac{9(n+2)}{10(n+1)} \geq 1 \quad (6.13)$$

$$9(n+2) \geq 10(n+1) \quad (6.14)$$

$$9n + 18 \geq 10n + 10 \quad (6.15)$$

$$n \leq 8 \quad (6.16)$$

因此, 当  $n \leq 8$  时,  $f(n+1) \geq f(n)$ , 函数递增; 且当  $n = 8$  时,  $f(n+1) = f(n)$ 。

当  $n > 9$  时,  $f(n+1) < f(n)$ , 函数递减。

所以  $n = 8$  或  $9$  时取得最大值。

### 例 1.9



解：原不等式等价于

$$(x+1)(x-2)(x-3) < 0 \quad (6.17)$$

令  $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$ ,

根的排列为：  $-1 < 2 < 3$

使用穿根法，从右向左穿根，得解集为：

$$x \in (-1, 2) \cup (3, +\infty) \quad (6.18)$$

### 例 1.10

$$(1) \quad x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$$

$$(2) \quad x \in (-3, -1) \cup (5, +\infty)$$

### 例 1.11

$$x \in (-\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

解：原不等式等价于

$$\begin{cases} (x+2)(2x-1) \geq 0 \\ 2x-1 \neq 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

$$\text{解得：} x \in (-\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

### 例 1.12

$$(1) \quad x \in (-2, 1) \cup (4, +\infty)$$

$$(2) \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$(3) \quad x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1]$$

### 例 2.1

解析：从表格可以看出：

1.  $f(-2) = 0$ ，所以  $x = -2$  是一个零点
2.  $f(-3) = 6 > 0, f(-1) = -4 < 0$ ，由零点存在定理，在  $(-3, -1)$  内还有一个零点
3.  $f(0) = -6 < 0, f(1) = -6 < 0$ ，无法判断  $(0, 1)$  内是否有零点

但由于二次函数最多有 2 个零点，且已经找到 2 个，故零点个数为 2。

### 例 2.2

$$a \leq 1$$

解析：二次函数  $f(x) = x^2 - 2ax + 3$  的对称轴为  $x = a$ 。

要使  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增，需要对称轴在区间左侧或左端点，即  $a \leq 1$

### 例 2.3

**B**

### 例 2.4

$$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

### 例 2.5

**A、B、D**

### 例 2.6

**C**

### 例 2.7

**D**

### 例 2.8

C

例 2.9

A

例 2.10

$(-\infty, 6)$

例 3.1

8

例 3.2

8

例 3.3

(1) 4

(2)  $\frac{25}{8}$

(3)  $\frac{27}{2}$

例 3.4

12

例 3.5

24

例 3.6

$$2\sqrt{2}$$

例 4.1

$$2 \quad 8$$

例 4.2

$$\frac{3}{2}$$

例 4.3

$$6$$

例 4.4

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

例 4.5

$$\frac{1}{6}$$

例 4.6

$$\frac{\sqrt{2}}{12}$$

例 4.7

$$4$$

例 4.8

$$C$$

例 4.9

C

例 4.10

5

例 4.11

$\frac{1}{5}$

例 4.12

C

例 4.13

9

例 4.14

A

例 4.15

$\frac{4}{5}$

例 4.16

C

例 4.17

C

例 4.18

$$\frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

例 4.19

D

例 4.20

12

例 4.21

A

例 4.22

7

例 4.23

C

例 4.24

$$\frac{9}{4}$$

例 4.25

6

例 4.26

(1) 4

(2) 16

例 4.27

$$\frac{8}{9} \quad 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

例 4.28

55

例 4.29

D

例 4.30

D

例 4.31

4

例 4.32

4

例 4.33

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 4.34

6



例 4.35

略

例 4.36

略

例 4.37

$\sqrt{3}$

例 4.38

$2 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$

例 4.39

$\frac{2\sqrt{5}}{9}$

例 4.40

D

例 4.41

C

例 4.42

A

例 4.43

$\frac{1}{5}$

例 4.44

**B**

例 4.45

**C**

例 4.46

$\frac{8}{7}$

例 4.47

**B**

例 4.48

**C**

例 4.49

**2**

例 4.50

**6**

例 5.1

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

例 5.2

$\frac{\sqrt{10}}{2}$

例 5.3

略

例 5.4

$$\frac{\sqrt{6}}{2}$$

例 5.5

$$-\frac{1}{4}$$

例 5.6

2

例 6.1

$$[-5, 5]$$

例 6.2

略

例 6.3

略

例 6.4

略