



第一章

集合与常用逻辑用语

作者: zheliku

时间: 2025-12-16

版本: 1.0.0

目录

| | |
|----------------------|-----------|
| 第一章 集合 | 1 |
| 1.1 概念 | 1 |
| 1.2 特性 | 1 |
| 1.3 表示方法 | 2 |
| 1.4 常用数集符号 | 2 |
| 第二章 集合的基本关系 | 3 |
| 2.1 Venn 图 | 3 |
| 2.2 集合间的关系 | 3 |
| 2.3 空集 | 3 |
| 2.4 有限集合的子集个数 | 4 |
| 2.5 数轴表示法 | 4 |
| 2.6 区间 | 5 |
| 第三章 集合的基本运算 | 6 |
| 3.1 交集与并集 | 6 |
| 3.2 全集与补集 | 6 |
| 3.3 德•摩根定律 | 7 |
| 3.4 容斥原理 | 7 |
| 第四章 命题与条件 | 9 |
| 4.1 命题的判断 | 9 |
| 4.2 充分条件与必要条件 | 9 |
| 4.3 四种命题 | 10 |
| 第五章 全称量词与存在量词 | 12 |
| 5.1 全称量词命题 | 12 |
| 5.2 存在量词命题 | 12 |
| 例题答案 | 13 |

第一章 集合

内容提要

- 集合定义
- 集合特性
- 集合的表示方法
- 常用数集符号

1.1 概念

定义 1.1 (集合)

我们把研究对象统称为**元素**，一些元素组成的总体叫做**集合**。

1. 元素用小写字母表示，集合用大写字母表示。
2. 如果元素 a 属于集合 A ，则表示为 $a \in A$ ；
3. 如果元素 a 不属于集合 A ，则表示为 $a \notin A$ 。
4. 集合的元素个数可以是无限个。按照元素个数，可将集合分为 2 类：
 - 有限集。
 - 无限集。

1.2 特性

1. 确定性
 - 集合中的元素是确定的，任何人都能判断某个元素是否属于该集合。
2. 无序性
 - 集合中元素的排列顺序不影响集合本身。
3. 互异性
 - 集合中不能有重复的元素。

例 1.1 【223 四川南充高一月考】已知 a, b 为实数，若集合 $A = \left\{ a, \frac{b}{a}, 1 \right\}$ 与集合 $B = \{ a^2, a+b, 0 \}$ 相同，则下列说法正确的是()

- A. $a+b=1$
- B. a, b 可以是任意值
- C. 集合 A 与集合 B 元素个数一定均为 3
- D. 以上说法均不正确

1.3 表示方法

若 $1 \leq x < 6$ 且 x 为整数:

1. 例举法: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. 描述法: $\{x | 1 \leq x < 6, x \in \mathbb{N}\}$ 或 $\{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x < 6\}$
3. 图示法
 - Venn 图
 - 数轴表示法

思考 1.1

(1) a 和 $\{a\}$ 是否一样?

(2) 平面中的一点 $(1, 4)$ 可以用 $\{x = 1, y = 4\}$ 表示吗?

1.4 常用数集符号

| 数集 | 符号 |
|------|--|
| 自然数集 | $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ |
| 正整数集 | $\mathbb{N}^+ (\mathbb{N}^*) = \{1, 2, 3, \dots\}$ |
| 整数集 | $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ |
| 有理数集 | $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ |
| 实数集 | \mathbb{R} |

第二章 集合的基本关系

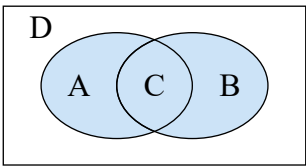
内容提要

- ☐ Venn 图
- ☐ 特殊集合：空集
- ☐ 区间
- ☐ 集合间的关系
- ☐ 数轴表示法

2.1 Venn 图

韦恩（Venn）图表示集合之间的包含/非包含关系。以右图为例：

- A 表示全集，包含所有其他集合。
- 集合 B 和集合 C 的共有部分为集合 D 。



2.2 集合间的关系

| 符号 | 读法 | 关系 | 说明 |
|---------------------|--------------|-------------------|---------------------------|
| $A \subseteq B$ | A 包含于 B | A 是 B 的子集 | 集合 A 中的元素全部都在集合 B 中 |
| $A = B$ | A 等于 B | 集合 A 与集合 B 相等 | 集合 A 与集合 B 中的元素完全相同 |
| $A \not\subseteq B$ | A 不包含于 B | A 不是 B 的子集 | 集合 A 中至少有一个元素不在集合 B 中 |

例 2.1 已知集合 $A=\{1, 2, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 3, 4\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{1, 2, 4\}$ 。则下列说法正确的是（ ）

- A. $B \in A, C \in A$

B. $\{3, 4\} \in A, B \subseteq A$

C. $C \subseteq A, \{1, 2, 3\} \in A$

D. $C \in A, \{1, 2, 3, 4\} \subseteq A$

2.3 空集

定义 2.1（空集）

不包含任何元素的集合称为**空集**。记作 \emptyset 或 $\{\}$ 。

1. 空集是任何集合的子集。
2. 空集是任何非空集合的真子集。
3. 空集只有一个子集，即其自己。

思考 2.1

\emptyset 、0、 $\{0\}$ 、 $\{\emptyset\}$ 之间的关系？

2.4 有限集合的子集个数

| 集合 | 子集 | 子集个数 | 真子集个数 | 非空真子集个数 |
|-----------------------------|--|-------|-----------|-----------|
| $\{a\}$ | $\{\emptyset\}$ 、 $\{a\}$ | 2 | 1 | 0 |
| $\{a, b\}$ | $\{\emptyset\}$ 、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{a, b\}$ | 4 | 3 | 2 |
| $\{a, b, c\}$ | $\{\emptyset\}$ 、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{a, b\}$ 、 $\{c\}$ 、 $\{a, c\}$ 、 $\{b, c\}$ 、 $\{a, b, c\}$ | 8 | 7 | 6 |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ | ... | 2^n | $2^n - 1$ | $2^n - 2$ |

例 2.2 已知集合 $M = \{1, 2, 3, 4\}$, $P = \{(x, y) \mid x \in M, y \in M, x - y \in M\}$ 。则 P 的非空子集的个数为 _____。

2.5 数轴表示法

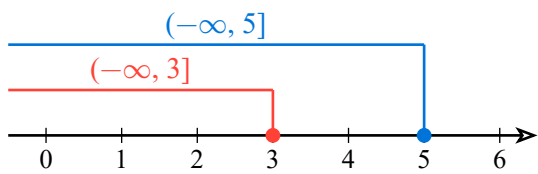
对于由连续实数组成的集合，通常用数轴来表示，这也属于集合表示的图示法。在数轴上

- 若端点值是集合中的元素，则用实心点表示；
- 若端点值不是集合中的元素，则用空心点表示。



左图表示集合 $\{x \mid -1 < x \leq 5\}$ ，右图表示集合 $\{x \mid x \geq 3\}$ 。

使用数轴表示集合间的关系：



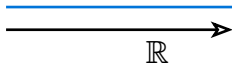
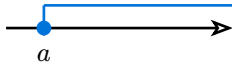
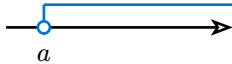
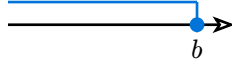
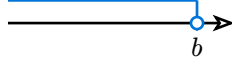
2.6 区间

定义 2.2（区间）

数轴某一段上所有点对应的所有连续实数组成的集合，称为**区间**。

| 集合 | 读法 | 符号 | 数轴表示 |
|-------------------------|--------|----------|---|
| $\{x a < x < b\}$ | 开区间 | (a, b) |  |
| $\{x a \leq x \leq b\}$ | 闭区间 | $[a, b]$ |  |
| $\{x a < x \leq b\}$ | 左开右闭区间 | $(a, b]$ |  |
| $\{x a \leq x < b\}$ | 左闭右开区间 | $[a, b)$ |  |

- 实数 a 与 b 都叫做相应区间的端点。
- 用实心点表示包括在区间内的端点，用空心点表示不包括在区间内的端点。
- 区间的左端点 a 必须小于区间的右端点 b 。
- $b - a$ 称为区间的长度。

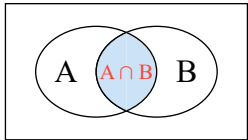
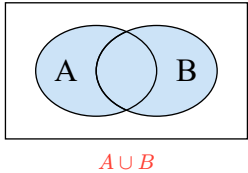
| 集合 | 符号 | 数轴表示 |
|--------------------------|----------------------|---|
| $\{x x \in \mathbb{R}\}$ | $(-\infty, +\infty)$ |  |
| $\{x x \geq a\}$ | $[a, +\infty)$ |  |
| $\{x x > a\}$ | $(a, +\infty)$ |  |
| $\{x x \leq b\}$ | $(-\infty, b]$ |  |
| $\{x x < b\}$ | $(-\infty, b)$ |  |

第三章 集合的基本运算

内容提要

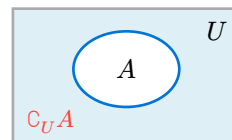
- 交集与并集
- 全集与补集
- 德·摩根定律
- 容斥原理

3.1 交集与并集

| 运算 | 描述 | 符号 | 图示 |
|----|--------------------------------|------------|--|
| 交集 | 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合 | $A \cap B$ |  |
| 并集 | 由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合 | $A \cup B$ |  |

3.2 全集与补集

- 全集 U ：研究问题中涉及的所有元素的集合。
- 集合 A 的补集：全集 U 中不属于集合 A 的元素组成的集合，符号表示为：



$$C_U A = \{x | x \in U, x \notin A\} \quad (3.1)$$

例 3.1 【2017 课标全国 I】已知集合 $A = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | 3^x < 1\}$ 。则 ()

- A. $A \cap B = \{x | x < 0\}$ B. $A \cup B = \mathbb{R}$
 C. $A \cup B = \{x | x > 1\}$ D. $A \cap B = \emptyset$

例 3.2 【2018 课标全国 I】已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$ 。则 $C_{\mathbb{R}} A = ()$

- A. $\{x | -1 < x < 2\}$ B. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$
 C. $\{x | x < -1\} \cup \{x | x > 2\}$ D. $\{x | x \leq -1\} \cup \{x | x \geq 2\}$

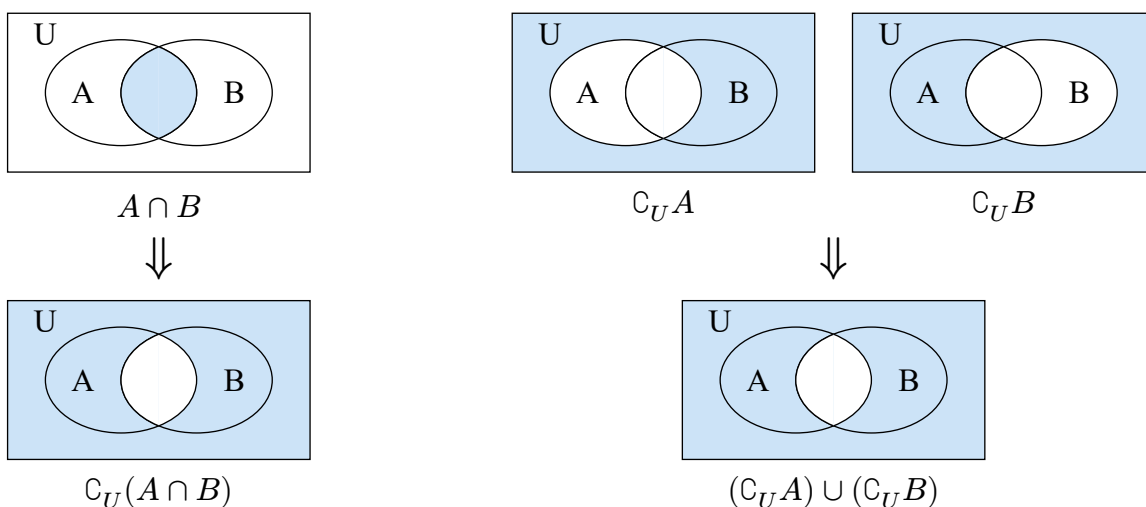
3.3 德 • 摩根定律

定义 3.1（德 • 摩根定律）

设 A 和 B 是全集 U 的子集，则有：

$$\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B \quad (3.2)$$

$$\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B \quad (3.3)$$



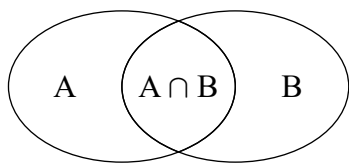
3.4 容斥原理

定义 3.2（容斥原理）

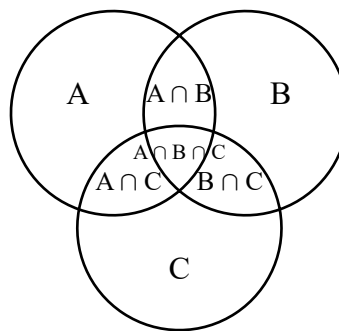
设 A 和 B 是全集 U 的子集， $|A|$ 表示集合 A 的元素个数，则有：

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| \end{aligned} \quad (3.5)$$



(3.4)



(3.5)

例 3.3 【2023 辽宁省实验中学高一月考】(多选) 某校高一年级组织趣味运动会, 有跳远、球类、跑步三项比赛, 一共有 28 人参加比赛, 其中有 16 人参加跳远比赛, 有 8 人参加球类比赛, 有 14 人参加跑步比赛, 同时参加跳远和球类比赛的有 3 人, 同时参加球类和跑步比赛的有 3 人, 没有人同时参加三项比赛, 则 ()

- | | |
|----------------------|--------------------|
| A. 同时参加跳远和跑步比赛的有 4 人 | B. 仅参加跳远比赛的有 8 人 |
| C. 仅参加跑步比赛的有 7 人 | D. 同时参加两项比赛的有 10 人 |

第四章 命题与条件

内容提要

□ 命题的判断

□ 充分条件与必要条件

□ 四种命题

4.1 命题的判断

定义 4.1 (命题)

我们把可以判断真假的陈述句，叫做**命题**。其中判断为真的陈述句叫做**真命题**，判断为假的陈述句叫做**假命题**。

1. 命题可以写成“若 p ，则 q ”、“如果 p ，那么 q ”的形式。
2. p 为命题的条件， q 为命题的结论。

思考 4.1

找出下列命题的 p 和 q ：

1. 小明吃过饭了。
2. 今天是星期五。
3. 这个苹果很好吃。

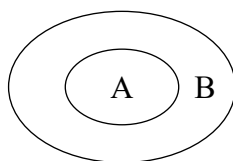
4.2 充分条件与必要条件

如果“若 p ，则 q ”为真命题，则表示 p 通过推理可以得出 q ，记为

$$p \Rightarrow q \quad (4.1)$$

此时， p 是 q 的充分条件。 q 是 p 的必要条件。

可将 p 的取值集合记为 A ， q 的取值集合记为 B ，用韦恩图表示：



可利用韦恩图表示为下面 3 种情况： p 的外延和 q 的外延成包含关系。

| 关系 | 韦恩图 | 充分必要性 |
|-------------------------|-----|--|
| $p \Rightarrow q$ | | p 是 q 的充分不必要条件 q 是 p 的必要不充分条件 |
| $p \Leftrightarrow q$ | | p 是 q 的充要条件 |
| $p \nRightarrow q$ | | p 既不是 q 的充分条件 也不是 q 的必要条件 |
| p 是 q 的非充分 非必要条件 | | p 与 q 有交集但互不包含 |

例 4.1

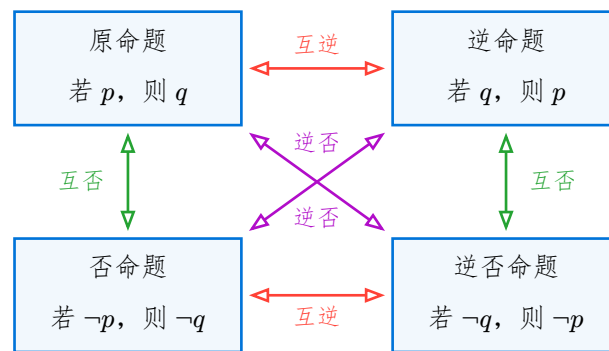
- (1) $x > 1$ 是 $x^2 > 1$ 的 _____。
- (2) $ab > 0$ 是 $a > 0$ 、 $b > 0$ 的 _____。
- (3) $x^4 \leq 0$ 是 $x = 0$ 的 _____。

4.3 四种命题

| 名称 | 形式 |
|------|------------------------|
| 原命题 | 若 p ，则 q |
| 逆命题 | 若 q ，则 p |
| 否命题 | 若 $\neg p$ ，则 $\neg q$ |
| 逆否命题 | 若 $\neg q$ ，则 $\neg p$ |

- 1. p 是原命题的条件， q 是原命题的结论；
- 2. $\neg p$ 表示 p 的否定；
- 3. 任意命题都有逆命题、否命题和逆否命题。
- 4. 原命题与逆否命题同真同假，互为逆否命题。
- 5. 否命题与原命题真假性没有关系。

6. 逆命题与原命题真假性没有关系。



思考 4.2

某食品的广告词为“幸福的人们都拥有”，那么不拥有的人们会不会幸福呢？

A. 不一定幸福。

B. 一定幸福。

C. 一定不幸福。

这说明了 _____。

第五章 全称量词与存在量词

内容提要

- 全称量词
- 存在量词
- 含有量词的命题的否定

5.1 全称量词命题

1. 短语“所有”、“对一切”“任意一个”等在逻辑中称为**全称量词**。
2. 符号表示： $\forall x, p(x)$
3. 含有全称量词的命题称为**全称量词命题**。

5.2 存在量词命题

1. 短语“存在”、“至少有一个”、“有些”等在逻辑中称为**存在量词**。
2. 符号表示： $\exists x, p(x)$
3. 含有存在量词的命题称为**存在量词命题**。

| 命题类型 | 全称量词命题 | 存在量词命题 |
|------|------------------------------|------------------------------|
| 形式 | $\forall x \in M, p(x)$ | $\exists x \in M, p(x)$ |
| 否定形式 | $\exists x \in M, \neg p(x)$ | $\forall x \in M, \neg p(x)$ |

例 5.1 写出下列命题的否定，并判断其真假：

(1) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 > 0$ ”的否定是：_____。

(2) “ $\exists c_0 > 0$, 方程 $x^2 - x + c_0 = 0$ ”的否定是：_____。

例题答案

例 1.1

C

解析：因为集合 A 与集合 B 相同，且集合 A 中有 3 个不同元素，故集合 B 中也有 3 个不同元素，即 a^2 、 $a+b$ 、 0 均不相等，从而可得 $a^2 \neq 0$ ，即 $a \neq 0$ ；又因为 $a^2 \neq a+b$ ，故 $a^2 - a - b \neq 0$ ，即 $b \neq a^2 - a$ ；又因为 $a+b \neq 0$ ，故 $b \neq -a$ 。综上所述，选项 C 正确。

例 2.1

C

解析：集合 A 的元素有 $1, 2, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 3, 4$ ，所以 $C \subseteq A$ ， $\{1, 2, 3\} \in A$ 。选项 C 正确。

例 2.2

63

解析：集合 M 有 4 个元素，则集合 P 为 $\{(4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1)\}$ 。因此集合 P 有 6 个元素，其非空子集的个数为 $2^6 - 1 = 63$ 。

例 3.1

A

解析： $3^x < 1 \Rightarrow x < 0$ ，所以 $B = \{x \mid x < 0\}$ 。因为 $A = \{x \mid x < 1\}$ ，所以 $A \cap B = \{x \mid x < 0\}$ 。

例 3.2

B

解析: $x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) > 0 \Rightarrow x < -1$ 或 $x > 2$, 所以 $A = \{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid x > 2\}$ 。因此 $C_{\mathbb{R}}A = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ 。

例 3.3

ACD

解析: 设同时参加跳远和跑步比赛的有 x 人。根据容斥原理:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (5.1)$$

代入数据:

$$28 = 16 + 8 + 14 - 3 - x - 3 + 0 \quad (5.2)$$

解得 $x = 4$, 即同时参加跳远和跑步比赛的有 4 人, A 正确。

仅参加跳远比赛的人数为: $16 - 3 - 4 = 9$ 人, B 错误。

仅参加跑步比赛的人数为: $14 - 4 - 3 = 7$ 人, C 正确。

同时参加两项比赛的人数为: $3 + 4 + 3 = 10$ 人, D 正确。

因此选择 C。

例 4.1

(1) 充分不必要条件

解析: $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$, 但 $x^2 > 1$ 不能推出 $x > 1$ (反例: $x = -2$), 所以 “ $x > 1$ ” 是 “ $x^2 > 1$ ” 的充分不必要条件。

(2) 必要不充分条件

解析: $a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$, 但 $ab > 0$ 不能推出 $a > 0, b > 0$ (反例: $a = -1, b = -1$), 所以 “ $ab > 0$ ” 是 “ $a > 0, b > 0$ ” 的必要不充分条件。

(3) 充要条件

解析: $x = 0 \Rightarrow x^4 = 0 \leq 0$, 且 $x^4 \leq 0 \Rightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$, 所以 “ $x^4 \leq 0$ ” 是 “ $x = 0$ ” 的充要条件。

例 5.1

$$(1) \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

解析：全称量词命题的否定是存在量词命题，且将结论否定。当 $x = 1$ 时， $x^2 - 2x + 1 = 0$ ，所以否定命题为真。

$$(2) \forall c_0 > 0, \text{方程 } x^2 - x + c_0 = 0 \text{ 无解}$$

解析：存在量词命题的否定是全称量词命题，且将结论否定。原命题：“存在 $c_0 > 0$ ，使得方程有解”，否定：“对于所有 $c_0 > 0$ ，方程都无解”。