



第3章

函数的应用

作者：zheliku

时间：2026-01-05

版本：1.0.0

目录

第一章 函数性质	1
1.1 单调性+其他	1
1.2 奇偶性	2
1.3 周期性+对称性	3
1.4 综合应用	3
第二章 处理手段	5
2.1 分离参数	5
2.2 数形结合	6
2.3 连等设值	7
2.4 嵌套处理	8
2.5 构造函数	10
2.6 函数同构	10
第三章 特殊问题	12
3.1 比较大小	12
3.1.1 区间比较问题	12
3.1.2 单调性比较问题	13
3.1.3 数形结合问题	13
3.2 抽象函数	13
第四章 思维训练	16
例题答案	17

第一章 函数性质

内容提要

- 单调性+其他
- 奇偶性
- 周期性+对称性
- 综合应用

1.1 单调性+其他

方法 1.1

借助函数 $f(x)$ 的单调性，通过 $f(x)$ 的大小判断 x 的大小。

例 1.1 已知函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增，且 $f(a) \leq f(2-a)$ ，则 a 的取值范围是 _____。

例 1.2 已知函数 $f(x) = x^3 - e^{-x}$ ， $f(a) \leq f(2-a)$ ，则 a 的取值范围是 _____。

例 1.3 【2017 全国卷 I】已知函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减，且为奇函数，若 $f(1) = -1$ ，则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, 4]$ D. $[1, 3]$

例 1.4 【2024 北京市西城区第五十六中学届高三数学一模】已知函数 $f(x) = \log_2\left(\frac{1}{|x|} + 1\right) + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 3}$ ，则不等式 $f(\lg x) > 3$ 的解集为 ()

- A. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$
C. $(1, 10)$ D. $\left(\frac{1}{10}, 1\right) \cup (1, 10)$

例 1.5 定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 为增函数，则 $f(x) + f(2x-1) < 0$ 的解集为 _____。

例 1.6 【2020 山东烟台诊断】已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ，实数 m, n 满足 $f(2m-n) + f(2-n) > 0$ ，则下列不等关系成立的是 ()

- A. $m+n > 1$ B. $m+n < 1$
C. $m-n > -1$ D. $m-n < -1$

例 1.7 已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x) = 2024^x - \log_{2024}(\sqrt{x^2 + 1} - x) - 2024^{-x} + 2$ ，则不等式 $f(3x+1) + f(x) \geq 4$ 的解集为 _____。

例 1.8 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟改编】已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + x + 1$, 且 $f(a) + f(a+1) > 2$, 则实数的取值范围是 ()

- A. $(-1, -\frac{1}{2})$ B. $(-\frac{1}{2}, 0)$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

例 1.9 【2023 江苏淮安高一期中】函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, $g(x) = f(x) - x^2 + 2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 则不等式 $f(x) - f(x-2) > 4x - 4$ 的解集为 _____。

例 1.10 【2024 四川成都校考三模】已知函数 $f(x) = e^{x-2} + e^{2-x} + 2x^2 - 8x + 7$, 则不等式 $f(2x+3) > f(x+2)$ 的解集为 ()

- A. $(-1, -\frac{1}{3})$ B. $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$
 C. $(-\frac{1}{3}, 1)$ D. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

例 1.11 【2024 黑龙江哈尔滨哈九中校考模拟预测】已知函数 $f(x) = \sin(2x-2) + e^{1-x} - e^{x-1} + 2$, 若 $f(a^2 + 1) + f(2a - 2) > 4$, 则实数范围是 ()

- A. $(-\infty, -3)$ B. $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$
 C. $(-3, 1)$ D. $(1, +\infty)$

例 1.12 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 5, & x < 0 \\ 4^{x+2022}, & x \geq 0 \end{cases}$, 则不等式 $f\left(x + \frac{7}{2}\right) < 8f(x^2)$ 的解集为 _____。

思考 1.1

1. 上述题目有什么相似之处? 请说出你的观点。

1.2 奇偶性

例 1.13 【2024 福建省福州格致中学高三下学期期中考】已知 $f(x) = a \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + b \sin x + 2$, 若 $f(-3) = 7$, 则 $f(3)$ 的值为 ()

- A. -7 B. -5 C. -3 D. 无法确定

例 1.14 【2024 重庆巴蜀中学高三适应性月考】已知函数 $f(x) = \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 在区间 $[-5, 5]$ 上的最大值是 M , 最小值是 N , 则 $f(M+N)$ 的值等于 ()

- A. 0 B. 10 C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

例 1.15 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x) = |x| + e^x + e^{-x} + a$ 有唯一零点, 则实数 a 的值为 ()

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

思考 1.2

1. 上述题目可以获得什么结论?

- 奇函数: _____
- 偶函数: _____

1.3 周期性+对称性

例 1.16 【2022 福建厦门二检】(多选) 定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = 1 - x$, 则 ()

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| A. $f(x)$ 是周期函数 | B. $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递减 |
| C. $f(x)$ 图像关于直线 $x = 3$ 对称 | D. $f(x)$ 的图像关于点 $(2, 0)$ 对称 |

例 1.17 【2023-2024 江苏省南京市南京师大附中高一上期末】(多选) 已知 $f(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, 有 $f(x+1) = -f(x)$, 且当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = \log_2(x+1)$ 。下列命题正确的是 ()

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------|
| A. $f(2023) + f(-2024) = 0$ | B. $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数 |
| C. 直线 $y = x$ 与 $f(x)$ 有且仅有 2 个交点 | D. $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$ |

例 1.18 【2024 山东滨州统考二模】函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的图象是一条连续不断的曲线, 且满足 $f(3+x) - f(3-x) + 6x = 0$, 函数 $f(1-2x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称, 则 ()

- | | |
|------------------------------|---------------------|
| A. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称 | B. 8 是 $f(x)$ 的一个周期 |
| C. $f(x)$ 一定存在零点 | D. $f(101) = -299$ |

思考 1.3

1. 上述题目体现了对称性和周期性的什么关系?

1.4 综合应用

例 1.19 【2025 北京 5 年高考 3 年模拟】设 $f(x) = 2|x-1| + \log_3(x-1)^2$, 不等式 $f(ax) \leq f(x+3)$ 在 $x \in (1, 2]$ 上恒成立, 则实数的取值范围是 ()

- | | |
|--|---------------|
| A. $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ | B. $(100, 2]$ |
|--|---------------|

C. $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$

D. $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[1, \frac{5}{2}\right]$

例 1.20 【2024 广东省湛江市第一中学高一上期末多选压轴】(多选) 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + x + 1$, 则下列说法正确的是 ()

A. $f(\lg 3) + f\left(\lg \frac{1}{3}\right) = 2$

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称C. 函数 $f(x)$ 在定义域上单调递减D. 若实数 a, b 满足 $f(a) + f(b) > 2$, 则 $a + b > 0$

例 1.21 【2024 重庆市西南大学附属中学校高一上期末多选次压轴】(多选) 已知函数 $f(x) = \log_2(\sqrt{x^2 + 1} - x) + 3$, 则下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 3)$ 对称

B. $f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = 6$

C. 函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增D. 若实数 a, b 满足 $f(a) + f(b) > 6$, 则 $a + b < 0$

例 1.22 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 若 $f(2) = 0$, 则不等式 $(x^2 - 4)f(x) < 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

B. \mathbb{R}

C. $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

D. \emptyset

例 1.23 【2024 北京交大附中月考, 14】已知函数 $f(x) = \frac{2^x + m}{2^x + 1}$

(1) 当 $m = 0$ 时, $f(x)$ 的值域为 _____;

(2) 若对于任意 $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f(a), f(b), f(c)$ 的值总可作为某一个三角形的三边长, 则实数 m 的取值范围是 _____。

思考 1.4

1. 上述所有题目涉及到的函数性质有哪些?

2. 关于函数性质的考查, 说出你的理解。

第二章 处理手段

内容提要

- 分离参数
- 数形结合
- 连等设值
- 嵌套处理
- 构造函数
- 函数同构

2.1 分离参数

对于含有参数的不等式

$$f(x) \cdot a < g(x) \quad (2.1)$$

将参数分离，得到不等式

$$a < \frac{g(x)}{f(x)} \quad (2.2)$$

从而研究

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad (2.3)$$

的最值。

例 2.1 【2024 全国高三专题练习】若关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + a \leq 0$ 在区间 $[0, 4]$ 上有解，则实数 a 的取值范围是 _____。

例 2.2 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】设函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1$ ，若对于 $x \in [1, 3]$ ，
 $f(x) < -m + 4$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 0]$
- B. $\left(0, \frac{5}{7}\right)$
- C. $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{5}{7}\right)$
- D. $\left(-\infty, \frac{5}{7}\right)$

例 2.3 【2024 全国高三专题练习】若不等式 $2x - 1 > m(x^2 - 1)$ 对任意 $m \in [-1, 1]$ 恒成立，实数 x 的取值范围是 _____。

思考 2.1

1. 分离参数能解决所有含参问题吗?
2. 你认为分离参数的适用条件是什么?

2.2 数形结合**方法 2.1**

借助函数图像, 判断方程、图像交点等问题。

例 2.4 【2024 北京平谷零模, 15】已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq m \\ x^2 - 2mx + 4m, & x > m \end{cases}$, 设 $g(x) = f(x) - b$ 。给出下列四个结论:

- ① 当 $m = 4$ 时, $f(x)$ 不存在最小值;
- ② 当 $0 < m \leq 3$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;
- ③ 当 $m < 0$ 时, 存在实数 b , 使得 $g(x)$ 有三个零点;
- ④ 当 $m > 3$ 时, 存在实数 b , 使得 $g(x)$ 有三个零点。

其中正确结论的序号是 _____。

例 2.5 【2024 北京西城期末, 15】设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} -x^3, & x > a \\ -x^2 + a^2, & x \leq a \end{cases}$ 。给出下列四个结论:

- ① $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减;
- ② 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 存在最大值;
- ③ 当 $a < 0$ 时, 直线 $y = ax$ 与曲线 $y = f(x)$ 恰有 3 个交点;
- ④ 存在正数 a 及点 $M(x_1, f(x_1))$ ($x_1 > a$) 和 $N(x_2, f(x_2))$ ($x_2 \leq a$), 使 $|MN| \leq \frac{1}{100}$ 。

其中正确结论的序号是 _____。

例 2.6 【2021 北京卷, 15】已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$, 给出下列四个结论:

- ① 当 $k = 0$ 时, $f(x)$ 恰有 2 个零点;
- ② 存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 1 个零点;
- ③ 存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点;

④ 存在正数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点。

其中正确结论的序号是 _____。

例 2.7 【2025 北京 5 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbb{R}$) 恰有 4 个零点, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
- B. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, 2\sqrt{2})$
- C. $(-\infty, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$
- D. $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

2.3 连等设值

对于

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) \quad (2.4)$$

的问题, 令

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = t \quad (2.5)$$

从而使用 t 表示 x_1, x_2, x_3 的关系。

例 2.8 【2017 全国卷 I】设 x, y, z 均为正数, 且 $2^x = 3^y = 5^z$, 则 ()

- A. $2x < 3y < 5z$
- B. $5z < 2x < 3y$
- C. $3y < 5z < 2x$
- D. $3y < 2x < 5z$

例 2.9 【2023 重庆第八中学期中】(多选) 已知正数 x, y, z 满足 $3^x = 4^y = 12^z$, 则 ()

- A. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
- B. $6z < 3x < 4y$
- C. $xy < 4z^2$
- D. $x + y > 4z$

例 2.10 【2024 北京朝阳一模, 13】已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x - 1|, & x \leq 2 \\ 5 - x, & x > 2 \end{cases}$, 若实数 a, b, c ($a < b < c$) 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 $a + b$ 的值为 _____, $a + b + c$ 的取值范围是 _____。

例 2.11 设函数 $f(x) = \begin{cases} |2^x - 1|, & x \leq 2 \\ -x + 5, & x > 2 \end{cases}$, 若互不相等的实数 a, b, c 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 $2^a + 2^b + 2^c$ 的取值范围是 ()

- A. (16, 32)
- B. (18, 34)
- C. (17, 35)
- D. (6, 7)

例 2.12 【2024 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{4}{x}, & 0 < x < 4, \\ -x^2 + 10x - 20, & x \geq 4 \end{cases}$

若存在实数 a, b, c 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 $(ab + 1)^c$ 的取值范围是 _____。

例 2.13 【2024 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_4 x|, & 0 < x \leq 4 \\ -\frac{1}{2}x + 3, & x > 4 \end{cases}$, 若存在实数 $a, b, c, d \in (0, +\infty)$ 且 $a < b < c < d$, 满足 $f(a) = f(b) = f(c) = f(d)$, 则 $abcd$ 的取值范围是 _____。

例 2.14 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) = a$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $x_3(x_1+x_2) + \frac{1}{x_3^2 x_4}$ 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 1]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, 1)$ D. $(-1, 1)$

例 2.15 【2024 浙江省温州市高一上期末 A 卷】函数 $f(x) = x^4 - 24x + 16, g(x) = 6x^3 + ax^2$, 方程 $f(x) = g(x)$ 恰有三个根 x_1, x_2, x_3 , 其中 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)(x_2 + x_3)$ 的值为 _____。

思考 2.2

1. 连等设值的好处是什么?

2.4 嵌套处理

针对

$$h(x) = f(g(x)) \quad (2.6)$$

的情况, 分为两步处理:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(t) \\ t &= g(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

例 2.16 【2024 全国高三专题练习】已知不等式 $4^x - a \cdot 2^x + 2 > 0$, 对于 $a \in (-\infty, 3]$ 恒成立, 则实数 x 的取值范围是 _____。

例 2.17 已知函数 $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 下列是关于函数 $y = f(f(x)) + 1$ 的零点个数的判断, 其中正确的是 ()

- A. 当 $k > 0$ 时, 有 3 个零点 B. 当 $k < 0$ 时, 有 2 个零点
 C. 当 $k > 0$ 时, 有 4 个零点 D. 当 $k < 0$ 时, 有 1 个零点

例 2.18 【2016 浙江卷】已知函数 $f(x) = x^2 + bx$, 则“ $b < 0$ ”是“ $f(f(x))$ 的最小值与 $f(x)$ 的最小值相等”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

例 2.19 【2023 北京朝阳二模, 10】已知函数 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 4 - 2^{-x}$ 。若关于 x 的方程 $f(f(x)) = m$ 有且仅有两个不相等的实数解, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
- B. $[-3, 0) \cup (0, 3]$
- C. $(-4, -3] \cup [3, 4)$
- D. $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$

例 2.20 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f^2(x) + 3f(x) + m (m \in \mathbb{R})$ 有三个零点, 则 m 的取值范围为 ()

- A. $m \leq \frac{9}{4}$
- B. $m \leq -28$
- C. $-28 \leq m < \frac{9}{4}$
- D. $m > 28$

例 2.21 【2024 四川资阳高三统考期末】定义在 \mathbb{R} 上函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in (0, 1) \\ e^{x-1} - 2, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$, 且函数 $y = f(x-1)$ 关于点 $(1, 0)$ 对称。若关于 x 的方程 $f^2(x) - 2mf(x) = 1 (m \in \mathbb{R})$ 有 n 个不同的实数解, 则 n 的所有可能的值为 ()

- A. 2
- B. 4
- C. 2 或 4
- D. 2 或 4 或 6

例 2.22 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x) = |2^{|x|} - 2| - 1$, 则关于 x 的方程 $f^2(x) + mf(x) + n = 0$ 有 7 个不同实数解, 则实数 m, n 满足 ()

- A. $m > 0, n > 0$
- B. $0 < m < 1, n = 0$
- C. $m < 0$ 且 $n > 0$
- D. $-1 < m < 0$ 且 $n = 0$

例 2.23 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}x, & x \leq 0 \\ -|2x-1|+1, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) - (k+1)xf(x) + kx^2 = 0$ 有且只有三个不同的实数解, 则正实数 k 的取值范围为 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$
- B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$
- C. $(0, 1) \cup (1, 2)$
- D. $(2, +\infty)$

例 2.24 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x) = x^2e^{2x} + (a-1)xe^x + 1 - a$ 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 其中 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $(1-x_1e^{x_1})(1-x_2e^{x_2})(1-x_3e^{x_3})^2$ 的值为 ()

- A. 1 B. $(a-1)^2$ C. -1 D. $1-a$

例 2.25 【2024 全国高三专题练习】已知函数 $f(x) = (ax + \ln x)(x - \ln x) - x^2$ 有三个不同的零点, 其中 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $\left(1 - \frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2 \left(1 - \frac{\ln x_2}{x_2}\right) \left(1 - \frac{\ln x_3}{x_3}\right)$ 的值为 ()

- A. $a-1$ B. $1-a$ C. -1 D. 1

2.5 构造函数

方法 2.2

将条件中的某个式子看成整体, 构造新的函数进行研究。

例 2.26 【2024 江苏省盐城市第一中学高一上期末】已知 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的奇函数, $f(2) = 2$, 若对于 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 当 $x_1 > x_2$ 时, 都有 $(x_1 - x_2) \left[\frac{f(x_1)}{x_2} - \frac{f(x_2)}{x_1} \right] < 0$, 则不等式 $(x+1)f(x+1) > 4$ 的解集为 ()

- A. $(-3, 1)$ B. $(-3, -1) \cup (-1, 1)$
C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

例 2.27 【2024 广东省广州市高一上九区联考填空压轴】设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2$ 满足 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 若 $f(2) = 4$, 则不等式 $f(x) - 2x \leq 0$ 的解集为 _____。

例 2.28 【2024 江苏省盐城市五校联盟高一上期中】已知函数 $f(x) = x^2 - x$, 若对于任意的 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 都有 $x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2) > ax_1 x_2 (x_2^2 - x_1^2)$ 成立, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ C. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

2.6 函数同构

方法 2.3

寻找出条件中具有结构相同的式子, 研究其结构特点与对应的参数。

例 2.29 【2023 北京人大附中高一月考】已知 $x > 0, y > 0$, 且 $(\sqrt{x})^3 + 2022\sqrt{x} = a$, $(\sqrt{y} - 2)^3 + 2022(\sqrt{y} - 2) = -a$, 则 $x + y$ 的最小值是 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

例 2.30 【2024 黑龙江哈尔滨哈尔滨三中校考模拟预测】已知实数 x, y 满足 $\ln \sqrt{2y+1} + y = 2, e^x + x = 5$, 则 $x + 2y$ 的值为 _____。

例 2.31 【2024 广东省佛山市高一上期末填空压轴】已知 $2^x = 11 - 3x, \log_2(6y - 1) = 4 - 2y$, 则 $x + 2y$ 的值为 _____。

例 2.32 【2024 湖南省长沙市长郡中学高一上期末压轴】若实数 x_1, x_2 满足 $e_1^x + x_1 - 2 = 0, x_2 \ln x_2 + 2x_2 - 1 = 0$, 则 $x_2(2 - x_1)$ 的值为 _____。

例 2.33 【2024 江苏省南京市南京师大附中高一上期末填空压轴】设 a 为实数, 若实数 x_0 是关于 x 的方程 $e^x + (1 - a)x = \ln a + \ln x$ 的解, 则 $\frac{e^{x_0-1}}{ax_0} =$ _____。

例 2.34 【2020 全国课标 I 卷, 理】若 $2^a + \log_2 a = 4^b + 2 \log_4 b$, 则 ()

- A. $a > 2b$ B. $a < 2b$ C. $a > b^2$ D. $a < b^2$

第三章 特殊问题

内容提要

比较大小

抽象函数

3.1 比较大小

基本方式：

1. 作差。
2. 作商。
3. 单调性。

3.1.1 区间比较问题

方法 3.1

判断数的大致区间，依据区间位置比较大小。

例 3.1 【2023 山东临沂平邑一中高一期末】已知 $a = \log_2 0.3, b = 2^{0.2}, c = 0.2^{0.3}$ ，则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

例 3.2 【2024 广东省华南师范大学附属中学高一上期末次压轴】已知 $a = \ln 2, b = \sin \frac{6\pi}{7}, c = 3^{\frac{1}{2}}$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

例 3.3 【2024 北京西城二模, 5】设 $a = \lg \frac{2}{3}, b = \sqrt{\lg 3 \cdot \lg 2}, c = \frac{1}{2} \lg 6$ ，则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

例 3.4 【2024 广东省深圳市南山区高一上期末质量监测】已知 $a = \sin 1 + \cos 1, b = \log_{\cos 1} \sin 1, c = 2^{\cos 1}$ ，则 ()

- A. $c > a > b$ B. $a > b > c$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

3.1.2 单调性比较问题

方法 3.2

相同结构的两个数，构造函数依据单调性比较大小。

例 3.5 【2024 广东省佛山市高一上期末单选压轴】已知 $2^a = 5, 3^b = 10, 4^c = 17$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

例 3.6 【2024 重庆市南开中学校高一上期末单选压轴】已知 $5 - a = \ln a, b = \log_4 3 + \log_9 17, 7^b + 24^b = 25^c$ ，则以下关于 a, b, c 的大小关系正确的是（ ）

- A. $b > c > a$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

3.1.3 数形结合问题

方法 3.3

做出图像，依据交点位置比较大小。

例 3.7 【2023 天津部分区期中】已知 a, b, c 均为正数，且 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a, \left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_{\frac{1}{2}} b, \left(\frac{1}{2}\right)^c = \log_2 c$ ，则（ ）

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

例 3.8 【2024 湖南省长沙市湖南师大附中高一上期末单选压轴】设方程 $\log_2 x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0, \log_{\frac{1}{2}} x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ 的根分别为 x_1, x_2 ，则（ ）

- A. $x_1 x_2 = 1$ B. $0 < x_1 x_2 < 1$ C. $1 < x_1 x_2 < 2$ D. $x_1 x_2 \geq 2$

3.2 抽象函数

方法 3.4

寻找已学过的函数模型进行匹配，探究其函数特征。或寻找特殊值带入。

例 3.9 【2024 广东深圳高三深圳外国语学校校考阶段练习】写出一个满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 的函数解析式：_____。

例 3.10 【2023 重庆一诊】已知定义域为 $(0, +\infty)$ 的减函数 $f(x)$ 满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, 且 $f(2) = -1$, 则不等式 $f(x+2) + f(x+4) > -3$ 的解集为 _____。

例 3.11 【2024 四川省遂宁市学年高三上学期期末】定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$, 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 满足下列条件:

$$\textcircled{1} \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 2$$

$$\textcircled{2} \quad f(2) = 4$$

(1) 是否存在一次函数 $f(x)$ 满足条件②, 若存在, 求出 $f(x)$ 的解析式; 若不存在, 说明理由。

(2) 证明: $g(x) = f(x) - 2$ 为奇函数。

例 3.12 【2024 北京丰台一模, 14】已知函数 $f(x)$ 具有下列性质:

$$\textcircled{1} \quad \text{当 } x_1, x_2 \in [0, +\infty) \text{ 时, 都有 } f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1;$$

② 在区间 $(0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增;

③ $f(x)$ 是偶函数。

则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$; 函数 $f(x)$ 可能的一个解析式为 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 3.13 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足对任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 有 $f(x-y) = f(x) - f(y)$, $f(3) = 1013$ 。

(1) 求 $f(0), f(6)$ 的值。

(2) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论。

(3) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 解不等式 $f(2x-4) > 2026$ 。

例 3.14 【2023 福建福州高一期中】(多选) 定义在 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$ 且当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) < 0$, 则下列说法正确的有 ()

A. $f(0) = 0$

B. $f(x)$ 为奇函数

C. $f(x)$ 为减函数

D. $f(x)$ 可能为 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

例 3.15 【2024 湖南省岳阳市高一上期末】(多选) 已知函数 $f(x)(x \in \mathbb{R})$ 满足当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 且对任意实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增

- B. $f(0) = 0$ 或 1
- C. 函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数
- D. 对任意实数 x_1, x_2 满足 $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

例 3.16 【2024 福建师范大学附属中学高一上期末】(多选) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 满足对任意 $x, y \in (0, +\infty)$, 都有 $f(xy) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2$, 且 $x > 1$ 时, $f(x) > 2$ 。则下列说法正确的是 ()

- A. $f(1) = 2$
- B. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 2$
- C. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 是减函数
- D. 存在实数 k 使得函数 $y = |f(x) + k|$ 在 $(0, 1)$ 是减函数

第四章 思维训练

例 4.1 【2024 河南省届高三下学期仿真模拟考试数学试题】已知函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbb{R} 上的单调函数， $f(f(x) - 2^x - 2x) = 10$ ，则 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的值域为 _____。

例 4.2 【2023-2024 湖南省长沙市长郡中学高一上期末】已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的 $f(x)$ 是单调函数，且对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒有 $f(f(x) + \log_{\frac{1}{3}} x) = 4$ ，则函数 $f(x)$ 的零点为 ()

- A. $\frac{1}{27}$ B. $\frac{1}{9}$ C. 9 D. 27

例 4.3 【2024 全国高三专题练习】不等式 $(x^2 - 1)^{1011} + x^{2022} + 2x^2 - 1 \leq 0$ 的解集为 _____。

例题答案

例 1.1

$$(-\infty, 1]$$

例 1.2

$$(-\infty, 1]$$

例 1.3

D

例 1.4

D

例 1.5

$$\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

例 1.6

C

例 1.7

$$\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

例 1.8

B

例 1.9

(1, +∞)

例 1.10

B

例 1.11

C

例 1.12

(−∞, −1) ∪ (2, +∞)

例 1.13

C

例 1.14

C

例 1.15

D

例 1.16

ACD

例 1.17

AD

例 1.18

ACD

例 1.19

D

例 1.20

ABD

例 1.21

ABD

例 1.22

C

例 1.23

(1) $(0, 1)$

(2) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

例 2.1

$(-\infty, 1]$

例 2.2

D

例 2.3

$$(\sqrt{3} - 1, 2)$$

例 2.4

$$\textcircled{2}\textcircled{4}$$

例 2.5

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{4}$$

例 2.6

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{4}$$

例 2.7

D

例 2.8

D

例 2.9

ABD

例 2.10

$$2 \quad [6, 7)$$

例 2.11

B

例 2.12

(16, 64)

例 2.13

(96, 100)

例 2.14

A

例 2.15

-25

例 2.16

(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)

例 2.17

CD

例 2.18

A

例 2.19

C

例 2.20

B

例 2.21

B

例 2.22

C

例 2.23

B

例 2.24

A

例 2.25

D

例 2.26

B

例 2.27

$[0, 2] \cup (-\infty, -2]$

例 2.28

D

例 2.29

C

例 2.30

4

例 2.31

4

例 2.32

1

例 2.33

$\frac{1}{e}$

例 2.34

B

例 3.1

D

例 3.2

D

例 3.3

A

例 3.4

A

例 3.5

D

例 3.6

D

例 3.7

A

例 3.8

B

例 3.9

$$f(x) = x^2$$

例 3.10

$$(-2, 0)$$

例 3.11

(1) $f(x) = x + 2$

(2) 略

例 3.12

$$-1 \quad |x| - 1$$

例 3.13

(1) $f(0) = 0, f(6) = 2026$

(2) 奇函数

(3) $(5, +\infty)$

例 3.14

ABD

例 3.15

ACD

例 3.16

ABD

例 4.1

$$\left[-\frac{7}{4}, 10 \right]$$

例 4.2

A

例 4.3

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$