



# 第一章

## 集合与常用逻辑用语

作者: zheliku

时间: 2025-12-16

版本: 1.0.0

# 目录

<b>第一章 集合</b>	<b>1</b>
1.1 概念	1
1.2 特性	1
1.3 表示方法	2
1.4 常用数集符号	2
<b>第二章 集合的基本关系</b>	<b>3</b>
2.1 Venn 图	3
2.2 集合间的关系	3
2.3 空集	3
2.4 有限集合的子集个数	4
2.5 数轴表示法	4
2.6 区间	5
<b>第三章 集合的基本运算</b>	<b>6</b>
3.1 交集与并集	6
3.2 全集与补集	6
3.3 德•摩根定律	7
3.4 容斥原理	7
<b>第四章 命题与条件</b>	<b>9</b>
4.1 命题的判断	9
4.2 充分条件与必要条件	9
4.3 四种命题	10
<b>第五章 全称量词与存在量词</b>	<b>12</b>
5.1 全称量词命题	12
5.2 存在量词命题	12
<b>例题答案</b>	<b>13</b>

# 第一章 集合

## 内容提要

- 集合定义
- 集合特性
- 集合的表示方法
- 常用数集符号

## 1.1 概念

### 定义 1.1 (集合)

我们把研究对象统称为**元素**，一些元素组成的总体叫做**集合**。

1. 元素用小写字母表示，集合用大写字母表示。
2. 如果元素  $a$  属于集合  $A$ ，则表示为  $a \in A$ ；
3. 如果元素  $a$  不属于集合  $A$ ，则表示为  $a \notin A$ 。
4. 集合的元素个数可以是无限个。按照元素个数，可将集合分为 2 类：
  - 有限集。
  - 无限集。

## 1.2 特性

1. 确定性
  - 集合中的元素是确定的，任何人都能判断某个元素是否属于该集合。
2. 无序性
  - 集合中元素的排列顺序不影响集合本身。
3. 互异性
  - 集合中不能有重复的元素。

**例 1.1** 【223 四川南充高一月考】已知  $a$ 、 $b$  为实数，若集合  $A = \left\{ a, \frac{b}{a}, 1 \right\}$  与集合  $B = \{ a^2, a+b, 0 \}$  相同，则下列说法正确的是( )

- A.  $a+b=1$
- B.  $a$ 、 $b$  可以是任意值
- C. 集合  $A$  与集合  $B$  元素个数一定均为 3
- D. 以上说法均不正确

## 1.3 表示方法

若  $1 \leq x < 6$  且  $x$  为整数:

1. 例举法:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. 描述法:  $\{x | 1 \leq x < 6, x \in \mathbb{N}\}$  或  $\{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x < 6\}$
3. 图示法
  - Venn 图
  - 数轴表示法

### 思考 1.1

(1)  $a$  和  $\{a\}$  是否一样?

(2) 平面中的一点  $(1, 4)$  可以用  $\{x = 1, y = 4\}$  表示吗?

## 1.4 常用数集符号

数集	符号
自然数集	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
正整数集	$\mathbb{N}^+ (\mathbb{N}^*) = \{1, 2, 3, \dots\}$
整数集	$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
有理数集	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
实数集	$\mathbb{R}$

# 第二章 集合的基本关系

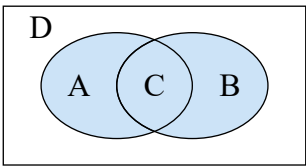
## 内容提要

- ☐ Venn 图
- ☐ 特殊集合：空集
- ☐ 区间
- ☐ 集合间的关系
- ☐ 数轴表示法

## 2.1 Venn 图

韦恩（Venn）图表示集合之间的包含/非包含关系。以右图为例：

- $A$  表示全集，包含所有其他集合。
- 集合  $B$  和集合  $C$  的共有部分为集合  $D$ 。



## 2.2 集合间的关系

符号	读法	关系	说明
$A \subseteq B$	$A$ 包含于 $B$	$A$ 是 $B$ 的子集	集合 $A$ 中的元素全部都在集合 $B$ 中
$A = B$	$A$ 等于 $B$	集合 $A$ 与集合 $B$ 相等	集合 $A$ 与集合 $B$ 中的元素完全相同
$A \not\subseteq B$	$A$ 不包含于 $B$	$A$ 不是 $B$ 的子集	集合 $A$ 中至少有一个元素不在集合 $B$ 中

**例 2.1** 已知集合  $A=\{1, 2, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 3, 4\}$ ,  $B=\{1, 2\}$ ,  $C=\{1, 2, 4\}$ 。则下列说法正确的是（      ）

- A.  $B \in A$ ,  $C \in A$

B.  $\{3, 4\} \in A$ ,  $B \subseteq A$

C.  $C \subseteq A$ ,  $\{1, 2, 3\} \in A$

D.  $C \in A$ ,  $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq A$

## 2.3 空集

### 定义 2.1（空集）

不包含任何元素的集合称为**空集**。记作  $\emptyset$  或  $\{\}$ 。

1. 空集是任何集合的子集。
2. 空集是任何非空集合的真子集。
3. 空集只有一个子集，即其自己。

思考 2.1

$\emptyset$ 、0、 $\{0\}$ 、 $\{\emptyset\}$  之间的关系？

2.4 有限集合的子集个数

集合	子集	子集个数	真子集个数	非空真子集个数
$\{a\}$	$\{\emptyset\}$ 、 $\{a\}$	2	1	0
$\{a, b\}$	$\{\emptyset\}$ 、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{a, b\}$	4	3	2
$\{a, b, c\}$	$\{\emptyset\}$ 、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{a, b\}$ 、 $\{c\}$ 、 $\{a, c\}$ 、 $\{b, c\}$ 、 $\{a, b, c\}$	8	7	6
...	...	...	...	...
$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$	...	$2^n$	$2^n - 1$	$2^n - 2$

**例 2.2** 已知集合  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $P = \{(x, y) \mid x \in M, y \in M, x - y \in M\}$ 。则  $P$  的非空子集的个数为 \_\_\_\_\_。

2.5 数轴表示法

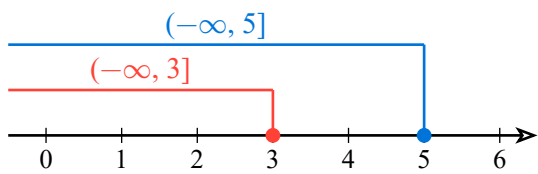
对于由连续实数组成的集合，通常用数轴来表示，这也属于集合表示的图示法。在数轴上

- 若端点值是集合中的元素，则用实心点表示；
- 若端点值不是集合中的元素，则用空心点表示。



左图表示集合  $\{x \mid -1 < x \leq 5\}$ ，右图表示集合  $\{x \mid x \geq 3\}$ 。

使用数轴表示集合间的关系：





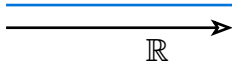
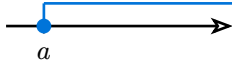
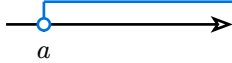
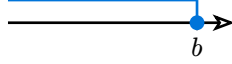
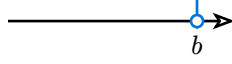
2.6 区间

定义 2.2（区间）

数轴某一段上所有点对应的所有连续实数组成的集合，称为**区间**。

集合	读法	符号	数轴表示
$\{x a < x < b\}$	开区间	$(a, b)$	
$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	
$\{x a < x \leq b\}$	左开右闭区间	$(a, b]$	
$\{x a \leq x < b\}$	左闭右开区间	$[a, b)$	

- 实数  $a$  与  $b$  都叫做相应区间的端点。
- 用实心点表示包括在区间内的端点，用空心点表示不包括在区间内的端点。
- 区间的左端点  $a$  必须小于区间的右端点  $b$ 。
- $b - a$  称为区间的长度。

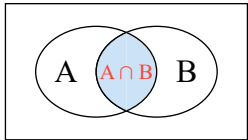
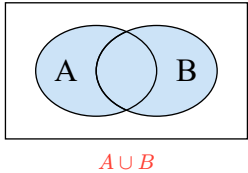
集合	符号	数轴表示
$\{x x \in \mathbb{R}\}$	$(-\infty, +\infty)$	
$\{x x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	
$\{x x > a\}$	$(a, +\infty)$	
$\{x x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x x < b\}$	$(-\infty, b)$	

## 第三章 集合的基本运算

### 内容提要

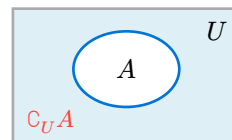
- 交集与并集
- 全集与补集
- 德·摩根定律
- 容斥原理

### 3.1 交集与并集

运算	描述	符号	图示
交集	由所有属于集合 $A$ 且属于集合 $B$ 的元素组成的集合	$A \cap B$	
并集	由所有属于集合 $A$ 或属于集合 $B$ 的元素组成的集合	$A \cup B$	

### 3.2 全集与补集

- 全集  $U$ ：研究问题中涉及的所有元素的集合。
- 集合  $A$  的补集：全集  $U$  中不属于集合  $A$  的元素组成的集合，符号表示为：



$$C_U A = \{x | x \in U, x \notin A\} \quad (3.1)$$

**例 3.1** 【2017 课标全国 I】已知集合  $A = \{x | x < 1\}$ ,  $B = \{x | 3^x < 1\}$ 。则 ( )

- A.  $A \cap B = \{x | x < 0\}$                       B.  $A \cup B = \mathbb{R}$   
 C.  $A \cup B = \{x | x > 1\}$                       D.  $A \cap B = \emptyset$

**例 3.2** 【2018 课标全国 I】已知集合  $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$ 。则  $C_{\mathbb{R}} A = ( )$

- A.  $\{x | -1 < x < 2\}$                       B.  $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$   
 C.  $\{x | x < -1\} \cup \{x | x > 2\}$                       D.  $\{x | x \leq -1\} \cup \{x | x \geq 2\}$



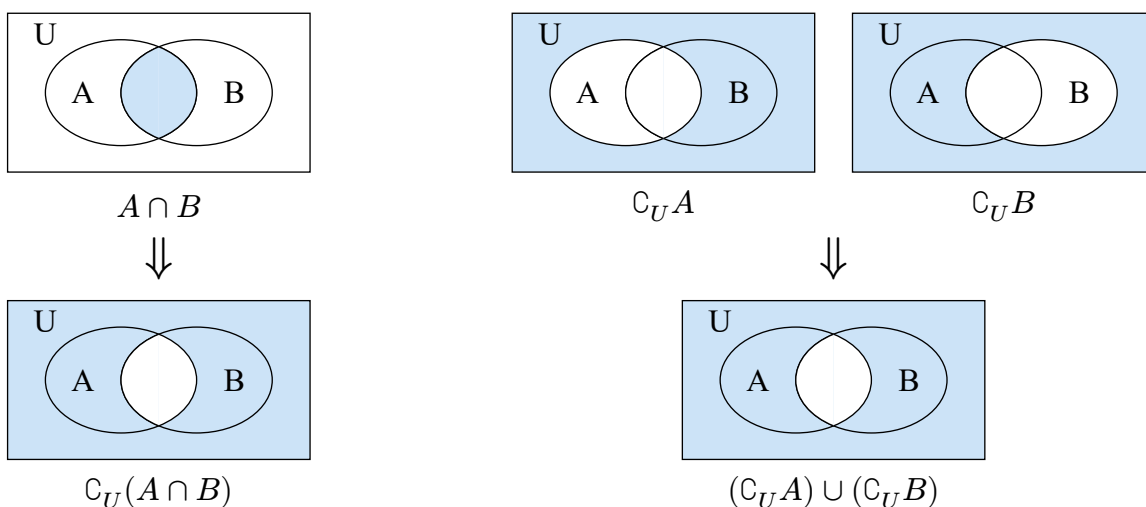
### 3.3 德 • 摩根定律

#### 定义 3.1（德 • 摩根定律）

设  $A$  和  $B$  是全集  $U$  的子集，则有：

$$\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B \quad (3.2)$$

$$\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B \quad (3.3)$$



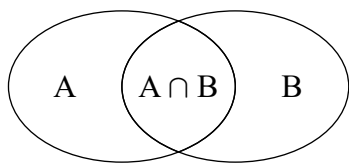
### 3.4 容斥原理

#### 定义 3.2（容斥原理）

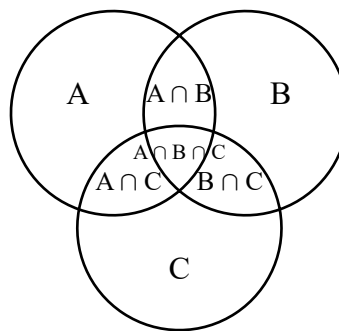
设  $A$  和  $B$  是全集  $U$  的子集， $|A|$  表示集合  $A$  的元素个数，则有：

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &\quad + |A \cap B \cap C| \end{aligned} \quad (3.5)$$



(3.4)



(3.5)

**例 3.3** 【2023 辽宁省实验中学高一月考】(多选) 某校高一年级组织趣味运动会, 有跳远、球类、跑步三项比赛, 一共有 28 人参加比赛, 其中有 16 人参加跳远比赛, 有 8 人参加球类比赛, 有 14 人参加跑步比赛, 同时参加跳远和球类比赛的有 3 人, 同时参加球类和跑步比赛的有 3 人, 没有人同时参加三项比赛, 则 ( )

- |                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| A. 同时参加跳远和跑步比赛的有 4 人 | B. 仅参加跳远比赛的有 8 人   |
| C. 仅参加跑步比赛的有 7 人     | D. 同时参加两项比赛的有 10 人 |

## 第四章 命题与条件

### 内容提要

□ 命题的判断

□ 充分条件与必要条件

□ 四种命题

### 4.1 命题的判断

#### 定义 4.1 (命题)

我们把可以判断真假的陈述句，叫做**命题**。其中判断为真的陈述句叫做**真命题**，判断为假的陈述句叫做**假命题**。

1. 命题可以写成“若  $p$ ，则  $q$ ”、“如果  $p$ ，那么  $q$ ”的形式。
2.  $p$  为命题的条件， $q$  为命题的结论。

#### 思考 4.1

找出下列命题的  $p$  和  $q$ ：

1. 小明吃过饭了。
2. 今天是星期五。
3. 这个苹果很好吃。

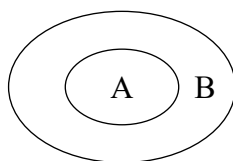
### 4.2 充分条件与必要条件

如果“若  $p$ ，则  $q$ ”为真命题，则表示  $p$  通过推理可以得出  $q$ ，记为

$$p \Rightarrow q \quad (4.1)$$

此时， $p$  是  $q$  的充分条件。 $q$  是  $p$  的必要条件。

可将  $p$  的取值集合记为  $A$ ， $q$  的取值集合记为  $B$ ，用韦恩图表示：



可利用韦恩图表示为下面 3 种情况： $p$  的外延和  $q$  的外延成包含关系。

关系	韦恩图	充分必要性
$p \Rightarrow q$		$p$ 是 $q$ 的充分不必要条件 $q$ 是 $p$ 的必要不充分条件
$p \Leftrightarrow q$		$p$ 是 $q$ 的充要条件
$p \nRightarrow q$		$p$ 既不是 $q$ 的充分条件 也不是 $q$ 的必要条件
$p$ 是 $q$ 的非充分 非必要条件		$p$ 与 $q$ 有交集但互不包含

例 4.1

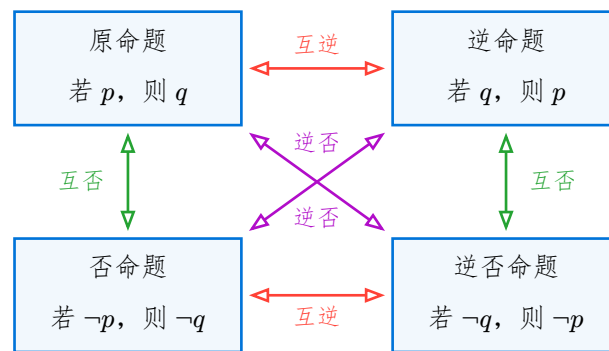
- (1)  $x > 1$  是  $x^2 > 1$  的 \_\_\_\_\_。
- (2)  $ab > 0$  是  $a > 0$ 、 $b > 0$  的 \_\_\_\_\_。
- (3)  $x^4 \leq 0$  是  $x = 0$  的 \_\_\_\_\_。

4.3 四种命题

名称	形式
原命题	若 $p$ ，则 $q$
逆命题	若 $q$ ，则 $p$
否命题	若 $\neg p$ ，则 $\neg q$
逆否命题	若 $\neg q$ ，则 $\neg p$

- 1.  $p$  是原命题的条件， $q$  是原命题的结论；
- 2.  $\neg p$  表示  $p$  的否定；
- 3. 任意命题都有逆命题、否命题和逆否命题。
- 4. 原命题与逆否命题同真同假，互为逆否命题。
- 5. 否命题与原命题真假性没有关系。

6. 逆命题与原命题真假性没有关系。



#### 思考 4.2

某食品的广告词为“幸福的人们都拥有”，那么不拥有的人们会不会幸福呢？

A. 不一定幸福。

B. 一定幸福。

C. 一定不幸福。

这说明了 \_\_\_\_\_。

## 第五章 全称量词与存在量词

### 内容提要

- 全称量词
- 存在量词
- 含有量词的命题的否定

### 5.1 全称量词命题

1. 短语“所有”、“对一切”“任意一个”等在逻辑中称为**全称量词**。
2. 符号表示： $\forall x, p(x)$
3. 含有全称量词的命题称为**全称量词命题**。

### 5.2 存在量词命题

1. 短语“存在”、“至少有一个”、“有些”等在逻辑中称为**存在量词**。
2. 符号表示： $\exists x, p(x)$
3. 含有存在量词的命题称为**存在量词命题**。

命题类型	全称量词命题	存在量词命题
形式	$\forall x \in M, p(x)$	$\exists x \in M, p(x)$
否定形式	$\exists x \in M, \neg p(x)$	$\forall x \in M, \neg p(x)$

**例 5.1** 写出下列命题的否定，并判断其真假：

(1) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 > 0$ ”的否定是：\_\_\_\_\_。

(2) “ $\exists c_0 > 0$ , 方程  $x^2 - x + c_0 = 0$ ”的否定是：\_\_\_\_\_。

## 例题答案

### 例 1.1

C

解析：因为集合  $A$  与集合  $B$  相同，且集合  $A$  中有 3 个不同元素，故集合  $B$  中也有 3 个不同元素，即  $a^2$ 、 $a+b$ 、 $0$  均不相等，从而可得  $a^2 \neq 0$ ，即  $a \neq 0$ ；又因为  $a^2 \neq a+b$ ，故  $a^2 - a - b \neq 0$ ，即  $b \neq a^2 - a$ ；又因为  $a+b \neq 0$ ，故  $b \neq -a$ 。综上所述，选项 C 正确。

### 例 2.1

C

解析：集合  $A$  的元素有  $1, 2, \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, 3, 4$ ，所以  $C \subseteq A$ ， $\{1, 2, 3\} \in A$ 。选项 C 正确。

### 例 2.2

63

解析：集合  $M$  有 4 个元素，则集合  $P$  为  $\{(4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1)\}$ 。因此集合  $P$  有 6 个元素，其非空子集的个数为  $2^6 - 1 = 63$ 。

### 例 3.1

A

解析： $3^x < 1 \Rightarrow x < 0$ ，所以  $B = \{x \mid x < 0\}$ 。因为  $A = \{x \mid x < 1\}$ ，所以  $A \cap B = \{x \mid x < 0\}$ 。

### 例 3.2

B



解析:  $x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) > 0 \Rightarrow x < -1$  或  $x > 2$ , 所以  $A = \{x \mid x < -1\} \cup \{x \mid x > 2\}$ 。因此  $C_{\mathbb{R}}A = \{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$ 。

### 例 3.3

#### ACD

解析: 设同时参加跳远和跑步比赛的有  $x$  人。根据容斥原理:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad (5.1)$$

代入数据:

$$28 = 16 + 8 + 14 - 3 - x - 3 + 0 \quad (5.2)$$

解得  $x = 4$ , 即同时参加跳远和跑步比赛的有 4 人, A 正确。

仅参加跳远比赛的人数为:  $16 - 3 - 4 = 9$  人, B 错误。

仅参加跑步比赛的人数为:  $14 - 4 - 3 = 7$  人, C 正确。

同时参加两项比赛的人数为:  $3 + 4 + 3 = 10$  人, D 正确。

因此选择 C。

### 例 4.1

#### (1) 充分不必要条件

解析:  $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ , 但  $x^2 > 1$  不能推出  $x > 1$  (反例:  $x = -2$ ), 所以 “ $x > 1$ ” 是 “ $x^2 > 1$ ” 的充分不必要条件。

#### (2) 必要不充分条件

解析:  $a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$ , 但  $ab > 0$  不能推出  $a > 0, b > 0$  (反例:  $a = -1, b = -1$ ), 所以 “ $ab > 0$ ” 是 “ $a > 0, b > 0$ ” 的必要不充分条件。

#### (3) 充要条件

解析:  $x = 0 \Rightarrow x^4 = 0 \leq 0$ , 且  $x^4 \leq 0 \Rightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$ , 所以 “ $x^4 \leq 0$ ” 是 “ $x = 0$ ” 的充要条件。

**例 5.1**

$$(1) \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

解析：全称量词命题的否定是存在量词命题，且将结论否定。当  $x = 1$  时， $x^2 - 2x + 1 = 0$ ，所以否定命题为真。

$$(2) \forall c_0 > 0, \text{ 方程 } x^2 - x + c_0 = 0 \text{ 无解}$$

解析：存在量词命题的否定是全称量词命题，且将结论否定。原命题：“存在  $c_0 > 0$ ，使得方程有解”，否定：“对于所有  $c_0 > 0$ ，方程都无解”。