



第三章

函数

作者：zheliku

时间：2026-01-01

版本：1.0.0

目录

第一章 函数的概念	1
1.1 映射	1
1.2 定义	2
1.3 三大要素	2
1.4 定义域选取方式	3
1.5 值域求解	3
1.6 表达式求解	4
第二章 函数的性质	5
2.1 单调性	5
2.2 奇偶性	6
2.3 周期性	7
2.4 类周期函数	8
第三章 基本初等函数	10
3.1 幂函数	10
3.2 二次函数	11
3.3 指数函数与对数函数	12
3.3.1 指数函数	12
3.3.2 对数函数	13
3.4 反函数	14
3.5 特殊函数	15
第四章 函数的对称、平移和缩放	16
4.1 对称性	16
4.2 平移与缩放	17
4.3 平移缩放探究	19
第五章 抽象函数	20
例题答案	22

第一章 函数的概念

内容提要

- 映射
- 三大要素
- 值域

- 定义
- 定义域
- 表达式

1.1 映射

定义 1.1 映射

两个非空集合 A 与 B 间存在着对应关系，而且对于 A 中的每一个元素 a ， B 中总有唯一的一个元素 b 与它对应，则将这种对应称为从 A 到 B 的映射，记作：

$$f : A \rightarrow B \quad (1.1)$$

其中：

1. b 称为 a 在映射 f 下的像，记作 $b = f(a)$ 。
2. a 称为 b 关于映射 f 的原像，记作 $a = f^{-1}(b)$ 。
3. 集合 A 中所有元素的像的集合称为映射的值域，记作 $f(A)$ 。

笔记

1. 像必须唯一，原像可以不唯一。
2. B 中不是所有元素都需要有来自 A 的对应。

分类：

1. 单射
2. 满射
3. 双射 (一一映射)

思考 1.1

看看下面哪些是映射? 如果是, 是什么集合到什么集合的映射? 又是哪一类映射? 反过来还成立吗?

1. 学生与班级的对应关系
2. 学生与学号的对应关系
3. 商场里物品与价格的对应关系

1.2 定义

定义 1.2 函数

在某个变化过程中有两个变量 x, y , 如果对于 x 在某个实数集合 D 内的每一个确定的值, 按照某个对应法则 f , y 都有唯一确定的实数值与它对应, 那么 y 就是 x 的函数, 记作:

$$y = f(x), x \in D \quad (1.2)$$

其中:

1. x 叫做自变量 (原像)
2. y 叫做因变量 (像)
3. x 的取值范围 D 叫做函数的定义域 (集合 A)
4. y 值的集合叫做函数的值域 (集合 B)

例 1.1 定义集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, 集合 $B = \{\dots\}$, f 为 $A \rightarrow B$ 的映射, 则下列说法不正确的是 ()

- A. 若 f 为一一映射, 则集合 B 的真子集个数为 3
- B. 若 $f: x \rightarrow -x$, 则集合 $A = B$
- C. 若集合 $B = \{0, 1\}$, 则可能为 $f: x \rightarrow x^2$
- D. 若 f 为满射, 则可将 f 看成是定义在集合 A 上的函数, 且值域为 B

1.3 三大要素

定义域 $\xrightarrow{\text{对应法则}}$ 值域

例 1.2 下面各组函数中是同一函数的是 ()

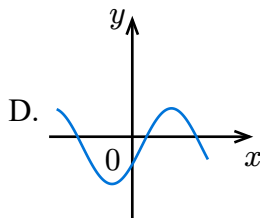
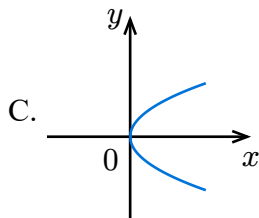
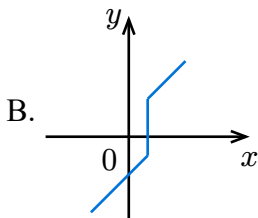
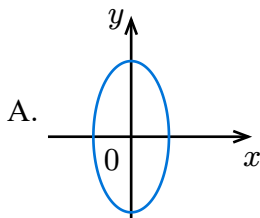
A. $y = \sqrt{-2x^3}$ 与 $y = \sqrt{-2x}$

B. $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = |x|$

C. $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$ 与 $y = \sqrt{x^2-1}$

D. $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t - 1$

例 1.3 如图, 可以表示函数 $f(x)$ 的图象的是 ()



1.4 定义域选取方式

1. 给定定义域, 则使用该定义域。
2. 未给定定义域, 则尽可能取最大值:
 - 分母不为零
 - 偶数次根内非负
 - 其他 (如 对数真数大于 0 等)

例 1.4 【2023·朝阳二模, 11】函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}}$ 的定义域为 _____。

例 1.5 已知函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 则函数 $f(1-3x)$ 的定义域为 _____。

1.5 值域求解

例 1.6 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

(1) $y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}$

(2) $y = 4 - \sqrt{3 + 2x - x^2}$

(3) $y = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}$

例 1.7 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

(1) $y = \frac{x+2}{3x-4}$

(2) $y = \frac{3+x}{4-x}$

(3) $y = \frac{3x+1}{x-2}$

例 1.8 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

(1) $y = \sqrt{1-2x} - x$

(2) $y = x + \sqrt{1-2x}$

(3) $y = x + \sqrt{1-x^2}$

(4) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$

例 1.9 【2024 全国高三练习】求下列函数的值域。

(1) $y = \frac{2x^2 - x + 1}{2x - 1} \left(x > \frac{1}{2} \right)$

(2) $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6}$

$$(3) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 1}$$

1.6 表达式求解

例 1.10 【2024 全国高三练习】求解下列函数的表达式

$$(1) f(x^2 - 2) = x^4 + 3x^2 - 4 \qquad (2) f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - 1$$

例 1.11 【2024 全国高三练习】求解下列函数的表达式

$$(1) f(x - 1) + 2f(1 - x) = 2x - 3 \qquad (2) f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x + 1$$

$$(3) f(x) = 2x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) - 3x$$

例 1.12 【2024 全国高三练习】求解下列函数的表达式

$$(1) f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x + 1$$

第二章 函数的性质

内容提要

□ 单调性

□ 奇偶性

□ 周期性

□ 类周期

2.1 单调性

1. $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$, 则 $f(x)$ 单调递增, 记为 $f(x) \uparrow$
2. $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$, 则 $f(x)$ 单调递减, 记为 $f(x) \downarrow$

等价表示:

1. $f(x) \uparrow \Leftrightarrow x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 同号
2. $f(x) \downarrow \Leftrightarrow x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 异号
3. $f(x) \uparrow \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

思考 2.1

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上均单调递减, 能说 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上单调递减吗?
2. 增函数与增函数相加, 结果还是增函数吗?
 - 增 + 增 = _____
 - 增 - 减 = _____
 - 增 \times 增 = _____
 - 增 / 减 = _____

例 2.1 判断下列函数的单调性, 并给出证明:

(1) $f(x) = \sqrt{x}$

(2) $f(x) = x^2$

(3) $f(x) = x + \frac{a}{x} (a \in \mathbb{R})$

例 2.2 (多选) 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, 下列结论中正确的是 ()

A. $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

B. $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$

C. $f(a) \leq f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(b)$

D. $f(x_1) > f(x_2)$

例 2.3 【2022 陕西安康六校高一期末联考】已知函数 $f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上单调递减，且 $f(1-a) < f(2a-1)$ ，则实数 a 的取值范围是 _____。

例 2.4 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0 \\ 4x - x^2, & x < 0 \end{cases}$ ，若 $f(2-a^2) > f(a)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

B. $(-1, 2)$

C. $(-2, 1)$

D. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

例 2.5 【2022 安徽江淮十校高一联考】已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - mx, & x \geq 2 \\ -\frac{m}{x}, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$ 对于

$\forall x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ ，都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0$ ，则实数 m 的取值范围是 _____。

2.2 奇偶性

	奇函数	偶函数
图像	关于原点对称	关于 y 轴对称
定义域	关于原点对称	关于原点对称
特点	$f(x) + f(-x) = 0$ $f(0) = 0$ (如果 $x = 0$ 有意义)	$f(x) - f(-x) = 0$

思考 2.2

1. 下列函数是奇函数还是偶函数？还是都不是？

(1) $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$

(2) $f(x) = \frac{3^x}{3^x + 1}$

(3) $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$

2. 奇偶函数相运算得到的函数有什么性质？

• 奇 \pm 奇 = _____；奇 \times 奇 = _____；奇 \div 奇 = _____

• 偶 \pm 偶 = _____；偶 \times 偶 = _____；偶 \div 偶 = _____

• 奇 \pm 偶 = _____；奇 \times 偶 = _____；奇 \div 偶 = _____

3. 如何将一个定义域对称的函数写成一个奇函数与一个偶函数之和？

例 2.6 【2020 河南实验中学月考】设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的定义域都为 \mathbb{R} ， $f(x)$ 为奇函数， $g(x)$ 为偶函数，则下列结论正确的是 ()

- A. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数
 B. $|f(x)| \cdot g(x)$ 是奇函数
 C. $f(x) \cdot |g(x)|$ 是奇函数
 D. $|f(x) \cdot g(x)|$ 是奇函数

例 2.7 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟练习改编】已知函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数、奇函数，且满足 $f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ ，则 $f(-2) + g(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 2.8 【宁夏银川一中、昆明一中 2024 届高三联合二模】已知函数 $f(x) = ax^5 + b \sin x + c$ ，若 $f(-1) + f(1) = 2$ ，则 c 的值为 ()

- A. -1
 B. 0
 C. 1
 D. $\frac{2}{3}$

例 2.9 【2020 贵州贵阳一中月考】设函数 $f(x) = 3 + x + \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 的最大值为 M ，最小值为 N ，则 $M + N$ 的值为 ()

- A. 3
 B. 2
 C. 6
 D. 4

2.3 周期性

若函数满足 $f(x + a) = f(x)$ ，则函数的周期 $T = a$ 。(经过 a 个单位一个周期)

序号	条件	周期
1	$f(x + a) = f(x - a), \quad f(x + a) + f(x) = k$	$T = 2a$
2	$f(x + a) = \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}, \quad f(x + a) = \pm \frac{1}{f(x)}$ $f(x + a) = \frac{1}{1 - f(x)}, \quad f(x) = 1 - \frac{1}{f(x + a)}$	$T = 3a$ (部分情况)
3	$f(x + a) = -\frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}, \quad f(x + a) = -\frac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$	$T = 4a$
4	$f(x + a) = f(x + b)$	$T = a - b $

笔记

1. 有印象即可，写题时尝试代值观察得出 T 。
2. 核心处理思想：作图。
3. 常伴有接近当年年份的值出现，如 2025, 2024...

例 2.10 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足下列各条件, 不能得出函数 $f(x)$ 具有周期性的是 ()

A. $f(x)f(x+2) = 2022$

B. $f(x) = f(4-x)$

C. $f(x+1) = f(x) + f(x+2)$

D. $f(x)$ 为奇函数且 $f(x) = f(2-x)$

例 2.11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} f(x-2), & x > 1 \\ |x| - 1, & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$, 关于 x 的方程 $f(x) = \log_{a(x+1)}$ 恰有 5 个解, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right)$

B. $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{5}\right)$

C. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$

D. $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$

例 2.12 【2023 上海同济大学第一附属中学月考】若函数 $y = f(x), x \in \mathbb{R}$, 满足 $f(x+2) = f(x)$, 且 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = |x|$, 则函数 $f(x)$ 的图象与函数 $y = \log_4|x|$ 的图象的交点的个数为 ()

A. 3

B. 4

C. 6

D. 8

例 2.13 定义在 \mathbb{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$, 且当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = 2x$, 则 $f\left(-\frac{9}{2}\right)$ 的值为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

例 2.14 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cdot f(x+2) = 13$.

(1) 求证: $f(x)$ 是周期函数。

(2) 若 $f(1) = 2$, 求 $f(99)$ 的值。

(3) 若 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = x$, 试求 $x \in [4, 8]$ 时, 函数 $f(x)$ 的解析式。

2.4 类周期函数

形如下列的函数称为类周期函数:

$$f(x+a) = \lambda f(x) \quad (2.1)$$

主要处理手段: 数形结合。

例 2.15 【2022 云南保山第一次质检】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$, 当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) = x$, 那么 $f(21)$ 的值为 ()

A. 2^{10}

B. 2^{11}

C. 2^{20}

D. 2^{21}

例 2.16 【2025 北京 6 年高考 3 年模拟练习】定义域为 \mathbb{R} 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^2 - x$, 当 $x \in [-2, -1]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 ()

A. $-\frac{1}{16}$

B. $-\frac{1}{8}$

C. $-\frac{1}{4}$

D. 0

例 2.17 【2022 云南保山第一次质检】已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |1 - x|, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2f(x-2), & 2 < x \leq 8 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - kx = 0$ 恰好有 4 个实数根, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{7}\right)$

B. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

C. $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{7}\right)$

D. $\left(\frac{4}{5}, 1\right)$

例 2.18 【2022 河北沧州一中月考】定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = \frac{1}{2}f(x)$, 当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 。若直线 $y = a$ 与 $f(x)$ 的图像恰有 8 个交点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_8, y_8)$, 则 $x_1 + x_2 + \dots + x_8 = \underline{\hspace{2cm}}$, a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

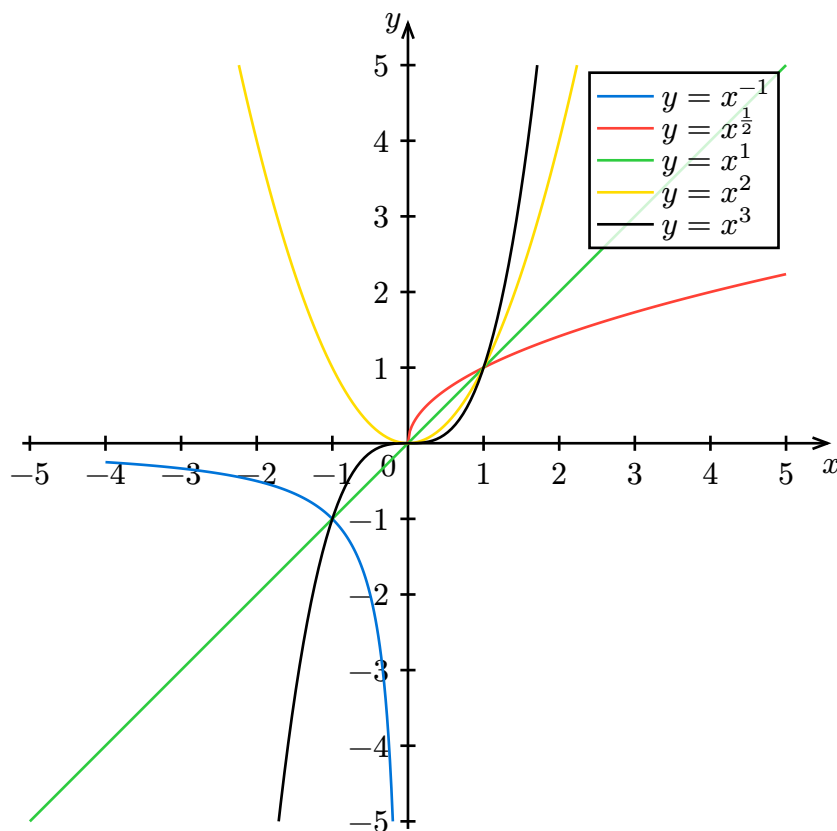
第三章 基本初等函数

内容提要

- 幂函数
- 二次函数
- 指数与对数
- 反函数
- 特殊函数

3.1 幂函数

$$y = x^k (k \in \mathbb{Q}) \quad (3.1)$$



常见幂函数特征:

1. 在 $(0, +\infty)$ 上都有定义
 - (a). $k > 0$ 时, 单调递增;
 - (b). $k < 0$ 时, 单调递减。
2. 所有幂函数图像都经过 $(1, 1)$ 点。
3. 当 k 为整数时:
 - k 为奇数时, 定义域为 \mathbb{R} , 图像关于原点对称 (奇函数);

• k 为偶数时, 定义域为 \mathbb{R} , 图像关于 y 轴对称 (偶函数)。

例 3.1 【2024 宁夏固原高三隆德县中学校联考期中】已知函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2) \cdot x^{m-2}$ 是幂函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则实数 m 的值为 ()

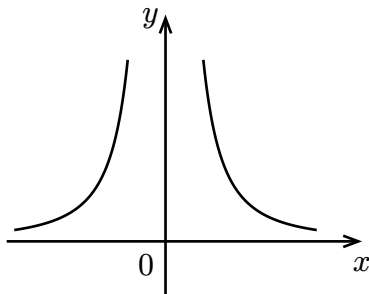
A. -1

B. -1 或 3

C. 3

D. 2

例 3.2 【2024 全国高三专题练习】已知幂函数 $y = x^{\frac{p}{q}}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$ 且 p, q 互质) 的图象关于 y 轴对称, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 ()

A. p, q 均为奇数, 且 $\frac{p}{q} > 0$ B. q 为偶数, p 为奇数, 且 $\frac{p}{q} > 0$ C. q 为奇数, p 为偶数, 且 $\frac{p}{q} < 0$ D. q 为奇数, p 为偶数, 且 $\frac{p}{q} < 0$

3.2 二次函数

对于二次函数: $f(x) = ax^2 + bx + c$

1. 对称轴:

$$x = -\frac{b}{2a} \quad (3.2)$$

2. 零点公式:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.3)$$

3. 判别式:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (3.4)$$

4. 韦达定理:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (3.5)$$

例 3.3 【2024 全国高三专题练习】设 a 为实数，若方程 $x^2 - 2ax + a = 0$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-1, 0)$
C. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ D. $\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup (1, +\infty)$

例 3.4 【2024 全国高三专题练习】方程 $x^2 + (m-2)x + 5-m = 0$ 的一根在区间 $(2, 3)$ 内，另一根在区间 $(3, 4)$ 内，则 m 的取值范围是 ()

- A. $(-5, -4)$ B. $\left(-\frac{13}{3}, -2\right)$
C. $\left(-\frac{13}{3}, -4\right)$ D. $(-5, -2)$

例 3.5 【2024 全国高三专题练习】关于 x 的方程 $ax^2 + (a+2)x + 9a = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ，且 $x_1 < 1 < x_2$ ，那么 a 的取值范围是 ()

- A. $-\frac{2}{7} < a < \frac{2}{5}$ B. $a > \frac{2}{5}$
C. $a < -\frac{2}{7}$ D. $-\frac{2}{11} < a < 0$

例 3.6 【2024 上海高三专题练习】已知 $f(x) = ax^2 + 2bx + 4c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)。

(1) 若 $f(0) = -1, a + 2b = 0$ ，解关于 x 的不等式 $f(x) < (a+1)x - 3$ 。

(2) 若 $a + c = 0, f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值为 $\frac{2}{3}$ ，最小值为 $-\frac{1}{2}$ ，求证： $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 2$ 。

3.3 指数函数与对数函数

指数运算

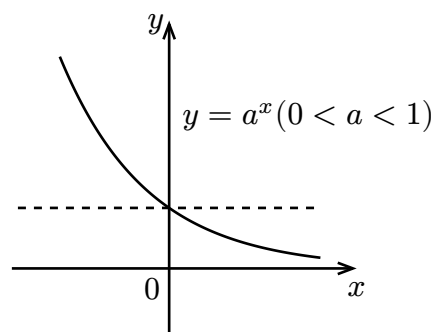
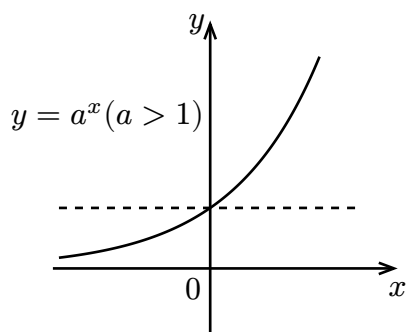
$$\begin{aligned} a^x \cdot a^y &= a^{x+y}, & \frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y}, & (a^x)^y &= a^{xy} \\ a^{-x} &= \frac{1}{a^x}, & a^{\frac{1}{x}} &= \sqrt[x]{a}, & (ab)^x &= a^x b^x \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.3.1 指数函数

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1) \quad (3.7)$$

1. 定义域 \mathbb{R} ，值域 $(0, +\infty)$
2. 图像过点 $(0, 1)$
3. $a > 1$ 单调递增； $0 < a < 1$ 单调递减
4. $y = a^x$ 与 $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 图像关于 y 轴对称

5. $f(x)f(-x) = 1$



思考 3.1

为什么 a 不能小于 0?

对数运算

$$\begin{aligned} \log_a m + \log_a n &= \log_a(mn), & \log_a m - \log_a n &= \log_a\left(\frac{m}{n}\right) \\ n \log_a m &= \log_a m^n, & \frac{1}{n} \log_a m &= \log_{a^n} m \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$-\log_a m = \log_{\frac{1}{a}} m = \log_{\frac{1}{a^n}} m$$

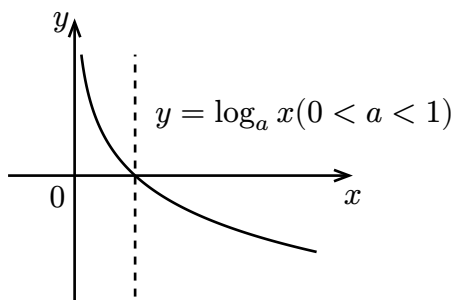
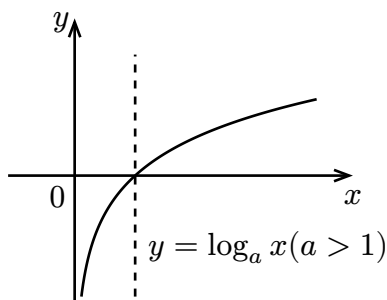
换底公式

$$\begin{aligned} \log_a b &= \frac{\log_c b}{\log_c a} \\ \log_n m &= \frac{1}{\log_m n} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3.2 对数函数

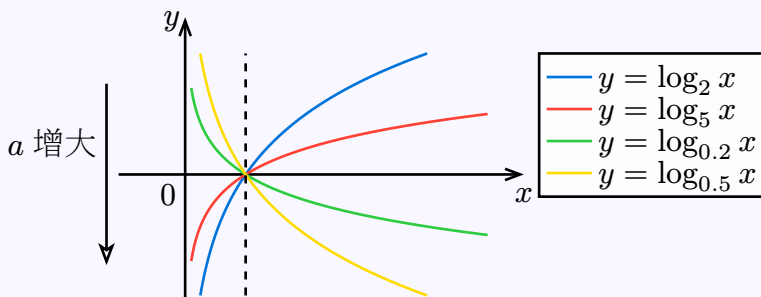
$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1) \quad (3.10)$$

1. 定义域 $(0, +\infty)$, 值域 \mathbb{R}
2. 图像过点 $(1, 0)$
3. $a > 1$ 单调递增; $0 < a < 1$ 单调递减
4. $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 图像关于 x 轴对称



扩展 3.1

1. a 与图像陡峭程度的关系。



2. 常见对数值

$$\ln 2 \approx 0.693, \quad \ln 3 \approx 1.098, \quad \ln 5 \approx 1.609$$

$$\log_{10} 2 \approx 0.301, \quad \log_{10} 3 \approx 0.477$$

(3.11)

例 3.7 【2024 全国高三专题练习】已知 x_1 是方程 $x \cdot 3^x = 2$ 的根, x_2 是方程 $x \cdot \log_3 x = 2$ 的根, 则 $x_1 x_2$ 的值为 ()

A. 2

B. 3

C. 6

D. 10

例 3.8 【2024 全国高三专题练习】若 x_1 满足 $e^x = 3 - x$, x_2 满足 $x + \log_2 x = 3$, 令 $a + b = x_1 + x_2$, 其中 $a, b > 0$, 则 $\frac{7b^2 + 1}{ab}$ 的最小值为 ()

A. 1

B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{67}{9}$

D. 2

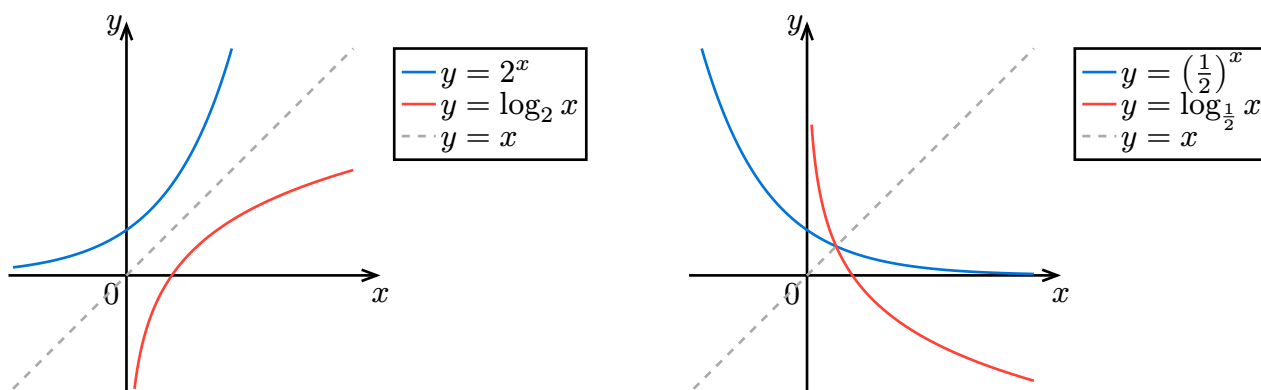
3.4 反函数

原函数 $y = f(x)$ 的反函数为 $x = f^{-1}(y)$, 通常记为 $y = f^{-1}(x)$ 。

1. **条件:** 原函数为一一映射。

2. **特点:** 定义域和值域互换; 图像关于 $y = x$ 对称。

举例: 指数函数 $y = a^x$ 的反函数为对数函数 $y = \log_a x$ 。



3.5 特殊函数

指对中的奇/偶函数:

1. $f(x) = \frac{a^x - 1}{a^x + 1} (a > 0)$ (奇函数)
2. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ (奇函数)
3. $f(x) = \ln\left(\frac{a - x}{a + x}\right) (a > 0)$ (奇函数)
4. $f(x) = \ln(e^{2ax} + 1) - ax (a > 0)$ (偶函数)

指对中的对称函数

1. $f(x) = \frac{a^x}{a^x + 1} (a > 0)$

第四章 函数的对称、平移和缩放

内容提要

□ 对称性

□ 平移

□ 缩放

□ 探究

4.1 对称性

点对称： 函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称，则有

$$f(a-x) + f(a+x) = 2b \quad (4.1)$$

或

$$f(m-x) + f(n+x) = 2b \quad (4.2)$$

其中 $m+n=2a$ 。

轴对称： 函数 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称

$$f(a-x) = f(a+x) \quad (4.3)$$

或

$$f(m-x) = f(n+x) \quad (4.4)$$

其中 $m+n=2a$ 。

思考 4.1

1. 为什么没有 $f(x)$ 关于直线 $y=a$ 对称的情况？
2. 对称性与周期性的特点有什么不同？
3. 寻找下列函数的中心对称点：

$$(1) f(x) = \frac{3^x}{3^x + 1}$$

$$(2) f(x) = \frac{2-x}{2+x}$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{x-1}$$

例 4.1 已知二次函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 满足 $f(3-x) = f(x)$ ，若其在 $(a, 2a-1)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是 ()

A. $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$

B. $\left(1, \frac{5}{4}\right]$

C. $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

D. $(-\infty, 2]$

例 4.2 【2021 江苏无锡大桥中学高一期中】若函数 $f(x) = \frac{x}{x+1}$, 则 $f(1) + f(2) + \dots + f(50) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{50}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

例 4.3 【2023-2024 安徽省部分学校高一上期末】已知函数 $f(x) = \frac{2}{1+3^x}$, 则 $f(-2024) + \dots + f(-1) + f(0) + f(1) + \dots + f(2024)$ 的值为 ()

- A. 4047 B. 4048 C. 4049 D. 4050

笔记 二次对称周期

1. 若 $f(x)$ 有两条对称轴 $x = a, x = b$, 则 $T = 2|b - a|$ 。
2. 若 $f(x)$ 有两个对称中心 $(a, c), (b, c)$, 则 $T = 2|b - a|$ 。
3. 若 $f(x)$ 有一条对称轴 $x = a$ 和一个对称中心 (b, c) , 则 $T = 4|b - a|$ 。

例 4.4 【广东省广州市三校 2023-2024 高一上期末联考】已知奇函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2^x + b$, 则 $f\left(\frac{2023}{2}\right)$ 的值为 ()

- A. $-1 - \sqrt{2}$ B. $1 - \sqrt{2}$
C. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{2} - 1$

例 4.5 【广东省佛山市 2023-2024 高一上期末】(多选) 已知函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都存在 $f(-x) = -f(x)$, $f\left(\frac{1}{2} - x\right) = f\left(\frac{3}{2} + x\right)$, 且 $f(1) = 2$, 则 ()

- A. $y = f(x)$ 关于 $(1, 0)$ 对称 B. $f(4 - x) = -f(x)$
C. $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$ D. $\sum_{k=0}^{19} f(k) = 0$

4.2 平移与缩放

平移变换

1. x 轴平移《左加右减》

探究: $f(x) = x^2$ 与 $f(x) = (x - 1)^2$ 的位置关系。

- (a). $f(x)$ 向左平移 a 个单位得到 $f(x + a)$ 的图像 ($a > 0$)。
(b). $f(x)$ 向右平移 a 个单位得到 $f(x - a)$ 的图像 ($a > 0$)。

2. y 轴平移《下加上减》

探究: $f(x) = x^2$ 与 $f(x) + 2$ 的位置关系。

- (a). $f(x)$ 向上平移 a 个单位得到 $f(x) + a$ 的图像 ($a > 0$)。
(b). $f(x)$ 向下平移 a 个单位得到 $f(x) - a$ 的图像 ($a > 0$)。

缩放变换

1. x 轴缩放《扩除缩乘》

探究: $f(x) = x^2 - 1$ 与 $f(x) = (2x)^2 - 1$ 的位置关系。

- (a). $f(x)$ 所有横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{a}$ 倍, 得到 $f(ax)$ 的图像 ($a > 1$)。
 (b). $f(x)$ 所有横坐标扩大为原来的 a 倍, 得到 $f\left(\frac{x}{a}\right)$ 的图像 ($a > 1$)。

2. y 轴缩放《扩除缩乘》

探究: $f(x) = x^2 - 1$ 与 $f(x) = 2(x^2 - 1)$ 的位置关系。

- (a). $f(x)$ 所有纵坐标扩大为原来的 a 倍, 得到 $af(x)$ 的图像 ($a > 1$)。
 (b). $f(x)$ 所有纵坐标缩小为原来的 $\frac{1}{a}$ 倍, 得到 $\frac{1}{a}f(x)$ 的图像 ($a > 1$)。

思考 4.2

1. 下列情况中, $g(x)$ 的图像可以由 $f(x)$ 经过哪些变换得到?

- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3\sqrt{2x+1}$
- $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 3$

2. 如何将 $f(x)$ 变换得到 $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$?

- (a). 方式一: 先向 _____ 平移 _____ 个单位, 然后将横坐标缩放为原来的 _____。
 (b). 方式二: 先将横坐标缩放为原来的 _____, 然后向 _____ 平移 _____ 个单位。
 (c). 两种方式的不同之处在于?

3. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ 的图像由哪个基础函数变换得到?

例 4.6 【2023 丰台二模, 7】为了得到函数 $y = \log_2(2x - 2)$ 的图象, 只需把函数 $y = \log_2 x$ 的图象上的所有点 ()

- A. 向左平移 2 个单位长度, 再向上平移 2 个单位长度
 B. 向右平移 2 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度
 C. 向左平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度
 D. 向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 1 个单位长度

例 4.7 【2019 海淀二模】把函数 $y = 2^x$ 的图象向右平移 t 个单位长度, 所得图象对应的函数解析式为 $y = \frac{2^x}{3}$, 则 a 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\log_2 3$

C. $\log_3 2$

D. $\sqrt{3}$

例 4.8 【2020 山东曲阜一中月考】函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(x+2)$ 的图像关于直线 $x = -2$ 对称。若 $f(-2) = 1$, 则 $f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是 _____。

例 4.9 【重庆市第八中学校 2023-2024 高一上期末】设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 当 $x \in [1, 2]$ 时, $f(x) = ax^2 + b$ 。若 $f(3) + f(4) = 6$, 则 $f\left(\frac{13}{3}\right)$ 的值为 ()

A. $-\frac{4}{3}$

B. $\frac{32}{9}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

例 4.10 【湖南长沙市长郡中学 2023-2024 高一上期末】(多选) 定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(4-x) = -f(x)$, $f(2x+1)$ 为偶函数, $f(1) = 2$ 。函数 $g(x) (x \in \mathbb{R})$ 满足 $g(x) = g(2-x)$, 若 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 恰有 2023 个交点, 从左至右依次为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{2023}, y_{2023})$, 则下列说法正确的是 ()

A. $f(x)$ 为奇函数B. 2 为 $y = f(x)$ 的一个周期C. $y_{1012} = 2$ D. $x_1 + x_2 + \dots + x_{2023} = 2023$

4.3 平移缩放探究

扩展反比例函数:

1. 基础形式:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (4.5)$$

2. 扩展形式:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (4.6)$$

对称中心?

扩展对勾函数:

1. 基础形式:

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \quad (4.7)$$

2. 扩展形式:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} \quad (4.8)$$

第五章 抽象函数

定义 5.1 抽象函数

只告诉了函数的关系式，而没有告诉具体的表达式。

处理方式

- 寻找已学过的函数模型进行匹配，探究其函数特征。
- 寻找特殊值带入（赋值法）。

常见模型

1. 一次函数： $f(x+y) = f(x) + f(y) + b$
2. 幂函数： $f(xy) = f(x)f(y)$
3. 指数函数： $f(x+y) = f(x)f(y)$
4. 对数函数： $f(xy) = f(x) + f(y)$
5. 周期函数： $f(x+a) + f(x) = k$

例 5.1 已知函数 $f(x)$ 满足 $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = f(x)f(y)$ ，且 $f(-1) = 1, f(27) = 9$ ，当 $x \in [0, 1)$ 时， $f(x) \in [0, 1)$ 。

- (1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性。
- (2) 判断 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性。
- (3) 若 $a \geq 0, f(a+1) \leq \sqrt[3]{9}$ ，求 a 的取值范围。

例 5.2 已知非常数函数 $f(x)$ 满足 $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$ 。求证： $f(x) > 0$ 。

例 5.3 定义在 $(0, +\infty)$ 的单调递增函数 $f(x)$ 满足 $\forall x, y \in (0, +\infty), f(xy) = f(x) + f(y), f(3) = 1$ 。

- (1) 求 $f(1)$ 。
- (2) 若 $f(x) + f(x-8) \leq 2$ ，求 x 的取值范围。

例 5.4 已知函数 $f(x)$ 满足 $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y), f(-1) = -2, x > 0$ 时， $f(x) > 0$ 。求 $f(x)$ 在 $[-2, 1]$ 上的值域？

例 5.5 【2022 全国新高考 II】已知 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} ，且 $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y), f(1) = 1$ ，则 $\sum_{k=1}^{22} f(k) =$ ()

A. -3

B. -2

C. 0

D. 1

例 5.6【安徽省蚌埠市 2024 学年高三上学期期末】已知定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x), g(x)$ 满足：

1. $f(0) = 1$;

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x-y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$ 。

(1) 求 $f^2(x) - g^2(x)$ 的值。

(2) 判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性。

(3) 若 $g(x)$ 为奇函数，且 $\forall x > 0, g(x) > 0$ ，证明： $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增。

思考 5.1

1. 满足 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) (\forall x, y \in \mathbb{R})$ 的 $f(x)$ 是偶函数吗？

例题答案

例 1.1

A

例 1.2

D

例 1.3

D

例 1.4

$[1, +\infty)$

例 1.5

$\left(0, \frac{2}{3}\right)$

例 1.6

(1) $[0, 2]$

(2) $[2, 4]$

(3) $(0, 5]$

例 1.7

(1) $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

(2) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

(3) $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

例 1.8

$$(1) \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$(2) (-\infty, -1]$$

$$(3) [-1, \sqrt{2}]$$

$$(4) [\sqrt{2}, 2]$$

例 1.9

$$(1) \left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$(2) \left\{y \mid y \neq 1, y \neq \frac{2}{5}\right\}$$

$$(3) \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{5}}{5}, +\infty\right)$$

例 1.10

$$(1) f(x) = x^2 + 7x + 6 (x \geq -2)$$

$$(2) f(x) = x^2 - 2x (x \neq 1)$$

例 1.11

$$(1) f(x) = -2x - \frac{1}{3}$$

$$(2) f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

$$(3) f(x) = x + 2$$

例 1.12

$$(1) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 1}{2x(x-1)}$$

例 2.1

略

例 2.2

AB

例 2.3

$\left(0, \frac{2}{3}\right)$

例 2.4

C

例 2.5

$\left(0, \frac{4}{3}\right]$

例 2.6

C

例 2.7

-2

例 2.8

C

例 2.9

C

例 2.10

B

例 2.11

D

例 2.12

D

例 2.13

B

例 2.14

(1) $T = 4$

(2) $\frac{13}{2}$

(3) $f(x) = \begin{cases} x - 4, & 4 \leq x \leq 6 \\ \frac{13}{x - 6}, & 6 < x \leq 8 \end{cases}$

例 2.15

A

例 2.16

A

例 2.17

D

例 2.18

32 $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right)$

例 3.1

A

例 3.2

D

例 3.3

C

例 3.4

C

例 3.5

D

例 3.6

(1) 若 $a = 0$, 解集为 $(2, +\infty)$;

若 $a < 0$, 解集为 $(2, +\infty) \cup \left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$;

若 $0 < a < \frac{1}{2}$, 解集为 $\left(2, \frac{1}{a}\right)$;

若 $a = \frac{1}{2}$, 解集为 \emptyset ;

若 $a > \frac{1}{2}$, 解集为 $\left(\frac{1}{a}, 2\right)$ 。

(2) 略

例 3.7

A

例 3.8

D

例 4.1

B

例 4.2

49.5

例 4.3

B

例 4.4

B

例 4.5

BD

例 4.6

D

例 4.7

B

例 4.8

[0, 4]

例 4.9

B

例 4.10

ACD

例 5.1

- (1) 偶函数
- (2) 单调递增
- (3) $[0, 2]$

例 5.2

略 (提示: 令 $x = y = \frac{x}{2}$, 得 $f(x) = f^2(\frac{x}{2}) \geq 0$, 再证 $f(x) \neq 0$)

例 5.3

- (1) 0
- (2) $(8, 9]$

例 5.4

$[-4, 2]$

例 5.5

A

例 5.6

- (1) 1

(2) 偶函数

(3) 略