第二章

一元二次函数和不等式

作者：zheliku

时间：2025-12-13
版本：1.0.0

目录

第一章 等式 **1**
1.1 不等式的基本性质 1
1.2 比较大小 1
1.3 高次不等式 2
1.4 分式不等式 2
第二章 一元二次函数 **4**
2.1 初中回顾 4
2.2 参数与图像的关系 5
例题答案 **7**

第一章 等式

内容提要

- ❑ 不等式的基本性质
- ❑ 比较大小
- ❑ 高次不等式
- ❑ 分式不等式

1.1 不等式的基本性质

性质	内容
对称性	$a>b \Longleftrightarrow b<a$
传递性	$a>b, b>c \Rightarrow a>c$
可加性	$a>b \Longleftrightarrow a+c>b+c$
可乘性	$a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$ $a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$
同向可加性	$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$
同向同正可乘性	$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$
可乘方性	$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$
可开方性	$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} (n \in \mathbb{N}^+, n \geq 2)$

例 1.1 已知 $a>b>0$，$c<d<0$，则下列不等式一定成立的是 ______

A. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　B. $ac<bd$　　C. $a-c>b-d$　　D. $a+c>b+d$

例 1.2 已知 $a>b, ab>0$，则 $\frac{1}{a}$ ______ $\frac{1}{b}$

例 1.3 (1) 已知 $1<a<4, 2<b<8$，求 $2a+3b$、$a-b$ 和 $\frac{a}{b}$ 的取值范围。

(2) 已知 $-6<a<8, 2<b<3$，求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围。

(3) 已知 $-1<a+b<5, -4<a-b<2$，求 $2a-4b$ 的取值范围。

1.2 比较大小

1. 作差法：$a-b>0 \Longleftrightarrow a>b$（常用）
2. 作商法：$\frac{a}{b}>1 \Longleftrightarrow a>b(b>0)$（需要确定分母的符号）

例 1.4 已知 $a>b>0$，比较 $\frac{2a+b}{a+2b}$ 与 1 的大小。

例 1.5 已知 $a > b > 0, m > 0$，则：

（1）$\frac{b}{a}$ ______ $\frac{b+m}{a+m}$

（2）$\frac{a}{b}$ ______ $\frac{a+m}{b+m}$

例 1.6 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$，比较 $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ 与 $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ 的大小。

例 1.7 已知 n 为正整数，则当 n 取多大时，$f(n) = -n^3 + 8n^2 + 4n + 3$ 取得最大值？

例 1.8 已知 n 为正整数，则当 n 取多大时，$f(n) = (n+1) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$ 取得最大值？

1.3 高次不等式

对于形如

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\cdots > 0 \tag{1.1}$$

的不等式：

1. 数形结合法：作出 $f(x)$ 的图像（穿根法）
2. 根据图像确定不等式的解集

例 1.9 解不等式：

$$(x+1)(2-x)(x-3) > 0 \tag{1.2}$$

笔记 对于多项式 $f(x)$，若 $f(n) = 0$，则 $x - n$ 是 $f(x)$ 的因式，即 $f(n) = (x-n) \cdot g(x)$

例 1.10 解不等式：

（1）$x^3 - 7x + 6 < 0$

（2）$x^3 - x^2 - 17x - 15 > 0$

1.4 分式不等式

对于 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 型：

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \iff f(x) \cdot g(x) > 0 \tag{1.3}$$

对于 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ 型：

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

例 1.11 解不等式：

$$\frac{x+2}{2x-1} \geq 0 \tag{1.5}$$

例 1.12 解不等式：

（1） $\dfrac{x^2+x-2}{4-x} < 0$

（2） $2+\dfrac{4}{x-1} > 0$

（3） $\dfrac{1}{x} \geq x$

第二章 一元二次函数

内容提要

- ❑ 初中回顾
- ❑ 参数与图像的关系

2.1 初中回顾

一元二次函数的一般形式：

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \tag{2.1}$$

1. 对称轴：

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{2.2}$$

2. 顶点坐标：

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \tag{2.3}$$

3. 判别式：
   - $\Delta > 0$：两个不相等的实数根
   - $\Delta = 0$：两个相等的实数根
   - $\Delta < 0$：无实数根
4. 与 x 轴的交点个数：
   - $\Delta > 0$：2 个交点
   - $\Delta = 0$：1 个交点
   - $\Delta < 0$：0 个交点
5. 单调性：
   - $a > 0$ 时:

     在 $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递增
   - $a < 0$ 时:

     在 $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上单调递减

例 2.1 【2023 海南新高考模拟】函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的部分函数值如下表所示：

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	6	0	-4	-6	-6

则函数 $f(x)$ 的零点个数为 ______。

例 2.2 【2023 浙江省高一联考】已知函数 $f(x)=x^2-2ax+3$，若 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为 ______。

例 2.3 【2022 天津滨海新区阶段考试】若不等式 $(a-2)x^2+4(a-2)x+3>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(2,\dfrac{11}{4}\right)$　　B. $\left[2,\dfrac{11}{4}\right)$

C. $(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{11}{4},+\infty\right)$　　D. $(-\infty,2]\cup\left(\dfrac{11}{4},+\infty\right)$

例 2.4 【2020 四川泸县上学期】已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(2,3)$，则关于 x 的不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 ______。

例 2.5 【2022 山东枣庄滕州期中】（多选）已知关于 x 的不等式 $(x+2)(x-4)+a<0$（$a<0$）的解集为 (x_1,x_2)，则（　　）

A. $x_1+x_2=2$　　B. $x_1x_2<-8$

C. $-2<x_1<x_2<4$　　D. $x_2-x_1>6$

例 2.6 【2017 湖北襄阳襄城区校级模拟】设 a,b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx+m+6=0$ 的两个实根，则 $(a-1)^2+(b-1)^2$ 的最小值为（　　）

A. $-\dfrac{49}{4}$　　B. 18

C. 8　　D. -6

2.2 参数与图像的关系

1. a 决定开口方向：
   - $a>0$：开口向上
   - $a<0$：开口向下
2. $|a|$ 决定开口大小：$|a|$ 越大，开口越小
3. c 决定与 y 轴的交点：$(0,c)$

例 2.7 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 有两个零点 x_1、x_2，且满足 $x_1<-2,x_2>0,0<|c|<1$，则（　　）

A. a 与 c 一定同号　　B. 若 $a>0$，则 $2a>b$

C. $2c(2a-b)+c^2<0$　　D. 若 $a=1$，则 $0<x_2<\dfrac{1}{2}$

思考 2.1

已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像，判断以下结论：

1. 对称轴在哪里？
2. a、b、c 如何影响图像的形状、位置？

例 2.8 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c(a > 0)$ 有两个零点 x_1、x_2，且满足 $-2 \le x_1 \le -1, 3 \le x_2 \le 5$，则下列说法不正确的是（　　）

A. $-4a \le b \le -a$

B. 若 $a = 1$，则 c 的取值范围是 $[-10, -3]$

C. $a + c \ge b$

D. 记 $f(x)$ 的最小值为 m，则 m 的最大值为 $-4a$

例 2.9 【2022 浙江五校联考】已知关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 3a < 0$ 在 $(0, 2]$ 上有解，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　B. $\left(-\infty, \dfrac{4}{7}\right)$

C. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$　　D. $\left(\dfrac{4}{7}, +\infty\right)$

例 2.10 【2020 黑龙江齐齐哈尔第八中学月考】已知关于 x 的不等式 $ax^2 - (a+1)x < -a + 13x$ 在区间 $[2, 3]$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围是 ______。

例题答案

例 1.1

C

例 1.2

$<$

例 1.3

(1) $\boldsymbol{2a+3b\in(8,32)}$，$\boldsymbol{a-b\in(-7,2)}$，$\boldsymbol{\frac{a}{b}\in\left(\frac{1}{8},2\right)}$

(2) $\boldsymbol{\frac{a}{b}\in(-3,4)}$

(3) $\boldsymbol{2a-4b\in(-17,7)}$

例 1.4

解：

$$\frac{2a+b}{a+2b}-1=\frac{2a+b-a-2b}{a+2b}=\frac{a-b}{a+2b} \tag{2.4}$$

因为 $a>b>0$，所以 $a-b>0, a+2b>0$，

故 $\frac{a-b}{a+2b}>0$，即 $\frac{2a+b}{a+2b}>1$。

例 1.5

(1) $<$

(2) $>$

例 1.6

解：

$$\begin{aligned}\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}-\frac{a^2+b^2}{a+b}&=\frac{(a^3+b^3)(a+b)-(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)(a+b)}\\&=\frac{a^4+a^3b+ab^3+b^4-a^4-2a^2b^2-b^4}{(a^2+b^2)(a+b)}\\&=\frac{a^3b+ab^3-2a^2b^2}{(a^2+b^2)(a+b)}\\&=\frac{ab(a^2+b^2-2ab)}{(a^2+b^2)(a+b)}\\&=\frac{ab(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)}\end{aligned}\tag{2.5}$$

因为 $a,b\in\mathbb{R}^+$，所以 $ab>0,(a-b)^2\geq 0,a^2+b^2>0,a+b>0$，

故 $\dfrac{ab(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)}\geq 0$，

即 $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\geq\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$。

例 1.7

$n=6$ 时取得最大值

解析：考虑相邻两项的差：

$$\begin{aligned}f(n+1)-f(n)&=-(n+1)^3+8(n+1)^2+4(n+1)+3-(-n^3+8n^2+4n+3)\\&=-(n^3+3n^2+3n+1)+8(n^2+2n+1)+4n+4+3-\\&\quad(-n^3+8n^2+4n+3)\\&=-n^3-3n^2-3n-1+8n^2+16n+8+4n+7+n^3-8n^2-4n\\&\quad-3\\&=-3n^2+13n+11\end{aligned}\tag{2.6}$$

令

$$f(n+1)-f(n)=-3n^2+13n+11\leq 0\tag{2.7}$$

解这个不等式：

$$n=\frac{13\pm\sqrt{169+132}}{6}=\frac{13\pm\sqrt{301}}{6}\tag{2.8}$$

因为 $\sqrt{301}\approx 17.35$，所以 $n\approx\dfrac{13\pm 17.35}{6}$

解得 $n \in \left[\frac{-4.35}{6}, \frac{30.35}{6}\right] \approx [-0.73, 5.06]$

因为 n 为正整数，所以 $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 时 $f(n+1) > f(n)$，

当 $n \geq 6$ 时 $f(n+1) < f(n)$。

因此 $n = 6$ 时取得最大值：

$$f(6) = -216 + 288 + 24 + 3 = 99 \tag{2.9}$$

例 1.8

$n = 8$ 或 9 时取得最大值

解析：考虑相邻两项的比值：

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{(n+2)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{(n+1)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{n}} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{9}{10} = \frac{9(n+2)}{10(n+1)} \tag{2.10}$$

令 $\frac{f(n+1)}{f(n)} \geq 1$：

$$\frac{9(n+2)}{10(n+1)} \geq 1 \tag{2.11}$$

$$9(n+2) \geq 10(n+1) \tag{2.12}$$

$$9n + 18 \geq 10n + 10 \tag{2.13}$$

$$n \leq 8 \tag{2.14}$$

因此，当 $n \leq 8$ 时，$f(n+1) \geq f(n)$，函数递增；且 当 $n = 8$ 时，$f(n+1) = f(n)$。

当 $n > 9$ 时，$f(n+1) < f(n)$，函数递减。

所以 $n = 8$ 或 9 时取得最大值。

例 1.9

解：原不等式等价于

$$(x+1)(x-2)(x-3) < 0 \tag{2.15}$$

令 $f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$，

根的排列为：$-1 < 2 < 3$

使用穿根法，从右向左穿根，得解集为：

$$x \in (-1, 2) \cup (3, +\infty) \tag{2.16}$$

例 1.10

（1） $\boldsymbol{x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)}$

（2） $\boldsymbol{x \in (-3, -1) \cup (5, +\infty)}$

例 1.11

$\boldsymbol{x \in (-\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}$

解：原不等式等价于

$$\begin{cases} (x+2)(2x-1) \geq 0 \\ 2x - 1 \neq 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

解得：$x \in (-\infty, -2] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

例 1.12

（1） $\boldsymbol{x \in (-2, 1) \cup (4, +\infty)}$

（2） $\boldsymbol{x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$

（3） $\boldsymbol{x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1]}$

例 2.1

2

解析：从表格可以看出：

1. $f(-2) = 0$，所以 $x = -2$ 是一个零点
2. $f(-3) = 6 > 0, f(-1) = -4 < 0$，由零点存在定理，在 $(-3, -1)$ 内还有一个零点
3. $f(0) = -6 < 0, f(1) = -6 < 0$，无法判断 $(0, 1)$ 内是否有零点

但由于二次函数最多有 2 个零点，且已经找到 2 个，故零点个数为 2。

例 2.2

$\boldsymbol{a \leq 1}$

解析：二次函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 3$ 的对称轴为 $x = a$。

要使 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增，需要对称轴在区间左侧或左端点，即 $a \leq 1$

例 2.3

B

例 2.4

$$\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

例 2.5

A、B、D

例 2.6

C

例 2.7

D

例 2.8

C

例 2.9

A

例 2.10

$(-\infty, 6)$