VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
INFORMATIKOS INSTITUTAS
INFORMATIKOS KATEDRA

Laboratorinis darbas

Priverstiniai svyravimai

Atliko: 3 kurso 2 grupės studentė
Gabrielė Rinkevičiūtė

Vilnius
2024

Turinys

1. Užduoties sąlyga

Šio laboratorinio užduotis - išspręsti žemiau pateiktą Koši uždavinį (1 lygčių sistema) analitiškai bei naudojant kompiuterinė programą. Gavus sprendinį, ištirti jo savybes, kai $t \to +\infty$, nurodyti amplitudę bei periodą.

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = 10\sin(3t) - 10\cos(3t), \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Koši uždavinio programatiškam sprendimui buvo naudojama MATLAB programavimo kalba bei „Symbolic Math Toolbox“ bibliotekos įrankiai.

2. Uždavinio analitinis sprendimas

Uždavinio sprendimas pradedamas tuo, kad yra randamas diferencialinės lygties bendrasis sprendinys. Šiuo atveju turime pradinę lygtį

$$x''(t) + x(t) = 10\sin(3t) - 10\cos(3t). \tag{2}$$

Matome, kad tai yra antrosios eilės tiesinė diferencialinė lygtis su pastoviaisiais kintamaisiais. Vienas būdas išspręsti tokią lygtį yra naudojant neapibrėžtųjų koeficientų metodą. Tokiu atveju šios lygties sprendinys yra užrašomas forma

$$x(t) = x_h(t) + x_a(t), \tag{3}$$

kur $x_h(t)$ yra homogeninės lygties sprendinys, o $x_a(t)$ yra atskirasis sprendinys, sukonstruotas naudojant neapibrėžtųjų koeficientų metodo lentelę.

2.1. Homogeninės lygties sprendinio paieška

Diferencialinės lygties bendrojo sprendinio paieškos pradedamos tuo, kad yra randamas homogeninės lygties sprendinys $x_h(t)$. Tam yra susidaroma antrosios eilės diferencialinė homogeninė lygtis - kairioji lygties pusė yra prilyginama 0:

$$x''(t) + x(t) = 0. \tag{4}$$

Gautos homogeninės lygties sprendiniai yra ieškomi susidarant jos charakteringąją lygtį. Šiuo atveju ši lygtis bei jos sprendiniai atrodo taip:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Kadangi gautos charakteringosios šaknys priklauso kompleksinių skaičių aibei, tai homogeninės lygties (4 lygtis) sprendinys yra

$$x_h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.2. Atskirojo sprendinio paieška

Suradus homogeninės lygties sprendinį, sprendimas yra tęsiamas ieškant atskirojo sprendinio $x_a(t)$. Tam pradžioj reikia atkreipti dėmesį į dešiniąją lygties pusę ir pagal neapibrėžtųjų koeficiento metodo taisykles sukonstruoti atskirąjį sprendinį su nežinomom realiom konstantom.

Šiuo atveju matome, kad dešinioji lygties pusė susideda iš dviejų trigonometrinių narių skirtumo, taigi pritaikius neapibrėžtųjų koeficientų metodo sumos ir pagrindinę taisykles gauname, kad bendrasis sprendinys yra užrašomas pavidalu

$$x_a(t) = M\cos(3t) + N\sin(3t). \tag{5}$$

Čia svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad modifikavimo taisyklė nėra naudojama, ne nei vienas iš pradinės lygties dešiniosios pusės narių nėra lygus gautoms homogeninės lygties šaknims.

Toliau yra ieškomi nežinomi koeficientai M ir N. Pradedama tuo, kad yra surandamos pirmosios ir antrosios eilės išvestinės:

$$x_a'(t) = -3M\sin(3t) + 3N\cos(3t)$$

$$x_a''(t) = -9M\cos(3t) - 9N\sin(3t)$$

Vėliau, gauti reiškiniai yra įstatomi į pradinę diferencialinę lygtį (2 lygtis). Atlikus šį veiksmą, šiuo atveju gauname lygtį

$$-8M\cos(3t) - 8N\sin(3t) = 10\sin(3t) - 10\cos(3t)$$

Sulyginę koeficientus prie vienodų trigonometrinių yra sudaroma lygčių sistema, kurią išsprendus gaunami koeficientai M ir N.

$$\begin{cases} -8M = 10 \\ -8N = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M = \frac{5}{4} \\ N = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Įsistačius šias reikšmes į 5 formulę, gauname, kad atskirasis sprendinys $x_a(t)$ yra

$$x_a(t) = \frac{5}{4}\cos(3t) - \frac{5}{4}\sin(3t). \tag{6}$$

2.3. Bendrasis sprendinys

Suradus homogeninės lygties sprendinį bei atskirąjį sprendinį yra sugrįžtama prie pradinės diferencialinės lygties (2 lygtis) sprendinio išraiškos (3 reiškinys). Įsistačius gautus $x_h(t)$ bei $x_a(t)$, gaunama, kad bendrasis pradinės diferencialinės lygties sprendinys yra

$$x(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + \frac{5}{4}\cos(3t) - \frac{5}{4}\sin(3t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

2.4. Koši sąlygų taikymas

Ties bendrojo sprendinio radimu užduoties sprendimas nesibaigia, kadangi sąlyga prašo išspręsti Koši uždavinį, o vadinasi reikia pritaikyti 1 lygčių sistemoje duotas pradines sąlygas. Tačiau prieš jas taikant, yra susirandama bendrojo sprendinio išvestinė

$$x'(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) - \frac{15}{4} \sin(3t) - \frac{15}{4} \cos(3t).$$

Radus bendrojo sprendinio išvestinę, galima atsižvelgti ir į pradines sąlygas. Šiuo atveju yra gaunama lygčių sistema, kurią išsprendus yra gaunami koeficientai c_1, c_2

$$\begin{cases} c_1 + \frac{5}{4} = 0, \\ c_2 - \frac{15}{4} = 1 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{5}{4}, \\ c_2 = \frac{19}{4} \end{cases} \tag{9}$$

Įsistačius gautus koeficientus į pradinę diferencialinę lygtį (2), gaunamas atskirasis sprendinys

$$x(t) = -\frac{5}{4} \cos(t) + \frac{19}{4} \sin(t) + \frac{5}{4} \cos(3t) - \frac{5}{4} \sin(3t) \tag{10}$$

3. Sprendinys, gautas su MATLAB

Pateiktą Koši uždavinį išsprendus naudojant MATLAB programavimo kalbą ir „Symbolic Math Toolbox“ bibliotekos įrankius, yra gaunamas atskirasis sprendinys

$$x(t) = 6\sin(t) - 5\cos(t) + 5\cos^3(t) - 5\cos^2(t)\sin(t).$$

Iš pirmos pažiūros šis sprendinys nėra artimas, tačiau pasinaudojus trigonometrinių funkcijų trigubo kampo savybėmis

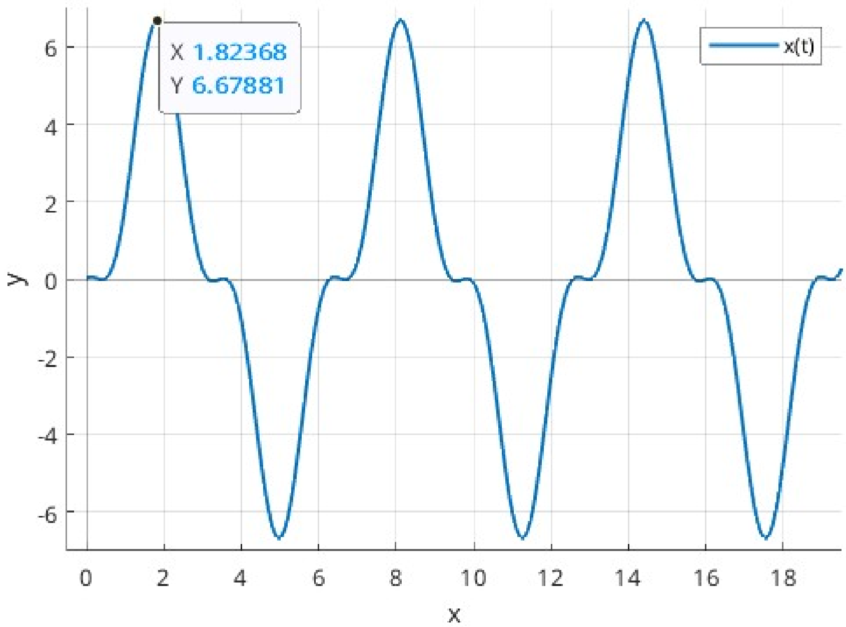
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

gauname, kad sprendinys, gautas naudojant MATLAB programavimo kalbą, yra ekvivalentus sprendiniui, gautam sprendžiant uždavinį analitiškai.

3.1. Sprendinio analizė

Naudojant MATLAB programavimo kalbos funkcijas, skirtas grafikams brėžti, buvo gautas žemiau pateiktas vaizdas, iliustruojantis Koši uždavinio sprendinį (1 pav.).



1 pav. Atskirojo sprendinio $x(t)$ grafinis atvaizdavimas.

Tiek pažvelgus į gauto atskirojo sprendinio formulę (10 formulė), tiek atkreipus dėmesį į paveikslėlį, galima pastebėti, jog šis svyravimas yra periodinis.

Nagrinėjant šio svyravimo savybes, kai $t \to +\infty$, iš formulės matome, kad nėra narių, kurie lemtų amplitudės mažėjimą. Be to, atsižvelgus ir į pradinę formulę (2 formulė), matoma, kad šiuo atveju aplinkos pasipriešinimas yra lygus 0, taigi nėra jėgos, kuri lemtų svyravimo silpnėjimą.

1 paveikslėlyje pažymėtas taškas yra apytiksli didžiausia funkcijos įgyjama reikšmė. Kadangi amplitudė yra dydis, nusakantis didžiausią funkcijos nukrypimą nuo 0, o gauta funkcija nuo jo nukrypsta vienodai į abi puses, galima laikyti, kad apytiksli gauto sprendinio amplitudė yra pažymėto taško Y koordinatės reikšmė, t.y. $A \approx 6.67881$.

Kalbant apie gauto sprendinio periodą T, iš gautos 10 formulės, matome, kad ją sudaro sinusai ir kosinusai. Žinoma, kad $\cos t$ ir $\sin t$ periodas yra 2π, tuo tarpu, kai $\cos 3t$ ir $\sin 3t$ narių periodas yra $\frac{2}{3}\pi$. Visos gautos funkcijos periodas yra šių narių periodų didžiausias bendrasis kartotinis, kuris šiuo atveju yra 2π. Tuo, kad gauto atskirojo sprendinio $x(t)$ periodas yra $T = 2\pi$ galima įsitikinti ir pažvelgus į 1 paveikslėlį.

4. Priedai

4.1. „solution.m“

```
%% clearing old values, closing figures
clc, clear, close all
addpath('../utils');

%% defining variables, equations
syms x(t) t

equation = diff(x, t, 2) + x == 10*sin(3*t) - 10*cos(3*t);

%% searching generic solution
generic_solution = dsolve(equation);
generic_solution = simplify(generic_solution);

disp("Generic solution: ");
disp(generic_solution);

%% solving Cauchy problem
cond1 = x(0) == 0;
Dx = diff(x, t);
cond2 = Dx(0) == 1;
conditions = [cond1, cond2];

cauchy_solution = dsolve(equation, conditions);
cauchy_solution = simplify(cauchy_solution);

disp("Cauchy solution: ");
disp(cauchy_solution);

%% plotting the answer
figure(1);
plot_prep([-10, 10], [-7, 7]);

hold on;

graph = fplot(cauchy_solution);
graph.DisplayName = "x(t)";
```

```
graph.LineStyle = '-';
graph.LineWidth = 1.5;

hold off;
```

4.2. „plot_prep.m“

```
function plot_prep(x_limits, y_limits)
    hold on;
    axis equal;

    xline(0, 'HandleVisibility', 'off');
    yline(0, 'HandleVisibility', 'off');

    xlim(x_limits);
    ylim(y_limits);

    xlabel('x');
    ylabel('y');

    grid on;
    legend();

    hold off;
end
```