

数值积分——复化 Simpson 求积公式

湘潭大学, 数学与计算科学学院, 21 级王艺博

一、复化 Simpson 求积公式

Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

把积分区间 $[a, b]$ 进行 $2m$ (偶) 等分, 记 $n = 2m$, 其中 $n+1$ 是节点总数, m 是积分子区间的总数.

步长 $h = \frac{b-a}{n}$, 节点 $x_k = a + kh, (k = 0, 1, 2, \dots, n)$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx$$

在 $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ 上用 Simpson 公式

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})]$$

累加得复化 Simpson 求积公式

$$S_n(f) \approx \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + f(b) \right]$$

二、算法

♡ 复化 Simpson 积分: $S = \text{复化Simpson_v1}(a, b, n, f)$

1. 输入

- $[a, b]$
- n : 将 $[a, b]$ n 等分, 要求 n 为偶数
- f : 已经定义好的函数, 支持向量运算

2. 实现过程

- 判断 n 是否是偶数, 若不是, $+1$ 变为偶数
- $m = n/2$;
- 计算出 $[a, b]$ n 等分后得到的 $n + 1$ 个节点, 构成向量 x_0
- $y_0 = f(x_0)$

$$\text{sumy1} = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1})$$

$$\text{sumy2} = \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})$$

$$S = \frac{h}{3} [f(a) + 4 * \text{sumy1} + 2 * \text{sumy2} + f(b)]$$

3. 输出 S

三、北太天元源程序

```
function S = 复化Simpson_v1(a,b,n,f)
% [a,b]
% n : 小区间的个数, 要求是偶数
% f: 定义好的函数
    if mod(n,2) ~= 0 % 判断n是否为偶数, 如果不是, 使其变为偶数
        n = n+1;
    end
    h = (b-a)/n;
    k = 0:1:n;
    xi = a + k * h;
    yi = f(xi);
    m = n/2;
    i1 = 0:1:m-1;
        sumy1 = sum(yi(2*i1+1 +1)); % f(x_{2i+1})求和
    i2 = 1:1:m-1;
        sumy2 = sum(yi(2*i2 +1)); % f(x_{2i})求和
    S = (yi(1) + 4*sumy1 + 2*sumy2 + yi(n+1)) * h/3;
end
```

将上述代码保存为 复化Simpson_v1.m 文件。

四、数值算例

例 1 用数值积分法近似计算

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

编写复化 *Simpson* 公式的实现程序，分别取剖分段数 $n = 10, 20, 40, 80, 160$ ，计算积分值与 π 的误差并作图；

例子

```
% 复化Simpson求积例子
clc;clear all;format long;
f = @(x) 4./(1+x.^2);

N = [10 20 40 80 160];
delta = zeros(1,5);
k = 1;
for n = N
    S = 复化Simpson_v1(0,1,n,f);
    delta(k) = abs(pi - S);
    k++;
end
plot(N,delta,'b');
disp(delta);
```

将上述代码保存为 复化Simpson例子.m

运行后得到 积分值与 π 的误差

```
列 1 -- 3
0.000000039650578    0.000000000620008    0.000000000009688
列 3 -- 5
0.0000000000000151    0.0000000000000002
```

从图像可知，复化 Simpson 收敛速度更快

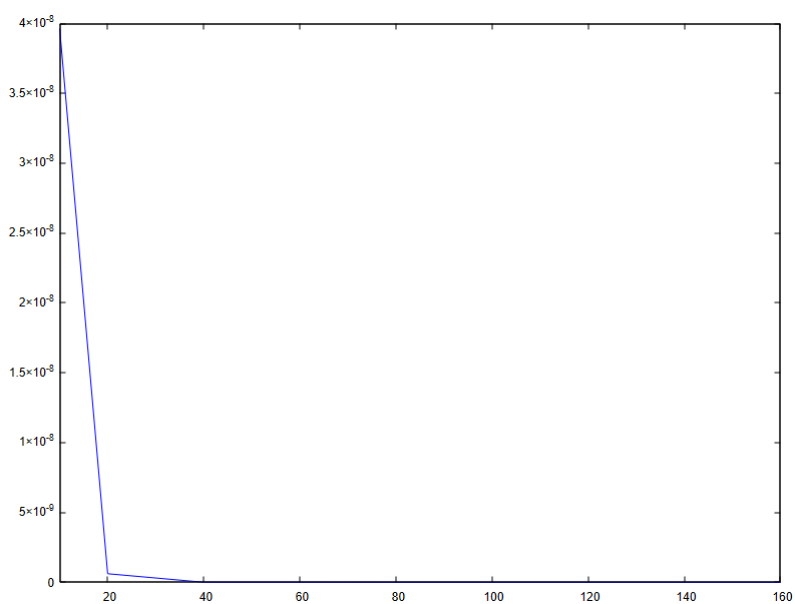


图 1 复化 Simpson 求积公式下积分值与 π 的误差随 n 的变化

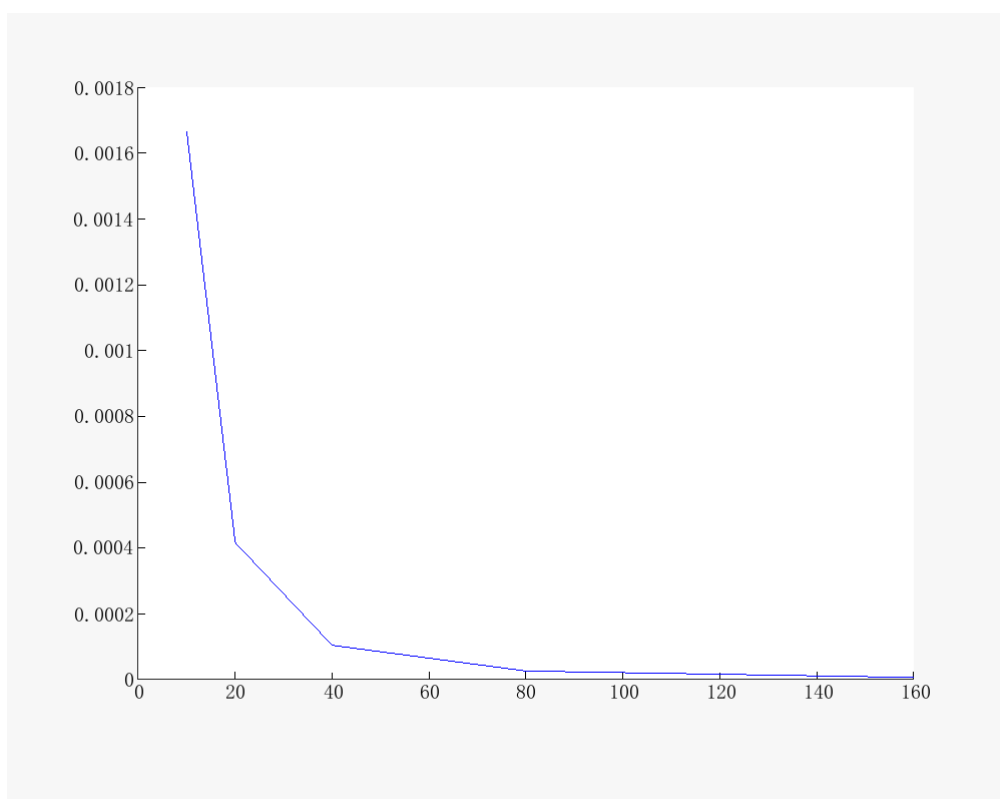


图 2 复化梯形求积公式下积分值与 π 的误差随 n 的变化

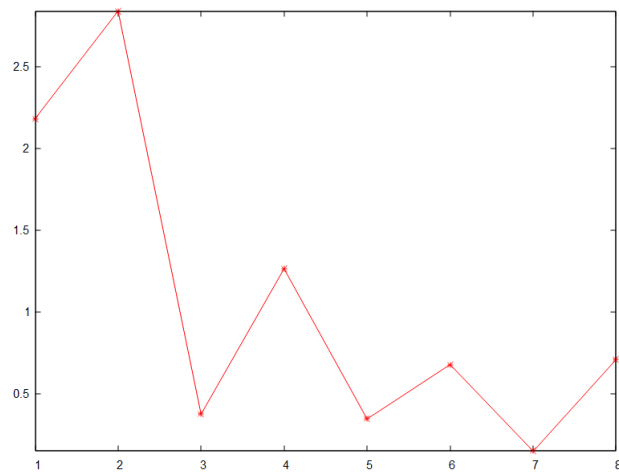


图 3 Newton—Cotes 公式下的一个图像参照