

数值积分——Newton-Cotes 求积公式

湘潭大学, 数学与计算科学学院, 21 级王艺博

一、Newton-Cotes 求积公式

对 $[a, b]$ 的 n 等分点 $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n$
 n 阶 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} f(x_k)$$

Cotes 系数, 令 $x = a + th$

$$C_k^{(n)} = \frac{1}{n} \int_0^n \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{t-i}{k-i} \right) dt = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (t-i) dt$$

表 1 Cotes 系数

| n | $C_k^{(n)}$ | | | | | | | | |
|-----|---------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | | | | | |
| 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | | | | | | |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | | | | | |
| 4 | $\frac{7}{90}$ | $\frac{32}{90}$ | $\frac{2}{90}$ | $\frac{32}{90}$ | $\frac{7}{90}$ | | | | |
| 5 | $\frac{19}{228}$ | $\frac{75}{228}$ | $\frac{50}{228}$ | $\frac{50}{228}$ | $\frac{75}{228}$ | $\frac{19}{228}$ | | | |
| 6 | $\frac{41}{840}$ | $\frac{216}{840}$ | $\frac{27}{840}$ | $\frac{272}{840}$ | $\frac{27}{840}$ | $\frac{216}{840}$ | $\frac{41}{840}$ | | |
| 7 | $\frac{751}{17280}$ | $\frac{3577}{17280}$ | $\frac{1323}{17280}$ | $\frac{2989}{17280}$ | $\frac{2989}{17280}$ | $\frac{1323}{17280}$ | $\frac{3577}{17280}$ | $\frac{751}{17280}$ | |
| 8 | $\frac{989}{28350}$ | $\frac{5888}{28350}$ | $-\frac{928}{28350}$ | $\frac{10496}{28350}$ | $-\frac{4540}{28350}$ | $\frac{10496}{28350}$ | $-\frac{928}{28350}$ | $\frac{5888}{28350}$ | $\frac{989}{28350}$ |
| ... | | | | | ... | | | | |

$n=1$ 时, 代入 Cotes 系数得到梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)).$$

n=2 时, 代入 Cotes 系数得到 Simpson 公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

n=4 时, 代入 Cotes 系数得到四阶 Newton-Cotes 公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)).$$

二、算法

♡ Newton-Cotes 求积公式: [NC] = ncotes_integral(a,b,n,f)

1. 输入

- [a, b]
- n: 将 [a,b] n 等分
- f: 已经定义好的函数, 支持向量运算

2. 实现步骤

- 通过 [a,b]n 等分获得 n+1 个横坐标构成的 x0 向量
- y0 = f(x0);
- n 确定 Newton-Cotes 求积公式的阶数, 和所要用到的 Cotes 系数
- 代入

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} f(x_k) = NC$$

3. 输出

- NC: 通过 Newton-Cotes 公式得到的积分近似值

三、北太天元源程序

```
function [NC] = ncotes_integral(a,b,n,f)
% Newton-Cotes 求积公式
% [a,b] 的 n 等分
% f: 提前定义好的函数,要求支持向量运算
% n 不超过 8
% linspace 可以把 [a,b] 等分成 n 个点, n-1 个区间
%
% Version:      1.0
% last modified: 07/06/2023
x0 = linspace(a,b,n+1); % 故此处是 n+1
y0 = f(x0);
```

```

Cotes = cell(1,8); % 创建一个空的元胞数组
Cotes{1} = [1/2 1/2];
Cotes{2} = [1/6 4/6 1/6];
Cotes{3} = [1/8 3/8 3/8 1/8];
Cotes{4} = [7/90 32/90 2/90 32/90 7/90];
Cotes{5} = [19/228 75/228 50/228 50/228 75/228 19/228];
Cotes{6} = [41/840 216/840 27/840 272/840 27/840 216/840 41/840];
Cotes{7} = [751/17280 3577/17280 1323/17280 2989/17280 2989/17280 1323/17280 3588/17280
            751/17280];
Cotes{8} = [989/28350 5888/28350 -928/28350 10496/28350 -4540/28350 10496/28350 -928/28350
            5888/28350 989/28350];

sum_yc = sum(Cotes{n} .* y0);
NC = (b-a) * sum_yc;
end

```

将上述代码保存为 `ncotes_integral.m` 文件。

四、数值算例

例 1 用 *Newton-Cotes* 公式计算

$$\int_{-4}^4 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \arctan(4) \approx 2.6516$$

分别取 $n = 1, 2, 3, \dots, 8$, 计算出对应的积分近似值, 并观察随 n 增加它与 2.6516 的误差变化

```

% NC求积例子
%
% last modified: 09/27/2023
clc,clear all,format long;
f1 = @(x)1./(1+x.^2);
a = -4; b = 4;

zhenshi = 2.6516; % 真实值取4位小数的值
Nc = zeros(1,8);
delta = zeros(1,8);
for n =1:1:8
    Nc(n) = ncotes_integral(a,b,n,f1);
    delta(n) = abs(Nc(n)-zhenshi);
end
n =1:8;
figure(1);
plot(n,Nc, '-*b');
figure(2);

```

```

plot(n,delta,'-*r');
disp(Nc)
%%
clc,clear all,format long;
f1 = @(x)1./(1+x.^2);
a = -4; b = 4;
zhenshi = 2.6516; % 真实值取4位小数的值
S = zeros(1,20);
delta = zeros(1,20);
for n =3:1:22
    S(n-2) = comp_simpson_integral(a,b,n,f1);
    delta(n-2) = abs(S(n-2)-zhenshi);
end
n =3:22;
figure(1);
plot(n,S,'-*b');
figure(2);
plot(n,delta,'-*r');
disp(S)

```

将上述代码保存为 NC_test.m

运行后得到

```

1x8 double
列 1 -- 3
    0.470588235294118    5.490196078431372    2.277647058823530
列 4 -- 6
    1.388758169934641    2.996500104777917    3.328798127470166
列 7 -- 8
    2.800256544272789    1.941094304388422

```

对比复化 Simpson 和 NC 下的误差可以发现使用 Newton-Cotes 公式求这个例子时，数值求积的过程是发散的。

随着 n 的增加，Cotes 系数中的分母也在增大，这会引引起有效数字的损失。

在实际应用时，常常只采用几种低阶 ($n \leq 7$) 的求积公式，如梯形公式、Simpson 公式和四阶 Newton-Cotes 公式——特别称作 Cotes 公式。

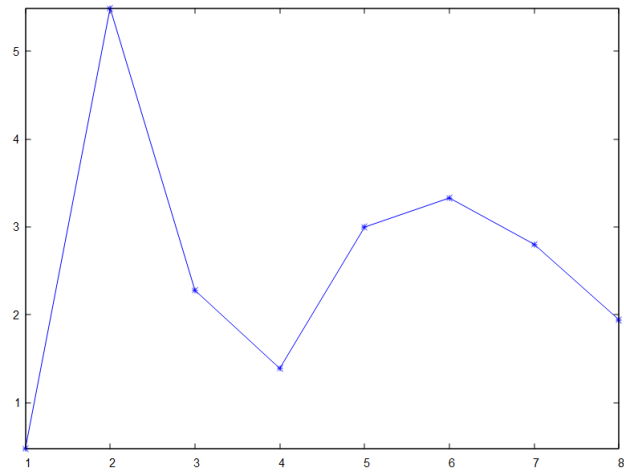


图 1 通过 NC 得到的近似值

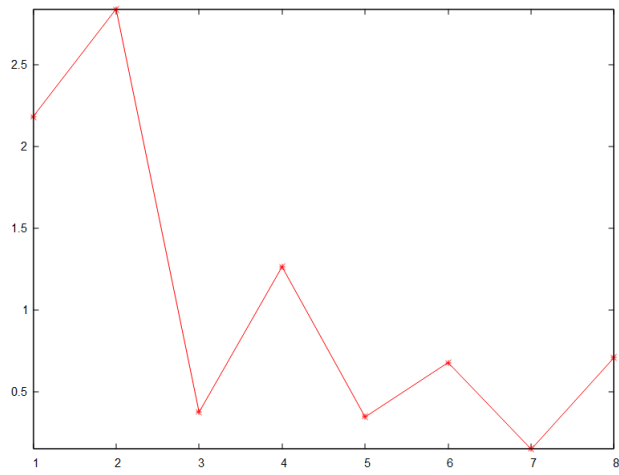


图 2 NC 下的误差

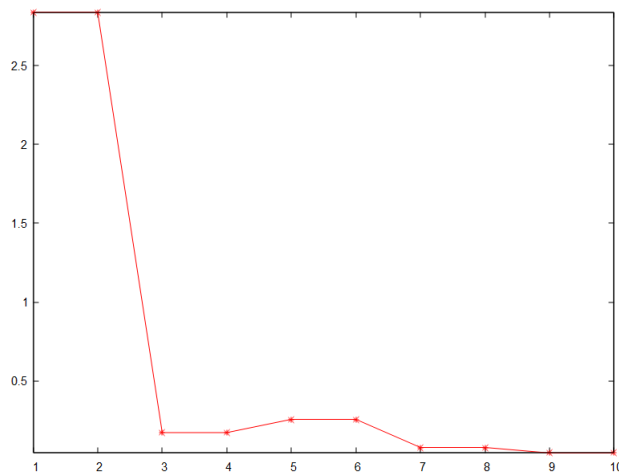


图 3 复化 Simpson 下的误差