

线性方程组求解——追赶法解三对角

湘潭大学, 数学与计算科学学院, 21 级王艺博

一、问题描述

对于线性方程组

$$Ax = b, \quad A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} |b_1| > |c_1| > 0 \\ |b_n| > |a_n| > 0 \\ |b_i| \geq |a_i| + |c_i|, \quad a_i c_i \neq 0, i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases}$$

二、追赶法解三对角方程组

(参考<https://www.bilibili.com/video/BV1PB4y1j76M/>)

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 & d_1 & & & \\ & u_2 & d_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & u_n \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

首先通过前两行与前两列可以知道

$$b_1 = u_1, a_2 = l_2 u_1, c_1 = d_1 \quad \text{得 } u_1, d_1, l_2$$

再从下式看两边是如何对应上的

$$\begin{array}{c}
 A : \begin{array}{c|c|c|c} & i-1 & i & i+1 \\ \hline i & a_i & b_i & c_i \end{array} \\
 \\
 L : \begin{array}{c|c|c|c} & i-1 & i & i+1 \\ \hline i & l_i & 1 & \end{array} \quad U : \begin{array}{c|c|c|c} & i-1 & i & i+1 \\ \hline & i-2 & d_{i-2} & \\ \hline i-1 & u_{i-1} & d_{i-1} & \\ \hline i & & u_i & d_i \\ \hline i+1 & & & u_{i+1} \end{array}
 \end{array}$$

可以看出

$$a_i = l_i u_{i-1}$$

$$b_i = l_i d_{i-1} + u_i$$

$$c_i = d_i$$

d_i 已经得出, 接下来只需算 l_i 与 u_i 即可

再有 $u_1 = b_1, i = 2 \rightarrow n$

$$l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}}$$

$$u_i = b_i - l_i \cdot c_{i-1}$$

这样子, L 和 U 就得到了

接下来, 解 $Ly = b, Ux = y$, 这一步可以用之前写好的程序直接解出

由于这里, 结果比较简易, 直接将结果写了出来:

解 $Ly = b$: (追)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & l_3 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$y_1 = f_1, y_i = f_i - l_i \cdot y_{i-1} (i = 2, 3 \cdots n)$$

解 $Ux = y$: (赶)

$$\begin{pmatrix} u_1 & d_1 & & & \\ & u_2 & d_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_n}, x_i = \frac{(y_i - d_i \cdot x_{i+1})}{u_i} (i = n-1, \dots, 2, 1)$$

这样 x 就求出来了

三、算法

♡ : [x]=tridiag_chase(A,f)

算法 1 追赶法解三对角方程组

输入: 系数矩阵 A , 向量 f

输出: 列向量 x (解)

$u_1 = b_1$;

for $i = 2$ to n **do**

$$l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}}$$

$$u_i = b_i - l_i \cdot c_{i-1}$$

end for

$$y_1 = f_1,$$

for $i = 2$ to n **do**

$$y_i = f_i - l_i \cdot y_{i-1}$$

end for

$$x_n = \frac{y_n}{u_n}$$

for $i = n-1$ to 1 **do**

$$x_i = \frac{(y_i - c_i \cdot x_{i+1})}{u_i}$$

end for

返回 x ;

四、北太天元源程序

追赶法解三对角方程组

```
function [x]=tridiag_chase(A,f)

% 追赶法解三对角方程组
% 输入：适用的三对角矩阵A，右端向量f
% 输出：解，列向量的形式 x
% 创建时间：1/26/2024
% 版本：1.0

n = length(A);
% 将三对角提取出来
b = diag(A,0); a = diag(A,-1); c = diag(A,1);
% 处理一下角标 a是从a_2开始，l从l_2 开始
a = cat(1,[0],a); % a = [0, diag(A,-1)]
u = zeros(1,n);l = zeros(1,n);
u(1) = b(1);
for i = 2:1:n
    l(i) = a(i)/u(i-1);
    u(i) = b(i)-l(i)*c(i-1);
end
% Ly = b
y = zeros(1,n);
y(1) = f(1);
for i =2:1:n
    y(i) = f(i)-l(i)*y(i-1);
end
% Ux= y
x = zeros(n,1);
x(n) = y(n)/u(n);
for i =n-1:-1:1
    x(i) = (y(i) - c(i)* x(i+1))/u(i);
end
end
```

将上述代码保存为 tridiag_chase.m 文件。

五、数值算例

例 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

编写实现三对角方程组追赶法的程序，并应用它求解三对角方程组 $Ax = b$

```
% file need: tridiag_chase.m, gsem_column.m
% time: 1/26/2024
clc,clear all;
addpath("../base","../Gauss消去法解线性方程组","../追赶法解三对角方程组") %
    加载函数文件
%%
A = [2 -1 0 0 0; -1 2 -1 0 0; 0 -1 2 -1 0; 0 0 -1 2 -1; 0 0 0 -1 2];
f = [1 ;0; 0; 0; 2];

t1 = tic;
x1 = tridiag_chase(A,f)
toc(t1);

t2 = tic;
x2 = gsem_column(A,f)
toc(t2);
```

将上述代码保存为 tridiag_test.m

运行结果如下：

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1.1667 \\ 1.3333 \\ 1.5000 \\ 1.6667 \\ 1.8333 \end{bmatrix}$$

时间经过了 0.009757 秒

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1.1667 \\ 1.3333 \\ 1.5000 \\ 1.6667 \\ 1.8333 \end{bmatrix}$$

时间经过了 0.018365 秒。

通过结果可以看出，通过追赶法来解三对角线性方程组，要比一般的方法快的多