

数值计算方法—拉格朗日插值法求近似值

湘潭大学, 数学与计算科学学院, 21 级王艺博

一、Lagrange 插值法

对于 $n + 1$ 个样本点 $(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i I_i(x)$$

$$I_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$L_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次多项式插值的 Lagrange 公式, 也称为 Lagrange 插值多项式

$$I_i(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega'_n(x_i)}$$

$I_i(x)$ 称为 n 次多项式插值问题的基函数 (Lagrange 因子), 其中

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

二、算法

♡ Lagrange 插值法: $[y] = \text{Lag_interp_v1}(x_0, y_0, x)$

输入:

- 已知插值点的横坐标向量 x_0 ,
- 已知插值点的纵坐标向量 y_0 ,
- 所求点的横坐标向量 x ,

输出:

- 所求点的近似值对应的向量 y .

实现步骤:

- 步骤 1: 输入 x_0, x
- 步骤 2: 计算每个 x 对应的 Lagrange 基函数 $I_i(x)$
- 步骤 3: 输入 y_0
- 步骤 4: 结合 $I_i(x)$ 与 y_0 计算每个 x 对应的 $L_n(x)$
- 步骤 5: 输出对应的 L_n

算法 1 Lag_interp_v1 思路

输入：插值点向量 x_0 , 插值点向量 y_0 , 所求点向量 x

输出：所求点 Lagrange 近似值向量 L_n

设 n_1, n_2

n_1 表示插值点的个数;

n_2 表示所求点的个数;

计算一个 $x(j)$ 对应的基函数中的一项 $I(i)$;

将下式中的 x 看成 $x(j)$

$$I_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

使用 if 和 prod 内置函数来实现 $I_i(x)$ 的表示

prod 表示矩阵中所有元素的乘积

构建这样的矩阵

$$\omega_x = [x(j) - x_{01}, x(j) - x_{02}, x(j) - x_{03} \dots, x_j - x_{0n_1}]$$

利用程序中矩阵的运算，表示为数与向量的相减

$$x(j) - x_0 = \omega_x$$

使用 $\text{prod}(\omega_x[1:i-1, i+1:n_1])$ 表示 $I_i(x)$ 分子

同理，使用 prod 表示 $I_i(x)$ 分母

考虑到 $i-1$ 与 $i+1$ 分别在 $i=1$ 与 $i=n_1$ 时 $\omega_x(0)$ 与 $\omega_x(n_1+1)$

无意义

使用 if 对其进行单独讨论

if $i == 1$

$I(i) = \text{prod}(\omega_x(i+1:n_1)) / \text{prod}(w(i+1:n_1));$

elseif $i == n_1$

$I(i) = \text{prod}(\omega_x(1:i-1)) / \text{prod}(w(1:i-1));$

else

$I(i) = \text{prod}(\omega_x(1:i-1)) / \text{prod}(w(1:i-1));$

$I(i) = I(i) * \text{prod}(\omega_x(i+1:n_1)) / \text{prod}(w(i+1:n_1));$

end

对上述 $I_i(x)$

for $i = 1 : 1 : n_1$

得到对于一个 $x(j)$ 的

$$I = [I_1(x), I_2(x), \dots, I_{n_1}(x)]$$

对于 $x(j)$ $L_n(x) = y_0 * I^T$

for $j = 1 : 1 : n_2$

得到每一个 x 的 I

最终

输出得到向量 L_n

三、北太天元源程序

```
%Lagrange 插值公式
% x0: 样本点横坐标所构成的行向量
% y0: 样本点纵坐标所构成的行向量
% x : 所求点的横坐标, 所构成的行向量
% y : 得到所求点纵坐标, 构成行向量
%函数使用时, 需要在命令行中输入pwd或cd 进入函数所在的文件夹
function [y] = Lag_interp_v1(x0,y0,x)
    n1 = length(x0); % n1表示样本点的个数
    I = zeros(1,n1); % 预留出要用的空间
    n2 = length(x); % n2表示所求点的个数
    Ln = zeros(1,n2);
    for j=1:1:n2 % 依次代入 自变量 x(j)
        omega_x = x(j)-x0; % 数 - 矩阵, 表示 [x(j) - x0(1),x(j)-x0(2),...,x(j)-x0(n1)]
        for i = 1:1:n1 % 对于x(j)求对应的基函数 I (i)
            w = x0(i) - x0; % 同样是 数 - 矩阵
            % 这里使用 if 和 内置的 prod 函数代替了 for 循环
            % prod 表示矩阵内所有元素的乘积
            if i == 1
                % omega_x(i+1:n1)表示向量的节选, 第i+1个到第n1个元素
                I(i) = prod(omega_x(i+1:n1))/prod(w(i+1:n1));
            elseif i == n1
                I(i) = prod(omega_x(1:i-1))/prod(w(1:i-1));
            else
                I(i) = prod(omega_x(1:i-1))/prod(w(1:i-1));
                I(i) = I(i) * prod(omega_x(i+1:n1))/prod(w(i+1:n1));
            end
        end
        %使用矩阵的乘积, 行向量 × 列向量 得到一个值
        Ln(j) = y0*I';
    end
    y = Ln;
end
```

将上述代码保存为Lag_interp_v1.m文件。

四、数值算例

例 1 利用 $f(x) = \ln x$ 的如下数据:

x	0.4	0.5	0.6	0.7
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.357765

进行 *Lagrange* 插值;

1. 计算 $x = [0.412 \ 0.511 \ 0.666]$ 处的近似值
2. 计算 $x_i = 0.3 + ih, h = 0.01, i = 0, 1, 2, \dots, 50$ 处的近似值, 并作图

调用函数 `[y] = Lag_interp_v1(x0,y0,x)`, 相应的实现代码为:

```
clc, clear all, format long;
x0 = linspace(0.4,0.7,4); % 输入样本点的横坐标
y0 = [-0.916291 -0.693147 -0.510826 -0.357765]; % 输入样本点的纵坐标
% 简单的算几个点
x1 = [ 0.412 0.511 0.666];
y1 = Lag_interp_v1(x0,y0,x1);
for i = 1:length(x1)
    fprintf('f(%f) = %f \n',x1(i),y1(i));
end
% 利用很多的点来画图
x2 = linspace(0.3,0.8,51); % 共51个要求的点
% 利用写好的 Lag_interp_v1 函数计算要求点的纵坐标
y2 = Lag_interp_v1(x0,y0,x2);
delta = abs(y2-log(x2));
%作图
figure(1); %画出第一个图像
plot(x2,y2,'b');

figure(2);
plot(x2,y2,'b');
hold on
plot(x2,log(x2),'r'); % y = lnx 的图像
hold off
%Ln(x) 与 lnx 的 误差
figure(3); % 画出第二个图像
plot(x2,delta,'g');
% 文字形式表示出来
for j = 1:1:51
    fprintf('f(%f) = %f \n',x2(j),y2(j));
end
```

将上述代码保存为 `LagTest.m`

在北太天元软件的命令行窗口输入：

```
>> LagTest
```

回车可得运算结果

```
f(0.412000) = -0.886972  
f(0.511000) = -0.671305  
f(0.666000) = -0.407185  
f(0.300000) = -1.191936  
f(0.310000) = -1.161676  
f(0.320000) = -1.132046  
f(0.330000) = -1.103035  
f(0.340000) = -1.074630
```

此处省略

```
f(0.770000) = -0.261515  
f(0.780000) = -0.248246  
f(0.790000) = -0.235059  
f(0.800000) = -0.221941
```

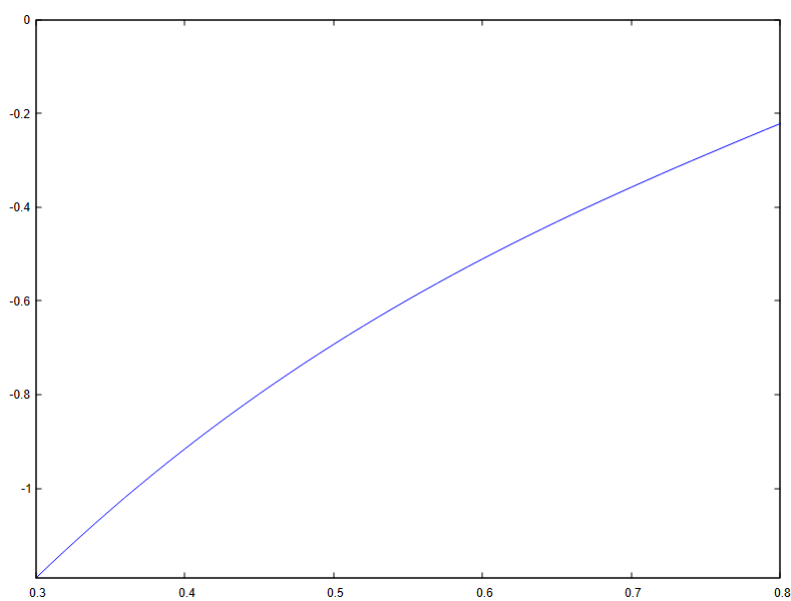


图 1 $L_n(x)$ 的图像

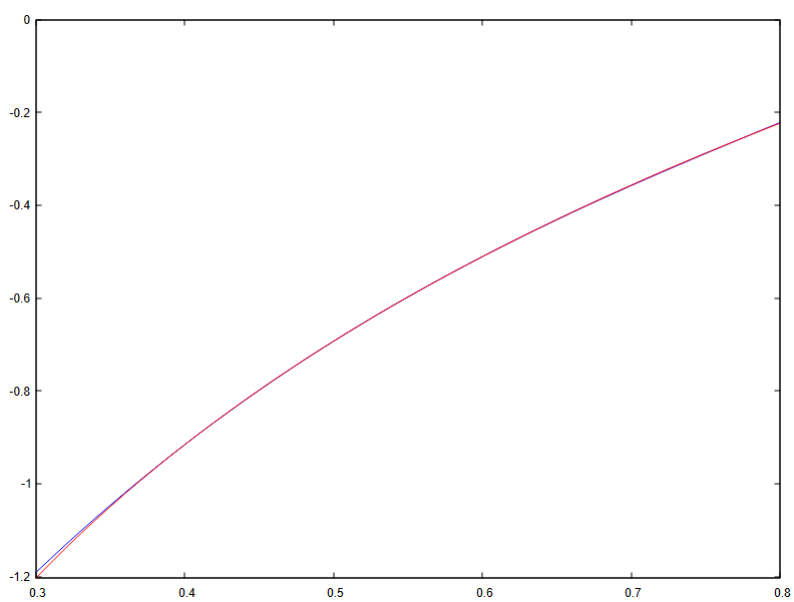


图2 $L_n(x)$ 与 $\ln(x)$ 的图像

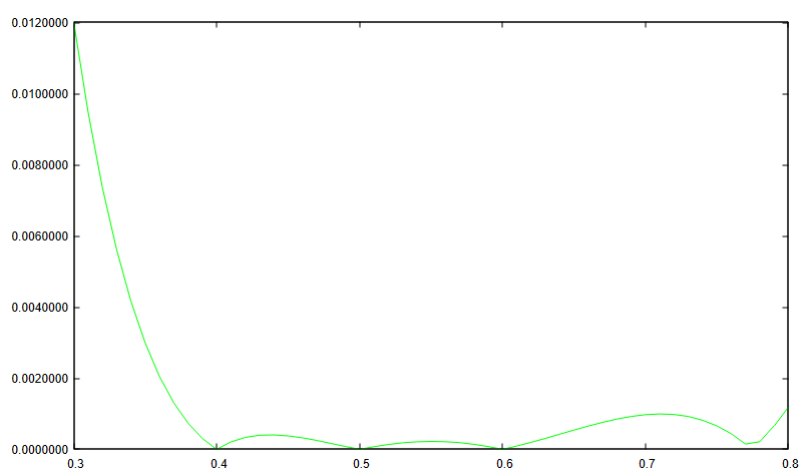


图3 $L_n(x)$ 与 $\ln(x)$ 的误差