线性方程组求解——追赶法解三对角

湘潭大学, 数学与计算科学学院, 21 级王艺博

一、问题描述

对于线性方程组

$$
Ax=b,\quad A=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}
$$

其中

$$
\begin{cases} |b_1|>|c_1|>0 \\ |b_n|>|a_n|>0 \\ |b_i|\geq|a_i|+|c_i|,\quad a_ic_i\neq 0, i=2,3,\cdots n-1 \end{cases}
$$

二、追赶法分解三对角方程组

(参考`https://www.bilibili.com/video/BV1PB4y1j76M/`)

$$
A=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & l_n & 1 \end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix} u_1 & d_1 & & & \\ & u_2 & d_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & u_n \end{pmatrix}
$$

$$
A=LU
$$

首先通过前两行与前两列可以知道

$$
b_1=u_1, a_2=l_2u_1, c_1=d_1 \quad \text{得 } u_1, d_1, l_2
$$

再从下式看两边是如何对应上的

$$
A:\begin{array}{c|c|c|c}
 & i-1 & i & i+1 \\
\hline
i & a_i & b_i & c_i
\end{array}
$$

$$
L:\begin{array}{c|c|c|c}
 & i-1 & i & i+1 \\
\hline
i & l_i & 1 &
\end{array}
\qquad
U:\begin{array}{c|c|c|c}
 & i-1 & i & i+1 \\
\hline
i-2 & d_{i-2} & & \\
\hline
i-1 & u_{i-1} & d_{i-1} & \\
\hline
i & & u_i & d_i \\
\hline
i+1 & & & u_{i+1}
\end{array}
$$

可以看出

$$
\begin{aligned}
a_i &= l_i u_{i-1} \\
b_i &= l_i d_{i-1} + u_i \\
c_i &= d_i
\end{aligned}
$$

d_i 已经得出，接下来只需算 l_i 与 u_i 即可
再有 $u_1 = b_1, i = 2 \to n$

$$
l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}}
$$

$$
u_i = b_i - l_i \cdot c_{i-1}
$$

这样子, L 和 U 就得到了
接下来，解 $Ly = b$,$Ux = y$, 这一步可以用之前写好的程序直接解出
由于这里，结果比较简易，直接将结果写了出来：
解 $Ly = b$：（追）

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & \\
l_2 & 1 & & & \\
 & l_3 & \ddots & & \\
 & & \ddots & 1 & \\
 & & & l_n & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n
\end{pmatrix}
$$

$$
y_1 = f_1, y_i = f_i - l_i \cdot y_{i-1} (i = 2, 3 \cdots n)
$$

解 $Ux=y$：（赶）

$$\begin{pmatrix} u_1 & d_1 & & & \\ & u_2 & d_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_n}, x_i = \frac{(y_i - d_i \cdot x_{i+1})}{u_i} (i = n-1, \cdots, 2, 1)$$

这样 x 就求出来了

三、算法

♡： `[x]=tridiag_chase(A,f)`

算法 1 追赶法解三对角方程组

输入：系数矩阵 A，向量 f
输出：列向量 x（解）
$u_1 = b_1$;
for $i = 2$ to n **do**
  $l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}}$
  $u_i = b_i - l_i \cdot c_{i-1}$
end for
$y_1 = f_1$,
for $i = 2$ to n **do**
  $y_i = f_i - l_i \cdot y_{i-1}$
end for
$x_n = \frac{y_n}{u_n}$
for $i = n-1$ to 1 **do**
  $x_i = \frac{(y_i - c_i \cdot x_{i+1})}{u_i}$
end for
返回 x;

四、北太天元源程序

追赶法解三对角方程组

```
function [x]=tridiag_chase(A,f)
    % 追赶法解三对角方程组
    % 输入: 适用的三对角矩阵A, 右端向量f
    % 输出: 解, 列向量的形式 x
    % 创建时间: 1/26/2024
    % 版本: 1.0
    n = length(A);
    % 将三对角提取出来
    b = diag(A,0); a = diag(A,-1); c = diag(A,1);
    % 处理一下角标 a是从a_2开始, l从l_2 开始
    a = cat(1,[0],a); % a = [0, diag(A,-1)]
    u = zeros(1,n);l = zeros(1,n);
    u(1) = b(1);
    for i = 2:1:n
        l(i) = a(i)/u(i-1);
        u(i) = b(i)-l(i)*c(i-1);
    end
    % Ly = b
    y = zeros(1,n);
    y(1) = f(1);
    for i =2:1:n
        y(i) = f(i)-l(i)*y(i-1);
    end
    % Ux= y
    x = zeros(n,1);
    x(n) = y(n)/u(n);
    for i =n-1:-1:1
        x(i) = (y(i) - c(i)* x(i+1))/u(i);
    end
end
```

将上述代码保存为 tridiag_chase.m 文件。

五、数值算例

例 1

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\0&0&-1&2&-1\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

编写实现三对角方程组追赶法的程序，并应用它求解三对角方程组 $Ax=b$

```
% file need: tridiag_chase.m, gsem_column.m
% time: 1/26/2024
clc,clear all;
addpath("../base","../Gauss消去法解线性方程组","../追赶法解三对角方程组") %
    加载函数文件
%%
A = [2 -1 0 0 0; -1 2 -1 0 0; 0 -1 2 -1 0; 0 0 -1 2 -1; 0 0 0 -1 2];
f = [1 ;0; 0; 0; 2];

t1 = tic;
x1 = tridiag_chase(A,f)
toc(t1);

t2 = tic;
x2 = gsem_column(A,f)
toc(t2);
```

将上述代码保存为 `tridiag_test.m`

运行结果如下：

$$x_1=\begin{bmatrix}1.1667\\1.3333\\1.5000\\1.6667\\1.8333\end{bmatrix}$$

时间经过了 0.009757 秒

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1.1667 \\ 1.3333 \\ 1.5000 \\ 1.6667 \\ 1.8333 \end{bmatrix}$$

时间经过了 0.018365 秒。

通过结果可以看出，通过追赶法来解三对角线性方程组，要比一般的方法快的多