

三线摆测量物体转动惯量

王晨萱 PB23331860 孙振川 PB23081463

2024.3.26

摘要

本实验通过三线摆测量了不锈钢圆盘和不规则物体的转动惯量。通过对实验数据的处理和分析，我们可以计算出物体的转动惯量，并与理论值进行比较，从而验证实验结果的准确性。此外，我们还学习了如何使用三线摆进行实验，以及如何处理和分析实验数据。这些技能在物理学研究和工程应用中都是非常重要的。

关键词：转动惯量；三线摆；数据处理

1 引言

在物理学中，转动惯量是描述物体旋转特性的一个重要参数。它与物体的质量分布和旋转轴的位置有关。通过测量物体的转动惯量，可以更好地理解其运动规律和力学性质。三线摆是一种常用的实验装置，可以用于测量物体的转动惯量。通过对三线摆的实验，我们可以深入了解转动惯量的概念及其在实际应用中的重要性。在本实验中，我们将使用三线摆来测量物体的转动惯量。通过对实验数据的处理和分析，我们可以计算出物体的转动惯量，并与理论值进行比较，从而验证实验结果的准确性。此外，我们还将学习如何处理和分析实验数据。这些技能在物理学研究和工程应用中都是非常重要的。

2 实验内容与设计

2.1 实验目的

1. 测量物体的转动惯量
2. 学习三线摆的使用方法
3. 学习数据处理的方法

2.2 实验仪器

JLT-1 理论力学多功能实验台（含三线摆装置、光电检测器、尺、电子秤等）；不锈钢圆盘、不规则零件（发动机摇臂）、砝码、细线。

2.3 实验原理

2.3.1 转动惯量

转动惯量是描述刚体转动惯性大小的物理量，是刚体在转动中保持原有运动状态能力的量度。它在旋转动力学中的角色相当于线性动力学中的质量。当刚体绕轴运动，其合外力矩与角加速度有： $M = I \cdot \beta$ 。其中，

M 为刚体的合外力矩, $\beta = d\omega/dt$ 为角加速度 (ω 为角速度), I 为刚体绕转动轴的转动惯量 (对比 $F = m \cdot a$)。转动惯量在工程技术和科学研究的各个领域都有着十分广泛的应用。例如: 在设计飞轮, 齿轮, 涡轮等旋转机械时, 需要精确计算其转动惯量, 以确保其运行的稳定性和效率; 在航天器的姿态控制和轨道设计中, 转动惯量是至关重要的参数; 舞蹈者在身体旋转动作中, 以及运动员在跳水, 体操等项目中, 都是通过调整身体姿态改变转动惯量, 从而控制旋转速度。

质量连续分布的刚体, 其转动惯量可写为,

$$I = \int r^2 dm \quad \left(\text{均质刚体可写作 } I = \rho \cdot \int r^2 dV \right)$$

但在实际应用中, 实际的转轴并不总是通过其质心。对于相互平行的两转轴, 由转动惯量的定义可以推导出平行轴定理: 刚体绕任意轴的转动惯量 I , 等于刚体绕通过其质心且与该轴平行的轴的转动惯量 I_C , 加上刚体质量 m 与两轴间距离 d 的平方的乘积, 即

$$I = I_C + m \cdot d^2$$

平行轴定理提供了计算刚体绕任意平行轴转动惯量的方法。根据平行轴定理, 我们只需知道刚体绕质心轴的转动惯量, 即可求出绕任意平行轴的转动惯量。

2.3.2 刚体转动惯量的测量

用数学方法计算其转动惯量是非常困难的, 因而大多采用实验方法来测定。三线摆是一个简单的物理实验装置, 用于测量物体的转动惯量。它由一个悬挂在三根细线上的物体组成。当物体绕其中心轴旋转时, 三根细线会产生不同的张力, 从而影响物体的转动惯量。通过测量这些张力和角位移, 可以计算出物体的转动惯量。如图所示, 设摆线长度为 l , 圆盘质量为 m , 摆线与圆盘接点所在圆盘半径为 r , 圆盘转角为 φ , 摆线与垂直线的偏角为 α 。摆线与圆盘接点的偏摆位移可近似为:

$$s = r \cdot \varphi = l \cdot \alpha \quad (\text{当偏摆至最大时}) \quad s_{\max} = r \cdot \varphi_{\max} = l \cdot \alpha_{\max}$$

设三线摆做初始转角为 0 , 角频率为 ω 的简谐振动, 则有:

$$\varphi = \varphi_{\max} \sin \omega t, \quad \beta_{\max} = \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)_{\max} = \varphi_{\max} \omega$$

从而圆盘转动的最大动能为:

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2} I \beta_{\max}^2 = \frac{1}{2} I \varphi_{\max}^2 \omega^2$$

而三线摆悬挂圆盘扭转时最大势能为:

$$E_{p,\max} = mg \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha_{\max})$$

泰勒展开余弦函数, 舍去高阶项, 有

$$E_{p,\max} \approx mg \cdot l \cdot \frac{\alpha_{\max}^2}{2} = \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{l} \varphi_{\max}^2$$

对于保守系统, $E_{k,\max} = E_{p,\max}$, 由此推得:

$$I = \frac{mgr^2}{l\omega^2} = \frac{mgr^2}{l(2\pi f)^2} = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \cdot \frac{mgr^2}{l}$$

3 实验步骤

本实验用三线摆方法测量物体转动惯量，包括直接测量规则圆盘转动惯量和等效法测量不规则物体转动惯量两部分内容。

3.1 三线摆测规则圆盘的转动惯量

1. 打开 JLT — 1 理论力学多功能实验台的电源，在实验台控制面板上以用户名 01，密码 01 登陆实验界面。
2. 点击进入实验台屏幕界面上的 " 测量转动惯量实验 "。测量不锈钢圆盘的质量（注意记录台秤零点）。并以游标卡尺测量圆盘的直径 R 。
3. 点击进入实验台屏幕界面上的 " 均质转动惯量实验 "。
4. 拧松实验台右边的转轮锁定开关，摇动手轮，将右边的一个圆盘下放。
5. 测量有机玻璃圆盘上摆线接点所在的半径。
6. 将不锈钢圆盘置于有机玻璃圆盘上，使两者中心重合。
7. 调整圆盘高度至某摆线长 L 处，锁紧手轮。
8. 以水平仪检测圆盘是否水平，若不平则调至水平。
9. 待圆盘静止，顺时针摇动底部手柄，使底部支架上行并刚好托住圆盘，旋转支架至一个微小的角度（小于 6° ），然后反向（逆时针）快速摇动底部支架手柄，使之释放圆盘，圆盘开始摆动。
10. 在屏幕上输入摆线长度，点击“开始”按钮，等待数据显示；再次点击“开始”按钮，记录第二组数据。完成两次测量。
11. 停止圆盘摆动，重复步骤 8 和 9，测量 3 组（每组 2 次）相同摆线长度下的周期数据。
12. 调整摆线长度至 $L = 50 \pm 2 \text{ cm}$, $65 \pm 2 \text{ cm}$, $80 \pm 2 \text{ cm}$ ，重复步骤 6 — 10，记录 3 种不同摆线长度下的实验结果。
13. 实验结束后，取下不锈钢圆盘并将其放回实验台抽屉中。

3.2 三线摆测不规则物体的转动惯量

1. 实验器材内有三物体的重量近似，分别为摇臂，钢架（悬线测重心器材）和两个圆形砝码。找出三物体，分别称重，校验三者重量情况。
2. 测量砝码的直径，并记录。
3. 点击进入实验台屏幕界面上的 " 测量转动惯量实验 "，并进入 " 非均质转动惯量实验 " 界面。
4. 调整圆盘高度至某摆线长 L 处，锁紧手轮。
5. 在圆盘上分别放置摇臂和钢架，使旋转轴心（与圆盘中心对应）穿过物体重心。按实验（三）步骤 8 — 10 方法，分别测量两物体绕重心轴的转动惯量。每一物体分 3 组测量，每组 1~2 次，组间停止摆动后重新启动。

- 取下不规则物体，将两个圆柱砝码从圆盘中心孔处卡入导轨，使两砝码对称。点击进入 " 等质量体转动惯量实验 " 界面，输入质量，摆线长度，直径等。调整两砝码中心的间距，分别测量其摆动周期（两次测量取均值），并使其变换范围覆盖前面所测不规则物体的的周期。共测 5 至 8 组数据（后续采用插值方法求取不规则物体的转动惯量），请根据需要布置测点，可重复。
- 调整摆线长度，重复步骤 3 — 6，测试 2 种不同的摆线长度对结果的影响。
- 实验完毕，将不规则物体和砝码放回原位摆放整齐，将圆盘恢复至原来状态，并锁紧手轮。

4 实验数据处理

4.1 三线摆测规则圆盘的转动惯量

4.1.1 实验原始数据

在实验中，我们测量了不锈钢圆盘的转动惯量。实验数据如下表所示：

圆盘的质量为 $m = 318 \text{ g}$ ，

圆盘的直径为 $R = 99.80 \text{ mm}$ ，

重力加速度为 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

摆线的回转半径为 $l = \frac{64.92}{\sqrt{3}} \text{ mm}$

理论计算的转动惯量为：

$$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.318 \cdot \left(\frac{99.80}{2}\right)^2 = 39.591 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

圆盘的转动惯量 I 可由下式计算：

$$I = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{mgr^2}{L}$$

No.	摆线长度/mm	摆动周期/s						周期均值/s	转动惯量/ $10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
		1	2	3	4	5	6		
1	644	1.553	1.530	1.547	1.552	1.539	1.552	1.5458	40.082
2	527	1.404	1.402	1.400	1.402	1.398	1.401	1.4012	40.246
3	727	1.644	1.640	1.638	1.641	1.636	1.638	1.6395	39.941

表 1: 不锈钢圆盘转动测量数据

误差原因，不锈钢底座的转动惯量未考虑。

摆线长度对测量值的影响：

摆线长度越长，误差越小，因为摆线长度越长，小角度近似越好，从而使得摆动周期越长，测量值越准确。

零件	质量 g	摆长/mm	摆动周期/s						周期均值/s	转动惯量/ $10^{-5}\text{kg} \cdot \text{m}^2$
			1	2	3	4	5	6		
1	644	727	1.291	1.281	1.281				1.2843	4.7072
1	644	464	1.047	1.049	1.048				1.048	4.8867

表 2: 不规则物体转动惯量测量数据

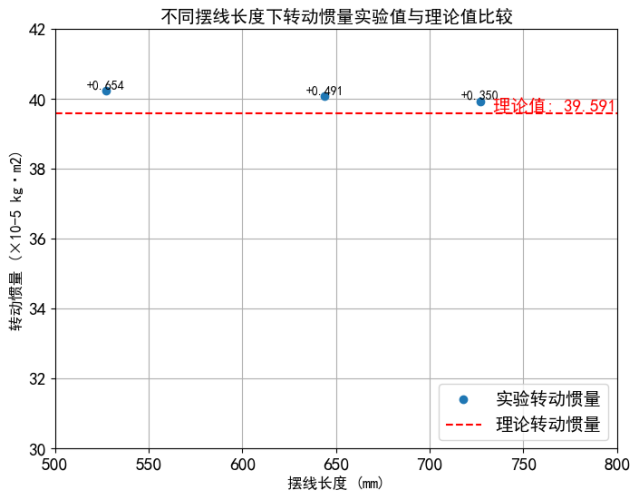


图 1: 不同摆线长度下转动惯量实验值与理论值比较

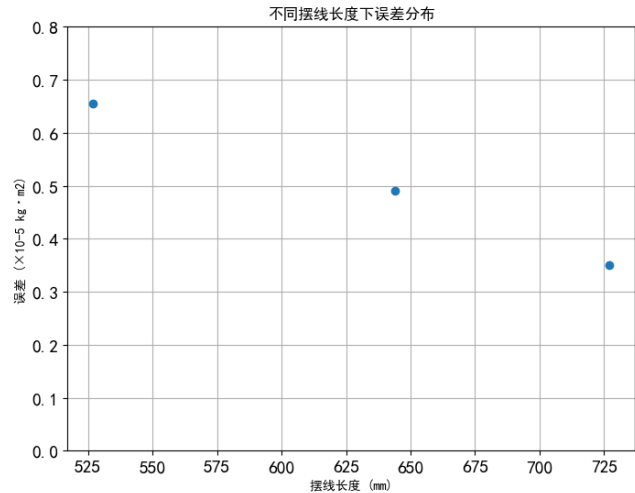


图 2: 不同长度误差分布

4.2 三线摆测不规则物体的转动惯量

4.2.1 不规则物体的转动惯量测量

4.2.2 等效圆柱砝码的转动惯量测量

根据平行轴定理，圆柱的转动惯量公式为：

$$I = \frac{1}{8}m_s d_s^2 + m_s \left(\frac{s + d_s}{2} \right)^2$$

其中， m_s 为砝码质量， d_s 为砝码直径， s 为砝码间距。

实验测量数据如所示： $m_s = 79(g)$ ， $d_s = 18(mm)$ ， $g = 9.8(m/s^2)$ 。

摆长为 464mm 回归方程为：

$$I = 7.08704 \times T^2 - 2.8970$$

得到

$$I_1 = 7.08704 \times 1.048^2 - 2.8970 = 4.8867 \times 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

摆长为 727mm 回归方程为：

$$I = 4.47858 \times T^2 - 2.8970$$

得到

$$I_2 = 4.47858 \times 1.048^2 - 2.68026 = 4.7072 \times 10^{-5} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

摆长为 727mm					
砝码间距 s/mm	10	20	30	40	50
摆动周期 T_1/s	1.014	1.147	1.302	1.462	1.648
摆动周期 T_2/s	1.020	1.122	1.302	1.658	1.652
平均周期 T/s	1.017	1.1345	1.302	1.660	1.650
转动惯量/ $10^{-5}\text{kg} \cdot \text{m}^2$	1.86835	3.17185	4.87035	6.96385	9.45235

表 3: 摆长为 727mm 等效圆柱砝码的转动惯量测量数据

摆长为 464mm					
砝码间距 s/mm	10	20	30	40	50
摆动周期 T_1/s	0.819	0.928	1.056	1.168	1.318
摆动周期 T_2/s	0.818	0.924	1.053	1.172	1.328
平均周期 T/s	0.8185	0.926	1.0545	1.170	1.323
转动惯量/ $10^{-5}\text{kg} \cdot \text{m}^2$	1.86835	3.17185	4.87035	6.96385	9.45235

表 4: 摆长为 464mm 等效圆柱砝码的转动惯量测量数据

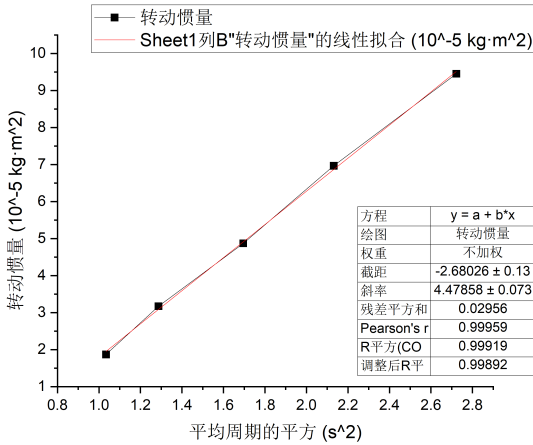


图 3: 摆长为 727mm 等效圆柱砝码的转动惯量测量数据

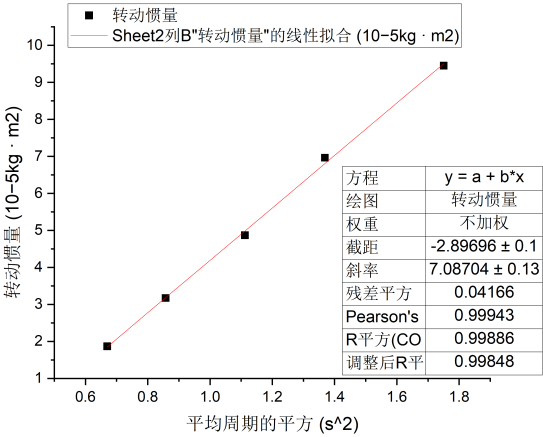


图 4: 摆长为 464mm 等效圆柱砝码的转动惯量测量数据

5 思考题

- 圆盘三线摆实验：
 - 如初始摆角较大，对实验结果有何影响？

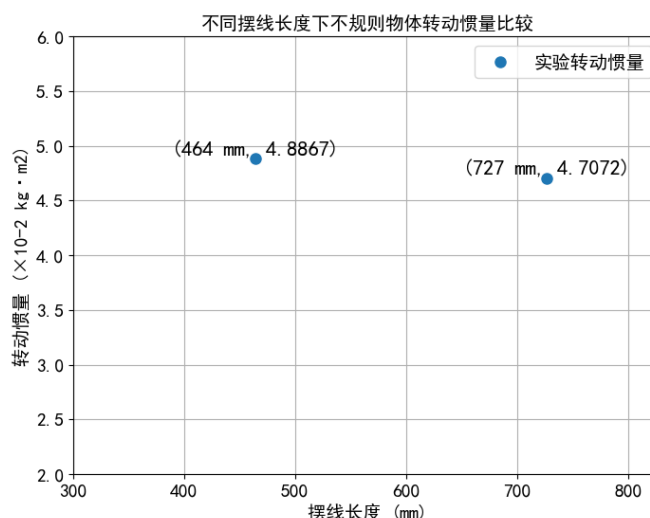


图 5: 不同摆线长度下不规则物体转动惯量比较

由于摆角过大，三角函数的一阶近似不在成立，周期偏大，影响实验结果。

(2) 设圆盘摆放时与三线接圆的圆心有 2 mm 左右的偏差，该偏差会如何影响测量的周期读数？与读数本身的重复性误差相比，这种偏差是否可以忽略？

偏差会导致转动惯量偏大，可能导致周期偏大。与读数本身的重复性误差相比，这种偏差不可以忽略。

2. 不规则物体为何不通过三线摆测得的摆动周期直接估算其转动惯量？

不规则物体的形状和质量分布较为复杂，直接利用三线摆测得的周期计算转动惯量时，往往采用的小角度近似和均质体的简化模型不再适用。这样计算出来的值容易受到局部质量分布不均、转动轴偏移等因素的影响，产生较大误差。

6 参考文献

- [1] 理论力学实验指导书 [M]. 北京大学出版社, 2007
- [2] 王惠明. 应用理论力学实验 [M]. 北京高等教育出版社, 2009
- [3] 刘丹, 侯之超. 三线摆方程简化及其共振问题研究 [J]. 振动与冲击, 2007,33