实验力学作业 1

孙振川 PB23081463

2025 年 10 月 12 日

题目 1. 用小球从空中降落到水中的实验模拟返回舱降落到海里的现象。用相似理论求出实验需要满足的相似参数。如果已知返回舱的质量 m_1 、直径 d_1 、入水速度 v_1 、入水深度 h_1 、海水密度 ρ_1 、海水动力粘度 μ_1 ；实验用水的密度 ρ_2 和动力粘度 μ_2 。试确定实验小球的直径 d_2 、质量 m_2 、入水速度 v_2 和入水深度 h_2 。

解答:

量纲矩阵:

	m	d	v	h	ρ	μ	g
L	0	1	1	1	-3	-1	1
M	1	0	0	0	1	1	0
T	0	0	-1	0	0	-1	-2

选取重复变量 m 、d 、v，它们的量纲行列式为

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

所以它们是线性无关的，可以作为重复变量。

由相似理论可知，实验需要满足的相似参数为

$$\pi_1 = \frac{h}{d}, \quad \pi_2 = \frac{m}{\rho d^3}, \quad \pi_3 = \frac{mv}{\mu d^2}, \quad \pi_4 = \frac{gd}{v^2}$$

由相似参数的相等性可得

$$\frac{h_1}{d_1} = \frac{h_2}{d_2}, \quad \frac{m_1}{\rho_1 d_1^3} = \frac{m_2}{\rho_2 d_2^3}, \quad \frac{m_1 v_1}{\mu_1 d_1^2} = \frac{m_2 v_2}{\mu_2 d_2^2}, \quad \frac{gd_1}{v_1^2} = \frac{gd_2}{v_2^2}$$

联立以上四个方程，可解得

$$d_2 = d_1 \left(\frac{\rho_1 \mu_2}{\rho_2 \mu_1}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad h_2 = h_1 \left(\frac{\rho_1 \mu_2}{\rho_2 \mu_1}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad m_2 = m_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}, \quad v_2 = v_1 \left(\frac{\rho_1 \mu_2}{\rho_2 \mu_1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

题目 2. 在拖曳水槽（淡水）中进行海船航行的模型实验。真实船长度为 130 m、浸水面积 2400 m^2 ；模型船长度为 4.2 m。设水流对船的摩擦阻力 D 与航行速度 v 满足关系 $D = k \cdot v^n$ ，其中 k 为系数，n 为速度指数。已知真实船在海水中以 3 m/s 速度航行时单位面积摩擦阻力是 43 N/m^2 ，速度指数为 1.85；模型船在淡水中以 3 m/s 速度航行时单位面积摩擦阻力是 16 N/m^2 ，速度指数为 1.9。问：在相似条件下，当模型船以 1.5 m/s 的速度拖行实验时，测得总阻力为 17.75 N，（1）对应真实船在海水中的航行速度是多少？（2）在该速度下，真实船航行需要的轴功率是多少？（设推进效率为 70% ，海水密度为 1025 kg/m^3 ）

解答:

0.1 摩擦阻力系数

根据几何相似，$\frac{S_m}{S_s} = \left(\frac{L_m}{L_s}\right)^2$，所以

$$S_m = S_s \cdot \left(\frac{L_m}{L_s}\right)^2 = 2400 \times \left(\frac{4.2}{130}\right)^2 \approx 10.42 \text{ m}^2$$

$$k_s \approx 13520\ \mathrm{N} \cdot (\mathrm{m/s})^{-1.85}$$

$$k_m \approx 4.95\ \mathrm{N} \cdot (\mathrm{m/s})^{-1.9}$$

总阻力由摩擦阻力 D 和剩余阻力 R_{rem} 组成。

$$R_{\text{total}} = D + R$$

摩擦阻力 $D_m = k_m \cdot v_m^{n_m} = 4.95 \times (1.5)^{1.9} \approx 10.296\ \mathrm{N}$

剩余阻力 $R_m = R_m - D_m = 17.75 - 10.296 = 7.454\ \mathrm{N}$

0.2 无量纲数

量纲矩阵:

	L	S	v	D	ρ	g
L	1	2	1	1	-3	1
M	0	0	0	1	1	0
T	0	0	-1	-2	0	-2

选取重复变量 L 、v 、ρ，它们的量纲行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

所以它们是线性无关的，可以作为重复变量。

由相似理论可知，实验需要满足的相似参数为

$$\pi_1 = \frac{R}{\rho v^2 L^2}, \quad \pi_2 = \frac{v^2}{gL}$$

由相似参数的相等性可得

$$\frac{R_s}{\rho_s v_s^2 L_s^2} = \frac{R_m}{\rho_m v_2^2 L_m^2}, \quad \frac{v_s^2}{g_s L_s} = \frac{v_m^2}{g_m L_m}$$

联立以上两个方程，可解得

$$v_s = 1.5 \times \sqrt{\frac{130}{4.2}} \approx 1.5 \times \sqrt{30.95} \approx 8.34 \text{ m/s}$$

$$R_s = R_m \frac{\rho_1 v_1^2 S_1}{\rho_2 v_2^2 S_2} = 7.454 \times \frac{1025 \times 8.34^2 \times 2400}{1000 \times 1.5^2 \times (4.2^2/130^2 \times 2400)} = 275954\text{N}$$

0.3 阻力计算与轴功率

$$D_s = k_s \cdot v_s^{n_s} = 13521 \times (8.34)^{1.85} = 684167 \text{ N}$$

由轴功率公式可知，真实船航行需要的轴功率为

$$P = \frac{(D_s + R_s)v_s}{\eta} = 8.01 \times 10^7\text{W}$$

题目 3. 据说外军曾研制一种天基动能武器 " 上帝之杵 "，由低轨卫星搭载高密度金属杆，金属杆释放后在重力加速下高速抵达地面，以纯动能破坏地面目标。某报告披露，其金属杆参数大致为：直径 0.3 m，长度 6 m，材质为钨，据称在末端速度 4500 m/s 时可侵彻至地壳数百米深处。现设计一模型实验核验该报告内容。初步认为，长杆的侵彻深度主要与杆的尺寸、末端速度、杆材密度、靶材密度和靶材屈服强度相关。模型实验采用轻气炮发射一枚直径 6 mm 的金属钉（满足几何相似），打击特制的冰制靶体。相关材料的属性见下表。问：（1）模型长杆的密度和发射速应如何设定才能保证问题相似？（2）模型实验中金属钉头部侵入冰面约 0.5 m，请据此判断则上述报告宣称的侵彻效果是否属实。

材料属性	钨金属	岩石（地壳）	水冰 ($-10°$C)
密度 (g/cm^3)	19.35	3.0	0.92
屈服强度 (MPa)	1300	150	12

解答:

量纲矩阵:

	L	v	ρ_1	ρ_2	σ_2	σ_1
L	1	1	-3	-3	-1	-1
M	0	0	1	1	1	1
T	0	-1	0	0	-2	-2

选取重复变量 L 、v 、ρ_2，它们的量纲行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

所以它们是线性无关的，可以作为重复变量。

由相似理论可知，实验需要满足的相似参数为

$$\pi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \pi_2 = \frac{\sigma_1}{\rho_2 v^2}$$

由相似参数的相等性可得

$$\frac{\rho_{11}}{\rho_{21}} = \frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}, \quad \frac{\sigma_{11}}{\rho_{21} v_1^2} = \frac{\sigma_{12}}{\rho_{22} v_2^2}$$

联立以上两个方程，可解得

$$\rho_{12} = \rho_{22}\frac{\rho_{11}}{\rho_{21}} = 0.92\times\frac{19.35}{3.0} = 5.93\mathrm{g/cm^3}, \quad v_2 = v_1\sqrt{\frac{\sigma_{12}\rho_{21}}{\sigma_{11}\rho_{22}}} = 4500\times\sqrt{\frac{12\times 3.0}{150\times 0.92}} = 1865\mathrm{m/s}$$

则上述报告宣称的侵彻效果为

$$h_1 = h_2 \frac{L_1}{L_2} = 0.5 \times \frac{6}{0.006} = 500\mathrm{m}$$

该报告宣称的侵彻效果属实。

在流体力学中，速度场的涡量（旋度）定义为：

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

其中，$\vec{v} = (u, v, w)$ 是三维速度场，u、v、w 分别是流速在 x、y、z 方向的分量。涡量的分量为：

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

给定的速度场为：

$$u = -Ky, \quad v = Kx, \quad w = \left[\varphi(z) - 2K^2(x^2 + y^2)\right]^{1/2}$$

我们分别计算涡量的三个分量。

第一分量： $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$

首先，计算 $\frac{\partial w}{\partial y}$：

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left[\varphi(z) - 2K^2(x^2 + y^2)\right]^{1/2} \right) = -\frac{2K^2 y}{\sqrt{\varphi(z) - 2K^2(x^2 + y^2)}}$$

由于 $v = Kx$ 不依赖于 z，所以：

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

因此，第一分量为：

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{2K^2 y}{\sqrt{\varphi(z) - 2K^2(x^2 + y^2)}}$$

第二分量： $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$

由于 $u = -Ky$ 不依赖于 z，所以：

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

接下来计算 $\frac{\partial w}{\partial x}$：

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\varphi(z) - 2K^2(x^2+y^2)\right]^{1/2}\right) = -\frac{2K^2x}{\sqrt{\varphi(z) - 2K^2(x^2+y^2)}}$$

因此，第二分量为：

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2K^2x}{\sqrt{\varphi(z) - 2K^2(x^2+y^2)}}$$

第三分量： $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(Kx) = K$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-Ky) = -K$$

因此，第三分量为：

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = K - (-K) = 2K$$

涡量的最终表达式：

综合上面计算的三个分量，涡量 $\vec{\omega}$ 为：

$$\vec{\omega} = \left(-\frac{2K^2y}{\sqrt{\varphi(z) - 2K^2(x^2+y^2)}}, \frac{2K^2x}{\sqrt{\varphi(z) - 2K^2(x^2+y^2)}}, 2K\right)$$

题目：设在极坐标系中某二维无源流动的流线方程写为 $\theta = \theta(r)$，流体的速度仅依赖于 r 而与 θ 无关，证明此种情形下的涡量可以表示为

$$\omega = \frac{K}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} \right),$$

其中 K 为一常数。

证明：

在极坐标系中，二维流动的速度分量可表示为：

$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta},$$

其中，v_r 是径向速度，v_θ 是切向速度。在此题中，流体的速度仅依赖于径向坐标 r，因此

$$v_r = v_r(r), \quad v_\theta = 0.$$

涡量（旋度）在极坐标系中的定义为：

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}.$$

由于 $v_\theta = 0$，所以第一项为 0。且由于流速仅依赖于 r，$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0$。因此涡量简化为：

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta).$$

因为流线方程为 $\theta = \theta(r)$，我们假设切向速度 v_θ 的形式为

$$v_\theta = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}.$$

代入上述公式，得到涡量：

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} \right).$$

假设涡量与常数 K 成正比，因此最终结果为：

$$\omega = \frac{K}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right).$$

证明完毕。

题目：速度场为

$$u = y + 2z, \quad v = z + 2x, \quad w = x + 2y,$$

求涡量和涡线方程，并求 $x + y + z = 1$ 平面上横截面为 dS 的涡管强度。

解答：

1. **涡量的计算：**

涡量 $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 是速度场的旋度，即：

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$$

速度场为：

$$\vec{v} = (u, v, w) = (y + 2z, z + 2x, x + 2y)$$

根据旋度公式：

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

现在逐项计算：

- ω_x：

$$\omega_x = \frac{\partial}{\partial y}(x + 2y) - \frac{\partial}{\partial z}(z + 2x) = 2 - 2 = 0$$

- ω_y：

$$\omega_y = \frac{\partial}{\partial z}(y + 2z) - \frac{\partial}{\partial x}(x + 2y) = 2 - 1 = 1$$

- ω_z：

$$\omega_z = \frac{\partial}{\partial x}(z+2x) - \frac{\partial}{\partial y}(y+2z) = 2 - 1 = 1$$

因此，涡量为：

$$\vec{\omega} = (0,1,1)$$

2. **涡线方程**：

涡线方程是满足以下条件的曲线方程：

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\omega}$$

其中 ds 是涡线的弧长，$\vec{r} = (x,y,z)$ 是位置向量。

因为涡量是常数向量 $(0,1,1)$，所以涡线的方程为：

$$\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{dy}{ds} = 1, \quad \frac{dz}{ds} = 1$$

积分得到：

$$x = x_0, \quad y = s + y_0, \quad z = s + z_0$$

因此，涡线方程为：

$$x = x_0, \quad y = s + y_0, \quad z = s + z_0$$

3. **涡管强度的计算**：

涡管强度的定义为：

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$$

其中 S 是涡管的横截面，$d\vec{S}$ 是该横截面的面元向量，方向垂直于平面 $x+y+z=1$。

在平面 $x+y+z=1$ 上，法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$（该平面方程的系数），并且该平面上的面积元素可以写为：

$$d\vec{S}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,dS$$

因此，涡管强度为：

$$\Gamma=\int_S \vec{\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,dS=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_S(0\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1)\,dS$$

$$\Gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_S 2\,dS$$

若横截面积为 A，则有：

$$\Gamma=\frac{2}{\sqrt{3}}A$$

应力法将有体积力问题转化为无体积力问题

1. 原始平衡方程（含体积力）

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0 \tag{1}$$

2. 引入辅助应力场

$$\sigma^0_{ij,j}+b_i=0 \tag{2}$$

定义剩余应力场：

$$\sigma^*_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma^0_{ij} \tag{3}$$

则剩余应力满足无体积力的平衡方程：

$$\sigma^*_{ij,j} = 0 \tag{4}$$

3. 应力 - 应变关系

$$\varepsilon^*_{kk} + 2\mu\varepsilon^*_{ij}, \quad \varepsilon^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(u^*_{i,j} + u^*_{j,i}\right) \tag{5}$$

4. 兼容条件

$$\varepsilon^*_{ij,kl} + \varepsilon^*_{kl,ij} - \varepsilon^*_{ik,jl} - \varepsilon^*_{jl,ik} = 0 \tag{6}$$

5. 边界条件

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \tag{7}$$

$$\sigma^*_{ij} n_j = \bar{t}_i - \sigma^0_{ij} n_j \quad \text{on } \Gamma_t \tag{8}$$