实验力学作业 2

孙振川　PB23081463

2025 年 10 月 26 日

题目 1. 采用控制体积微元法，推导柱坐标系下的微分形式动量方程

解答: 设柱坐标系下的速度分量为 u_r, u_θ, u_z，密度为 ρ，压力为 p，体积力为 f_r, f_θ, f_z。考虑一个微小的柱坐标系控制体积，半径方向长度为 dr，角度方向长度为 $rd\theta$，轴向长度为 dz。1. 质量守恒方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

2. 动量守恒方程：在 r 方向：

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r$$

在 θ 方向：

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_\theta$$

在 z 方向：

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z$$

综上所述，柱坐标系下的微分形式动量方程为

$$\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\rho f_r,$$
$$\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_r u_\theta}{r}\right)=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\rho f_\theta,$$
$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho f_z.$$

题目 2. 采用控制体积微元法，推导柱坐标系下的微分形式能量方程

解答: 设柱坐标系下的速度分量为 u_r, u_θ, u_z，密度为 ρ，压力为 p，内能为 e，热传导率为 k，体积力为 f_r, f_θ, f_z。考虑一个微小的柱坐标系控制体积，半径方向长度为 dr，角度方向长度为 $rd\theta$，轴向长度为 dz。能量守恒方程：

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+u_r\frac{\partial e}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial e}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial e}{\partial z}\right)=-p\left(\nabla\cdot\mathbf{u}\right)+\nabla\cdot(k\nabla T)+\rho(f_r u_r+f_\theta u_\theta+f_z u_z)$$

其中，$\nabla\cdot\mathbf{u}$ 在柱坐标系下表示为：

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

综上所述，柱坐标系下的微分形式能量方程为

$$\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+u_r\frac{\partial e}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial e}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial e}{\partial z}\right)=-p\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)+\nabla\cdot(k\nabla T)+\rho(f_r u_r+f_\theta u_\theta+f_z u$$

柱坐标系下能量方程的推导

推导过程

首先，考虑流体在柱坐标系下的控制体积微元。柱坐标系的坐标为 (r,θ,z)，其中 r 是径向坐标，θ 是角坐标，z 是高度坐标。

对于控制体积微元，能量的变化率包含了三项：

1. ** 能量的传递 **：通过对流（流体的流动）和传导（热的传递）。2. ** 能量的输入和输出 **：包括外力做功和热源。3. ** 局部的能量积累 **：流体中能量的增加或减少。

能量方程的微分形式可表示为：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi + Q$$

其中：- ρE 是单位体积的总能量，ρ 是流体密度，$E = e + \frac{v^2}{2}$ 是总能量（包括内部能和动能），其中 e 是内部能，v 是流速。- $\mathbf{v}$ 是流速矢量。- k 是热导率。- Φ 是粘性耗散项（由于粘性引起的能量损失）。- Q 是外部热源。

接下来，我们在柱坐标系下展开各个项。

对流项

对流项 $\nabla \cdot (\rho E \mathbf{v})$ 展开为：

$$\nabla \cdot (\rho E \mathbf{v}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \rho E v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho E v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho E v_z)$$

其中，v_r, v_θ, v_z 分别是径向、角向和垂直方向上的速度分量。

热传导项

热传导项 $\nabla \cdot (k \nabla T)$ 展开为：

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

粘性耗散项

粘性耗散项 Φ 可通过以下公式表示：

$$\Phi = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2$$

其中，μ 是流体的粘度。

外部热源项

外部热源项 Q 是体积单位的热源。

最终的能量方程

将上述项代入能量方程中，得到柱坐标系下的能量方程的微分形式：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho E v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho E v_\theta) +$$
$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho E v_z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$
$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi + Q$$