张量分析第一次作业

孙振川　PB23081463

2025 年 10 月 20 日

题目 1.　1．10 已知：以 i, j, k 表示三维空间中笛卡儿坐标基矢量，

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

（1）按公式（1．2．17），求 $\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{g}^3$ 以 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示的式子；（2）求 g_{rs} 。

解答:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3 \end{bmatrix} = \sqrt{g} = 2$$

$$\mathbf{g}^{\mathbf{1}} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{g}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{g}^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}$$

g_{rs} 的计算：

$$g_{11} = \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 2, \quad g_{12} = \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 1, \quad g_{13} = \boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}_3 = 1$$

$$g_{21} = \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 1, \quad g_{22} = \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 2, \quad g_{23} = \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_3 = 1$$

$$g_{31} = \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 1, \quad g_{32} = \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_2 = 1, \quad g_{33} = \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}_3 = 2$$

g_{rs} 矩阵为：

$$[g_{rs}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

题目 2. 1.12 已知：$\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{g}_1 + 3\boldsymbol{g}_2 - \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2 + \boldsymbol{g}_3$ ，基矢量同上题。运用 1．11 题求得的 g_{rs} 计算：（1）$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ ；（2）$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 的协变分量。

解答:

$$u = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = g_{ij} u^i v^j = 2$$

协变分量计算：

$$u_1 = g_{11}u^1 + g_{12}u^2 + g_{13}u^3 = 2 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times (-1) = 6$$
$$u_2 = g_{21}u^1 + g_{22}u^2 + g_{23}u^3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times (-1) = 7$$
$$u_3 = g_{31}u^1 + g_{32}u^2 + g_{33}u^3 = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times (-1) = 3$$

$$v_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2 + g_{13}v^3 = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 2$$
$$v_2 = g_{21}v^1 + g_{22}v^2 + g_{23}v^3 = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$$
$$v_3 = g_{31}v^1 + g_{32}v^2 + g_{33}v^3 = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times 1 = 2$$

因此，$\boldsymbol{u}$ 的协变分量为 $(6, 7, 3)$ ，$\boldsymbol{v}$ 的协变分量为 $(2, 0, 2)$ 。

题目 3. 1．13 已知：（1）圆柱坐标系如图 1．17（a），$r = x^1, \theta = x^2, z = x^3$ 。（2）球坐标系如图 1．17（b），$r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3$ 。
1.17 求：题 1.13 所示圆柱坐标和球坐标 x^i ，与笛卡儿坐标 $x^{j'}$ 的转换系数 $\beta^i_{j'}$ 与 $\beta^{j'}_i$ 。

解答：（1）圆柱坐标与笛卡儿坐标的转换系数：

$$\beta^{i}_{j'}=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j'}}=\begin{bmatrix}\frac{x^{1'}}{\sqrt{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2}} & \frac{x^{2'}}{\sqrt{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2}} & 0\\ -\frac{x^{2'}}{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2} & \frac{x^{1'}}{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\beta^{j'}_{i}=\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i}}=\beta^{i\,T}_{j'}=\begin{bmatrix}\frac{x^{1}}{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2}} & -\frac{x^{2}}{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2}} & 0\\ \frac{x^{2}}{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2}} & \frac{x^{1}}{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

（2）球坐标与笛卡儿坐标的转换系数：

$$\beta^{i}_{j'}=\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j'}}=\begin{bmatrix}\frac{x^{1'}}{\sqrt{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2+(x^{3'})^2}} & \frac{x^{2'}}{\sqrt{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2+(x^{3'})^2}} & \frac{x^{3'}}{\sqrt{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2+(x^{3'})^2}}\\ \frac{x^{1'}x^{3'}}{\sqrt{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2}\left((x^{1'})^2+(x^{2'})^2+(x^{3'})^2\right)} & \frac{x^{2'}x^{3'}}{\sqrt{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2}\left((x^{1'})^2+(x^{2'})^2+(x^{3'})^2\right)} & -\frac{\sqrt{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2}}{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2+(x^{3'})^2}\\ -\frac{x^{2'}}{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2} & \frac{x^{1'}}{(x^{1'})^2+(x^{2'})^2} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\end{bmatrix}$$

$$\beta^{j'}_{i}=\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i}}=\beta^{i\,T}_{j'}=\begin{bmatrix}\frac{x^{1}}{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2+(x^{3})^2}} & \frac{x^{1}x^{3}}{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2}((x^{1})^2+(x^{2})^2+(x^{3})^2)} & -\frac{x^{2}}{(x^{1})^2+(x^{2})^2}\\ \frac{x^{2}}{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2+(x^{3})^2}} & \frac{x^{2}x^{3}}{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2}((x^{1})^2+(x^{2})^2+(x^{3})^2)} & \frac{x^{1}}{(x^{1})^2+(x^{2})^2}\\ \frac{x^{3}}{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2+(x^{3})^2}} & -\frac{\sqrt{(x^{1})^2+(x^{2})^2}}{(x^{1})^2+(x^{2})^2+(x^{3})^2} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{bmatrix}$$

题目 4. 1．24 已知：N 为对称二阶张量，Ω 为反对称二阶张量，u 为任意矢量。求证：（1）$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u}$ （2）$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\Omega}=-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{u}$

解答: 设 $\boldsymbol{u}$ 的分量为 u_i ，$\boldsymbol{N}$ 的分量为 N_{ij} ，$\boldsymbol{\Omega}$ 的分量为 Ω_{ij} 。（1）$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}$ 的分量为:

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N})_j = u_i N_{ij} \; (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\Omega})_j = u_i \Omega_{ij}$$

$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u}$ 的分量为

$$(\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u})_j = N_{ji} u_i \; (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u})_j = \Omega_{ji} u_i$$

由于 $\boldsymbol{N}$ 为对称张量，即 $N_{ij} = N_{ji}$ ，所以

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N})_j = (\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u})_j$$

由于 $\boldsymbol{\Omega}$ 为对称张量，即 $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ ，所以

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\Omega})_j = -(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u})_j$$

因此，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u}$ ， $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u}$。

题目 5. 1.35 已知：任意张量 $\boldsymbol{T}$ 和度量张量 $\boldsymbol{G}$ 。

求证：$\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{G}$

解答: 设 $\boldsymbol{T}$ 的分量为 $T_{ij\ldots k}$ ，$\boldsymbol{G}$ 的分量为 G_{ij} 。则 $\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{T}$ 的分量为:

$$(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{T})_{j\ldots k} = G_{ij} T_{ij\ldots k}$$

$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{G}$ 的分量为

$$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{G})_{i\ldots j} = T_{i\ldots j} G_{jk}$$

由于度量张量的定义为 $G_{ij} = \delta_{ij}$ ，所以

$$(\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{T})_{j\ldots k} = T_{j\ldots k}$$

$$(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{G})_{i\ldots j} = T_{i\ldots j}$$

因此，$\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{G}$ 。

题目 6. 1.38 在笛卡儿坐标系中，各向同性材料的弹性关系为

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \tfrac{1}{E}\left[\sigma^{11}-\nu\left(\sigma^{22}+\sigma^{33}\right)\right], \quad \varepsilon_{12}=\tfrac{1+\nu}{E}\sigma^{12} \\
\varepsilon_{22} &= \tfrac{1}{E}\left[\sigma^{22}-\nu\left(\sigma^{33}+\sigma^{11}\right)\right], \quad \varepsilon_{23}=\tfrac{1+\nu}{E}\sigma^{23} \\
\varepsilon_{33} &= \tfrac{1}{E}\left[\sigma^{33}-\nu\left(\sigma^{11}+\sigma^{22}\right)\right], \quad \varepsilon_{31}=\tfrac{1+\nu}{E}\sigma^{31}
\end{aligned}$$

（1）利用商法则证明此式必定可以表示为一个张量的代数运算等式，写出其实体形式，说明等式中各阶张量的阶数。（2）将上式表示为可运用于任意坐标系的张量分量形式。（3）写出任意坐标系中的协变分量 D_{ijkl} 用 E ，ν 及度量张量分量表达的形式，以及 $\boldsymbol{D}$ 的并矢表达式。

解答: (1) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变张量，$\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量，则上述关系可以表示为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{E}\left[\boldsymbol{\sigma}-\nu(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I})\right]+\frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}_{\text{shear}}$$

其中，$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ 为应力张量的迹，$\boldsymbol{I}$ 为单位张量，$\boldsymbol{\sigma}_{\text{shear}}$ 为剪切应力部分。此等式中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 均为二阶张量。

(2) 在任意坐标系中，上述关系可以表示为:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{E}\left[\sigma^{ij}-\nu g^{ij}g_{kl}\sigma^{kl}\right]+\frac{1+\nu}{E}\sigma^{ij}_{\text{shear}}$$

(3) 任意坐标系中的协变分量 D_{ijkl} 可以表示为:

$$D_{ijkl}=\frac{1}{E}\left(g_{ik}g_{jl}+g_{il}g_{jk}-2\nu g_{ij}g_{kl}\right)$$

并矢表达式为:

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{E}\left(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}-2\nu\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\right)$$

题目 7. 1. 44$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为矢量。利用置换张量求证：$(\dot{A}\times B)\cdot(C\times D)=(A\cdot C)(B\cdot D)-(A\cdot D)(B\cdot C)$

解答:

$$(\dot{A} \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C) = \epsilon_{ijk} A_j B_k \epsilon_{ilm} C_l D_m$$

利用置换张量的性质，有：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

因此，

$$(\dot{A} \times B) \cdot (C \times D) = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m$$

$$= A_j C_j B_k D_k - A_j D_j B_k C_k = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$$

题目 8. 1.48 已知：$\boldsymbol{\Omega}$ 为二阶反对称张量，矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 互为反偶，即满足 $\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\Omega}$ 求证：对于任一矢量 $\boldsymbol{u}$ ，必满足 $\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$

解答: 设 $\boldsymbol{u}$ 的分量为 u_i ，$\boldsymbol{\Omega}$ 的分量为 Ω_{ij} ，$\boldsymbol{\omega}$ 的分量为 ω_i 。则 $\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u}$ 的分量为:

$$(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u})_j = \Omega_{ji} u_i$$

$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$ 的分量为

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})_j = \epsilon_{jik} \omega_i u_k$$

由于 $\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\Omega}$ ，所以

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{jk}$$

因此，

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})_j = \epsilon_{jik} \left(-\frac{1}{2}\epsilon_{ilm}\Omega_{lm} \right) u_k = \Omega_{ji} u_i = (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u})_j$$

因此，$\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}$ 。