

# 导航制导课程论文

雍征彼

2022 年 12 月 10 日

## 目录

<b>1 摘要</b>	<b>3</b>
<b>2 变体飞行器建模</b>	<b>3</b>
2.1 设计受控对象	3
2.1.1 飞机模型设计	3
2.1.2 主要气动参数	4
2.2 受控对象建模	5
2.2.1 气动参数计算	5
2.2.2 纵向飞机方程	6
2.2.3 切向方程	6
2.2.4 法向方程	7
2.2.5 力矩方程	7
2.2.6 方程线性化	7
2.2.7 其他方程	9
2.2.8 建模总结	9
<b>3 被控对象稳定性分析</b>	<b>10</b>
3.1 标准形态的稳定性	11
3.1.1 简化运动方程	11
3.1.2 特征多项式分析	11
3.1.3 稳定性判断条件	12
3.2 数据拟合	12
3.2.1 $C_{L_{\alpha=0}}$	12
3.2.2 $C_{L_{\alpha}}$	12
3.2.3 $C_{D_{\alpha=0}}$	13
3.2.4 $C_{D_{\alpha}}$	13
3.2.5 $C_{D_{\alpha^2}}$	13
3.2.6 $C_{m_{\alpha=0}}$	14
3.2.7 $C_{m_{\alpha}}$	14
3.3 变形的飞机	14
3.3.1 标准二阶系统	15
3.3.2 稳定性分析	16

<b>4 飞行控制系统设计</b>	<b>17</b>
4.1 控制目标 . . . . .	17
4.2 PID 控制 . . . . .	17
<b>5 致谢</b>	<b>19</b>
<b>6 项目地址</b>	<b>20</b>

## 1 摘要

导航制导课程设计主要有三个任务：变体飞行器建模，分析稳定性，设计飞行控制系统。本文就这三个任务进行逐一完成。

## 2 变体飞行器建模

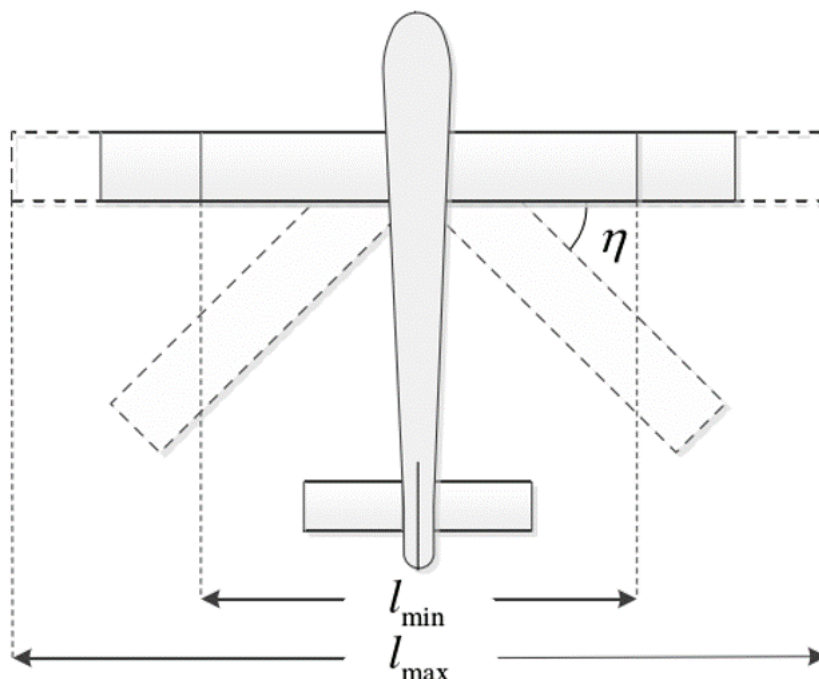
变体飞行器建模比固定形状飞行器建模要困难一些，因为变体飞行器在飞行的过程中会变形（如机翼翼展变长或变短，机翼与机身  $x$  轴所成夹角变大或变小），这种变形会导致飞行器的气动特性发生变化。本文采用李清老师推荐的建模方法对变体飞行器进行建模，其基本思路是先建立标准动力学方程（飞机未变形或者以某一形状作为基础形状时的动力学方程），然后再将变形引起的附加力和力矩单独进行建模。整个建模思路类似泰勒展开，首先固定一点函数值，然后变化过程用变化量去逼近。

### 2.1 设计受控对象

想要控制一个飞行器我们首先得有一个飞行器。这一部分工作李清老师提供了一个简易的飞机模型，不需要我们再重新设计。事实上重新设计飞行器来做这个控制的任务是比较困难的，因为如果设计的太过于复杂，后续的工作难度也会跟着上升。

#### 2.1.1 飞机模型设计

飞机的模型如下。



由于对飞行器建模及控制工作量是比较大的，李清老师提供了可以单独分析纵向通道和横侧向通道的选择，本文选择分析纵向通道。

表 1: 飞机基本物理参数

参数	参数符号	参数值
质量	$m$	$1247kg$
翼展	$l$	$10.18m$
翼面积	$S_w$	$17.09m^2$
机翼翼型	-	NACA 643-618
俯仰转动惯量	$I_y$	$4067.5kg \cdot m^2$
滚转转动惯量	$I_x$	$1420.9kg \cdot m^2$
偏航转动惯量	$I_z$	$4786.0kg \cdot m^2$
惯性积	$I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$	$0kg \cdot m^2$
平均气动弦长	$c_A$	$1.74m$

### 2.1.2 主要气动参数

气动参数的获取是对飞行器进行飞行仿真的关键一步，常见的气动参数获取方式有风洞实验、CFD 方法和 DATCOM 软件解算等。风洞实验就是将飞行器固定在风洞中，利用相对性原理人为地加入气流并使其作用在飞行器上，能够最真实地还原飞行器的飞行环境，从而得到最精确的飞行实验数据。但是风洞实验需要比较高的成本，而且需要进行大量的模拟实验，所以考虑到实际情况，现阶段还不具备进行变体飞行器风洞实验的条件。

CFD 方法不需要真实的物理模型，完全由计算机仿真得出实验数据，但是需要预先设计好飞行器的 CAD 模型，然后导入 CFD 软件进行网格划分，在分析变体飞行器时会导致工作量较大。

DATCOM 是由美国 AFFML 发布的用于计算飞行器气动参数的程序，其内置了各种根据经验得出的图表和公式，这些图表和公式是根据以往的飞行实验数据通过近似来得到飞行器的气动特性，所以在程序里输入飞行器的外形参数、控制参数和环境参数等，DATCOM 可以分析出飞行器的各个参数。

李清老师给出了一个设计好的参考模型和主要变形率对应的气动参数，我选择该模型作为建模对象，进行相关分析和处理。

表 2: 主要变形率对应升力系数

	$C_{L_{\alpha=0}}$	$C_{L_{\alpha}}$
$\lambda = 0, \rho = 0$	0.0760	0.1020
$\lambda = 0.5, \rho = 0$	0.1188	0.1051
$\lambda = 1, \rho = 0$	0.1410	0.1053
$\lambda = 0, \rho = 0.5$	0.0720	0.1001
$\lambda = 0.5, \rho = 0.5$	0.1166	0.1032
$\lambda = 1, \rho = 0.5$	0.1370	0.1034
$\lambda = 0, \rho = 1$	0.0589	0.0960
$\lambda = 0.5, \rho = 1$	0.1012	0.0997
$\lambda = 1, \rho = 1$	0.1256	0.0986

表 3: 主要变形率对应阻力系数

	$C_{D_{\alpha=0}}$	$C_{D_{\alpha}}$	$C_{D_{\alpha^2}}$
$\lambda = 0, \rho = 0$	0.0160	0.0002	0.0006
$\lambda = 0.5, \rho = 0$	0.0179	0.0003	0.0004
$\lambda = 1, \rho = 0$	0.0213	0.0004	0.0003
$\lambda = 0, \rho = 0.5$	0.0160	0.0001	0.0006
$\lambda = 0.5, \rho = 0.5$	0.0179	0.0003	0.0004
$\lambda = 1, \rho = 0.5$	0.0214	0.0004	0.0003
$\lambda = 0, \rho = 1$	0.0165	0	0.0006
$\lambda = 0.5, \rho = 1$	0.0186	0.0003	0.0004
$\lambda = 1, \rho = 1$	0.0221	0.0003	0.0003

表 4: 主要变形率对应俯仰力矩系数

	$C_{m_{\alpha=0}}$	$C_{m_{\alpha}}$
$\lambda = 0, \rho = 0$	0.2451	-0.0477
$\lambda = 0.5, \rho = 0$	0.1132	-0.0521
$\lambda = 1, \rho = 0$	0.0298	-0.0592
$\lambda = 0, \rho = 0.5$	0.2143	-0.0665
$\lambda = 0.5, \rho = 0.5$	0.0432	-0.0896
$\lambda = 1, \rho = 0.5$	-0.0406	-0.0995
$\lambda = 0, \rho = 1$	0.1940	-0.0900
$\lambda = 0.5, \rho = 1$	0.0187	-0.1198
$\lambda = 1, \rho = 1$	-0.1072	-0.1425

## 2.2 受控对象建模

飞机受到的力主要有三个来源：重力、发动机推力、空气动力。表示成数学形式为  $\vec{F} = \vec{G} + \vec{P} + \vec{R}$ 。其中  $\vec{F}$  表示飞机受到的合力， $\vec{G}$  表示飞机受到的重力， $\vec{P}$  表示飞机受到的发动机推力， $\vec{R}$  表示飞机受到的空气动力。

发动机推力  $\vec{P}$  可以写成  $\vec{P}(V, H, \delta_p)$  的形式，其中  $V$  表示飞机的速度，其中  $H$  表示飞机的高度，其中  $\delta_p$  表示飞机的油门开度。

空气动力  $\vec{R}$  可以写成  $\vec{R} = \vec{L} + \vec{D} + \vec{Y}$ 。其中  $\vec{L}$  表示飞机受到的升力， $\vec{D}$  表示飞机受到的阻力， $\vec{Y}$  表示飞机受到的侧滑力。

### 2.2.1 气动参数计算

幸运的是我们不需要从头对飞机的物理模型进行复杂的受力分析，而只需要通过气动参数就可以得到这些力的表示。气动力系数线性化表示如下

$$\begin{cases} C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta e}\delta e \\ C_D = C_{D0} + C_{D\alpha}\alpha + C_{D\delta e}\delta e \\ C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{mq}q + C_{m\delta e}\delta e \end{cases}$$

其中  $C_L$  表示飞机的升力系数，该系数已经是考虑了飞机所有部件影响之后的结果，所以在使用的時候直接将飞机当前状态和该参数进行某种运算就可以得到最终的升力。这种运算方法之后我会详细解释。 $C_{L0}$  表示迎角等于机翼零升力迎角时的升力。 $C_{L\alpha}$  表示迎角产生的升力系数， $\alpha$  表示飞机的迎角，这两项乘起来就可以得到迎角带来的升力。 $C_{L\delta e}$  表示升降舵或平尾偏转产生的升力， $\delta e$  表示飞机升降舵或平尾偏转的角度，这两项乘起来就可以得到升降舵或平尾偏转带来的升力。

$C_D$  表示飞机的阻力系数，它的意义和升力系数类似，故此处不再重复。

$C_m$  表示飞机的俯仰力矩，公式前两项和第四项与升力系数类似，第三项  $C_{mq}q$  与沿  $y$  轴转动角速度有关。

通过老师给出的各个变形率下的气动参数我们可以得到飞机的升力系数、阻力系数以及俯仰力矩系数。由于不同的变形率下气动参数是不同的，所以我们可以认为气动参数是变形率的一个函数，该函数可以通过拟合来得到。通过该函数和变形率我们可以得到一个函数值，该函数值就是飞机在该变形率下的气动参数。

由于我选择的任务是分析纵向通道上飞机的表现，所以在得到气动参数之后我准备根据气动参数列写纵向的飞机方程。

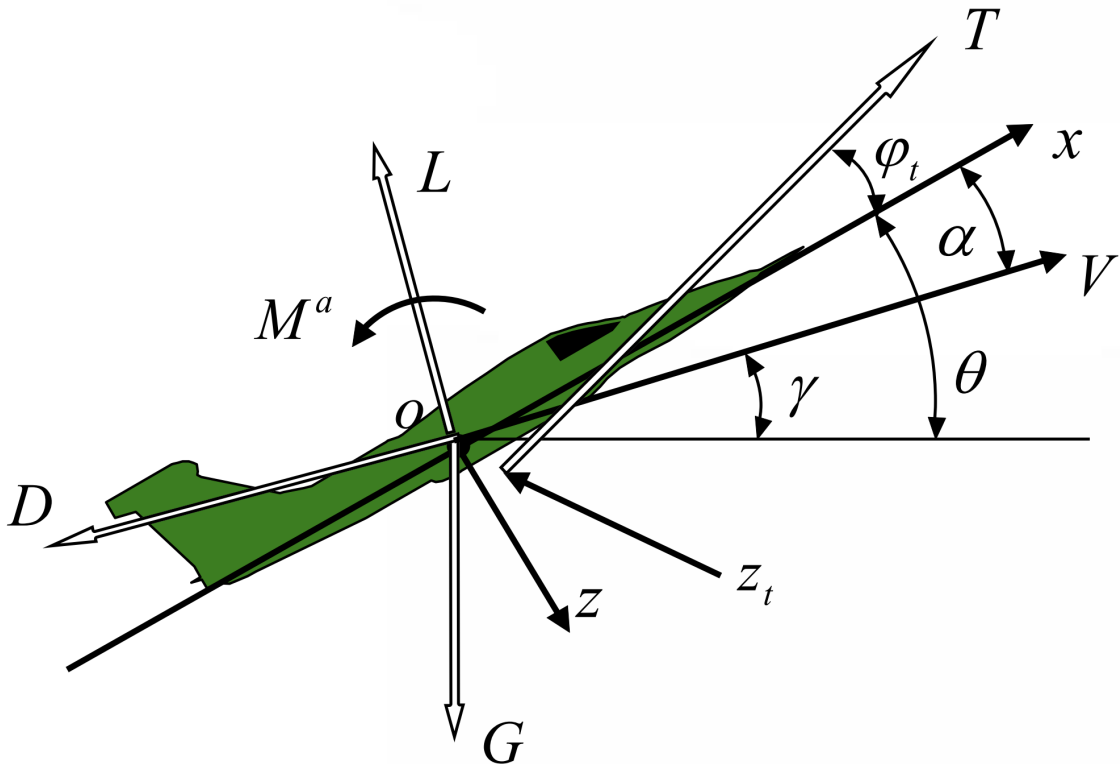
### 2.2.2 纵向飞机方程

纵向的飞机方程主要有三个：切向方程、法向方程、力矩方程。

#### 2.2.3 切向方程

$$m \frac{dV}{dt} = T \cos(\alpha + \varphi_t) - D - G \sin \gamma$$

这个方程中的变量较难理解，不过课件中提供了这些变量的示意图。



有了示意图之后我理解这些变量变得比较容易。

$m$  为飞机的质量, 该质量在模型设计阶段已经确定下来, 在参数列表中可以找到它为  $1247kg$ 。 $\frac{dV}{dt}$  表示飞机速度对时间的微分, 及加速度。等式的左边相当于牛顿第二定律里的  $ma$ 。

接下来我们看等式的右边。根据上面的示意图,  $T$  应当是发动机推力。发动机推力在 2.2 章节中被表示为  $P$ , 它与飞机当前速度、高度、油门开度有关, 可以表示成  $\vec{P}(V, H, \delta_p)$ 。不过为了方便理解我们还是将其写成示意图中表示的形式,  $\vec{T}(V, H, \delta_t)$ 。 $\alpha$  为飞机机体  $x$  轴与飞机速度方向所成的夹角。 $\phi_t$  表示发动机推力与飞机机体  $x$  轴所成的夹角。 $D$  表示飞机受到的阻力, 它与速度方向相反。 $G$  表示飞机受到的重力。 $\gamma$  表示飞机速度方向与地面轴  $xOy$  平面所成的夹角。

在上述变量中,  $m$  是固定的,  $V$  是飞机状态变量,  $t$  是状态变量,  $T$  是控制量的函数,  $\alpha$  是状态变量,  $\phi_t$  如果是矢量发动机则为控制量,  $D$  为状态变量,  $G$  为状态变量或者固定量,  $\gamma$  为状态变量。

其中升力  $L$ 、阻力  $D$ 、俯仰力矩  $M$ , 都可以通过力或力矩系数乘上飞机物理参数和当前状态来得到。

升力  $L$  可以通过  $L = C_L QS$  计算得到。其中  $C_L$  为升力系数,  $Q$  为动压, 可以通过  $Q = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$  得到。 $S$  为机翼面积和机身面积的表示形式, 不一定等于他们相加, 在本实验中简化处理为  $S_w$ 。

阻力  $D$  的计算方式与升力类似, 故不再赘述。

俯仰力矩  $M$  (统一写成示意图里的大写形式) 可以通过  $M = C_M QS_w c_A$  计算得到。其中  $c_A$  为平均气动弦长, 可以在参数表中得到。

通过上述的分析, 我们就成功建立了飞机纵向运动的切向方程, 只需要将飞机的状态变量和控制变量填入就可以得到最终的方程。但在此后我们还需要对这些方程进行线性化的操作以便于后计算。

#### 2.2.4 法向方程

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = T \sin(\alpha + \phi_t) + L - G \cos \gamma$$

法向方程推导的过程与切向方程类似, 故不再重复。

#### 2.2.5 力矩方程

$$I_y \frac{dq}{dt} = M^a + T z_t$$

$M^a$  是气动俯仰力矩,  $z_t$  是发动机推力向量到机体  $x$  轴的距离, 后面这一项代表发动机带来的俯仰力矩。

#### 2.2.6 方程线性化

在纵向运动方程中, 力和力矩是线性化的关键。方程线性化遵循同样的做法, 首先将所有影响它的飞行参数找出来, 然后排除掉其中不重要的部分, 最后求偏导将其线性化。

根据前面章节的分析, 发动机推力  $T$  与飞行速度  $V$ 、空气密度  $\rho$  (确定发动机的进气量), 供油量 (油门杆位置  $\delta_t$ ), 排气温度和排气压力、涡轮转速等有关。在基准运动附近我们认为排气温度、排气压力和涡轮转速等因素变化不大, 所以我们可以认为  $T = T(V, \rho, \delta_t)$ , 即认为发动机推力是飞行速度、空气密度和油门杆位置的函数。

我们遵循同样的规律将升力、阻力和气动力矩也写成这种形式。

升力

$$L = L(V, \rho, \alpha, \delta_e)$$

阻力

$$D = D(V, \rho, \alpha)$$

气动力矩

$$M^a = M^a(V, \rho, \alpha, \delta_e, \dot{\alpha}, q)$$

如果基准运动是水平直线飞行则还可以进一步简化，空气密度基本不变，所以上式可以改写。

$$T = T(V, \delta_t)$$

$$L = L(V, \alpha, \delta_e)$$

$$D = D(V, \alpha)$$

$$M^a = M^a(V, \alpha, \delta_e, \dot{\alpha}, q)$$

将基准运动参数设置为  $(V_0, \alpha_0, \delta_e, \delta_t, \dot{\alpha}_0 = 0, q_0 = 0)$  之后，我们可以对推力、升力、阻力和俯仰力矩进行线性化。

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_0 \Delta V + \left( \frac{\partial T}{\partial \delta_t} \right)_0 \Delta \delta_t \\ L &= L_0 + \left( \frac{\partial L}{\partial V} \right)_0 \Delta V + \left( \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right)_0 \Delta \alpha + \left( \frac{\partial L}{\partial \delta_e} \right)_0 \Delta \delta_e \\ D &= D_0 + \left( \frac{\partial D}{\partial V} \right)_0 \Delta V + \left( \frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)_0 \Delta \alpha \\ M^a &= M_0^a + \left( \frac{\partial M^a}{\partial V} \right)_0 \Delta V + \left( \frac{\partial M^a}{\partial \alpha} \right)_0 \Delta \alpha + \left( \frac{\partial M^a}{\partial \delta_e} \right)_0 \Delta \delta_e + \left( \frac{\partial M^a}{\partial \dot{\alpha}} \right)_0 \Delta \dot{\alpha} + \left( \frac{\partial M^a}{\partial q} \right)_0 \Delta q \end{aligned}$$

将上述偏导形式简化后可以得到下式。

$$T = T_0 + T_V \Delta V + T_{\delta_t} \Delta \delta_t$$

$$L = L_0 + L_V \Delta V + L_\alpha \Delta \alpha + L_{\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$D = D_0 + D_V \Delta V + D_\alpha \Delta \alpha$$

$$M^a = M_0^a + M_V^a \Delta V + M_\alpha^a \Delta \alpha + M_{\delta_e}^a \Delta \delta_e + M_{\dot{\alpha}}^a \Delta \dot{\alpha} + M_q^a \Delta q$$

线性化之后可以对原方程进行改写，将方程基准运动和变化运动分开。切向方程可以重写得到下式。

$$\frac{d\Delta \bar{V}}{dt} = \frac{T_V - D_V}{m} \Delta \bar{V} - \left( \frac{D_\alpha}{mV_0} - \frac{g}{V_0} \right) \Delta \alpha - \frac{g}{V_0} \Delta \theta + \frac{T_{\delta_t}}{mV_0} \Delta \delta_t$$

其中发动机相关的偏导数需要通过发动机特性曲线来确定，这里对阻力系数  $D_V$  和  $D_\alpha$  进行计算。具体推导过程不再赘述，参考李清老师课件直接给出如下计算方法。

$$D_V = \frac{1}{V_0} \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) S_w [2C_{D_0} + M_0 C_{D_M}]$$

$$D_\alpha = C_{D_\alpha} \times \frac{1}{2} \rho V_0^2 S_w$$

切向方程最终的形式如下。

$$\frac{d\Delta \bar{V}}{dt} = \frac{T_V - D_V}{m} \Delta \bar{V} - \left( \frac{D_\alpha}{mV_0} - \frac{g}{V_0} \right) \Delta \alpha - \frac{g}{V_0} \Delta \theta + \frac{T_{\delta_t}}{mV_0} \Delta \delta_t$$



法向方程处理类似。

$$\begin{aligned} L_V &= \frac{1}{V_0} \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) S_w [2C_{L_0} + M_0 C_{L_M}] \\ L_\alpha &= C_{L_\alpha} \times \frac{1}{2} \rho V_0^2 S_w \\ L_{\delta_e} &= C_{L_{\delta_e}} \times \frac{1}{2} \rho V_0^2 S_w \end{aligned}$$

法向方程最终形式如下。

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} - \frac{d\Delta\alpha}{dt} = \frac{L_V}{mV_0} \Delta V + \frac{L_\alpha}{mV_0} \Delta\alpha + \frac{L_{\delta_e}}{mV_0} \Delta\delta_e$$

力矩方程处理类似。

$$\begin{aligned} M_V^a &= \frac{2C_{m_0} + M_0 C_{m_M}}{V_0} \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) c_A S_w \\ M_\alpha^a &= \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) c_A S_w C_{m_\alpha} \\ M_{\dot{\alpha}}^a &= \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) \frac{c_A^2}{2V_0} S_w C_{m_{\dot{\alpha}}} \\ M_q^a &= \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) \frac{c_A^2}{2V_0} S_w C_{m_q} \\ M_{\delta_e}^a &= \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) \frac{c_A^2}{2V_0} S_w C_{m_{\delta_e}} \\ -\frac{V_0 (M_V^a + T_V z_t)}{I_y} \Delta \bar{V} - \frac{M_\alpha^a}{I_y} \Delta\alpha - \frac{M_{\dot{\alpha}}^a}{I_y} \Delta\dot{\alpha} - \frac{M_q^a}{I_y} \frac{d\Delta\theta}{dt} + \frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} &= \frac{M_{\delta_e}^a}{I_y} \Delta\delta_e + \frac{T_{\delta_e} z_t}{I_y} \Delta\delta_t \end{aligned}$$

### 2.2.7 其他方程

1. 沿速度方向的力

$$T \cos(\alpha + \varphi_t) - D - G \sin \gamma$$

2. 垂直于速度方向的力

$$T \sin(\alpha + \varphi_t) + L - G \cos \gamma$$

3.  $q$  与  $\theta$  的关系

$$\frac{d\theta}{dt} = q$$

4.  $\gamma$ ,  $\theta$  与  $\alpha$  的关系

$$\gamma = \theta - \alpha$$

### 2.2.8 建模总结

上述分析只是解释了飞机纵向通道的各个方程中的各个参数是怎么计算的，但是没有真正将他们算出来并代入方程。原因显而易见，参数表很庞大，而且飞机状态并不是固定不变的，所以我们应该用计算机程序来对其进行计算。

将方程总结如下。

$$\begin{cases} \frac{d\Delta\bar{V}}{dt} + \frac{D_V - T_V}{m} \Delta\bar{V} + \left( \frac{D_\alpha}{mV_0} - \frac{g}{V_0} \right) \Delta\alpha + \frac{g}{V_0} \Delta\theta = \frac{T_{\delta_t}}{mV_0} \Delta\delta_t \\ \frac{d\Delta\alpha}{dt} + \frac{L_\alpha}{mV_0} \Delta\alpha + \frac{L_V}{mV_0} \Delta V - \frac{d\Delta\theta}{dt} = -\frac{L_{\delta_e}}{mV_0} \Delta\delta_e \\ -\frac{V_0 (M_V^a + T_V z_t)}{I_y} \Delta\bar{V} - \frac{M_\alpha^a}{I_y} \Delta\alpha - \frac{M_{\dot{\alpha}}^a}{I_y} \Delta\dot{\alpha} - \frac{M_q^a}{I_y} \frac{d\Delta\theta}{dt} + \frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} = \frac{M_{\delta_e}^a}{I_y} \Delta\delta_e + \frac{T_{\delta_t} z_t}{I_y} \Delta\delta_t \end{cases}$$

将方程中的导数写为大导数形式。

$$\begin{cases} \Delta \dot{\bar{V}} + X_V \Delta \bar{V} + X_\alpha \Delta \alpha + X_\theta \Delta \theta = -X_{\delta_t} \Delta \delta_t \\ Z_V \Delta \bar{V} + \Delta \dot{\alpha} + Z_\alpha \Delta \alpha - \Delta \dot{\theta} = -Z_{\delta_e} \Delta \delta_e \\ M_V \Delta \bar{V} + M_{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + M_\alpha \Delta \alpha + \Delta \ddot{\theta} + M_q \Delta \dot{\theta} = -M_{\delta_e} \Delta \delta_e - M_{\delta_t} \Delta \delta_t \end{cases}$$

上面的所有方程等式左边是状态量，等式右边是控制量。该四阶微分方程是分析系统性能的依据。至此，建模的理论推导部分就完成了。

为了未来计算的方便，我将大导数重新列写一遍。

$$\begin{aligned} X_V &= \frac{D_V - T_V}{m} \\ X_\alpha &= \left( \frac{D_\alpha}{mV_0} - \frac{g}{V_0} \right) \\ X_\theta &= \frac{g}{V_0} \\ X_{\delta_t} &= -\frac{T_{\delta_t}}{mV_0} \\ Z_V &= \frac{L_V}{mV_0} \\ Z_\alpha &= \frac{L_\alpha}{mV_0} \\ Z_{\delta_e} &= \frac{L_{\delta_e}}{mV_0} \\ M_V &= -\frac{V_0 (M_V^a + T_V z_t)}{I_y} \\ M_{\dot{\alpha}} &= -\frac{M_{\dot{\alpha}}^a}{I_y} \\ M_\alpha &= -\frac{M_\alpha^a}{I_y} \\ M_q &= -\frac{M_q^a}{I_y} \\ M_{\delta_e} &= -\frac{M_{\delta_e}^a}{I_y} \\ M_{\delta_t} &= -\frac{T_{\delta_t} z_t}{I_y} \end{aligned}$$

### 3 被控对象稳定性分析

在飞机设计过程中稳定性分析是十分重要的，这一部分工作关乎飞机的安全，所以不可马虎。

在前面建模完成的基础之上我们可以对稳定性进行分析。由于我控制原理基础较差，所以我准备根据李清老师在课程设计要求的提示来推进这部分工作。他提示我们首先将模型转化为状态方程或者传递函数的形式，并根据上述形式对被控对象的稳定性进行分析。在上述过程中我们需要对参数数据进行拟合，并将其表示为变形率相关的函数。

### 3.1 标准形态的稳定性

不过在考虑变形之前我们先对标准形态的飞机进行分析。由上面大导数作为系数的方程组我们可以对飞机进行一定程度的分析了。

#### 3.1.1 简化运动方程

我们假设飞机出现了一个迎角的干扰，而没有其他扰动以及操纵的作用。即  $\Delta\alpha(0) = \Delta\alpha_0 \neq 0$ ,  $\Delta\bar{V}(0) = \Delta\theta(0) = \Delta\dot{\theta}(0) = 0, \Delta\delta_t = 0, \Delta\delta_e = 0$ 。则我们将纵向运动方程极大地简化了，将方程重写如下。

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\bar{V}} + X_V\Delta\bar{V} + X_\alpha\Delta\alpha + X_\theta\Delta\theta &= 0 \\ Z_V\Delta\bar{V} + \Delta\dot{\alpha} + Z_\alpha\Delta\alpha - \Delta\dot{\theta} &= 0 \\ M_V\Delta\bar{V} + M_{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + M_\alpha\Delta\alpha + \Delta\ddot{\theta} + M_q\Delta\dot{\theta} &= 0\end{aligned}$$

我们仍然省去一部分与课件中相同的推导。通过对变量的拉氏变换以及重新代入微分方程的化简，我们可以得到方程的矩阵表达式形式。

$$\begin{bmatrix} s + X_V & X_\alpha & X_\theta \\ Z_V & s + Z_\alpha & -s \\ M_V & M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha & s^2 + M_qs \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{V}(s) \\ \Delta\alpha(s) \\ \Delta\theta(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ M_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \Delta\alpha_0$$

#### 3.1.2 特征多项式分析

系统的特征多项式如下。

$$\Delta_0(s) = \begin{vmatrix} s + X_V & X_\alpha & X_\theta \\ Z_V & s + Z_\alpha & -s \\ M_V & M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha & s^2 + M_qs \end{vmatrix}$$

解满足如下条件。

$$\Delta\bar{V}(s) = \frac{\Delta_V(s)}{\Delta_0(s)}, \Delta\alpha(s) = \frac{\Delta_\alpha(s)}{\Delta_0(s)}, \Delta\theta(s) = \frac{\Delta_\theta(s)}{\Delta_0(s)}$$

将行列式展开得到如下结果。

$$\Delta_0(s) = (s + X_V) \begin{vmatrix} s + Z_\alpha & -s \\ M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha & s^2 + M_qs \end{vmatrix} - X_\alpha \begin{vmatrix} Z_V & -s \\ M_V & s^2 + M_qs \end{vmatrix} + X_\theta \begin{vmatrix} Z_V & s + Z_\alpha \\ M_V & M_{\dot{\alpha}}s + M_\alpha \end{vmatrix}$$

继续展开。

$$\begin{aligned}\Delta_0(s) &= s^4 + (M_q + Z_\alpha + M_{\dot{\alpha}} + X_V) s^3 \\ &+ [X_V(M_q + Z_\alpha + M_{\dot{\alpha}}) + Z_\alpha M_q + M_\alpha - X_\alpha Z_V] s^2 \\ &+ [X_V(Z_\alpha M_q + M_\alpha) + X_\theta(Z_V M_{\dot{\alpha}} - M_V) - X_\alpha(Z_V M_q + M_V)] s \\ &+ X_\theta[Z_V M_\alpha - M_V Z_\alpha]\end{aligned}$$

### 3.1.3 稳定性判断条件

最后我们得到了如下结果。

$$\begin{aligned}\Delta \bar{V}(s) &= \frac{\Delta V(s)}{\Delta_0(s)} = \frac{\Delta \alpha_0 [b_2 s^2 + b_1 s + b_0]}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \Delta \alpha(s) &= \frac{\Delta_\alpha(s)}{\Delta_0(s)} = \frac{\Delta \alpha_0 [s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0]}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \\ \Delta \theta(s) &= \frac{\Delta_\theta(s)}{\Delta_0(s)} = \frac{\Delta \alpha_0 [d_1 s + d_0]}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}\end{aligned}$$

我们可以得到系统稳定的条件。

$$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$$

即

$$\begin{aligned}a_3 &= (M_q + Z_\alpha + M_{\dot{\alpha}} + X_V) > 0 \\ a_2 &= X_V (M_q + Z_\alpha + M_{\dot{\alpha}}) + Z_\alpha M_q + M_\alpha - X_\alpha Z_V > 0 \\ a_1 &= X_V (Z_\alpha M_q + M_\alpha) + X_\theta (Z_V M_{\dot{\alpha}} - M_V) - X_\alpha (Z_V M_q + M_V) > 0 \\ a_0 &= X_\theta [Z_V M_\alpha - M_V Z_\alpha] > 0\end{aligned}$$

到这里我们已经可以通过大导数来判断稳定性了，只需要将参数全部计算出来再通过简单的逻辑判断即可得到是否稳定的判断结果。但这种方法只是稳定的必要条件，继续向下模态分析需要多项式的因式分解和配平方等操作，我们需要一种更加便于计算机处理的方法，但我已经忘了现代控制理论的李雅普诺夫稳定性的内容，所以我准备用课件中模态分解后的长周期和短周期的二阶系统来分析稳定性。

直到目前，我们的所有分析均在标准型的飞机上完成，所以我们需要将变形率引入我们的方程。

## 3.2 数据拟合

由于老师仅仅给出了几个数据点的数据，而且在真实情况中我们也只能仿真离散的几个点，所以我们需要用函数对变形率的数据进行拟合来得到一个连续变化的值。

### 3.2.1 $C_{L_{\alpha=0}}$

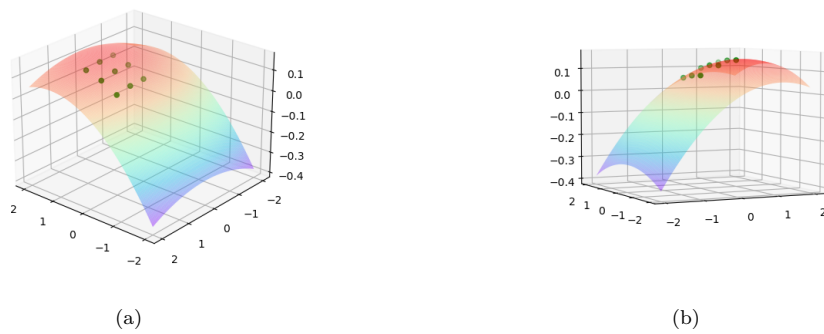
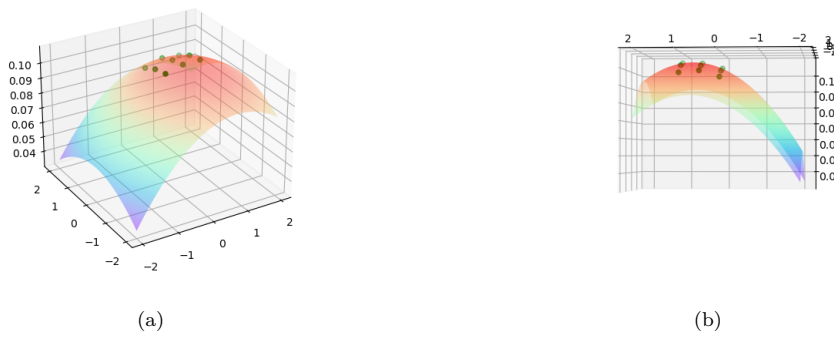
$C_{L_{\alpha=0}}$  可以视为变形率  $\lambda$  和  $\rho$  的函数，这相当于是一个三维曲面，所以我们用一个三维曲面去拟合它即可。拟合结果如下。

$$C_{L_{\alpha=0}} = -0.041\lambda^2 + 0.001 * \lambda\rho - 0.019 * \rho^2 + 0.106 * \lambda + 0.002 * \rho + 0.076$$

### 3.2.2 $C_{L_\alpha}$

我们对该变量以及下面的部分做与上相同的处理。

$$C_{L_\alpha} = -0.007\lambda^2 - 0.000 * \lambda\rho - 0.004 * \rho^2 + 0.010 * \lambda - 0.001 * \rho + 0.101$$

图 1:  $C_{L_{\alpha=0}}$  拟合曲面图 2:  $C_{L_{\alpha}}$  拟合曲面

### 3.2.3 $C_{D_{\alpha=0}}$

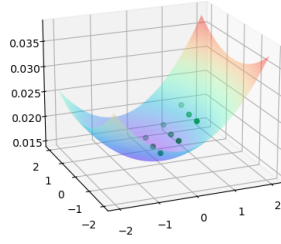
$$C_{D_{\alpha=0}} = +0.002\lambda^2 + 0.000 * \lambda\rho + 0.001 * \rho^2 + 0.002 * \lambda - 0.000 * \rho + 0.016$$

### 3.2.4 $C_{D_{\alpha}}$

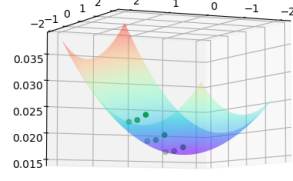
$$C_{D_{\alpha}} = -0.000\lambda^2 + 0.000 * \lambda\rho - 6.666 * \rho^2 + 0.000 * \lambda - 8.333 * \rho + 0.000$$

### 3.2.5 $C_{D_{\alpha^2}}$

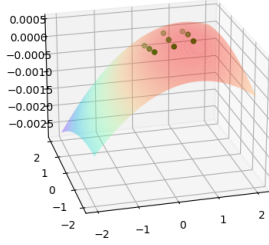
$$C_{D_{\alpha^2}} = +0.000\lambda^2 + 3.079 * \lambda\rho + 2.226 * \rho^2 - 0.000 * \lambda - 2.436 * \rho + 0.000$$



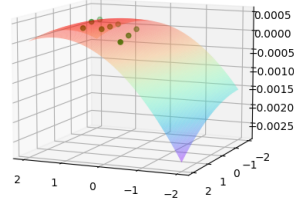
(a)



(b)

图 3:  $C_{D_{\alpha=0}}$  拟合曲面

(a)



(b)

图 4:  $C_{D_{\alpha}}$  拟合曲面

### 3.2.6 $C_{m_{\alpha=0}}$

$$C_{m_{\alpha=0}} = +0.123\lambda^2 - 0.085 * \lambda\rho + 0.039 * \rho^2 - 0.337 * \lambda - 0.091 * \rho + 0.246$$

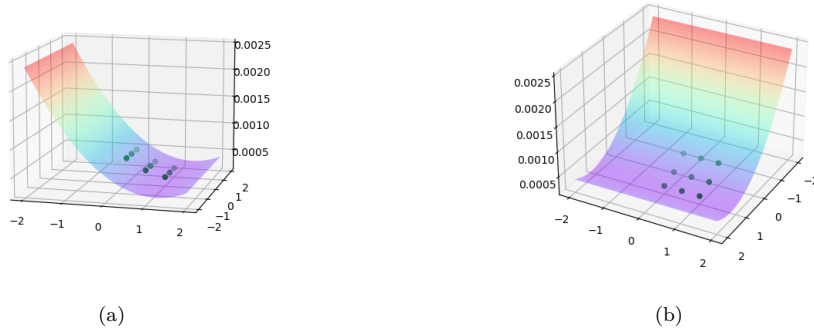
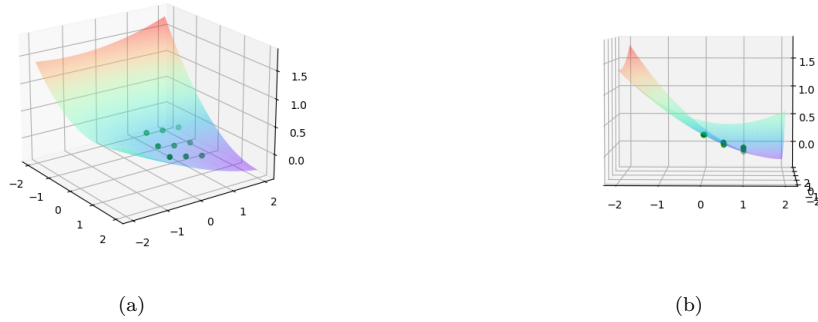
### 3.2.7 $C_{m_{\alpha}}$

$$C_{m_{\alpha}} = +0.011\lambda^2 - 0.040 * \lambda\rho - 6.666 * \rho^2 - 0.023 * \lambda - 0.043 * \rho - 0.046$$

## 3.3 变形的飞机

经过了上述的拟合，我们的变体飞机控制分析不再局限于特定的几个变形率，而是实现了对飞机连续的变化的近似。由于本文采取的是参数化建模方法，所以变形率对飞机外观以及性能的影响全部可以体现在气动参数上，我们只需要根据变形率和飞机的状态计算出对应的气动参数即可。气动参数随变形率的变化计算在上一节已经完成。

到这里我们可以开始进行模态分解了。飞机的纵向运动主要有两种模态：长周期、短周期。在研究生版本的 GNC-013 课件中有详细的推导，我这里直接引用其中的结论。

图 5:  $C_{D_{\alpha^2}}$  拟合曲面图 6:  $C_{m_{\alpha=0}}$  拟合曲面

### 3.3.1 标准二阶系统

二阶系统可以写为如下的标准形式。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = K\omega_n^2 x$$

根据推导，长周期运动在该二阶方程中的系数可以写为如下形式。

$$\omega_{n_p} = \sqrt{\frac{-Z_V g}{V_0}}$$

$$\zeta_p = \frac{-X_V}{2\omega_{n_p}}$$

短周期参数如下。

$$\omega_{n_{sp}} = \sqrt{\frac{Z_V M_q}{V_0} - M_{\alpha}}$$

$$\zeta_{sp} = -\frac{M_q + M_{\dot{\alpha}} + \frac{Z_{\dot{\alpha}}}{V_0}}{2\omega_{n_{sp}}}$$

计算出上述参数之后就可以按照标准二阶方程稳定性进行分析了。系统为过阻尼、临界阻尼、欠阻尼时系统稳定，为零阻尼和负阻尼时系统不稳定。判断稳定性的方法对于上述两种模态是一致的，所以我们只需要用程序实现算法即可。

图 7:  $C_{m_\alpha}$  拟合曲面

### 3.3.2 稳定性分析

欠阻尼  $0 < \zeta < 1$ ; 临界阻尼  $\zeta = 1$ ; 过阻尼  $\zeta > 1$ ; 零阻尼  $\zeta = 0$ ; 负阻尼  $-1 < \zeta < 0$ ; 负阻尼  $\zeta < -1$ 。

按照上述分析将某一个变形率所对应的上述参数计算出来并对上述六种情况进行归类即可完成对稳定性的判断。对原始形态的模型分析程序运行结果如下。

\*\*\*\*\*

气动导数

---

$XV: 0.00024340589421010424$	$Xa: -0.3275401069518717$	$Xtheta: 0.3275401069518717$
$ZV: 3.864231275060144e-05$	$Za: 0.0007682498536006415$	$MV: -0.059730471707155446$
$Ma: 0.005584556297823476$	$Madot: -0.0$	$Mq: -0.0$

---

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

飞机参数

---

质量:	1247.0 kg
翼展:	10.18 m
翼面积:	17.09 m <sup>2</sup>
重力加速度 $g$ :	9.8 kg*m/s <sup>2</sup>
当地马赫数 $M$ :	340.0 m/s
初始马赫数 $M0$ :	0.088
初始速度:	29.919999999999998 m/s
飞行高度 $h$ :	2000.0 m
空气密度 $\rho$ :	0.0371
初始迎角:	0.0
升降舵偏转对升力的影响 $CLdeltae$ :	0.0
升降舵对俯仰力矩的系数 $Cmdeltae$ :	0.0
转动惯量 $I_x$ :	1420.9 kg*m <sup>2</sup>
$I_y$ :	4067.5 kg*m <sup>2</sup>
$I_z$ :	4786.0 kg*m <sup>2</sup>



惯性积 $I_{xy}$ :	$0.0 \text{ m}^4$	$I_{yz}$ :	$0.0 \text{ m}^4$	$I_{zx}$ :	$0.0 \text{ m}^4$
平均气动弦长 $cA$ :	$1.74 \text{ m}$				
翼展变形率 $\lambda$ :	$0.0$				
翼角变形率 $\rho$ :	$0.0$				
零迎角升力系数 $CL_0$ :	$0.076$				
迎角升力系数 $CL_\alpha$ :	$0.101$				
马赫数升力系数 $CL_M$ :	$0.0$				
零迎角阻力系数 $CD_0$ :	$0.016$				
迎角阻力系数 $CD_\alpha$ :	$0.0$				
马赫数阻力系数 $CD_M$ :	$0.0$				
迎角力矩系数 $Cm_\alpha$ :	$-0.046$				
地面轴角速度力矩系数 $Cm_q$ :	$0.0$				
机体轴角速度力矩系数 $Cm_{\dot{\alpha}}$ :	$0.0$				
马赫数力矩系数 $Cm_M$ :	$0.0$				
发动机推力系数 $T_{\delta t}$ :	$0.0$				
推力对速度偏导数:	$0.0$				
$\gamma_0$ :	$0.0$				
推力矢量到机体 $x$ 轴的距离 $z_t$ :	$0.0 \text{ m}$				
稳定性:	$True$				

\*\*\*\*\*

由于篇幅限制，本文中不放过多其他变形率的分析结果。我将本文实现的代码放在了 Github 仓库中，我将仓库的链接放在了文末。受限于时间，未完成二阶微分方程中的特征参数随变形率的图像，不过凭借基础代码应当能比较容易地画出。未来如果有应用需求我还会将此仓库不断完善。

## 4 飞行控制系统设计

由于对控制理论比较生疏，所以本文采用最简单的 PID 算法对飞行品质进行控制。

### 4.1 控制目标

老师给出的任务是基于飞行品质进行控制。而根据课程内容，纵向的飞行品质与长周期和短周期这两个模态紧密相关。由于飞行品质是一个非常主观的感受，所以实际上品质的好与坏实际上对应于一个范围，对于纵向飞行品质这个范围描述如下。我准备做第一级水平的飞行品质，所以我的控制目标是使  $\zeta$  和  $\zeta_{sp}$  落在表中的范围。

### 4.2 PID 控制

我们不妨再将前面计算过的  $\zeta$  和  $\zeta_{sp}$  复习一遍。

$$\zeta_p = \frac{-X_V}{2\omega_{n_p}}$$

$$\zeta_{sp} = -\frac{M_q + M_{\dot{\alpha}} + \frac{Z_{\dot{\alpha}}}{V_0}}{2\omega_{n_{sp}}}$$

表 5: 纵向飞行品质

长周期方式				
第一级水平	$\zeta_p > 0.04$			
第二级水平	$\zeta_p > 0$			
第三级水平	$T_2 > 55s$			
短周期方式				
A 类和 C 类			B 类	
	$\zeta_{sp}$	$\zeta_{sp}$	$\zeta_{sp}$	$\zeta_{sp}$
水平	最小	最大	最小	最大
1	0.35	1.30	0.3	2.0
2	0.25	2.00	0.2	2.0
3	0.15	——	0.15	——

我们再找到相关的参数。

长周期。

$$X_V = \frac{D_V - T_V}{m}$$

$$\omega_{n_p} = \sqrt{\frac{-Z_V g}{V_0}}$$

$$Z_V = \frac{L_V}{mV_0}$$

$$L_V = \frac{1}{V_0} \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) S_w [2C_{L_0} + M_0 C_{L_M}]$$

短周期。

$$M_q = -\frac{M_q^a}{I_y}$$

$$M_{\dot{\alpha}} = -\frac{M_{\dot{\alpha}}^a}{I_y}$$

$$Z_{\alpha} = \frac{L_{\alpha}}{mV_0}$$

$$\omega_{n_{sp}} = \sqrt{\frac{Z_V M_q}{V_0} - M_{\alpha}}$$

$$M_q^a = \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) \frac{c_A^2}{2V_0} S_w C_{m_q}$$

$$M_{\dot{\alpha}}^a = \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) \frac{c_A^2}{2V_0} S_w C_{m_{\dot{\alpha}}}$$

$$L_{\alpha} = C_{L_{\alpha}} \times \frac{1}{2} \rho V_0^2 S_w$$

$$M_{\alpha} = -\frac{M_{\alpha}^a}{I_y}$$

$$M_{\alpha}^a = \left( \frac{1}{2} \rho V_0^2 \right) c_A S_w C_{m_{\alpha}}$$

可以看到在这些参数中我们真正能控制的量很少，但由于我们是可变形的飞机，所以实际上相当多参数都可以被变形导致的气动参数变化所影响。

由于我们控制的是飞行品质，秉持控制什么就反馈什么的设计理念，我们把长周期和短周期的  $\zeta$  分别反馈回来，将反馈回的  $\zeta$  与第一级水平的  $\zeta$  相减得到偏差  $e$ ，然后将该  $e$  输入 PID 控制器并得到一个控制量  $u$ ，将这个控制量  $u$  分别当作操纵量  $\delta_e, \delta_t$  和变形量  $\lambda, \rho$  即可。但经过与老师的讨论之后我发现我们需要控制的并不是飞行品质而应该是姿态角，但我们在控制姿态角的时候应该保证飞行品质，所以飞行品质的控制实际上是一个背景条件而不是主要目标。虽然控制的对象选错了，但是控制理念还是不变，仍然是控制什么就反馈什么，如果阻尼不够就再把它的一阶导数反馈回来。对于纵向运动来说，我们应该反馈的量应该是  $q, \dot{q}$ 。

PID 控制公式如下。

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p \tau \frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{T_i} \bullet \frac{T_i \tau s^2 + T_i s + 1}{s}$$

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t E(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

由于我们使用的是计算机编程实现的控制器，所以我们应该使用数字 PID。增量式 PID 控制算法如下。

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$$

$$\Delta u(k) = K_p(e(k) - e(k-1)) + K_i T e(k) + \frac{K_d(e(k) - 2e(k-1) + e(k-2))}{T}$$

通过 PID 算法之后我们可以获得一个控制量，该控制量应该输出到舵机。那么如何在控制过程中保持它的飞行品质呢？事实上我们无法控制飞行品质，因为飞行品质与飞机质量  $m$  一样，一经设计出来它即为一个常数，不过对于变形的飞机来说飞行品质会随着变形率的变化而变化，这种变化我们需要让它维持在一个范围内，所以飞行品质实际上是一个变形率的函数，保持飞行品质就是对变形率的范围做出一个限制。而由于变形会带来飞行品质的改变，我们需要将其闭环，用控制来校正变形带来的影响。控制器算法在上面已经介绍过，我们在此计算出飞行品质作为本节的结束。当变形率为  $(\lambda = 0.5, \rho = 0.5)$  时，飞行品质为  $(\zeta_p = 0.031, \zeta_{sp} = 2.831 \times 10^{-5})$ 。可以看到该飞机飞行品质是比较差的，所以需要控制器去弥补操纵的感觉。

控制器部分的代码目前还没有完成。

## 5 致谢

本文内容绝大部分参考李清老师开设的导航制导课程中发布的资料。非常感谢老师能够开设这样一门关于控制理论实际应用的课程，我在学习控制理论的时候总是对状态方程怎么来的或者传递函数怎么来的这些问题感到疑惑，因为没有先导的建模课程，所以我无法将这些方法应用在实际的对象身上（现在仍然很困难）。这门课提供了飞机从建模到控制的全过程分析，基本在设计和控制一个对象的流程上做了一个很好的展示，由于时间和个人能力不足的缘故，本文所使用的控制理论知识都还是比较入门的部分，并且很多理论推导的部分以及数学公式的排版还不够完善，希望以后能够有机会能够将其完善并将我所学过的更加复杂的控制方法实现在这个模型当中。

再次感谢老师这一学期的辛勤付出。

## 6 项目地址

<https://github.com/zhengbi-yong/AeroplaneControl>