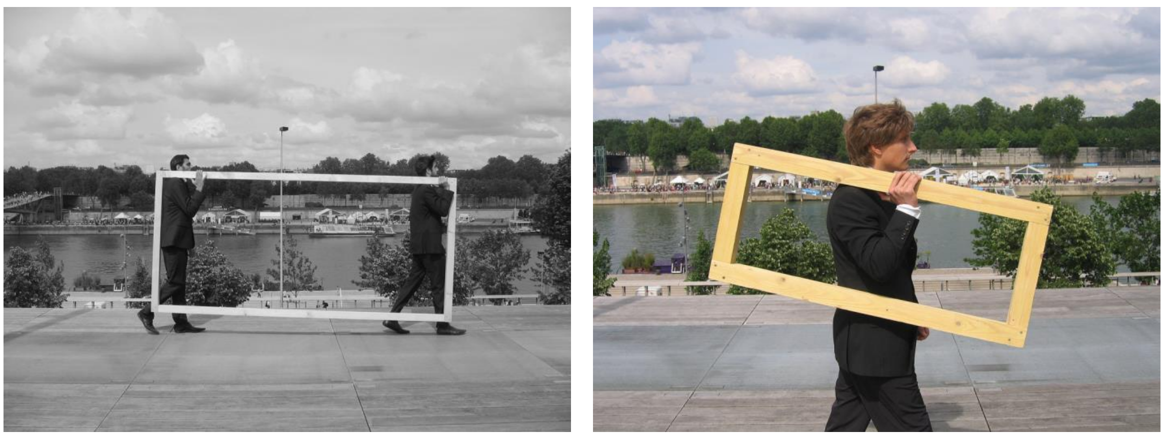
Image Warping Report

郑凯文

2021 年 3 月 23 日

1 仿射变换



(a) source (b) target

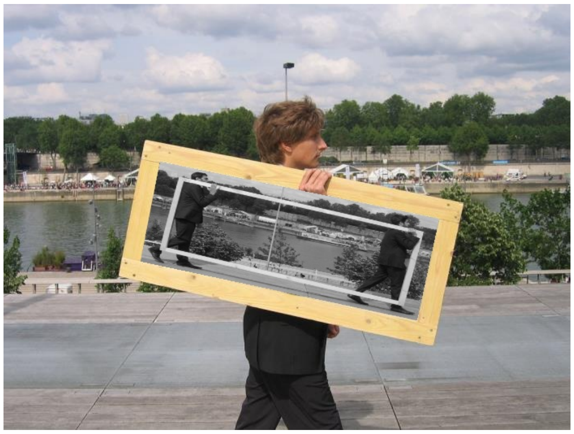
图 1: 原图

在原图中选定(157, 176), (157, 411), (575, 411), (575, 176)四个点，对应于目标图的(193, 194), (169, 316), (509, 388), (536, 264)，原图到目标图的变换使用齐次坐标表示为

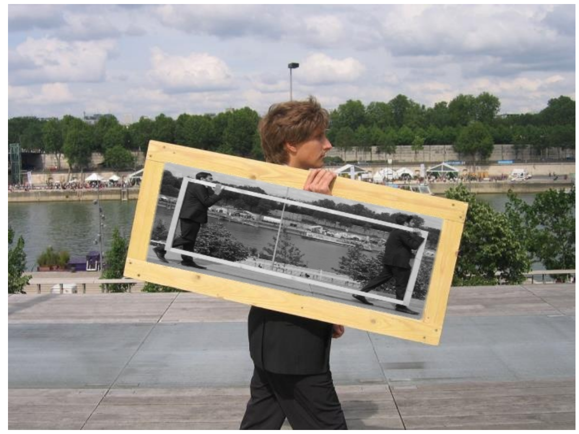
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

将选定区域近似为矩形，利用四组对应点中的三组（或用上全部四组并进行最小二乘）可唯一求得变换参数，进而确定变换$\mathbf{T}$和逆变换$\mathbf{T}^{-1}$。使用inverse warping，对于目标图中的每一点，得到原图中对应点并使用双线性插值获取平滑的像素值。效果如下：

这时框中的直线很光滑了，但框的边界仍然有明显的锯齿。于是再次对边界进行双线性插值，可以得到平滑的边界（图2b）。



(a) 双线性插值



(b) 双线性插值+边界平滑

图 2: 仿射变换

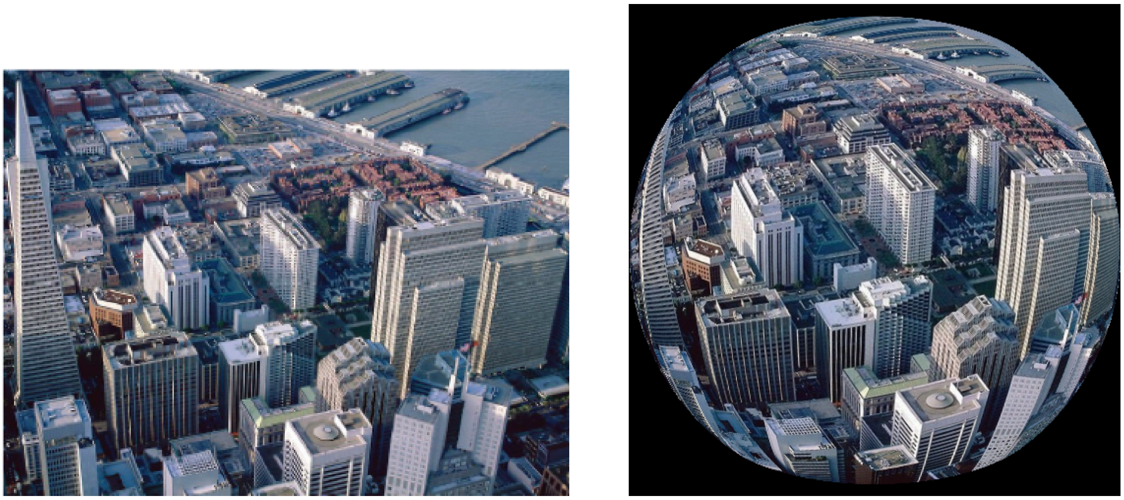
2 球形变换

利用课件中的公式进行球形变换，对于目标图中的某点(r_{out}, c_{out})，利用下列公式得到原图中的某点(r_{in}, c_{in})

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{r_{out}^2 + c_{out}^2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{r_{out}}{c_{out}}\right) \\
\phi &= \sin^{-1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \\
d &= \frac{2}{\pi} d_0 \phi \\
r_{in} &= d \sin\theta \\
c_{in} &= d \cos\theta
\end{aligned} \tag{2}
$$

其中$\rho_0 = \frac{1}{2}\min(R_{out}, C_{out}), d_0 = \frac{1}{2}\max(R_{in}, C_{in})$。这同样是inverse warping，我也使用了双线性插值来使图像更平滑。

注意到球是不完整的，上下各缺失了一块，这是由于图像的宽度大于高度，公式中将二者之中较大者与球的半圈匹配。



(a) 原图

(b) 效果图

图 3: 球形变换

3 鱼眼变换

我实现的鱼眼变换使用了如下的inverse warping：

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{r_{out}^2 + c_{out}^2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{r_{out}}{c_{out}}\right) \\
d &= c \cdot \exp\left(\frac{\rho^{1/2.1}}{1.8}\right) \\
r_{in} &= d \sin\theta \\
c_{in} &= d \cos\theta
\end{aligned} \tag{3}
$$

其中c是控制图像大小的参数。从直觉上解释，上述变换利用了指数函数增加先慢后快的特点，对极坐标系下的ρ进行变换而维持了θ不变，从而达到图像中心急剧“膨胀”的效果。对于$T^{-1}: \rho \to d$，从公式

$$p(\rho) = p(d)\frac{dT^{-1}}{d\rho} \tag{4}$$

可以看出，在d和ρ较小时，逆变换的导数也较小，从而变换后的图像在中心附近呈现出低密度的状态。

4 附录：mapping onto a general surface

这是课上一位同学探究的方向，我觉得很有趣就复现了一下。这个general surface其实也并不那

(a) 原图 (b) 效果图

图 4: 鱼眼变换

么general，大概下面这个参数曲面的形式

$$\begin{cases} x(t,\theta) = x(t)\sin\theta \\ y(t,\theta) = y(t)\sin\theta \\ z(t,\theta) = h\cos\theta \end{cases} \tag{5}$$

这可以看作是xy平面内的参数曲线向z方向扩展得到，我们的视角就是沿z轴面向xy平面。在原图“贴”在上述曲面的前提下，希望能找到目标图中(x,y)位置的像素点在原图的对应位置，从而进行inverse warping。为了简便起见，以下叙述中原图和目标图的(x,y)坐标都是通过平移、反转后的，以保证图像中心的坐标是$(0,0)$，x轴朝右，y轴朝上（前）。

目标图的(x,y)坐标就是在xy平面的投影，这样对于某个输出点，可以通过以下方程确定曲面上对应点

$$\begin{cases} k\cdot x(t,\theta) = x_{out} \\ k\cdot y(t,\theta) = y_{out} \end{cases} \tag{6}$$

其中k是尺寸系数，图像的尺寸以像素计。观察到上述方程可以首先转化为t的一元方程$y_{out}x(t) - x_{out}y(t) = 0$，解出使得$(x(t_0),y(t_0))$与$(x_{out},y_{out})$在同一象限的$t_0$，进而

$$\theta_0 = \sin^{-1}\frac{x_{out}}{k\cdot x(t_0)} = \sin^{-1}\frac{y_{out}}{k\cdot y(t_0)} \tag{7}$$

下一步是由(t_0,θ_0)得到对应的(x_{in},y_{in})。要得到对应原图的位置，需要对“贴合”做一个定义。将t看作$(0,2\pi)$的一个角度变量（如果定义域不是，需要scale），一定程度代表了原图中(x,y)的方向。使用极坐标的思想，下面就是要找与原点的距离d，我们固定$t=t_0$不变，用曲面上变化θ得到的曲线的长度比例来表征距离

$$d = d_0\frac{\int_0^{\theta_0}\sqrt{(x^2(t_0)+y^2(t_0))\cos^2\phi + h^2\sin^2\phi}\;d\phi}{\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x^2(t_0)+y^2(t_0))\cos^2\phi + h^2\sin^2\phi}\;d\phi} \tag{8}$$

这里d_0与原图覆盖曲面的比例有关，我们简单地取$d_0 = \frac{1}{2}\max(R_{in}, C_{in})$。假设$x(0), y(0)$在y轴正半轴上，我们就得到了原图中的对应点

$$\begin{aligned} x_{in} &= d\sin(t_0) \\ y_{in} &= d\cos(t_0) \end{aligned} \tag{9}$$

如果我们取

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t \\ h = 1 \end{cases} \tag{10}$$

即球的极坐标形式，可以轻易发现上述流程得到的便是sphere warping。取如下的心形曲线

$$\begin{cases} x(t) = 16\sin t - 4\sin 3t \\ y(t) = 15\cos t - 5\cos 2t - 2\cos 3t - \cos 4t \\ h = 8 \end{cases} \tag{11}$$

我们就得到了图5的效果。

(a) 原图

(b) 效果图

图 5: 心形映射