2015-2018 届高中生思想方法与解题技巧检测及教师教学质量监测卷

参考答案

必做部分

1.C

2.C(②③④正确)

①:未指明 $f(x)$ 的连续性,只可证明 $x\in\mathbf{Q}$ 时 $f(x)=x$ 成立

注:若指明 $f(x)$ 连续,可由柯西解法及区间套原理证明 $x\in\mathbf{R}$ 时 $f(x)=x$ 均成立

②:若 $f(x)$ 不恒为 0,很容易发现矛盾.具体证明如下:

令 $a=2,b=\frac{1}{2}\Rightarrow f(2)=f(2)+f(\frac{1}{2})\Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$.令 $a=3,b=1\Rightarrow f(4)=f(3)+f(1)$

令 $a=4,b=\frac{1}{2}\Rightarrow f(3)=f(4)+f(\frac{1}{2})=f(4)$.对比可知 $f(1)=0$

再令 $a=b=1\Rightarrow f(2)=2f(1)=0$

当 $x<1$ 时,令 $a=x,b=\frac{1}{1-x}\Rightarrow f(\frac{x}{1-x}+1)=f(\frac{1}{1-x})=f(x)+f(\frac{1}{1-x})\Rightarrow f(x)=0$

当 $x>1$ 时,令 $a=x,b=\frac{1}{x}\Rightarrow 0=f(2)=f(\frac{1}{x})+f(x)=f(x)$

综上, 必有 $f(x)=0$

③:将此函数上的点依次写出,可发现规律

$f(1)=2\Rightarrow f(f(1))=f(2)=3\Rightarrow f(f(2))=f(3)=6\Rightarrow f(f(3))=f(6)=9\Rightarrow f(f(6))=f(9)=18$

又因为 $f(x)$ 递增,必有 $f(4)=7,f(5)=8$

$f(4)=7\Rightarrow f(f(4))=f(7)=12\Rightarrow f(f(7))=f(12)=21$

$f(5)=8\Rightarrow f(f(5))=f(8)=15\Rightarrow f(f(8))=f(15)=24$

又因为 $f(x)$ 递增,必有 $f(10)=19,f(11)=20,f(13)=22,f(14)=23$

如此继续下去,我们可以得到 $f(x)$ 上的一系列点:

(1,2)
(2,3)(3,6)
(4,7)(5,8)(6,9)
(7,12)(8,15) (9,18)
(10,19)(11,20)(12,21)(13,22)(14,23)(15,24)(16,25)(17,26)(18,27)
(19,30)(20,33)(21,36)(22,39)(23,42)(24,45)(25,48)(26,51)(27,54)
(28,55)(29,56)(30,57)(31,58) (32,59)(33,60)……(51,78), (52,79) (53,80) (54,81)
……

分组后可以发现,函数值按 1 递增的“1 组”与按 3 递增的“3 组”交替出现

若某一个“1 组”有 n 个点,则决定了下一个“3 组”有 $3n$ 个点(除去第一行)

若某一个“3 组”有 n 个点,则决定了下一个“1 组”有 n 个点(除去第二行)

记第二行为第一个“3 组”,设第 n 个“3 组”最后一个数为 (a_n,b_n),则有如下递推关系:

$a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1}),b_{n+1}-b_n=3(b_n-b_{n-1})$

注意到 $a_1=3,a_2-a_1=6,b_1=6,b_2-b_1=12$,解得 $a_n=3^n,b_n=2\cdot 3^n$

此即 $f(3^n)=2\cdot 3^n$

④:典型例子为狄利克雷函数 $f(x)=\begin{cases}1,x\in\mathbf{Q}\\0,x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$

3.B(③④正确)

①:当 $\log_2 m$ 不为整数时,必存在奇数 a>3 与整数 b 使 m=ab

此时 $2^m+1=(2^b)^a+1=(2^b+1)\sum_{i=0}^{a-1}(-1)^i(2^b)^i$ 不为质数

故“$\log_2 m$ 为整数”是“2^m+1 为质数”的必要条件

但注意到第五个费马数 $F_5=2^{2^5}=641\times 6700417$ 不是质数,故不充分

②:定义在 $[-1,1]$ 上的 n 次多项式函数 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}\cdots\cdots+a_n$,当 $f(x)$ 与第一类切比雪夫多项式 T_n 的系数成倍数关系,即 $f(x)=\frac{1}{2^n}\cos(n\arccos x)$ 时,$|f(x)|$ 的最大值最小,为 $\frac{1}{2^n}$ (此处不作具体证明)

因 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

故 $f(x)=|x^2-\frac{1}{2}|$ 时, $f(x)$ 的最大值最小,为 $\frac{1}{2}$

故“$m<\frac{1}{2}$”是“对于 $\forall a,b\in\mathbf{R},m<f(x)_{\max}$”的充要条件

③:使用数学归纳法证明如下:

令 $n=1$,可得 $a_1=1$

假设 $a_n=n$ 对于 $n=1,2\cdots\cdots k-1$ 成立

若 $a_k<k$,则 $a_{a_k}\le k-1$,与 $a_{a_k}+a_k=2k$ 矛盾

若 $a_k>k$,记 $a_k=m$,由 $a_{a_k}+a_k=2k$ 得 $a_m=2k-a_k<k$,从而 $a_{a_m}\le k-1$,与 $a_{a_m}+a_m=2m>2k$ 矛盾

于是 $a_k=k$,原命题得证

④:由 $(x^x)'=(e^{x\ln x})'=x^x(1+\ln x)$

可得 $f'(x)=(e^{x^x\ln x})'=x^{x^x}(x^x\cdot\frac{1}{x}+x^x(1+\ln x)\ln x)=x^{x^x}\cdot x^x(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x})$

设 $g(x)=\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x},g'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}(2\ln x+1-\frac{1}{x})$

令 $g'(x_0)=0\Rightarrow x_0=1$

又 $g(1)=1>0$,故 $f'(x)>0$,即 $f(x)$ 递增

又注意到 $\lim_{x\to 0}x^x=e^{\lim_{x\to 0}x\ln x}=e^0=1$,可知 $\lim_{x\to 0}x^{x^x}=0^1=0$

4.B

由三次方程韦达定理可知

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=a\\ \alpha\beta\gamma=-b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})+(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})+(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha})=\frac{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{2a}{b}\\ (\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})+(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha})+(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha})(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}=\frac{a^2}{b^2}\\ (\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha})=-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{b}\end{cases}$$

故新以 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}$ 为三根的方程为 $x^3+\frac{2a}{b}x^2+\frac{a^2}{b^2}x-\frac{1}{b}=0$,也即 B 项

5.B

设球心为 O,截面圆的圆心为 O',半径为 r

有如下定理:球的表面被截之后剩下的面积与截得的部分在与截面垂直的方向上的长度成正比

此定理可由微元法或曲面积分得出,此处不证,仅作如下推导

截得的较小一部分球面面积为 $S=4\pi R^2\cdot\dfrac{R-d}{2R}=2\pi R(R-d)$

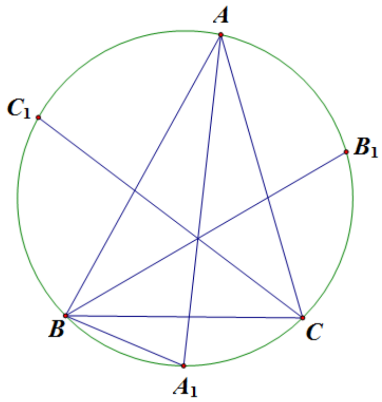
设此部分球面对应的球锥体积为 V_1,圆锥 OO'的体积为 V_2

则 $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R^3\dfrac{S}{4\pi R^2}=\dfrac{2}{3}\pi R^2(R-d),V_2=\dfrac{1}{3}\pi r^2 d=\dfrac{1}{3}\pi(R^2-d^2)d$

故被截后较小部分的体积为 $V=V_1-V_2=\dfrac{\pi(R-d)^2(2R+d)}{3}$

6.A

如右图,连接 A_1B,在 ΔAA_1B 中, $\angle ABA_1=B+\dfrac{A}{2}$



由正弦定理, $AA_1=2\sin(B+\dfrac{A}{2})=2\cos(\dfrac{B}{2}-\dfrac{C}{2})$

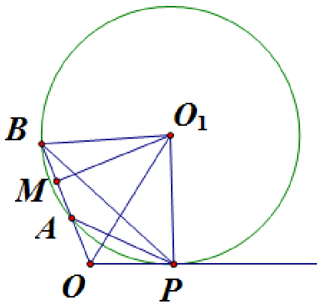
$\Rightarrow AA_1\cos\dfrac{A}{2}=2\cos(\dfrac{B}{2}-\dfrac{C}{2})\cos\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{A+B-C}{2}+\cos\dfrac{A+C-B}{2}=\sin C+\sin B$

同理, $BB_1\cos\dfrac{B}{2}=\sin A+\sin C,CC_1\cos\dfrac{C}{2}=\sin A+\sin B$

故 $\dfrac{AA_1\cos\dfrac{A}{2}+BB_1\cos\dfrac{B}{2}+CC_1\cos\dfrac{C}{2}}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{2(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sin A+\sin B+\sin C}=2$

7.D

本题方法较多,如使用三角函数,建系均可证明.这里有一种巧妙的解法



如右图,作过 A,B 两点的圆,当圆恰与 x 轴相切时,设切点 P,此时 $\angle APB$ 最大,

因为此时圆的半径最小, AB 弧所对圆周角最大

作 $O_1M\perp OB$,设 $|O_1P|=x,|O_1M|=h,|O_1A|=|O_1B|=|O_1P|=r,|OO_1|=m$

由几何关系,有 $\begin{cases}x^2+r^2=m^2\\ h^2+(\dfrac{b-a}{2})^2=r^2\\ h^2+(\dfrac{b+a}{2})^2=m^2\end{cases}$,直接消元后解得 $x=\sqrt{ab}$

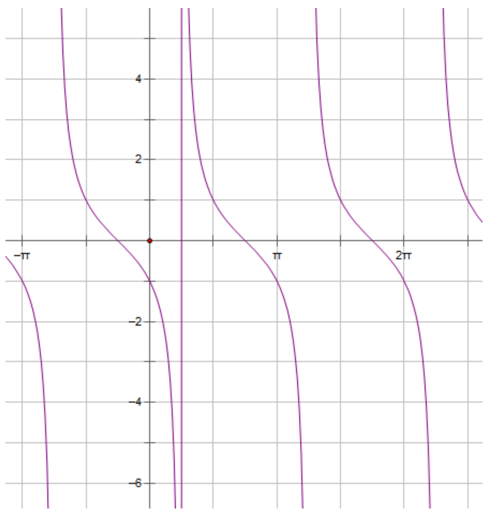
8.A

$\triangle ABC$ 恒为锐角三角形的充要条件为二面角 $A-PC-B,A-PB-C,B-PA-C$ 均为锐角

注意到 $\gamma>\beta>\alpha$,只需二面角 $A-PC-B$ 为锐角.设其为 θ

由三余弦定理, $\cos\theta=\dfrac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}>0$,可知 A 选项正确

9.A



题目转化为直线 $k(y+a)=x-\dfrac{\pi}{4}$ 与函数 $y=\dfrac{k_1\sin x+k_2\cos x}{k_1\sin x-k_2\cos x}$ 的交点

变形得 $y=\dfrac{k_1\tan x+k_2}{k_1\tan x-k_2}=\dfrac{\tan x+\dfrac{k_2}{k_1}}{\tan x-\dfrac{k_2}{k_1}}$,可画出函数的大致图像如右图

函数过点 $(-\pi,-1),(\dfrac{5}{2}\pi,1)$, $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 内渐近线 $x=\arctan\dfrac{k_2}{k_1}$

而直线 $k(y+a)=x-\frac{\pi}{4}$ 过定点 $(\frac{\pi}{4},-a)$,可以看出当且仅当直线为渐近线时,二者才无交点

故 $\arctan\frac{k_2}{k_1}=\frac{\pi}{4},\frac{k_2}{k_1}=1;k_0=0$

又因直线与函数不可能有 4 个交点,由对称性可知必有 $a=0$

故 $\frac{k_1+k_0}{k_2+a}=1$

10.C

如右图,由等腰梯形及切线的性质,可设 $AI=IB=BM=a,DH=HC=CM=b$

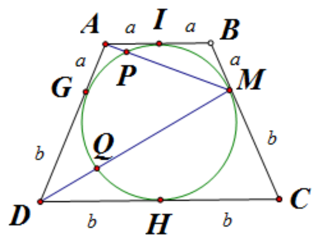
由切割线定理,有 $AP\cdot AM=AI^2=a^2$

在 ΔABM 中使用余弦定理,有

$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos\angle ABM=5a^2-4a^2\cos\angle ABM$

故 $\frac{AM}{AP}=\frac{AM^2}{AP\cdot AP}=5-4\cos\angle ABM$.同理, $\frac{DM}{DQ}=5-4\cos\angle DCM$

注意到 $\angle ABM+\angle DCM=\pi$,于是 $\frac{AM}{AP}+\frac{DM}{DQ}=10$



11.①: $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

设 $x=\sqrt{8+\sqrt{40+8\sqrt{5}}}+\sqrt{8-\sqrt{40+8\sqrt{5}}}$

则 $x^2=16+2\sqrt{(8+\sqrt{40+8\sqrt{5}})(8-\sqrt{40+8\sqrt{5}})}=16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}}=16+2\times(2\sqrt{5}-2)=12+4\sqrt{5}$

故 $x=\sqrt{10}+\sqrt{2}$

②:1

两边取对数可知 $a^{\lg b}=b^{\lg a}$ 成立,故 $\frac{(5^{\lg 7}\cdot 7^{\lg 2})^{\lg 3}}{3^{\lg 7}}=\frac{(7^{\lg 5}\cdot 7^{\lg 2})^{\lg 3}}{3^{\lg 7}}=\frac{7^{\lg 3}}{3^{\lg 7}}=1$

③: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

设 $x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots\cdots}}}$,则 $\frac{1}{x}=1+x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

④:3

此即拉马努金恒等式 $n+1=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\cdots\cdots}}}$ 在 $n=2$ 时的情形

此处不给出严格证明,但给出反向推导的方法

事实上,如果注意到 $n=\sqrt{1+(n-1)(n+1)}$,有 $3=\sqrt{1+2\times 4}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\times 5}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdots\cdots}}}$

⑤: $\frac{\sqrt{7}}{8}$

可将原式平方,转化为余弦来求解.这里介绍一个普遍的结论

记 $z^n=1$ 的根分别为 $1,\omega,\omega^2,\omega^3\cdots\cdots\omega^{n-1}$,其中 ω 为 n 次单位根

分解因式,即为 $z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+1)=0$

因此, $(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots\cdots(z-\omega^{n-1})=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+1$.令 z=1,两边取模

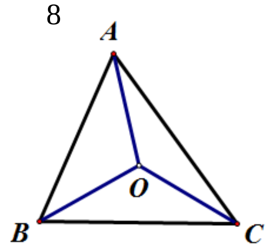
$$\prod_{k=1}^{n-1}|(1-\cos\frac{2k\pi}{n})+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}|=\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{(1-\cos\frac{2k\pi}{n})^2+\sin^2\frac{2k\pi}{n}}=\prod_{k=1}^{n-1}|2\sin\frac{k\pi}{n}|=n$$

也即 $\prod_{k=1}^{n-1}|\sin\frac{k\pi}{n}|=\frac{n}{2^{n-1}}$

特别地,对于 $n=7$,有 $\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdots\cdots\sin\frac{5\pi}{7}\cdot\sin\frac{6\pi}{7}=\frac{7}{64}$

注意到 $\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{6\pi}{7},\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{5\pi}{7},\sin\frac{3\pi}{7}=\sin\frac{4\pi}{7}$,于是 $\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$

12. $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{3}{4}]$



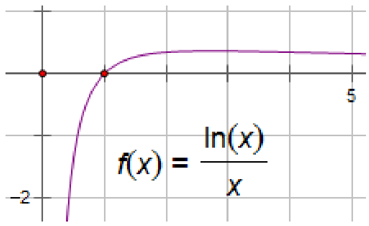
13. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

即 $\sin 2A:\sin 2B:\sin 2C=3:4:5$

作 ΔABC 外心 O,因 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|,\angle BOC=2A,\angle AOC=2B,\angle AOB=2C$,有 $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OC}=0$

不妨设外接圆半径为 1,将上式两边分别点乘 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$

$$\Rightarrow\begin{cases}3+4\cos 2C+5\cos 2B=0\\3\cos 2C+4+5\cos 2A=0\\3\cos 2B+4\cos 2A+5=0\end{cases}\Rightarrow\cos 2C=0\Rightarrow C=\frac{\pi}{4},\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



14. $(0,2e]$

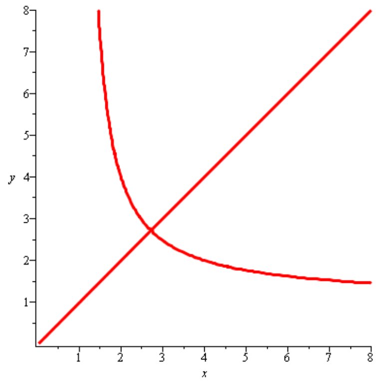
转化为直线 $x+y=k$ 与曲线 $x^y=y^x$ 的交点

将 $x^y=y^x$ 两边同取对数,得到 $y\ln x=x\ln y$,即 $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln y}{y}$

我们熟知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 最高点为 $(e,\frac{1}{e})$,过点 $(1,0)$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

因此 x,y 分别在 $(1,e),(e+\infty)$ 间, $x=y=e$ 时二者重合

据此可画出 $x^y=y^x$ 的大致图像(右图)



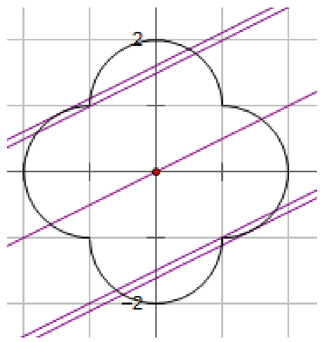
可以看出 $x+y=k$ 过点 (e,e) 时 $k=2e$ 为最大值

故 $k\in(0,2e]$

15. $\{0,\pm\frac{3}{2},\pm\frac{\sqrt{5}+1}{2}\}$

即直线 $x-2y+2k=0$ 与曲线 $x^2+y^2-|x+y|-|x-y|=0$ 有三个交点

以 $x=y,x=-y$ 为分界线,可知 $x^2+y^2-|x+y|-|x-y|=0$ 由四个半圆组成



直线经过半圆的交界处 $(\pm1,\mp1)$ 时,代入解得 $k=\pm\frac{3}{2}$

直线分别与左、右半圆相切时, $\frac{|2k\pm2|}{\sqrt{5}}=1\Rightarrow k=\pm\frac{\sqrt{5}+1}{2}$(舍去另外两根)

并注意到 $(0,0)$ 也在其上,故 $k=0$ 亦可

16. $\{e\}$

两边同取对数,不等式化为 $x\ln a\ge a\ln x$,或写作 $\frac{\ln a}{a}\ge\frac{\ln x}{x}$,故 a 为 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 的极大值点 e

17. $\frac{5051}{5049}$

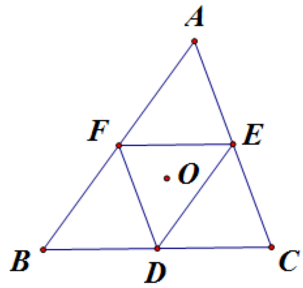
注意到 $m*n+1=\frac{mn+m+n+1}{m+n}=\frac{(m+1)(n+1)}{m+n}$, $m*n-1=\frac{mn-m-n+1}{m+n}=\frac{(m-1)(n-1)}{m+n}$

于是 $\frac{m*n+1}{m*n-1}=\frac{(m+1)(n+1)}{(m-1)(n-1)}=\frac{m+1}{m-1}\cdot\frac{n+1}{n-1}$

设 $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$,则有 $f(m*n)=f(m)\cdot f(n)$.设所求式子为 t

$$f(t)=\frac{t+1}{t-1}=f(100)\cdot f(99)\cdots\cdots f(2)=\frac{101}{99}\times\frac{100}{98}\times\frac{99}{97}\cdots\cdots\frac{4}{2}\times\frac{3}{1}=5050\Rightarrow t=\frac{5051}{5049}$$

18.中点三角形的内心



我们熟知,质量均匀分布的三角形薄板的质心即为重心.但对于框架并非如此

如右图,设△ABC 三边长分别为 a,b,c 且同时代表三边的质量

BC,AC,AB 的质心分别为中点 D,E,F,且质量分别为 a,b,c

则这三点的质心也为△ABC 三边的质心

设质心为 O,由质心定义,有 $a\overrightarrow{OD}+b\overrightarrow{OE}+c\overrightarrow{OF}=0$,即 $\frac{a}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{b}{2}\overrightarrow{OE}+\frac{c}{2}\overrightarrow{OF}=0$

故 O 为△DEF 内心

19. $5\sqrt{5}$

设$x=\cos\theta,y=\sin\theta,\theta\in(0,\frac{\pi}{2}).f(\theta)=\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}$

$f'(\theta)=\frac{-8\sin\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\cos^3\theta-8\sin^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=0\Rightarrow\tan\theta=\frac{1}{2}$

故当 $x=\frac{2\sqrt{5}}{5},y=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时,原式有最小值$5\sqrt{5}$

20. $\sqrt{9+6\sqrt{3}}$

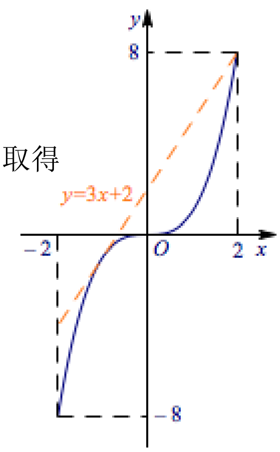
$\frac{x^3+y^3}{x-y}=\frac{x^3+x^{-3}}{x-x^{-1}}=\sqrt{\frac{x^6+x^{-6}+2}{x^2+x^{-2}-2}}$

设 $t=x^2+x^{-2}-2(t>0)$,则 $\frac{x^3+y^3}{x-y}=\sqrt{\frac{(t+2)^3-3(t+2)+2}{t}}=\sqrt{t^2+6t+\frac{4}{t}+9}$

设 $f(t)=t^2+6t+\frac{4}{t}+9,f'(t)=2t+6-\frac{4}{t^2}=\frac{2(t+1)(t+1-\sqrt{3})(t+1+\sqrt{3})}{t^2}$

于是 $(\frac{x^3+y^3}{x-y})_{\min}=\sqrt{f(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{9+6\sqrt{3}}$

21.4032



取 $f(x)=x^3$ 过点$(2,8)$的切线 $y=3x+2$,则 $x^3\le3x+2$,等号当且仅当 $x=-1$ 或 $x=2$ 时取得

因此, $a_1^3+a_2^3+\ldots\ldots+a_{2016}^3\le3(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{2016})+4032=4032$

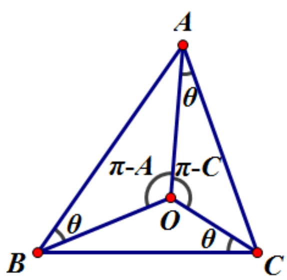
且当 $a_1,a_2\ldots\ldots a_{2016}$ 中有 672 个数取 2,其余的数取-1 时取等

22. $\frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$

不妨设 $a=\sin A,b=\sin B,c=\sin C$

可以发现, $\theta=\pi-\angle AOC-\angle ACO=C-\angle ACO\Rightarrow\angle AOC=\pi-C$

同理, $\angle AOB=\pi-A$



由正弦定理, $OA=AB\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-A)}=\frac{\sin C\sin\theta}{\sin A},OC=AC\cdot\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-C)}=\frac{\sin B\sin\theta}{\sin C}$

于是在 ΔAOC 中

$\frac{\sin\theta}{\sin(C-\theta)}=\frac{OC}{OA}=\frac{\sin^2C}{\sin A\sin B}\Rightarrow\tan\theta=\frac{ab\sin C}{ab\cos C+c^2}=\frac{ab\sin C}{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}=\frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$

23.

(1)分离变量得 $k\le e^{2x}-\frac{\ln x+1}{x}$

设 $f(x)=e^{2x}-\frac{\ln x+1}{x}$, $f'(x)=2e^{2x}+\frac{\ln x}{x^2}=0\Rightarrow2x_0e^{2x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}$,$x_0$为极小值点,也为最小值点

两边同时取对数得 $\ln(2x_0)+2x_0=\ln(-\ln x_0)-\ln x_0$

注意到 $g(x)=\ln x+x$ 递增,故 $2x_0=-\ln x_0$

则 $f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{-\ln x_0}-\dfrac{-2x_0+1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{-2x_0+1}{x_0}=2$.故 $k\in(-\infty,2]$

(2) $a^b=b^a$ 可化为 $\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{\ln b}{b}$.设 $\ln a=x_1,\ln b=x_2(x_2>x_1)$,于是 $a^{e(e-2)}\cdot b=e^{e(e-2)x_1+x_2}$

则 $\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}\Rightarrow \ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2,\ln\dfrac{x_2}{x_1}=x_2-x_1$

再设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$,代入上式可解得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}\\ x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1}\end{cases}$

于是设 $f(t)=e(e-2)x_1+x_2=\dfrac{e(e-2)\ln t+t\ln t}{t-1}(t>1)$,问题转化为求 $f(t)$ 最小值

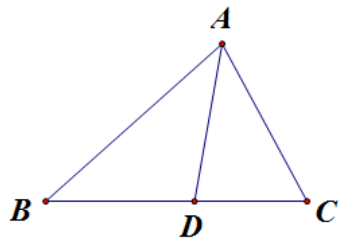
$f'(t)=\dfrac{e(e-2)-e(e-2)\ln t-\ln t+t-\dfrac{e(e-2)}{t}-1}{(t-1)^2}$.考察 $g(t)=e(e-2)-e(e-2)\ln t-\ln t+t-\dfrac{e(e-2)}{t}-1$

求导得 $g'(t)=\dfrac{-e(e-2)}{t}-\dfrac{1}{t}+1+\dfrac{e(e-2)}{t^2}=\dfrac{(t-1)(t-e(e-2))}{t^2}$,故 $g(t)$ 在 $(1,e(e-2))$ 上递减,在 $(e(e-2),+\infty)$ 上递增.又可看出 $g(e)=g(1)=0$,且 $e>e(e-2)$

因此,在 $(1,e)$ 上 $g(t)<0$,即 $f(t)$ 递减;在 $(e,+\infty)$ 上 $g(t)>0$,即 $f(t)$ 递增

故 $f(t)_{\min}=f(e)=e$,那么 $(a^{e(e-2)}\cdot b)_{\min}=e^e$,此时 $a=e^{\frac{1}{e-1}},b=e^{\frac{e}{e-1}}$

24.



(1)设 $AB=c,AC=b,AD=x,BC=a$

由正弦定理,有 $\dfrac{BD}{c}=\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=\dfrac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC}=\dfrac{CD}{b}$

又 $BD+CD=a$,故有 $BD=\dfrac{ac}{b+c},CD=\dfrac{ab}{b+c}$

又由余弦定理, $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=\dfrac{x^2+(\dfrac{ac}{b+c})^2-b^2}{2\dfrac{ac}{b+c}x}+\dfrac{x^2+(\dfrac{ab}{b+c})^2-c^2}{2\dfrac{ab}{b+c}x}=0$

化简得 $(x^2-bc)(b+c)^2+a^2bc=0$,可以看出 $x^2=bc$ 不可能成立

(2)将 $x^2=\dfrac{3}{4}bc$ 代入 $(x^2-bc)(b+c)^2+a^2bc=0$ 化简即得 $2a=b+c$

(3)此时 $BD=\dfrac{ac}{b+c}=\dfrac{c}{2},CD=\dfrac{ab}{b+c}=\dfrac{b}{2}$,且注意到 $\angle ADC=B+\dfrac{A}{2},\angle ADB=C+\dfrac{A}{2}$

在 ΔABD 中使用正弦定理,有 $\dfrac{\sin(C+\dfrac{A}{2})}{\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{AB}{BD}=2,\sin(C+\dfrac{A}{2})=2\sin\dfrac{A}{2}$;同理, $\sin(B+\dfrac{A}{2})=2\sin\dfrac{A}{2}$

于是, $2\sin\dfrac{A}{2}=\sin(B+\dfrac{A}{2})=\sin(C+\dfrac{A}{2})$

25.

(1)即 $x=1,\cos\dfrac{2\pi}{3}+\sin\dfrac{2\pi}{3}\mathrm{i},\cos\dfrac{4\pi}{3}+\sin\dfrac{4\pi}{3}\mathrm{i}=1,-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

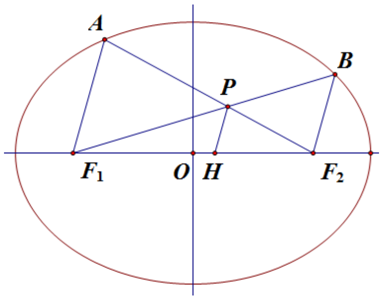
(2)先求其实根. 设 $x=m+n$,方程化为 $m^3+n^3+2+(m+n)(3mn+3)=0$

令 $\begin{cases} m^3+n^3+2=0 \\ 3mn+3=0 \end{cases}$,得 m^3,n^3 为方程 $x^2+2x-1=0$ 的两根,则 $x=m+n=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$

故原方程在复数范围内的三根为 $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}+1},\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1})}{2}\mathrm{i}$

26.

(1)设直线 AF_1,BF_2 与 x 轴正半轴夹角为 θ



由椭圆的第二定义,可以证明 $|AF_1|=\dfrac{b^2}{a-c\cos\theta},|BF_2|=\dfrac{b^2}{a+c\cos\theta}$

则 $\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{1}{|BF_2|}=\dfrac{2a}{b^2}$

又由相似可知 $\dfrac{|PH|}{|AF_1|}=\dfrac{|F_2H|}{|F_1F_2|},\dfrac{|PH|}{|BF_2|}=\dfrac{|F_1H|}{|F_1F_2|}\Rightarrow\dfrac{|PH|}{|AF_1|}+\dfrac{|PH|}{|BF_2|}=1$

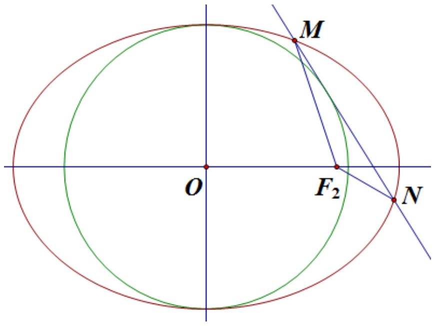
于是 $|PH|=\dfrac{1}{\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{1}{|BF_2|}}=\dfrac{b^2}{2a}$ 为定值

(2)由相似可知 $|PF_1|=\dfrac{|AF_1|}{|AF_1|+|BF_2|}\cdot|BF_1|,|PF_2|=\dfrac{|BF_2|}{|AF_1|+|BF_2|}\cdot|AF_2|$

于是 $|PF_1|+|PF_2|=\dfrac{|AF_1|\cdot|BF_1|+|AF_2|\cdot|BF_2|}{|AF_1|+|BF_2|}=\dfrac{|AF_1|\cdot(2a-|BF_2|)+|AF_2|\cdot(2a-|AF_1|)}{|AF_1|+|BF_2|}$

$=2a-\dfrac{2}{\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{1}{|BF_2|}}=2a-\dfrac{b^2}{a}$ 为定值

27.



(1)当 MN 的斜率不存在时,可得 $M(b,\dfrac{bc}{a}),N(b,-\dfrac{bc}{a})$

ΔMNF_2 周长为 $\dfrac{2bc}{a}+2\sqrt{(b-c)^2+\dfrac{b^2c^2}{a^2}}=\dfrac{2bc}{a}+2\sqrt{\dfrac{(a^2-bc)^2}{a^2}}=2a$

当 MN 的斜率存在时,设 $MN:y=kx+m,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

由 MN 与圆 O_1 相切,可得 $\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=b\Rightarrow m^2=(1+k^2)b^2$

$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}\Rightarrow(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2})x^2+\dfrac{2km}{b^2}x+\dfrac{m^2}{b^2}-1=0,\Delta=\dfrac{4k^2m^2}{b^4}-4(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2})(\dfrac{m^2}{b^2}-1)=4(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}-\dfrac{m^2}{a^2b^2})$

故 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\,\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}|}=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}-\dfrac{m^2}{a^2b^2}}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}$

代入 $m^2=(1+k^2)b^2$,化简得 $|MN|=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}\dfrac{|k|c}{ab}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}$

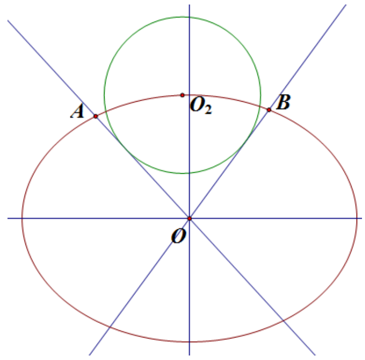
又由椭圆的第二定义,$|MF_2|=e(\dfrac{a^2}{c}-x_1)=a-ex_1,|NF_2|=e(\dfrac{a^2}{c}-x_2)=a-ex_2$

故 $|MF_2|+|NF_2|=2a-\dfrac{c}{a}(x_1+x_2)=2a+\dfrac{\dfrac{2kmc}{ab^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}$

又考虑到m,k异号,有$|MF_2|+|NF_2|=2a-\dfrac{\dfrac{2|k|\sqrt{1+k^2}bc}{ab^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}=2a-\dfrac{\dfrac{2|k|\sqrt{1+k^2}c}{ab}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}}$

于是ΔMNF_2周长$|MN|+|MF_2|+|NF_2|=2a$为定值

(2)设圆心$O_2(x_0,y_0)$,直线l_1,l_2斜率分别为k_1,k_2,$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$



因直线$y=kx$与圆$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\dfrac{a^2b^2}{c^2}$相切,有$\dfrac{|kx_0-y_0|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{ab}{c}$

化简得$(x_0^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2})k^2-2x_0y_0k+y_0^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}=0$,其两根分别为$k_1,k_2$

于是$k_1k_2=\dfrac{y_0^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}}{x_0^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}}=\dfrac{b^2-\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}}{x_0^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}}=\dfrac{-\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2-\dfrac{b^4}{c^2}}{x_0^2-\dfrac{a^2b^2}{c^2}}=-\dfrac{b^2}{a^2}$

联立l_1与C,$\begin{cases}y=k_1x\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow x_1^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2k_1^2+b^2}$,则$|OA|^2=(1+k_1^2)x_1^2=\dfrac{a^2b^2(1+k_1^2)}{a^2k_1^2+b^2}$

同理,$|OB|^2=(1+k_2^2)x_2^2=\dfrac{a^2b^2(1+k_2^2)}{a^2k_2^2+b^2}$.代入$k_1k_2=-\dfrac{b^2}{a^2}$得$|OB|^2=(1+k_2^2)x_1^2=\dfrac{a^4k_1^2+b^4}{a^2k_1^2+b^2}$

故$|OA|^2+|OB|^2=\dfrac{(a^4+a^2b^2)k_1^2+a^2b^2+b^4}{a^2k_1^2+b^2}=a^2+b^2$为定值

28.

(1)对于$X_n=2^{1-n}$,柯西和为$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\ldots\ldots=2$

而$A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=1+\dfrac{1}{2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$,$B_n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}A_n}{n}=\dfrac{2n-2+\dfrac{1}{2^{n-1}}}{n}$,故$\lim\limits_{n\to+\infty}B_n=2$与柯西和相等

(2) $X_n=(-1)^{n-1}n, A_n=\begin{cases}(1-2)+(3-4)\ldots\ldots+n=n-\dfrac{n-1}{2}=\dfrac{n+1}{2},n\text{为奇数}\\ (1-2)+(3-4)\ldots\ldots+(n-1-n)=-\dfrac{n}{2},n\text{为偶数}\end{cases}$,$A_n$发散,无柯西和

$B_n=\begin{cases}\dfrac{(1-1)+(2-2)\ldots\ldots+\dfrac{n+1}{2}}{n}=\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n},n\text{为奇数}\\ \dfrac{(1-1)+(2-2)\ldots\ldots+(n-n)}{n}=0,n\text{为偶数}\end{cases}$,$B_n$仍发散,无一级平均和

$C_n=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+0\ldots\ldots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}{n}=\dfrac{n+1}{4n}+\dfrac{1+\frac{1}{3}\ldots\ldots\frac{1}{n}}{2n},n\text{为奇数}\\ \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+0\ldots\ldots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2(n-1)}+0}{n}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{n-1}}{2n},n\text{为偶数}\end{cases}$

而$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}\ldots\ldots+\frac{1}{n}}{n}=0$,可知$\lim\limits_{x\to+\infty}C_n=\dfrac{1}{4}$,故此级数有二级平均和$\dfrac{1}{4}$

29.

(1) 由$\dfrac{\pi^2}{6}=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}\ldots\ldots$知$\dfrac{\pi^2}{24}=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{6^2}+\dfrac{1}{8^2}+\dfrac{1}{10^2}\ldots\ldots$

故$1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}\ldots\ldots=\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{\pi^2}{24}=\dfrac{\pi^2}{8}$

(2)将 $e^x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\ldots\ldots$ 两侧同时求导 n 次,得 $e^x=n!a_n+x(\ldots\ldots)$,再令 $x=0$

于是 $1=n!a_n\Rightarrow a_n=\dfrac{1}{n!}$

则 $e^x=1+x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3\ldots\ldots\Rightarrow\begin{cases}e=2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}\ldots\ldots\\\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}\ldots\ldots\end{cases}$,两式相减得 $1+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\dfrac{1}{7!}\ldots\ldots=\dfrac{e-\frac{1}{e}}{2}$

(3)①对 $\ln 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\ldots\ldots$ 的 $\ldots\ldots-\dfrac{1}{2n-2}+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}+\ldots\ldots$ 部分进行分析易知

$(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\ldots\ldots)+\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ldots\ldots+\dfrac{1}{n-1})<1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\ldots\ldots+\dfrac{1}{2n-1}<(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\ldots\ldots)+\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ldots\ldots+\dfrac{1}{n})$

而我们熟知 $\ln(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ldots\ldots+\dfrac{1}{n}<1+\ln n$,故 $\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln n<1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\ldots\ldots+\dfrac{1}{2n-1}<\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln n+\dfrac{1}{2}$

也即 $\ln 2\sqrt{n}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2i-1}<\ln 2\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}$

② $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{(1+\frac{1}{x})^x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-x\ln(1+\frac{1}{x}))}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}(1-\frac{1}{t}\ln(1+t))}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}(1-\frac{1}{t}(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\ldots\ldots))}=e^{\lim\limits_{t\to0}(\frac{1}{2}-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{4}\ldots\ldots)}=\sqrt{e}$

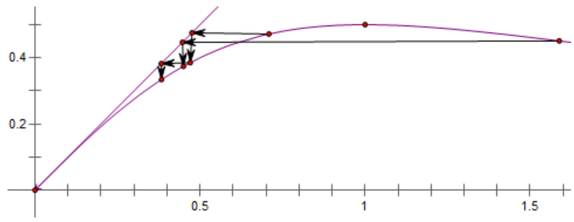
(4)分别令 $x=\mathrm{i},-\mathrm{i}$ 得 $\begin{cases}e^{-1}=\cos\mathrm{i}+\mathrm{i}\sin\mathrm{i}\\e=\cos(-\mathrm{i})+\mathrm{i}\sin(-\mathrm{i})=\cos\mathrm{i}-\mathrm{i}\sin\mathrm{i}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\mathrm{i}=\dfrac{e-e^{-1}}{2}\mathrm{i}\\\cos\mathrm{i}=\dfrac{e+e^{-1}}{2}\end{cases}$

又注意到 $e^{\mathrm{i}(2k\pi+\frac{\pi}{2})}=\cos(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})+\mathrm{i}\sin(2k\pi+\dfrac{\pi}{2})=\mathrm{i}$

于是 $\mathrm{i}^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}(2k\pi+\frac{\pi}{2})}=\dfrac{1}{e^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}},k\in\mathbf{Z}$

30.

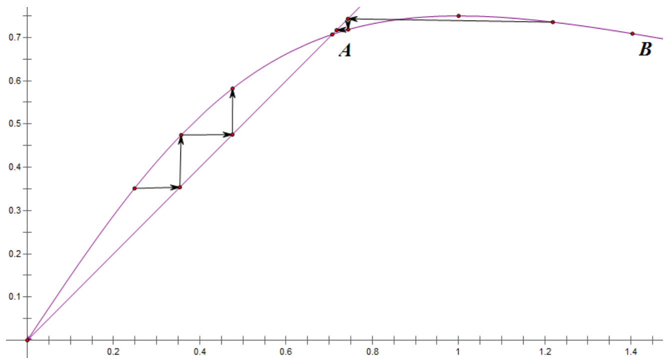
此数列的递推函数为 $f(x)=\dfrac{kx}{x^2+1}$,极大值点 $(1,\dfrac{k}{2})$,现研究其于函数 $y=x$ 的关系



联立 $\begin{cases}y=\dfrac{kx}{x^2+1}\\y=x\end{cases}\Rightarrow$ 交点 $(\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$

①当 $0<k\le1$ 时, $f(x)$ 恒在 $y=x$ 上方

对于 $\forall a_1>0,\{a_n\}$ 递减



②当 $1<k<2$ 时, $f(x)$ 与 $y=x$ 的交点在极值点左方

设交点为 A, $f(x)$ 上与 A 同高的点为 B

a_1 在 A 点左侧时, $\{a_n\}$ 递增

a_1 在 AB 之间时, $\{a_n\}$ 递减

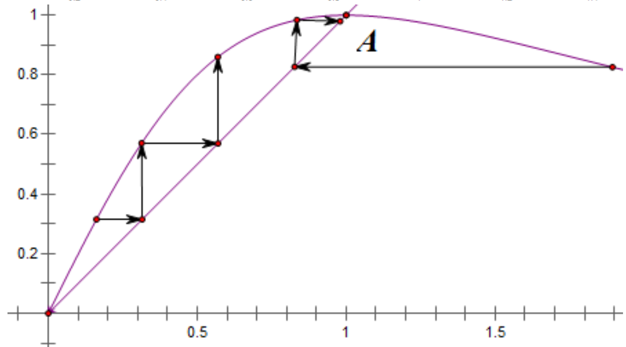
a_1 在 B 点右侧时, $\{a_n\}$ 从第二项起递增

③当 $k=2$ 时,交点恰为极值点

a_1 在 A 点左侧时, $\{a_n\}$ 递增

a_1 在 A 点右侧时, $\{a_n\}$ 从第二项起递增

④当 $k>2$ 时,交点在极值点右侧



可以看到,无论 a_1 为多少,经过有限次迭代,最终 $\{a_n\}$ 都会围绕交点 $(\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$ 摆动,且不断趋近于此交点

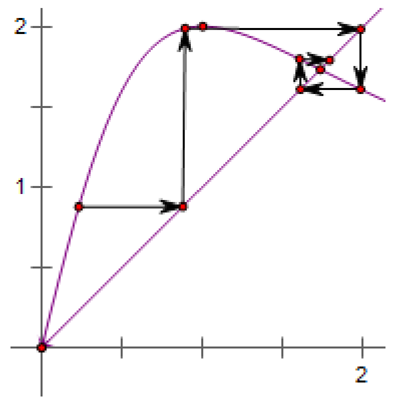
事实上,由于在交点附近 $|f'(x)|<1$,交点为此函数的稳定不动点,具有"吸引"周围点的特性

(1)由以上讨论可知 $k=2$.以下给出代数证明

先证必要性:

当 $k\neq 2$ 时,取 $a_1=1,a_2=\frac{k}{2}\neq 1$

由题设, $a_3=\frac{ka_2}{a_2^2+1}>a_2\Rightarrow\frac{k}{2}<\sqrt{k-1}\Rightarrow k^2-4k+4<0$,不成立



当 $k=2$ 时, $a_2=\frac{2}{a_1+\frac{1}{a_1}}\in(0,1)$ (注意到 $a_1\neq a_2$)

于是 $a_3=\frac{2a_2}{a_2^2+1}>a_2\Leftarrow 0<a_2<1$ 成立.故必有 $k=2$

再证充分性:

当 $k=2$ 时,由上述推导知 $a_2\in(0,1)$

假设当 $n=m$ 时, $a_m\in(0,1)$;则当 $n=m+1$ 时, $a_{m+1}=\frac{2}{a_m+\frac{1}{a_m}}\in(0,1)$

由数学归纳法可知,对于 $\forall n\geq 2,a_n\in(0,1)$.故 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n^2+1}>a_n\Leftarrow 0<a_n<1$ 对于 $\forall n\geq 2$ 成立

即 $\{a_n\}$ 从第二项起递增

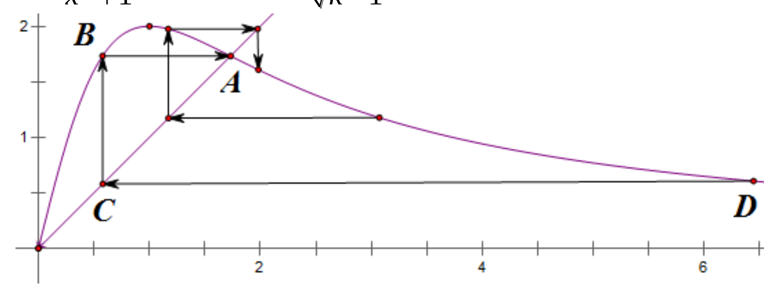
(2)由以上分析,必有 $1<k<2$

而当 $\{a_n\}$ 递减时, a_1 在 AB 之间.且 $A(\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$.令 $\frac{kx}{x^2+1}=\sqrt{k-1}\Rightarrow B(\frac{1}{\sqrt{k-1}},\sqrt{k-1})$

于是 $a_1\in(\sqrt{k-1},\frac{1}{\sqrt{k-1}})$

(3)①由以上分析可知, $k>2$

如右图,设 $a_1=x_D$ 时,恰有 $a_3=x_A=\sqrt{k-1}$



由图可知,当 $a_1\in(\sqrt{k-1},x_D)$ 时, $\{a_n\}$ 为符合题意的摆动数列

现来求出 x_D .由(2)可知 $x_B=\frac{1}{\sqrt{k-1}}$.令 $\frac{kx}{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{k-1}}\Rightarrow x_D=\frac{k\sqrt{k-1}+\sqrt{k^3-k^2-4}}{2}$

故 $a_1\in(\sqrt{k-1},\frac{k\sqrt{k-1}+\sqrt{k^3-k^2-4}}{2})$

②下用数学归纳法证明这两个结论

(I)因 $a_1\in(\sqrt{k-1},x_D)$, $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减,且 $f(x_D)=\frac{1}{\sqrt{k-1}}$,所以 $a_2\in(\frac{1}{\sqrt{k-1}},\sqrt{k-1})$.

$f(x)$在$(\frac{1}{\sqrt{k-1}},\sqrt{k-1})$上先增后减,且$f(\frac{1}{\sqrt{k-1}})=f(\sqrt{k-1})=\sqrt{k-1}$,故$\sqrt{k-1}<a_3=f(a_2)\leq\frac{k}{2}$

而 $f(x)$ 在 $(\sqrt{k-1},\frac{k}{2}]$ 上递减,有 $1<f(\frac{k}{2})\leq a_4=f(a_3)<f(\sqrt{k-1})=\sqrt{k-1}$

也即 $1<a_4<\sqrt{k-1}<a_3\leq\frac{k}{2}$

现假设对于 $n=m(m\geq 2),1<a_{2m}<\sqrt{k-1}<a_{2m-1}\leq\frac{k}{2}$ 成立

因 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减,于是

$f(1)>f(a_{2m})>f(\sqrt{k-1})>f(a_{2m-1})\geq f(\frac{k}{2})\Rightarrow 1<a_{2m}<\sqrt{k-1}<a_{2m+1}<\frac{k}{2}$

$\Rightarrow f(1)>f(a_{2m})>f(\sqrt{k-1})>f(a_{2m+1})\geq f(\frac{k}{2})\Rightarrow 1<a_{2m+2}<\sqrt{k-1}<a_{2m+1}<\frac{k}{2}$

即对于 $n=m+1$ 也成立

故对于 $n\geq 2$,均有 $1<a_{2n}<\sqrt{k-1}<a_{2n-1}\leq\frac{k}{2}$.且 a_1,a_2 显然满足 $a_2<\sqrt{k-1}<a_1$

综上, $a_{2n}<\sqrt{k-1}<a_{2n-1}$

(II) $a_n-a_{n+2}=a_n-\dfrac{k\dfrac{ka_n}{a_n^2+1}}{(\dfrac{ka_n}{a_n^2+1})^2+1}=\dfrac{a_n^5+2a_n^3+(1-k^2)a_n}{k^2a_n^2+a_n^4+2a_n^2+1}=\dfrac{a_n(a_n^2-(k-1))(a_n^2+k+1)}{k^2a_n^2+a_n^4+2a_n^2+1}$

由(I)知, $a_{2n-1}>\sqrt{k-1}$,于是 $a_{2n-1}-a_{2n+1}=\dfrac{a_{2n-1}(a_{2n-1}^2-(k-1))(a_{2n-1}^2+k+1)}{k^2a_{2n-1}^2+a_{2n-1}^4+2a_{2n-1}^2+1}>0$,即 $a_{2n+1}<a_{2n-1}$

$a_{2n}<\sqrt{k-1}$,于是 $a_{2n}-a_{2n+2}=\dfrac{a_{2n}(a_{2n}^2-(k-1))(a_{2n}^2+k+1)}{k^2a_{2n}^2+a_{2n}^4+2a_{2n}^2+1}<0$,即 $a_{2n+2}>a_{2n}$

故$\{a_{2n-1}\}$单调递减,$\{a_{2n}\}$单调递增

31.

(1)由 $\begin{cases}h(1)=0-\dfrac{1}{a^3}(a+b-\dfrac{m}{a+c})=0\\ h'(1)=1-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{m}{a^2(a+c)^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=(a+b)(a+c)=(a^2-1)(a+c)^2\\ b=(a^2-1)c+a^3-2a\end{cases}$

(2)将 b,m 代入 $h'(x)$ 得 $h'(x)=\dfrac{(1-x)(a^2x^2-(a^4-a^2-2ac)x+a^2c^2)}{a^2x(ax+c)^2}$.

令 $a=2,h'(x)=\dfrac{(1-x)(x^2+(c-3)x+c^2)}{x(2x+c)^2}$.设 $\varphi(x)=x^2+(c-3)x+c^2$,则 $\varphi(x)\le 0$ 在 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上成立

于是 $\begin{cases}\varphi(\dfrac{1}{2})\le 0\\ \varphi(1)\le 0\end{cases}\Rightarrow c\in[-\dfrac{1+\sqrt{21}}{4},\dfrac{-1+\sqrt{21}}{4}]$.考虑到 $c>0$,于是 $c\in(0,\dfrac{-1+\sqrt{21}}{4}]$

而 $h'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{4c^2+2c-5}{4(c+1)^2}=1-\dfrac{3}{2c+1+\dfrac{1}{2c+3}}$ 在 $c\in(0,\dfrac{-1+\sqrt{21}}{4}]$ 上递增,且当 $c=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{4}$ 时, $h'(\dfrac{1}{2})=0$

故应使 c 尽量地接近 $\dfrac{-1+\sqrt{21}}{4}\approx 0.89565$.考虑到 $8c$ 为整数,故取 $c=\dfrac{7}{8}=0.875$

(3)即 $\varphi(x)\ge 0$ 在 $[\dfrac{1}{2},1]$ 上成立. $\Delta=(c-3)^2-4c^2=-3c^2-6c+9\le 0\Rightarrow c\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$ 时成立

当 $c\in(-3,1)$ 时,对称轴 $x=\dfrac{3-c}{2}>1$,只需 $\varphi(1)=c^2+c-2\ge 0\Rightarrow c\in(-3,-2]$

综上可知 $c\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$.当 $c\le -2$ 时, $h'(\dfrac{1}{2})>1$.当 $c\ge 1$ 时, $h'(\dfrac{1}{2})$ 随 c 递增,且当 $c=1$ 时, $h'(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{16}$

故 $c=1$ 时, $h'(\dfrac{1}{2})$ 最小

(4)① Ω 即为方程 $\ln x+x=0$ 的根.因 $\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\ln 2<0,\ln 1+1>0$,可知 $\dfrac{1}{2}<\Omega<1$

当 $c=\dfrac{7}{8}$ 时, $b=\dfrac{53}{8}$,因 $h(0)=0,h(x)$ 在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上递减,故在 $(\dfrac{1}{2},1)$ 上有 $h(x)>0$

也即 $f(x)=\ln x>g(x)=\dfrac{1}{8}(2x+\dfrac{53}{8}-\dfrac{(\dfrac{7}{8}+2)(\dfrac{53}{8}+2)}{2x+\dfrac{7}{8}})$.设 $g(x)+x=0$ 的正根为 x_1

化简得 $20x_1^2+22x_1-19=0\Rightarrow x_1=\dfrac{\sqrt{501}-11}{20}$.

注意到此时 $\ln x_1+x_1>g(x_1)+x_1=0=\ln\Omega+\Omega$,且 $\ln x+x$ 递增,于是 $x_1>\Omega$

取 $c=1$, $g(x)=\dfrac{1}{8}(2x+7-\dfrac{27}{2x+1})$.设 $g(x)+x=0$ 的正根为 x_2,化简得 $5x_2^2+6x_2-5=0\Rightarrow x_2=\dfrac{\sqrt{34}-3}{5}$

同理,有 $x_2<\Omega$.则 $\dfrac{\sqrt{34}-3}{5}<\Omega<\dfrac{\sqrt{501}-11}{20}$,代入数据可知 $\dfrac{\sqrt{34}-3}{5}\approx 0.5662,\dfrac{\sqrt{501}-11}{20}\approx 0.56915$

于是 $0.5661<\Omega<0.5692$

② $s'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow$ 极小值点x_0满足$x_0e^{x_0}=1$,取对数即$\ln x_0+x_0=0$,于是$x_0=\Omega$

所以 $s(x)_{\min}=e^{\Omega}-\ln\Omega=e^{-\ln\Omega}+\Omega=\Omega+\dfrac{1}{\Omega}$.

由①可知 $x_2<\Omega<x_1<1$,于是 $\dfrac{39\sqrt{501}+11}{380}=x_1+\dfrac{1}{x_1}<\Omega+\dfrac{1}{\Omega}<x_2+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{2\sqrt{34}}{5}$.

代入数据得 $2.32615<\Omega+\dfrac{1}{\Omega}<2.3324$.故 $s(x)_{\min}=\Omega+\dfrac{1}{\Omega}\approx 2.33$

32.

(1)设 $g(x)=xf(x)=x\ln x+(a-1)x+b$,则 $g(x)$与$f(x)$ 具有相同的零点,故 $g(x)$ 亦有两零点

$g'(x)=\ln x+a$,可知 $g(x)$在$(0,e^{-a})$上递减,在$(e^{-a}.+\infty)$上递增,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

故有 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}g(x)=b>0\\ g(x)_{\min}=g(e^{-a})=b-e^{-a}<0\end{cases}\Rightarrow 0<b<e^{-a}$

设 $\varphi(a)=ae^{-a}$,$\varphi'(a)=(1-a)e^{-a}=0\Rightarrow a=1\Rightarrow\varphi(a)_{\max}=\varphi(1)=\dfrac{1}{e}$,故 $ab<ae^{-a}\le\dfrac{1}{e}$,于是 $k_{\min}=\dfrac{1}{e}$

(2)原式化为 $x_2-e^{-a}>t(e^{-a}-x_1)$.由(1)可知零点 x_1,x_2满足$x_1<e^{-a}<x_2$

当 $t\le0$,显然成立.当 $t>0$时,不妨设 $x=e^{-a}-x_1(0<x<e^{-a})$,则上式又可化为 $x_2>e^{-a}+tx$

因 $g(x_1)=g(e^{-a}-x)=g(x_2)=0$,$g(x)$在$(e^{-a}.+\infty)$上递增,有 $g(e^{-a}+tx)<g(x_2)=g(e^{-a}-x)$ 在 $0<x<e^{-a}$ 上恒成立

设 $s(x)=g(e^{-a}-x)-g(e^{-a}+tx)=(e^{-a}-x)\ln(e^{-a}-x)-(e^{-a}+tx)\ln(e^{-a}+tx)-(a-1)(t+1)x$

$s'(x)=-\ln(e^{-a}-x)-t\ln(e^{-a}+tx)-a(t+1)$,$s''(x)=\dfrac{1}{e^{-a}-x}-\dfrac{t^2}{e^{-a}+tx}=\dfrac{(t+1)(tx+(1-t)e^{-a})}{(e^{-a}-x)(e^{-a}+tx)}$

注意到 $s(0)=s'(0)=0$,要使 $s(x)>0$在$(0,e^{-a})$上恒成立,必有 $s''(x)\ge0$在$(0,e^{-a})$上恒成立

考虑到分子递增,只需 $s''(0)=\dfrac{(t+1)(1-t)e^{-a}}{e^{-2a}}\ge0$,即$t\le1$成立

综上,$t\in(-\infty,1]$

(3)设 $h_1(x)=\ln x-\dfrac{x}{2p}+\dfrac{p}{2x}+\ln p$,$h_1'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2p}-\dfrac{p}{2x^2}=\dfrac{-(x-p)^2}{2px^2}\le0$,故 $h_1(x)$ 递减

注意到 $h_1(p)=0$,且 $x_1<e^{-a}<x_2$

不妨取 $p=e^{-a}$,则有 $h_1(x_1)>0$,即 $\ln x_1>\dfrac{x_1}{2e^{-a}}-\dfrac{e^{-a}}{2x_1}-a\Rightarrow x_1\ln x_1>\dfrac{x_1^2}{2e^{-a}}-ax_1-\dfrac{e^{-a}}{2}$

又因 $g(x_1)=x_1\ln x_1+(a-1)x_1+b=0$,有 $x_1\ln x_1=(1-a)x_1-b$

结合以上两式,有 $(1-a)x_1-b>\dfrac{x_1^2}{2e^{-a}}-ax_1-\dfrac{e^{-a}}{2}$.同理, $(1-a)x_2-b<\dfrac{x_2^2}{2e^{-a}}-ax_2-\dfrac{e^{-a}}{2}$

将以上两式相减,得到 $(1-a)(x_1-x_2)>\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{2e^{-a}}-a(x_1-x_2)$,即 $x_1+x_2>2e^{-a}$

再设 $h_2(x)=\ln x-\dfrac{2(x-p)}{x+p}+\ln p$,$h_2'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2(x+p)-2(x-p)}{(x+p)^2}=\dfrac{(x-p)^2}{x(x+p)^2}\ge0$,且注意到 $h_2(p)=0$

同理取 $p=e^{-a}$,有 $(1-a)x_1-b<\dfrac{2x_1(x_1-e^{-a})}{x_1+e^{-a}}-ax_1$,化简得 $x_1^2-(3e^{-a}-b)x_1+e^{-a}b>0$

同理,$x_2^2-(3e^{-a}-b)x_2+e^{-a}b<0$.相减得 $(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(3e^{-a}-b)(x_1-x_2)>0$

于是 $x_1+x_2<3e^{-a}-b$.综上,$2e^{-a}<x_1+x_2<3e^{-a}-b$

(4) $f'(x)=\dfrac{x-b}{x^2}$,极值点为 b,故零点 x_1,x_2 满足 $x_1<b<x_2$

在(3) $h_1(x)$ 的中取 $p=b$,可知 $\ln x_1>\dfrac{x_1}{2b}-\dfrac{b}{2x_1}+\ln b$,结合 $f(x_1)=\ln x_1+\dfrac{b}{x_1}+a-1=0$

有$1-a-\frac{b}{x_1}=\ln x_1>\frac{x_1}{2b}-\frac{b}{2x_1}+\ln b\Rightarrow\frac{x_1}{2b}+\frac{b}{2x_1}+a-1+\ln b>0$.同理, $\frac{x_2}{2b}+\frac{b}{2x_2}+a-1+\ln b<0$

直接相减,有$\frac{x_1-x_2}{2b}-\frac{b(x_1-x_2)}{2x_1x_2}>0\Rightarrow x_1x_2>b^2$

在(3) $h_2(x)$ 的中取 $p=b$ 可知, $1-a-\frac{b}{x_1}<\frac{2(x_1-b)}{x_1+b}+\ln b,1-a-\frac{b}{x_2}>\frac{2(x_2-b)}{x_2+b}+\ln b$

直接相减得$\frac{b}{x_2}-\frac{b}{x_1}<\frac{2(x_1-b)}{x_1+b}-\frac{2(x_2-b)}{x_2+b}\Rightarrow 3bx_1x_2<b^2(x_1+x_2)+b^3$

由(3)知 $x_1+x_2<3e^{-a}-b$,于是 $3bx_1x_2<b^2(x_1+x_2)+b^3<b^2(3e^{-a}-b)+b^3=3be^{-a}$,即 $x_1x_2<be^{-a}$

综上,$b^2<x_1x_2<be^{-a}$

选做部分

33.

(1) $a=5,b=13$ 时取最小值 244(提示:光的折射定律;导数)

(2) $x=\frac{\sqrt{3}}{7},y=\frac{2}{7}$ 时取最小值 $\sqrt{7}$ (提示:费马点)

(3) $(a+b)_{\min}=20\sqrt{2}-4,(a+\sqrt{2}b)_{\min}=26$ (提示:倾斜的双曲线)

(4) $x=\frac{12}{5},y=\frac{4}{3},z=\frac{56}{33}$ 时取最大值 364(提示:三角换元;拉格朗日乘数法)

(5) $a_1^2+a_2^2=3$, $b_1^2+b_2^2=2$ (提示:解析几何)

(6) $\frac{1}{a_1^2+b_1^2}+\frac{1}{a_2^2+b_2^2}=\frac{5}{6}$ (提示:解析几何)

(7)略(提示:三角换元)

34.

(1)略(提示:翻折或利用三角函数的单调性均可)

(2)100° (提示:构造等边三角形)

(3)5° (提示:构造等边三角形;翻折)