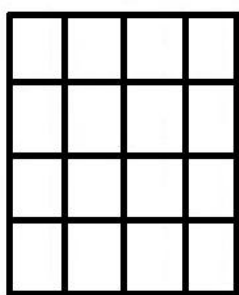


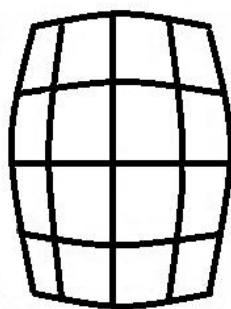
## 一、标定原因（得到成像几何模型）

对摄像头进行标定的**主要理由**是在实际应用中目前使用的摄像头并不是近似针孔摄像机模型。所谓针孔摄像机模型，它的原理简单地来说就和小孔成像是类似的，光线通过一个小孔，然后在小孔背后的感光部件上成像。众所周知，现实生活中使用的摄像机都是采用光学透镜聚光来达到成像的效果的，并且摄像机所用的透镜并不是绝对抛物面的，这在工业加工上是很难实现的，同时，感光芯片所成的面和透镜所在的面之间也不是绝对平行的。所以，在实际应用中就产生了成像画面上所呈现出来的**扭曲和偏移**。如果直接使用这种带有扭曲和偏移的原始成像画面进行距离探测，则势必会造成很大的误差。因此这就需要对摄像机进行标定处理，**通过标定处理后获得的图像画面就消除了上面提到的扭曲和偏移误差，再用来进行激光测距的相关操作就会得到较为理想的效果。**

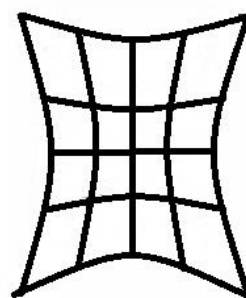
在**图像测量过程以及机器视觉应用中**，在实际应用中成像画面上会呈现出**扭曲和偏移**，如果直接使用这种带有扭曲和偏移的原始成像画面进行距离探测，则势必会造成很大的误差，因此这就需要对摄像机进行标定处理，**所谓标定就是确定空间物体表面某点的三维几何位置与其在图像中对应点之间的相互关系,建立摄像机成像的几何模型,这些几何模型参数就是摄像机参数。**



无失真



桶形失真



枕形失真

## 以下二、三为标定内容（即参数包括什么参数）

### 二、 参考坐标系

#### 1、图像坐标系（ $u, v$ ）

摄像机拍摄到的图像的信息是以数组的形式存储在计算机里的，其中的每个元素为像素坐标（ $u, v$ ），对应图像画面中点的亮度，也称灰度。图像坐标系中的坐标单位是象素，象素坐标（ $u, v$ ）的值分别对应该象素在数组中的行数和列数。

#### 2、成像平面坐标系（ $x, y$ ）

对于上面提到的图像坐标系，它只表示了象素位于数组中的列数和行数，并

没有表示出该像素在图像画面中的物理位置，因此我们建立了以物理单位表示的成像平面坐标系  $(x,y)$ ，该坐标系中的原点  $O_1$  定义在摄像机光轴和摄像机成像平面的交点处，也称图像的主点，该点理论上位于图像画面的中心，但由于实际中摄像机工业制作等原因，会存在一定的偏差。图 1 给出了图像坐标系和成像平面坐标系的关系：

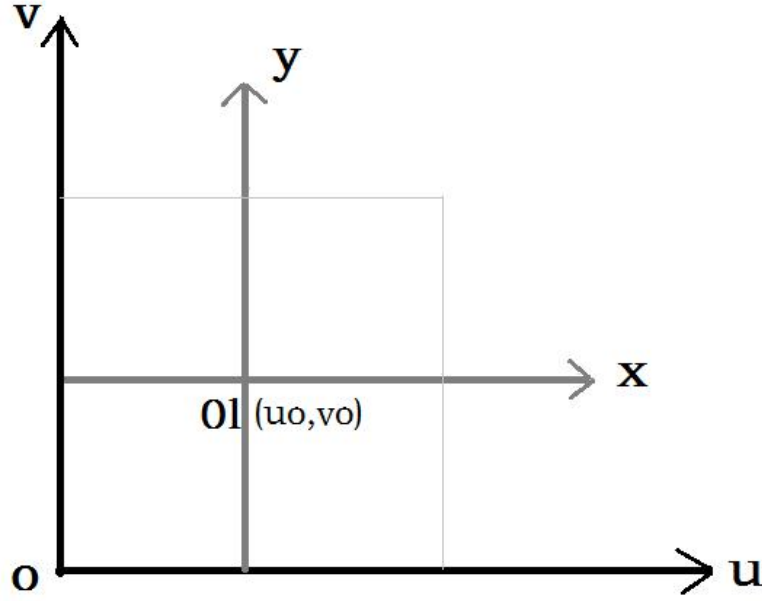


图 1 图像坐标系和成像平面坐标系

若主点  $O_1$  在图像坐标系中坐标为  $(u_0, v_0)$ ，而每个象素在  $x$  轴和  $y$  轴方向上的实际空间尺寸为  $dx$ 、 $dy$ ，则这两坐标系的数学矩阵关系如下：

$$\begin{aligned} u &= \frac{x}{dx} + u_0 \\ v &= \frac{y}{dy} + v_0 \end{aligned} \quad (1)$$

写为齐次坐标与矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & s_0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中  $s_0$  是因为成像平面坐标轴不垂直所造成的倾斜因子。

### 3、相机坐标系 ( $X_c, Y_c, Z_c$ )

相机坐标系可由相机成像原理中的几何关系客观表示。如图 2 所示，相机坐标系  $O_c-X_cY_cZ_c$  中， $O_c$  为相机的光心， $X_c$  轴与  $Y_c$  轴与成像平面坐标系  $XO_1Y$  中的  $X$  轴与  $Y$  轴平行，而  $Z_c$  轴为相机的光轴，它垂直于图像平面而且交点为图像物理坐标系原点  $O_1$ ， $O_cO_1$  距离为相机的焦距。

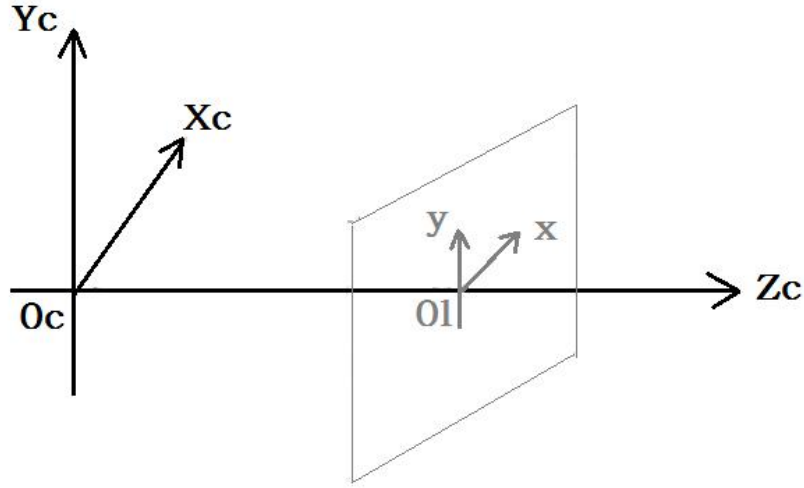


图 2 相机坐标系与成像坐标系

### 4、世界坐标系( $X_w, Y_w, Z_w$ )

由于相机的安放是按环境与目标物的状况来安排的，没有很好的预知性，所以我们的空间还需要选择一个权威的坐标系来阐述相机的位置，并用此坐标系来描述空间中任何目标物的位置，这便是我们所要介绍的世界坐标系  $O_w-X_wY_wZ_w$ ，它是由  $X_w$  轴， $Y_w$  轴， $Z_w$  轴组成。世界坐标系与相机坐标系的关系转换可以由旋转坐标系  $R$  和平移坐标系  $T$  实现，由此，我们可以设空间任一点  $P$  在世界坐标系中的坐标为  $P(x_w, y_w, z_w)$ ，在相机坐标系中的坐标为  $p(x_c, y_c, z_c)$ ，所以我们可知如下关系：

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} + T \quad (3)$$

其中，旋转矩阵  $R$  为  $3 \times 3$  正交单位矩阵，平移向量  $T$  为  $3 \times 1$  矩阵，上式可表示为齐次坐标方程式形式：

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中  $0 = (0,0,0)$   $M_2$  为  $4 \times 4$  的**外参矩阵**，表征两坐标系之间的联系。

### 三、针孔相机模型

空间物体投影到像平面的模型称为成像模型。假设从目标物体表面反射回来的光都经过一个针孔后投影到像平面上，我们把这种理想的投影模型称为线型摄像机模型（针孔模型）。若存在空间中任意一点  $P$ ，则由图3可知点  $P$  在图像坐标系平面的成像位置一定是光心  $O_c$  与  $P$  点的连线  $O_cP$  与图像平面的交点，记为  $p$ ，我们称这种关系叫做**中心摄影**或**透视投影**。设空间点  $P$  在相机坐标系中和空间点  $P$  在图像坐标系中的投影点  $p$  的坐标分别为  $(x_c, y_c, z_c)$ 、 $(x, y)$ 。

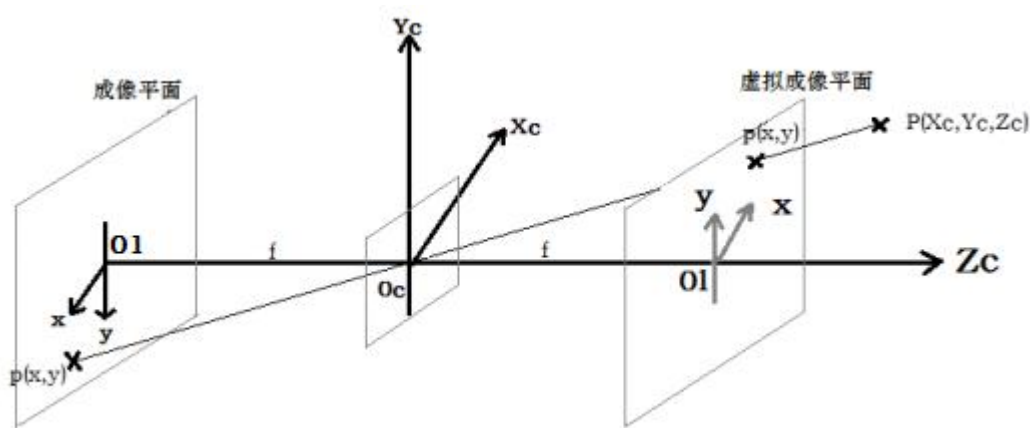


图3 针孔成像几何模型

由上述可知，比例关系为：

$$\begin{aligned} x &= \frac{fx_c}{z_c} \\ y &= \frac{fy_c}{z_c} \end{aligned} \quad (5)$$

将其转化为其次坐标与矩阵形式：

$$z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

将式(2)和式(4)代入式(6)，假设摄像机倾斜因子  $s_0$  为零值，我们可以得到在世界坐标系的  $P$  点坐标和其投影点  $p$  的图像坐标的转换关系为：

$$Z_c \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & u_0 \\ 0 & a_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = M_1 M_2 \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

我们称  $a_x=f/dx$  为  $u$  轴上尺度因子； $a_y=f/dy$  为  $v$  轴上尺度因子， $M$  为  $3*4$  矩阵，称为投影矩阵；矩阵  $M_1$  由  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $u_0$ 、 $v_0$  决定，由于  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $u_0$ 、 $v_0$  只与相机内部结构有关，所以这些参数称为相机**内部参数**；由于矩阵  $M_2$  由摄像机与世界坐标系的位置关系决定，所以这些参数称为相机**外部参数**。而我们把获取相机内外参数的过程，称为**摄像机的标定**。

通过以上分析可知，通过摄像机标定得到摄像机的内外参数后，就可以求出投影矩阵  $M$ 。对任意空间点  $P$ ，如已知其坐标 $(x_w, y_w, z_w)$ 和  $M$ ，就可以求出它的像点  $p$  的位置 $(u, v)$ ；但是如果空间点  $P$  的像点  $p$  的位置 $(u, v)$ 已知，即使已知摄像机的内外参数，其对应的空间点  $P$  的坐标却不能唯一确定，因为  $M$  是  $3*4$  不可逆矩阵。

摄像机定标一般都需要特定的参照物，摄像机获得该目标的图像，并由此图像数据获取摄像机内部参数。我们将世界坐标系选为参考物体坐标系。在得到这些已知点在图像上的投影后，可获取相机的内外参数。

#### 四、标定方法：

摄像机标定技术是计算机视觉的基本任务之一，发展到今天技术已经比较成熟。医学、考古、水下探测等各种领域都有标定技术的应用，尽管没有一种普遍适用的方法，但可以归纳为三大类：基于参照物的传统标定法<sup>[1-6]</sup>；摄像机自标定法<sup>[7-18]</sup>；基于主动视觉的标定方法<sup>[19-22]</sup>，方法介绍及性能比较如表所示。

标定方法	方法概括	代表方法	方法比较
传统标定方法	以一个结构形状已知的物体作为空间参照物，通过计算图像点坐标和空间点坐标的关系确定摄像机模型，然后获得摄像机的内外参数。	直接线性变换（DLT）方法；经典的“Roger Y.Tsai 算法；张正友标定算法；	标定算法必须要有标定参照物存在，算法复杂，实时性差，但 <b>精度较高</b> 。
摄像机自标定算法	该方法不依赖于标定参照物，根据多幅多幅图像对应点之间的几何关系和摄像机内参数存在的约束来实现标定。	基于 Kruppa 方程的自标定方法；基于二次曲面的自标定方法；	标定算法中常用的绝对二次曲线法受初值影响较大，虽然相对传统标定法相对灵活，但 <b>鲁棒性不足，对噪声较为敏感</b> 。
基于主动视觉的标定算法	该方法借助于可精确控制的摄像机移动平台，控制摄像机作特定移动，获得多幅图像，利用图像和可控的摄像机运动参数来确定摄像机的内参和外参。	基于摄像机纯旋转的标定方法；基于三正交平移运动的标定方法；基于平面正交运动的标定方法；	该标定算法 <b>必须要提供摄像机的移动平台，成本较高</b> 。目前对此方法的研究主要集中于如何在减少对摄像机的移动限制的同时仍能线性的求解摄像机的参数。

## 举例：传统标定方法

### 1、线性标定

我们首先介绍由参照物的图像数据求取投影矩阵  $M$  的算法。可将式（7）写为：

$$Z_{ci} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{31} & \cdots & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{wi} \\ Y_{wi} \\ Z_{wi} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中  $(X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi}, 1)$  为空间第  $i$  个点的坐标； $(u_i, v_i, 1)$  为第  $i$  个点的图像坐标； $m_{ij}$  为投影矩阵  $M$  的第  $i$  行第  $j$  列元素，将上式列成三个方程组为：

$$\begin{aligned} Z_{ci} u_i &= m_{11} X_{wi} + m_{12} Y_{wi} + m_{13} Z_{wi} + m_{14} \\ Z_{ci} v_i &= m_{21} X_{wi} + m_{22} Y_{wi} + m_{23} Z_{wi} + m_{24} \\ Z_{ci} &= m_{31} X_{wi} + m_{32} Y_{wi} + m_{33} Z_{wi} + m_{34} \end{aligned} \quad (9)$$

将方程组消去  $Z_{ci}$  后，可得到关于  $m_{ij}$  的两个方程：

$$\begin{aligned} m_{11} X_{wi} + m_{12} Y_{wi} + m_{13} Z_{wi} + m_{14} - u_i m_{31} X_{wi} - u_i m_{32} Y_{wi} - u_i m_{33} Z_{wi} &= u_i m_{34} \\ m_{21} X_{wi} + m_{22} Y_{wi} + m_{23} Z_{wi} + m_{24} - v_i m_{31} X_{wi} - v_i m_{32} Y_{wi} - v_i m_{33} Z_{wi} &= v_i m_{34} \end{aligned} \quad (10)$$

上式表示，如果已知标定板上  $n$  个点的空间坐标  $(X_{wi}, Y_{wi}, Z_{wi})$  和图像坐标  $(u_i, v_i)$ （其中  $i=1, \dots, n$ ），那我们就可以得到  $2*n$  个线性方程，其矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix} X_{w1} & Y_{w1} & Z_{w1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_1 X_{w1} & -u_1 Y_{w1} & -u_1 Z_{w1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{w1} & Y_{w1} & Z_{w1} & 1 & -v_1 X_{w1} & -v_1 Y_{w1} & -v_1 Z_{w1} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\ X_{wn} & Y_{wn} & Z_{wn} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_n X_{wn} & -u_n Y_{wn} & -u_n Z_{wn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{wn} & Y_{wn} & Z_{wn} & 1 & -v_n X_{wn} & -v_n Y_{wn} & -v_n Z_{wn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \\ m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 m_{34} \\ v_1 m_{34} \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ u_n m_{34} \\ v_n m_{34} \end{bmatrix} \quad (11)$$

由上式可以看出，矩阵  $M$  乘以任意一非零常数并不影响空间坐标值与图像坐标值的关系，因此，我们制定上式中的  $m_{34}=1$ ，得到  $2*n$  个关于  $M$  其他元素的方程，其中有 11 个待求元素，将公式简写为： $Km = U$

当  $2n > 11$  时，我们可用最小二乘法求出上述线性方程的解为：

$$m = (K^T K)^{-1} K^T U \quad (12)$$

因为此时求得的矩阵  $M$  与式 (7) 中的矩阵  $M$  相差一个常数因子  $m_{34}$ ，我们可以将公式(7) 中  $M$  改写为：

$$m_{34} \begin{bmatrix} m_1^T & m_{14} \\ m_2^T & m_{24} \\ m_3^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & a_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^T & t_x \\ r_2^T & t_y \\ r_3^T & t_z \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中， $m_i^T$  为式 (10) 求得的  $M$  矩阵的第  $i$  行中前 3 项组成的行向量； $m_{i4}$  为  $M$  矩阵中第  $i$  行第 4 列相应的元素； $r_i^T$  为旋转矩阵  $R$  的第  $i$  行； $t_x, t_y, t_z$  分别为平移向量  $t$  中的 3 个元素。由式(13) 可得：

$$m_{34} \begin{bmatrix} m_1^T & m_{14} \\ m_2^T & m_{24} \\ m_3^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x r_1^T + u_0 r_3^T & a_x t_x + u_0 t_z \\ a_y r_2^T + v_0 r_3^T & a_y t_y + v_0 t_z \\ r_3^T & t_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

从上式两边矩阵对应关系可知： $m_{34}m_3=r_3$ ，由于  $r_3$  是一个正交单位矩阵，并且为第 3 行元素， $|r_3|=1$ ，因此，我们可根据  $m_{34}|m_3|=1$ ，， 求出  $m_{34}=1/|m_3|$ ，上式可整理为：

$$\begin{aligned} r_3 &= m_{34}m_3 \\ u_0 &= (a_x r_1^T + u_0 r_3^T)r_3 = m_{34}^2 m_1 m_3 \\ v_0 &= (a_y r_2^T + v_0 r_3^T)r_3 = m_{34}^2 m_2 m_3 \\ a_x &= m_{34}^2 |m_1 \times m_3| \\ a_y &= m_{34}^2 |m_2 \times m_3| \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\times$ 代表着向量积。由以上六个公式我们可以进一步得到：



$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{m_{34}}{a_x} (m_1 - u_0 m_3) \\
r_2 &= \frac{m_{34}}{a_y} (m_2 - u_0 m_3) \\
t_x &= \frac{m_{34}}{a_x} (m_{14} - u_0) \\
t_y &= \frac{m_{34}}{a_y} (m_{24} - v_0) \\
t_z &= m_{34}
\end{aligned} \tag{16}$$

综上所述，由空间 6 个以上已知点以及它们的坐标，带入公式就可求出  $M$  矩阵，并可按以上 10 个公式求出全部内外参数。

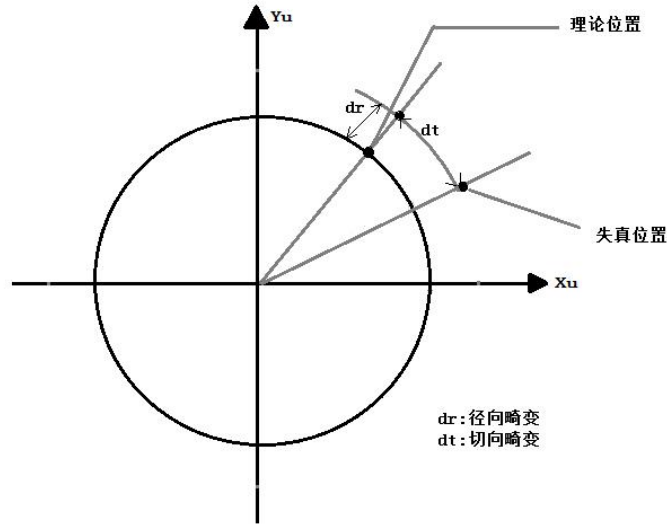
## 2、非线性标定

实际应用中，摄像机镜头并不能满足理想的线性透视成像的技术需求，存在着由多种畸变产生的误差。假设空间中任一点利用理想线性模型计算出来的图像点坐标的理想值为  $P_u(x_u, y_u)$ ，而实际的图像点坐标为  $P_d(x_d, y_d)$ ， $\delta x$  与  $\delta y$  是非线性畸变值，则非线性畸变模型公式为：

$$\begin{aligned}
x_u &= x_d + \delta_x(x_d, y_d) \\
y_u &= y_d + \delta_y(x_d, y_d)
\end{aligned} \tag{17}$$

### 1) 径向畸变

摄像头由于光学透镜的特性使得成像存在着径向畸变，可由三个参数  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  确定；因为安装过程中的误差，传感器与光学镜头之间并不能完全平行，所以成像上存在着切向畸变。从理论上讲，镜头会不可避免的存在这两种畸变（“径向畸变”就是矢量端点沿长度方向发生的变化  $dr$ ，也就是矢径的变化，“切向畸变”就是矢量端点沿切线方向发生的变化，也就是角度的变化  $dt$ ）：



$$\begin{aligned}\delta_x(x_d, y_d) &= x_d(k_1 r_d^2 + k_2 r_d^4 + k_3 r_d^6 + \dots) \\ \delta_y(x_d, y_d) &= y_d(k_1 r_d^2 + k_2 r_d^4 + k_3 r_d^6 + \dots)\end{aligned}\quad (18)$$

其中,  $r_d^2 = x_d^2 + y_d^2$ ,  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  为径向畸变系数。

一般切向畸变很小可忽略不计, 而径向畸变能描述整个非线性畸变, 一般取前两阶, 即取到  $k_1$ 、 $k_2$ 。

## 2) 离心畸变

摄像机光学系统中各镜头的光轴中心并不保证严格共线, 从而造成导致了镜头的离心畸变, 公式如下:

$$\begin{aligned}\delta_x(x_d, y_d) &= p_1(3x_d^3 + y_d^2) + 2p_2x_dy_d \\ \delta_y(x_d, y_d) &= p_2(3y_d^3 + x_d^2) + 2p_1x_dy_d\end{aligned}\quad (19)$$

其中,  $p_1$ 、 $p_2$  为离心畸变系数。离心特性的畸变对于任何光学系统来说都有不同程度的存在, 其既有径向畸变同时也有切向畸变。

## 3) 薄棱镜畸变

这是由于透镜制作工艺上的限制产生的畸变, 公式如下:

$$\begin{aligned}s_1(x_d^2 + y_d^2) \\ s_2(x_d^2 + y_d^2)\end{aligned}\quad (20)$$

其中,  $s_1$ 、 $s_2$  为薄棱镜畸变系数。

通过上述的分析, 我们可以总结出摄像机存在的畸变总量为:

$$\begin{aligned}\delta_x(x_d, y_d) &= x_d(k_1 r_d^2 + k_2 r_d^4) + p_1(3x_d^2 + y_d^2) + 2p_2 x_d y_d + s_1(x_d^2 + y_d^2) \\ \delta_y(x_d, y_d) &= y_d(k_1 r_d^2 + k_2 r_d^4) + p_2(3y_d^2 + x_d^2) + 2p_1 x_d y_d + s_2(x_d^2 + y_d^2)\end{aligned}\quad (21)$$

由以上分析可知，将摄像机的线性模型参数  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $u_0$ 、 $v_0$  与非线性模型参数  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $p_1$ 、 $p_2$ 、 $s_1$ 、 $s_2$  结合，便组成了非线性模型摄像机的内部参数。

### 摄像机直接标定方法

（在单个小区域内畸变量很小，用不到摄像机的内外参数，故可以采用以下 07 年提出的摄像机直接标定方法，但会受到探测范围的影响。）

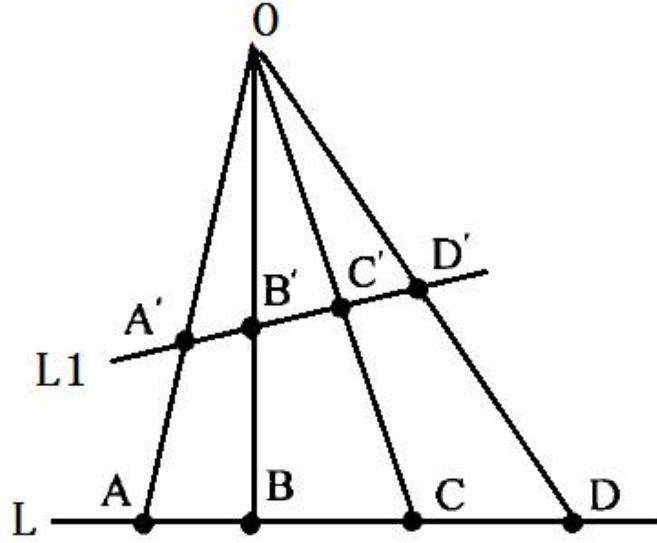
相机记录图像与真实空间之间的标定，通常需要涉及到三维世界坐标、三维相机坐标、二维图像坐标、焦距、镜头畸变等多个坐标系、参数及各种因素，标定和计算过程均较复杂。2007 年，C.C. Wang<sup>[23]</sup>提出了一种非度量相机标定方法（Nonmetric Camera Calibration），在保证较高测量精度的前提下，简化了标定过程，通过拍摄标定板，建立扫描图像坐标系与世界坐标系的对应关系，即进行了二维图像与三维世界坐标系的直接标定。在数据处理时，依据这种直接标定的对应关系，计算数据点的三维坐标，避免了传统相机标定的复杂过程。

CCD 相机记录下标定板图像，作为标定依据，一旦标定，CCD 相机的焦距及其它参数不能变动，如果改变探测范围，则需要多次标定。

对于小区域的目标扫描，则需采用刻度（网格）较密集、面积较小的标定板；对于大范围的地形扫描，则需采用刻度较稀疏、面积较大的标定板。

$$\begin{bmatrix} (a_1, b_1) & (a_2, b_2) & \dots \\ (a_3, b_3) & (a_4, b_4) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (1,1) & (1,31) & \dots \\ (31,1) & (31,31) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

交比不变理论：



考虑直线 L 上的四个点 A,B,C 和 D,则共线四点的两个简比之比称为交比。可以定义如下:

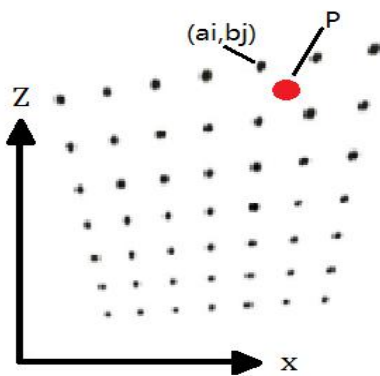
$$CR(A, B, C, D) = \frac{AC}{CB} \bigg/ \frac{AD}{DB} \quad (22)$$

在透视投影中,关于透视投影中心 O 相对于空间四点 A,B,C 和 D,在图像上有对应的四个像点 A',B',C'和 D'。四个像点的交比定义为

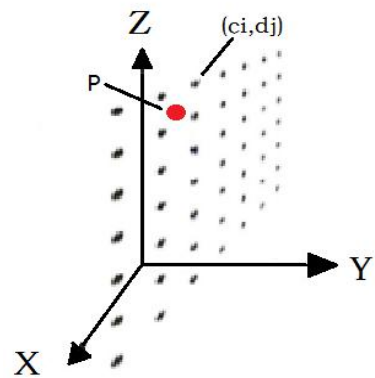
$$CR'(A', B', C', D') = \frac{A'C'}{C'B'} \bigg/ \frac{A'D'}{D'B'} \quad (23)$$

其中,如果四个世界坐标点 A,B,C 和 D 在空间中是共线的,则对应的四个像点 A',B',C'和 D'也是共线的。进一步可知,在透视投影下,交比保持不变且与摄像机内外参数无关,这被称作交比不变理论。这意味着两组点的交比是相等的,表达如下

$$CR(A, B, C, D) = CR'(A' B' C' D') \quad (24)$$



图像坐标系



世界坐标系

由图像坐标系和世界坐标系可得:

$$\begin{aligned}
\frac{X - c_i}{c_{i+1} - c_i} &= \frac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i} \\
Y &= v \times t \\
\frac{Z - d_j}{d_{j+1} - d_j} &= \frac{z - c_j}{c_{j+1} - c_j}
\end{aligned} \tag{25}$$

转化为：

$$\begin{aligned}
X &= c_i + \frac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i} \times (c_{i+1} - c_i) \\
Y &= v \times t \\
Z &= d_j + \frac{z - b_j}{b_{j+1} - b_j} \times (d_{j+1} - d_j)
\end{aligned} \tag{26}$$

上式即为二维坐标到三维坐标的转换关系式。

- [1] Y. I. Abdel-Aziz and H. M. Karara, Direct Linear Transformation from Coordinates in to Object Space Coordinates[C], ASP Symposium on Photogrammetry, pp. 1-18, 1971, Comparator Colse-Range
- [2] Z. Y. Zhang, Flexible Camera Calibration Orientations[C], In Proc. of ICCV'99, pp. 666 Viewing a Plane from Unknown, 1999.
- [3] Z. Y. Zhang. Camera Calibration with One-Dimensional Objects[J], IEEE Trans On Pattern Analysis And Machine Intelligence, 2004 7(26):892-899
- [4] Zhang, Z. A flexible new technique for camera calibration[J] Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions, 2002, 11(22): 1330 — 1334
- [5] R. Tsai and R. K. Lenz, A Technique for Fully Automomous and Efficient 3D Robotics Hand/Eye Calibration[J], IEEE Trans. Robotics and Automation, Vol. 5, No. 3, pp. 345-358, 1989.
- [6] R. Tsai, An Efficient and Accurate Camera Calibration Technique for 3D Machine Vision[C], in Proc of CVPR'86, pp. 364-374, 1986.
- [7] R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision[D], Cambridge University Press 2000
- [8] S. J. Maybank and O. D. Faugeras, A theory of Self-calibration of a Moving Camera[J], International Journal of Computer Vision, 8(2): 123--131, 1992
- [9] O. D. Faugeras, Q. Luong, and Maybank, Camera Self-calibration: Theory and Experiments [C], in Proceedings of European Conference on Computer Vision, LNCS 588, pp. 321-334, Springer-Verlag, 1992.
- [10] O. Faugeras, What Can be Seen in Three Dimensions with an Uncalibrated Stereo Rig[C], Computer Vision—ECCV'91, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 588, Springer-Verlag, pp. 563-578, 1992.
- [11] Q.-T. Luong and O. Faugeras, Self-calibration of a moving camera from point correspondences and fundamental matrices[J], International Journal of Computer Vision, 22(3), pp. 261-289, 1997.
- [12] M. Armstrong, A. Zisserman, and R. Hartley, Self-Calibration from Image Triplets[C], ECCV'96, pp. 3-16, 1996
- [13] A. Heyden, Varying and K. Astrom Euclidean Reconstruction from Image Sequences with Focal Length and Principal Point[C], In Proc. of CVPR'97, pp. 438-443, 1997.
- [14] R. Hartley, E. Hayman, L. de Agapito and L. Reid, Camera Calibration and the Search for Infinity

- [C], In Proc. of ICCV'99, pp.510-516, 1999.
- [15] 吴福朝, 胡占义, 摄像机自定标的线性理论与算法[J], 计算机学报, 第 24 卷, 第 9 期, pp-1121 — 1135, 2001
- [16] R. Hartley, Self-Calibration from Multiple Views with a Rotating Camera[C], Proc. Third Conf. Computer Vision, J.-O. Eklundh, ed., vol. 800-801, pp 471-478, May 1994.
- [17] R.I. Hartley, An Algorithm for Self Calibration from Several Views[C], IEEEConf. Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 908-912, June 1994.
- [18] S.J. Maybank and O.D. Faugeras, A Theory of Self-Calibration of a Moving Camera[C], Int'l J. Computer Vision, vol. 8, no. 2, pp. 123 — 152, Aug. 1992.
- [19] S. D. Ma, A Self-Calibration Technique for Active Vision System[J], IEEE Trans. on Robot Automation, 12(1), pp. 114-120, 1996.
- [20] 李华, 吴福朝, 胡占义一种新的线性摄像机自标定方法[J], 计算机学报,第 23 卷. 第 11 期, pp. 1121 — 1129, 2000.
- [21] 吴福朝, 李华, 胡占义, 基于主动视觉的摄像机自标定方法研究[J], 自动化学报, 第 27 卷, 第 6 期, pp.736-746, 2001
- [22] 雷成, 吴福朝, 胡占义, 一种新的基于主动视觉系统的摄像机自标定方法[J]计算机学报第 23 卷, 第 11 期, pp.1130-1139a 2000.
- [23] Wang C C. Nonmetric camera calibration for underwater laser scanning system. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2007, 32(2): 383-399.