L-PDEs for Image Restoration via Optimal Control

汇报人 魏腾达

中国海洋大学

2014 年 12 月

Contents

PDEs 在计算机视觉中的两个设计思路:

- **设计变分形式（能量函数）**：直接设计能量函数，使得图像经处理后达到预期的效果。例如：ROF 模型[1]

$$\inf\{\int_{\Omega} |u-u_0|^2 + |\nabla u| dx\} \tag{1}$$

- **直接设计 PDE**：基于数学和物理的理解，直接设计扩散方程，需要对各种算子的性质比较熟悉。例如各项异性扩散方程[2]。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \textbf{div}(c(|\nabla u|^2)\nabla u) & (x,y,t) \in Q \\ u = 0 & (x,y,t) \in \Gamma \\ u|_{t=0} = f & (x,y) \in \Omega \end{cases} \tag{2}$$

[1] Rudin, L., Osher, S., Fatemi, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms.Physica D. 60 (1992) 259–268.

[2] Pietro, P., Jitendra, M. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 12 (1990) 629–639.

L-PDE:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = L(u, a) & (x, y, t) \in Q \\ u = 0 & (x, y, t) \in \Gamma \\ u|_{t=0} = f & (x, y) \in \Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中 $L(u, a) = \kappa(u) + F(u, a)$。$\kappa(u)$ 表示 TV 正则项，$F(u, a)$ 表示数据微分不变项。

- TV 正则项: $\kappa(u) \Leftrightarrow \min \int_\Omega |\nabla u| d\Omega$
- 数据微分不变项: $F(u,a) = a(t)^T inv(u)$
  其中 $inv(u)$ 是具有平移和旋转不变性的函数向量。
  - f
  - u
  - $|\nabla u|^2$
  - $tr(H_u^2) = u_x^2 + u_y^2$
  - $tr(H_u^2)$
  - $(\nabla u)^T H_u (\nabla u)$

目标函数:

$$J(\{u\}_{k=1}^{K}, a) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\int_{\Omega}(u_k(T_f) - \hat{u}_k)^2 d\Omega + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\int_{0}^{T_f} a_i^2(t)\,dt \qquad (4)$$

PDE 限制下的最优控制

$$\min_{a} J(\{u\}_{k=1}^{K}, a) \quad s.t. \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = L(u, a) & (x, y, t) \in Q \\ u = 0 & (x, y, t) \in \Gamma \\ u|_{t=0} = f & (x, y) \in \Omega \end{cases} \tag{5}$$

初始化 $a(t)$

一方面，在每一步，我们希望 $\frac{\partial u_k(t)}{\partial t}$ 等于 $\frac{\hat{u}_k - u_k(t)}{T_f - t}$，$u_k$ 趋向于预期图像（Groud Truth）。另一方面，$\frac{\partial u_k(t)}{\partial t} = L(u_k, a)$，所以 $a(t)$ 希望是下列方程的最小解。

$$\sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega} (L(u_k, a) - \frac{\hat{u}_k - u_k(t)}{T_f - t}) d\Omega = \sum_{k=1}^{K} \int_{\Omega} [p_k(t)^T a(t) - d_k(t)]^2 d\Omega \qquad (6)$$

算法

- **Require:** Training image pairs$(f_k, \hat{u}_k)$
- Initialize $a(t)$ by solving (6)
- **while** not converged **do**
- Compute $\dfrac{\partial J}{\partial a_i}$
- Decide the search direction using the conjugare gradient method.
- Perform golden search along the search direction and update a(t)
- **end while**
- **Ensure:** The coefficient functions $a(t)$

- 求解 PDE 限制下的最优控制问题的其他方法？欧拉 -拉格朗日方程 + 原始 -对偶方法？
- PDE→ 能量函数

引入 TV 正则项是因为 ROF 模型在保持边缘时达到较好的效果，受此处的启发，考虑相反的过程，将数据微分不变项 $F(u,a)$ 转化为欧拉 -拉格朗日方程的一项，近而转化为全变分目标函数中的一项 $\phi(u,a)$，TV 正则项不变，具有如下形式：

$$\min E(u) = \min \int_{\Omega} (Ku - f)^2 + |u| + \phi(u,a)\, dx \tag{7}$$

加上 $a(t)$ 所满足的目标函数，构成一个新问题：

$$\min_{a} J(u_k, a) \quad s.t. \quad \min E(u) \tag{8}$$

- 两目标规划?
- 一个目标函数 + 欧拉 -拉格朗日方程
- 两个目标函数线性组合 $\rightarrow$ 一个目标函数

$$\min_{a} J(u_k, a) \quad s.t. \quad \min E(u) \tag{9}$$

$$\Downarrow$$

$$\min \sigma J(u_k, a) + (1-\sigma) E(u) \tag{10}$$

学习的两个方面

- 系数
- 组成部分，例如[3]：

$$\begin{cases} \frac{\partial f(p,t)}{\partial t} = \textbf{div}(K_p \nabla f(p)) + \lambda(f(p) - g(p)) \\ f(g) = 0, f(p) = s_p, p \in S \end{cases} \tag{11}$$

[3] Risheng Liu, Junjie Cao, Zhouchen Lin and Shiguang Shan. Adaptive Partial Differential Equation Learning for Visual Saliency Detection. CVPR 2014.