【刚体姿态运动学】角速度和欧拉角速率的换算关系的详细推导

原创 Scarlett Sun

0 引言

本文以一种新的角度推导刚体姿态运动学，也即角速度和欧拉角速率之间的换算，不同于相似博文的地方在于，本文旨在从原理上给出直观清
详细过程记录于此，便于后续学习科研查找需要。

1 符号

符号	含义
$\{E\}$	地面坐标系（惯性坐标系，牛顿运动定律严格成立）
$\{B\}$	随体坐标系（固连在刚体上，且原点位于质心）
$\Phi=[\phi,\theta,\psi]^T$	姿态角，ZYX欧拉角，分别为roll, pitch, yaw
$R_X(\phi), R_Y(\theta), R_z(\psi)$	随体坐标系绕地面坐标系X/Y/Z轴旋转$\phi/\theta/\psi$角度得到的旋转矩阵
${}^E_BR$	旋转矩阵，随体坐标系姿态在地面坐标系下的表达
c, s	c表示cos，s表示sin
$\omega_b=[\omega_{bx},\omega_{by},\omega_{bz}]^T$	刚体相对地面坐标系转动的角速度在$\{B\}$系下的表达

2 欧拉角与旋转矩阵

这里我们使用ZYX欧拉角来表达姿态，那么有：

$$
\begin{aligned}
{}^E_BR &= R_Z(\psi)R_Y(\theta)R_X(\phi)\\
&=\begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0\\ s\psi & c\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\theta & 0 & c\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & c\phi & -s\phi\\ 0 & s\phi & c\phi\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\theta s\phi c\psi - c\phi s\psi & s\theta c\phi c\psi + s\psi s\phi\\ s\psi c\theta & s\theta s\phi s\psi + c\phi c\psi & s\theta c\phi s\psi - c\psi s\phi\\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

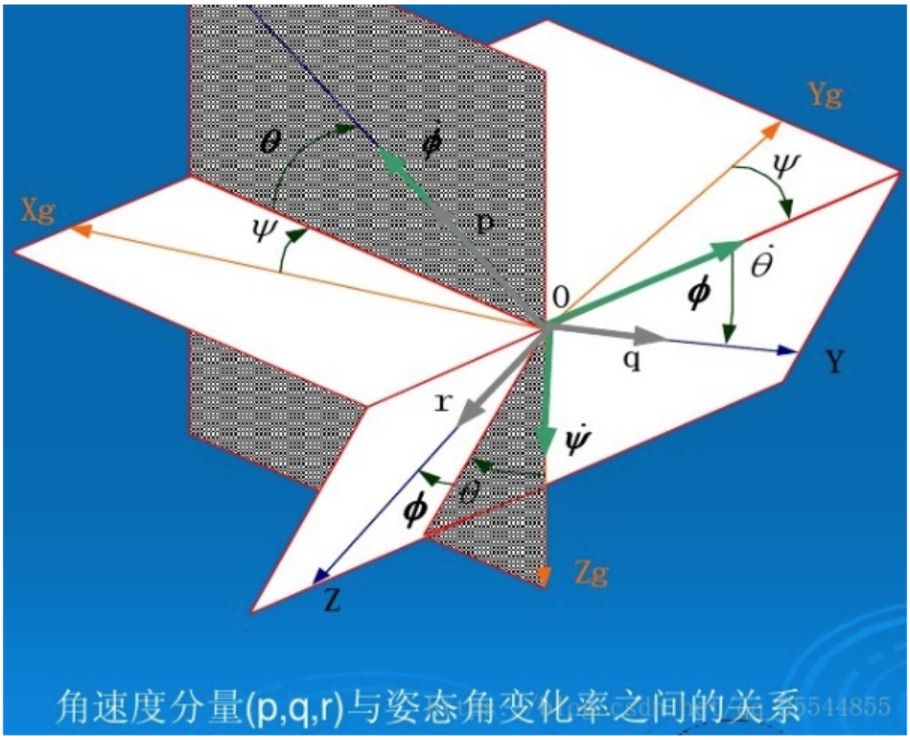
上述旋转矩阵用欧拉角给出，可以理解为：随体坐标系（1）先绕自身的$\hat{Z}_B$轴旋转ψ角度，（2）再绕$\hat{Y}_B$轴旋转θ角度，（3）最后绕$\hat{X}_B$轴旋

欧拉角和固定角的区别为：

- 欧拉角：刚体绕**运动轴**旋转的角度（内旋Intrinsic rotations）
- 固定角：刚体绕**固定轴**旋转的角度（外旋 Extrinsic rotations）

3 机体下的角速度表达与欧拉角的关系

姿态角速率$\dot{\Phi}$和机体角速度ω_b之间的转换关系为：



$$\begin{bmatrix}\dot\phi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\phi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix}$$

该公式不便于记忆，但是需要知道如何推导，并且最重要的是理解其原理，关键的时候查找即可。我几乎把高赞和高收藏的博客都看了一遍，
者的意思，写的也有一定模糊性，后来还是自己琢磨才明白的，于是将自己能够理解的推导过程记录如下。

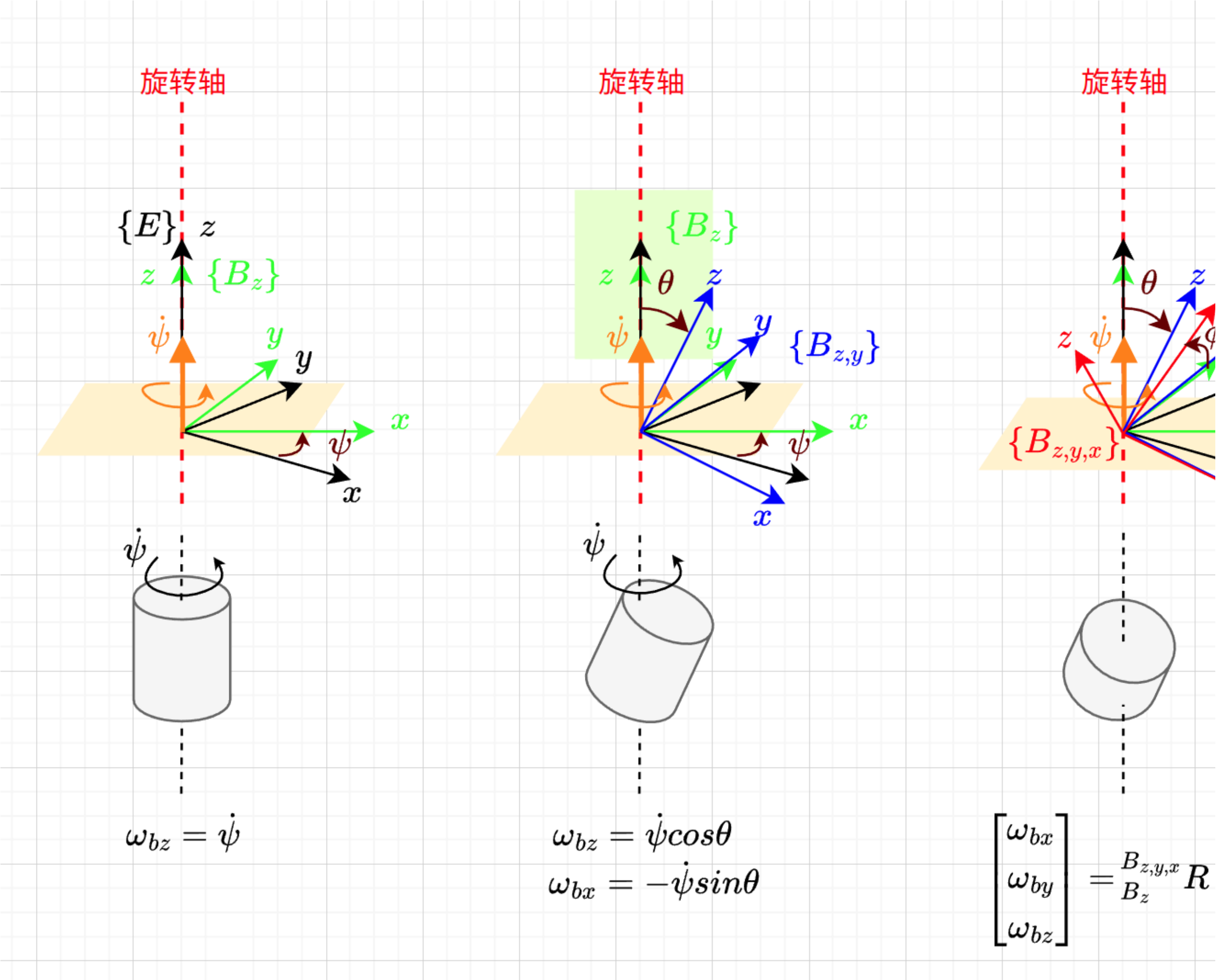
4 推导

假设当前姿态角为$\Phi=[\phi,\theta,\psi]^T$，为了使角速度的表达更直观，这里用$\omega_b=[\omega_{bx},\omega_{by},\omega_{bz}]^T$代替上图所示的$\omega_b=[p,q,r]^T$，那么:
由偏航角速率$\dot\psi$引起的角速度在最终的$\{B\}$系下可以表达为:

$$\begin{bmatrix}\omega_{bx}\\ \omega_{by}\\ \omega_{bz}\end{bmatrix}_{\dot\psi}={}^{B_{z,y,x}}_{B_z}R\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot\psi\end{bmatrix}$$

其中，

$$\begin{aligned}{}^{B_{z,y,x}}_{B_z}R&=R_X^T(\phi)R_Y^T(\theta)\\ {}^{B_{z,y,x}}_{B_{z,y}}R&=R_X^T(\phi)\\ {}^{B_{z,y}}_{B_z}R&=R_Y^T(\theta)\end{aligned}$$



为了便于理解，我特地画了一个示意图，如上图所示。
这里假设物体有一个预设的姿态角（本文与其他文章最大的不同）：

- 第一幅图只有绕绿色z轴的ψ运动，为了与后面的情况作区分，这里$\{B_z\}$用下标 $_z$ 表示第一步绕机体z轴的运动时的随体坐标系，ω_{bz} =
- 第二幅图，在第一幅图的基础上，俯仰角θ不为0，虽然引入了θ，但是却没有绕y轴的运动，也即此时仍然只有ψ变化，请大家想象第二幅倾斜的情况下，仍然绕“竖直”方向转动，那么显然，在这个时候的随体坐标系$\{B_{z,y}\}$下，出现了角速度的x轴分量，而不仅仅有z轴分量，橙色的$\dot{\phi}$箭头）在新的坐标系下的表达。
- 同理，第三幅图，引入了ϕ角，但没有绕x轴的运动（$\dot{\phi}=0$），此时的机体角速度就是$\dot{\psi}$角速度（注意橙色的$\dot{\phi}$箭头）在姿态角Φ表示的

类似的，如果$\dot{\theta}$不为0，则由俯仰角速率$\dot{\theta}$引起的角速度在最终的$\{B\}$系下可以表达为：

$$\begin{bmatrix}\omega_{bx}\\\omega_{by}\\\omega_{bz}\end{bmatrix}_{\dot{\theta}} = {}^{B_{z,y,x}}_{B_{z,y}}R\begin{bmatrix}0\\\dot{\theta}\\0\end{bmatrix}$$

由滚转角速率$\dot{\phi}$引起的角速度在最终的$\{B\}$系下就更直接了，就是：

$$\begin{bmatrix}\omega_{bx}\\\omega_{by}\\\omega_{bz}\end{bmatrix}_{\dot{\phi}} = \begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}$$

以上三个成分相加：

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\omega_{bx}\\ \omega_{by}\\ \omega_{bz}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\omega_{bx}\\ \omega_{by}\\ \omega_{bz}\end{bmatrix}_{\dot{\psi}} + \begin{bmatrix}\omega_{bx}\\ \omega_{by}\\ \omega_{bz}\end{bmatrix}_{\dot{\theta}} + \begin{bmatrix}\omega_{bx}\\ \omega_{by}\\ \omega_{bz}\end{bmatrix}_{\dot{\phi}} \\
&= R_X^T(\phi)R_Y^T(\theta)\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} + R_X^T(\phi)\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}c\theta & 0 & -s\theta\\ s\theta s\phi & c\phi & c\theta s\phi\\ s\theta c\phi & -s\phi & c\theta c\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\phi & s\phi\\ 0 & -s\phi & c\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}1 & 0 & -s\theta\\ 0 & c\phi & c\theta s\phi\\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

也即：

$$
\begin{bmatrix}\omega_{bx}\\ \omega_{by}\\ \omega_{bz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \cos\theta\sin\phi\\ 0 & -\sin\phi & \cos\theta\cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}
$$

上述矩阵的逆，由matlab代码求出：

```
syms theta phi real
A=[1,0,-sin(theta);0,cos(phi),cos(theta)*sin(phi);0,-sin(phi),cos(theta)*cos(phi)];
A_inv = simplify(inv(A))
```

```
ans =

[1, (sin(phi)*sin(theta))/cos(theta), (cos(phi)*sin(theta))/cos(theta)
[0,                         cos(phi),                         -sin(phi)
[0,              sin(phi)/cos(theta),              cos(phi)/cos(theta)
```


也即：

$$
\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{bx}\\ \omega_{by}\\ \omega_{bz}\end{bmatrix}
$$

参考

刚体姿态运动学（二）旋转的微分形式——角速度、欧拉角速度、四元数导数、旋转矩阵导数
控制笔记
姿态角速度和机体角速度，横摆角速度（Yaw Rate）估算
欧拉角速度和机体角速度

8 条评论 > RaoJingJing 热评 你的"2 欧拉角与旋转矩阵这里我们使用ZYX欧拉角来表达姿态，那么有："下面的公式（1）写反了。应该是RxRyRz乘起

欧拉角速度与角速度的关系推导——欧拉运动方程
角速度很简单,初中生都知道。但是具体使用起来却容易出错。因为角速度有两种表示方式,一种表示在惯性坐标系,为全局角速度。常用在机器人运动学求解等领域

角速度求积分能得到欧拉角吗_5. 基于欧拉角的卡尔曼滤波器
表示体坐标系 3-2-1 欧拉角和旋转矩阵互相转换的函数,第二个积分公式请参考之前的"角速度的积分"文章中的公式 (7)。 下一步需要估计积分后三个欧拉角的方差

刚体动力学：欧拉角导数和角速度之间的转换关系推导（不同坐标系下的表示） sul
刚体动力学：欧拉角导数和角速度之间的转换关系推导（不同坐标系下的表示）

欧拉角与旋转矩阵之间的相互转化（推导和Python代码） Shen
表示三维空间中的旋转可以有多种表示的方法（旋转矩阵，欧拉角，四元素，轴角，李群李代数）。欧拉角表示法，分别是指定了三个角度yaw，roll，pitch，分别

INS/GNSS组合导航（七）角速度坐标系变换与欧拉角转换 scott1
角速度坐标系变换与欧拉角转换，卡单角与欧拉角

欧拉角与旋转矩阵的转换关系 热门推荐
欧拉角因为其奇异性，虽然在优化和插值的不会使用，但是当我们对别人描述一个旋转的过程是怎么样的时候，欧拉角还是很有用的，比如，做无人机姿态控制的

ROS-Difference between euler angles rate and angular velocity Ja
1. 概念区分参考资料：https://www.reddit.com/r/robotics/comments/3mgqab/whats_the_difference_between_roll_pitch_yaw_rate/（可能需要外网打开） 2. 两者的

欧拉角速度与角速度的关系推导——欧拉运动方程 a7351
欧拉角速度与角速度的关系推导——欧拉运动方程最近研究欧拉角速度与角速度之间的关系，特别折磨，网上的资料要不就是地理学的进动——章动——自转那一

刚体运动学——欧拉角、四元数、旋转矩阵 风
前言 刚体运动旋转一般用：欧拉角、四元数、轴角对等表示，在对某个坐标旋转的时候，只需将欧拉角或四元数转换为旋转矩阵，并与原始坐标相乘，便可得到旋

刚体姿态运动学（二）旋转的微分形式——角速度、欧拉角速度、四元数导数、旋转矩阵导数 a7351
刚体姿态运动学（二）姿态的微分形式——角速度、欧拉角导数、四元数导数、旋转矩阵导数上一篇我们讲了姿态的表达方式及其转换，可以说还是比较简单的。

欧拉角变化率和机体角速度的关系 weixin_4050
这篇blog用于帮助初学无人机数学模型的人了解欧拉角变化率和机体角速度的关系。

刚体姿态动力学推导与进动现象仿真
刚体姿态动力学推导与进动现象仿真

六自由度搬运机器人正逆运动学和轨迹规划.docx
本文探讨了六自由度搬运机器人的正逆运动学和轨迹规划，主要在MATLAB环境下进行。机械臂作为工业机器人中的核心部分，其运动学分析至关重要，因为它直

根据罗德里格斯参数库块的航天器姿态运动学：根据罗德里格斯参数模拟刚体姿态运动学的库块-matlab开发
刚体的姿态运动学使用此功能库块进行模拟。 此模块用于模拟（学术）目的，其中提供了根据 Rodrigues 参数的姿态时间历史。 有关该主题的参考，请参见 [1]。

火箭弹发射系统多刚体系统动力学分析 最新发布
火箭弹发射系统多刚体系统动力学分析

两个刚体角速度运动的部分同步 (2006年)
研究了两个刚体角速度运动关于部分状态变量——惯性主轴角速度的同步控制。基于李亚普诺夫部分稳定性理论，分别采用双向耦合的部分状态变量线性反馈控制

欧拉角速率与机体角速度转换详细推导 weixin_396
根据旋转矩阵及绕各个轴旋转的角速度，推导机体角速度 旋转矩阵旋转矩阵还不清楚的同学去看我的另一篇博客，这里咱们废话不多说，旋转矩阵已知 欧拉角 大

坐标系变换推导(欧拉角、方向余弦矩阵、四元数)+代码解析 u0147
记录坐标系变换与推导的过程学习与自我扫盲。

欧拉角顺序为xyz,欧拉角速度和机体角速度的关系是什么，具体表示出来
欧拉角是一种表示刚体运动状态的方式，欧拉角顺序为xyz表示先绕x轴旋转，再绕y轴旋转，最后绕z轴旋转。对于欧拉角速度和机体角速度的关系，可以使用以下

"相关推荐"对你有帮助么？

非常没帮助 没帮助 一般 有帮助 非常有帮助

Scarlett Sun 关注 21 58 8

热门文章

CPU相关概念：物理cpu数、核数、逻辑cpu数，12核20线程实例分析 11622

解决问题：import torch失败和torch.cuda.is_available()返回false 9573

catkin build 的使用 7864

赋值表达式出现报错：expression must be a modifiable lvalue 5899

如何在虚拟机Ubuntu下使用主机网络 5486

分类专栏

- Ubuntu 19篇
- ROS 20篇
- px4 13篇
- 模型预测控制 5篇
- C++ 6篇
- 路径规划 1篇

最新评论

Ubuntu20.04双系统下，浏览器中CSDN...
pen-ai: 不行呢，博主后来用其他方法解决了吗

【RotorS仿真】四旋翼无人机MPC控制...
Scarlett Sun: 那应该是可以的，试试看～

【RotorS仿真】四旋翼无人机MPC控制...
Phoybia: 就是在加速度控制之后产生三轴期望推力，然后根据推力来计算期望姿态...

【RotorS仿真】四旋翼无人机MPC控制...

最新文章

Ubuntu 安装 CloudCompare

ROS使用手柄/cmd_vel无输出

Windows下使用Airsim+QGC进行PX4硬件在环HITL（四）

2024年 18篇 2023年 63篇
2022年 7篇 2020年 1篇

目录