



文章

# 机器人旋转运动学的形式化验证

谢国军<sup>1</sup>, 杨欢欢<sup>2</sup>, 邓浩<sup>1</sup>, 史正普<sup>1</sup>, 陈刚<sup>1</sup>, \*

<sup>1</sup>

南京航空航天大学计算机科学与技术学院, 江苏南京 211106

<sup>2</sup> 国防科技大学计算机学院, 湖南长沙 410073 \*通讯:gangchensh@nuaa.edu.cn

**摘要:**随着机器人在航空航天、医学、自动化等领域的广泛应用, 其运动安全对于人类的福祉和重要的社会有益项目的完成至关重要。传统的机器人软硬件设计主要依靠经验知识和人工测试来保证安全性, 但这未能覆盖所有可能的测试路径, 增加了风险。或者, 形式化的、数学上严格的验证可以为机器人运动安全提供可预测的、可靠的保证。为了证明这种方法的可行性, 我们使用 Coq 证明助手对机器人刚体运动学的数学坐标变换进行了形式化, 以验证其理论设计的正确性。首先, 基于记录型矩阵形式化, 通过构造矩阵的 Frobenius 范数、迹和内积的形式化表达式来定义和验证机器人的空间几何。其次, 将旋转运动分为公转和旋转构造, 并给出它们的形式化定义; 接下来, 我们对角度约定的旋转矩阵(例如 roll-pitch-yaw 和欧拉)进行形式化验证, 并完成罗德里格斯公式的形式化验证, 以形式化验证运动理论在特定旋转运动学问题中的正确性。本文的形式化工作具有多种基本应用, 并为机器人控制系统验证提供了一个可泛化的运动学分析框架。此外, 它为自动编程能力铺平了道路。

**关键词:**形式化验证;罗德里格斯公式;Coq 证明助手;机器人旋转运动学

## 1.介绍

近年来, 机器人已被应用于许多需要高安全协议的操作领域(例如, 无人机(uav)、手术和自动驾驶)。因此, 机器人开发的可靠性和安全性成为了相当有研究兴趣的话题[1]。虽然大多数机器人在具有广泛测试和参数故障保护的结构化环境中运行, 但手动测试程序往往没有考虑所有高风险场景, 这加剧了不可预见事故的风险。形式化方法[2,3]对于确保复杂机器人系统的可靠设计和开发至关重要, 包括它们的安全措施和故障安全装置。因此, 我们在这项研究中的目的是引入一种机器人安全性验证的形式化方法。

我们的重点是机器人旋转运动学的形式化验证。作为运动学几何的应用, 旋转运动学[4]描述的是纯几何问题(例如, 机器人运动的位置和方向)。因此, 机器人运动控制[5]依赖于运动学描述, 并且可以在数学上进行验证。我们的目标是使用 Coq 证明助手(Proof Assistant)来正式验证机器人运动学的旋转问题[6,7]。

在机器人系统中, 连杆和机械手被认为是刚体;因此, 向量-矩阵理论[8,9]可以用来建立它们相对于全局坐标系的位置和运动的一般描述, G.机器人机械手可以相互旋转和移动。因此, 各种机器人部件的刚体坐标系(B1, B2, ..., Bn)沿各环节的刚体坐标系由广义局部表示



**引用本文:**谢, G.;杨, h.;邓, h.;施, z.;陈, 光。  
机器人旋转运动学的形式化验证。电  
子学 2023,12,369。 <https://doi.org/10.3390/electronics12020369>

学术编辑: Janos Botzheim

收稿: 2022 年 11 月 20 日修  
订: 2022 年 12 月 30 日录  
用: 2023 年 1 月 7 日发布: 2023  
年 1 月 11 日



**版权所有:** ©2023 作者。被许可方 MDPI, 巴塞尔, 瑞士。本文是根据知识共享署名(CC BY)许可(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)的条款和条件发布的开放获取文章。

坐标系， $b$ ，设  $G$  为全球坐标系;  $B_{RG}$  表示向量  $r$  从  $G$  到  $B$  的变换， $G_{RB}$  表示向量  $r$  从  $B$  到  $G$  的变换，通过  $B_{RG}$  和  $G_{RB}$ ，我们可以全局定义连杆之间以及连杆与环境之间的位置。

形式化验证依赖于数学建模和演绎推理，比经验方法和启发式方法更加严格和可靠 [10,11]。因此，通过对机器人旋转运动学进行形式化验证，我们希望能够保证机器人控制及其算法设计的安全性。综上所述，我们将一种形式化的数学证明方法应用于机器人旋转运动学中的“正确性”检测。机器人旋转运动学的形式化框架如图 1 所示。首先，基于矩阵形式化，我们形式化定义了矩阵 Frobenius 范数、矩阵迹和矩阵内积，为机器人旋转运动学的形式化验证提供了数学形式化支持。然后，我们将旋转运动分为旋转和旋转，定义它们的形式化表示;在此基础上，我们对一些常见的旋转问题进行了形式化验证，包括欧拉角和罗德里格斯公式。

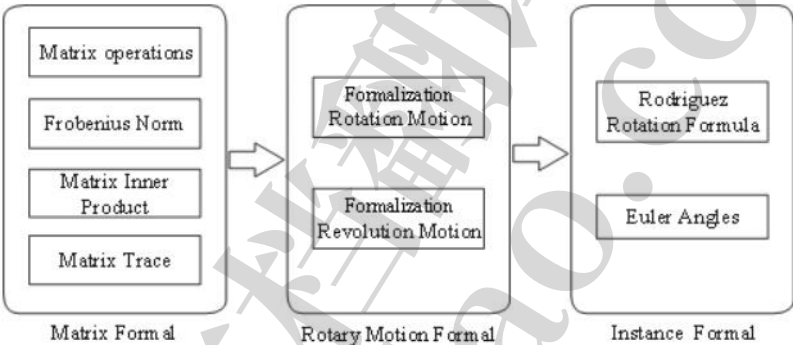


图 1所示。机器人旋转运动学的形式框架。

我们的贡献可以总结如下。首先，我们基于记录类型扩展了形式矩阵库。具体来说，我们使用可验证的数学过程添加了矩阵 Frobenius 范数、迹和内积的形式化定义和证明。我们将旋转运动分为旋转和旋转，并对全系统坐标变换进行了形式化验证。此外，我们构造了工程中常用的角度旋转矩阵，以提供欧拉角的形式化定义和验证。此外，我们还提供了罗德里格斯公式的形式化定义和验证。最后，通过机器人旋转运动问题的案例分析，论证了所提出的形式化方法的适用性，并演示了如何形式化验证具体的机器人旋转问题。

论文的组织结构如下:在第 2 节中，我们讨论了相关工作。在第 3 节中，简要回顾了矩阵形式化和旋转运动学。在第 4 节中，提出了形式化的空间几何验证方法。在第 5 节中，我们形式化定义了“旋转”和“旋转”，并验证了它们的相关性质。在第 6 节和第 7 节中，我们分别正式验证了欧拉角和罗德里格斯公式。在第 8 节中，我们提供案例分析，并验证它们旋转运动学的正确性。最后，在第 9 节中，我们总结并讨论了未来的工作。

2.相关的工作

在机器人验证领域，近年来提出了许多方法。Ref.[12]侧重于物理人-机器人协作的安全性，并提出了一种基于形式化验证的风险分析方法，用于在模型设计早期检测和修改危险情况。从多学科角度出发，ref.[13]通过结合形式化方法和可调度性分析，开发了一种两步验证方法，从而设计了一种新颖的实时机器人服务多资源锁定机制。以无人机为例，展示了上述方法的优点。

考虑到相机姿态估计是机器人任务的关键组成部分，ref.[14]尝试使用交互式定理证明器对姿态估计算法的唯一解和通解进行形式化和验证。一些研究人员将形式化验证与机器人操作系统(ROS)结合起来。基于 Electrum(一种基于一阶线性时序逻辑的形式化规范语言)中 ROS 架构模型和节点行为的形式化，ref.[15]将他们提出的技术集成到 HAROS 框架中，用于机器人软件的分析和质量改进。使用线性逻辑定理证明器，ref.[16]提出了一种新的技术来形式化描述和验证机器人系统，以满足在 ROS 中表达和验证机器人系统的易用框架的需求。综上所述，许多研究人员已经将形式化验证方法应用于各种真实世界的机器人应用。

在工业领域，ref.[17]研究了 ABB 公司具有代表性的安全关键工业涂料机器人系统。通过在工具之间传递硬件抽象和验证结果，他们形式化了一个高压系统的收敛。为满足机器人制造中用户自定义验证目标的需求，[18]提出了一种基于层的形式化方案，以支持状态空间的全面验证。

在医疗保健设置中，ref.[19]使用混合自动机形式化将形式化方法的应用扩展到人体建模中，以捕获人类行为的可变性。这产生了一个用户友好的表示，使用 Uppaal 集成工具环境对实时系统进行建模、验证和验证，以自动生成和验证一个形式化模型。

值得注意的是，无人机和自动驾驶车辆适合进行形式化验证。在代表城市空中机动的分布式无人机场景背景下，ref.[20]建设性地提供了一些有见地的想法，以加速将形式验证模型转化为机器人仿真的开发周期。为了在安全走廊内导航无人机，ref.[21]开发了一个遗传模糊系统，并证明了其遵守行为安全规范。考虑到机器人和自动驾驶车辆形式化验证的重要性，ref.[22]开发了一种二分搜索方法来扩展具有动态优先级调度的机器人规格的时间自动机模型，并在一个真实的机器人案例中演示了可扩展性的改进。

与上述研究不同的是，我们专门关注旋转运动学问题，并使用 Coq 证明助手[23]来形式化验证机器人旋转运动学。

3. 预赛

3.1. 基于记录类型的矩阵形式化

因为高阶定理证明器是基于  $\lambda$  型演算的，所以传统矩阵实现的基本数据结构是  $\lambda$  表达式而不是命令式语言版本[24]。因此，高阶方法适用于描述具有无限可扩展性的归纳数据结构(例如列表)。然而，由于没有直接的描述方法，它不适用于具有固定长度的数据结构(例如向量和矩阵)。为了使其工作，Ma 等人[25]提出了一种基于 Coq 记录类型的形式化矩阵方法来验证任意大小的矩阵。在 Coq 中，记录类型是一个宏，它使定义的创建成为可能。由此，一个矩阵定义被表示为

```
记录 Marix(m n:nat): Set:=mkMat{mat: list
(list A);
Mat_length: 长度 mat= m;
mat_all_le n : all_len_n mat n; }
```

其中 *mat* 是存储矩阵数据的嵌套列表，*mat\_length* 和 *mat\_all\_len* 是矩阵属性，表示 *mat* 的长度为 *m*，宽度为 *n*。

3.2. 扶轮运动学

旋转运动学研究最常使用全局坐标系  $G$  或局部(即刚体)坐标系  $B$  来描述机器人运动[26]。为了验证机器人旋转运动学，我们描述了  $G$  和  $B$  之间的关系。

对于  $B$  中的刚体  $D$ ,  $B$  最初与  $g$  重合，我们将点  $O$  表示为坐标系[27]的**原点**。 $D$  围绕  $G$  的运动是“旋转”。在这个运动中，刚体  $D$  在  $B$  中是静止的，因此，对于  $D$  中  $P$  点和  $O$  点构成的任何向量  $r$ ,  $G$  中向量  $r$  与  $B$  的等价关系由式(1)给出， $B_r$  和  $G_r$  分别是  $r$  在  $B$  和  $G$  中的代数表示， $Q$  是旋转矩阵。

$$G_r = Q * B_r.$$

(1)

对于  $G$  中的刚体  $D$ ,  $D$  围绕  $B$  的运动是“旋转”。在这个运动中，刚体  $D$  在  $G$  中是静止的，此时，对于  $D$  中的点  $P$ 、点  $O$  构成的任意向量  $r$ ,  $G$  中  $r$  与  $B$  的等价关系由式(2)给出，其中  $A$  为旋转矩阵[28]。

$$B_r = A * G_r.$$

(2)

4. 空间几何的形式化

4.1. 矩阵迹的形式化

在线性代数中，矩阵  $M(M \times M)$  的迹被定义为其对角元素之和，也等于其特征值之和，如公式(3)所示：

$$tr(M) = \sum_{i=0}^{m-1} m_{ii}.$$

(3)

在  $Coq$  中，我们递归地形式化求解矩阵迹。在函数  $tr$  中， $m$  是表示矩阵宽度的隐式参数， $ma$  是维数为  $m * m$  的矩阵，在递归函数体  $get\_Sum\_tr$  中，利用匹配策略得到矩阵沿对角线的元素并求和。

```
定义 tr{m:nat}(ma:Mat R m m):=
  (fixget_Sum_tr(m 0n: nat)(0: R)(ma0:Mat R m0 m0){struct n}:R:=匹配 n 与
    | 0 => Zero
    | S n' =>
      (fixget_Sum_tr m0n0(0+ mat_nth ma0(m0 - n0 - 1))ma0
        结束)m m 0ma。
```

4.2. 矩阵 Frobenius 范数的形式化

Frobenius 范数又称  $f$  范数，表示矩阵的长度，便于对矩阵理论的直观理解。它在矩阵空间  $Rm * n$  中的定义由公式(4)给出：

$$\begin{cases} |X|_F = \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij}^2} \\ s.t. \{ x_{ij} \in X \end{cases}$$

(4)

据此，给出了  $f$ -范数的形式化定义。递归函数  $get\_Sum1$  以实数类型输入列表  $h$ ，并输出列表中所有元素的平方和。递归函数  $get\_Sum2$  将嵌套列表  $ll$  作为实数类型输入，并通过调用  $get\_Sum1$  提供所有元素的平方和。函数  $Frobenius$  有一个输入矩阵类型的参数  $ma$ ，具有  $m$  行  $n$  列，函数  $mat$  提供数据元素作为矩阵类型。

```
De f inition Frobenius {m n:nat}(ma:Mat m n):= let ll:=
(Mat R m n ma)in

sqrt ((fix get_Sum2(l : list(list R)) : R := match l with
| [] => 0
|h :: t => (fix get_Sum1 (l0 : list R) : R :=
match l0 with
| [] => 0 | h0 :: t0 => h0 * h0 + get_Sum1 t0

end) h +get_Sum2t
end)ll)。
```

在 Coq 中，我们用符号来定义 Frobenius 中缀符号。表示法  
“|ma|” :=(Frobenius ma)(70 级)。

通过 Frobenius 的定义，我们可以形式化地验证特殊矩阵的性质。

引理 1。零矩阵的f 范数为零。

引理 Lemma1:forall {m n:nat}(ma:Mat R m n), ma =RMatrix. MO m n->|ma| = 0。 ✓

引理 2。n 维单位矩阵的f 范数是n。

引理 lemma2: forall{n: nat}(ma: Mat R n n), ma = RMatrix. MI n->|ma| = sqrt n。

4.3.矩阵内积的形式化

矩阵空间  $\mathbf{R}^{m \times n}$  中的矩阵的内积由公式(5)给出，其中  
 $x_{ij} \in X, y_{ij} \in Y$ :

$$X \cdot Y = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} x_{ij} * y_{ij}.$$

(5)

相应地，矩阵内积被正式定义为 De f initDot\_Product {m n: nat}(ma mb:
MatR m n):= letma0:= (MatR mn ma) in letmb0:= (Mat R m nmb) in (f
ixget\_Sum 2(laa lbb: list(list R))/(struct laa): R:=匹配 laa with

```
| [] => 0 | haa:: laa0 =>匹配 LBB with

| [] => 0

| hbb:: lbb0 => (f ixget_Sum1(la lb:list R){struct la}:R:=匹配 la 与| []=>0 | ha:: la0
=>匹配 lb 与

| [] => 0
| hb:: lb0 =>ha* hb +get_Sum1 la0lb0

end end) haa hbb +get_Sum2 laa0 lbb0end end)
ma0mb0。
```

与 *Frobenius* 的定义类似，*Dot\_Product* 也使用了两个递归函数来计算矩阵内积。  
*Dot\_Product* 的中缀表示法表示为

表示法 “ $m1 \bullet m2$ ” := (*Dot\_Product* $m1\ m2$ )(70 级)。

有道文档翻译  
pdf.youdao.com



我们在下面的引理中正式验证了矩阵内积的交换律和结合律。

引理 3。在矩阵空间  $R^{m \times n}$  中,  $ma \cdot mb = mb \cdot ma$ 。

引理 lemma3: forall {m n: nat} (ma mb: Mat R m n),

$$(ma \cdot mb) = (mb \cdot ma).$$

引理 4。在矩阵空间  $R^{m \times n}$  中, 由于  $k$  是类型  $R$  的常数,  $(k * ma) \cdot mb = k * (ma \cdot mb)$ 。引理 lemma4: f

forall {m n: nat} (k: R) (ma mb: Mat R m n),

$$((k \times ma) \cdot mb) = k * (ma \cdot mb).$$

引理 5。在矩阵空间  $R^{m \times n}$  中,  $(ma + mb) \cdot mc = ma \cdot mc + mb \cdot mc$ 。引理

Lemma lemma5: forall {m n: nat} (ma mb mc: Mat R m n),

$$(ma + mb) \cdot mc = (ma \cdot mc) + (mb \cdot mc).$$

4.4. 向量规范化

因为向量是一种特殊的矩阵, 其行或列的维度为 1, 我们将其正式定义如下:

Definition R\_vector(n: nat) := Mat R n 1.

设  $m1$  和  $m2$  为空间中的任意向量,  $\theta$  为  $m1$  和  $m2$  之间的夹角。向量的内积和 f 范数之间的等价关系由式 (6) 给出:

$$m1 \cdot m2 = |m1|_F * |m2|_F * \cos \theta. \tag{6}$$

我们在式 (6) 中形式化等价关系, 其中  $\langle\langle m1, m2 \rangle\rangle$  表示  $m1$  与  $m2$  之间的夹角。

引理 6。式 (6) 的形式化验证。

引理 lemma6: forall {n: nat} (m1 m2: (R\_vector n)),

$$(m1 \cdot m2) = (|m1| * |m2|) * \cos(\langle\langle m1, m2 \rangle\rangle).$$

5. 旋转运动学的形式化

5.1. 全局和局部坐标系

因为坐标系的形式化是机器人运动学形式化验证的基础, 所以我们提供了相对的定义。我们使用  $RAG$  将全局坐标系  $G$  定义为具有  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  三个构造函数的类型, 分别对应于  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴。

归纳  $RAG$ : Type := | X | Y | Z。

类似地, 我们使用  $RAB$  来定义局部坐标系  $B$ , 其中  $B$  中的三个构造函数  $x$ 、 $y$  和  $z$  分别对应于  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴。

归纳  $RAB$ : 类型 := | x | y | z。

图 2 说明了这两个坐标系。给定任意的  $r$ ,  $Gr$  和  $Br$  分别是  $r$  在  $G$  和  $B$  中的表示。另外,  $X1, Y1, Z1$  是  $r$  在  $G$  中的坐标, 而  $x1, y1, z1$  是  $r$  在  $B$  中的坐标。因此,  $G$  和  $B$  中的  $r$

可以用式(7)表示，其中  $I、J、K$  是  $G$  的方向向量， $i、j、k$  是  $B$  的方向向量。

$$\begin{cases} G_r = X_1 * I + Y_1 * J + Z_1 * K \\ B_r = x_1 * i + y_1 * j + z_1 * k \end{cases} \tag{7}$$

我们将式(7)正式定义为：

变量  $X_1/Y_1/Z_1/X_1/Y_1/Z_1 \in \mathbb{R}$ 。  
定义  $G_r := X_1 \times I + Y_1 \times J + Z_1 \times k$  定义  $B_r := X_1 \times I + Y_1 \times J + Z_1 \times k$ 。

然后，`axiom1` 和 `axiom2` 描述了  $r$  在  $G$  和  $b$  中的关系，因此  $Br \cdot I、Br \cdot J、Br \cdot K$  的几何意义分别表示为向量  $Br$  在  $I、J、K$  上的投影长度。同样， $Gr \cdot i、Gr \cdot j、Gr \cdot k$  的几何意义分别表示为向量  $Gr$  在  $i、j、k$  上的投影长度。

$Axiom axiom1: X_1 = (Br \cdot I) \wedge Y_1 = (Br \cdot J) \wedge Z_1 = (Br \cdot K)$ 公理  $Axiom axiom2:$   
 $X_1 = (Gr \cdot i) \wedge Y_1 = (Gr \cdot j) \wedge Z_1 = (Gr \cdot k)$ 。

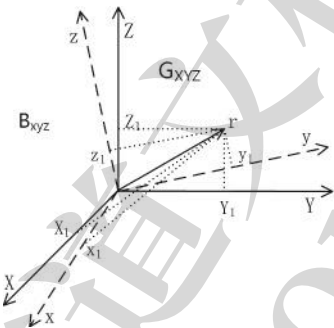


图 2。向量在不同坐标系中的表示。

5.2.旋转运动的形式化

5.2.1.革命运动的形式化

根据公式(1)，旋转矩阵  $Q$  的形式化定义如下。 $I、J、K、i、j、k$  是单位向量， $f$  范数为 1(式(4))。矩阵  $Q$  的列向量表示  $B$  中各坐标轴与  $G$  中各坐标轴夹角的余弦值(公式(6))。

$$De\ f\ i\ n\ i\ t\ i\ o\ n\ \ Q:=mkMat\_3\_3$$

$$\begin{pmatrix} i \cdot I \\ i \cdot J \\ i \cdot K \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} j \cdot I \\ j \cdot J \\ j \cdot K \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k \cdot I \\ k \cdot J \\ k \cdot K \end{pmatrix}$$

基于此定义，我们对式(1)进行形式化验证如下：

定理 1。式(1)的形式化验证

定理定理 1: $Gr = Q \times Br$ 。

根据  $RAG$  的定义，可以分为三种情况(见图 3)，图 3a 是  $D$ (刚体)绕  $G$ (全局坐标系) $X$  轴旋转后两个坐标系之间的位置关系，其中  $P$  是  $b$  中的任意向量。类似地，图 3b,c 是  $D$  绕  $G$  的  $Y$  轴和  $Z$  轴旋转后两个坐标系之间的位置关系。



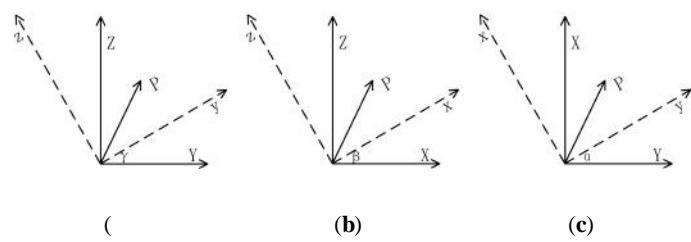


图 3. 围绕 G 的(a)X，(b) Y，和(c)Z 轴旋转。

根据图 3，我们正式定义对应的旋转矩阵如下：

Definition QX(γ:R):= mkMat\_3\_3

Definition QY(β: R):=mkMat\_3\_3

Definition QZ(α: R):= mkMat\_3\_3

(因为 罪(β)

1 0 0 0

0(cos γ)(−(sin γ)) 0 1 0 0(sin γ) (cos γ)(−(sin β)) 0(cos β)

0 0 1

(cos α)

(sin α) (−(sinα))

(cosα)

0 0 1

我们使用以下定理来正式验证矩阵 Q 和 QX (QY 和 QZ)的等价性。

定理 2. 当 B 绕 G 的 X 轴旋转角度 γ 时，Q= (QX γ)。定理定理 2:f orall(轴:RAG)，  
轴= X→Q = (QX γ)。

定理 3. 当 B 绕 G 的 X 轴旋转角度 γ 时，Gr = (QX γ)\* Br。定理定理  
3:forall(轴:RAG)，轴= X→Gr = (QX γ) × Br。

定理 4. 当 B 绕 G 的 Y 轴旋转角度 β 时，Q= (QY β)。

定理 4:f orall(轴:RAG)，轴= Y→Q = (QY β)。定理 5. 当 B 绕 G 的 Y 轴  
旋转角度 β 时，Gr = (QY β)\* Br。

定理 5:f orall(轴:RAG)，轴= Y→Gr = (QY β) × Br。定理 6. 当 B 绕 G 的 Z 轴  
旋转角度 α 时，Q= (QZ α)。

定理定理 m6: f orall(轴:RAG)，轴= Z→Q = (QZ α)。定理 7. 当 B 绕 G  
的 Z 轴旋转 α 角时，Gr = (QZ α)\* Br。

定理 7:f orall(轴:RAG)，轴= Z→Gr = (QZ α) × Br。

B 经过有限次连续旋转后，Q1, Q2, Q3, …, Qn，围绕 RAG, G 中的 r 与 B 的等价关  
系由式(8)给出：

Gr = (Qn \* … \* (Q2 \* (Q1 \* Br)))

(8)

因此，我们用  $CRG$  递归的形式定义公式(8)。因此， $rl$  是一个包含成对类型元素的列表，第一个和最后一个元素分别记录了旋转类型和角度。 $Br0$  是向量的初始位置。

固定点  $CRG\ (rl: list\ (RAG* R))\ (Br0: R\_vector3) :=$  将  $rl$  与

$$\begin{aligned} &| nil \Rightarrow Br' \\ &| h :: l \Rightarrow let\ M = (get\_Q\ (fst\ h)\ (snd\ h))\ in \\ &\quad let\ Br'' = M \times Br' in\ CRG\ l\ Br'' \end{aligned}$$

结束。

在  $CRG$  中，递归结构首先判断  $rl$ 。如果  $rl$  为空，函数返回接收到的  $Br0$ ；否则，函数通过函数  $get\_Q$  将  $M$  与  $Br0$  相乘，同时将乘积视为新位置  $Br00$ ，从而提供旋转矩阵  $M$ 。然后，递归结构使用  $l$  和  $Br00$  继续递归。 $get\_Q$  的形式化定义如下：

$$\begin{aligned} De\ f\ initget\_Q(坐标轴: RAG)\ (\theta: R) := \\ &match\ axis\ with \\ &| X \Rightarrow (QX\ \theta) \\ &end. \\ &| Y \Rightarrow (QY\ \theta) \qquad | Z \Rightarrow (QZ\ \theta) \end{aligned}$$

我们将围绕  $RAG$  的有限连续旋转合成为围绕特定直线的一次旋转。合成的旋转矩阵是全局旋转矩阵  $GQB$ ，由式(9)给出：

$$\begin{cases} GQB = Q_n * \dots * Q_2 * Q_1 \\ G_r = GQB * B_r \end{cases} \tag{9}$$

我们正式定义全局旋转矩阵如下，其中函数  $Cml$  表示  $list\ ml$  中矩阵的左乘：

$$\begin{aligned} &定义\ GQB(ml: list(RAG* R)) := \\ &(fix\ Cml\ (matList: list(RAG* R))(res: Mat\ R\ 3\ 3)\{struct\ matList\}: Mat\ R\ 3\ 3 := matList\ 与 \\ &| [] \Rightarrow res \\ &| h :: l \Rightarrow Cml\ l\ (get\_Q\ (fst\ h)\ (snd\ h) \times res) \\ &毫升(RMatrix\ 结束)。 \\ &小米3)。 \end{aligned}$$

基于这个定义，我们正式验证公式(9)为  $lemma7$ ：

引理 7。当  $rl = [Q_1 Q_2 \dots Q_n]$  是任意旋转序列， $r$  是在的初始位置  $B_r(Q_n * \dots * (Q_2 * (Q_1 * r))) = (Q_n * \dots * Q_2 * Q_1) * r..$

引理  $Lemma\ lemma7: forall\ (rl: list(RAG* R))\ (R: R\_vector\ 3),\ CRG\ rl\ R = (GQB\ rl) \times R.$   
旋转运动的形式化

类似于旋转矩阵  $Q$  的定义，根据公式(2)，我们将旋转矩阵  $a$  正式定义如下：

$$\begin{aligned} De\ f\ init\ A := mkMat\_3\_3 \\ &\begin{pmatrix} I \cdot i & J \cdot i & K \cdot i \\ I \cdot j & J \cdot j & K \cdot j \\ I \cdot k & J \cdot k & K \cdot k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

据此，我们对式(2)进行形式化验证如下：

定理 8。式(2)的形式化验证。

定理定理 8: $Br = A \times Gr$ 。

图 4 展示了  $RAB$  中的三种情况，其中图 4a-c 中的旋转矩阵分别定义为  $A_x$ 、 $A_y$  和  $A_z$ 。

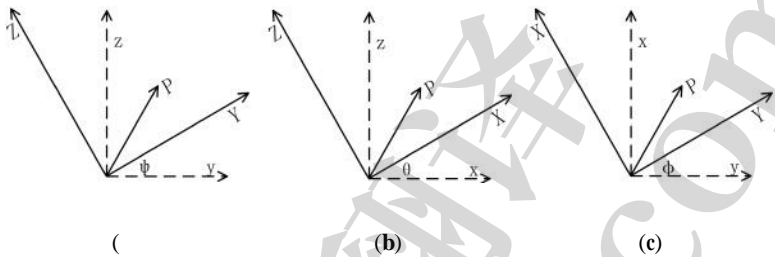


图 4。围绕 b 的 (a)x， (b)y， 和 (c) z 轴旋转。

Definition  $A_x(\psi : R) := mkMat\_3\_3$

1	0	0
0	$(cos\psi)$	$(sin\psi)$
0	$(-(sin\psi))$	$(cos\psi)$

Definition  $A_y(\theta : R) := mkMat\_3\_3$

$(cos\theta)$	0	$(-(sin\theta))$
0	1	0
$(sin\theta)$	0	$(cos\theta)$

Definition  $A_z(\phi : R) := mkMat\_3\_3$

$(cos\phi)$	$(sin\phi)$	0
$(-(sin\phi))$	$(cos\phi)$	0
0	0	1

我们使用以下定理来形式化地验证矩阵 A 和矩阵  $A_x(A_y$  和  $A_z)$  的等价性。

定理 9。当 D 绕 B 的 x 轴旋转角度  $\psi$  时， $A = (A_x \ \psi)$ 。

定理 9:f orall(轴:RAB)， 轴=  $x \rightarrow A = (A_x \ \psi)$ 。定理 10。当 D 绕 B 的 x 轴旋转角度  $\psi$  时， $Br = (A_x \ \psi) * Gr$ 。

定理 10:f orall(轴:RAB)， 轴=  $x \rightarrow Br = (A_x \ \psi) \times Gr$ 。定理 11。当 D 绕 B 的 y 轴旋转角度  $\theta$  时， $A = (A_y \ \theta)$ 。

定理定理 11:f orall(轴:RAB)， 轴=  $y \rightarrow A = A_y \ \theta$ 。

定理 12。当 D 绕 B 的 y 轴旋转角度  $\theta$  时， $Br = (A_y \ \theta) * Gr$ 。

定理 12:f orall(轴:RAB)， 轴=  $y \rightarrow Br = (A_y \ \theta) \times Gr$ 。定理 13。当 D 绕 B 的 z 轴旋转角度  $\phi$  时， $A = (A_z \ \phi)$ 。

定理 13:f orall(轴:RAB)， 轴=  $z \rightarrow A = (A_z \ \phi)$ 。定理 14。当 D 绕 B 的 z 轴旋转角度  $\phi$  时， $Br = (A_z \ \phi) * Gr$ 。

定理 14:f orall(轴:RAB)， 轴=  $z \rightarrow Br = (A_z \ \phi) \times Gr$ 。

在  $D$  进行有限次连续旋转后,  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , 围绕  $RAB$ ,  $B$  中  $r$  与  $G$  的等价关系由式(10)给出:

$$B_r = (A_n * \dots * (A_2 * (A_1 * G_r))). \tag{10}$$

类似于  $CRG$  的定义, 我们在  $CRB$  中正式定义公式(10), 其中  $Gr0$  为向量初始位置, 函数  $get\_A$  根据旋转类型和角度提供相应的旋转矩阵:

不动点  $CRB (rl: list(RAB* R))(Gr0: R\_vector3) := Definition get\_A(axis)(\theta) :=$  匹配  $rl$  与匹配轴  $with$

$$\begin{aligned} &| nil \Rightarrow Gr' \\ &| h :: l \Rightarrow let M = (get\_A(fst h)(snd h)) in \\ &\quad let Gr'' = M \times Gr' in CRB l Gr'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &| x \Rightarrow (Ax \theta) \\ &| y \Rightarrow (Ay \theta) \\ &| z \Rightarrow (Az \theta) \end{aligned}$$

结

结

我们将围绕  $RAB$  的有限连续旋转合成为围绕  $B$  中特定直线的一次旋转, 合成的旋转矩阵称为局部旋转矩阵( $BAG$ ), 由公式(11)给出:

$$\begin{cases} B A_G = A_n * \dots * A_2 * A_1 \\ B_r = B A_G * G_r \end{cases} \tag{11}$$

我们正式定义  $BAG$  如下, 其中函数  $Cml0$  表示列表  $ml$  中旋转矩阵的左乘:

Definition  $BAG(ml: list(RAB* R)) :=$   
 $(fix Cml0 (matList: list(RAB* R)) (res: Mat R 3 3) \{struct matList\}: Mat R 3 3 :=$

将  $matList$  与

$$\begin{aligned} &[] \Rightarrow res \\ &h :: l \Rightarrow Cml' l (get\_A(fst h)(snd h) \times res) \end{aligned}$$

结束)  $ml(RMatrix.小米 3)$ 。

基于这个定义, 我们使用形式化方法来验证公式(11), 如 lemma8 所示:

引理 8. 当  $rl = [A_1 A_2 \dots A_n]$  是任意旋转序列,  $r$  是在中的初始位置

$$G_r (A_n * \dots * (A_2 * (A_1 * r))) = (A_n * \dots * A_2 * A_1) * r.$$

引词 Lemma lemma8: forall (rl: list(RAB\* R)) (R: (R\_vector3)), CRB rl R = (BAG rl) \times R。

5.2.3.  $BAG$  与  $GQB$  的关系

由式(9)和式(11)可知,  $ba$  式(12)之间的关系:  $G$  和  $Bis$  由

$$\begin{cases} B_r = B A_G * G Q_B * B_r \\ G_r = G Q_B * B A_G * G_r \end{cases} \tag{12}$$

对于公式(12), 我们使用 lemma9 和 lemma10 来证明  $GQB$  和  $BAG$  的逆, 其中  $rLB$  和  $rLG$  是列表。列表顺序与矩阵旋转顺序相同, 而  $RMatrix.小米 3$  表示一个维数为 3 的单位矩阵。

引理 9. 对于任意非零向量  $r$ ,  ${}^GQB$  是  $B \rightarrow G$  的旋转矩阵,  ${}^BAG$  是  $G \rightarrow B$  的旋转矩阵, 则  ${}^BAG \star {}^GQB = I$ .

引理 lemma9:|Br| <math>\leq 0 \rightarrow ({}^BAG \text{ rLB}) \times ({}^GQB \text{ rLG}) = RMatrix。小米 3。

引理 10. 对于任意非零向量  $r$ ,  ${}^GQB$  是  $B \rightarrow G$  的旋转矩阵,  ${}^BAG$  是  $G \rightarrow B$  的旋转矩阵, 那么  ${}^GQB \star {}^BAG = I$ .

引理 Lemma lemma10:|Gr| <math>\leq 0 \rightarrow ({}^GQB \text{ rLG}) \times ({}^BAG \text{ rLB}) = RMatrix。小米 3。

类似于  ${}^GQB$  和  ${}^BAG$  的逆的证明, 我们验证了  ${}^GQB$  和  ${}^BAG$  的转置。转置的形式定义如下, 其中  $\text{trans}$  表示矩阵的转置运算,  $\text{rev}$  表示列表的逆运算:

引理 11.  ${}^GQB$  是  $B \rightarrow G$  的旋转矩阵,  ${}^BAG$  是  $G \rightarrow B$  的旋转矩阵, 那么  ${}^GQB = {}^BAG^T$ .

引理 Lemma Lemma11:  ${}^GQB \text{ rLG} = \text{trans } R \ 0 \ ({}^BAG(\text{rev } \text{rLB}))$ 。

引理 12.  ${}^GQB$  是  $B \rightarrow G$  的旋转矩阵,  ${}^BAG$  是  $G \rightarrow B$  的旋转矩阵, then  ${}^BAG = {}^GQB^T$ .

引理 Lemma Lemma12:  ${}^BAG \text{ rLB} = \text{trans } R \ 0 \ ({}^GQB(\text{rev } \text{rLG}))$ 。

6.欧拉角

在三维(3D)空间中, 任何坐标系的方向都可以用欧拉角来表示。假设全局坐标系是静止的, 而局部坐标系则随着刚体旋转。欧拉角由三个独立的参数描述, 它们通过一个定点旋转刚体的岁差、章动和旋转角来确定它的位置。图 5 展示了欧拉角在空间中的几何表示, 其中  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  是全局坐标系的坐标轴,  $x$ 、 $y$ 、 $z$  是局部坐标系的坐标轴。另外,  $N$  是  $XY\_plane$  和  $xy\_plane$  的交线。

关于欧拉角在不同领域的约定没有共识。因此, 它们的使用需要指定一个。本文正式定义并验证了常用的欧拉角约定。

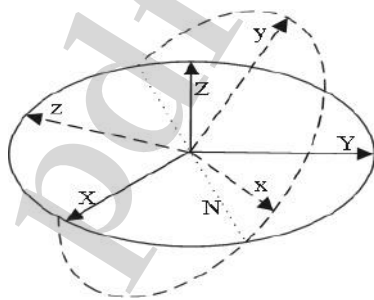


图 5。欧拉角。

6.1.符合xyz 约定的欧拉角

由  $xyz$  约定得到的角度也被称为“泰-布莱恩”角, 它们经常出现在工程应用中来描述移动车辆或导弹的方向。这三个角反映了围绕机体轴线旋转的滚转, 描述与机体轴线垂直的旋转的俯仰角, 以及描述的偏航角

垂直轴的旋转。在图 6 中，围绕 x 轴、y 轴和 z 轴的旋转分别称为“roll”( $\psi$ )、“pitch”( $\theta$ )和“yaw”( $\phi$ )。

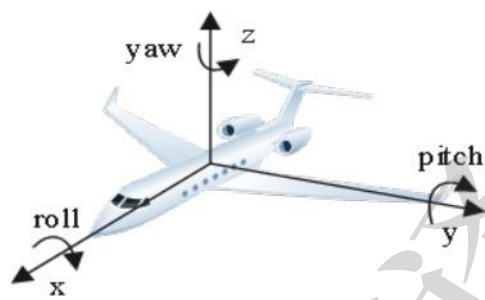


图 6. 横滚角、俯仰角和偏航角。

根据式(11)，roll-pitch-yaw 旋转矩阵由式(13)给出：

$$BAG_{rpy} = A_{(z,\phi)} * A_{(y,\theta)} * A_{(x,\psi)}.$$

(13)

根据 roll、pitch 和 yaw 的物理意义，我们提供如下的正式定义：

变量  $\psi \quad \theta \quad \phi:R$ 。

De findetionBAG\_rpy:  $= (Az \phi) \times ((Ay \theta) \times (Ax \psi))$ 。

接下来，我们证明了 lemma13 中 BAG\_rpy 的等价性，这样 roll-pitch-yaw 序列就可以转化为旋转矩阵。

引理 13. 式(13)的形式化验证。

引理 lemma13:BAG\_rpy =mkMat\_3\_3

$$\begin{aligned} & (\cos \phi * \cos \theta)(\sin \phi * \sin \theta * \sin \psi) + \cos \phi * \cos \theta * \cos \psi \\ & \psi(-(\sin \phi * \cos \theta)(\cos \phi * \sin \theta * \sin \psi) + \sin \phi * \cos \theta * \cos \psi) \\ & (\sin \theta)(-\cos \theta * \sin \psi) \end{aligned}$$

因为  $\psi + \cos \phi * \sin \theta * \sin \psi$  罪

因为  $\psi - \sin \phi * \sin \theta * \sin \psi$  罪  $\psi$

$$\begin{aligned} & (\sin \phi * \sin \theta * \cos \psi) + \cos \phi * \sin \theta * \sin \psi \\ & \psi - \cos \phi * \sin \theta * \cos \psi)(\cos \phi * \sin \theta * \sin \psi) \\ & \psi + \phi * \sin \theta * \cos \psi) \end{aligned}$$

$$(\cos \theta * \cos \psi).$$

6.2.按照 zxz 惯例的欧拉角

使用 zxz 约定，岁差是绕 z 轴的旋转，章动是绕 x 轴的旋转，旋转是绕 z 轴的另一个旋转。其旋转矩阵由式(14)给出，其中  $\alpha$  为岁差角， $\psi$  为章动角， $\phi$  为旋转角：

$$Euler_{zxz} = A_{(z,\phi)} * A_{(x,\psi)} * A_{(z,\alpha)}.$$

(14)

我们对反映欧拉角的旋转矩阵的形式化证明如下：

引理 14. 式(14)的形式验证。

引理 lemma14:Euler\_zxz =mkMat\_3\_3

$$\begin{aligned} & (\cos \phi * \cos \alpha - \sin \phi * \sin \alpha) \sin \psi \\ & \psi * \cos \alpha - \sin \phi * \cos \alpha - \cos \phi * \sin \alpha)(\sin \psi * \sin \alpha) \\ & (\sin \psi * \sin \alpha) \end{aligned}$$

因为  $\psi * \sin \alpha)(\cos \phi * \sin \alpha + \sin \phi * \cos \alpha)$  因为

因为  $\psi * \sin \alpha)(-\sin \phi * \sin \alpha + \cos \phi * \cos \alpha)$  因为  $\psi * \cos \alpha)$

$$\begin{aligned} & (\sin \phi * \sin \psi) \\ & (\cos \phi * \sin \psi) \\ & (-\sin \psi * \cos \alpha) \end{aligned}$$

(因为  $\psi$ )。



基于岁差角  $\alpha$ 、章动角  $\psi$ 、旋转角  $\phi$ ，我们可以根据 *lemma14* 计算出整体旋转矩阵。  
给定一个旋转矩阵，我们可以恢复

有道文档翻译  
pdf.youdao.com

欧拉角。例如，式(15)描述了从旋转矩阵求进动角  $\alpha$  的解:

$$\alpha = \begin{cases} -\arctan(Euler\_zxz_{31}/Euler\_zxz_{32}) - \pi, & -\pi \leq \alpha < -\pi/2, \\ -\arctan(Euler\_zxz_{31}/Euler\_zxz_{32}), & -\pi/2 \leq \alpha < \pi/2, \\ -\arctan(Euler\_zxz_{31}/Euler\_zxz_{32}) + \pi, & \pi/2 \leq \alpha < \pi. \end{cases} \tag{15}$$

我们对岁差角解进行如下形式验证，其中 lemma15-lemma18 分别表示对  $\alpha$  在第一第四象限的验证。

$$Definition\ r\ (i\ j : nat) := mat\_nth\ Euler\_zxz\ (i - 1)\ (j - 1).$$

引理 15. 在定义域  $[0, \pi/2)$  中,  $\alpha = -\arctan(r_{31}/r_{32})$ 。

引理 lemma15:  $0 \leq \alpha < \pi/2 \rightarrow \cos \alpha < 0 \rightarrow \alpha = -:((r_{31})/(r_{32}))$ 。引理 16. 在定义域  $[\pi/2, \pi/2)$  中,  $\alpha = -\arctan(r_{31}/r_{32}) + \pi$ 。

引理 lemma16:  $\pi/2 \leq \alpha < \pi \rightarrow \cos \alpha < 0 \rightarrow \alpha = -atan((r_{31})/(r_{32})) + \pi$ 。引理 17. 在定义域  $[-\pi, -\pi/2)$  中,  $\alpha = -\arctan(r_{31}/r_{32}) - \pi$ 。

引理 lemma17:  $-\pi \leq \alpha < -\pi/2 \rightarrow \cos \alpha < 0 \rightarrow \alpha = -:((r_{31})/(r_{32})) - \pi$ 。

引理 18. 在定义域  $[-\pi/2, 0)$  中,  $\alpha = -\arctan(r_{31}/r_{32})$ 。

引理 lemma18:  $-\pi/2 \leq \alpha < 0 \rightarrow \cos \alpha < 0 \rightarrow \alpha = -:((r_{31})/(r_{32}))$ 。式(16)描述了在给定旋转矩阵的情况下，章动角  $\psi$  的解:

$$\psi = \begin{cases} -\arccos(Euler\_zxz_{33}), & -\pi \leq \psi < 0, \\ \arccos(Euler\_zxz_{33}), & 0 \leq \psi < \pi. \end{cases} \tag{16}$$

然后，章动角解的形式化验证表示为引理 19. 在定义域  $[0, \pi)$  上,  $\psi = \arccos(r_{33})$ 。

$$引理\ Lemma\ lemma19: 0 \leq \psi < \pi \rightarrow \psi = acos(r_{33}).$$

引理 20. 在定义域  $[-\pi, 0)$  中,  $\psi = -\arccos(r_{33})$ 。

$$引理\ Lemma\ lemma20: -\pi \leq \psi < 0 \rightarrow \psi = -acos(r_{33}).$$

最后，公式(17)描述了给定旋转矩阵时，旋转角  $\phi$  的解:

$$\text{反正切}(Euler\_zxz_{13}/Euler\_zxz_{23}) - \pi - \pi \leq \phi < -\pi/2,$$

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan(Euler\_zxz_{13}/Euler\_zxz_{23}), \\ \arctan(Euler\_zxz_{13}/Euler\_zxz_{23}) + \pi, & -\pi/2 < \phi < \pi/2, \\ \pi/2 < \phi < \pi. \end{aligned}$$

据此，旋转角度解的形式化验证如下：

引理 21。在定义域内 $[0, \pi/2)$ ， $\phi = \arctan (r_1/3/r_2/3)$ 。

引理 lemma21:  $0 \leq \phi < \pi/2 \rightarrow \cos \phi > 0 \rightarrow \phi = \arctan((r_1/3)/(r_2/3))$ 。

有道文档翻译  
pdf.youdao.com

引理 22。在定义域内 $[\pi/2, \pi)$ ， $\phi=\arctan (r13/r23) + \pi$ 。

引理 lemma22: $PI/2 < \phi < PI \rightarrow \cos \phi < 0 \rightarrow \phi = \text{atan}((r13)/(r23)) + PI$ 。引理 23。在定义域内 $[-\pi, -\pi/2)$ ， $\phi=\arctan (r13/r23) - \pi$ 。

引理 lemma23:  $\phi < -\pi/2 \rightarrow \cos \phi < 0 \rightarrow \phi = \text{atan}((r13)/(r23)) - \pi$ 。

引理 24。在定义域 $[-\pi/2, 0)$ 中， $\phi = \arctan (r13/r23)$ 。

引理 lemma24:  $-\pi/2 < \phi < 0 \rightarrow \cos \phi > 0 \rightarrow \phi = \text{atan}((r13)/(r23))$ 。

7.罗德里格斯公式

对于定点为  $O$  的刚体， $G$  中围绕  $\xi$  旋转的角度  $\phi$  可分解为围绕三个特定的非共面轴的旋转。相反，刚体旋转有限次后，其旋转效果相当于绕特定轴的特定旋转。罗德里格斯公式是描述这种旋转效果的一种简单而有效的方法。

7.1.罗德里格斯公式存在的证明

设  $\xi_0$  为穿过  $G$  中的原点  $O$  的直线，以及围绕  $\xi_0$  旋转角度  $\phi$  的刚体。我们将  $\xi$  的方向向量表示为  $u$ 。刚体绕  $u$  的旋转等价于以下过程:(1)转动  $B$  中的一个轴使其与  $u$  重合;(2)  $B$  围绕  $u$  旋转  $\phi$ ;(3)  $B$  执行与步骤 1 相反的旋转。我们旋转  $B$  中的  $z$  轴使其与  $u$  重合，如图 7 所示。

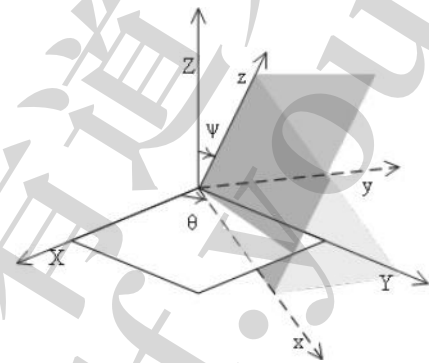


图 7。z 与 u 重合时的坐标系关系图。

在图 7 中，刚体首先围绕  $z$  轴旋转角度  $\theta$ ，然后围绕  $y$  轴旋转角度  $\phi$ ，使  $z$  轴与  $u$  重合，然后围绕  $z$  轴旋转角度  $\phi$ ，最后按照相反的顺序旋转。对应的公转如式(18)所示，其中  $G R_B$  为  $B \rightarrow G$  的公转矩阵：

$$\begin{aligned} G R_B &= G Q_B = B A_G^T \\ &= ((A z(-\varphi)) \times (A y(-\vartheta)) \times (A z \phi) \times (A y \vartheta) \times (A z \varphi))^T \\ s.t. \begin{cases} \sin \varphi = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} & \cos \varphi = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \\ \sin \vartheta = \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} & \cos \vartheta = u_3 \end{cases} \end{aligned} \tag{18}$$

有了这个推论，我们可以假设  $z$  轴在两次旋转后与  $u$  轴重合。我们用形式化的方法来验证这个假设。

引理 25。有两个角度  $\phi$  和  $\theta$  , 使得  $z$  轴的方向向量  $[0\ 0\ 1]$  在  $G$  中与  $u$  在两次旋转后重合。

引理 lemma25:  $Br = mkMat\_3\_10\ 0\ 1 \rightarrow$  存在  $(\phi\ 0\ \theta\ 0:R)$ ,

$$u = trans\ R\ 0((Ay\ \theta') \times (Az\ \phi')) \times Br.$$

根据公式(18), 我们假设  $GRB$  的等价性, 求解约束下的  $GRB$  的矩阵形式:

变量  $\phi\ 0\ \theta\ 0:R$ 。

假设  $GRB\_Hy$ :  $GRB = trans\ R\ 0((Az\ (-\ \phi\ 0)) \times (Ay\ (-\ \theta\ 0)) \times$   
 $(Az\ \phi) \times (Ay\ \theta') \times (Az\ \phi'))$ 。  
 $Hypothesis\ u\_len : |u| = 1$ 。  
 $De\ f\ inition\ vers(x: R) := 1 - (\cos\ x)$ 。

引理 26。式(18)的形式化验证

引理 lemma26:  $\sin\ \phi\ 0 = u2 / \sqrt{u1^2 + u2^2} \rightarrow \cos\ \phi\ 0 = u1 / \sqrt{u1^2 + u2^2} \rightarrow$   
 $\sin\ \theta' = \sqrt{u1^2 + u2^2} \rightarrow \cos\ \theta' = u3 \rightarrow GRB = mkMat\_3\_3$

$$\begin{pmatrix} u1^2 * (vers\ \phi) + \cos\ \phi & (u1 * u2 * (vers\ \phi) - u3 * \sin\ \phi) & (u1 * u3 * (vers\ \phi) + u2 * \sin\ \phi) \\ (u1 * u2 * (vers\ \phi) + u3 * \sin\ \phi) & (u2^2 * (vers\ \phi) + \cos\ \phi) & (u2 * u3 * (vers\ \phi) - u1 * \sin\ \phi) \\ (u1 * u3 * (vers\ \phi) - u2 * \sin\ \phi) & (u2 * u3 * (vers\ \phi) + u1 * \sin\ \phi) & (u3^2 * (vers\ \phi) + \cos\ \phi) \end{pmatrix}.$$

7.2. 罗德里格斯公式的正式定义

在引理 25 中, 我们证明了对于任何经过原点的旋转轴  $u$ , 在两次旋转后,  $u$  轴和  $z$  轴总是可能匹配的。在 lemma26 中, 我们验证了旋转矩阵  $GRB$  在约束条件下的等价形式。利用 lemma26, 可以推导出方向向量  $u$  的 Rodriguez 公式如式(19)所示:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{bmatrix} \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} 0 & -u3 & u2 \\ u3 & 0 & -u1 \\ -u2 & u1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$R_{(u,\phi)} = {}^G R_B = (\cos\ \phi) * I + (1 - \cos\ \phi) * u * u^T + (\sin\ \phi) * \hat{u}.$$

通常, 对于任意非零向量  $\xi$  , 其方向向量为  $eu = \|\xi\|^{-1} \xi$ 。

根据公式(19), 我们正式定义 Rodriguez 公式为  $ELR$ 。在  $ELR$  的定义中,  $\phi\ 0$  表示旋转角度,  $\xi\ 0$  表示任意非零旋转轴:

定义  $I := RMatrix$ 。小米 3。

定义  $\xi\_tilde(\xi\ 0: Mat\ R\ 3\ 1) := mkMat\_3\_3$

$$\begin{aligned} &0\ (mat\_nth\ \xi\ 0\ 1\ 0)\ (mat\_nth\ \xi\ 0\ 2\ 0)) \\ &(mat\_nth\ \xi\ 0\ 2\ 0) \\ &(-\ (mat\_nth\ \xi\ 0\ 1\ 0)) \quad 0 \quad (-\ (mat\_nth\ \xi\ 0\ 0)) \\ &0. \\ &(mat\_nth\ \xi\ 0\ 0\ 0) \end{aligned}$$

定义  $ELR(\phi\ 0: R)(\xi\ 0: \xi\ R\ 3\ 1) := \text{匹配}$

$Req\_EM\_T\ (\xi\ 0)1$  与

```

| left _ =>
  [(cos ϕ') × I] + [(vers ϕ') × [ξ' × (trans R 0 ξ')]] + [(sin ϕ') × (ξ_tilde ξ')]
| right _ => let ξ'' := [(1/|ξ'|) × ξ'] in
  [(cos ϕ') × I] + [(vers ϕ') × [ξ'' × (trans R 0 ξ'')]] + [(sin ϕ') × (ξ_tilde ξ'')]

```

结束。

7.3. 罗德里格斯公式和围绕 RAG 的革命之间的等价性

$\xi$  是  $g$  中的一个向量, 当  $\xi$  与 X 轴(Y 或 Z 轴)重合时,  $ELR$  等价于围绕 RAG 的旋转矩阵  $Q$ 。

引理 27. 当  $\xi=[x, 0, 0]$ ,  $u=\xi/|\xi|$  时,  $R(u, \phi)=QX\phi$ 。

引理 28. 当  $\xi=[0, y, 0]$ ,  $u=\xi/|\xi|$  时,  $R(u, \phi)=QY\phi$ 。

引理 29. 当  $\xi=[0, 0, z]$ ,  $u=\xi/|\xi|$  时,  $R(u, \phi)=QZ\phi$ 。

引理 30. 当  $\xi=[x, y, z]$ ,  $u=\xi/|\xi|$  时,  $R(u, \phi)=Q\phi$ 。

引理 27 表明, 当旋转轴与 X 轴重合时, Rodriguez 公式描述了绕 X 轴的旋转。同样, lemma28 和 lemma29 表明, 当旋转轴分别与 Y 轴和 Z 轴重合时, 罗德里格斯公式描述的是绕 RAG 的旋转。

7.4. 旋转轴和角度的非唯一性

利用  $ELR$ , 我们可以得到给定转角度  $\phi$  和转轴  $\xi$  时对应的转矩阵  $GRB$ 。反过来, 对于给定的  $GRB$ , 我们可以得到  $\phi$  和  $u$ (即  $\xi$  的方向向量)。如公式(20)所示, 其中  $Grb$  表示  $GRB$  中位置(1,0)处的元素:

$$\begin{cases} \hat{u} = \frac{1}{2\sin\phi}(G R_B - G R_B^T) \\ \sin\phi = \frac{(G R_{B10} - G R_{B01}) + (G R_{B02} - G R_{B20}) + (G R_{B21} - G R_{B12})}{2(u1+u2+u3)} \\ \cos\phi = \frac{1}{2}(tr(G R_B) - 1) \end{cases} \tag{20}$$

由式(20)可知, 对于给定的  $GRB$ ,  $\phi$  和  $\xi$  的解是非唯一的。在引理 30 和引理 31 中, 我们正式验证了解的非唯一性: 引理 30. 当  $\xi$  是任何非零矢量和  $u = \xi/|\xi|$  时,  $R(u, \phi)=(-u, -\phi)$ 。

引理 31. 当  $\xi$  是任何非零矢量和  $u = \xi/|\xi|$  时,  $R(u, \phi)=R(u, \phi+2\pi)$ 。

引理 32. 当  $\xi$  是任何非零矢量和  $u = \xi/|\xi|$  时,  $R(u, \phi)=R(u, \phi+2\pi)$ 。

Lemma30 表明刚体围绕  $\xi_0$  旋转时, 旋转等价于围绕  $\xi_0 - \phi_0$  旋转。这种等价关系在几何证明中是显而易见的。Lemma30 通过形式化方法证明了这种等价关系。同样, lemma31 表明, 当旋转角度增加  $2\pi$  时, 旋转矩阵是等价的。



7.5. 广义罗德里格斯公式

Rodriguez 公式的形式化验证假设  $B$  和  $G$  最初是一致的。即在初始状态下,  $r$  在  $G$  和  $B$  中具有等价性, 更一般地说,  $B$  和  $G$  无需初始重合, 如公式 22 所示, 其中  $B \rightarrow G$  为旋转矩阵。

$$B_r = {}^B R'_G * G_r. \tag{21}$$

当初始状态坐标系不重合时, 为了得到罗德里格斯公式, 我们假设一个新的全局坐标系  $G_0$ , 它最初与  $B$  重合。因此, 将  $r$  的变换  $B \rightarrow G$  分解为  $B \rightarrow G_0$  和  $G_0 \rightarrow G$ 。

为了得到  $B \rightarrow G_0$  的旋转矩阵, 我们应用罗德里格斯公式。公转轴应该用  $u_0$  表示, 如公式 (22) 所示, 其中  $u(|u|=1)$  是  $G$  中的公转轴,  ${}^0 R_B$  是  $B \rightarrow G_0$  的公转矩阵,  $\phi$  是公转角。

$$\begin{aligned} {}^0 r_G &= b r_0 \\ u_0 &= {}^0 R_G * u \\ {}^0 R_B &= \cos \phi * I + (\text{vers } \phi) * u_0 * u_0^T + (\sin \phi) * \hat{u}_0 \\ &= \cos \phi * I + (\text{vers } \phi) * ({}^0 R_G * u) * ({}^0 R_G * u)^T + (\sin \phi) * {}^0 R_G * \hat{u} * {}^0 R_G^T \\ &= \cos \phi * I + (\text{vers } \phi) * ({}^0 R_G * u) * u^T * {}^0 R_G^T + (\sin \phi) * {}^0 R_G * \hat{u} * {}^0 R_G^T \end{aligned} \tag{22}$$

因此,  $B \rightarrow G$  在最终状态下的旋转矩阵由式 (23) 给出, 其中  ${}^G R_0 = {}^0 R_G^T$  可由 lemma11 和 lemma12 得到。同样, 从 lemma9 和 lemma10 可以得到  $G \rightarrow B$  的旋转矩阵  ${}^G R_B = {}^0 R_B^T$ 。

$$\begin{cases} {}^G R_0 = {}^0 R_G^T \\ {}^G R_B = {}^G R_0 * {}^0 R_B \\ \quad = \cos \phi * {}^G R_0 + (\text{vers } \phi) * u * u^T * {}^G R_0 + (\sin \phi) * \hat{u} * {}^G R_0 \\ \quad = R_{(u, \phi)} * {}^G R_0 \end{cases} \tag{23}$$

我们使用形式化方法来推断和验证公式 (23)。首先, 我们形式化定义了  $G \rightarrow B$  (初始状态) 的转轴  $u$ 、转角  $\phi$  和转矩阵  ${}^0 R_G$ , 并设置  $u$  的长度为 1。

变量  $u$ :  $\text{Mat } R \ 3 \ 1$ 。                      变量  $\phi$ :  $R$ 。  
变量  ${}^0 R_G$ :  $\text{Mat } R \ 3 \ 3$ 。假设  
 $u\_len: |u| = 1$ 。

其次, 根据 引理 11, 我们定义了初始状态下  $B \rightarrow G$  的旋转矩阵  ${}^G R_0$ 。

$$\text{设 } {}^G R_0 := \text{trans } R_0 \ {}^0 R_G。$$

再次根据公式 (22), 我们在  $G_0$  中重新定义旋转轴  $u_0$ :

$$\begin{aligned} \text{Let } u_0 &:= {}^0 R_G * u. \\ \text{Let } {}^0 R_B &:= \text{ELR } \phi \ u_0. \end{aligned}$$

最后, 我们正式定义了  $B \rightarrow G_0 \rightarrow G$  的旋转矩阵  ${}^G R_B$ :

$$\text{Let } {}^G R_B := {}^G R_0 * {}^0 R_B。$$

基于这个定义, 在 lemma32 中给出了公式 (23) 中的等价关系的形式化证明:

引理 32。公式(23)的形式化验证。

引理 lemma32:  $GRB = ELR \ \phi \ u \times GR0$ 。

8.案例分析与验证

在这一节中，我们分析并证明了几个与机器人旋转相关的案例，以显示我们对所设计机器人的形式化验证的适用性。

8.1.围绕全球坐标系旋转

案例 1:在初始状态下，G 与 B 重合。让以 B 表示的刚体 D，随着刚体 D 中的点 PB = [10, 20, 30]T，以 0.6  $\pi$  rad/s 的角速度，围绕 G 的 X 轴连续旋转。我们举例说明了以 G 表示的点 PB 在 T = 5 s 时的位置 PG 的计算。

例二部分。

变量  $\delta t \ \delta \theta$ :r。变量轴:RAG。

例 Eg\_1:  $Br = mkMat\_3\_1 \ R \ 10 \ 20 \ 30 \rightarrow \delta t = 5 \rightarrow$

$\omega \ \delta t \ \delta \theta = 0.6 * PI \rightarrow axis = X \rightarrow Gr = mkMat\_3\_1 \ R \ (-10) \ 20 \ (-30)$ 。

Proof。

...

Qed。例二。

对于这种情况，我们通过非正式方法得到解  $PG = [-10, 20, -30]T$ 。对于形式化方法，我们应用上面所示的形式化验证，其中  $\delta t$  是时间变量， $\delta \theta$  是旋转角度变量，axis 是旋转轴变量。从 Eg\_1，我们观察到这种情况的解是[- 10,20, - 30]T，如预期的那样。

8.2.绕局部坐标系旋转

案例 2:在初始状态下，G 与 B 重合。让刚体 D，用 G 表示，首先绕 z 轴旋转  $\pi/4$ ，然后绕 x 轴旋转  $\pi/4$ ，最后在 B 中随着刚体 D 中的点  $PG = [10, 20, 30]T$  绕 y 轴旋转  $\pi/4$ ，我们举例说明点  $\surd PG$ ，在 B 中表示  $\surd$ ，旋转后  $\surd$  位置 PB 的计算。

与案例 1 类似，我们用非正式方法得到解[5 2/2,5 + 15 2,30- 5 2/2]r。对于形式化方法，我们在下面展示形式化验证，其中 rotList 是一个与旋转顺序相对应的列表。从 Eg\_2 来看，这种情况的解是

$$\frac{h \surd}{5} - \surd \surd \text{它} -$$

部分 Example2。

变量 rotList:list(RAB\* R)。

例 Eg\_2:

$$rotList = (配对 z (PI/4))::(配对 x (PI/4))::(配对 y (PI/4)):: nil \rightarrow CRB$$
$$rotList (mkMat\_3\_1R10 \ 20 \ 30) =$$
$$mkMat\_3\_1 \ R(5* sqrt2/2)(5 + 15* sqrt2)(30- 5* sqrt2/2)。$$

Proof。

...

Qed。

Example2 结束。

8.3.欧拉角情况

情形 3:给定岁差角  $\alpha = \pi/4$ , 章动角  $\psi = \pi/4$ , 旋转角  $\phi = \pi/4$ , 确定相应的欧拉角旋转矩阵。

要从给定的欧拉角得到旋转矩阵, 我们可以使用 lemma14 用下面的脚本完成形式化验证:

```
例Eg_3: forall  $\alpha \ \psi \ \phi:R$ ,  $\alpha=PI/4 \rightarrow \psi=PI/4 \rightarrow \phi= PI/4 \rightarrow Euler\_zxz \ \alpha \ \psi$   
       $\phi=mkMat\_3\_3$   
       $\begin{pmatrix} (1/2 - \sqrt{2}/4) & (1/2 + \sqrt{2}/4) & (1/2) \\ (-1/2 - \sqrt{2}/4) & (-1/2 + \sqrt{2}/4) & (1/2) \\ (1/2) & (-1/2) & (\sqrt{2}/2) \end{pmatrix}$   
  
      Proo f。  
      ...  
      Qed 。
```

我们对给定旋转矩阵的欧拉角分析如下。

案例 4:给定(24)式中的旋转矩阵, 我们确定对应的欧拉角: $\sqrt{\phantom{x}}$

$$Euler_{zxz} = \begin{pmatrix} \frac{21-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} & - & - \\ -12-42-12+42\sqrt{12} & \frac{1}{2} & - \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{2} \end{pmatrix} \tag{24}$$

对于这种类型的案例, 我们可以使用 lemma15-lemma26 进行验证, 如下所示:

```
例Eg_4: forall  $\alpha \ \psi \ \phi:R$ ,  $0 \leq \alpha < PI/2 \rightarrow 0 \leq \psi < PI/2 \rightarrow$   
       $0 \leq \phi < PI/2 \rightarrow Euler\_zxz \ \alpha \ \psi \ \phi = mkMat\_3\_3$   
       $\begin{pmatrix} (1/2 - \sqrt{2}/4) & (1/2 + \sqrt{2}/4) & (1/2) \\ (-1/2 - \sqrt{2}/4) & (-1/2 + \sqrt{2}/4) & (1/2) \\ (1/2) & (-1/2) & (\sqrt{2}/2) \end{pmatrix}$   
       $\rightarrow \alpha = PI/4 \wedge \psi = PI/4 \wedge \phi = PI/4$   
      Proof.  
      ...  
      Qed 。
```

8.4.罗德里格斯革命

情形 5:让局部坐标系  $B$  相对于全局坐标系  $g$  旋转三个欧拉角 $(\pi/4,\pi/4,\pi/4)$ 。我们确定旋转轴  $u$  和与该旋转轴等价的旋转角  $\phi$ 。

```
例Eg_5:  $\sin \phi > 0 \rightarrow GRB = ELR \ \phi \ u \rightarrow \theta 1 = PI/4 \rightarrow$   
       $\theta 2 = PI/4 \rightarrow \theta 3 = PI/4 \rightarrow BRG = Euler \ \theta 1 \ \theta 2 \ \theta 3 \rightarrow$   
       $u = mkMat\_3\_1$   $u = mkMat\_3\_1$   
       $\begin{pmatrix} (\sqrt{2}/\sqrt{5+2*\sqrt{2}}) \\ 0 \\ ((4*\sqrt{2}+4)/(4*\sqrt{5+2*\sqrt{2}})) \end{pmatrix}$   $\vee$   $\begin{pmatrix} -(\sqrt{2}/\sqrt{5+2*\sqrt{2}}) \\ 0 \\ (-((4*\sqrt{2}+4)/(4*\sqrt{5+2*\sqrt{2}}))) \end{pmatrix}$   
  
      Proo f。
```

...  
*Qed.*

案例 6:设刚体绕  $\sqrt{X}\sqrt{X}$  轴旋转  $\pi/6$ ,  $\sqrt{X}$  假设刚体继续绕  $u=[3/3, 3/3, 3/3]$  旋转  $\phi=\pi/2$ 。我们确定相应的旋转矩阵, GRB。

有道文档翻译  
pdf.youdao.com

对于这种情况，我们可以使用 lemma32 进行验证，如下所示：

```

    设  $u := \text{mkMat\_3\_1 } (\sqrt{3}/3) (\sqrt{3}/3) (\sqrt{3}/3)$ 。
    Let  $ORG := QX (PI/6)$ .      设  $GR0 := \text{trans } R0ORG$ 。      Let  $\phi := PI/2$ .

    Let  $0u := ORG \times u$ .      Let  $ORB := ELR \phi 0U$ .

    Let  $GRB := GR0 \times ORB$ .

    例 Eg_6:  $GRB = \text{mkMat\_3\_3}$ 
         $\begin{pmatrix} (1/3) & (-(2/3)) & (2/3) \\ (\sqrt{3}/3 + 1/3) & (\sqrt{3}/3 - 1/6) & (\sqrt{3}/6 - 1/3) \\ (-(\sqrt{3}/3) + 1/3) & (\sqrt{3}/6 + 1/3) & (\sqrt{3}/3 + 1/6) \end{pmatrix}$ 

    Proo f。
    ...
    Qed 。
```

9.结论

旋转运动美学作为运动控制系统中最基本的理论之一，被广泛应用于不同的研究课题中。本文应用形式化技术来验证机器人旋转运动理论的正确性。我们将旋转运动分为两种类型(即公转和旋转)并对它们进行了形式化定义。具体来说，我们在 Coq 证明助手中建立了一个 3D 坐标系模型，并在模型中形式化定义了矩阵迹、Frobenius 范数和内积。我们形式化了欧拉角的定义，并验证了其 与旋转矩阵的变换关系。此外，我们完成了罗德里格斯公式的机器证明。在本文中，所有的证明和验证都是使用 Coq 证明助手实现的。所有源文件均可通过 <https://github.com/GuojunXie123/RFV.git> 访问(2023 年 1 月 7 日访问)。

总的来说，正式验证的证明由大约 3200 行代码组成。代码已经过测试，并应在 Coq 8.13.2 下编译。表 1 提供了在脚本文件方面的形式化的详细说明。为了帮助浏览它们，我们在论文中指明了相关部分。代码行数的多少区分了规范和证明。

表 1。机器人旋转动觉的形式化验证概述。

文件	参考	规范	证明
Trace.v	4.1 节	33	0
Norm.v	4.2 节	88	20.
DotProduct.v	4.3 节	115	30.
DotAngle.v	4.4 节	One hundred.	47
Coordinate_Basics.v	5.1 节	376	350
Rotate_Around_G.v	5.2.1 节	290	260
Rotate_Around_G_Lemma.v	5.2.1 节	320	300
Rotate_Around_G_Example.v	5.2.1 节	148	130
Rotate_Around_B.v	5.2.2 节	270	240
Rotate_Around_B_Lemma.v	5.2.2 节和 6.1 节	320	300
Rotate_Around_B_Explme.v	5.2.2	150	130

	节		
General_Rotate.v	5.2.3 节	70	60
Relation_GB.v	5.2.3 节	130	120
Euler_Angle.v	6.2 节	180	170
RodriguezDef.v	7.2 节	260	230
RodriguezPf.v	7.1 节	115	One hundred.
RodriguezLem.v	第 7.3 和 7.4 节	310	300

未来，我们将基于本文的形式化验证框架完成更多机器人控制技术的验证。具有更复杂的运动学

逻辑，我们将完善更多类型机器人运动学的形式化验证框架。我们的目标是完成一个机器人控制系统的形式化验证。我们还计划开发一些自动化战术，用于增加形式证明的自动化程度。这将是自动化控制系统验证领域的一次有意义的探索和有价值的尝试。此外，我们还将尝试将代码生成和形式化验证的技术结合起来。我们计划设计一个机器人控制算法，并使用 Coq 证明助手自动生成 C 代码。这有望大大提高机器人控制系统的安全保障。

**作者贡献:**概念化、方法论和验证，G.X.和 H.D.;《形式分析与调查》，G.X.和 Z.S.;写作-原稿准备，G.X.;写作-审稿编辑，H.Y.、G.C.;监督，G.C.所有作者均已阅读并同意稿件的出版版本。

**资助:**本研究未获得外部资助。

**数据可用性声明:**本研究中呈现的数据可在 [github] 公开获取，网址为 [https://github.com/GuojunXie123/RFV.git]。

**致谢:**作者感谢匿名审稿人的有用意见和有价值的建议，这些意见和建议导致了手稿的显著改进。

**利益冲突:**作者声明无利益冲突。

参考文献

1. 沈,y;贾,问;;黄,z;王,r;范,j .;陈, G.基于强化学习的冗余机械臂反应式避障方法。 *磅* **2022**,*24*,279。 [CrossRef] [PubMed]

2. 太阳,t;Yu, W.区块链智能合约安全问题的形式化验证框架。 *电子* **2020**,*9*,255。 (CrossRef)

3.Selsam d;梁,p;Dill, D.L.用形式数学开发无 bug 的机器学习系统。发表于国际机器学习会议论文集，奥地利维也纳，2020 年 7 月 12 日。

4.徐,j .;Yu, z;倪,b;杨,j .;杨,x;张伟. 单目三维人体姿态估计的深度运动学分析。《IEEE 计算机视觉与模式识别会议论文集》，美国华盛顿特区，2020 年 6 月 14 日。

5. Korovesis;;Kandris d;Koulouras g;Alexandridis, A.利用神经网络和阿尔法脑波，通过基于脑电图的脑机接口实现机器人运动控制。 *电子学* **2019**,*8*,1387。 (CrossRef)

6.杨,k;邓, J.通过与证明助手的交互学习定理证明。机器学习国际会议论文集，2019 年 11 月 8 日，中国太原。

7.Zholtkevych, G.事件宇宙:使用 Coq 证明助手的规范和分析。2019 年 6 月 12 日，乌克兰科尔森，ICTERI 研讨会论文集。

8. Vu, V.H.组合随机矩阵理论的最新进展。 *Probab. Surv.* **2021**, *18*, 179-200。 (CrossRef)

9. 奕,r;于美国;李,w;陈,p;夏,p;翟,f;提价 h;Jiang, Y.具有关节极限和末端位姿耦合的 7 自由度人形机械臂逆运动学。 *动力机械. 马赫. 理论* **2022**,*169*,104637。 (CrossRef)

10. Alkassar 大肠;看法,美国;Mehlhom k;Rizkallah, C.验证计算的框架。 *j • 奥特曼. 理由.* **2014**,*52*,241-273。 (CrossRef)

11. 本 • 哈法伊德, I.;本 • 哈穆达, r;Robbana, R.一种基于模型的云环境中动态负载平衡协议的形式化验证和性能分析方法。 *Clust. 计算机.* **2021**,*24*,2977-2994。 (CrossRef)

12. f . Vicentini 制作;Askarpour m;罗西,M.G.;Mandrioli, D.通过自动化形式化验证对协同机器人进行安全评估。 *IEEE 反式. 机器人.* **2019**,*36*,42-61。 (CrossRef)

13. Foughali m;Zuepke, A.实时自主机器人的形式化验证:跨学科方法。 *前面. 机器人. Ai* **2022**, *9*,1- 25。 [CrossRef] [PubMed]

14. 陈,美国;王,g;李,x;张,问;;施,z;管燕. 基于 Rodrigues 公式的相机位姿估计算法的形式化。 *的形式. Asp. 计算机.* **2020**,*32*,417 - 437。 (CrossRef)

15.卡瓦略,r;达,a;马赛;;Santos, A. ROS 应用的全系统安全性验证。《智能机器人与系统国际会议论文集》，美国内华达州拉斯维加斯，2020 年 10 月 24 日。

16.Kortik,美国;Shastha, T.K.使用线性逻辑定理证明器对基于 ros 的系统进行形式化验证。发表于 IEEE 机器人与自动化国际会议论文集，西安，中国，2021 年 5 月 30 日。

17. 穆雷,y;Sirevag m;里贝罗,p;Anisi D.A.;Mossige, M.使用硬件/软件协同验证的工业机器人控制系统的安全保证。 *科学. 第一版. 程序.* **2022**,*216*,102766。 (CrossRef)

18.Rathmair m;Haspl t;Komenda t;德国骑兵,b;Hofbaur, M.机器人工作流的形式化验证方法。发表于国际先进机器人会议论文集，卢布尔雅那，斯洛文尼亚，2021 年 12 月 6 日。



19.Lestingi l;Askarpour m;Bersani M.M.;Rossi, M.医疗保健场景中人机交互的形式化验证。发表于 2020 年 9 月 14 日，荷兰阿姆斯特丹，国际软件工程与形式化方法会议论文集。

20.Praveen A.T.;古普塔,a;Bhattacharyya,美国;Muthalagu, R.从形式化验证到 ROS 仿真的转换确保多机器人自主系统的行为。*IEEE 系统。J.*2022, 16, 5092-5100。 (CrossRef)

21.阿奈特、t;欧内斯特;;Kunkel b;Boronat, H.用于无人机在安全走廊中导航和目标捕获的遗传模糊系统的形式化验证。《北美模糊信息处理学会年会论文集》，美国华盛顿特区，2020 年 8 月 20 日。

22. Foughali m;Hladik, P.E.弥合形式验证与可调度性分析之间的差距:以机器人为例。*j. 系统。Archit.*2020, 111, 101817。 (CrossRef)

23.Fatkina, a;Iakushkin o .;Selivanov d;Korkhov, V.分布式系统背景下的形式化软件验证方法。在“计算科学及其应用国际会议论文集”上，俄罗斯圣彼得堡，2019 年 7 月 1 日。

24. 马,Z.W.;Chen, G.基于 Coq 记录的矩阵形式化。第一版。*科学*。2019,7,139-145。

25. 马、陈文贤;陈、G. coq 型矩阵代码生成技术。*J. 软件*。2022,33,2224-2245。

26. 张,y;郭,j.;李昕。机器人运动学参数辨识中的冗余性研究。*IEEE Access*2022, 10, 60572-60584。 (CrossRef)

27. 阿里,Z.A.;张刚, H.装备缆索驱动抓手的六旋翼无人机机动控制。*IEEE Access*2021, 9,65308- 65318。 (CrossRef)

28. 沙,k;Mishra, R.计算机断层扫描引导医疗程序的机器人机械臂机构建模与优化。*科学。伊朗*。2022,29,543-555。 (CrossRef)

**免责声明/出版者注:**所有出版物中包含的声明、观点和数据仅为作者和贡献者个人的声明、观点和数据，而不是 MDPI 和/或编辑的声明、观点和数据。MDPI 和/或编辑对因内容中提及的任何想法、方法、说明或产品而造成的任何人身或财产伤害概不负责。