Diver

A coder in kindergarten

欧式空间的旋转表示(二）-欧拉角

2020-02-17 | 2023-11-18 | 三维基础 ， 旋转表征
4.5k | 4 分钟

本文主要介绍欧拉角的基本概念及万向锁（gimbal lock），本文默认使用右手坐标系，ZYX顺规

什么是欧拉角

欧拉角被用来描述一个物体绕某个坐标系旋转的角度，坐标系可以分解为三个相互正交的坐标轴构造。欧拉角的定义由三个部分组成：

- **顺规**：欧拉角具有两大类的顺规表示方式：1）Proper Euler angles: (z-x-z, x-y-x, y-z-y, z-y-z, x-z-x, y-x-y); 2) Tait-Bryan angles：(x-y-z, y-z-x, z-x-y, x-z-y, **z-y-x**, y-x-z)。一般，我们也可以用yaw, pitch, roll来分别指代z轴，y轴, x轴的旋转。我们将其简称为rpy角
- **旋转角度**：常用(γ,β,α)来描述绕三个坐标轴旋转的角度, 若以ZYX顺规来解释，既先绕z轴旋转γ度，再绕y轴旋转β度,最后绕x轴旋转α度。
- **内旋or外旋**：根据每次旋转是绕**旋转之后的轴**旋转，还是**固定轴**旋转，我们将欧拉角分为**内旋（intrisic roatation）**和**外旋(extrinsic rotation)。也有称内旋为动态旋转，绕物体坐标系旋转；将外旋称为静态旋转，绕世界坐标系旋转。事实上，如果将12种顺规中的一种的第一次旋转轴和第三次旋转轴互换顺序，那么可以使得外旋，内旋两者造成的姿态变化是等价的。**比如外旋（**z**,y,**x**）就等价于内旋（**x**,y,**z**)，证明如下：

根据题目可得如下定义：

$R_{外}=R(Z)R(Y)R(X)$ 和 $R_{内}=R(\alpha)R(\beta)R(\gamma)$。其中对于外旋来说，也是绕固定Z轴旋转$\gamma$度，绕固定Y轴旋转$\beta$度，绕固定X轴旋转$\alpha$度。

$R(\alpha)=R(X)$ 这是显然的，而 $R(\beta)$ 可以写为 $R(\beta)=R(\alpha)^{-1}R(Y)R(\alpha)$（可以用三支笔模拟一下）。同理我们可得 $R(\gamma)=(R(\alpha)R(\beta))^{-1}R(Z)(R(\alpha)R(\beta))$。由此：

$$R_{外}=R(\alpha)R(\beta)R(\gamma)=R(\alpha)R(\beta)*(R(\alpha)R(\beta))^{-1}R(Z)(R(\alpha)R(\beta))=R(Z)(R(\alpha)R(\beta))=R(Z)(R(\alpha)R(\alpha)^{-1}R(Y)R(\alpha))$$

我们可以从以上三个方面确定一次用欧拉角定义的旋转，当任意一个因素发生改变时，都可能形成另一种不一样的旋转。

什么是万向锁(Gimbal Lock)

假设我们的**顺规为zyx, 内旋，旋转角度为(γ,β,α)**，当β为± 90度时，就会产生万向锁。下面我们以内旋，顺规为(z,y,x)为例。

gimbal lock示意图

我们将起始地坐标轴定义为(X_1,Y_1,Z_1)首先我们绕Z_1轴旋转任意γ角，易得此时X_1轴和Y_1轴的方向已经发生了改变，记为(X_2,Y_2,Z_1)。我们再绕Y_2轴旋转90度，得到(X_3,Y_2,Z_3)。我们可以发现X_3轴与Z_1轴处以同一条水平线上。那么当我们按照 `顺规` 第三次绕X_3轴旋转时，**本质上就是重复了第一次绕Z_1轴的旋转**。此时就称发生了万向锁（Gimbal Lock)。

任何 `顺规` 都有可能发生万向锁，**只要第二次旋转的角度为± 90度**，就会发生万向锁。

视频在2分56秒的地方介绍了万向锁的本质，**其实就是objects没有安装期望的轨迹运动到规定的位置。**而不是真正意义上的“锁”住某个维度。或者可以这样理解（不确定，没经过数学推导），我们已知任何选择都可以分解为三次基本旋转矩阵，当我们规定顺规为(z,y,x)时，若分解得y的旋转度数为90度时，我们**预想**的X轴的旋转度数α就变得”无效”了，（X轴此时抑郁第一次旋转绕的Z轴重复）。解决方法就是使用其他的顺规，从而规避的第二次旋转度数为± 90度

从矩阵角度看万向锁

当我们以顺规(z,y,z)对物体进行旋转时，我们可以将三个基本旋转矩阵写成一个$R = \begin{bmatrix} c_1c_2 & c_1s_2s_3 - c_3s_1 & s_1s_3 + c_1c_3s_2 \\ c_2s_1 & c_1c_3 + s_1s_2s_3 & c_3s_1s_2 - c_1s_3 \\ -s_2 & c_2s_3 & c_2c_3 \end{bmatrix}$

当第二次旋转角度为± 90度时，我们有$c2 = 0$和$s2 = \pm 1$。于是矩阵就可以简化为$R = \begin{bmatrix} 0 & \pm c_1s_3 - c_3s_1 & s_1s_3 \pm c_1c_3 \\ 0 & c_1c_3 \pm s_1s_3 & \pm c_3s_1 - c_1s_3 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha \pm \gamma) & \cos(\alpha \pm \gamma) \\ 0 & \cos(\alpha \pm \gamma) & \sin(\alpha \pm \gamma) \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

我们可以看出，当对α进行选择操作时，就相当于在γ上施加了一个反方向的旋律，两者效果是等价的。这就是造成万向锁的原因，我们在三维空间中，只能进行两个维度的变化。

欧拉角与其他旋转表征的转换

欧拉角与旋转矩阵

由上边的定义可以，欧拉角可以分解为三个基本旋转的复合变换。所谓基本旋转是指以X轴，Y轴，Z轴。采用**右手法则**，设θ为转角，我们可得三个基本旋转矩阵为：

$$R_X(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R_Y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 0 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$R_Z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

若顺规为(z,y,x），则$R=R_Z(\theta)R_Y(\theta)R_X(\theta)$。具体结果参照下图：

欧拉角与四元数

对于四元数$q=(w,x,y,z)=\cos\theta+\sin\theta x+\sin\theta y+\sin\theta z$。其中$\cos\theta$是表示旋转度数为$2\theta$，而$(x,y,z)$表明旋转轴。

而欧拉角转四元数就是，与欧拉角构造旋转矩阵一样，把三个基础旋转Elemental Rotation组合在一起。

$$q(\gamma,\beta,\alpha)=q_z(\gamma)q_y(\beta)q_x(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\frac{\gamma}{2}\\ 0\\ 0\\ \sin\frac{\gamma}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\\ 0\\ \sin\frac{\beta}{2}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\\ \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\\ \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{s}\\ \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,\mathrm{s}\\ \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,\mathrm{s}\\ \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\,\mathrm{s}\end{bmatrix}$$

参考资料

外旋内旋转化

三维空间的旋转矩阵

Euler_angles

三维旋转：欧拉角、四元数、旋转矩阵、轴角之间的转换

欧拉角细节/旋转顺序/内旋外旋

游戏动画中欧拉角与万向锁的理解

欧拉角万向节锁问题

欧拉角

‹ 拉普拉斯矩阵与拉普拉斯算子的关系

欧式空间的旋转表示(三)-旋转矩阵 ›