尼，导致 $c_1c_2 \gg k_2m_2$. 可将式 (12) 中的 $c_1c_2 - k_2m_2$ 近似以 c_1c_2 代替，导出 A_1 和 A_2 模的近似值

$$|A_1| = \frac{F_0}{c_1\omega}, \quad |A_2| = \frac{F_0}{c_1\omega}\sqrt{1+\left(\frac{k_2}{c_2\omega}\right)^2} \tag{13}$$

可见建筑物的振幅 $|A_1|$ 取决于阻尼系数 c_1，而消振器的振幅 $|A_2|$ 与刚度系数 k_2 和阻尼系数 c_2 有关.

以上在线性振动范畴内所做的分析表明，对于有阻尼的二自由度线性系统，消振器的无阻尼固有频率等于激励频率的消振条件仍为消振的必要条件，同时还要求建筑物的无阻尼固有频率亦接近激励频率. 但即使上述条件满足，有阻尼系统也不能实现完全消振. 建筑物仍有残余振动存在，其幅度与本身的阻尼系数 c_1 成反比. 消振器的振动幅度则可通过减小刚度系数 k_2 和增大阻尼系数 c_2 进行调整.

参 考 文 献

1 刘延柱，陈立群，陈文良. 振动力学 (第二版). 北京：高等教育出版社，2011

2 刘延柱. 趣味振动力学. 北京：高等教育出版社，2012

3 程穆，汪立军. 阻尼器在上海中心大厦的应用. 上海建设科技，2014, (3): 26-29

(责任编辑：胡　漫)

关于刚体角速度的认识与思考

刘军华 *,1)　　李俊峰 †

*(华中科技大学土木与力学学院，武汉 430074)

†(清华大学航天航空学院，北京 100084)

摘要　从中学就开始了解和学习角速度这个物理量. 认知也从中学的标量，到大学物理中的矢量. 本文通过分析刚体一般运动时点的速度和加速度，证明了角速度是二阶张量，同时给出了角速度矢量表达需要满足的条件，明确指出角速度的准确表达必须用张量，角速度的简便表达可以用矢量. 最后讨论了几个与角速度相关的问题.

关键词　角速度，张量，定点运动，速度，加速度

中图分类号：O31　**文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-17-260

1　简单运动的角速度

1.1　中学物理中的角速度

角速度这个物理量在中学物理中就有，主要是描述一个质点的匀速圆周运动. 质点的瞬时速度和法线加速度计算公式为 $v = \omega r, \quad a = v^2/R = \omega^2 R$，其中 v 是点的速度，ω 是角速度，R 是圆周运动的半径，a 是点的加速度. 这些量都被当作标量对待.

1.2　大学物理中的角速度

以刚体作定轴转动 (转轴为 z, 沿 z 轴的单位矢量为 $\boldsymbol{k}$，如图 1) 为例，转动角度 φ，角速度 $\boldsymbol{\omega}$，角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 之间的关系

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}\boldsymbol{k}$$

刚体上一点 M 的速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$ 与刚体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\alpha}$ 之间的关系式 (图 2) 为

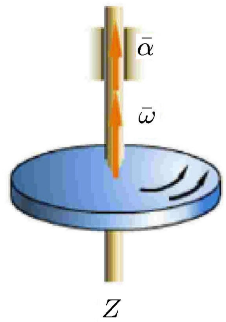


图 1　定轴转动

2017–07–19 收到第 1 稿，2017–08–17 收到修改稿.

1) E-mail: ljh@mail.hust.edu.cn

引用格式：刘军华, 李俊峰. 关于刚体角速度的认识与思考. 力学与实践, 2018, 40(1): 75-79

Liu Junhua, Li Junfeng. Understanding and thinking of rigid-body angular velocity. *Mechanics in Engineering*, 2018, 40(1): 75-79

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$$

通过大学物理学习，学生知道这些物理量都是矢量，中学物理只是学习其中一种特殊情况的标量解答. 至今角速度作为矢量被普遍认可.

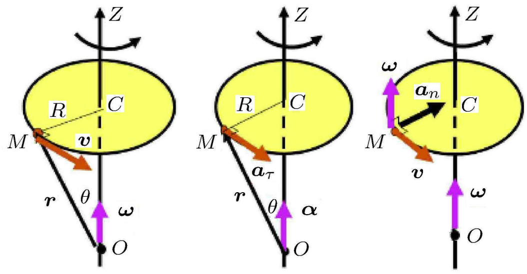


图 2 速度和加速度矢量关系图

2 理论力学中的角速度

在理论力学教学中，有两种方式引入角速度. 一种是延续和推广大学物理中的认知，另一种作为张量引入.《张量分析》[1] 对张量作了严格的定义. 由若干有序数组成的集合，其表征不随坐标系的改变而改变，称这个集合为张量. 显然，标量是零阶张量，矢量是一阶张量.

2.1 刚体的角速度张量

设在 t 时刻长方体 (刚体) 位置如图 3 所示，刚体一般运动可以分解成随基点 O 的平行移动加上绕基点 O 的定点运动. 建立如下 3 个笛卡尔直角坐标系：固定系 $O_0X_0Y_0Z_0$ $(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0)$；固连系 (固连在刚体上)$Oxyz(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$；平动系 (相对于固定系) $OXYZ(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$[2-3].

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t)$ 是坐标系 $Oxyz$ 相对于坐标系 $OXYZ$ 方向余弦阵, 如图 4.

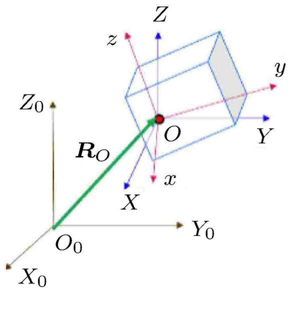


图 3 刚体一般运动

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k}' \\ \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}' \end{bmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，满足关系式 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

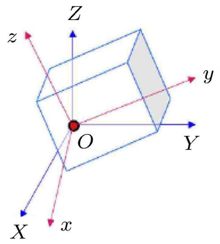


图 4 刚体定点运动

根据刚体在 t 时刻 (图 5) 位置，得到刚体上点 P 的运动方程 (在 $O_0X_0Y_0Z_0(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0)$ 下)

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_O + \boldsymbol{r} \tag{1}$$

假设 $\underline{\boldsymbol{R}}, \underline{\boldsymbol{R}}_O, \underline{\boldsymbol{r}}$ 分别是 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}_O, \boldsymbol{r}$ 在坐标系 $O_0X_0Y_0Z_0$ 下的坐标列阵，$\underline{\boldsymbol{\rho}}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $Oxyz$ 下的坐标列阵，$\underline{\boldsymbol{\rho}}$ 在刚体运动过程中，保持不变，是常数列阵. 于是有

$$\underline{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{\rho}}, \quad \underline{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{r}}$$

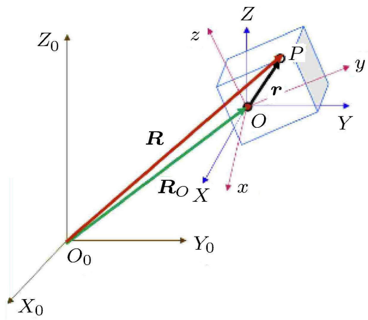


图 5 刚体上点 P 的位置关系

于是式 (1) 可以改写为

$$\underline{\boldsymbol{R}} = \underline{\boldsymbol{R}}_O + \underline{\boldsymbol{r}} = \underline{\boldsymbol{R}}_O + \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{\rho}} \tag{2}$$

式 (2) 对时间求导数 (在 $O_0X_0Y_0Z_0(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0)$ 下)，得到刚体上点 P 的速度和加速度表达式

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{\boldsymbol{R}}} &= \dot{\underline{\boldsymbol{R}}}_O + \dot{\underline{\boldsymbol{r}}} = \dot{\underline{\boldsymbol{R}}}_O + \dot{\boldsymbol{A}}\underline{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{A}\dot{\underline{\boldsymbol{\rho}}} = \dot{\underline{\boldsymbol{R}}}_O + \dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{r}} \\ \ddot{\underline{\boldsymbol{R}}} &= \ddot{\underline{\boldsymbol{R}}}_O + \ddot{\underline{\boldsymbol{r}}} = \ddot{\underline{\boldsymbol{R}}}_O + \ddot{\boldsymbol{A}}\underline{\boldsymbol{\rho}} = \ddot{\underline{\boldsymbol{R}}}_O + \ddot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{r}} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

将式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ 两边对时间求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\left(\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$$

可知 $\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (记为矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$) 是坐标系 $O_0X_0Y_0Z_0$ ($\boldsymbol{i}_0$, $\boldsymbol{j}_0$, $\boldsymbol{k}_0$) 下的反对称矩阵

$$\boldsymbol{\Omega}=\dot{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix} \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}\omega_x&=a_{21}\frac{\mathrm{d}a_{31}}{\mathrm{d}t}+a_{22}\frac{\mathrm{d}a_{32}}{\mathrm{d}t}+a_{23}\frac{\mathrm{d}a_{33}}{\mathrm{d}t}=\\ &\quad-\left(a_{31}\frac{\mathrm{d}a_{21}}{\mathrm{d}t}+a_{32}\frac{\mathrm{d}a_{22}}{\mathrm{d}t}+a_{33}\frac{\mathrm{d}a_{23}}{\mathrm{d}t}\right)\\ \omega_y&=a_{31}\frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}t}+a_{32}\frac{\mathrm{d}a_{12}}{\mathrm{d}t}+a_{33}\frac{\mathrm{d}a_{13}}{\mathrm{d}t}=\\ &\quad-\left(a_{11}\frac{\mathrm{d}a_{31}}{\mathrm{d}t}+a_{12}\frac{\mathrm{d}a_{32}}{\mathrm{d}t}+a_{13}\frac{\mathrm{d}a_{33}}{\mathrm{d}t}\right)\\ \omega_z&=a_{11}\frac{\mathrm{d}a_{21}}{\mathrm{d}t}+a_{12}\frac{\mathrm{d}a_{22}}{\mathrm{d}t}+a_{13}\frac{\mathrm{d}a_{23}}{\mathrm{d}t}=\\ &\quad-\left(a_{21}\frac{\mathrm{d}a_{11}}{\mathrm{d}t}+a_{22}\frac{\mathrm{d}a_{12}}{\mathrm{d}t}+a_{23}\frac{\mathrm{d}a_{13}}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}$$

我们很容易证明 $\boldsymbol{\Omega}$ 是张量. 刚体一般运动中，随基点的平行移动部分不影响转动效果，因此为了单独分析 $\boldsymbol{\Omega}$ 的性质，假设刚体作定点运动 (如图 4)，由式 (3) 有 $\underline{\dot{r}}=\boldsymbol{\Omega}\underline{r}$，即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r} \tag{5}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ 和矢径 $\boldsymbol{r}$ 都是矢量，即一阶张量，根据张量的商法则，可知 $\boldsymbol{\Omega}$ 是一个二阶张量. 因为 $\boldsymbol{\Omega}$ 与刚体的转动相关，也称为转动角速度张量. 证明完毕.

2.2 刚体的角速度张量与角速度矢量

因为矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 是反对称的，所以也称 $\boldsymbol{\Omega}$ 为二阶反对称张量. 反对称矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 只有 3 个元素独立，由张量分析 [1] 可知，它对应着在同一个坐标系下的 (相伴) 矢量 $\boldsymbol{\omega}$[2-3]

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}_0+\omega_y\boldsymbol{j}_0+\omega_z\boldsymbol{k}_0 \tag{6}$$

二阶反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$，可以用其 (相伴) 矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 代替，它们之间满足如下关系 [1]

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},\quad \dot{\boldsymbol{\Omega}}\cdot\boldsymbol{r}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是任意矢量.

由式 (1)，式 (3) ～ 式 (7)，整理得刚体一般运动，刚体上 P 点的速度和加速度为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}_O+\left(\dot{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{\Omega}^2\right)\cdot\boldsymbol{r}=\\ &\quad\boldsymbol{a}_O+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{9}$$

从 P 点的运动公式中得出：二阶反对称张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的矢量表达 $\boldsymbol{\omega}$ 就是大家熟悉的角速度.

如果刚体一般运动退化成定轴转动 (转轴为 z 轴，绕 z 轴旋转角度 φ)，如图 1 所示，此时矩阵 $\boldsymbol{A}$、矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 以及 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 简化为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & 0\\ \omega_z & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}=\omega_z\boldsymbol{k}=\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{\omega}}=\dot{\omega}_z\boldsymbol{k}$

刚体上点 P 的运动量结果简化为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{\alpha}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$$

得到的公式与在大学物理中学习的公式一致.

2.3 刚体的角速度到底是张量还是矢量

在一般情况下, 角速度这个物理量数学上可以用矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 描述，但有些情况下会出现问题. 用张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 描述角速度在数学上最准确，任何情况下都不会有问题.

在北京大学的朱照宣先生主编的《理论力学》上册指出 [4]：一个矢量必须满足其表达式与坐标系选择无关的条件. 分析 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$, 其中 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 都是矢量，与坐标系选择无关. 在研究由右手系到左手系 (或者左手系到右手系) 这种坐标变换时，得出 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{\omega}'$，表达式发生改变，无法满足其与坐标系选择无关这个条件. 问题就出在角速度上. 所以说，要想把角速度看成矢量，就必须对坐标变换作说明或者限定，如果只考虑由右手系到右手系的变换，角速度可以当成矢量应用. 如果角速度用张量 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示，无论是右手系到右手系间的转换，还是右手系到左手系的转换等，表达式都不会改变.

在周培源先生编写的《理论力学》也强调 [5]：刚体的有限转动虽不能用向量代表，但可以用并矢 (二阶张量) 来描写，即

$$\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}=(1-\cos\theta)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})+\sin\theta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}$$

假如 θ 的数值甚小，则右边的第一项可以不计. 这说明有限转动必须用张量描述，无限小转动可以近似地用向量描述.

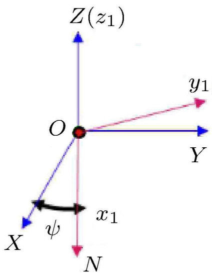
因此，角速度的准确表达必须用张量，角速度的简便表达可以用矢量. 理论力学中可以把角速度看作矢量 [2].

角速度本质是二阶张量，人们为什么还是喜欢用矢量描述角速度呢？其原因大致有：(1) 历史原因；(2) 在教学中符合学生认识水平和数学基础等考虑；(3) 在工程应用中更简洁，一般不会出问题，(4) 对这个概念认识的历史上传统看法与习惯等.

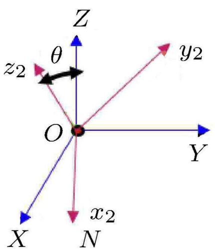
3 角速度相关的其他问题讨论

3.1 角速度一定是某个角度对时间的导数吗？

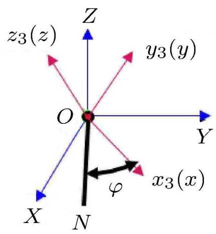
对于刚体的定点运动 (图 4)，方向余弦矩阵 $\boldsymbol{A}$ 还可以通过欧拉角 $(\varPsi,\theta,\varphi)$ 三次转动坐标系得到：第一次由 $OXYZ$ $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ 绕 Z 轴转动角度 ψ (进动角) 到 $Ox_1y_1z_1$ $(\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{k}_1)$ (图 6(a))；第二次由 $Ox_1y_1z_1$ 绕 x_1 轴转动角度 θ (章动角) 到 $Ox_2y_2z_2$(i_2, j_2, k_2) (图 6(b))；第三次由 $Ox_2y_2z_2$ 绕 z_2 轴转动角度 φ (自动角) 到 $Ox_3y_3z_3$ $(\boldsymbol{i}_3,\boldsymbol{j}_3,\boldsymbol{k}_3)$ ($Oxyz$ $(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}')$)(图 6(c))[2-3,6].



(a)



(b)



(c)

图 6 $OXYZ$ 转到 $Oxyz(Ox_3y_3z_3)$ 三次转换

三次转动的方向余弦矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3 \tag{10}$$

把式 (10) 代入式 (4)，整理得到用欧拉角描述刚体在坐标系 $Oxyz$ (或 $Ox_3y_3z_3$) 下的 $\boldsymbol{\omega}$ 坐标列阵为

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi\\ \dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi\\ \dot\psi\cos\theta+\dot\varphi\end{pmatrix}$$

$$\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=\dot\psi^2+\dot\varphi^2+\dot\theta^2+2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta \tag{11}$$

同时可求出

$$\begin{pmatrix}\dot\psi\\ \dot\theta\\ \dot\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi)/\sin\theta\\ \omega_1\cos\varphi-\omega_2\sin\varphi\\ \omega_3-(\omega_1\sin\varphi+\omega_2\cos\varphi)\mathrm{cot}\theta\end{pmatrix}$$

根据角速度合成定理 [4]，上述三次坐标系旋转的角速度有

$$\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta\boldsymbol{\beta}/\Delta t)=\boldsymbol{\omega}=\omega_\varphi\boldsymbol{k}_2+\omega_\theta\boldsymbol{i}_1+\omega_\psi\boldsymbol{k}=\dot\varphi\boldsymbol{k}_2+\dot\theta\boldsymbol{i}_1+\dot\psi\boldsymbol{k} \tag{12}$$

由式 (11) 得

$$(\omega \mathrm{d}t)^2 = (\mathrm{d}\psi)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}\theta)^2 + 2\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\cos\theta \tag{13}$$

但是式 (13) 无法写成全微分. 即

$$(\omega \mathrm{d}t)^2 = (\mathrm{d}\psi)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2 + (\mathrm{d}\theta)^2 + 2\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi\cos\theta \neq \underline{(\dot{\beta}\mathrm{d}t)^2 = (\mathrm{d}\beta)^2} \tag{14}$$

通过以上分析及式 (12) 和式 (14) 有下面结论:

(1) 分析力学中定义 "准速度" 为广义速度的线性组合，其在一定条件下才能写成全微分. 这也是引入 "准坐标" 概念的原因 [7]；

(2) 角速度是广义速度的非线性组合，一般不存在标量函数 $\beta(t)$，即角速度的大小不能表示成 $\omega = \mathrm{d}\beta/\mathrm{d}t$；

(3) 只有运动退化为定轴转动时，标量函数 $\beta(t)$ 才存在, 且 $\dot{\beta} = \dot{\varphi}$;

(4) 矢量式的极限存在 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta\boldsymbol{\beta}/\Delta t) = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}_2 + \dot{\theta}\boldsymbol{i}_1 + \dot{\psi}\boldsymbol{k}$;

(5) 刚体一般运动的角速度与定点运动类似，平面运动的角速度与定轴转动类似.

3.2 刚体的瞬时转轴是否一定存在

所谓刚体的瞬时转轴 (简称瞬轴) 是指在 t 时刻，刚体上如果有两点的瞬时 (绝对) 速度为零，那么这两点连线就是刚体的瞬时转轴.

显而易见，式 (4) 矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 的 $\det\boldsymbol{\Omega} = 0$；矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 特征值为零和一对纯虚根，因此其零空间是一维的，即直线. 由此可知:

(1) 刚体定点转动时，方程 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r}$ 有无穷多解，因此定点运动刚体瞬轴存在且唯一，与矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 共线.

(2) 刚体一般运动时，方程 $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O(\neq \boldsymbol{0})$ 可能无解，即可能不存在瞬心和瞬轴. 实例：作螺旋运动的炮弹，没有任何一点的瞬时速度为零.

(3) 刚体作平面 (Oxy 面内) 运动时，方程 $\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O(\neq \boldsymbol{0})$, 可以简化为

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{Ox} \\ -v_{Oy} \\ 0 \end{pmatrix}$$

解空间是一维，是垂直于 xy 平面的直线. 在 xy 平面上体现为一个点，即瞬心. 即平面运动的刚体瞬轴存在且唯一.

4 结　论

对角速度的认知从点的匀速圆周运动到刚体的定轴转动，从刚体的定轴转动到平面运动，从刚体的平面运动到定点运动及一般运动，历经了几次飞跃. 本文对刚体角速度进行分析和思考后有如下体会：角速度准确表达要用张量，如果不涉及左手系到右手系之间的变换，可以简便表达成矢量；角速度不一定能表示成角度对时间的导数；刚体是否存在瞬时转轴要具体看刚体的运动方式. 刚体角速度情况总结见表 1.

表 1　刚体角速度情况总结

研究对象	运动形式	准确/简便表达	角速度大小
一个点	圆周运动	标量/数量	$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$
刚体	定轴转动	矢量/标量	$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$
刚体	平面运动	矢量/标量	$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$
刚体	定点运动	张量/矢量	$\left\lvert\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta\boldsymbol{\beta}/\Delta t)\right\rvert$
刚体	一般运动	张量/矢量	$\left\lvert\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta\boldsymbol{\beta}/\Delta t)\right\rvert$

参 考 文 献

1 黄克智，薛明德，陆明万. 张量分析 (第 2 版). 北京：清华大学出版社，1986
2 李俊峰，张雄. 理论力学 (第 2 版). 北京：清华大学出版社，2010
3 周又和. 理论力学. 北京：高等教育出版社，2015
4 朱照宣，周起钊，殷金生. 理论力学. 北京：北京大学出版社，1982
5 周培源. 理论力学. 北京：科学出版社，1953
6 何钰. 理论力学. 武汉：华中科技大学出版社，2006
7 梅凤翔，刘桂林. 分析力学基础. 西安：西安交通大学出版社，1987

(责任编辑：周冬冬)