Q 搜索







欧拉角速度推导与不建议使用欧拉角的原因



摘要 欧拉角^Q速度指欧拉角对时间的微分与角速度的关系,用于刚体姿态运动学建模,本文从一种复杂但严谨(应该)的角度推导这一关系, 建议使用欧拉角来描述姿态。

欧拉角微分方程〇

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \sin\theta\dot{\psi} \\ \cos\phi\dot{\theta} + \sin\phi\cos\theta\dot{\psi} \\ -\sin\phi\dot{\theta} + \cos\phi\cos\theta\dot{\psi} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \vec{w}$$

其中 ϕ , θ , ψ 分别为横滚角、俯仰角、偏航角。

欧拉角微分方程推导

推导欧拉角微分方程有3种方法。第一种方法比较简单,好多教材里也都这么解释,可以参考欧拉角导数和角速度之间的转换关系推导-CSDN博客

另外两种方法用的都是根据旋转矩阵微分方程和旋转矩阵与欧拉角的关系来推导,可以参考

Angular Velocity expressed via Euler Angles -Physics Stack Exchange

【刚体运动】欧拉角时间导数与角速度 -知乎

下面写一下我对第一种方法的理解。把世界系和本体系分别记作 I,B,世界系I绕Z轴旋转 ψ 角后的坐标系记作Z,Z系绕Y轴旋转 θ 角I。从一个坐标系A到另一个坐标系B的旋转矩阵记作 R_{BA} ,即 $v^B=R_{BA}v^A,v^A=R_{AB}v^B$,A系与B系之间的角速度向量记作 w_{AB} ,f系下的坐标是一样的(有人不理解为什么一样的话我再补充)。首先可以直观地得到

$$\begin{aligned} w_{ZI}^Z &= w_{ZI}^I = [0 \quad 0 \quad \dot{\psi}]^{\mathrm{T}} \\ w_{YZ}^Y &= w_{YZ}^Z = [0 \quad \dot{\theta} \quad 0]^{\mathrm{T}} \\ w_{BY}^B &= w_{BY}^Y = [\dot{\phi} \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

三次旋转的旋转矩阵分别为

$$R_{ZI} = R_z(-\psi), R_{YZ} = R_y(-\theta), R_{BY} = R_x(-\phi)$$

于是



$$\begin{split} w_{ZI}^{B} &= R_{BY} \, R_{YZ} \, w_{ZI}^{Z} \\ w_{YZ}^{B} &= R_{BY} \, w_{YZ}^{Y} \\ w_{BI}^{B} &= w_{BY}^{B} + w_{YZ}^{B} + w_{ZI}^{B} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x} \left(-\phi \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{x} \left(-\phi \right) R_{y} \left(-\theta \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \sin \theta \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \cos \theta \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \sin \theta \dot{\psi} \\ \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \cos \theta \dot{\psi} \\ -\sin \phi \dot{\theta} + \cos \phi \cos \theta \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &= R_{x} \left(-\phi \right) \left(\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_{y} \left(-\theta \right) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_{z} \left(-\psi \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) \end{split}$$

下面写一下我想的另一种方法。由旋转矩阵微分方程可以得到角速度关于旋转矩阵的表达式 (旋转矩阵微分方程的推导见角速度变化时四元数和旋转矩阵微分方程的证明)

$$\dot{R}^{\mathrm{T}} = -\vec{w} \times R^{\mathrm{T}}$$
 $\vec{w}^{\times} = -\dot{R}^{\mathrm{T}}R$

或者

$$R^{\mathrm{T}}R = I$$

 $\dot{R}^{\mathrm{T}}R + R^{\mathrm{T}}\dot{R} = 0$
 $\vec{w}^{\times} = R^{\mathrm{T}}\dot{R}$

因为 R 可以看作是多元复合函数 $R(\phi(t),\theta(t),\psi(t))$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial R}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial R}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial R}{\partial \psi} \dot{\psi}$$

于是

$$ec{w}^{ imes} = R^{\mathrm{T}}\dot{R} = R^{\mathrm{T}}rac{\partial R}{\partial \phi}\dot{\phi} + R^{\mathrm{T}}rac{\partial R}{\partial heta}\dot{ heta} + R^{\mathrm{T}}rac{\partial R}{\partial \psi}\dot{\psi}$$

其中 $R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \phi}$, $R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \theta}$, $R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \psi}$ 是3个反对称矩阵,简单想想可以理解,因为 w^{\times} 是反对称矩阵,而 $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ 都是标量并且可以是任意值,那么时, $R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \phi}$ 一定是反对称矩阵,同理,3个矩阵都是反对称矩阵,并且分别对应角速度和欧拉角时间导数之间转换矩阵 T 的3列元素

$$\begin{split} \vec{w} &= T \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ \vec{w}^{\times} &= \begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \phi} & R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \theta} & R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ T &= \begin{bmatrix} \left(R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right)_{\times} & \left(R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)_{\times} & \left(R^{\mathrm{T}} \frac{\partial R}{\partial \psi} \right)_{\times} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{\times} & \begin{bmatrix} 0 & \sin{(\phi)} & \cos{(\phi)} \\ -\sin{(\phi)} & 0 & 0 \\ -\cos{(\phi)} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\times} & \begin{bmatrix} 0 & -\cos{(\phi)}\cos{(\theta)} & \sin{(\phi)}\cos{(\phi)} \\ \cos{(\phi)}\cos{(\theta)} & 0 & \sin{(\phi)}\cos{(\phi)} \\ -\sin{(\phi)}\cos{(\theta)} & -\sin{(\phi)}\cos{(\theta)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin{\theta} \\ 0 & \cos{\phi} & -\sin{\phi}\cos{\theta} \\ 0 & \sin{\phi} & \cos{\phi}\cos{\theta} \end{bmatrix} \end{split}$$

推导代码

下面的代码使用 sympy 推导转换矩阵 T

```
1 import sympy as sp
 2 phi, theta, psi = sp.symbols('\\phi, \\theta, \\psi')
   Rx = sp.Matrix([
     [1, 0, 0],
[0, sp.cos(phi), -sp.sin(phi)],
      [0, sp.sin(phi), sp.cos(phi)],
 6
 7
   ])
 8 Ry = sp.Matrix([
     [sp.cos(theta) , 0, sp.sin(theta)],
     [0 , 1, 0],
[-sp.sin(theta), 0, sp.cos(theta)],
10
11
12 ])
13 Rz = sp.Matrix([
    [sp.cos(psi), -sp.sin(psi), 0],
                                                            ~
```

另外使用这一代码时,只需要改代码第18行处3次旋转的顺序就可以方便地计算出气动角微分方程(见 攻角、侧滑角、倾侧角与欧拉角的关系

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & 1 & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} & 0 & \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \\ \cos \alpha \tan \beta & 1 & \sin \alpha \tan \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \vec{w}$$

仿真

仿真一下来验证sympy推导出的结果正确,将欧拉角微分方程的仿真结果与四元数微分方程的仿真结果比较。 使用欧拉角微分方程建模的被控对象代码如下

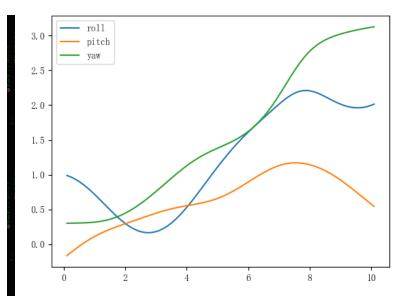
```
e1 = initEuler
14
             w1 = init0mega
15
             self._t = 0
16
             self._Jinv = np.linalg.inv(self._J)
17
             self._states = np.concatenate((e1, w1), dtype=float)
18
             self.ctrlLaw = lambda x: 0 # 控制律
19
20
         def Simulate_OneStep(self):
21
             h = 0.01
22
             K1 = self._ODE4Function(self._t, self._states)
23
             K2 = self._ODE4Function(self._t+h/2, self._states + h/2*K1)
24
             K3 = self._ODE4Function(self._t+h/2, self._states + h/2*K2)
25
             K4 = self._ODE4Function(self._t+h, self._states + h*K3)
26
             dx = h/6*(K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4)
27
             self._states += dx
28
29
         def Get_State(self):
30
            return self._states
31
         def Get_EulerVec(self):
32
            # q1 = Euler_To_Quaternion(self._states[0:3])
33
             # return Quaternion_to_Euler(q1)
34
             return self._states[0:3]
35
36
         def _ODE4Function(self, t, x):
37
             E, W = x[0:3], x[3:6]
38
             matTR = np.matrix([
39
                 [1, 0, -np.sin(E[1])],
40
                   [0, \quad \mathsf{np.cos}(\mathsf{E}[\textcolor{red}{0}])\,, \ \mathsf{np.sin}(\mathsf{E}[\textcolor{red}{0}])\,*\mathsf{np.cos}(\mathsf{E}[\textcolor{red}{1}])\,]\,, \\
41
                 [0, -np.sin(E[0]), np.cos(E[0])*np.cos(E[1])],
42
             ])
43
             # matTR = np.matrix([
44
                 [1, np.sin(E[0])*np.tan(E[1]), np.cos(E[0])*np.tan(E[1])],
45
                   [0, np.cos(E[0]), - np.sin(E[0])],
46
                   [0, np.sin(E[0]) / np.cos(E[1]), np.cos(E[0]) / np.cos(E[1])],
47
            # ])
48
             dE = np.linalg.inv(matTR) @ W
49
             # dE = matTR @ W
50
             torque = self.ctrlLaw(x)
51
             dW = self._Jinv @ (torque - np.cross(W, self._J @ W))[0]
52
             return np.concatenate((np.array(dE)[0], np.array(dW)[0]))
```

四元数微分方程代码见 刚体四元数姿态控制,

主程序如下

```
1 # main.py
   import numpy as np
   import matplotlib.pyplot as plt
   # from rigidbodyquaternion import RigidBody
 5
   from rigidbodyeuler import RigidBody
 6
   J = np.matrix([
 7
                [1, 0, 0],
 8
                [0, 10, 0],
9
               [0, 0, 3],
10 ])
11 | usv1 = RigidBody(J, np.array([1, -0.2, 0.3]), np.array([-0.1, 0.2, -0.3]))
12 t = 0
13 plottime, plotdata = [], []
14 | while t < 10:
                                                             ~
```

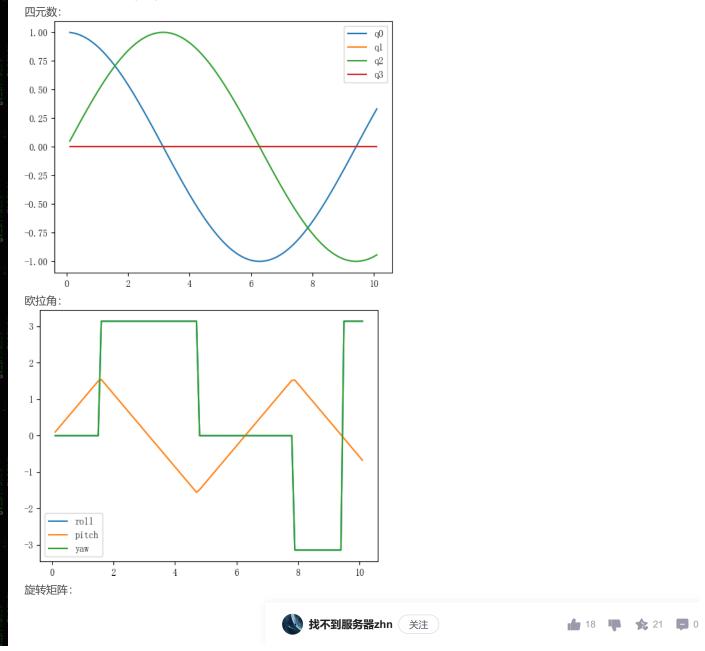
四元数和欧拉角微分方程的仿真结果相同, 如图所示。



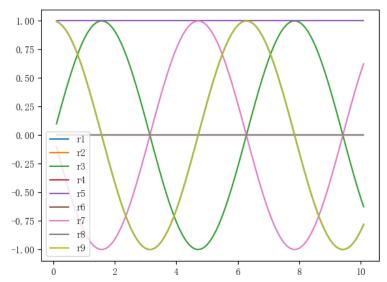
欧拉角的缺点

可以说欧拉角除了看上去更直观以外几乎没有任何优点了。本文从欧拉角微分方程的角度谈谈欧拉角的其中一个缺点:在限定的范围以外知道的是,四元数、欧拉角、旋转矩阵这三种描述姿态的方法之间可以互相换算,也几乎可以——对应,之所以说"几乎"就是因为,如果旋转f应关系就出了一些问题。

先看看当绕俯仰轴(Y轴)旋转一圈时,3种姿态表示方法的表现。



第5页 共10页 2024/6/24 19:55



由此可见,在大角度机动时欧拉角存在严重的不连续问题,应尽量避免使用。

画这3幅图使用四元数微分方程的代码,把控制律设成0,初始欧拉角为全0,初始角速度为 [0,1,0]。如果使用欧拉角微分方程,则需要把俯仰以内。也可以直接简单地使用欧拉角转一圈,同时转四元数和旋转矩阵出图,但此时我就发现了欧拉角转四元数的问题。

下面的代码是最常见的欧拉角转四元数的代码

```
def Euler_To_Quaternion(euler):
 2
        from numpy import sin, cos
 3
        cr = cos(euler[0] * 0.5)
        sr = sin(euler[0] * 0.5)
 4
        cp = cos(euler[1] * 0.5)
 5
        sp = sin(euler[1] * 0.5)
 6
 7
        cy = cos(euler[2] * 0.5)
 8
        sy = sin(euler[2] * 0.5)
 9
        q0 = cy * cp * cr + sy * sp * sr
10
        q1 = cy * cp * sr - sy * sp * cr
11
        q2 = sy * cp * sr + cy * sp * cr
        q3 = sy * cp * cr - cy * sp * sr
12
13
        return np.array([q0, q1, q2, q3])
```

这一代码出自下面这个公式

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\psi/2) \\ 0 \\ \sin(\psi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ 0 \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\cos(\psi/2) - \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) + \sin(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) \\ \cos(\phi/2)\cos(\theta/2)\sin(\psi/2) - \sin(\phi/2)\sin(\theta/2)\cos(\psi/2) \end{bmatrix}$$

同样地绕y轴转一圈看看欧拉角转四元数式(1)的表现。首先可以求出四元数随时间变化的解析解。设角速度为 $\vec{w}=[0,1,0]^{\rm T}$,四元数初值为 $[1,0,0,0]^{\rm T}$,代入四元数微分方程

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -w_x & -w_y & -w_z \\ w_x & 0 & w_z & -w_y \\ w_y & -w_z & 0 & w_x \\ w_z & w_y & -w_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}_1 = -0.5q_3 = 0$$

$$\dot{q}_3 = 0.5q_1 = 0$$

$$\dot{q}_2 = 0.5q_0$$

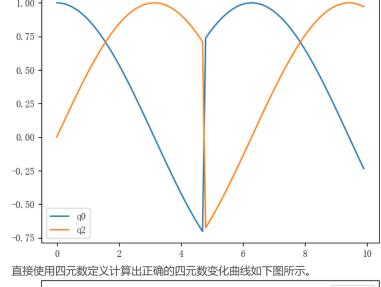
$$\ddot{q}_0 = -0.5\dot{q}_2 = -0.25q_0$$

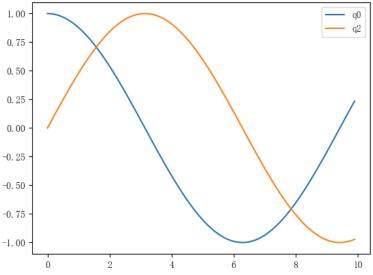
$$q_0(t) = C_1 \cos \frac{t}{2} + C_2 \sin \frac{t}{2} = \cos \frac{t}{2}$$

$$q_2(t) = \sin \frac{t}{2}$$

这个解也很直观地表现出四元数的变化过程,但是这个结果跟式(1)的不同之处在于少了横滚角 ϕ 和偏航角 ψ ,因此在大角度机动时根据式(1)连续了,这不是四元数的问题,而是式(1)的问题。

根据式(1)计算出的错误的四元数变化曲线如下图所示。





出图代码如下,其中 quaternions.py 的代码见 自用的四元数、欧拉角、旋转矩阵转换代码。

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from quaternions import *

找不到服务器zhn 关注

18 **4** 21 **5** 0

第7页 共10页 2024/6/24 19:55

```
plottime, plotq0, plotq2 = [], [], []
   for n1 in range(100):
      t = n1 * 0.1 # 角度从0到10弧度(4.7124弧度是-y轴)
 6
7
      vecx = np.array([np.cos(t), 0, -np.sin(t)]) # 组成旋转矩阵的x轴坐标
8
     vecy = np.array([0, 1, 0]) # 组成旋转矩阵的y轴坐标
9
     vecz = np.array([np.sin(t), 0, np.cos(t)]) # 组成旋转矩阵的z轴坐标
10
     R = np.vstack([vecx, vecy, vecz]).T # 旋转矩阵
11
     E = Rotation_to_Euler(R) # 由旋转矩阵计算欧拉角
12
     # Q = Euler_To_Quaternion(E) # 由欧拉角计算四元数 (有问题的转换公式)
13
       Q = [np.cos(t/2), 0, np.sin(t/2), 0] # 直接使用四元数定义 (正确的结果)
    plottime.append(t)
```

欧拉角速率和机体角速度转换

欧拉角速率和机体角速度转换的详细推导

机器人旋转矩阵与欧拉角转换公式

六轴机器人空间旋转矩阵与欧拉角之间转换公式,算法在实际应用中得到了验证。

TensorView for MATLAB: 使用欧拉角解码可视化张量

TensorView for MATLAB 是一个基于 GUI 的可视化工具,用于将二阶笛卡尔张量描述为三维分子模型上的表面。支持椭圆体和椭圆张量显示格式,该软件允许从常

基于欧拉角的万向联轴节速比关系推导

基于<mark>欧拉角</mark>的万向联轴节速比关系<mark>推导</mark>,李春明,,根据<mark>欧拉角</mark>在右手坐标系中<mark>推导</mark>的万向联轴节两轴之间转速关系,可修正教材中的公式。以主动轴为研究对象

方向余弦矩阵求欧拉角解算

方向余弦矩阵求欧拉角

欧拉角与四元数相互转换.docx

<mark>欧拉角</mark>与四元数相互转换知识点总结 一、四元数的定义和性质 * 四元数是一种数学概念,用于描述三维空间中的旋转和运动。 * 四元数可以用 q=[w, x, y, z]T 表示

人脸识别欧拉角及位移矩阵计算及求解

接下来,我们可以<mark>推导出欧拉角</mark>计算的公式: R = R1 * R2 * R3 其中,R 是总的旋转矩阵。 三、位移矩阵求解 位移矩阵是人脸识别中另一个关键步骤。位移矩阵:

欧拉角的概念理解和欧拉角旋转矩阵推导

gg 4332

欧拉角用来计算空间中刚体的旋转位置,目的是改变刚体的朝向. 具体来说,空间中有一个点p和一根轴k,点p绕轴k旋转8角度到p',求p'的坐标.这就是<mark>欧拉角</mark>要解决f

一步步推导由欧拉角到旋转矩阵的计算过程

相相□

文章目录为了便于理解,首先进行二维坐标系中的公式<mark>推导</mark>。如图坐标系OX1Y1OX 1Y 1OX1Y1经过逆时针旋转0\theta0角变换为坐标系OX2Y2OX 2Y 2OX2Y2

欧拉角速率与机体角速度转换详细推导

根据旋转矩阵及绕各个轴旋转的角<mark>速度,推导</mark>机体角<mark>速度</mark> 旋转矩阵旋转矩阵还不清楚的同学去看我的另一篇博客,这里咱们废话不多说,旋转矩阵已知 <mark>欧拉角</mark> 大

四元数与欧拉角的转换 两种大地坐标系下的欧拉角北东地坐标系下四元数与欧拉角的转换东北天坐标系下四元数与欧拉角的转换四元数计算不同坐标系下的欧拉角

文本(2024-06-23 161043).txt

文本(2024-06-23 161043).txt

PSO_VMD_MCKD 基于PSO_VMD_MCKD方法的风机轴承微弱函数.rar

PSO_VMD_MCKD 基于PSO_VMD_MCKD方法的风机轴承微弱故障诊断。为实现 VMD 和 MCKD 的参数自适应选择,采用粒子群优化算法对两种算法中的参数过

计算机软考高级真题2012年上半年 系统分析师 综合知识.docx

考试资料,计算机软考,系统分析师高级,历年真题资料,WORD版本,无水印,下载。

THE CACHE MEMORY BOOK

THE CACHE MEMORY BOOK

IMG_20240623_224516.jpg 最新发布

IMG_20240623_224516.jpg

sxs-win11.zip 是一个与 Windows 11 相关的压缩文件

bootstrap卡片排版这是Windows 11系统中sxs文件包的镜像,它适用于.NET 3.5的安装过程。。内容来源于网络分享,如有侵权请联系我删除。另外如果没有积分

paramiko-3.2.0-py3-none-any.zip

paramiko-3.2.0-py3-none-any.zip

欧拉角顺序为xyz,欧拉角速度和机体角速度的关系是

欧拉角是一种表示刚体运动状态的方式,欧拉角顺序为xyz







第8页 共10页 2024/6/24 19:55

