一种准确鲁棒的宽带信号 DOA 估计算法

徐正勤^{1,2} 伍世虔^{1,2} 刘清宇²

(武汉科技大学高性能钢铁材料及其应用湖北省协同创新中心 武汉 430081)¹ (武汉科技大学机械与自动化学院 武汉 430081)²

摘 要 信源的到达角(Direction of Arrive, DOA)信息在许多实际应用领域中具有重要作用,因此对 DOA 的准确估计是阵列信号处理领域的研究热点。针对传统信号子空间非相干处理方法(Incoherent Signals-subspace Method, ISM)在含有混响的低信噪比环境下对宽带信号进行 DOA 估计时存在的准确性低的问题,文中提出一种基于 ISM 算法的改进算法。该算法首先利用离散傅里叶变换将宽带信号分解为若干子频带;其次提出一种构建能量门限的方式,通过该能量门限筛选子频带并保留能量高于该门限的子频带;然后提出一种协方差矩阵重构方法,重构每一个子频带的协方差矩阵,通过 TLS-ESPRIT 算法估计每一个子频带的 DOA 参数;最后提出一种加权策略对多个子频带的DOA 估计值进行处理,得到最终的 DOA 估计值。实验结果表明,该算法可以有效地提高宽带信号 DOA 的准确性,并且具有较好的鲁棒性。

关键词 DOA估计,ISM,宽带信号,能量门限,能量加权,重构协方差矩阵

中图法分类号 TN911.72 文献标识码 A

Accurate and Robust Algorithm for Broadband Signal DOA Estimation

XU Zheng-qin^{1,2} WU Shi-qian^{1,2} LIU Qing-yu²

(Hubei Collaborative Innovation Center for Advanced Steels, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)¹
(School of Machinery and Automation, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)²

Abstract The Direction of Arrive (DOA) information of the source plays an important role in many practical applications. Therefore, it is a research hotspot to estimate the DOA accurately in the field of array signal processing. In view of the low accuracy of the traditional ISM(Incoherent Signals-subspace Method) for DOA estimation of broadband signals in a low SNR and reverberation condition, this paper presented an improved DOA estimation algorithm based on the ISM. Firstly, the wideband signal is decomposed into several sub-bands by discrete Fourier transform. Secondly, a way to construct an energy threshold is proposed by which the sub-band is filtered by the energy threshold and the sub-band with energy above the threshold is reserved. Thirdly, a covariance matrix reconstruction method is used to reconstruct the covariance matrix of each sub-band, and the DOA parameters of each sub-band are estimated by the TLS-ESPRIT algorithm. Finally, a weighting strategy is proposed to process the DOA estimates of multiple sub-bands and the final DOA is estimate accurately. The experimental results show that the proposed algorithm can effectively improve the accuracy of broadband signal DOA and has better robustness.

Keywords Direction of arrival estimate, Incoherent signals-subspace method, Broadband signal, Energy threshold, Energy weighted, Reconstruct the covariance matrix

1 引言

宽带信号源的到达角信息在许多实际应用中发挥着重要的作用,例如视频会议中的自动摄像机跟踪、噪声抑制、去混响技术中波束方向的调整等,因此它成为宽带阵列信号处理领域的研究热点[1-2]。根据宽带信号的特点,宽带信号源的DOA估计方法主要分为两类:最大似然法[3-4](Maximum Likelihood Method, MIM)和信号子空间法(Signal Subspace Method, SSM)。最大似然法估计是一种求解非线性最优的算法,具有准确度高的特点。但是该算法要求预知信号源个

数及信号源功率谱密度矩阵,而这些信息在实际工程中很难预先获取,导致应用受限。信号子空间法主要包括信号子空间相干处理方法(Coherent Signals-subspace Method, CSM)^[5-6]和信号子空间非相干处理方法(ISM)^[7-8]。CSM算法计算出的宽带 DOA 值准确度较高,但是需要构造聚焦矩阵并进行预估计,使得 DOA 估计精度受制于聚焦矩阵的构造质量并且聚焦过程运算量大,很难实现实时处理。ISM算法不需要进行聚焦处理,运算速度快。基于这一特点,本文选择 ISM 方法处理宽带信号。

传统的 ISM 算法是将宽带信号分解为多个不重叠频带

徐正勤(1992一),男,硕士,主要研究方向为智能机器人;**伍世虔**(1964一),男,博士,教授,主要研究方向为机器视觉、机器学习、智能机器人及公共安全与视频技术,E-mail;shiqian. wu@wust. edu. cn(通信作者)。

本文受国家自然科学基金项目(51805381)资助。

上的窄带信号,然后对每个频带进行窄带信号 DOA 估计得 到 DOA 估计值,再通过对这些初始 DOA 估计值进行组合得 到最终的 DOA 估计值。但是由于信号在各子频带的能量不 同,导致各子频带的信噪比(SNR)也不同,使得各子频带得到 的 DOA 估计值的精度存在差异。过去人们常常忽略这种差 异,或者只简单地使用求平均值的方法求得最终的 DOA 估 计值[9]。文献[10]考虑到低信噪比的频带估计出的 DOA 可 能不够精确,导致通过算数平均得到的最终估计结果的准确 性降低,因此选择具有最大能量的子频带估计的 DOA 作为 最终的 DOA 结果。采用这种方法可以有效地提高 DOA 估 计准确度,但是在低信噪比条件下会因为其他窄带信号的信 息没有得到充分利用而导致 DOA 估计的准确度较不足。文 献[11]考虑到信号在各频点的差异,提出了一种基于能量加 权的算法,有效地提高了 DOA 估计的准确度。但是在低信 噪比环境中某些子频带估计出的 DOA 会产生较大误差,因 此采取这样的方法会赋予权重给这些误差较大的 DOA,进而 导致算法的精度与鲁棒性下降。针对这些问题,本文提出一 种基于能量门限筛选后再加权的改进算法。该算法先通过能 量门限筛选掉不符合要求的子频带,然后对剩下的子频带得 到的 DOA 进行加权得到最终的 DOA 估计值。这样既能使 其他的子频带的信息得到充分应用,又能减少含有误差过大 的 DOA 估计值的子频带对最终结果造成的影响。

对于每一个子频带信号,使用的窄带信号 DOA 估计算 法通常为多重信号分类(MUltiple SIgnal Classification, MU-SIC)算法[12-13] 和 ESPRIT(Estimating Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques)算法。MUSIC 算法[14] 是利 用接收数据的协方差矩阵的信号子空间与噪声子空间的正交 特性估计 DOA,具有 DOA 估计值准确度高的特点,但是需要 进行谱峰搜索,导致该算法具有计算量大、硬件要求高的缺 点。而 ESPRIT 算法[15] 是利用信号子空间的旋转不变性估 计 DOA。该算法由于其计算速度快、硬件要求低的特点得到 了广泛的应用[16-17]。TLS-ESPRIT 算法[17] 基于总体最小二 乘的思想提高了 ESPRIT 算法的 DOA 估计精度,并使计算 速度更快。然而在含有混响的低信噪比环境中, TLS-ES-PRIT 算法的 DOA 估计精度较差,鲁棒性较差,导致很难准 确可靠地获取源信号 DOA 参数。针对这一问题,本文提出 了一种改进的 TLS-ESPRIT 算法。该算法通过利用共轭思 想对收集数据的协方差矩阵进行重构,然后再进行 DOA 估 计。这样有效地提高了算法在含有混响的低信噪比环境下的 准确性和鲁棒性。

本文提出一种准确鲁棒的宽带信号 DOA 估计算法。该算法主要由以下几个部分组成:1)利用能量门限筛选由宽带信号分解的多个子频带,保留能量高于该门限的子频带;2)对于每一个符合要求的子频带利用共轭的思想对其协方差矩阵进行重构,然后通过 TLS-ESPRIT 算法估计 DOA;3)对得到的多个子频带的 DOA 估计值进行加权处理,得到最终的DOA 估计值。通过实验验证,本文提出的算法可以有效地提高算法精度且具有较好的鲁棒性。

2 宽带信号模型

假设有N个带宽为B的相互独立的远场宽带信号入射到阵元数为M、阵元间距为d的均匀线阵(Uniform Linear

Array, ULA)上,第n个信号的到达角 θ_n ($n=1,2,\cdots,N$)定义为该信号人射方向与阵列法线方向的夹角。信号在介质中的传播速度为c。第m个阵元的接收数据为:

$$x_m(t) = \sum_{n=1}^{N} s_n(t - \tau_{nm}) + n_m(t), m = 1, 2, \cdots, M$$
 (1) 其中, $s_n(t)$ 为第 n 个信号的时域表达式, $n_m(t)$ 为第 m 个阵元 接收的噪声信号, $\tau_{n,m}$ 为第 n 个信号到达第 m 个阵元时相对于第一个阵元的时延,定义式如下:

$$\tau_{n m} = \frac{1}{c} (m-1) d \sin \theta_n \tag{2}$$

假设宽带信号的观测时间为 T_0 ,将其分为 K 个子段,每段时间为 T_d ,对每段宽带信号进行 J 点的离散傅里叶变换,就可以得到如下的宽带模型:

$$\boldsymbol{X}_{k}(f_{j}) = \boldsymbol{A}(f_{j})\boldsymbol{S}_{k}(f_{j}) + \boldsymbol{N}_{k}(f_{j})$$
(3)

其中, $X_k(f_j)$, $S_k(f_j)$, $N_k(f_j)$ 分别表示第 k 个子段中频率为 f_j 的接收数据、信号和噪声的离散傅里叶变换, $k=1,2,\cdots$, $K,j=1,2,\cdots$, $J,A(f_i)$ 为阵列流形矩阵,其表达式为:

$$\mathbf{A}(f_j) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1(f_j) & \mathbf{a}_2(f_j) & \cdots & \mathbf{a}_N(f_j) \end{bmatrix}$$
(4)

$$\boldsymbol{a}_{n}(f_{j}) = \left[e^{-i2\pi f_{j}\tau_{1n}} e^{-i2\pi f_{j}\tau_{2n}} \cdots e^{-i2\pi f_{j}\tau_{Mn}} \right]^{T}$$

$$(5)$$

其中, $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, $\mathbf{a}_n(f_i)$ 是第n个信号的方向向量。这样就将带宽为B的信号划分为J个子频带,且对于频率为 f_1 , f_2 ,..., f_J 的每一个子频带,式(3)均成立。

3 一种准确鲁棒的宽带信号 DOA 估计算法

3.1 算法总体思想

本文算法是将宽带数据分成不重叠的 J 个子频带,每个子频带均为窄带信号;求每个子频带的能量值,并通过构建能量门限去掉低于能量门限的子频带,得到 ΔJ 个符合要求的子频带;利用基于共轭信息的协方差矩阵重构法构建每一个符合要求的子频带的协方差矩阵,并通过 TLS-ESPRIT 算法估计 DOA;对于得到的 ΔJ 个 DOA 估计值利用基于能量的加权策略得到最终的 DOA 估计值。算法流程如图 1 所示。

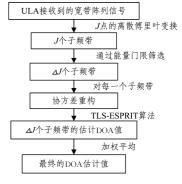


图 1 算法流程图

3.2 构建能量门限筛选子频带

根据式(3)可知,频率为 f_i 的接收数据的能量为:

$$W_j = \sum_{1}^{M} \mathbf{x}_m(f_j) \mathbf{x}_m^{\mathrm{H}}(f_j)$$
 (6)

其中, $\mathbf{x}_m(f_j) = [\mathbf{x}_{1m}(f_j), \mathbf{x}_{2m}(f_j), \cdots, \mathbf{x}_{Km}(f_j)], \mathbf{x}_{km}(f_j)(k=1,2,\cdots,K)$ 表示第 m 个阵元接收的第 k 个子段中频率为 f_j 的接收数据,H 表示共轭转置。则能量门限 W_T 可表示为:

$$W_T = \frac{W_1 + W_2 + \dots + W_J}{I} \tag{7}$$

若某一子频带的能量大于 W_T ,则对其进行 DOA 估计,若某一子频带的能量小于 W_T ,则将其舍去。

比较能量门限筛选方法和原始方法 DOA 估计值所对应 的均方根误差。实验条件为: 选取一个频率范围为0~ 100 Hz 的线性调频信号,以 30°的入射角入射到阵元数目为 8、阵元间距为最小波长一半的均匀线性阵列上,划分子带数 目为 50。通过人工添加均值为 0、标准差为 σ 的高斯噪声得 到不同信噪比的信号。进行 100 次 Monte Carlo 仿真实验, 比较结果如图 2 所示。

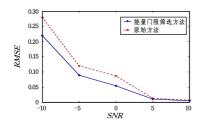


图 2 能量门限筛选方法和原始方法 DOA 估计值的均方根误差对比

从图 2 可知,能量门限筛选方法的均方根误差要小于原 始方法的均方根误差,特别是当 SNR<5 dB 时,这种对比更 加明显。因此,通过设定能量门限,舍弃能量小于门限的子频 带,对能量大于门限的子频带进行 DOA 估计可有效地提高 最终 DOA 估计值的准确度。但是在低信噪比(SNR < -5dB)条件下,随着 SNR 的降低,能量门限筛选方法和原始 方法的 RMSE 差距并没有扩大。因此,将进一步提高 DOA 估计的准确性。

3.3 重构协方差矩阵

假设经过该能量门限筛选后, ΔJ 个子频带得以保留,然 后对于每一个子频带,采用 TLS-ESPRIT 算法估计其中信号 的 DOA。

根据式(3)可知,频率为 f_i 的子频带对应的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_{x}(f_{j}) = E[\mathbf{X}(f_{j})\mathbf{X}^{H}(f_{j})]$$

$$= \mathbf{A}(f_{j}) E[\mathbf{S}(f_{j})\mathbf{S}^{H}(f_{j})]\mathbf{A}^{H}(f_{j}) + E[\mathbf{N}(f_{j})]$$

$$= \mathbf{N}^{H}(f_{j})]$$

$$= \mathbf{A}(f_{j})\mathbf{R}_{S}(f_{j})\mathbf{A}^{H}(f_{j}) + \mathbf{R}_{S}(f_{j})$$
(8)

其中,
$$\begin{cases} \mathbf{X}(f_j) = [\mathbf{X}_1(f_j), \mathbf{X}_2(f_j), \cdots, \mathbf{X}_K(f_j)] \\ \mathbf{S}(f_j) = [\mathbf{S}_1(f_j), \mathbf{S}_2(f_j), \cdots, \mathbf{S}_K(f_j)] \\ \mathbf{N}(f_j) = [\mathbf{N}_1(f_j), \mathbf{N}_2(f_j), \cdots, \mathbf{N}_K(f_j)] \end{cases}$$
, 且 $\mathbf{R}_S(f_j)$ 和

 $\mathbf{R}_{S}(f_{i})$ 分别是频率为 f_{i} 的子频带中的信号协方差矩阵和噪 声协方差矩阵。对其进行特征值分解得:

$$\mathbf{R}_{x}(f_{j}) = \mathbf{U}(f_{j}) \mathbf{\Sigma}(f_{j}) \mathbf{U}^{\mathrm{H}}(f_{j})$$
 (9)
其中, $\mathbf{\Sigma}(f_{j})$ 是由 $\mathbf{R}_{x}(f_{j})$ 的特征值 $\lambda_{1}(f_{j}), \lambda_{2}(f_{j}), \dots, \lambda_{M}(f_{j})$
构成的对角矩阵,其表示为 $\mathbf{\Sigma}(f_{j}) = diag\{\lambda_{1}(f_{j}), \lambda_{2}(f_{j}), \dots, \lambda_{M}(f_{j})\}$ 。如果噪声为高斯白噪声,且噪声功率为 σ^{2} ,则

构成的对角矩阵,其表示为 $\Sigma(f_i) = diag\{\lambda_1(f_i), \lambda_2(f_i), \cdots,$ $\lambda_M(f_i)$ 。如果噪声为高斯白噪声,且噪声功率为 σ^2 ,则 $\Sigma(f_i)$ 中元素满足:

$$\lambda_{1}(f_{j}) \geqslant \lambda_{2}(f_{j}) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{N}(f_{j}) > \lambda_{N+1}(f_{j}) = \cdots = \lambda_{M}(f_{j})$$

$$= \sigma^{2}$$
(10)

其中,由大特征值 $\lambda_1(f_i)$, $\lambda_2(f_i)$,····, $\lambda_N(f_i)$ 对应的特征向量 构成信号子空间 $U_s(f_i)$ 可以表达为 $U_s(f_i) = [\lambda_1(f_i),$ $\lambda_2(f_i)$, …, $\lambda_N(f_i)$], 由 小 特 征 值 $\lambda_{N+1}(f_i)$, $\lambda_{N+2}(f_i)$, …, $\lambda_M(f_i)$ 对应的特征向量构成噪声子空间 $U_n(f_i)$ 可以表达为 $U_n(f_j) = [u_{N+1}(f_j), u_{N+2}(f_j), \cdots, u_M(f_j)]_{\circ}$ 分别取 $U_s(f_j)$ 的前 M-1 行和后 M-1 行构建矩阵 $U_{s1}(f_i)$ 和 $U_{s2}(f_i)$,定义 矩阵 $U_{s12}(f_j) = [U_{s1}(f_j)|U_{s2}(f_j)]$,对 $U_{s12}(f_j)U_{s12}^{H}(f_j)$ 进行 特征分解得:

$$\boldsymbol{U}_{s12}(f_j)\boldsymbol{U}_{s12}^{\mathrm{H}}(f_j) = \boldsymbol{E}(f_j) \boldsymbol{\Sigma}^{(f_j)} \boldsymbol{E}^{\mathrm{H}}(f_j)$$
(11)

其中, $\Sigma(f_i)$ 是由特征值组成的 $2N \times 2N$ 维的矩阵, $E(f_i)$ 是 与其相应的特征向量构成的 $2N \times 2N$ 维的矩阵,表示为:

$$\mathbf{E}(f_j) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11}(f_j) & \mathbf{E}_{12}(f_j) \\ \mathbf{E}_{21}(f_j) & \mathbf{E}_{22}(f_j) \end{bmatrix}$$
(12)

其中, $\mathbf{E}_{ii}(f_i)(i=1,2;j=1,2)$ 均为 $N\times N$ 维的矩阵。通过文 献[18]可知:

$$\Psi_{\text{TLS}} = -E_{21}(f_j)E_{22}^{-1}(f_j)$$
(13)

对 Ψ_{TLS} 进行特征值分解,得到特征值 $\lambda_n(f_i) = e^{i2\pi f_i + d \sin\theta_n}$ $(n=1,2,\cdots,N)$,从而可以得到频率为 f_i 的子频带中 N 个信 号的 DOA。

在噪声和信号互不相关的理想环境下,利用子空间的正 交特性得到的信号子空间 $U_s(f_i)$ 中的数据是纯净的,进而通 过 TLS-ESPRIT 算法可以估计出精确的 DOA。但是在含有 混响的低信噪比环境中,噪声和信号并不是互不相关的,利用 子空间正交特性得到的信号子空间 $U_s(f_i)$ 中的数据会受到 污染并最终导致通过 TLS-ESPRIT 算法估计出的 DOA 准确 度下降。基于文献[19-20]的思想,对式(8)中的协方差矩阵 $\mathbf{R}_{s}(f_{i})$ 进行重构,然后通过 TLS-ESPRIT 算法估计信号 DOA 实现算法精度的提高。

式(3)的共轭形式为:

$$\overline{X_k}(f_j) = \overline{A}(f_j)\overline{S_k}(f_j) + \overline{N_k}(f_j)$$
(14)

其中,"一"表示矩阵中的每个元素取共轭。定义变化矩阵 F

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 (15)

F 为一对称矩阵且 $F^2 = I$, I 为单位矩阵。因此, $FX(f_i)$ 的协方差矩阵 $\mathbf{R}_{\bar{x}}(f_i)$ 为:

$$\mathbf{R}_{\bar{x}}(f_{j}) = E[\mathbf{F}\bar{\mathbf{X}}(f_{j})\bar{\mathbf{X}}^{\mathrm{H}}(f_{j})\mathbf{F}] = \mathbf{F}\bar{\mathbf{A}}(f_{j})\bar{\mathbf{R}}_{\mathrm{S}}(f_{j})\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_{j})$$

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}\bar{\mathbf{R}}_{\mathrm{S}}(f_{j})\mathbf{F} = \mathbf{F}\bar{\mathbf{R}}_{x}(f_{j})\mathbf{F}$$
(16)

我们定义矩阵 $\mathbf{R}_{x\bar{x}}(f_i)$ 为:

 $\mathbf{R}_{x\bar{x}}(f_i) = \mathbf{R}_x(f_i) + \mathbf{R}_{\bar{x}}(f_i) = \mathbf{R}_x(f_i) + \mathbf{F}\mathbf{R}_x(f_i)\mathbf{F}$ (17) 根据接下来的证明可知, $\mathbf{A}(f_i)\mathbf{R}_{\mathrm{S}}(f_i)\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_i)$, $\mathbf{F}\overline{\mathbf{A}}(f_i)$ $\overline{\mathbf{R}_{\mathrm{S}}}(f_{i})\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_{i})\mathbf{F} \approx \mathbf{A}(f_{i})\mathbf{R}_{\mathrm{S}}(f_{i})\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_{i}) + \mathbf{F}\overline{\mathbf{A}}(f_{i})\overline{\mathbf{R}_{\mathrm{S}}}(f_{i})$ $\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_i)\mathbf{F}$ 具有相同的信号子空间。因 此,将 $\mathbf{R}_{x\bar{x}}$ (f_i) 代 入 式(9)一式(13)可以得到频率为 f_i 的子频带中 N 个信号更 精确的 DOA 估计值。

具体证明过程如下:

由文献[20]可知,对于任何 $\frac{1}{c}d\sin\theta_1,\frac{1}{c}d\sin\theta_2,\cdots,\frac{1}{c}d$ $\sin\theta_N$,存在 g_0 , g_1 ,…, g_{M-1} ,使得 $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{c}d\sin\theta_1}$, $z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{c}d\sin\theta_2}$,…, $z_N = e^{i\frac{1}{\epsilon}d\sin\theta_N}$ 是多项式:

$$P(z) = g_0 + g_1 z + \dots + g_{M-1} z^{M-1} = 0$$
(18)

的根。根据 z 的表达式可知:

$$\overline{z_n} = z_n^{-1}, n = 1, 2, \dots, N$$
 (19)

定义多项式 Q(z)为:

 $Q(z) = z^{M-1} \overline{P(z)} = \overline{g_{M-1}} + \overline{g_{N-2}} z + \dots + \overline{g_0} z^{M-1} = 0 \quad (20)$

根据式(18)一式(20)可知 P(z)和 Q(z)具有相同的根。

通过比较这两个多项式的系数,可知:

$$\frac{g_m}{g_{M-1-m}} = \frac{g_{M-1}}{\overline{g_0}}, m = 0, 1, 2, \dots, M-1$$
 (21)

根据式(18)和式(21),如果定义

$$b_m = g_m (\overline{g_0}/g_{M-1})^{1/2} \tag{22}$$

则对于任何 $\frac{1}{c}d\sin\theta_1$, $\frac{1}{c}d\sin\theta_2$, \cdots , $\frac{1}{c}d\sin\theta_N$, 均满足:

$$b_0 + b_1 e^{i\frac{1}{c}d\sin\theta_n} + \dots + b_{M-1} e^{i\frac{1}{c}d(M-1)\sin\theta_n} = 0, n = 1, 2, \dots, N$$
(23)

并且很容易推导出 $b_m = b_{M-1-m}, m=0,1,2,\dots,M-1$,该等式 可改写为:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F} \, \bar{\boldsymbol{b}} \tag{24}$$

其中, $\boldsymbol{b} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{M-1}]^T$, \boldsymbol{F} 是式(15)所定义的转换矩阵。 令 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_M)$ 为 $\mathbf{A}(f_i)\mathbf{R}_S(f_i)\mathbf{A}^H(f_i)$ 的特征值 为 0 所对应的特征向量,若 $rank\{\mathbf{R}_{S}(f_{i})\}=N$,当且仅当 $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_i)\mathbf{v}=0$ 时, $\mathbf{A}(f_i)\mathbf{R}_{\mathrm{S}}(f_i)\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_i)\mathbf{v}=0$,然后可推导出:

$$v_1 + v_2 e^{i\frac{1}{\epsilon}d\sin\theta_n} + \dots + v_M e^{i\frac{1}{\epsilon}d(M-1)\sin\theta_n} = 0$$
 (25)

式(25)的共轭形式为:

$$\overline{v_1} + \overline{v_2} e^{-i\frac{1}{\epsilon}d\sin\theta_n} + \dots + \overline{v_M} e^{-i\frac{1}{\epsilon}d(M-1)\sin\theta_n} = 0$$
 (26)

式(26)乘以 $e^{i\frac{1}{c}d(M-1)\sin\theta_n}$ 得

$$\overline{v_1} e^{i\frac{1}{c}d(M-1)\sin\theta_n} + \overline{v_2} e^{i\frac{1}{c}d(M-2)\sin\theta_n} + \dots + \overline{v_M} = 0$$
 (27)

式(27)的共轭形式为:

$$v_1 e^{-i\frac{1}{c}d(M-1)\sin\theta_n} + v_2 e^{-i\frac{1}{c}d(M-2)\sin\theta_n} + \dots + v_M = 0$$
 (28)

式(28)与 $\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_i)\mathbf{F}\mathbf{v}=0$ 等价,同理可证 $\mathbf{F}\overline{\mathbf{A}}(f_i)\overline{\mathbf{R}_{\mathrm{S}}}(f_i)$ $\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_{j})\mathbf{F}\mathbf{v}=0$ 。根据式(24)可知,存在复常数 h 使得 $\mathbf{b}=h\mathbf{v}$, 式中b=Fb。因此很容易推导出:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_{j})\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_{j})\mathbf{b} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}\overline{\mathbf{A}}(f_{j})\overline{\mathbf{R}_{S}}(f_{j})\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_{j})\mathbf{F}\mathbf{F}\overline{\mathbf{b}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}\overline{\mathbf{A}}(f_{i})\overline{\mathbf{R}_{S}}(f_{i})\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_{i})\mathbf{v} = 0$$
(29)

由此可知, $\mathbf{A}(f_i)\mathbf{R}_{\mathrm{S}}(f_i)\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_i)$, $\mathbf{F}\overline{\mathbf{A}}(f_i)\overline{\mathbf{R}_{\mathrm{S}}}(f_i)\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_i)\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{A}(f_j)\mathbf{R}_{\mathrm{S}}(f_j)\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_j)+\mathbf{F}\overline{\mathbf{A}}(f_j)\overline{\mathbf{R}_{\mathrm{S}}}(f_j)\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_j)\mathbf{F}$ 的零空间是 相同得。因此我们可以进一步推导出 $\mathbf{A}(f_i)\mathbf{R}_{\mathrm{S}}(f_i)\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_i)$, $F\overline{A}(f_i)\overline{R}_S(f_i)\overline{A}^H(f_i)F$ $A(f_i)R_S(f_i)A^H(f_i)+F\overline{A}(f_i)$ $\mathbf{R}_{s}(f_{i})\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{H}}(f_{i})\mathbf{F}$ 的信号子空间也是相同的。

 $\mathbf{A}(f_i)\mathbf{R}_{\mathrm{S}}(f_i)\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(f_i)$ 的特征值为 $\lambda_1(f_i) \geqslant \lambda_2(f_i) \geqslant \cdots \geqslant$ $\lambda_N(f_i) > \lambda_{N+1}(f_i) = \cdots = \lambda_M(f_i), e_1, e_2, \cdots, e_M$ 为对应的特征 向量,其矩阵形式可定义为 $\mathbf{E}_s = (e_1, \cdots, e_N), \mathbf{E}_n = (e_{N+1}, \cdots, e_N)$ $e_{\rm M}$)。 $A(f_i)R_{\rm S}(f_i)A^{\rm H}(f_i)+F\overline{A}(f_i)\overline{R_{\rm S}}(f_i)\overline{A}^{\rm H}(f_i)F$ 的特征 值为 $\mu_1(f_j) \geqslant \mu_2(f_j) \geqslant \cdots \geqslant \mu_N(f_j) > \mu_{N+1}(f_j) = \cdots =$ $\mu_{M}(f_{i}), w_{1}, w_{2}, \cdots, w_{M}$ 为对应的特征向量,其矩阵的形式可 定义为 $T_s = (w_1, \dots, w_N), T_n = (w_{N+1}, \dots, w_M), X(f_j)X^H(f_j)$ 的特征值为 $\hat{\lambda}_1(f_i) \geqslant \hat{\lambda}_2(f_i) \geqslant \cdots \geqslant \hat{\lambda}_N(f_i) > \hat{\lambda}_{N+1}(f_i) = \cdots =$ $\hat{\lambda}_{M}(f_{i}), \hat{\phi}_{e_{1}}^{h}, \hat{\phi}_{e_{2}}^{h}, \cdots, \hat{\phi}_{e_{M}}^{h}$ 为对应的特征向量,其矩阵形式可定 $\overset{\wedge}{\mathbf{X}}\overset{\wedge}{\mathbf{E}}_{s} = (\hat{e}_{1}, \cdots, \hat{e}_{N}), \overset{\wedge}{\mathbf{E}}_{n} = (\hat{e}_{N+1}, \cdots, \hat{e}_{M}), \overset{\wedge}{\mathbf{X}}(f_{i})\mathbf{X}^{\mathsf{H}}(f_{i}) + (\hat{e}_{N}), \overset{\wedge}{\mathbf{X}}(f_{i}) + (\hat{e}_{N}), \overset{\wedge}{\mathbf{X}}(f_$ $\mathbf{F}\overline{\mathbf{X}}(f_i)\overline{\mathbf{X}}^{\mathrm{H}}(f_i)\mathbf{F}$ 的特征值为 $\overset{\wedge}{\mu_1}(f_i)\geqslant \overset{\wedge}{\mu_2}(f_i)\geqslant \cdots \geqslant \overset{\wedge}{\mu_N}(f_i)>$ $\stackrel{\wedge}{\mu}_{N+1}(f_i) = \cdots = \stackrel{\wedge}{\mu}_M(f_i), \stackrel{\wedge}{\omega}_1, \stackrel{\wedge}{\omega}_2, \cdots, \stackrel{\wedge}{\omega}_M$ 为对应的特征向量, 其矩阵形式可定义为 $\mathbf{T}_s = (\stackrel{\wedge}{w}_1, \cdots, \stackrel{\wedge}{w}_N), \stackrel{\wedge}{\mathbf{T}}_n = (\stackrel{\wedge}{w}_{N+1}, \cdots, \stackrel{\wedge}{w}_M)$ 。 很容易推导出:

$$\boldsymbol{a}_{n}^{\mathrm{T}}(f_{j})\boldsymbol{E}_{n} = 0 \Leftrightarrow C_{n} = \boldsymbol{a}_{n}^{\mathrm{T}}(f_{j})\boldsymbol{E}_{n}\boldsymbol{E}_{n}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{a}}_{n}(f_{j}) = 0$$
(30)

$$\boldsymbol{a}_{n}^{\mathrm{T}}(f_{j})T_{n}=0 \Leftrightarrow D_{n}=\boldsymbol{a}_{n}^{\mathrm{T}}(f_{j})\boldsymbol{T}_{n}\boldsymbol{T}_{n}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{a}}_{n}(f_{j})=0$$
(31)

其中, $a_n(f_i)$ 如式(5)所定义。但是在含混响的低信噪比的实 际环境中我们无法准确得到 E_{i} 和 T_{i} ,因此分别使用 E_{i} 和 T_{i} 去估计 E_n 和 T_n 。根据文献 [19] 的思想,可以利用 E_n 和 T_n 的参数得到 $b_1, b_2, \dots, b_M,$ 并利用式(32)估计 $e^{i\frac{1}{c}d\sin\theta_n}$:

$$B(z) = \stackrel{\wedge}{b_1} + \stackrel{\wedge}{b_2} z + \dots + \stackrel{\wedge}{b_M} z^{M-1} = 0$$
 (32)
其中,系数的选取可以满足与式(23)相似的约束条件。众所
图如 约束件计以天约束件计更难确有效。图此 式(22)很到

周知,约束估计比无约束估计更准确有效。因此,式(32)得到 的估计结果更接近于信号真实的 DOA。

比较重构协方差 TLS-ESPRIT 算法和原始 TLS-ES-PRIT 算法 DOA 估计值所对应的均方根误差。实验条件为: 选取一个频率范围为 0~100 Hz 的线性调频信号,以 30°的入 射角入射到阵元数目为8、阵元间距为最小波长一半的均匀 线性阵列上,并将其划分为50条子带。选择其中的一条子频 带信号,通过人工添加均值为0、标准差为 σ 的高斯噪声得到 不含混响条件下的不同信噪比的信号。将该条子带信号导入 虚拟房间(假设该虚拟房间的长度为4m,宽度为4m,高度为 3m,墙面的声音反射系数为 0.25, 且均匀线性阵列位于房间 正中心),构建混响模型增加混响,然后添加高斯噪声得到含 有混响条件下的不同信噪比的信号。在不含混响条件下和含 混响条件下分别进行 100 次 Monte Carlo 仿真实验,比较结 果如图 3 所示。

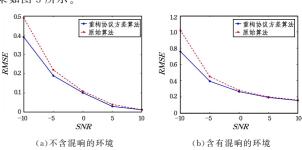


图 3 重构协方差 TLS-ESPRIT 算法和原始 TLS-ESPRIT 算法 DOA 估计值的均方根误差对比

从图 3 可知,无论环境中是否含有混响噪声,重构协方差 TLS-ESPRIT 算法的均方根误差均要小于原始方法的均方根 误差。从图 3(a)可知,在不含混响噪声的环境中,重构协方 差 TLS-ESPRIT 算法与原始算法 DOA 估计值的均方根误差 逐渐接近,当 SNR>0 dB 时,重构协方差 TLS-ESPRIT 算法 和原始算法差别不大。从图 3(b)可知,在含有混响噪声的环 境中,这种变化趋势依然存在。当 SNR=-10 dB 时,无混响 噪声环境中重构协方差对于 DOA 估计的均方根误差的提升 为 0.1, 而含有混响噪声的环境中重构协方差对于 DOA 估计 的均方根误差的提升为 0,27,由此可知,重构协方差矩阵在 含有混响噪声的环境中对于 DOA 估计的准确度提升更为明 显。因此,通过重构协方差矩阵可以有效地提升包含混响的 低信噪比环境下的单一子频带的 DOA 估计值准确性。

3.4 基于能量的加权平均

对于经过能量门限筛选后得到的 ΔJ 个子频带,通过重 构协方差 TLS-ESPRIT 算法可以得到 ΔJ 组信号的 DOA 估 计值 $\theta_{\Delta in}$ ($\Delta i = 1, 2, \dots, \Delta J, n = 1, 2, \dots, N$)。为了进一步提高 最终 DOA 估计值的准确性,对该 ΔJ 组数据进行加权。最终 的 DOA 估计值 $\Delta\theta_n$ $(n=1,2,\dots,N)$ 为:

$$\Delta\theta_n = \sum_{\Delta j=1}^{\Delta J} \frac{W_{\Delta j}}{W_1 + W_2 + \dots + W_{\Delta J}} \theta_{\Delta jn}$$
(33)

由式(33)可知,能量越大的子频带权重越大,能量越少的子频带权重越小,这意味着能量越大的子频带得到的 DOA 估计值可信度越高,反之,能量越小的子频带得到的 DOA 估计值可信度越低。这样使得最终 DOA 估计值具有更好的准确性。

本文所提出的一种准确鲁棒的宽带信号 DOA 估计算法的步骤为:1)将接收数据矩阵在时域上分为 K 段,对每段数据进行离散傅里叶变换;2)计算频率为 f_j 快拍数为 K 的子频带的能量 W_j ,并根据式(7)得到的能量门限筛选出 ΔJ 个子频带;3)对于每一个子频带利用式(17)构建协方差矩阵 $\mathbf{R}_{x\bar{x}}(f_j)$,再由式(8)一式(13)得到相应的 DOA;4)利用式(33)进行加权得到最终的 DOA 估计值 $\Delta\theta_n$ 。

4 实验结果

为了验证所提算法的有效性,本文采取的实验条件为:两个线性调频信号,频率范围分别为:0~100 Hz 和 100~200 Hz; 入射到均匀线性阵列上的 DOA 分别为 30°和 60°,该阵列的阵元数目为 8,阵元间距取最小波长的一半;划分子带数目为50。该实验的噪声由高斯噪声和混响噪声组成。假设高斯噪声遵循平均值为 0 和标准差为 σ 的正态分布。通过人工添加高斯噪声得到不同信噪比的信号,将传感器采集的信号导入虚拟房间(假设该虚拟房间的长度为 4 m,宽度为 4 m,高度为 3 m,墙面的声音反射系数为 0.25,且该阵列位于房间正中心),构建混响模型,增加混响。进行 100 次 Monte Carlo 仿真实验。定义 DOA 估计均方根误差(RMSE),如式(34) 所示:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^{n} (\theta_{\alpha} - \theta_{t})^{2}}$$
 (34)

其中, θ_a 为第 a 次 Monte Carlo 仿真实验估计出的 DOA 值, θ_i 为 DOA 标准值。

比较在无混响环境中,本文所提出的准确鲁棒的宽带信号 DOA 估计算法(Line 1)、Root-ISM^[11]和 f-Root-ISM^[11]3种算法的 DOA 估计值的 RMSE,结果如图 4 所示。

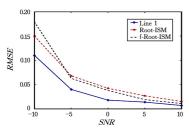


图 4 在无混响噪声环境下 3 种算法 DOA 估计值的 均方根误差对比

从图 4 可知,随着 SNR 的增大,3 种算法的均方根误差逐渐接近。当 SNR > -6 dB 时,f-Root-ISM 算法的均方根误差要小于 Root-ISM,当 SNR < -6 dB 时,f-Root-ISM 算法的均方根误差要大于 Root-ISM。当 SNR < 5 dB 时,Line 1 的均方根误差小于其他两种算法,随着 SNR 的减少这种差异变得更加明显,并在 SNR = -10 dB 时达到最大值 0.04。因此,在无混响噪声的环境中,Line 1 有效地提升了宽带信号 SNR DOA 估计的准确性,并且具有较好的鲁棒性。

比较在含有混响环境中,改进算法、Root-ISM 和 f-Root-ISM 3 种算法的 DOA 估计值的 RMSE,结果如图 5 所示。

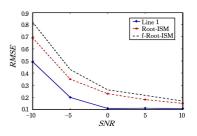


图 5 在含有混响噪声环境下 3 种算法 DOA 估计值的 均方根误差对比

从图 5 可知,在含有混响噪声的虚拟房间中,改进算法的 均方根误差要高于 Root-ISM 和 f-Root-ISM 的均方根误差。 而且当 SNR>0 时,改进算法的均方根误差低于 0.1,明显优于其他两种算法且表现出较好的鲁棒性。通过与图 4 的对比,改进算法在含有混响的低信噪比环境中对于 DOA 估计值的准确度的提升更为明显。因此,本文所提出的准确鲁棒的宽带信号 DOA 估计算法不仅能在相同的 SNR 条件下对DOA 估计具有较高的精度,而且无论环境是否存在混响,都能提高算法的鲁棒性。

结束语 在宽带 DOA 估计算法中,针对传统的 ISM 算法中子频带信号信息利用不充分、不合理导致的 DOA 估计精度不足这一问题,本文提出了基于能量门限加权的改进方法,使其对子频带信息的利用更加充分合理。而对于单一子频带信号,本文提出了矩阵的共轭形式重构协方差矩阵的 DOA 估计方法,该方法通过先重构协方差矩阵再进行 TLS-ESPRIT 算法估计 DOA 的方式提升了在含有混响的低信噪比环境中 DOA 估计的准确性,并通过理论推导证明该算法的有效性。从实验结果来看,本文的改进算法相较于传统方法具有更强的鲁棒性和更高的准确度。

参考文献

- [1] LIU Y,XIE C. Directions of arrival optimization method for broadband antenna array based on filter bank[J]. Wireless Communication over ZigBee for Automotive Inclination Measurement. China Communications, 2018, 15(11):1-9.
- [2] CHAKRABARTY S, HABETS E A P. Broadband DOA estimation using Convolutional neural networks trained with noise signals[C]//IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics. New York: IEEE Press, 2017:136-140.
- [3] HU Y, LU J, QIU X. Direction of arrival estimation of multiple acoustic sources using a maximum likelihood method in the spherical harmonic domain[J]. Applied Acoustics, 2018, 135:85-90.
- [4] FARMANI M, PEDERSEN MS, TAN ZH, et al. Bias-Compensated Informed Sound Source Localization Using Relative Transfer Functions [J]. IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing, 2018, 26(7):1271-1285.
- [5] WANG H, KAVEH M. Coherent signal-subspace processing for the detection and estimation of angles of arrival of multiple wideband sources [J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing, 1985, 33(4):823-831.
- [6] XIAOLU Z, MINGLEI Y, BAIXIAO C, et al. Estimation of Direction of Arrival by Time Reversal for Low Angle Targets[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(6):2675-2694.

(下转第398页)

这些子群,形成栅栏,这是集中式的方法。在分布式方法中,根据节点近似圆之间的几何关系,使每个节点具有最大栅栏贡献,从左到右依次选择能耗最小的节点分布式构建栅栏。仿真结果证明,基于近似圆的栅栏构建方法能够用较低能耗和较少节点构建有向栅栏。

概率感知模型是更符合实际的感知模型,如何节能高效地构建概率栅栏是下一步要研究的内容。

参考文献

- [1] TAO D,T WU. A survey on barrier coverage problem in directional sensor networks[J]. IEEE Sensors Journal, 2015, 15(2): 876-885.
- [2] 范兴刚,刘涛,胡凤丹,等.一种延长目标覆盖网络寿命的群智能 算法[J]. 计算机科学,2018,45(12):93-98.
- [3] KUMAR S, LAI T H, ARORA A. Barrier coverage with wireless Sensors[C] // Proc. of the 11th Annual International Conference on Mobile Computing and Networking, 2005;284-298.
- [4] 罗卿,林亚平,王雷,等. 传感器网络中基于数据融合的栅栏覆盖控制研究[J]. 电子与信息学报,2012,34(4):825-831.
- [5] 班冬松,温俊,蒋杰,等. 移动无线传感器网络 K-栅栏覆盖的构建算法[J]. 软件学报,2011,22(9):2089-2103.
- [6] TIAN J,ZHANG W S,WANG G L, et al. 2D k-barrier duty-cycle scheduling for intruder detection in wireless sensor networks [J]. Computer Communications, 2014, 4(3):31-42.
- [7] 王超,范兴刚. 一种高效强 K—栅栏覆盖构建算法[J]. 传感技术 学报,2015,28(2);227-233.
- [8] MA H D, YANG M, LI D, et al. Minimum camera barrier coverage in wireless camera sensor networks [C] // Proc. IEEE IN-

- FOCOM, Orlando, FL, USA, 2012; 217-225.
- [9] TAO D, TANG S, ZHANG H, et al. Strong barrier coverage in directional sensor networks [C] // Computer Communications, 2012, 35(8);895-905.
- [10] ZHANG L, TANG J, ZHANG W. Strong barrier coverage with directional sensors [C] // Proc. IEEE GlobeCom. Honolulu, HI, USA, 2009:1-6.
- [11] SSU K F, WANG W T, W F K, et al. K-barrier coverage with a directional sensing model [J]. International Journal on Smart Sensing and Intelligent Systems, 2009, 2(1):75-93.
- [12] CHENG CF, TSAI KT. distributed barrier coverage in wireless visual sensor networks with β-qom[J]. IEEE Sensors Journal, 2012,12(6):1726-1735.
- [13] WANG Z B, LIAO J D, CAO Q, et al. Achieving k-barrier Coverage in Hybrid Directional Sensor Networks[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2014, 13(7):1443-1455.
- [14] CHEN J, WANG B, LIU W, et al. Rotating directional sensors to mend barrier gaps in a line-based deployed directional sensor network[J]. IEEE Systems Journal, 2017, 11(2):1027-1038.
- [15] WU Y, CARDEI M. Distributed algorithms for barrier coverage via sensor rotation in wireless sensor networks[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2018, 36:230-251.
- [16] 任勇默,范兴刚. 种有向传感器网络栅栏覆盖增强算法[J]. 传感技术学报,2015,28(7):1051-1057.
- [17] GUVENSAN A, YAVUZ G. Hybrid movement strategy in selforienting directional sensor networks [J]. Ad Hoc Networks, 2013,11(3):1075-1090.
- [18] 王万良. 人工智能及其应用(第三版)[M]. 北京:高等教育出版 社,2016.

(上接第380页)

- [7] GUO R, ZHANG Y, LIN Q, et al. A Channelization-Based DOA Estimation Method for Wideband Signals [J]. Sensors, 2016, 16(7):1031-1049.
- [8] HUAWEI L, BAOQING L, XIAOBING Y, et al. A Robust Real Time Direction-of-Arrival Estimation Method for Sequential Movement Events of Vehicles [J]. Sensors, 2018, 18 (4): 992-1008.
- [9] WAX M, SHAN T J, KAILATH T. Spatio-Temporal Spectral Analysis By Eigenstructure Methods[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1984, 32(4):817-827.
- [10] 宫兵,徐以涛,李佳.改进的非相干信号子空间宽带测向算法 [J]. 无线电工程,2011,41(3):11-13.
- [11] 郭亚萍,陈建春,彭金龙,等. 基于 Root-ISM 算法的宽带非相干信号 DOA 估计[J]. 电子科技,2015,28(6):38.
- [12] SCHMIDT R, SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameters estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
- [13] WU M J, MENG T Z, HUANG, et al. DOA estimation of partially polarized signals using conjugate MUSIC[C] // IEEE International Conference on Electronic Measurement & Instruments. IEEE, 2018.

- [14] JIANG G, MAO X, LIU Y. Reducing errors for root-MUSIC-based methods in uniform circular arrays[J]. IET Signal Processing, 2018, 12(1):31-36.
- [15] LIANG H, CUI C. Low-complexity ESPRIT-based DOA estimation for MIMO radar with L-shaped array [J]. International Journal of Electronics Letters, 2017, 6:1-13.
- [16] LI J, JIANG D, ZHANG X. DOA Estimation Based on Combined Unitary ESPRIT for Coprime MIMO Radar[J]. IEEE Communications Letters, 2017, 21(1):96-99.
- [17] DKALGAN A, BAHL R, KUMAR A. Source Ranging and Direction of Arrival Estimation using accelerometer based implementation of prototype Acoustic Vector Sensor[C]//Underwater Technology. Chennai: IEEE, 2015.
- [18] DAS P, BHATTACHARJEE A, PATHAK S. Performance analysis of TLS-Esprit and QR TLS-Esprit algorithm for Direction of Arrival estimation [C] // International Conference on Communications & Signal Processing, IEEE, 2015.
- [19] 周小军,谭薇,冯大政,等. 基于解相干的改进 MUSIC 算法 DOA 估计[J]. 无线电工程,2014(12):18-21.
- [20] KUNDU D. Estimating direction of arrival of signal; some asymptotic results[J]. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A (1961-2002),1999,61(1):120-138.