实验报告

- 本实验使用 `troy-nova` 为底层，实现了一个基于 CKKS 加密算法的 ReLU 运算程序，模拟了数据持有者将加密的数据 x 送入装置，产生的输出解密后得到 $ReLU(x)$ 的过程。
- 本实验可以分为两部分：针对 ReLU 函数的多项式逼近，以及在密文域下的多项式运算。

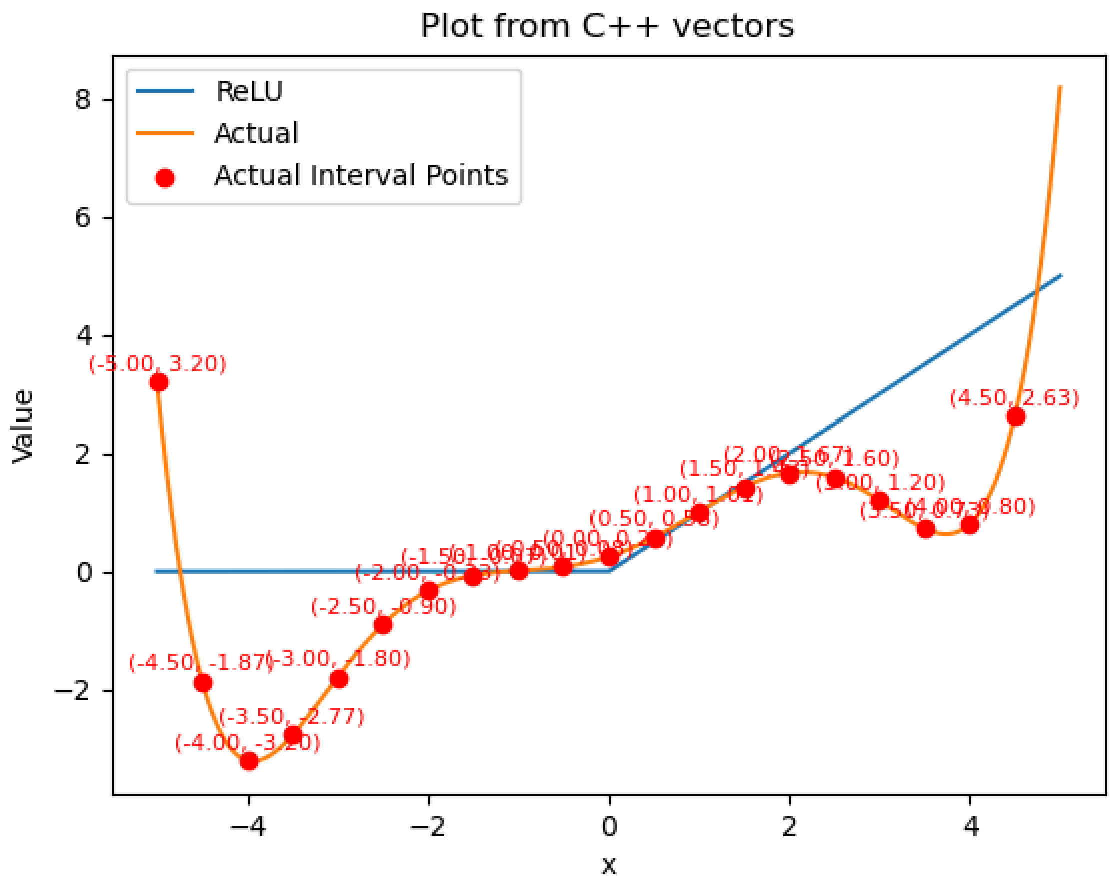
多项式逼近

- 同态加密的原理是，对于明文 a, b 与加密操作 Enc, 解密操作 Dec 有 $Dec(Enc(a) + Enc(b)) = a + b$ $Dec(Enc(a) * Enc(b)) = a * b$
- 但是，$ReLU(a)$ 的操作并不符合同态运算的规律, 因此我们需要用多项式来对 ReLU 进行近似。本实验当中，采取了 泰勒展开式，Remez 算法，最小二乘法对于多项式进行逼近的尝试，其中 Remez 算法的逼近效果最好，在某些最优情况下能够保证整体误差低于 0.1, 多数点的误差达到 0.01 量级。
- 对于 Remez 算法的详细过程在这里不进行介绍，可以在以下链接当中找到相关的介绍资料：[1]，[2]。
- 在实验过程中，观察到使用 Remez 算法逼近 ReLU 函数的效果并不好，因此选择逼近其他的能够近似 ReLU 的函数。在本实验中，采用的是 GeLU 函数和 SquarePlus 函数的加权和：$f(x) = r * GeLU(x) + (1 - r) * SquarePlus(x)$， $r \in [0, 1]$
- 其中， $GeLU(x) = x * \Phi(x), \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, SquarePlus(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + b}}{2}$
- 这里的 b, r 都是可调整的参数：见 `Polynomial_Calc/SiLU.h`。我们最后尝试用多项式逼近 $f(x)$, 实验结果如下：

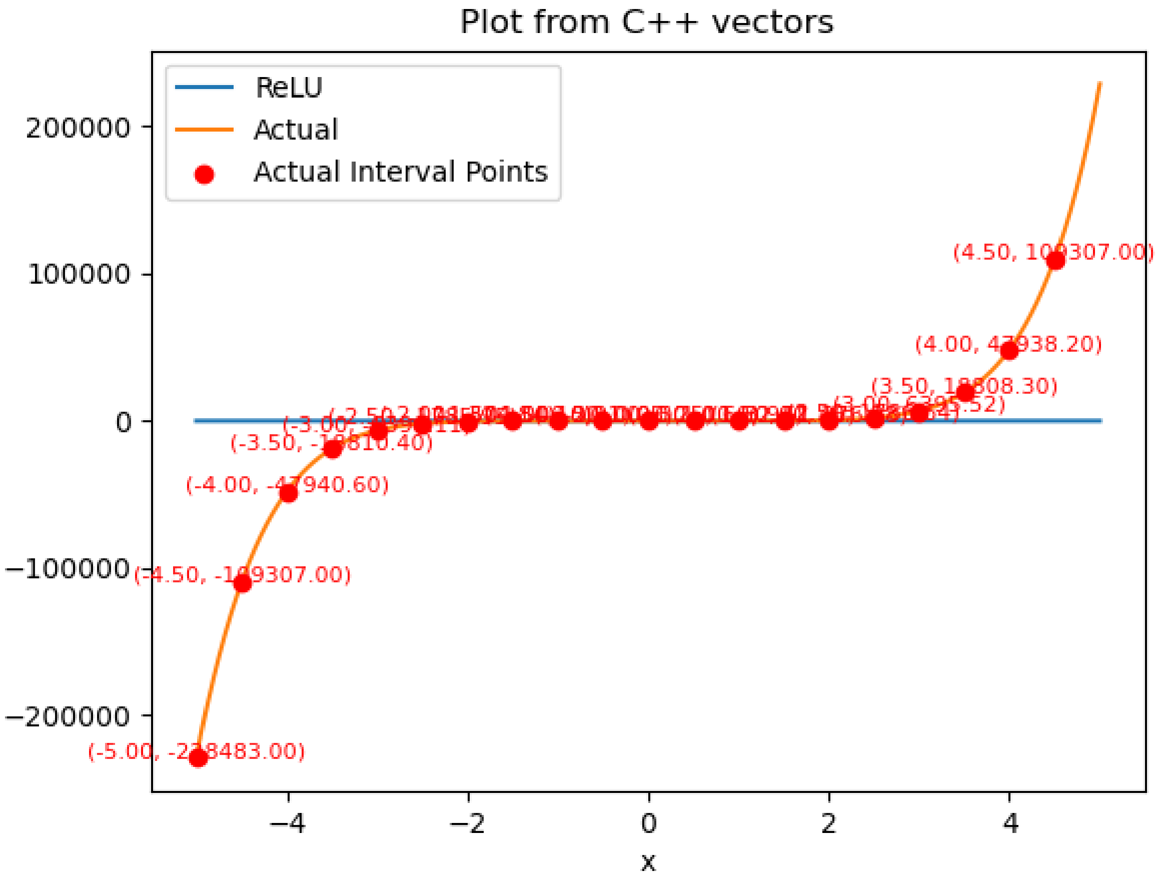
实验1：针对不同多项式逼近算法的逼近效果

对于不同的多项式逼近算法，我们控制其次数相同，控制 $b = 1, r = 0.5$ 的情况下进行实验，分别计算 $6, 7, 8$ 次多项式：

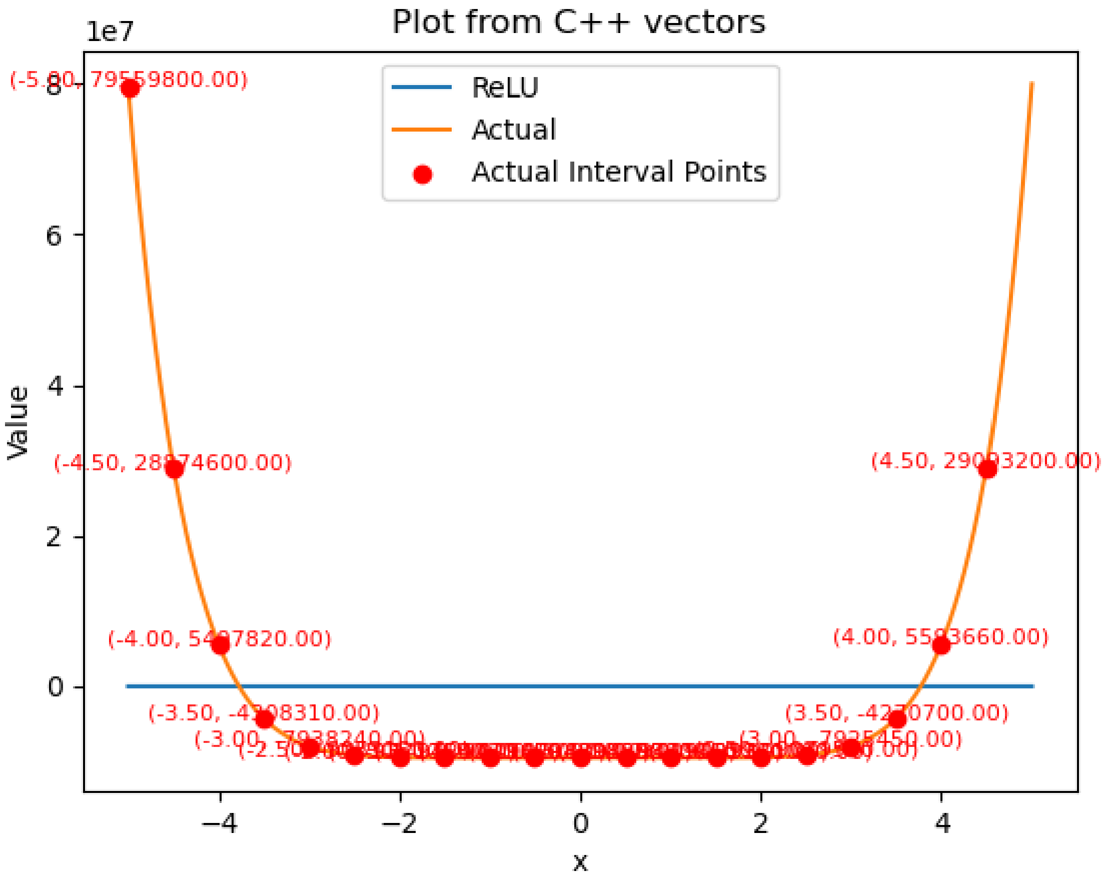
- 泰勒展开式



Plot from C++ vectors
ReLU
Actual
Actual Interval Points
Value
x
8
6
4
2
0
−2
−4
−2
0
2
4
(-5.00, 3.20)
(-4.50, -1.87)
(-4.00, -3.20)
(-3.50, -2.77)
(-3.00, -1.80)
(-2.50, -0.90)
(4.50, 2.63)
(1.00, 1.02)
(0.50, 0.58)
(3.00, 1.20)

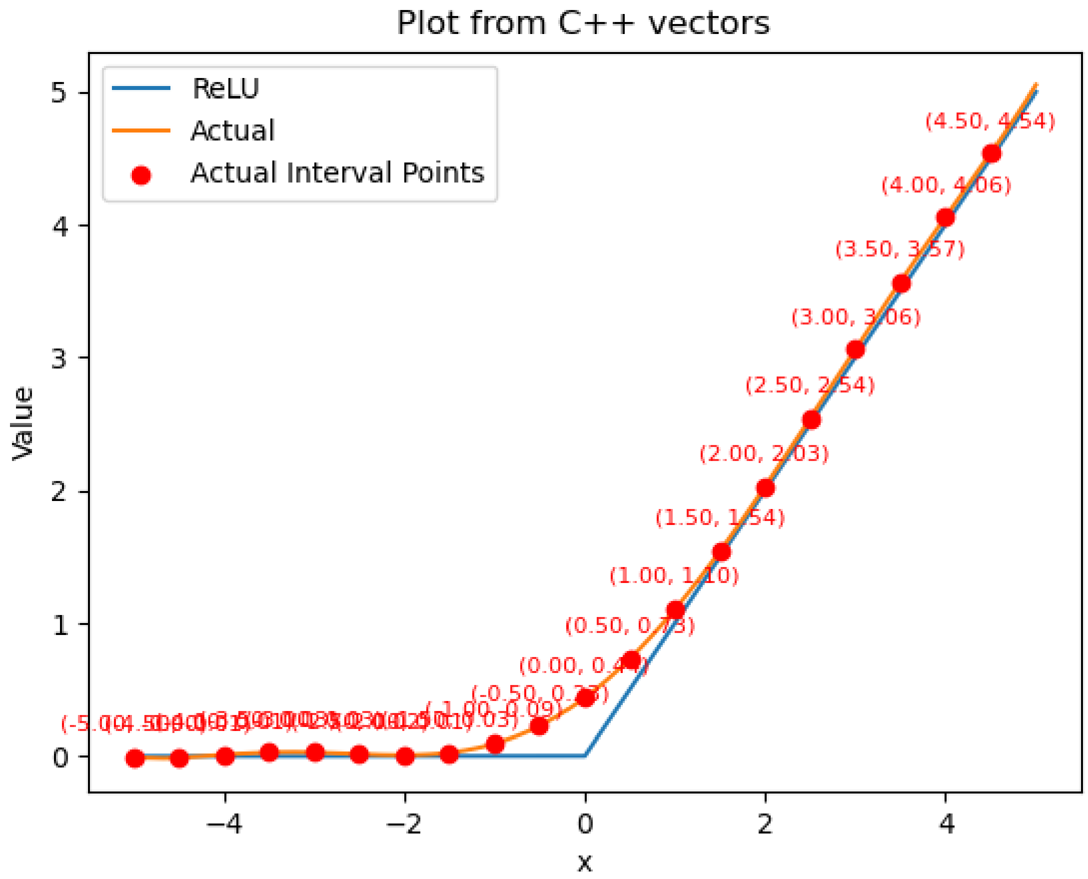


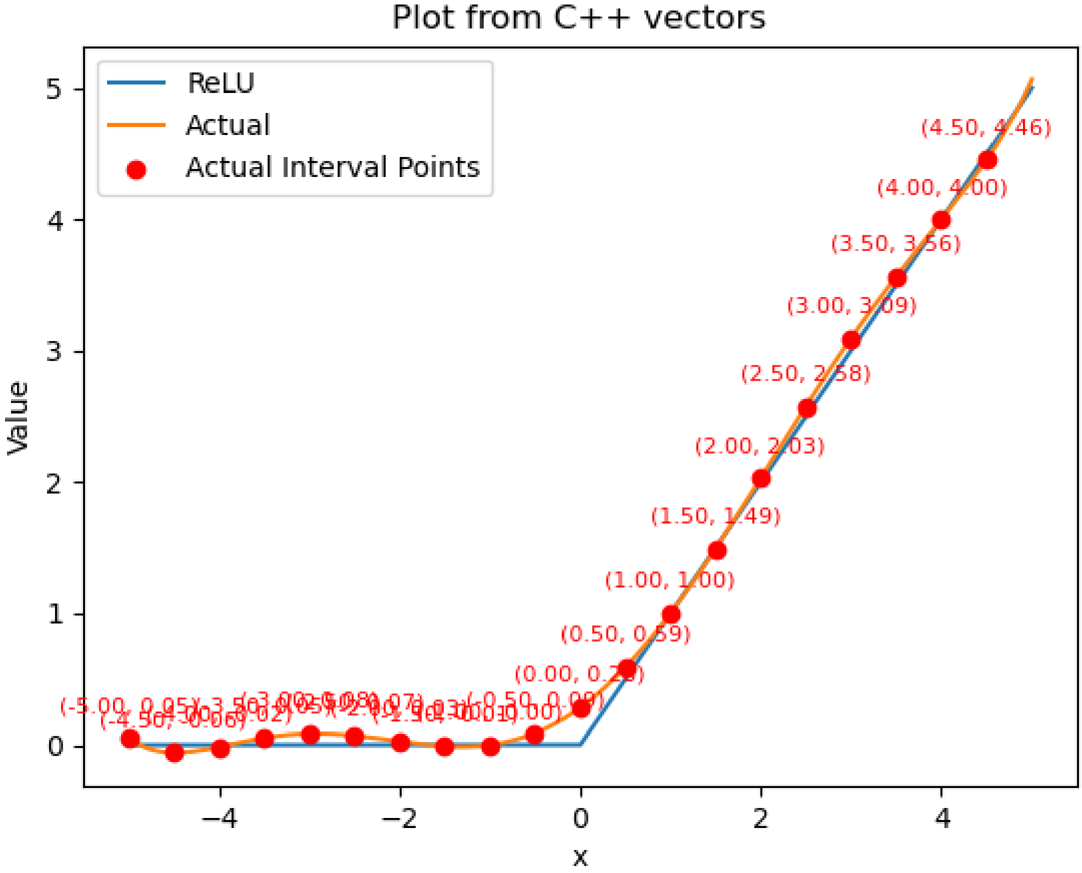
Plot from C++ vectors
ReLU
Actual
Actual Interval Points
200000
100000
0
−100000
−200000
−4
−2
0
2
4
x

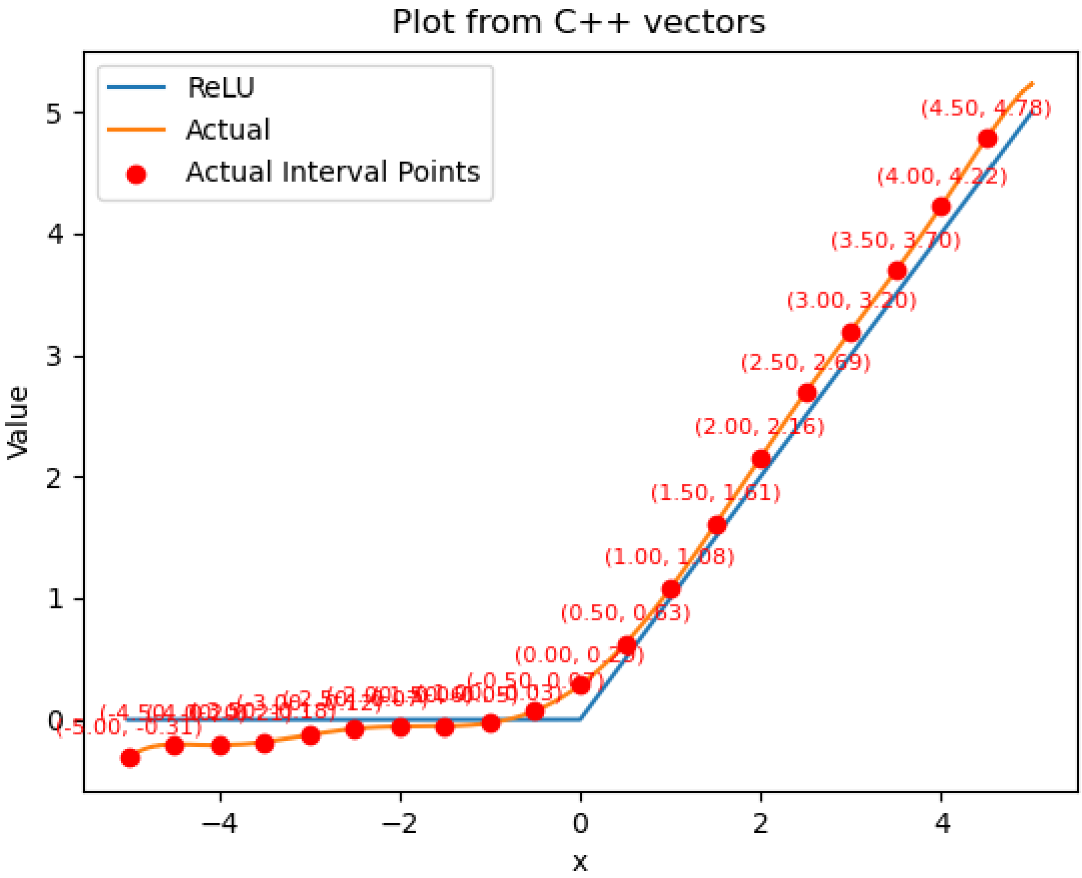


Plot from C++ vectors
1e7
ReLU
Actual
Actual Interval Points
Value
x
(4.50, 29093200.00)
(-3.50, -4208310.00)

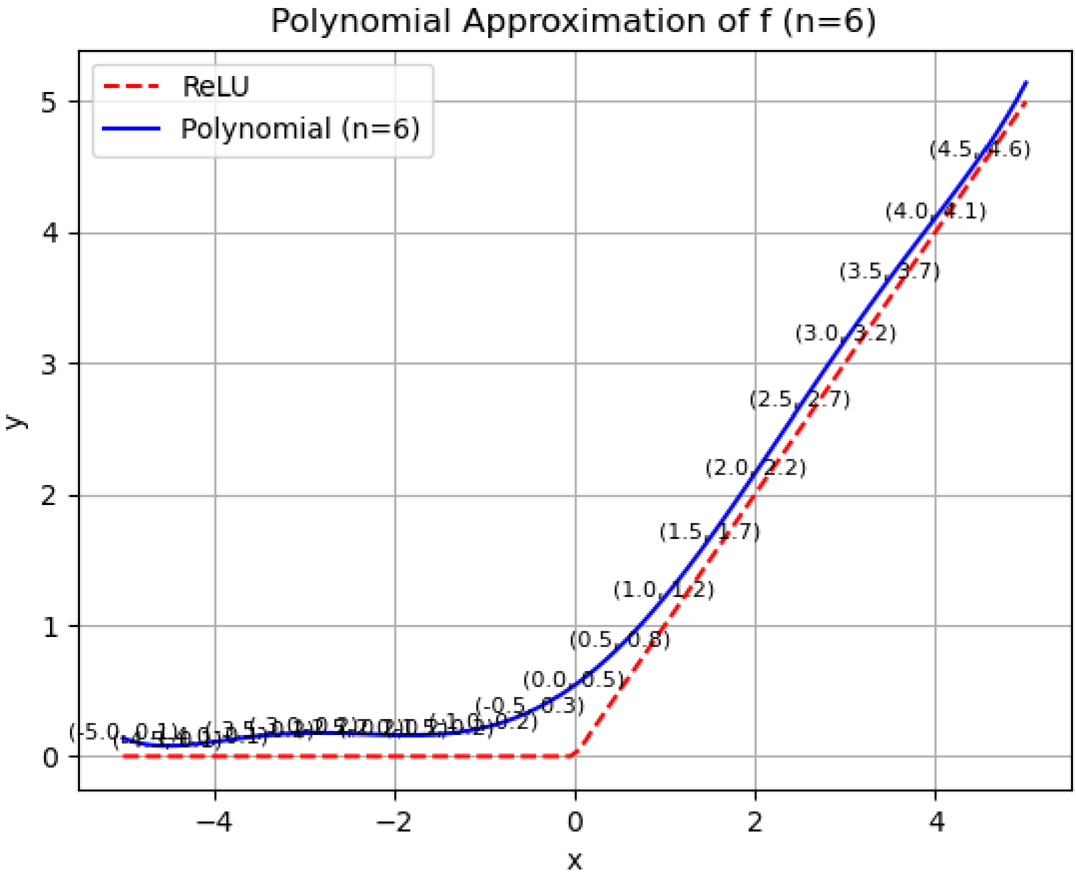
- Remez:


Plot from C++ vectors
ReLU
Actual
Actual Interval Points
Value
x
(4.50, 4.54)
(4.00, 4.06)
(3.50, 3.57)
(3.00, 3.06)
(2.50, 2.54)
(2.00, 2.03)
(1.50, 1.54)
(1.00, 1.10)
(0.50, 0.73)
(0.00, 0.44)
(-0.50, 0.23)
(-1.00, 0.09)
0
1
2
3
4
5
−4
−2
0
2
4

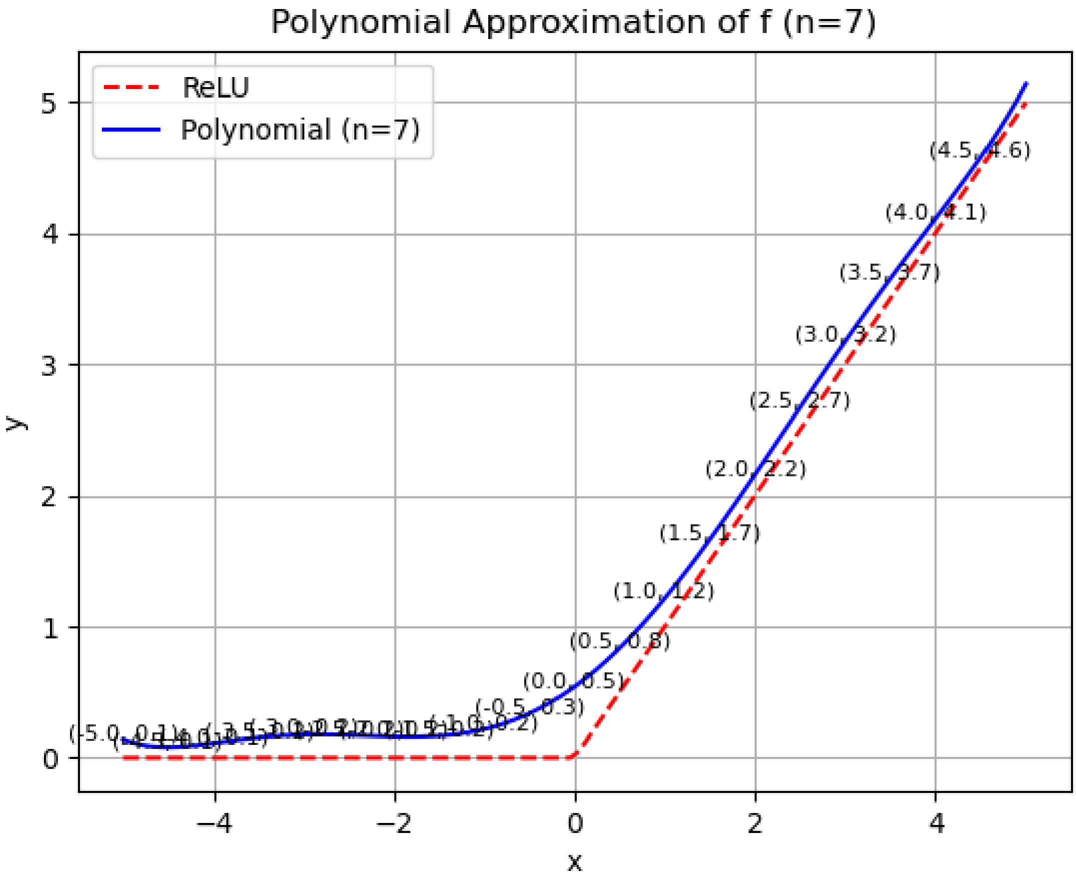

Plot from C++ vectors
ReLU
Actual
Actual Interval Points
Value
x
(4.50, 4.46)
(4.00, 4.00)
(3.50, 3.56)
(3.00, 3.09)
(2.50, 2.58)
(2.00, 2.03)
(1.50, 1.49)
(1.00, 1.00)
(0.50, 0.59)
(0.00, 0.28)


Plot from C++ vectors
ReLU
Actual
Actual Interval Points
Value
x
(4.50, 4.78)
(4.00, 4.22)
(3.50, 3.70)
(3.00, 3.20)
(2.50, 2.69)
(2.00, 2.16)
(1.50, 1.61)
(1.00, 1.08)
(0.50, 0.63)
(0.00, 0.29)
(-0.50, 0.07)
(-5.00, -0.31)

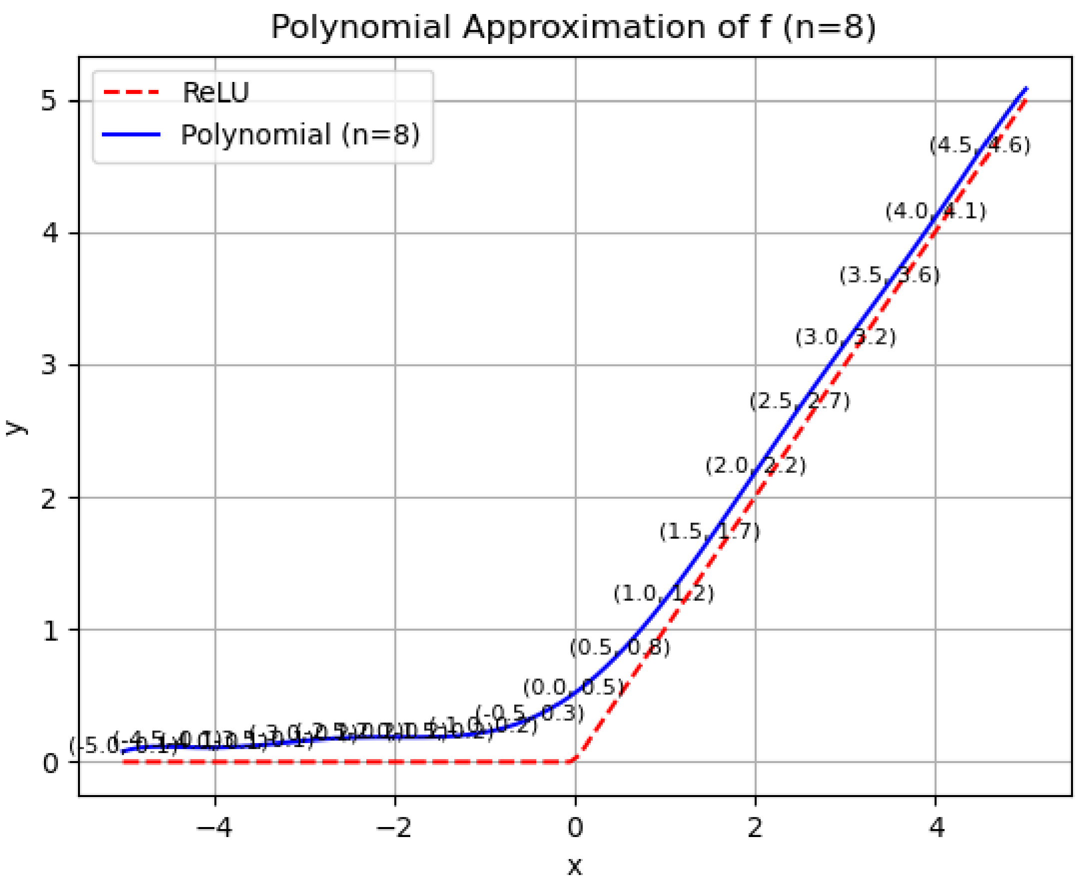
- 最小二乘法:



Polynomial Approximation of f (n=6)
ReLU
Polynomial (n=6)
y
x
(4.5, 4.6)
(4.0, 4.1)
(3.5, 3.7)
(3.0, 3.2)
(2.5, 2.7)
(2.0, 2.2)
(1.5, 1.7)
(1.0, 1.2)
(0.5, 0.8)
(0.0, 0.5)
(-0.5, 0.3)



Polynomial Approximation of f (n=7)
ReLU
Polynomial (n=7)
y
x
(4.5, 4.6)
(4.0, 4.1)
(3.5, 3.7)
(3.0, 3.2)
(2.5, 2.7)
(2.0, 2.2)
(1.5, 1.7)
(1.0, 1.2)
(0.5, 0.8)
(0.0, 0.5)
(-0.5, 0.3)
(-1.0, 0.2)
(-5.0, 0.1)



从图中可以看到 泰勒展开式 的逼近效果最差，在同次数的情况下 Remez 算法和 最小二乘法 均有相对不错的逼近效果，而 Remez 算法的准确度更高一些。

实验2：使用 Remez 算法探究不同参数 r 下的逼近效果

- 函数 f 的设计源于我们在尝试逼近函数 ReLU 的时候发现 Remez 算法对于 ReLU 函数的逼近效果并不好，可能是由于其不光滑的特点导致的。因此，我们尝试构造一个较为光滑的，且和 ReLU 相近的函数 f，使用多项式逼近 f。考虑到 ReLU 函数的两种经典的逼近方式 GeLU 和 SquarePlus，前者小于 ReLU，后者大于 ReLU，因此自然的想到用二者的加权和进行对 ReLU 的逼近。

- 权重是一个重要的参数。为了调整精度，取 10 次多项式，对于权重 r 分别取 0.1 到 0.5 之间的小数，结果如下：

  - 0.5： 最大绝对差值: 0.27, 对应的 x 值: 0.00
  - 0.35: 最大绝对差值: 0.18, 对应的 x 值: 0.00
  - 0.25： 最大绝对差值: 0.13, 对应的 x 值: 0.00
  - 0.2： 最大绝对差值: 0.10, 对应的 x 值: 0.00
  - 0.1875: 最大绝对差值: 0.09, 对应的 x 值: 0.00

  - 0.175: 最大绝对差值: 0.10, 对应的 x 值: -0.82
  - 0.15: 最大绝对差值: 0.11, 对应的 x 值: -0.81
  - 0.1: 最大绝对差值: 0.15, 对应的 x 值: -0.92

- 结果如图所示。可以看到当 r 在 0.175 到 0.2 的范围内，使用 10 次多项式能够达到很好的近似效果。

密文域运算

- 确定了逼近所使用的多项式 f 之后，如何快速的计算 $f(x)$ 也是一个重要的问题。使用尽可能少乘法运算能够在保证准确度的前提下使算法高效。

- 我们采用了秦九韶算法进行计算，其基本原理是，多项式 $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (...((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + ... + a_1)x + a_0$

- 在这种算法下，如果使用单线程运算，能够将运算的复杂度降低到 $O(n)$，而传统的将每一项分别算出再求和的算法则需要 $O(n^2)$。

- 我们尝试了多线程的运算，但由于总体耗时是毫秒数量级，与上下文切换的数量级接近，因此实际上测量结果是使用多线程运算的速率反而不如单线程。在使用多线程的时候只是使用了最基础的 `thread`，和学长的交流当中，我了解到可能可以使用 memorypool，但是还没有实现。

- 在单线程的情况下，测量的时间如下：

  - 6次多项式：运行时间: 12.793 ms, 对 16384 个数进行计算，平均 0.78082275390625 us
  - 7次多项式：运行时间: 18.087 ms, 对 16384 个数进行计算，平均 1.10394287109375 us
  - 8次多项式：运行时间: 24.573 ms, 对 16384 个数进行计算，平均 1.49981689453125 us
  - 9次多项式：运行时间: 32.532 ms, 对 16384 个数进行计算，平均 1.9855957031249998 us
  - 10次多项式：行时间: 42.034 ms, 对 16384 个数进行计算，平均 2.5655517578125 us

- 而同样是单线程下，imp库的运行时间如下：

```
Time per:     6.651 us (total     6.811 ms, 1024 times)
```

- 初步测量的结果显示，本项目的时间快于 imp 库，但是可能需要进一步更为规范的时间测试。

展望

- 以下的几个问题是我们还未能解决的：
    - 为什么直接逼近 ReLU 的效果不好？为什么偶数次多项式的逼近效果显著优于奇数次多项式？(数值分析相关)
    - memorypool的实现？学长的原话是效果可能没那么好，那么能否修改库本身达到更高的效率？

- 感谢刘轩奇学长在暑假当中与我频繁的讨论，指导我的实验思路；感谢刘卓涛老师为我入门隐私计算，对该领域的了解提供的帮助。

参考资料

- [1]: https://www.youtube.com/watch?v=j29rVHCpRUY
- [2]: http://staff.ustc.edu.cn/~tongwh/NA_2023/slides/book.pdf#section.9.6