Notes of Operational Rearch

Xiang Zheng

August 11, 2019

Abstract

1 运筹学概述

2 线性规划

2.1 线性规划的概念

2.1.1 线性规划问题的导出

2.1.2 线性规划的定义和数学描述

定义：目标函数和约束都是决策变量的线性表达式

- 目标要求/目标函数
- 限制条件/约束条件
- **非负条件**
- 线性表达式（未知变量：决策变量）

e.g.

$$\max(\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2 \\ \cdots \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

- 线性规划模型的一般形式
- 线性规划模型的紧缩形式
- 线性规划模型的矩阵形式
- 线性规划模型的向量-矩阵形式

2.1.3 线性规划的标准型

- 目标函数极大化 max
- 约束条件必须为等式
- 约束条件右端的常数必须为非负数
- 决策变量大于等于 0

将线性规划问题化为标准型：
e.g.

$$\min Z = -x_1 + 5x_2 - 2x_3$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 5 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 2, x_3 \end{cases} \tag{2}$$

1）x_3，令 $x_3 = x_3' - x_4$；
2）x_2，令 $x_2 = -x_2', x_2' \ge 0$；
3）约束 1 引松弛变量；
4) 约束 2 引剩余变量；
5）目标函数标准化，引入变换 $Z' = -Z$；
6）整理。

Obtain:

$$\max Z' = x_1 - 5(-x_2') + 2(x_3' - x_4) + 0x_5 + 0x_6$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 + (-x_2') - (x_3' - x_4) + x_5 = 6 \\ 2x_1 - (-x_2') + 3(x_3' - x_4) - x_6 = 5 \\ x_1 + (-x_2') = 10 \\ x_1, x_2', x_3', x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases} \tag{3}$$

Final result:

$$\max Z' = x_1 + 5x_2' + 2x_3' - 2x_4$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 - x_2' - x_3' + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_4 - x_6 = 5 \\ x_1 - x_2' = 10 \\ x_1, x_2', x_3', x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases} \tag{4}$$

2.2 线性规划的各种解和性质

- 可行解：满足约束条件和非负条件的决策变量的一组取值。
- 最优解：使目标函数达到最优解的可行解。
- 基本解：设 $AX = b$ 是含 n 个决策变量、m 个约束条件的 LP 的约束方程组，B 是 LP 问题的一个基，若令不与 B 的列相应的 $n - m$ 个分量（非基变量）都等于零，所得的方程组的解称为方程组 $AX = b$ 关于基 B 的基本解，简称 LP 的基本解。

基本解定义：令 X 满足 $AX=b$，若 $X\neq 0$，则 X 必有非零分量 x_α，x_β，$\cdots$，于是必存在方程式：

$$AX=x_\alpha a^\alpha+x_\beta a^\beta+\cdots=b$$

其中，a^α，a^β，$\cdots$ 为与 x_α，x_β，$\cdots$ 对应的 A 阵列矢量，如果列矢量 a^α，a^β，$\cdots$ 之间线性独立，则称 X 为基本解。若存在多个不同的非零基本解，则他们之间组合系数之和为 1 的线性组合也必是方程解，即方程必存在无穷多个解。

基本可行解：满足等式约束 $AX=b$ 及自变量限制 $X\geq 0$ 的解称为可行解，既是可行解又是基本解的解称为基本可行解。基本可行解是可行域的顶点，是满足非负条件的基本解。

基本最优解（对应的基为最优基）：使目标函数达到最优值的基本可行解。

e.g.

1. 可行解：对问题 (LP)

$$\max z=CX$$
$$s.t.\begin{cases}AX=b\\ X\geq 0\end{cases}$$

若 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$‘ 满足约束方程 $\begin{cases}AX=b\\ X\geq 0\end{cases}$，则称 x_0 为问题 (LP) 的一个**可行解**。

2. 可行域：(LP) 的全体可行解构成的集合称为可行域，即：可行域 $S=\{X|AX=b,x\geq 0\}$。

3. 最优解及最优值：设 S 是 (LP) 的可行域，若存在 $X^*\in S$，使得对任意的 $X\in S$，都有 $CX^*\geq CX$，则称 X^* 为问题 (LP) 的**最优解**，$Z^*=CX^*$ 称为问题 (LP) 的**最优值**。

4. 若对任意大的 $M>0$，都存在可行解使得该线性规划的目标函数值 $|Z|\geq M$，则称该线性规划问题**无界**。

5. 基与基本可行解：设 B 是 (LP) 问题的一个基，令非基变量取零可得 $AX=b$ 的一个解 $X=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$，称此解为对应于基 B 的基本解。

注意：若 $B^{-1}b\geq 0$，则 $X\geq 0$ 即 X 是 (LP) 问题的基本可行解；若 $B^{-1}b<0$，则 $X<0$ 即 X **不是** (LP) 问题的基本可行解。

6. 基本可行解定义：满足 $X_B=B^{-1}b\geq 0$ 的基本解 $\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}$ 称为**基本可行解**，对应的基称为**可行基**。

基本可行解的个数 $\leq C_n^m$，m 为限制条件的个数，n 为决策变量的个数。

e.g. 对线性规划问题，

$$\max z=7x_1+x_2$$
$$s.t.\begin{cases}x_1+2x_2\leq 6\\ x_1-x_2\leq 1\\ x_1\leq 2\\ x_1,x_2\geq 0\end{cases}$$

解：其标准型为

$$\max z=7x_1+x_2$$
$$s.t.\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=6\\ x_1-x_2+x_4=1\\ x_1+x_5=2\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0\end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5\end{pmatrix}$

So, 该问题的基（$r=3$ 且行列式不为零）有：

$B_1=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{pmatrix}$, 基变量 $X_{B_1}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}'$, 非基变量 $X_{N_1}=\begin{pmatrix}x_4 & x_5\end{pmatrix}'$

$B_2=\begin{pmatrix}P_3 & P_4 & P_5\end{pmatrix}$, 基变量 $X_{B_2}=\begin{pmatrix}x_3 & x_4 & x_5\end{pmatrix}'$, 非基变量 $X_{N_2}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}'$

...

以 B_1 为例，$B_1=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{pmatrix}$ 为基，$N_1=\begin{pmatrix}P_4 & P_5\end{pmatrix}$ 非基

基变量 $X_{B_1}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}'$，非基变量 $X_{N_1}=\begin{pmatrix}x_4 & x_5\end{pmatrix}'$

令非基变量 $X_{N_1}=\begin{pmatrix}x_4 & x_5\end{pmatrix}'=0$，得 $x_1=2, x_2=1, x_3=2$

对应基 B_1 的基本解：$X_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$。

2.3 线性规划的图解法和解的几何表示

2.3.1 图解法

1. 线性规划的图解法：就是用几何作图的方法分析并求出其最优解的过程。

2. 求解的思路

1）先将约束条件加以图解，求得满足约束条件的解的集合（即可行域）

2）然后结合目标函数的要求从可行域中找出最优解。

3. 线性规划的可行域一定是凸多边形或图多面体。4. 有关线性规划解的结论：

1）若（LP）问题有可行解，则可行域是一个凸多边形（或凸多面体）。它可能是有界的；也可能是无界的。

2）若（LP）问题有最优解，则最优解可能是唯一的；也可能是无穷多个。如果是唯一的，这个解一定在该凸多边形的某个顶点上；如果是无穷多个，则这些最优解一定充满凸多边形的一条边界（包括此边界的两个顶点）。

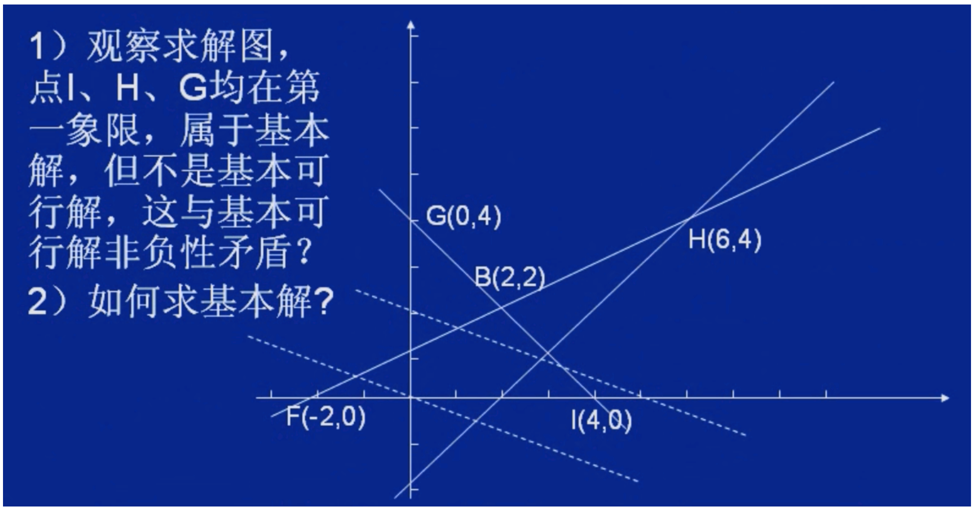
3）若（LP）问题有可行解，但没有有限最优解，此时凸多边形是无界的。

4）若（LP）问题没有可行解，则该问题没有最优解。

2.3.2 基本可行解的几何意义

1. e.g.

$$\max Z=2x_1+5x_2$$
$$s.t.\begin{cases}x_1+x_2\le 4\\ -x_1+2x_2\le 2\\ x_1-x_2\le 2\\ x_1,x_2\ge 2\end{cases} \tag{5}$$



第一步模型标准化；需增加 (x_3, x_4, x_5) 三个额外变量
第二部按照基本解的定义

- 找基。不超过 C_5^3
- 确定基变量和非基变量；
- 令非基变量为 0，解出基变量；
- 基变量和相应非基变量搭配构成基本解。

$H(6,4,-6,0,0)^T, C(3,1,0,3,0)^T, B(2,2,0,0,2)^T, D(2,0,2,4,0)^T, F(-2,0,6,0,4), I(4,0,0,6,-2)^T,$
$E(0,-2,6,6,0)^T, A(0,1,3,0,3)^T, G(0,4,0,-8,6)^T, O(0,0,4,2,2)^T$
H, I, G 三点虽满足 $x_1, x_2 \geq 0$，但不满足 $x_3, x_4, x_5 \geq 0$，所以 H, I, G 是基本解而不是基本可行解。
2. **结论**：

- 基本解对应所有可行域边界延长线、坐标轴之间的交点；
- 基本可行解对应可行域的顶点。

3. 基本可行解包括退化基本可行解和非退化基本可行解。
退化基本可行解：基本可行解中，存在取 0 值的基变量，对应的基称为退化基。
非退化基本可行解：基本可行解中，基变量的取值均大于 0，对应的基称为非退化基。
4. 线性规划问题分为**退化的线性规划问题**和**非退化的线性规划问题**。

2.3.3 线性规划解的性质

1. 基本概念：

- 凸集：设 K 是 n 维欧式空间的一个点集，若任意两点 $x_1, x_2 \in K$ 的连线上的一个切点 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in K(0 < \alpha < 1)$，则 K 为凸集。
- 凸组合：设 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是 n 维欧式空间中的 k 个点，若存在 k 个数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ 满足 $0 < \mu_i < 1, i = 1, 2, \cdots, k; \sum_{j=1}^{k} = 1$。则称 $X = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \cdots + \mu_k x_k$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的凸组合。
- 顶点：设 K 是凸集，$X \in K$；若 X 不能用 $x_1, x_2 \in K$ 的线性组合表示，即 $X \neq \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 (0 < \alpha < 1)$，则称 X 为 K 的一个顶点（也称极点或角点）。

2. 基本定理

- 线性规划问题的可行解集（即可行域）：$D=\left\{X|\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=b,x_j\geqslant 0\right\}$ 是凸集。
- 设 $D=\left\{X|\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=b,x_j\geqslant 0\right\}$，则 X 是 D 的一个顶点的**充分必要条件**是：X 是线性规划问题的基本可行解。
  引理：若 K 是有界凸集，则任意一点 $X\in K$ 可表示为 K 的顶点的凸组合。
- 若可行域非空有界，则线性规划问题的目标函数一定可以在可行域的顶点上达到最优值。
- 若目标函数在 k 个顶点处达到最优值 $(k\geq 2)$，则在这些顶点的凸组合上也达到了最优值。

3. 结论

- 线性规划的所有可行解构成的集合是凸集。
- 线性规划问题的每一个基本可行解都对应可行域的一个顶点。
- 若线性规划有最优解，必定可在可行域的某个顶点上达到。

2.4 单纯形法

1. 单纯形法的基本思想：**顶点的逐步转移**，即从可行域的一个顶点（基本可行解）开始，转移到另一个顶点（另一个基本可行解）的迭代过程，转移的条件是使目标函数值得到改善（逐步变优），当目标函数达到最优值时，问题也就得到了最优解。
2. 转移条件：使目标函数值得到改善
3. 转移结果：得到 LP 最优解，目标函数达到最优值
4. 单纯形法的基本步骤：

- a) 找出一个可行基，并得到一个基本可行解。
- b) 检验该基本可行解是否是最优解，即目标函数值是否最大，或看看是否存在目标函数值比它大的基本可行解。
- c) 换一个目标函数值比它大的基本可行解。
- d) 重复以上步骤，直至找不到更优的基本可行解。

2.4.1 单纯形法原理（用代数法求解 LP）

e.g.

$$\max Z=2x_1+3x_2+3x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leq 3\\ x_1+4x_2+7x_3\leq 9\\ x_1,x_2,x_3\geq 0\end{cases}\tag{6}$$

解：1. 引入非负的松弛变量 x_4,x_5，将该 LP 化为标准型

$$\max Z=2x_1+3x_2+3x_3+0x_4+0x_5$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=3\\ x_1+4x_2+7x_3+x_5=9\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geq 0\end{cases}\tag{7}$$

2. 寻求初始可行基，确定基变量

$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&4&7&0&1\end{pmatrix}$ 取可行基 $B=(P_4,\quad P_5)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

对应的基变量是 x_4, x_5;

3. 写出初始基本可行解和对应的目标函数值

a) 用非基变量表示基变量 $\begin{cases} x_4 = 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 9 - x_1 - 4x_2 - 7x_3 \end{cases}$ 。令非基变量为 0，求出初始基本可行解 $X^{(0)} = (0,0,0,3,9)^T$

b) 用非基变量代入到目标函数，$Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$

4. 分析两个基本表达式，看看目标函数是否可以改善

a) 分析用非基变量表示目标函数的表达式 $Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$，非基变量前面的系数均为正数，所以任意一个非基变量进基都能使 Z 值增加

note：通常把非基变量前面的系数叫"检验数"。

b) 选哪一个非基变量进基?

- 任意一个正检验数对应的非基变量
- 最大正检验数对应的非基变量
- 排在最前面的正检验数对应的非基变量

c) 确定出基变量

当 x_1 进基时，x_4, x_5 会减小，但有限度-必须大于等于 0，以保持解的可行性。于是

$$\begin{cases} x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \\ x_5 = 9 - x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq \frac{3}{1} \\ x_1 \leq \frac{9}{1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq \min\left(\frac{3}{1}, \frac{9}{1}\right) = 3 = \theta$$

最小比值原则（θ 原则）

当 x_1 的值从 0 增加到 3 时，x_4 首先变为 0，此时 $x_5 = 6 > 0$，因此选 x_4 为出基变量（换出变量）。

d) 基变换

新的基变量-x_1, x_5；新的非基变量-x_2, x_3, x_4。

写出用非基变量表示基变量的表达式

$$\begin{cases} x_4 = 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 9 - x_1 - 4x_2 - 7x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_5 = 6 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 \end{cases}$$

得到新的基本可行解 $X^{(1)} = (3,0,0,0,6)^T$

e) 用非基变量表示目标函数

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ &= 2(3 - x_2 - x_3 - x_4) + 3x_2 + 3x_3 \\ &= 6 + x_2 + x_3 - x_4 \end{aligned}$$

可得相应的目标函数值为 $Z^{(1)} = 6$

f) 检验数仍有正数，返回 a) 进行讨论。

上述过程何时停止?

当用非基变量表示目标函数的表达式中，非基变量的系数（检验数）全部非正时，当前的基本可行解就是最优解。

原因: 分析用非基变量表示目标函数的表达式，如果让负检验数所对应的变量进基，目标函数值将下降!

2.5 线性规划的应用

1. 使用线性规划方法处理实际问题必须具备的条件（建模条件）

- 优化条件

- 选择条件
- 限制条件
- 变量相关性

2. 建模步骤

- 设置要求解的决策变量
- 找出所有限制，即约束条件
- 明确目标要求，并用决策变量的线性函数来表示，确定对函数是取极大还是取极小的要求

3. 典型的线性规划在经济管理上的应用举例：
1）合理利用线材问题
2）配料问题
3）投资问题
4）产品计划问题
5）劳动力安排
6）运输问题

3 线性规划的对偶理论及应用

3.1 单纯形法的矩阵形式

3.2 线性规划的对偶问题

1. 对偶思想举例：周长一定的矩形中，以正方形面积最大；面积一定的矩形中，以正方形周长最小。
例：生产计划问题：要求制定一个生产计划方案，在总劳动力和原材料可能供应的范围内，使得产品的总利润最大。

$$\text{Max}\, Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$$
$$\text{S.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

其**对偶问题**：它的对偶问题就是一个价格系统，使在平衡了劳动力和原材料的直接成本后，所确定的价格系统最具有竞争力：

$$\text{Min}\, W = 3y_1 + 9y_2$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 + 4y_2 \geq 3 \\ y_1 + 7y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

用于生产第 i 种产品的资源转让收益不小于生产该种产品时获得的利益。
2. 对偶变量的经济意义：

- 对偶变量的经济意义可以解释为对工时及原材料的单位定价；若工厂自己不生产产品 A、B、C，将现有的工时以及原材料转而接受外来加工时，那么上述的价格系统能保证不亏本又最富有竞争力（包工及原材料的总价格最低）

- 当原问题和对偶问题都取得最优解时，这一对线性规划对应的目标函数值是相等的：$Z_{\max} = W_{\min} = 8$

3. 饮食与营养问题
4. 原问题与对偶问题的数学模型：
1) 对称型对偶问题：若原问题为

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

其对偶问题为：

$$\min W = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0 \end{cases}$$

矩阵形式：

$$\max Z = CX$$

$$(P)s.t. \begin{cases} AX \leq b \\ Xge0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\min W = bX$$

$$(D)s.t. \begin{cases} YA \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

线性规划问题对偶关系表：

一般规则	
原问题（或对偶问题）	对偶问题（或原问题）
目标函数 MaxZ	目标函数 MinW
约束条件数：m个 第i个约束条件类型为“≤” 第i个约束条件类型为“≥”	对偶变量数：m个 第i个变量≥0 第i个变量≤0
决策变量数：n个 第j个变量≥0 第j个变量≤0	约束条件数：n 第i个约束条件类型为“≥” 第i个约束条件类型为“≤”

2. 标准型对偶问题：若原问题为标准型：

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

note: 把一个等式约束写成两个不等式约束，再根据对称形式的对偶关系定义写出对偶问题。