Notes of Operational Rearch

June 16, 2019

Abstract

1 运筹学概述

2 线性规划

2.1 线性规划的概念

2.1.1 线性规划问题的导出

2.1.2 线性规划的定义和数学描述

定义：目标函数和约束都是决策变量的线性表达式

- 目标要求/目标函数
- 限制条件/约束条件
- **非负条件**
- 线性表达式（未知变量：决策变量）

e.g.

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$s.t.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq)b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq)b_2 \\ \cdots \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

- 线性规划模型的一般形式
- 线性规划模型的紧缩形式
- 线性规划模型的矩阵形式
- 线性规划模型的向量-矩阵形式

2.1.3 线性规划的标准型

- 目标函数极大化 max
- 约束条件必须为等式
- 约束条件右端的常数必须为非负数
- 决策变量大于等于 0

将线性规划问题化为标准型：
e.g.

$$\min Z = -x_1 + 5x_2 - 2x_3$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 2, x_3 \end{cases} \tag{2}$$

1）x_3，令 $x_3 = x_3' - x_4$；
2）x_2，令 $x_2 = -x_2', x_2' \geq 0$；
3）约束 1 引松弛变量；
4) 约束 2 引剩余变量；
5）目标函数标准化，引入变换 $Z' = -Z$；
6）整理。

Obtain:

$$\max Z' = x_1 - 5(-x_2') + 2(x_3' - x_4) + 0x_5 + 0x_6$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 + (-x_2') - (x_3' - x_4) + x_5 = 6 \\ 2x_1 - (-x_2') + 3(x_3' - x_4) - x_6 = 5 \\ x_1 + (-x_2') = 10 \\ x_1, x_2', x_3', x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Final result:

$$\max Z' = x_1 + 5x_2' + 2x_3' - 2x_4$$
$$s.t.\begin{cases} x_1 - x_2' - x_3' + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2' + 3x_3' - 3x_4 - x_6 = 5 \\ x_1 - x_2' = 10 \\ x_1, x_2', x_3', x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

2.2 线性规划的各种解和性质

- 可行解：满足约束条件和非负条件的决策变量的一组取值。
- 最优解：使目标函数达到最优解的可行解。
- 基本解：设 $AX = b$ 是含 n 个决策变量、m 个约束条件的 LP 的约束方程组，B 是 LP 问题的一个基，若令不与 B 的列相应的 $n - m$ 个分量（非基变量）都等于零，所得的方程组的解称为方程组 $AX = b$ 关于基 B 的基本解，简称 LP 的基本解。

基本解定义：令 X 满足 $AX=b$，若 $X\neq 0$，则 X 必有非零分量 x_α，x_β，$\cdots$，于是必存在方程式：

$$AX = x_\alpha a^\alpha + x_\beta a^\beta + \cdots = b$$

其中，a^α，a^β，$\cdots$ 为与 x_α，x_β，$\cdots$ 对应的 A 阵列矢量，如果列矢量 a^α，a^β，$\cdots$ 之间线性独立，则称 X 为基本解。若存在多个不同的非零基本解，则他们之间组合系数之和为 1 的线性组合也必是方程解，即方程必存在无穷多个解。

基本可行解：满足等式约束 $AX=b$ 及自变量限制 $X\geq 0$ 的解称为可行解，既是可行解又是基本解的解称为基本可行解。基本可行解是可行域的顶点，是满足非负条件的基本解。

基本最优解（对应的基为最优基）：使目标函数达到最优值的基本可行解。

e.g.

1. 可行解：对问题 (LP)

$$\max z = CX$$
$$s.t. \begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

若 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$‘ 满足约束方程 $\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$，则称 x_0 为问题 (LP) 的一个**可行解**。

2. 可行域：(LP) 的全体可行解构成的集合称为可行域，即：可行域 $S=\{X|AX=b,x\geq 0\}$。

3. 最优解及最优值：设 S 是 (LP) 的可行域，若存在 $X^*\in S$，使得对任意的 $X\in S$，都有 $CX^*\geq CX$，则称 X^* 为问题 (LP) 的**最优解**，$Z^*=CX^*$ 称为问题 (LP) 的**最优值**。

4. 若对任意大的 $M>0$，都存在可行解使得该线性规划的目标函数值 $|Z|\geq M$，则称该线性规划问题**无界**。

5. 基与基本可行解：设 B 是 (LP) 问题的一个基，令非基变量取零可得 $AX=b$ 的一个解 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$，称此解为对应于基 B 的基本解。

注意：若 $B^{-1}b\geq 0$，则 $X\geq 0$ 即 X 是 (LP) 问题的基本可行解；若 $B^{-1}b<0$，则 $X<0$ 即 X **不是** (LP) 问题的基本可行解。

6. 基本可行解定义：满足 $X_B=B^{-1}b\geq 0$ 的基本解 $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 称为**基本可行解**，对应的基称为**可行基**。基本可行解的个数 $\leq C_n^m$，m 为限制条件的个数，n 为决策变量的个数。

e.g. 对线性规划问题，

$$\max z = 7x_1 + x_2$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解：其标准型为

$$\max z = 7x_1 + x_2$$
$$s.t. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5\end{pmatrix}$

So, 该问题的基（$r=3$ 且行列式不为零）有:

$B_1=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{pmatrix}$, 基变量 $X_{B_1}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}'$, 非基变量 $X_{N_1}=\begin{pmatrix}x_4 & x_5\end{pmatrix}'$

$B_2=\begin{pmatrix}P_3 & P_4 & P_5\end{pmatrix}$, 基变量 $X_{B_2}=\begin{pmatrix}x_3 & x_4 & x_5\end{pmatrix}'$, 非基变量 $X_{N_2}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}'$

$\cdots$

以 B_1 为例，$B_1=\begin{pmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{pmatrix}$ 为基，$N_1=\begin{pmatrix}P_4 & P_5\end{pmatrix}$ 非基

基变量 $X_{B_1}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}'$，非基变量 $X_{N_1}=\begin{pmatrix}x_4 & x_5\end{pmatrix}'$

令非基变量 $X_{N_1}=\begin{pmatrix}x_4 & x_5\end{pmatrix}'=0$，得 $x_1=2, x_2=1, x_3=2$

对应基 B_1 的基本解：$X_1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$。