

# Notes of Operational Research

Xiang Zheng

August 10, 2019

## Abstract

## 1 运筹学概述

## 2 线性规划

### 2.1 线性规划的概念

#### 2.1.1 线性规划问题的导出

#### 2.1.2 线性规划的定义和数学描述

定义：目标函数和约束都是决策变量的线性表达式

- 目标要求/目标函数
- 限制条件/约束条件
- 非负条件
- 线性表达式（未知变量：决策变量）

e.g.

$$\begin{aligned} \max(\min) Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ s.t. \quad &\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq (=, \geq) b_2 \\ \cdots \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

- 线性规划模型的一般形式
- 线性规划模型的紧缩形式
- 线性规划模型的矩阵形式
- 线性规划模型的向量-矩阵形式

### 2.1.3 线性规划的标准型

- 目标函数极大化 max
- 约束条件必须为等式
- 约束条件右端的常数必须为非负数
- 决策变量大于等于 0

将线性规划问题化为标准型：

e.g.

$$\begin{aligned} \min Z &= -x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 2, x_3 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

- 1)  $x_3$ , 令  $x_3 = x'_3 - x_4$ ;
- 2)  $x_2$ , 令  $x_2 = -x'_2, x'_2 \geq 0$ ;
- 3) 约束 1 引松弛变量;
- 4) 约束 2 引剩余变量;
- 5) 目标函数标准化, 引入变换  $Z' = -Z$ ;
- 6) 整理。

Obtain:

$$\begin{aligned} \max Z' &= x_1 - 5(-x'_2) + 2(x'_3 - x_4) + 0x_5 + 0x_6 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + (-x'_2) - (x'_3 - x_4) + x_5 = 6 \\ 2x_1 - (-x'_2) + 3(x'_3 - x_4) - x_6 = 5 \\ x_1 + (-x'_2) = 10 \\ x_1, x'_2, x'_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Final result:

$$\begin{aligned} \max Z' &= x_1 + 5x'_2 + 2x'_3 - 2x_4 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 - x'_2 - x'_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 + x'_2 + 3x'_3 - 3x_4 - x_6 = 5 \\ x_1 - x'_2 = 10 \\ x_1, x'_2, x'_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

## 2.2 线性规划的各种解和性质

- 可行解：满足约束条件和非负条件的决策变量的一组取值。
- 最优解：使目标函数达到最优解的可行解。
- 基本解：设  $AX = b$  是含  $n$  个决策变量、 $m$  个约束条件的 LP 的约束方程组,  $B$  是 LP 问题的一个基, 若令不与  $B$  的列相应的  $n - m$  个分量 (非基变量) 都等于零, 所得的方程组的解称为方程组  $AX = b$  关于基  $B$  的基本解, 简称 LP 的基本解。

基本解定义：令  $X$  满足  $AX = b$ ，若  $X \neq 0$ ，则  $X$  必有非零分量  $x_\alpha, x_\beta, \dots$ ，于是必存在方程式：

$$AX = x_\alpha a^\alpha + x_\beta a^\beta + \dots = b$$

其中， $a^\alpha, a^\beta, \dots$  为与  $x_\alpha, x_\beta, \dots$  对应的  $A$  阵列矢量，如果列矢量  $a^\alpha, a^\beta, \dots$  之间线性独立，则称  $X$  为基本解。若存在多个不同的非零基本解，则他们之间组合系数之和为 1 的线性组合也必是方程解，即方程必存在无穷多个解。

基本可行解：满足等式约束  $AX = b$  及自变量限制  $X \geq 0$  的解称为可行解，既是可行解又是基本解的解称为基本可行解。基本可行解是可行域的顶点，是满足非负条件的基本解。

基本最优解（对应的基为最优基）：使目标函数达到最优值的基本可行解。

e.g.

1. 可行解：对问题 (LP)

$$\begin{aligned} \max z &= CX \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

若  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  满足约束方程  $\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$ ，则称  $x_0$  为问题 (LP) 的一个可行解。

2. 可行域：(LP) 的全体可行解构成的集合称为可行域，即：可行域  $S = \{X | AX = b, x \geq 0\}$ 。

3. 最优解及最优值：设  $S$  是 (LP) 的可行域，若存在  $X^* \in S$ ，使得对任意的  $X \in S$ ，都有  $CX^* \geq CX$ ，则称  $X^*$  为问题 (LP) 的最优解， $Z^* = CX^*$  称为问题 (LP) 的最优值。

4. 若对任意大的  $M > 0$ ，都存在可行解使得该线性规划的目标函数值  $|Z| \geq M$ ，则称该线性规划问题无界。

5. 基与基本可行解：设  $B$  是 (LP) 问题的一个基，令非基变量取零可得  $AX = b$  的一个解  $X = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ ，称此解为对应于基  $B$  的基本解。

注意：若  $B^{-1}b \geq 0$ ，则  $X \geq 0$  即  $X$  是 (LP) 问题的基本可行解；若  $B^{-1}b < 0$ ，则  $X < 0$  即  $X$  不是 (LP) 问题的基本可行解。

6. 基本可行解定义：满足  $X_B = B^{-1}b \geq 0$  的基本解  $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$  称为基本可行解，对应的基称为可行基。基本可行解的个数  $\leq C_n^m$ ， $m$  为限制条件的个数， $n$  为决策变量的个数。

e.g. 对线性规划问题，

$$\begin{aligned} \max z &= 7x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解：其标准型为

$$\begin{aligned} \max z &= 7x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_5 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{系数矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5)$$

So, 该问题的基 ( $r=3$  且行列式不为零) 有:

$$B_1 = (P_1 \ P_2 \ P_3), \text{ 基变量 } X_{B_1} = (x_1 \ x_2 \ x_3)', \text{ 非基变量 } X_{N_1} = (x_4 \ x_5)'$$

$$B_2 = (P_3 \ P_4 \ P_5), \text{ 基变量 } X_{B_2} = (x_3 \ x_4 \ x_5)', \text{ 非基变量 } X_{N_2} = (x_1 \ x_2)'$$

$$\dots$$

以  $B_1$  为例,  $B_1 = (P_1 \ P_2 \ P_3)$  为基,  $N_1 = (P_4 \ P_5)$  非基

基变量  $X_{B_1} = (x_1 \ x_2 \ x_3)'$ , 非基变量  $X_{N_1} = (x_4 \ x_5)'$

令非基变量  $X_{N_1} = (x_4 \ x_5)' = 0$ , 得  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$

对应基  $B_1$  的基本解:  $X_1 = (2 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0)'$ 。

## 2.3 线性规划的图解法和解的几何表示

### 2.3.1 图解法

1. 线性规划的图解法: 就是用几何作图的方法分析并求出其最优解的过程。

2. 求解的思路

1) 先将约束条件加以图解, 求得满足约束条件的解的集合 (即可行域)

2) 然后结合目标函数的要求从可行域中找出最优解。

3. 线性规划的可行域一定是凸多边形或凸多面体。4. 有关线性规划解的结论:

1) 若 (LP) 问题有可行解, 则可行域是一个凸多边形 (或凸多面体)。它可能是有界的; 也可能是无界的。

2) 若 (LP) 问题有最优解, 则最优解可能是唯一的; 也可能是无穷多个。如果是唯一的, 这个解一定在该凸多边形的某个顶点上; 如果是无穷多个, 则这些最优解一定充满凸多边形的一条边界 (包括此边界的两个顶点)。

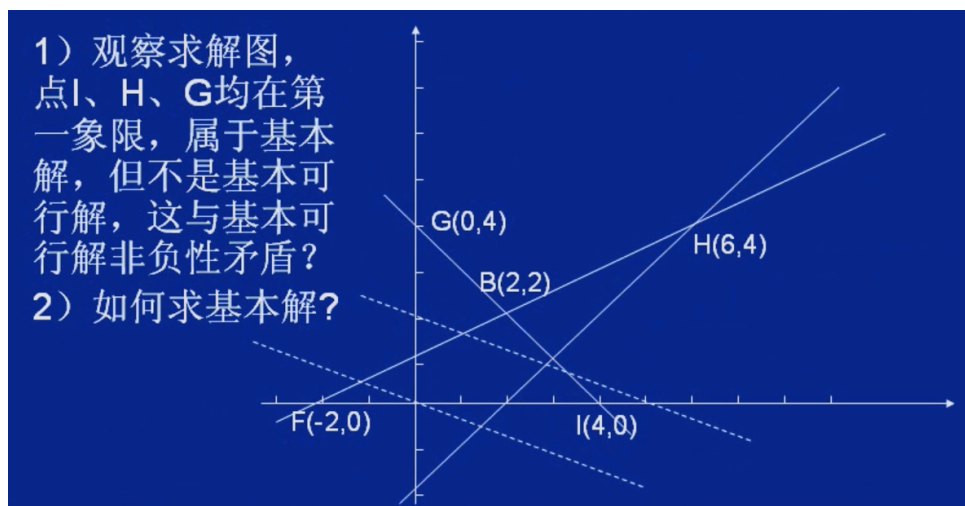
3) 若 (LP) 问题有可行解, 但没有有限最优解, 此时凸多边形是无界的。

4) 若 (LP) 问题没有可行解, 则该问题没有最优解。

### 2.3.2 基本可行解的几何意义

1. e.g.

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$



第一步模型标准化：需增加  $(x_3, x_4, x_5)$  三个额外变量

第二部按照基本解的定义

- 找基。不超过  $C_5^3$
- 确定基变量和非基变量；
- 令非基变量为 0，解出基变量；
- 基变量和相应非基变量搭配构成基本解。

$H(6, 4, -6, 0, 0)^T, C(3, 1, 0, 3, 0)^T, B(2, 2, 0, 0, 2)^T, D(2, 0, 2, 4, 0)^T, F(-2, 0, 6, 0, 4), I(4, 0, 0, 6, -2)^T, E(0, -2, 6, 6, 0)^T, A(0, 1, 3, 0, 3)^T, G(0, 4, 0, -8, 6)^T, O(0, 0, 4, 2, 2)^T$

$H, I, G$  三点虽满足  $x_1, x_2 \geq 0$ ，但不满足  $x_3, x_4, x_5 \geq 0$ ，所以  $H, I, G$  是基本解而不是基本可行解。

2. 结论：

- 基本解对应所有可行域边界延长线、坐标轴之间的交点；
- 基本可行解对应可行域的顶点。

3. 基本可行解包括退化基本可行解和非退化基本可行解。

退化基本可行解：基本可行解中，存在取 0 值的基变量，对应的基称为退化基。

非退化基本可行解：基本可行解中，基变量的取值均大于 0，对应的基称为非退化基。

4. 线性规划问题分为退化的线性规划问题和非退化的线性规划问题。

### 2.3.3 线性规划解的性质

1. 基本概念：

- 凸集：设  $K$  是  $n$  维欧氏空间的一个点集，若任意两点  $x_1, x_2 \in K$  的连线上的一点  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in K (0 < \alpha < 1)$ ，则  $K$  为凸集。
- 凸组合：设  $x_1, x_2, \dots, x_k$  是  $n$  维欧氏空间中的  $k$  个点，若存在  $k$  个数  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  满足  $0 < \mu_i < 1, i = 1, 2, \dots, k; \sum_{j=1}^k \mu_j = 1$ 。则称  $X = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \dots + \mu_k x_k$  为  $x_1, x_2, \dots, x_k$  的凸组合。
- 顶点：设  $K$  是凸集， $X \in K$ ；若  $X$  不能用  $x_1, x_2 \in K$  的线性组合表示，即  $X \neq \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 (0 < \alpha < 1)$ ，则称  $X$  为  $K$  的一个顶点（也称极点或角点）。

2. 基本定理

- 线性规划问题的可行解集（即可行域）： $D = \{X | \sum_{j=1}^n P_j x_j = b, x_j \geq 0\}$  是凸集。
- 设  $D = \{X | \sum_{j=1}^n P_j x_j = b, x_j \geq 0\}$ ，则  $X$  是  $D$  的一个顶点的充分必要条件是： $X$  是线性规划问题的基本可行解。
- 引理：若  $K$  是有界凸集，则任意一点  $X \in K$  可表示为  $K$  的顶点的凸组合。
- 若可行域非空有界，则线性规划问题的目标函数一定可以在可行域的顶点上达到最优值。
- 若目标函数在  $k$  个顶点处达到最优值 ( $k \geq 2$ )，则在这些顶点的凸组合上也达到了最优值。

### 3. 结论

- 线性规划的所有可行解构成的集合是凸集。
- 线性规划问题的每一个基本可行解都对应可行域的一个顶点。
- 若线性规划有最优解，必定可在可行域的某个顶点上达到。

## 2.4 单纯形法

1. 单纯形法的基本思想：**顶点的逐步转移**，即从可行域的一个顶点（基本可行解）开始，转移到另一个顶点（另一个基本可行解）的迭代过程，转移的条件是使目标函数值得到改善（逐步变优），当目标函数达到最优值时，问题也就得到了最优解。

2. 转移条件：使目标函数值得到改善

3. 转移结果：得到 LP 最优解，目标函数达到最优值

4. 单纯形法的基本步骤：

- a) 找出一个可行基，并得到一个基本可行解。
- b) 检验该基本可行解是否是最优解，即目标函数值是否最大，或看看是否存在目标函数值比它大的基本可行解。
- c) 换一个目标函数值比它大的基本可行解。
- d) 重复以上步骤，直至找不到更优的基本可行解。

### 2.4.1 单纯形法原理（用代数法求解 LP）

e.g.

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

解：1. 引入非负的松弛变量  $x_4, x_5$ ，将该 LP 化为标准型

$$\begin{aligned} \max Z &= 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_5 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

2. 寻求初始可行基，确定基变量

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 取可行基 } B = (P_4, P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应的基变量是  $x_4, x_5$ ;

3. 写出初始基本可行解和对应的目标函数值

a) 用非基变量表示基变量  $\begin{cases} x_4 = 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 9 - x_1 - 4x_2 - 7x_3 \end{cases}$ 。令非基变量为 0, 求出初始基本可行解  $X^{(0)} = (0, 0, 0, 3, 9)^T$

b) 用非基变量代入到目标函数,  $Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$

4. 分析两个基本表达式, 看看目标函数是否可以改善

a) 分析用非基变量表示目标函数的表达式  $Z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$ , 非基变量前面的系数均为正数, 所以任意一个非基变量进基都能使  $Z$  值增加

note: 通常把非基变量前面的系数叫“检验数”。

b) 选哪一个非基变量进基?

- 任意一个正检验数对应的非基变量
- 最大正检验数对应的非基变量
- 排在最前面的正检验数对应的非基变量

c) 确定出基变量

当  $x_1$  进基时,  $x_4, x_5$  会减小, 但有限度-必须大于等于 0, 以保持解的可行性。于是

$$\begin{cases} x_4 = 3 - x_1 \geq 0 \\ x_5 = 9 - x_1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq \frac{3}{1} \\ x_1 \leq \frac{9}{1} \end{cases} \Rightarrow x_1 \leq \min\left(\frac{3}{1}, \frac{9}{1}\right) = 3 = \theta$$

**最小比值原则 ( $\theta$  原则)**

当  $x_1$  的值从 0 增加到 3 时,  $x_4$  首先变为 0, 此时  $x_5 = 6 > 0$ , 因此选  $x_4$  为出基变量 (换出变量)。

d) 基变换

新的基变量- $x_1, x_5$ ; 新的非基变量- $x_2, x_3, x_4$ 。

写出用非基变量表示基变量的表达式

$$\begin{cases} x_4 = 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ x_5 = 9 - x_1 - 4x_2 - 7x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_5 = 6 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 \end{cases}$$

得到新的基本可行解  $X^{(1)} = (3, 0, 0, 0, 6)^T$

e) 用非基变量表示目标函数

$$\begin{aligned} Z &= 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ &= 2(3 - x_2 - x_3 - x_4) + 3x_2 + 3x_3 \\ &= 6 + x_2 + x_3 - x_4 \end{aligned}$$

可得相应的目标函数值为  $Z^{(1)} = 6$

f) 检验数仍有正数, 返回 a) 进行讨论。

**上述过程何时停止?**

当用非基变量表示目标函数的表达式中, 非基变量的系数 (检验数) 全部非正时, 当前的基本可行解就是最优解。

原因: 分析用非基变量表示目标函数的表达式, 如果让负检验数所对应的变量进基, 目标函数值将下降!

## 2.5 线性规划的应用

1. 使用线性规划方法处理实际问题必须具备的条件 (建模条件)

- 优化条件

- 选择条件
- 限制条件
- 变量相关性

## 2. 建模步骤

- 设置要求解的决策变量
- 找出所有限制，即约束条件
- 明确目标要求，并用决策变量的线性函数来表示，确定对函数是取极大还是取极小的要求

## 3. 典型的线性规划在经济管理上的应用举例：

- 1) 合理利用线材问题
- 2) 配料问题
- 3) 投资问题
- 4) 产品计划问题
- 5) 劳动力安排
- 6) 运输问题

# 3 线性规划的对偶理论及应用

## 3.1 单纯形法的矩阵形式

## 3.2 线性规划的对偶问题

1. 对偶思想举例：周长一定的矩形中，以正方形面积最大；面积一定的矩形中，以正方形周长最小。

例：生产计划问题：要求制定一个生产计划方案，在总劳动力和原材料可能供应的范围内，使得产品的总利润最大。

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{S.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

其**对偶问题**：它的对偶问题就是一个价格系统，使在平衡了劳动力和原材料的直接成本后，所确定的价格系统最具有竞争力：

$$\begin{aligned} \text{Min } W &= 3y_1 + 9y_2 \\ &\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 + 4y_2 \geq 3 \\ y_1 + 7y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

用于生产第  $i$  种产品的资源转让收益不小于生产该种产品时获得的利益。

## 2. 对偶变量的经济意义：

- 对偶变量的经济意义可以解释为对工时及原材料的单位定价；若工厂自己不生产产品 A、B、C，将现有的工时以及原材料转而接受外来加工时，那么上述的价格系统能保证不亏本又最富有竞争力（包工及原材料的总价格最低）



- 当原问题和对偶问题都取得最优解时,这一对线性规划对应的目标函数值是相等的:  $Z_{\max} = W_{\min} = 8$

### 3. 饮食与营养问题