“电梯概率”导出的悖论与猜想

数学与应用数学 09 级　魏正潇　sherloconan@vip.qq.com

摘要：本论文解答了一道“求电梯停下次数的数学期望”的实际问题，即 m 个人通过一部电梯上楼，共有 n 楼层，则电梯停下次数的数学期望为多少？论文以 m=4,n=4 为例，采取三种方法解答问题，并由第三种解题方法导出悖论：无法解释 ξ=0 的情形，即电梯一次未停下。并由此提出猜想电梯停下次数的数学期望表达式为：$E_\xi = [1-(1-1/n)^m]\times n = \dfrac{n^m-(n-1)^m}{n^{m-1}}$。

关键词： 电梯概率，数学期望，二项分布

一、　序言

目前，世界第一高楼为阿联酋的哈利法塔，俗称迪拜楼。据悉，迪拜楼高 828 米，共有 160 层，57 部升降电梯。电梯的定期检查和维护给经营方造成庞大的支出费用，因此对电梯的使用情况进行数学建模是件尤为重要的工作，其中的一个关键指标便是电梯停下的次数的数学期望。

笔者先将问题简化：**4 个人通过一部电梯上楼，共有 2、3、4、5 四个楼层，问电梯停下的次数的数学期望是多少？**

答案为 $175/64$。笔者将提供三种解答方法，方法一为直观思路，方法二运用了等效思想，方法三作为重点讨论，并由方法三导出悖论与猜想。

二、　第一解答方法：直观思路

设电梯停下的次数为 ξ，分析样本空间。4 个人分别都可以选择在 4 楼层中的某一层停下，显然有 $4^4 = 256$ 种下电梯的可能性。

① ξ = 1 时,即电梯只停 1 次,只可能 4 人都在某一楼层下电梯,有 C_4^1 种可能性。故概率为

$P(\xi=1)=\dfrac{C_4^1}{4^4}=\dfrac{4}{256}$。这里为了形式一致的需要，文中有些分式未化简。

② ξ = 2 时，即电梯停下 2 次：可能一次下 1 人、另一次下 3 人；也可能一次下 2 人、另一次下 2 人。

一次下 1 人、另一次下 3 人，有 $(C_4^1C_3^3)\bullet A_4^2$ 种可能性。先在 4 人中选出 1 人（C_4^1），再选出 3 人（C_3^3），然后 4 个楼层排列出 2 层（A_4^2），让这两组人分别下电梯。

一次下 2 人、另一次下 2 人，涉及到“均分问题”。即将 4 个人均分为 2 组有 $\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$ 种分法，

下电梯的可能性有 $\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\bullet A_4^2$ 种。

故概率 $P(\xi = 2) = \frac{A_4^2(C_4^1C_3^3 + \frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2})}{4^4} = \frac{84}{256}$。

③ ξ = 3 时，即电梯停下 3 次，只可能一次下 1 人、一次下 1 人、另一次下 2 人。这里将 4 人分成 3 组，其中又涉及“均分问题”。先分出 2 人（C_4^2），剩下 2 人再均分，即一共有 $C_4^2\ \frac{C_2^1C_1^1}{A_2^2}$ 种分法。故概率 $P(\xi = 3) = \frac{A_4^3(C_4^2\ \frac{C_2^1C_1^1}{A_2^2})}{4^4} = \frac{144}{256}$。

④ ξ = 4 时，即电梯停下 4 次，只可能每次都停。将 4 人进行全排列 4!，依次在 2、3、4、5 楼层下电梯。故概率 $P(\xi = 4) = \frac{4!}{4^4} = \frac{24}{256}$。

综合上述，我们得到电梯停下次数的分布列：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{4}{256}$	$\frac{84}{256}$	$\frac{144}{256}$	$\frac{24}{256}$

故题设所求电梯停下次数的数学期望：

$$E_\xi = 1\times\frac{4}{256} + 2\times\frac{84}{256} + 3\times\frac{144}{256} + 4\times\frac{24}{256} = \frac{175}{64}$$

可以看到，此题对于排列组合知识的掌握能力要求较高，并且计算比较复杂。当乘电梯的人数比较大时，电梯停下 x 次时的分类讨论就显得冗长。根据“隔板法”，可得定理：对于 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = m$（$n, m \in N^*$，且 $m \geq n$）的正整数解的个数为 $N = C_{m-1}^{n-1}$。因此，当有 m 个人，电梯停下 x 次时，就有 C_{m-1}^{x-1} 种下电梯的情况。本题设下，当 ξ=2 时，$C_{m-1}^{\xi-1} = C_{4-1}^{2-1} = 3$。即电梯停下 2 次时：第一次下 1 人、第二次下 3 人，或者第一次下 2 人、第二次下 2 人，或者第一次下 3 人、第二次下 1 人，共计 3 种情况。

三、 第二解答方法：等效思想

如果说，读者先入为主的观念是“乘客选择楼层”，我们不妨打破常规，将问题变为“楼层选择乘客”。设 4 名乘客分别为 A、B、C、D，则假设有形如 ABCD 的四个空位，分别要填入 2、3、4、5 四个字符，并且字符可以被重复使用。那么样本空间由 $4^4 = 256$ 个元素构成，任意一个排列数就对应一种电梯停下的方式。例如：2234 表示电梯停 3 次，A、B 在 2 楼层下，C 在 3 楼层下，D 在 4 楼层下；3245 表示电梯停 4 次，B 在 2 楼层下，A 在 3 楼层下，C 在 4 楼层下，D 在 5 楼层下。

① ξ = 1，则将 1 个字符填入空位。选出这个字符有 C_4^1 种可能性。故概率为

$P(\xi = 1)\dfrac{C_4^1}{4^4} = \dfrac{4}{256}$。

② ξ = 2，则将 2 个字符填入空位。先选出这 2 个字符，有 C_4^2 种可能性。再填入空位，有 2^4 种可能性。但从中要除去四个空位均填入相同字符（即电梯停一次）的情况，即 $2^4 - C_2^1$。故概率为 $P(\xi = 2) = \dfrac{C_4^2(2^4 - C_2^1)}{4^4} = \dfrac{84}{256}$。

③ ξ = 3，则将 3 个字符填入空位。先选出这 3 个字符，有 C_4^3 种可能性。再填入空位，同样地要除去只选择了 2 个字符和 1 个字符的情况，即 $3^4 - C_3^2(2^4 - C_2^1) - C_3^1$。故概率为

$P(\xi = 3) = \dfrac{C_4^3[3^4 - C_3^2(2^4 - C_2^1) - C_3^1]}{4^4} = \dfrac{144}{256}$。

④ ξ = 4，则将 4 个字符进行全排列，有 4！种可能性。故概率为

$P(\xi = 4) = \dfrac{4!}{256} = \dfrac{24}{256}$。

综合上述，得到 $E_\xi = {}^{175}\!/_{64}$，答案一致。可以看到，方法二运用了等效思想，转化为放字符的问题。分析难度减小，但仍然考验读者的计算能力。有没有既容易分析，又方便计算的方法呢？

四、 第三解答方法：二项分布

我们知道，电梯停下取决于按键。现在有 4 个人，他们每个人在 4 个楼层中任意一层停下的概率与每个人按 4 个按键中任意一个的概率一致，即 $p_0 = \dfrac{1}{4}$。那么每个人在某一楼层不下电梯的概

率为$1-p_0=\frac{3}{4}$，4 个人都不在这一楼层下电梯的概率为$(1-p_0)^4=\frac{81}{256}$，从而 4 个人中有人在这一楼层下电梯（即电梯在这一楼层停下）的概率为$p=1-(1-p_0)^4=\frac{175}{256}$。

或者换个思路。4 个人在剩下的 3 个楼层中选择，有3^4种可能性，所以电梯不在某一层停下的概率为$p_2=\frac{3^4}{4^4}=\frac{81}{256}$，从而电梯在这层停下的概率为$p=1-p_2=\frac{175}{256}$。

电梯停下的次数是个随机变量，我们按照 n 次伯努利实验来分析，即服从二项分布，ξ～$B(4,\frac{175}{256})$。很快就可以得到$E_\xi=np=4\times\frac{175}{256}=\frac{175}{64}$，答案一致。

但是，**方法三存在一个悖论**。既然是二项分布的话，就存在ξ=0 的情形，这也就是意为着电梯一层都未停下？这是不可能的！

其分布列显然也与前两个方法的不一样：

ξ	0	1	2	3	4
P	$C_4^0p^0(1-p)^4=\frac{43046721}{4294967296}$	$C_4^1p^1(1-p)^3=\frac{372008700}{4294967296}$	$C_4^2p^2(1-p)^2=\frac{1205583750}{4294967296}$	$C_4^3p^3(1-p)^1=\frac{1736437500}{4294967296}$	$C_4^4p^4(1-p)^0=\frac{937890625}{4294967296}$

但答案却是正确的。不完全归纳地去验证“2 楼层 2 人下电梯”、“3 楼层 2 人下电梯”、“3 楼层 3 人下电梯”等其它情况下的题设，三种方法的答案仍然一致。想必方法三蕴含着比较复杂的等效原理。进一步计算“方差”，前两种方法得到的是$1695/4096$，而方法三得到的是$14175/16384$，两者不一致。这表明方法三确实存在问题，可能只能“侥幸地”用来求数学期望。

到此，笔者对于方法三的种种总结如下点有待研究的问题：①如何解释在二项分布下ξ=0 的含义？②如何解释利用二项分布公式求解的正确性？③方法三是否适合所有情况，即 m 与 n 取不同值时？

由此,笔者大胆提出猜想：m 个人通过一部电梯上楼，共有 n 楼层，则电梯停下次数的数学期望为

$$E_\xi=[1-(1-1/n)^m]\times n=\frac{n^m-(n-1)^m}{n^{m-1}}。$$

说明过程与方法三类似。某人在某一层楼下电梯的概率为 $1/n$，其不在此层下电梯的概率为 $(1-1/n)$，所有人都不在此层下电梯的概率为 $1-(1/n)^m$，那么有人在此层下电梯的概率则为 $1-(1-1/n)^m$，即电梯在某一层停下的概率 $p=1-(1-1/n)^m$。利用二项分布的结论，电梯停下次数的数学期望应为 $E_\xi=np=[1-(1-1/n)^m]\times n=\dfrac{n^m-(n-1)^m}{n^{m-1}}$。

广大读者试验证之。

五、 后续：另一道题目的“佐证”

无独有偶，在浙江大学数学系的《概率论与数理统计（第四版）》里也提出了一个类似“电梯概率”的题目，解题方法实质上也是二项分布法，但主编却未注意到“悖论”。现摘录如下：

一民航送客车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车。如到达一个车站没有旅客下车就不停车。以 X 表示停车的次数，求 E(X)（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各位旅客是否下车相互独立）。

解 引入随机变量 X_i。当在第 i 站没有人下车时，$X_i=0$；当在第 i 站有人下车时，$X_i=1$。i=1，2，…，10。易知 $X=X_1+X_2+...+X_{10}$。现在来求 E(X)。

按题意，任一旅客在第 i 站不下车的概率为 9/10，因此 20 位旅客都不在第 i 站下车的概率为 $(9/10)^{20}$，在第 i 站有人下车的概率为 $1-(9/10)^{20}$，也就是

$P\{X_i=0\}=(9/10)^{20}, P\{X_i=1\}=1-(9/10)^{20}, i=1,2,...,10$。因此

$E(X_i)=1-(9/10)^{20}, i=1,2,...,10$。进而

$E(X)=E(X_1+X_2+...+X_{10})=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_{10})=10[1-(9/10)^{20}]=8.784$(次)

本题是将 X 分解成数个随机变量之和，然后里利用随机变量和数学期望等于随机变量数学期望之和来求数学期望的，这种处理方法具有一定的普遍意义。

虽然这道客车送客的题目是利用了（0-1）分布，但我们知道 n 个（0-1）分布实际上就是二项分布 X～（n,p）。无法避免地，此题解法仍然有 X_i 全部取值为 0，i=1,2,…,10 的悖论。

参考文献

[1]茆诗松、程依明、濮晓龙.《概率论与数理统计教程》.高等教育出版社，2004 年.89-93 页.

[2]茆诗松、程依明、濮晓龙.《概率论与数理统计教程习题与解答》.高等教育出版社，2005年.74-75页

[3]盛骤、谢式千、潘承毅.《概率论与数理统计（第四版）》.高等教育出版社，2008年.99-100页

魏正潇: 15216771808（学校期间用），15972100245（放假期间用）