Project 1

**题目**

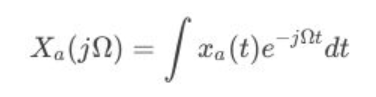
*Write programs (using Matlab or other software) to finish the exercises below.*

*For ,*

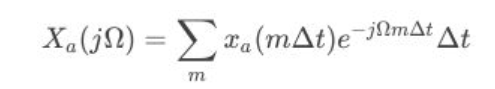
1. *Plot this signal and its frequency spectrum;*
2. *When the sampling period satisfies ，，, respectively, please plot the sampling signal  and its frequency spectrum, respectively. Please give explanation of these results;*
3. *Using lowpass filter with cutting frequency  to reconstruct signal  from . When the sampling period satisfies ，, respectively, please plot the reconstructed signal , and plot the absolute error between the reconstructed signal  and the original signal . Please analyze these results.*

**解答**

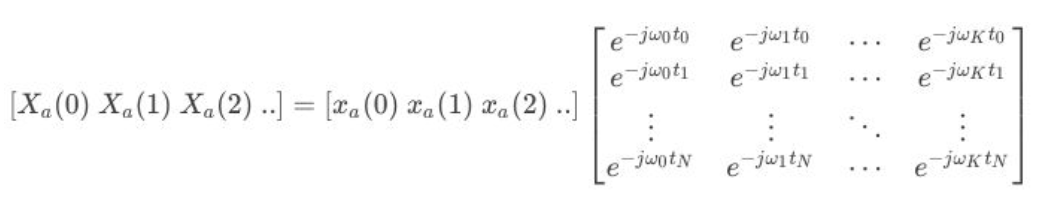
1. 首先是画出函数曲线，观察上述函数表达式，f(t)的定义域为R，但是只在[-π,π]取非0值，为画图方便，我们只画出其在[-10,10]的图像，很简单，此处不再赘述，下面我们画一下它的频谱。画出一个时域信号的频谱，首先要对其进行傅里叶变换，因为初始时域信号是连续信号，所以我们要做CTFT，公式如下：



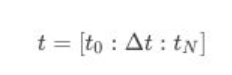
但是在计算机上无法直接做定积分运算，所以我们通过用级数模拟积分的方法来近似求解定积分的值。在这里，我们将-10到10划分为时间间隔△t为0.001的时间序列，求所有时刻函数值的级数近似作为-10到10之间的积分，近似公式如下：



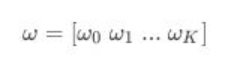
在Matlab中，函数的自变量因变量的集合都是使用矩阵来存储的，从矩阵的角度来看傅里叶变换的公式如下：



时间向量如下：



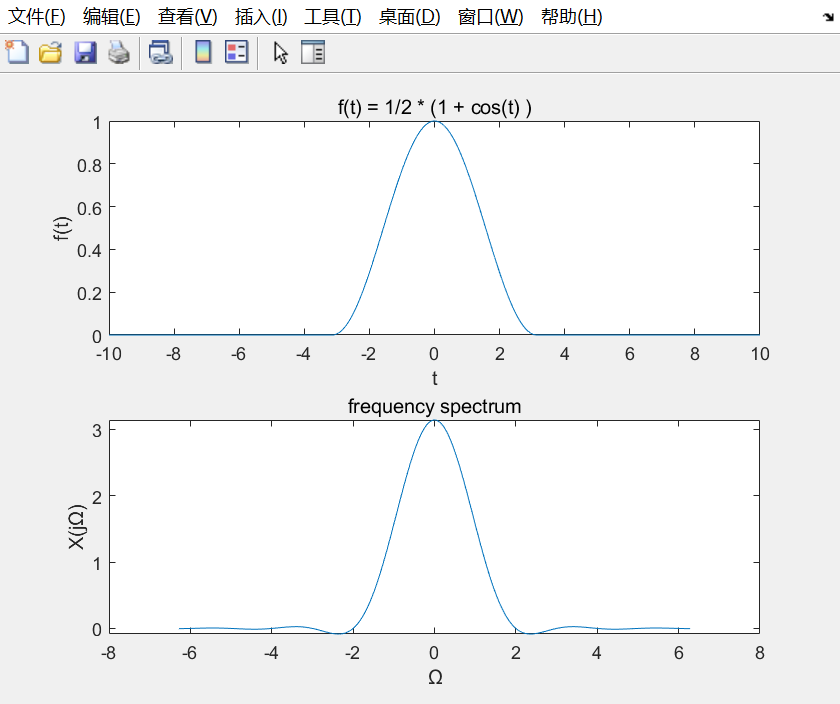
在这里，我们将[-2π,2π]的频率分为1000份，频率向量为：



矩阵指数为：



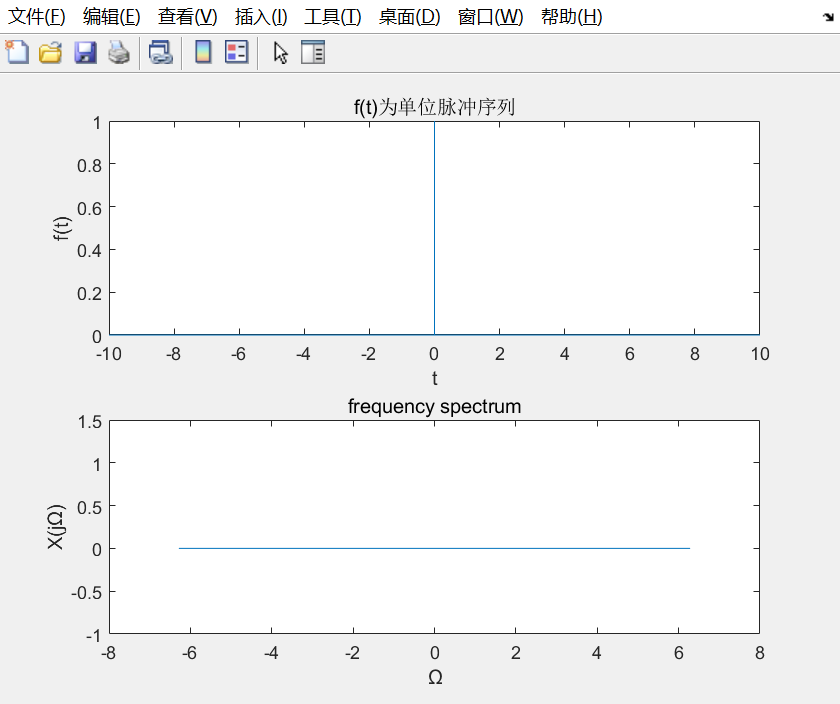
结果如下：



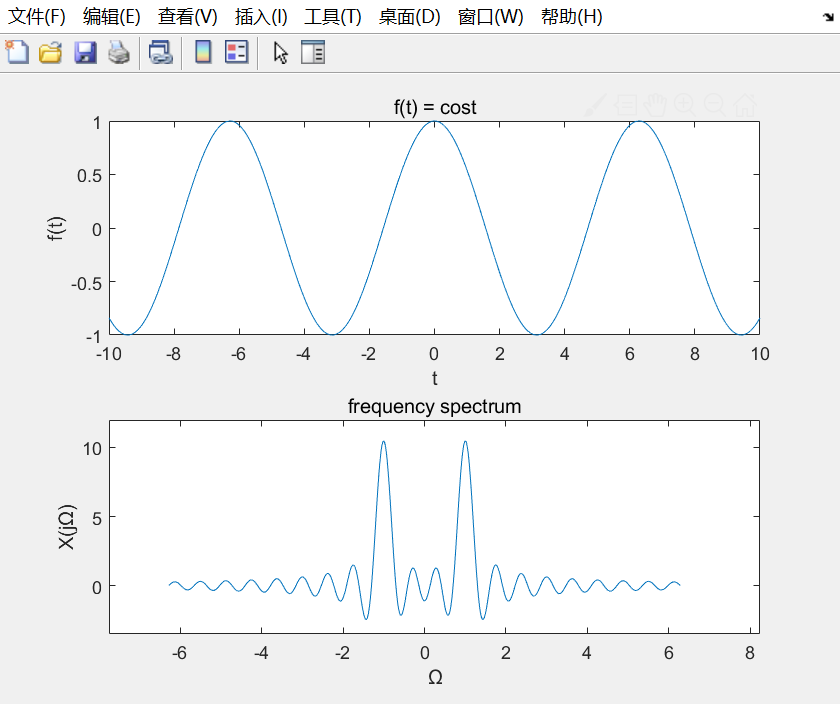
为了验证傅里叶变换过程的正确性，我使用了两个常用的时域函数作为测试函数来验证结果的正确性：

验证：

1. 计算单位脉冲的傅里叶变换是正确的



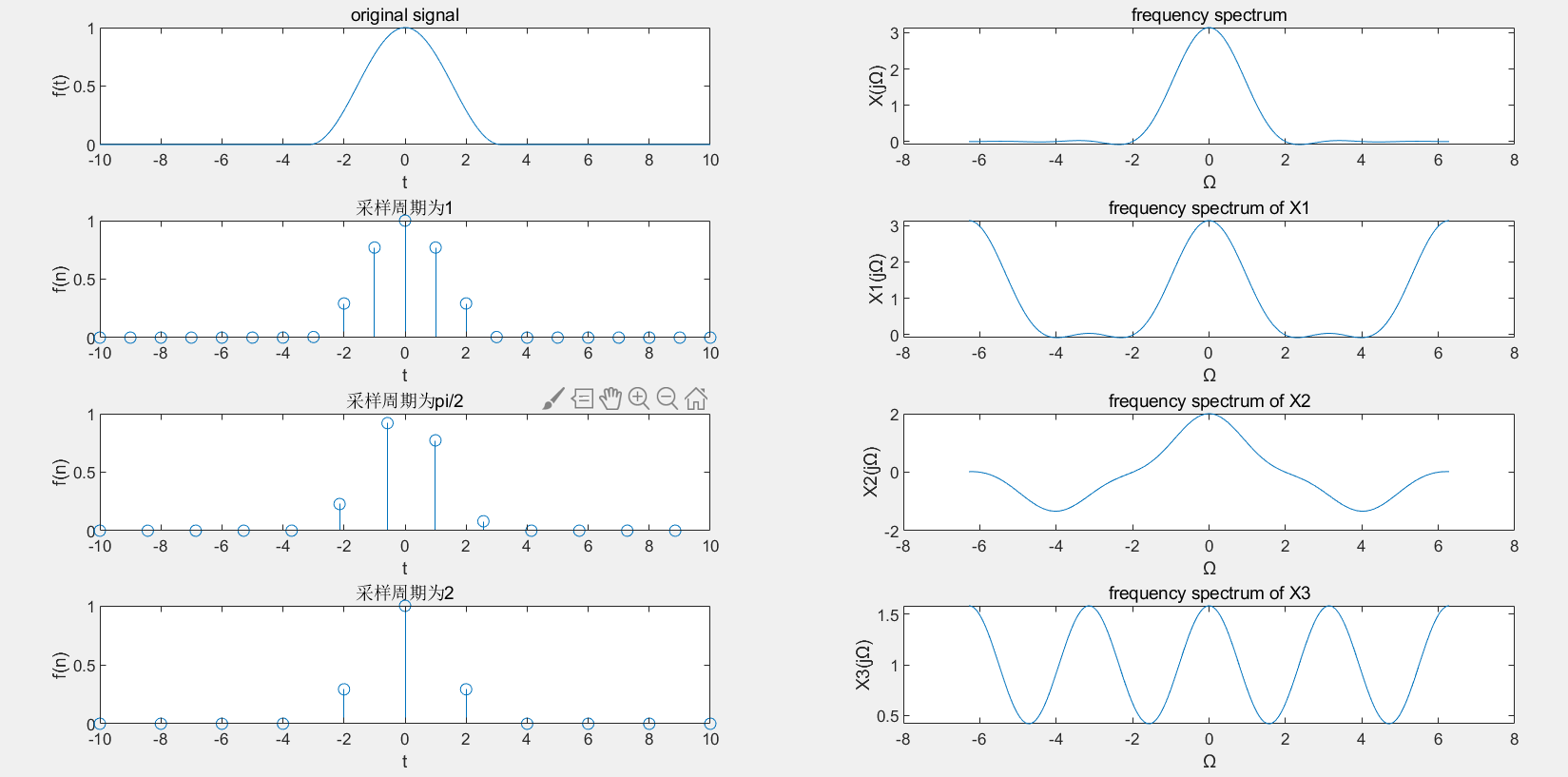
1. 计算y = cost的傅里叶变换的结果也是正确的



Matlab源码如下：



(2) 第二小题要求对于采样周期分别为1，π/2，2时，画出其采样信号以及对应的频谱。这里依旧设定定义域为[-10,10]，且只画出1000个频率值，因为采样在上次作业做过，这里不再赘述(代码注释也写得很清楚)，频谱的画法同(1)，结果如下：



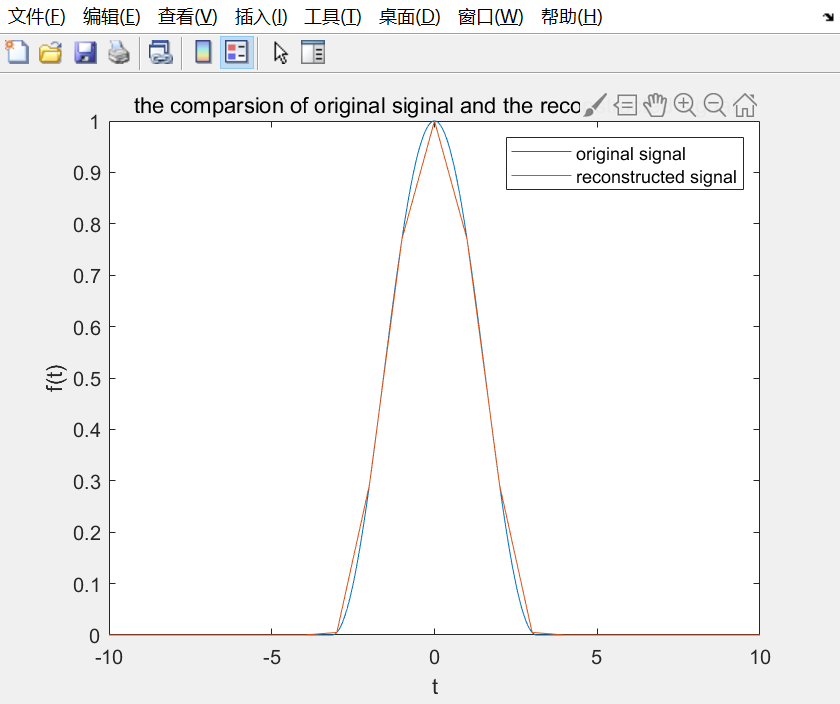
结果分析：

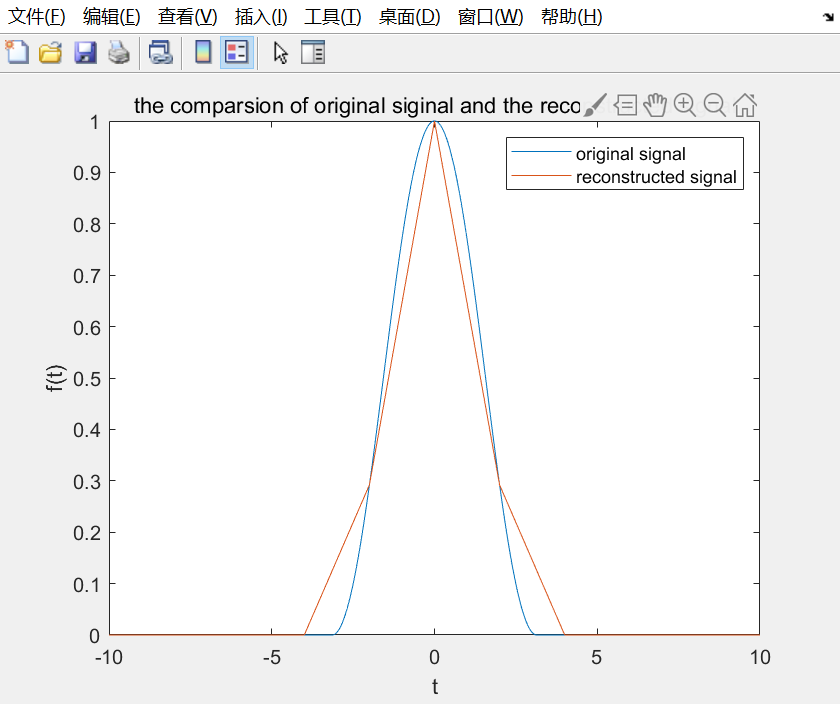
首先明确一点，采样信号在频域上的表现是初始信号频域上图像的左右周期扩展，观察采样周期为1的采样信号，可以看到得到了很好的体现。但是对于采样周期为π/2和2的采样信号来说，频域上某个周期内的图像好像和初始信号在频域上的差别很大，这是因为其采样频率过低，无法很好地恢复出初始信号。根据采样定理，采样频率必须至少为被采样信号的最高频率的2倍时，采样之后的信号才能不失真。

Matlab源码如下：

1. %在整个程序中,w、Dt和t的值都是不变的
2. % w表示采样的频率
3. % t是为了模拟连续时间信号取的时间序列
4. % Dt代表时间序列t任意两个相邻时间内的时间间隔
5. Dt = 0.0001;
6. t = -10:Dt:10;
7. f = 0.\*(t < -pi) + 0.5\*(1 + cos(t)).\*(t >= -pi & t <= pi) + 0.\*(t > pi); % 分段函数，这里无法表示负无穷到正无穷所以用-10到10近似
8. %以上过程为建立原始信号
9. subplot(4,2,1);
10. plot(t,f);
11. xlabel('t');
12. ylabel('f(t)');
13. title('original signal');
14. %绘制原始信号的图像
15. w = linspace(-2\*pi,2\*pi,1000); % [-2pi,2pi]之间的频率区间分割为1000份
16. X = f\*exp(-1j\*t'\*w)\*Dt; %傅里叶变换，t'的每个相邻时间差是0.0001，足够小，我们近似认为此时级数等于积分
17. subplot(4,2,2);
18. plot(w,X);
19. xlabel('Ω');
20. ylabel('X(jΩ)');
21. title('frequency spectrum');
23. T1 = 1; %采样周期为1
24. dt1 = 1/T1; %采样间隔，在上面我们初始化原始信号的范围是-10到10；
25. tn1 = -10:dt1:10;
26. f1 = 0.\*(tn1 < -pi) + 0.5\*(1 + cos(tn1)).\*(tn1 >= -pi & tn1 <= pi) + 0.\*(tn1 > pi);
27. subplot(4,2,3);
28. stem(tn1,f1); %绘制采样信号图像
29. xlabel('t');
30. ylabel('f(n)');
31. title('采样周期为1');
32. X1 = f1\*exp(-1j\*tn1'\*w); %傅里叶变换，t'的每个相邻时间差是0.0001，足够小，我们近似认为此时级数等于积分
33. subplot(4,2,4);
34. plot(w,X1);
35. xlabel('Ω');
36. ylabel('X1(jΩ)');
37. title('frequency spectrum of X1');
39. T2 = pi/2; %采样周期为pi/2
40. tn2 = -10:T2:10;
41. f2 = 0.\*(tn2 < -pi) + 0.5\*(1 + cos(tn2)).\*(tn2 >= -pi & tn2 <= pi) + 0.\*(tn2 > pi);
42. subplot(4,2,5);
43. stem(tn2,f2); %绘制采样信号图像
44. xlabel('t');
45. ylabel('f(n)');
46. title('采样周期为pi/2');
47. X2 = f2\*exp(-1j\*tn2'\*w); %傅里叶变换，t'的每个相邻时间差是0.0001，足够小，我们近似认为此时级数等于积分
48. subplot(4,2,6);
49. plot(w,X2);
50. xlabel('Ω');
51. ylabel('X2(jΩ)');
52. title('frequency spectrum of X2');
54. T3 = 2; %采样周期为2
55. tn3 = -10:T3:10;
56. f3 = 0.\*(tn3 < -pi) + 0.5\*(1 + cos(tn3)).\*(tn3 >= -pi & tn3 <= pi) + 0.\*(tn3 > pi);
57. subplot(4,2,7);
58. stem(tn3,f3); %绘制采样信号图像
59. xlabel('t');
60. ylabel('f(n)');
61. title('采样周期为2');
62. X3 = f3\*exp(-1j\*tn3'\*w); %傅里叶变换，t'的每个相邻时间差是0.0001，足够小，我们近似认为此时级数等于积分
63. subplot(4,2,8);
64. plot(w,X3);
65. xlabel('Ω');
66. ylabel('X3(jΩ)');
67. title('frequency spectrum of X3');

(3) 对于第三小题，要求将采样周期为1、2的采样信号分别通过一个截止频率为w =





Matlab functions potentially used：

plot; subplot; axis; exp; cos; sinc; ones; length; stem; abs

参考材料：

**连续时间信号傅立叶变换的数值计算**

为了更好地体会MATLAB的数值计算功能，这里给出连续信号傅立叶变换的数值计算方法。方法的理论依据为：

 （1）

对于一大类信号，当取足够小时，上式的近似情况可以满足实际需要。若信号是时限的，或当大于某个给定值时，的值已经衰减得很厉害，可以近似地看成时限信号，则式（1）中的取值就是有限的，设为，有：

 （2）

上式是对式（1）中的频率进行取样，通常：

 （3）

采用MATLAB实现式（2）时，其要点是要正确生成的个样本的向量及向量，两向量的内积（即两矩阵相乘）的结果即完成式（2）的计算。

此外，还要注意取样间隔的确定。其依据是需小于奈奎斯特取样间隔。如果对于某个信号，它不是严格的带限信号，则可根据实际计算的精度要求来确定一个适当的频率为信号的带宽。

验证：