Ingenieursgrundlagen

Wichtige Zahlen: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$

$\pi \approx 3.141\,59$ $\quad e \approx 2.718\,28$ $\quad \sqrt{2} \approx 1.414$ $\quad \sqrt{3} \approx 1.732$

Griechisches Alphabet

αA	βB	$\gamma\Gamma$	$\delta\Delta$	$\varepsilon\epsilon E$	ζZ	ηH	$\vartheta\theta\Theta$	ιI	κK	$\lambda\Lambda$	μM
alpha	beta	gamma	delta	epsilon	zeta	eta	theta	iota	kappa	lambda	mu
νN	$\xi\Xi$	$o O$	$\pi\Pi$	$\varrho\rho P$	$\sigma\Sigma$	τT	$\upsilon\Upsilon$	$\varphi\phi\Phi$	χX	$\psi\Psi$	$\omega\Omega$
nu	xi	omikron	pi	rho	sigma	tau	upsilon	phi	chi	psi	omega

Einheiten-Prefixe

$10^{\pm}$	21	18	15	12	9	6	3	2	1
+	Z zetta	E exa	P peta	T tera	G giga	M mega	k kilo	h hecto	da deca
−	z zepto	a atto	f femto	p pico	n nano	µ micro	m milli	c centi	d deci

Dezibel (bei Amplitude $A^2 \propto P$)

$\mathrm{dB} = 10\lg\frac{P}{P_0}$	-20	-10	0	1	3	6	10	20
Leistung P	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	1.26	2	4	10	100
Amplitude A	$\frac{1}{10}$	0.316	1	1.22	1.4	2	3.16	10

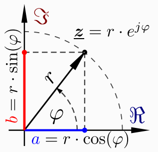
Mathematik $\quad e^{\alpha+\mathrm{i}\beta} = e^\alpha \cdot (\cos(\beta) + \mathrm{i}\cdot\sin(\beta))$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

1.1. Komplexe Zahlen $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$



$\boldsymbol{z} = a + b\mathrm{i}$ (Karthesisch) $= r\cdot e^{\mathrm{i}\varphi}$ (Polarkoord.)

$\boxed{\mathrm{i} = \sqrt{-1}}$ Imaginäre Einheit

$\mathrm{i}^{2n} = -1^n \qquad \mathrm{i}^{2n+1} = -\mathrm{i}^n \qquad \mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$

$\overline{\boldsymbol{z}} = a - b\mathrm{i} \qquad \boldsymbol{z}\overline{\boldsymbol{z}} = |\boldsymbol{z}|^2 = a^2 + b^2$

$\boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{z}_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$

$z^{-1} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{z}\overline{\boldsymbol{z}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{z}}}{a^2+b^2}$

1.2. Mittelwerte

Arithmetisches $\geq$ **Geometrisches** $\geq$ **Harmonisches**

$\overline{x}_{\text{ar}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \overline{x}_{\text{geo}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} \qquad \overline{x}_{\text{hm}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}$

Median: Zahl in der Mitte einer geordneten(ordinalen) Liste.
Modalwert: Häufigster Wert (geht auch bei nominaler Liste).

1.3. Wichtige Formeln

Dreiecksungleichung: $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\left|\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y}\right| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$

Bernoulli-Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ Aritmetrische Summenformel $\qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Geometrische Summenformel

1.4. Exponentialfunktion und Logarithmus

$a^x = e^{x\ln a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \ln x \leq x - 1$

$\ln(x^a) = a\ln(x) \qquad \ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a \qquad \log(1) = 0$

1.5. Sinus, Cosinus $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π
φ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme

$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$

Stammfunktionen

$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\sin(x)$

$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x)$

$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$

$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$

$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

$\sin(x \pm y) = \sin x\,\cos y \pm \sin y\,\cos x \qquad \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})$

$\cos(x \pm y) = \cos x\,\cos y \mp \sin x\,\sin y \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})$

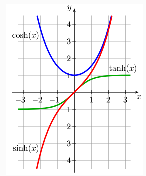
1.6. Sinus/Cosinus Hyperbolicus $\sinh, \cosh$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\mathrm{i}\,\sin(\mathrm{i}x)$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(\mathrm{i}x)$

$\cosh x + \sinh x = e^x$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$



Kardinalsinus $\mathrm{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

genormt: $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

1.7. Integralgarten $\int e^x \mathrm{d}x = e^x = (e^x)'$

Partielle Integration: $\int uw' = uw - \int u'w$

Substitution: $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$F(x) - C$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$x\cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\mathrm{Si}(x)$	$\mathrm{sinc}(x)$	$\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\int e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = e^{at}\frac{a\sin(bt)+b\cos(bt)}{a^2+b^2}$

$\int xe^{ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}e^{ax^2} \qquad \int t^2e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3}e^{at}$

Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern um x-Achse

$V = \pi\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x \qquad O = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$

Weg- und Oberflächeintegrale

$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot\left\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\right\|\mathrm{d}t \qquad \int_\gamma \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t))^\top\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t$

$\iint_{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{O} := \iint_B \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{\phi}(u,w)\big)^\top\cdot\big(\boldsymbol{\phi}_u \times \boldsymbol{\phi}_w\big)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w$

Integralsatz Gauß

$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \oint\!\!\oint_{\partial V} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}A$

Integralsatz Stokes

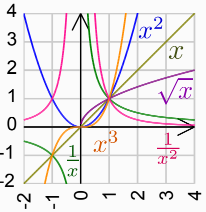
$\iint_A \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}A = \oint_{\partial A} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$

1.8. Taylorpolynom $T_{m,f,x_0}(x)$ (Reihe für $m \to \infty$)

$$T(x) = \sum_{i=0}^{m}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{z}^n}{n!} = e^{\boldsymbol{z}}$ Exponentialreihe

1.9. Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ vom Grad n



Gerade durch Punkt $P(x_0, y_0)$:
$y = m(x - x_0) + y_0$

Quadratisch: $y = ax^2 + bx + c$

Mitternachtsformel für Nullstellen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.10. Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$

Die Matrix $\underline{\boldsymbol{A}} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ hat m Zeilen $\underline{\boldsymbol{z}}_i^\top$ und n Spalten $\underline{\boldsymbol{s}}_j$

Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = |A|$

Entwickl. nach $i$ter Zeile: $|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot|A_{ij}|$

$\underline{\boldsymbol{A}}$ hat k lin. abhäng. Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$, $\dim(\ker\underline{\boldsymbol{A}}) = k$

Spezialfall 2×2 **Matrix** A

$\det(\underline{\boldsymbol{A}}) = ad - bc \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\underline{\boldsymbol{A}}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$

$\mathrm{Sp}(\underline{\boldsymbol{A}}) = a + d$

$\lambda_{1/2} = \frac{\mathrm{Sp}\,\underline{\boldsymbol{A}}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathrm{sp}\,\underline{\boldsymbol{A}}}{2}\right)^2 - \det\underline{\boldsymbol{A}}}$

Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\underline{\boldsymbol{v}}$

$$\underline{\boldsymbol{A}}\underline{\boldsymbol{v}} = \lambda\underline{\boldsymbol{v}} \qquad \det\underline{\boldsymbol{A}} = \prod\lambda_i \qquad \mathrm{Sp}\,\underline{\boldsymbol{A}} = \sum\lambda_i$$

Eigenwerte: $\det(\underline{\boldsymbol{A}} - \lambda\underline{\boldsymbol{1}}) = 0$, Det-Entwickl., Polynom-Div.

Eigenvektoren: $\mathrm{Eig}_A(\lambda_i) = \ker(\underline{\boldsymbol{A}} - \lambda_i\underline{\boldsymbol{1}}) = \underline{\boldsymbol{v}}_i$

1.11. Differentialoperatoren $\quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{f}}) \equiv 0$

Gradient $\mathrm{grad}\,f$

$$\nabla f = \begin{pmatrix}\partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f\end{pmatrix}$$

Rotation $\mathrm{rot}\,\underline{\boldsymbol{f}}$

$$\nabla\times\underline{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix}\partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1\end{pmatrix}$$

Divergenz $\mathrm{div}\,\underline{\boldsymbol{f}}$

$$\nabla^\top\cdot\underline{\boldsymbol{f}} = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

Laplace $\Delta f = \mathrm{Sp}\,\underline{\boldsymbol{H}}_f(\underline{\boldsymbol{x}})$

$$\underset{\nabla^\top\cdot(\nabla f)}{\nabla^2 f} = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i x_i}$$

Ableitungs-/Gradientenregeln: SF f, g sind partiell diffbar:

Linearität: $\nabla(\lambda f + \mu g)(\underline{\boldsymbol{x}}) = \lambda\nabla f(\underline{\boldsymbol{x}}) + \mu\nabla g(\underline{\boldsymbol{x}})$

Produkt: $\nabla(f\cdot g)(\underline{\boldsymbol{x}}) = g(\underline{\boldsymbol{x}})\nabla f(\underline{\boldsymbol{x}}) + f(\underline{\boldsymbol{x}})\nabla g(\underline{\boldsymbol{x}})$

Quotient: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)(\underline{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{g^2(\underline{\boldsymbol{x}})}\Big(g(\underline{\boldsymbol{x}})\nabla f(\underline{\boldsymbol{x}}) - f(\underline{\boldsymbol{x}})\nabla g(\underline{\boldsymbol{x}})\Big)$

Kettenregeln:

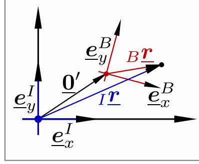
$h := g(f(\underline{\boldsymbol{x}}))$ für SF f, Fkt. g $\qquad h := f(\underline{\boldsymbol{g}}(x))$ für SF f, Kurve g

$\boxed{\nabla h(\underline{\boldsymbol{x}}) = g'(f(\underline{\boldsymbol{x}}))\cdot\nabla f(\underline{\boldsymbol{x}})} \qquad \boxed{h'(x) = \nabla f(\underline{\boldsymbol{g}}(x))^\top\cdot\dot{\underline{\boldsymbol{g}}}(x)}$

Jacobimat. $\underline{\boldsymbol{J}}_{\underline{\boldsymbol{f}}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix}\partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m\end{bmatrix}$

Hessematrix $\underline{\boldsymbol{H}}_f(\underline{\boldsymbol{x}}) =$ sym $\Leftrightarrow f \in C^2$ $\begin{bmatrix}\partial_{11} f & \cdots & \partial_{1n} f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f & \cdots & \partial_{nn} f\end{bmatrix}$

1.12. Koordinatensysteme $\quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$



Vektor $\underline{r}$ zur Basis B:

$_B\underline{r} = r_x\underline{e}_x^B + r_y\underline{e}_y^B + r_z\underline{e}_z^B$

$\underline{e}_i^B$ Basisvektor von B in i-Richtung

r_i Koordinate in i-Richtung

$r_i\underline{e}_i^B$ i-Komponente bezüglich B

I Basis des Inertialsystems I

Um einen karthesischen Vektor mit anderen Koordinaten darzustellen:

Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \\ z\end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cdot\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cdot\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cdot\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Basistransformation von Basis A zur Basis B mit Trafo-Matrix $_B\underline{\boldsymbol{T}}_A$:

$\boxed{_B\underline{\boldsymbol{v}} = {_B\underline{\boldsymbol{T}}_A}\cdot{_A\underline{\boldsymbol{v}}}}$ Spalten von $_B\underline{\boldsymbol{T}}_A$ entsprechen Basisvektoren von A in B dargestellt.

1.13. Zylinderkoordinaten

$\underline{r} = r\underline{e}_r + \varphi\underline{e}_\varphi + z\underline{e}_z \qquad -\pi < \varphi \leq \pi$

Oberflächenelemente: $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, $\quad r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$, $\quad \mathrm{d}z\,\mathrm{d}r$

Volumenelement: $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$

∇	$(\partial_r,\ \frac{1}{r}\partial_\varphi,\ \partial_z)^\top$
div	$\frac{1}{r}\partial_r(r\cdot F_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi(F_\varphi) + \partial_z(F_z)$
rot	$\left(\frac{1}{r}\partial_\varphi F_z - \partial_z F_\varphi,\ \partial_z F_r - \partial_r F_z,\ \frac{1}{r}\partial_r(rF_\varphi) - \partial_\varphi F_r\right)^\top$
Δ	$\frac{1}{r}\partial_{rr}(r\cdot f) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}f + \partial_{zz}f$

1.14. Kugelkoordinaten

$\underline{r} = r\underline{e}_r + \varphi\underline{e}_\varphi + \theta\underline{e}_\theta \qquad -\pi < \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$

Oberflächenelemente: $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, $\quad r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, $\quad r\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$

Volumenelement $\mathrm{d}V = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$

∇	$(\partial_r,\ \frac{1}{r}\partial_\varphi,\ \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta)^\top$
div	$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi(f_\varphi) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta f_\theta)$
Δ	$\frac{1}{r^2}\partial_{rr}(r^2 f) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}(\sin\theta f) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_{\theta\theta}f$

Stochastik

2.1. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathsf{P})$

Ergebnismenge $\quad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \quad$ Ergebnis $\omega_j \in \Omega$

Ereignisalgebra $\quad \mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\} \quad$ Ereignis $A_i \subseteq \Omega$

Wahrscheinlichkeitsmaß $\quad \mathsf{P} : \mathbb{F} \to [0, 1] \quad \mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Es gilt: $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:
$\mathsf{P}_B(A) = \mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A\cap B)}{\mathsf{P}(B)}$

Multiplikationssatz: $\mathsf{P}(A\cap B) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(B|A)\,\mathsf{P}(A)$

Erwartungswert: $\mathsf{E}[X] = \mu = \sum x_i P(x_i) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$

Varianz: $\mathsf{Var}[X] = \mathsf{E}\left[(X - \mathsf{E}[X])^2\right] = \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2$

Standard Abweichung $\sigma = \sqrt{\mathsf{Var}[X]}$

Covarianz: $\mathsf{Cov}[X, Y] = \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])(Y - \mathsf{E}[Y])] = \mathsf{Cov}[Y, X]$

Binominialverteilung (diskret, n Versuche, k Treffer):

$P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \mu = np \qquad \sigma^2 = np(1-p)$

2.2. Kombinatorik

Mögliche Variationen/Kombinationen um k Elemente von maximal n Elementen zu wählen bzw. k Elemente auf n Felder zu verteilen:

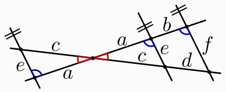
	Mit Reihenfolge	Reihenfolge egal
Mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Permutation von n mit jeweils k gleichen Elementen: $\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots}$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$\binom{n}{0}=1$ $\binom{n}{1}=n$ $\binom{4}{2}=6$ $\binom{5}{2}=10$ $\binom{6}{2}=15$

Geometrie $a^2+b^2=c^2$



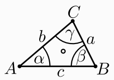
Strahlensatz:

$a:b=c:d$ $\quad \frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}=\frac{e}{f}$

Innenwinkelsumme im n-Eck: $(n-2)\cdot 180^\circ$

Allg. Dreieck $\triangle ABC$ mit Seiten a,b,c und Winkel α,β,γ:



Kosinussatz: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$

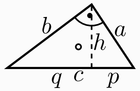
Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$

Projektionssatz: $c=a\cos\beta+b\cos\alpha$

Höhe $h_c=a\sin\beta=b\sin\alpha$ $\quad$ Fläche $A=\frac{1}{2}h_c c=\frac{1}{2}h_a a$

Schwerpunkt: $x_S=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)$ $\quad y_S=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)$

Rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\gamma=90^\circ$ bei C



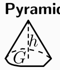
Pythagoras: $a^2+b^2=c^2$

Höhensatz: $h^2=pq$

Kathetensatz: $a^2=pc$

$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\tan\alpha$

Pyramide mit beliebiger Grundfläche G



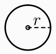
$V=\frac{1}{3}G\cdot h$

SP: liegt auf h mit $y_S=h/4$

Zylinder/Prisma

$V=G\cdot h$

$M=U\cdot h$



Kreis: $A=\pi r^2$ $\quad U=2\pi r$

Kugel: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad O=4\pi r^2$

Physik $E_0=m_0\cdot c^2$ $\quad E_0^2=E^2-c^2p^2$

Naturkonstanten

Lichtgeschwindigkeit	$c_0\equiv\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}:=299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Elementarladung	$\mathrm{e}\approx 1.602\,177\times10^{-19}\,\mathrm{C}$
PLANCK-Konst.	$h\approx 6.626\,069\,57\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
	$\hbar=\frac{h}{2\pi}\approx 1.054\,57\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$
Elektr. Feldkonst.	$\varepsilon_0\approx 8.854\,188\times10^{-12}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
Magn. Feldkonst.	$\mu_0:=4\pi\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
AVOGADRO-Konst.	$N_A\approx 6.022\,141\times10^{23}\,\frac{1}{\mathrm{mol}}$
Atomare Masse	$\mathrm{u}\approx 1.660\,539\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Elektronenmasse	$m_e\approx 9.109\,383\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Protonenmasse	$m_p\approx 1.674\,927\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Neutronenmasse	$m_n\approx 1.672\,622\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Gravitationskonst.	$\mathrm{G}\approx 6.673\,84\times10^{-11}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$
BOLTZMANN-Konst.	$k\approx 1.380\,655\times10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

Größe	Definition	Einheit	SI-Notation
Frequenz	$f=\frac{c}{\lambda}$	Hertz	$\mathrm{Hz}=\frac{1}{\mathrm{s}}$
Kraft	$\vec F=m\cdot\vec a$	Newton	$\mathrm{N}=\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$
Druck	$p:=\frac{F_\perp}{A}$	Pascal	$\mathrm{Pa}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}=\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}$
Arbeit, Energie	$W:=\int\vec F\,\mathrm{d}\vec s$	Joule	$\mathrm{J}=\mathrm{N\,m}=\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}$
Leistung	$P:=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$	Watt	$\mathrm{W}=\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^3}$
Spannung	$U:=\frac{W}{Q}$	Volt	$\mathrm{V}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{A\,s}^3}$
Ladung	$Q:=\int I\,\mathrm{d}t$	Coulomb	$\mathrm{C}=\mathrm{A\,s}$
Resistivität	$R:=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I}$	Ohm	$\Omega=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^3}$
Kapazität	$C:=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}U}$	Farad	$\mathrm{F}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}=\frac{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^4}{\mathrm{kg\,m}^2}$
Induktivität	$L:=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I}$	Henry	$\mathrm{H}=\frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{A}^2\mathrm{s}^2}$
Magnetischer Fluss	$\Phi_\mathrm{M}:=\int\vec B\,\mathrm{d}\vec A$	Weber	$\mathrm{Wb}=\mathrm{V\,s}=\frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{A\,s}^2}$
Magnetische Flussdichte	$\vec B:=\mu_0\vec H$	Tesla	$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}=\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A\,s}^2}$

$1\,\mathrm{in}=2.54\,\mathrm{cm}$ $\quad 1\,\mathrm{ft}=30.5\,\mathrm{cm}$ $\quad \mathrm{J}\cdot e=\mathrm{eV}$

$1\,\mathrm{bar}=10^5\,\mathrm{Pa}$ $\quad 1\,\mathrm{Å}=10^{-10}\,\mathrm{m}$ $\quad 1\,\mathrm{L}=10^{-3}\,\mathrm{m}^3$

4.1. Newtonsche Mechanik $\vec F=m\vec a$

	Translation	Rotation (Radius r)
Strecke/Winkel	$\vec x$	$\vec\varphi=\frac{\vec x}{r}$
Geschwindigkeit	$\vec v=\dot{\vec x}$	$\vec\omega=\dot{\vec\varphi}=\frac{\vec v}{r}$
Beschleunigung	$\vec a=\dot{\vec v}=\ddot{\vec x}$	$\vec\alpha=\dot{\vec\omega}=\ddot{\vec\varphi}=\frac{\vec a}{r}$
Masse/Trägh.	m	$\Theta=\int_V \vec r_\perp^{\,2}\,\mathrm{d}m$
Impuls/Drall	$\vec p=m\vec v$	$\vec L=\mathbf{\Theta}\vec\omega=\vec r\times\vec p$
Kraft/Moment	$\vec F=\dot{\vec p}=m\vec a$	$\vec M=\dot{\vec L}=\mathbf{\Theta}\vec\alpha=\vec r\times\vec F$
Energie	$E_\mathrm{kin}=\frac{1}{2}mv^2$	$E_\mathrm{rot}=\frac{1}{2}\Theta\omega^2$
Leistung	$P=\vec F\cdot\vec v$	$P=\vec M\cdot\vec\omega$

4.2. Kinematik - Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}v&=v_0+at\\x(t)&=\tfrac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\\2ax&=v^2-v_0^2\end{aligned}}\qquad\boxed{\begin{aligned}\omega&=\omega_0+\alpha t\\\varphi(t)&=\tfrac{1}{2}\alpha t^2+\omega_0t+\varphi_0\\2\alpha\varphi&=\omega^2-\omega_0^2\end{aligned}}$$

4.3. Wichtige Kräfte und Energien

$F_\mathrm{g}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\approx\vec g m$ $\qquad F_\mathrm{el}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1q_2}{r^2}$

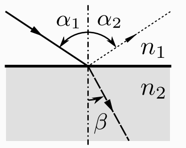
$F_\mathrm{z}=-m\frac{v^2}{r}=-m\omega^2r$ $\qquad F_\mathrm{R}=\mu F_\mathrm{N}$ $\qquad \vec F_\mathrm{H}\le\mu_0\vec F_\mathrm{N}$

Energie: $E=\int\vec F^\top\cdot\mathrm{d}\vec s$ $\qquad E_\mathrm{pot}=mgh=\frac{1}{2}kx^2$

4.4. Wellen $\Psi(x,t)=A\cdot\cos(\omega t-kx)$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i^2}=0\qquad \begin{aligned}c&=\lambda f\\\omega&=2\pi f\end{aligned}\qquad k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

4.5. Optik $\quad n_1<n_2 \qquad n^2=\varepsilon_r\mu_r$



Reflexion: $\underset{\text{Einfallwinkel}}{\alpha_1}=\underset{\text{Ausfallwinkel}}{-\alpha_2}$

Brechung: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

Brewster-Winkel: $\tan(\alpha_B)=\frac{n_2}{n_1}$

Grenzwinkel: $\sin(\alpha_G)=\frac{n_2}{n_1}$

Phasensprung um π bei (Total-)Reflexion am optisch dichteren Medium!

Relativitätstheorie $E=mc^2$

$\gamma=1\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\qquad E=mc^2$ $\quad E_0^2=E^2-c^2p^2$ $\qquad m^*=\gamma\cdot m_0$ $\quad t_0=\gamma\cdot t^*$

Elektrotechnik $\quad U=R\cdot I$

Elektrizität		Magnetismus	
Ladung	$Q=\int I\,\mathrm{d}t$	Fluss	$\Phi_M=\int U_\mathrm{ind}\,\mathrm{d}t$
Strom	$I=\dot Q$	Spannung	$U_\mathrm{ind}=\dot\Phi_M$
Permittivität	$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$	Permeabilität	$\mu=\mu_r\mu_0$

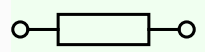
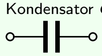
Maxwellsche Gleichungen (Naturgesetze)

Gaußsches Gesetz: $\operatorname{div}\vec D=\varrho$

Faradaysches ind. Gesetz: $\operatorname{rot}\vec E+\frac{\partial\vec B}{\partial t}=0$

Quellfreiheit des magn. Feldes: $\operatorname{div}\vec B=0$

Ampèrsches Gesetz: $\operatorname{rot}\vec H=\vec j+\frac{\partial\vec D}{\partial t}$

Resistiv	Kapazitiv	Induktiv
$\mathrm{d}I=G\,\mathrm{d}U$	$\mathrm{d}Q=C\,\mathrm{d}U$	$\mathrm{d}\Phi_M=L\,\mathrm{d}I$
$\vec j=\sigma\vec E$	$\vec D=\varepsilon\vec E$	$\vec B=\mu\vec H$
$\mathrm{d}I=\vec j\,\mathrm{d}A$	$\mathrm{d}U=\vec E\,\mathrm{d}\vec r$	$\mathrm{d}\Phi_M=\vec B\,\mathrm{d}A$
$\vec j=qn\vec v$	$Q(V)\equiv\oiint_{\partial V}\vec D\,\mathrm{d}\vec A$	$I(A)\equiv\oint_{\partial A}\vec H\,\mathrm{d}\vec r$
Widerst. $R=\rho\frac{l}{A}$	Kondensator $C=\varepsilon\frac{A}{d}$	Spule $L=\mu A\frac{N^2}{l}$
		

Serienschaltung		Parallelschaltung	
$u=\sum u_i$	$i=\mathrm{const.}$	$u=\mathrm{const.}$	$i=\sum i_i$
$q=\mathrm{const.}$	$\Phi_\mathrm{M}=\sum\Phi_{\mathrm{M},i}$	$q=\sum q_i$	$\Phi_\mathrm{M}=\mathrm{const.}$
$R=\sum R_i$	$M=\sum M_i$	$\frac{1}{R}=\sum\frac{1}{R_i}$	$\frac{1}{M}=\sum\frac{1}{M_i}$
$\frac{1}{C}=\sum\frac{1}{C_i}$	$L=\sum L_i$	$C=\sum C_i$	$\frac{1}{L}=\sum\frac{1}{L_i}$
$\boldsymbol Z=\sum\boldsymbol Z_i$	$\frac{1}{\boldsymbol Y}=\sum\frac{1}{\boldsymbol Y_i}$	$\frac{1}{\boldsymbol Z}=\sum\frac{1}{\boldsymbol Z_i}$	$\boldsymbol Y=\sum\boldsymbol Y_i$

5.1. Quantenphysik $\quad E_\mathrm{ph}=f\cdot h=\hbar\cdot\omega=\frac{hc}{\lambda}$

De Broglie: $\boxed{\lambda\cdot\vec p=h}$ $\qquad p=\hbar k$ $\qquad \hbar=\frac{h}{2\pi}$ $\qquad k=\frac{2\pi}{\lambda}$

Unschärferelationen: (Werner Heisenberg) $\quad\boxed{\Delta x\cdot\Delta p_x\ge\frac{\hbar}{2}}$ $\quad\boxed{\Delta E\cdot\Delta t\ge\frac{\hbar}{2}}$

Lichtspektrum: λ : 700, 600, 570, 520, 460 in nm

5.2. Thermodynamik

$\boxed{\underset{\text{innere Energie}}{\mathrm{d}U}=\underset{\text{Wärmeenergie}}{\delta Q}+\underset{\text{Volumenarbeit}}{\delta W}=T\,\mathrm{d}S-p\,\mathrm{d}V}$

$Q=C\cdot\Delta T=\int T\,\mathrm{d}S$ $\qquad W_{1,2}=-\int_1^2 p\,\mathrm{d}V$

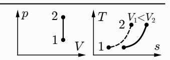
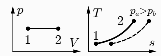
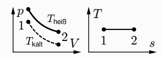
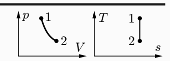
Wärmekapazität: $C=c\cdot m=c_\mathrm{m}\cdot n$

Thermische Energie eines Teilchens mit f Freiheitsgraden:

$\boxed{E_\mathrm{therm}=\frac{f}{2}kT}$ $\qquad$ Thermische Rauschenergie bei 300K: $\Delta E_\mathrm{therm}=kT=25.85\,\mathrm{meV}$

Jede Wärmekraftmaschine: $\eta<\eta_\mathrm{Carnot}=1-\frac{T_\mathrm{kalt}}{T_\mathrm{heiß}}$

Zustandsgleichung ideales Gas: $\boxed{pV=nT\cdot N_Ak}$

Prozess	Formel	$Q_{1,2}$	$W_{1,2}$	p-V Diag.	T-s Diag.
Isochore $\dot V=0$	$\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}$	$c_{\mathrm{m},v}\Delta T$	0		
Isobar $\dot p=0$	$\frac{V_2}{V_1}=\frac{T_2}{T_1}$	$c_{\mathrm{m},p}\Delta T$	$-p\Delta V$		
Isotherm $\dot T=0$	$\frac{p_2}{p_1}=\frac{V_1}{V_2}$	$-W_{1,2}$	$RT\ln\frac{p_2}{p_1}$		
Isentrop $\dot S=0$	$\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$				

Adiabatenexponent: $\kappa=\frac{c_p}{c_v}=\frac{f+2}{f}$ $\qquad c_{\mathrm{m},p}-c_{\mathrm{m},v}=R$

Zerfallsstrahlung

$\alpha-$Zerfall $\quad {}^{m}_{n}\mathrm{X}^0\longrightarrow{}^{m-4}_{n-2}\mathrm{Y}^{2-}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}$

$\beta^\mp-$Zerfall $\quad {}^{m}_{n}\mathrm{X}^0\longrightarrow{}^{m}_{n\pm1}\mathrm{Y}^\pm+{}^{0}_{\mp1}\mathrm{e}^\mp+{}^{0}_{0}\overline{\nu}_e$

$\gamma-$Zerfall $\quad {}^{m}_{n}\mathrm{X}^*\longrightarrow{}^{m}_{n}\mathrm{X}+{}^{0}_{0}\gamma$

n=																		
1	1,00794 1 H Wasserstoff																	4,00260 2 He Helium
2	6,941 3 Li Lithium	9,01218 4 Be Berylium					200,59 80 Hg Quecksilber						10,811 5 B Bor	12,0107 6 C Kohlenstoff	14,0067 7 N Stickstoff	15,9994 8 O Sauerstoff	18,9984 9 F Fluor	20,180 10 Ne Neon
3	22,9898 11 Na Natrium	24,305 12 Mg Magnesium											26,9815 13 Al Aluminium	28,0855 14 Si Silicium	30,9738 15 P Phosphor	32,065 16 S Schwefel	35,453 17 Cl Chlor	39,948 18 Ar Argon
4	39,0983 19 K Kalium	40,078 20 Ca Calcium	44,9551 21 Sc Scandium	47,867 22 Ti Titan	50,9415 23 V Vanadium	51,9961 24 Cr Chrom	54,9380 25 Mn Mangan	55,845 26 Fe Eisen	58,9332 27 Co Cobalt	58,6934 28 Ni Nickel	63,546 29 Cu Kupfer	65,409 30 Zn Zink	69,723 31 Ga Gallium	72,61 32 Ge Germanium	74,9216 33 As Arsen	78,96 34 Se Selen	79,904 35 Br Brom	83,798 30 Kr Krypton
5	85,4678 37 Rb Rubidium	87,62 38 Sr Strontium	88,9059 39 Y Yttrium	91,224 40 Zr Zirkonium	92,9064 41 Nb Niob	95,94 42 Mo Molybdän	98 4,2Ma 43 Tc β- Technetium	101,07 44 Ru Ruthenium	102,906 45 Rh Rhodium	106,42 46 Pd Palladium	107,868 47 Ag Silber	112,411 48 Cd Cadmium	114,818 49 In Indium	118,710 50 Sn Zinn	121,750 51 Sb Antimon	127,60 52 Te Tellur	126,904 53 I Iod	131,293 54 Xe Xenon
6	132,905 55 Cs Caesium	137,327 56 Ba Barium	=> La-Lu Lanthanoide	178,49 72 Hf Hafnium	180,948 73 Ta Tantal	183,84 74 W Wolfram	186,207 75 Re Rhenium	190,23 76 Os Osmium	192,217 77 Ir Iridium	195,084 78 Pt Platin	196,967 79 Au Gold	200,59 80 Hg Quecksilber	204,383 81 Ti Titan	207,2 82 Pb Blei	208,980 83 Bi Bismut	209,98 84 Po Polonium	209,987 85 At Astat	222 3,8d 86 Rn α Radon
7	223 22m 87 Fr α Francium	226 1,6ka 88 Ra α Radium	=> Ac-Lr Actinoide	253–262 104 Rf Rutherford	261–263 105 Db Dubium	265–266 106 Sg Seaborg	261–264 107 Bh Bohrium	269 10s 108 Hs Hassium	268 109 Mt Meitnerium	271 110 Dt Darmstadt	272 111 Rg Roentgen	277 112 Cn Copernic		289 114 Fl Flerovium		293 116 Lv Livermorium		
	s1	s2	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	p1	p2	p3	p4	p5	p6

138,906 57 La Lanthan	140,116 58 Ce Cer	140,908 59 Pr Praseodym	144,24 60 Nd Neodym	145 61 Pm Promethium	150,36 62 Sm Samarium	151,964 63 Eu Europium	157,25 64 Gd Gadolinium	158,925 65 Tb Terbium	162,50 66 Dy Dysprosium	164,930 67 Ho Holmium	167,26 68 Er Erbium	168,934 69 Tm Thulium	173,04 70 Yb Ytterbium	174,967 71 Lu Lutetium
227 89 Ac Actinium	232 90 Th Thorium	231 91 Pa Protactinium	238 92 U Uran	237 93 Np Neptunium	244 94 Pu Plutonium	243 95 Am Americium	247 96 Cm Curium	247 97 Bk Berkelium	251 98 Cf Californium	252 99 Es Einsteinium	257 100 Fm Fermium	258 101 Md Mendelevium	259 102 No Nobelium	262 103 Lr Lawrencium
f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	d1