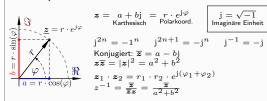


# Regelungssysteme

# 1. Mathematische Grundlagen

# 1.1. Komplexe Zahlen $oldsymbol{z} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$



#### 1.2. LaPlace - Korrespondenzen und Rechenregeln

g(t)	$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$
Einheitsimpuls $\delta(t)$	1
Einheitssprung $\sigma(t)$	$\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s^2}}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \ (n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
$t^n \ (n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \ (n=1,2,3,\ldots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$t^n e^{-at} \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{\frac{1}{(s+a)^n}}{\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{b-a}(e^{at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{\frac{(s+a)(s+b)}{s}}{\frac{(s+a)(s+b)}{s}}$
$\frac{1}{ab}(1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}))$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

Zeitbereich	Frequenzbereich	Kommentar
$c_1g_1(t) + c_2g_2(t)$	$c_1G_1(s) + c_2G_2(s)$	Linearitätsregel
$g(t-T_t)$	$e^{-sT_t}G(s)$	Verschiebungsregel
g(at)	$\frac{1}{a}G(\frac{s}{a})$	Ähnlichkeitsregel
$e^{at}$	G(s-a)	Dämpfungsregel
$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$	sG(s)	Differentiationsregel
$\int_{0}^{t} g(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}G(s)$	Integrationsregel

Hinweis: wird noch vervollständigt

# 1.3. Exponentialfunktion und Logarithmus

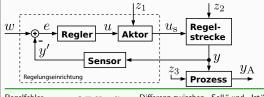
$a^x = e^{x \ln a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\ln x \le x - 1$
$\ln(x^a) = a \ln(x)$	$\ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$	log(1) = 0

#### 1.4. Matrizen

#### 1.4.1. $2 \times 2$ -Matrix invertieren

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

# 2. Der Regelkreis



Regelfehler	e = w - y	Differenz zwischen "Soll" und "Ist
Stellgröße	$u_{S}$	Eingang der Regelgröße
Führungsgröße	w	Sollverlauf, Vorgabe
Aufgabengröße	$y_A$	Die zu beinflussende Größe
Regelgröße	y	Die vom Sensor erfasste Größe
Störgrößen	$z_i$	Nicht beeinflussbare Störungen

#### 2.1. Standardübertragungsfunktionen

Gelten für den oben dargestellten Standardregelkreis.

$$\begin{split} G_0(s) &= G_{\mathrm{R}} G_{\mathrm{S}} G_{\mathrm{r}} \\ Y(s) &= \frac{G_{\mathrm{R}} G_{\mathrm{S}}}{1+G_0} W + \frac{G_{\mathrm{S}}}{1+G_0} Z_1 + \frac{1}{1+G_0} Z_2 + \frac{-G_0}{1+G_0} Z_3 \\ E(s) &= \frac{1}{1+G_0} W + \frac{-G_{\mathrm{S}} G_{\mathrm{r}}}{1+G_0} Z_1 + \frac{-G_{\mathrm{r}}}{1+G_0} Z_2 + \frac{-G_{\mathrm{r}}}{1+G_0} Z_3 \end{split}$$

Zustand: Ausgang eines Integrators

# 3. Modellbildung, Linearisierung, lin. Systeme

#### 3.1. Zustandsbeschreibung linearer Systeme

mit r Erregungen, n Zustandsgrößen und k Ausgängen. Die Zustandsgrößen æ müssen einen stetigen Verlauf haben!

Allgemeine Zustandsgleichung: Allgemeine Ausgangsgleichung:	
Zustandsvariable	$\underline{\boldsymbol{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$
Ausgangsvariable	$\underline{\underline{y}}(t) \in \mathbb{R}^k$
Erregungsvektor	$\overline{\underline{u}} \in \mathbb{R}^r$
Systemmatrix	$oldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n  imes n}$
Einkopplungsmatrix	$oldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n  imes r}$
Auskopplungsmatrix	$oldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{k  imes n}$
Durchgangsmatrix	$oldsymbol{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{k  imes r}$

Falls A. B. C oder D zeitvariabel sind handelt es sich um ein LTV-System, falls nicht um ein LTI-System.

#### 3.2. Linearisierung

Gegegeben (nicht linear):  $\underline{\dot{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$  $y = g(\underline{x}, \underline{u})$ 

### 3.2.1. um eine allg. Referenzlösung

Referenzlösung  $\underline{\boldsymbol{x}}^*(t)$ ,  $\boldsymbol{y}^*(t)$ ,  $\underline{\boldsymbol{u}}^*(t)$  mit  $t \geq 0$  liegt vor.

$$\Delta \underline{\dot{x}} = \underbrace{A}_{[a,b]}(t) \Delta \underline{x} + \underbrace{B}_{[a,b]}(t) \Delta \underline{u}$$

$$\underline{\underline{A}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \Big|_{(\underline{\boldsymbol{w}}^*(t), \underline{\boldsymbol{u}}^*(t))} \qquad \underline{\underline{B}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \end{bmatrix} \Big|_{(\underline{\boldsymbol{w}}^*(t), \underline{\boldsymbol{u}}^*(t))}$$

$$\Delta \underline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{\underline{C}}(t) \Delta \underline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\underline{D}}(t) \Delta \underline{\boldsymbol{u}}$$

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{\sigma}} & \underline{\underline{\sigma}}(t) - \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}}(t) - \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \\ & \underline{\underline{C}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{bmatrix} \Big|_{(\underline{\underline{w}}^*(t), \underline{\underline{u}}^*(t))} & \underline{\underline{D}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \end{bmatrix} \Big|_{(\underline{\underline{w}}^*(t), \underline{\underline{u}}^*(t))} \end{aligned}$$

# 3.2.2. um eine Ruhelage

Spezielle Referenzlösung  $\underline{x}^*$ ,  $y^*$ ,  $\underline{u}^*$  konstant in Ruhelage.

$$\begin{array}{lll} \Delta \underline{\dot{\boldsymbol{w}}} = \boldsymbol{A} \Delta \underline{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{B} \Delta \underline{\boldsymbol{u}} & \Delta \underline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C} \Delta \underline{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{D} \Delta \underline{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}_{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\boldsymbol{w}}^*, \boldsymbol{\boldsymbol{u}}^* \end{pmatrix}} & \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}_{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\boldsymbol{w}}^*, \boldsymbol{\boldsymbol{u}}^* \end{pmatrix}} \\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \end{bmatrix}_{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\boldsymbol{w}}^*, \boldsymbol{\boldsymbol{u}}^* \end{pmatrix}} & \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \end{bmatrix}_{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\boldsymbol{w}}^*, \boldsymbol{\boldsymbol{u}}^* \end{pmatrix}} \end{array}$$

# 4. Darstellung von LTI-SISO Systemen

### 4.1. Differentialgleichungen (DGL)

Gleichung mit Funktion y und deren n-ten Ableitungen  $y', y'', \dots$ Allgemeine DGL n-ter Ordnung:

 $a_ny^{(n)}+\ldots+a_1y'+a_0y=b_mx^{(m)}+\ldots+b_1x'+b_0x$  Gesucht ist eine Funktion y und keine Zahl! In der Praxis werden DGLs numerisch für diskrete Werte gelöst.

#### 4.1.1. DGL-Systeme

Jede DGL lässt sich reduzieren auf ein DGL-System 1. Ordnung:

1. Substituiere 
$$x_i := y^{(i-1)}$$
 und drücke  $\dot{x}_i$  durch  $x_1, ..., x_n$  aus. 
$$\Rightarrow \boxed{\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{s}(t)} \quad \text{mit } \underline{x}_{\text{ges}} = \underline{x}_{\text{hom}} + \underline{x}_{\text{part}}$$

Hom. Lösung: 1. Bestimme EW  $\lambda_i$  und Basis aus EV  $\underline{\boldsymbol{b}}_i$  von  $\boldsymbol{\underline{\mathcal{A}}}$ 

2. 
$$\underline{\boldsymbol{x}}_{\text{hom}} = \underline{\boldsymbol{c}} \cdot e^{(x-x_0)} \widetilde{\underline{\boldsymbol{A}}} = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot e^{\lambda_i x} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}_i$$

3. Bestimmung der Konstanten durch einsetzen der Anfangsbedingungen!

#### 4.2. Die Übertragungsfunktion

Beschreibt das System vollständig. Wird im Laplacebereich angegeben. Übertragungsfunktion einer lin. DGL n-ter Ordnung in Polynomform:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_m s^m + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

(n = Ordnung der DGL = Anzahl der Pole)

Übertragungsfunktion der Zustandsbeschreibung:  $G(s) = \{C(sE - A)^{-1}B + D\}$ 

für q = r = 1 (SISO-System):  $G(s) = \{\underline{c}^T (sE - A)^{-1}\underline{b} + d\}$ 

 $\begin{array}{l} \text{Linearfaktorenform: } G(s) = \frac{\beta_m}{\alpha_n} \frac{\prod(s-z_j)}{\prod(s-p_i)} \\ \text{Zeitkonstantenform: } G(s) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \frac{\prod(1+T_v s)}{\prod(1+T s)} \end{array}$ 

Partialbruchform:  $G(s) = A_0 \sum_{s=n}^{\infty} \frac{A_j}{s=n} = A_0 + G^+(s)$ 

#### 4.2.1. Dominierendes Verhalten und Ordnungsreduktion

Pole nahe der Imaginärachse dominieren. Anwendung auf Zeitkonstanten-

- Sortiere Zeitkonstanten nach Größe
- $\bullet \;$  Gilt zwischen 2 benachbarten Werten  $T_i > 10 \tau_j$  , so können  $\tau_j \; \mathrm{und}$
- alle kleineren Werte vernachlässigt werden. 
    $G(s) = \frac{K}{\prod_i (1+T_i s)} \frac{1}{\prod_i (1+\tau_j s)} \rightarrow G^*(s) = \frac{K}{\prod_i (1+T_i s)}$

- Zeitkonstanten aus Polen:  $T_i=\frac{1}{|p_i|}$  Pole auf oder rechts von Imaginärachse dürfen *nicht* vernachlässigt

#### 4.2.2. Wichtige spezielle Übertragungsfunktionen (Frequenzantw.)

u(t)	U(s)	Zeitantwort	Frequenzantwort	
$\delta(t)$	1	Gewichtsfunktion $g(t)$	G(s)	
$\sigma(t)$	<u>1</u>	Übergangsfunktion $h(t)$	H(s)	
$t \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s^2}$	Anstiegsantw.	Rampenantwort	
ÜTE Porlor C- (a)				

ÜTF Regler  $G_{R}(s)$ ÜTF Steller/Strecke  $G_{S}(s)$ 

ÜTF Rückführung  $G_r(s)$ 

 $\begin{array}{l} \text{ $\overline{U}$TF offener Regelkreis } G_{\mathsf{O}}(s) = G_{\mathsf{R}}(s)G_{\mathsf{S}}(s)G_{\mathsf{r}}(s) \\ \text{F\"u}hrungs\"ubertragungsfunktion } G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \\ \end{array}$ 

Störübetragungsfunktion  $G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)}$ 

Es gilt  $N_{RK}(s) = N_O + Z_O$ 

## 4.2.3. Frequenzgang

Der FG ist die Systemantwort bei harmonischer Erregung  $u(t)=e^{\mathrm{j}\omega\,t}$ Nach dem Einschwingen (wird ignoriert) ist die Systemantwort ebenfalls harmonisch, allerdings mit anderer Amplitude und Phase.

Frequenzgang:  $G(\mathrm{j}\omega)=G(s)|_{s=0+\mathrm{j}\omega,\omega>0}=A(\omega)e^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$ 

#### 4.2.4. Zustandsraummodell

DGL n-ter Ordnung:

 $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u$ Lässt sich immer reduzieren auf ein DGL-System 1. Ordnung:

$$\begin{split} & \underline{\dot{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ & \text{wobei } \underline{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{b_0} \begin{bmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \end{bmatrix}^\top \end{split}$$

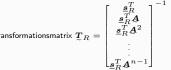
 Kanonische Normalform zur Entkopplung des Systems bzw. der zugehörigen DGLs. Wähle T, sodass  $T^{-1}AT$  eine Diagonalmatrix ist:

$$\begin{split} & \underline{T}^{-1} \tilde{\underline{A}} \underline{T} = \operatorname{diag}(\lambda_i) \\ & \underline{\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}} = \operatorname{diag}(\lambda_i) \underline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}} + \underline{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{k}} u \\ & y = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k}}^T \underline{\boldsymbol{x}}_{\underline{\boldsymbol{k}}} + du \end{split}$$

Regelungsnormalform:

nur die letzte Zustandsvariable  $\boldsymbol{x}_{Rn}$  wird direkt durch den Eingang

Steuerbarkeitsmatrix:  $\mathbf{S}_S = \begin{bmatrix} \underline{b} & \mathbf{A}\underline{b} & \mathbf{A}^2\underline{b} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\underline{b} \end{bmatrix}$ ! RNF existiert nur falls  $S_S$  regulär ist  $\rightarrow$  System ist vollst. steuerbar



• Beobachtungsnormalform:

 $\underline{\dot{x}}_B = \underline{A}_B \underline{x}_B + \underline{b}_B u \quad \underline{x}_B(t_0) = \underline{x}_{B0}$  $y = \underline{\boldsymbol{c}}_B^T \underline{\boldsymbol{x}}_B + du$ Beobachtbarkeitsmatrix

Transformationsmatrix 
$$\underline{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{A} = [\underline{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{a} \quad \underline{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{A}^2 \quad \dots \quad \underline{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{A}^{n-1}]^\top$$

$$\underline{\boldsymbol{T}}_B = [\underline{\boldsymbol{s}}_B \quad \underline{\boldsymbol{A}}\underline{\boldsymbol{s}}_B \quad \dots \quad \underline{\boldsymbol{A}}^{n-1}\underline{\boldsymbol{s}}_b]$$

$$\underline{\boldsymbol{A}}_R = \underline{\boldsymbol{A}}_R^T \quad \underline{\boldsymbol{b}}_R = \underline{\boldsymbol{c}}_B \quad \underline{\boldsymbol{c}}_R = \underline{\boldsymbol{b}}_B$$

#### 4.3. Schockschaltbildalgebra

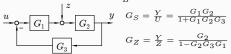
Serienschaltung:  $G(s) = \prod G_i(s)$ 

Parallelschaltung:  $G(s) = \sum G_i(s)$ 

Kreisstruktur:  $G(s) = \frac{G_{\text{Vor}}(s)}{1 \mp G_{\text{Vor}}(s) G_{\text{Riirk}}(s)}$ 

Umformung: 
$$\frac{\frac{A}{B}}{1\pm\frac{A}{B}\frac{C}{D}} = \frac{DA}{AC\pm BD} \qquad \qquad \frac{1}{1+\frac{A}{B}} = \frac{B}{A+B}$$

Umformung bei  $G_{\text{R\"uck}} = 1$ :  $\frac{\frac{A}{B}}{1 + \frac{A}{A}} = \frac{A}{A \pm B}$ 



# 4.4. Anfangs und Endwertsatz

Vorraussetzung: höchstens ein einfacher Pol von Y(s) am Ursprung, die restlichen in der linken Halbebene.

$$\lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to \infty} sX(s) \qquad \lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{s \to 0^+} sX(s)$$

Anfangswertsatz:  $y(t=0^+) = \lim_{s \to \infty} [sG(s)U(s)]$ 

Endwertsatz:  $y(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} [sG(s)U(s)]$ 

Regelfehler:  $e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \left(1 - G_w(s)\right) W(s)$ 

# 5. Systembausteine

System	Zeitbereich	Frequenzbereich $G(s)$
P-System	$y(t) = K_{P} u(t)$	$K_{P}$
I-System	$\dot{y}(t) = K_{\parallel} u(t)$	$\frac{K_{\parallel}}{s}$
D-System	$y(t) = K_{D} \dot{u}(t)$	$\overset{\circ}{K_{D}}s$
Totzeitsystem	$y(t) = Ku(t - T_t)$	$Ke^{-sT_t}$
$PT_1 ext{-}Systeme$	$T\dot{y}(t) + y(t) = K_{P}u(t)$	$\frac{K_{P}}{1+sT}$
$PT_2 ext{-}Systeme$	$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y$	$K_{P} \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$
	$= K_{P} \omega_0^2 u(t)$	

Einstellzeit  $T_{\text{Fin}}$  bis Signal im 5% Bereich stabil.

- 1. Verschieben der Summationsstelle
- 2. Vertauschen/Zusammenfassen der Summationsstelle

#### 5.1. PT<sub>2</sub> Systeme

$$\begin{split} & \mathsf{DGL:} \ \ddot{y} + 2D\omega_0 \ \dot{y} + \omega_0^2 y = K\omega_0^2 u \\ & \ddot{\mathsf{U}} \\ & \mathsf{Dibertragungsfunktion:} \ G(s) = K \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \\ & n \ \mathsf{Pole} \neq 0 \ \mathsf{im} \ \mathsf{Nenner:} \ \mathsf{T}_n \ \mathsf{System} \\ & \mathsf{Allgemeine} \ \mathsf{Polform:} \ p_{1/2} = \underbrace{-\omega_0 D}_{\sigma_e} \pm \mathsf{j} \underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - D^2}}_{\omega_e} \end{split}$$

Dämpfung	Systemverhalten
D < 0	System instabil
D = 0	Grenzstabil, Dauerschwingung, Resonanzkatastrophe
$D \in ]0;1[$	Abkl. Schwingung, Konjugiert komplexe Pole Für $0 < D < \frac{\sqrt{2}}{2}$ Resonanz $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2D^2}$ $A_{\max} = A(\omega_r) = \frac{K}{2D\sqrt{1-D^2}}$
$D = \frac{\sqrt{2}}{2}$	Minimale Einschwingzeit $T_{\sf Ein}$
D = 1	$Aperiodisch  \leftrightarrow  reeler \; Doppelpol  \leftrightarrow  Diskriminante = 0$
D > 1	Griechfall, verschiedene reele Pole

# 6. Stabilität von LTI-Systemen

#### 6.1. Definitionen

stabil bzw. zustandsstabil:  $\left\|\underline{x}_0\right\|<arepsilon_1\Rightarrow\left\|\underline{\underline{x}}(t)\right\|<arepsilon_2$ asymptotisch stabil: zustandsstabil und  $\lim \|\underline{\boldsymbol{x}}(t)\| = 0$ robust stabil: bleibt auch bei Paramterabweichungen stabil. Beispiel untersch. Systemmatrix:  $\forall A \in \{A_{\min}; A_{\max}\}$  stabil

#### 6.1.1. Stabilitätsbedinung für LTI-Systeme

$$\operatorname{Re}\left\{\lambda_i(A)\right\}<0\quad i=1,\ldots,n$$

#### 6.2. Routh-Hurwitz-Kriterium

### Gegeben:

charakteristisches Polynom:  $N(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0$ 

Notwendige Bedingung:  $b_i > 0 \quad \forall i \leq n \text{ oder } b_i < 0 \quad \forall i \leq n$ Betrachte Koeffizienten  $b_i$  des Nenners von G(s)

n = 1:  $b_1 > 0,$   $b_0 > 0$ n=2:  $b_2>0,$   $b_1>0,$   $b_0>0$ n=3:  $b_3>0,$   $b_2>0,$   $b_1>0,$   $b_0>0$  $b_2b_1 - b_0b_3 > 0$  $n=4: \quad b_4>0, \quad b_3>0, \quad b_2>0, \quad b_1>0, \quad b_0>0$  $b_3b_2b_1 - b_0b_3^2 - b_1^2b_4 > 0$ 

> Ein System ist dann und nur dann stabil, wenn gilt:  $b_n > 0$  und alle n Hurwitzdeterminanten > 0

#### 6.3. Direkte Methode von Lyapunov

Der GGP  $\boldsymbol{x}^*$  ist asymptotisch stabil, wenn eine Lyapunov-Funktion  $V(\boldsymbol{x})$ gefunden werden kann mit:

- 1.  $V(\underline{x}^*) = 0$
- 2.  $V(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x}$
- 3.  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V(x) < 0 \quad \forall \text{ Lösungen } x(t) \text{ der DGL}$

Für lineare System mit Systemmatrix A:

$$\underline{\underline{A}}^{\top}\underline{\underline{P}} + \underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}} = -\underline{\underline{Q}}$$

# Direkte Methode von Lyapunov für lineare Systeme

- ullet Wähle  $oldsymbol{Q} = oldsymbol{E}_n$
- ullet Berechne  $oldsymbol{P}$
- ullet System asymptotisch stabil  $\Longleftrightarrow P$  symm. und pos. definit

#### 6.4. Eigenwerte und Polstellen

#### 6.4.1. Pole

Pole  $p_i$  von G(s): Alle  $\operatorname{Re}\left\{p_i\right\} < 0$  $G(s) = \sum \frac{k_i}{s - p_i}$   $\Rightarrow$   $g(t) = \sum k_i e^{p_i t}$ 

# 6.4.2. Dominanz im System

Vorraussetzung  $T_{\rm max} > au_{\rm min}$ Große Zeitkonstanten, Pole mit pos. Realteil (instabil)

#### 6.5. Zustandssteuerbarkeit und -beobachtbarkeit

#### 6.5.1. Zustandssteuerbarkeit

Def.: Man kann mit  $\boldsymbol{u}(t)$  in endlicher Zeit  $\boldsymbol{x}(t<\infty)=0$  erreichen

Bedingung: Rang $(\boldsymbol{Q}_{SZ}) = n$  bzw.  $\det(\boldsymbol{Q}_{SZ}) \neq 0$ 

mit Zustandssteuerbarkeitsmatrix  $Q_{SZ} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ 

# 6.5.2. Zustandsbeobachtbarkeit

Def.: Anfangszustände  $\underline{x}_0$  aus Verlauf  $y(t<\infty)$  bestimmbar

Bedingung:  $\mathrm{Rang}(oldsymbol{Q}_{BZ}) = n$  bzw.  $\det(oldsymbol{Q}_{BZ}) 
eq 0$ mit Zustandssteuebeobachtbarkeitsmatrix  $Q_{SZ} = [C^{\top}, A^{\top}C^{\top}, \dots, (A^{\top})^{n-1}(C^{\top})]$ 

# 6.6. E/A (BIBO) Stabilität (äußere Stabilität)

$$\operatorname{Re}\left\{p_i\right\}<0 \quad i=1,2,\ldots n$$

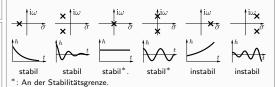
∑ ist E/A-stabil, falls gilt:

Definition:  $\|\boldsymbol{u}(t)\| < \varepsilon_1 \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon_2$ 

#### Pole der Übertragungsfunktion:

Re 
$$\{p_i\} < 0 \quad i = 1, 2, \dots n$$

Stabilität anhand von PN-Diagramm und Impulsantwort:



# Zusammenhang zwischen innerer und äußerer Stabilität

Falls \( \subseteq \text{vollst. steuer- und beobachtbar, oder nur auf einer Untermenge} \) steuer- und beobachtbar: ⇒ asymptotisch stabil ⇔ E/A-stabil

#### Stabilitätsreserve

Absolut:  $\sigma_{qr} = \min p_i$ 

Relativ:  $D_{qr} = \cos(\varphi_{qr})$ 

# 7. Stabilitätsanalyse im Frequenzteich

für alle Systeme (auch mit Totzeit) möglich

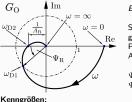
Abtastfrequenz Grenzfrequenz  $\omega_a$ Systembandbreite  $\omega_B$ 

#### 7.1. Frequenzgangfunktion $G(j\omega)$

Beschreibt die Auswirkungen von sinusförmigen Anregungen auf die Sy-

Die Auswirkungen auf Amplitude A und Phasenverschiebung  $\varphi$  ergeben die Frequenzgangfunktion  $G(j\omega)$ 

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \text{Re}\left\{G(j\omega)\right\} + j\text{Im}\left\{G(j\omega)\right\}$$



Einschwingzeit:  $T_{\sf Ein} pprox rac{3}{\omega_{\sf D1}}$ Stabilitätskriterien mit Totzeit:

geschl. RK ist E/A stabil falls: Phasenrand  $\Psi_{\mathsf{R}} > 0$ , bzw. Amplitudenrand  $A_{\mathsf{R}} > 1$ 

 $\Psi_{\rm R} \approx 30^{\circ} \Leftrightarrow {\rm gutes~St\"{o}}{\rm rverhalten}$  $\Psi_{\rm R} \approx 60^{\circ} \Leftrightarrow {\rm gutes\ Folgeverhalten}$ 

# Bodediagramm:

Amplituden-Durchtrittsfrequenz  $\omega_{D1}$ :  $A(\omega_{D1}) = 1$  $\varphi(\omega_{D2}) = -\pi = -180^\circ$ Phasen-Durchtrittsfrequenz ω<sub>D2</sub> Phasenrand/Phasenreserve  $\Psi_R$ :  $\Psi_R = \varphi(\omega_{D1}) + \pi$  $\frac{1}{A_D} = A(\omega_{D2})$ Amplitudenrand/-reserve  $A_R (= K_{krit})$ 

### 7.1.1. Schwingbedingung

Situation in der der Regelkreis sich selbst erregen und (theoretisch) mit  $\omega_{\mathrm{krit}}$  weiterschwingen würde.

$$G_0(j\omega) \stackrel{!}{=} -1 + j0$$

Der Regelkreis befindet sich an der Stabilitätsgrenze:

 $\Rightarrow$  Dauerschwingungen mit  $\omega = \omega_{
m krit}$  und  $K = K_{
m krit}$  (krit. Verstärkung)

#### 7.2. Nyquist

# 7.2.1. Nyquist Ortskurve

Die Nyquist Ortskurve ist die Frequenzgangortskurve des offenen Regelkreises  $G_o(s)$ 

#### 7.2.2. Nyquist Kriterium

Ein geschlossener linearer Regelkreis ist dann stabil, wenn die Ortskurve des offenen Regelkreises  $G_0(j\omega)$ 

- 1. *nicht* durch -1 + 0j verläuft und
- 2. die Phasenänderung von -1 + 0j aus gesehen folgende Bedingung

$$W_{\rm ist} = \mathop{\Delta}\limits_{\omega=0}^{\omega=\infty} \Phi \stackrel{!}{=} W_{\rm soll} = \pi n_{\rm rechts} + \textstyle \frac{\pi}{2} n_{\rm auf}$$

 $n_{\mathsf{rechts}}$ : Anzahl der Pole von  $G_0(s)$  rechts der Imaginärachse  $n_{\mathsf{auf}}$ : Anzahl der Pole von  $G_0(s)$  auf der Imaginärachse

#### 7.2.3. Linke-Hand-Regel

anwendbar falls  $n_r = 0$  und  $n_a \le 1$ 

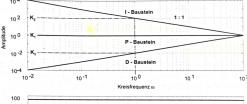
Der geschlossens Regelkreis ist stabil, wenn beim Entlangwanderen auf der  $G_0(i\omega)$ - Ortskurve von  $\omega=0$  nach  $\omega=\infty$  (Blick nach vorne!) der kritische Punkt  $P_{\mathrm{krit}}$  beim Passieren des diem am nächsten liegenden Ortskurvenabschnittes stets linker Hand liegt.

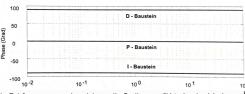
#### 7.3. Bode-Diagramm

aufteilung der Frequenzgangfunktion in Phase  $(\varphi(\omega))$  und Amplitude

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

#### 7.3.1. Typische Regelstrecken





Die Eckfrequenz  $\omega_E$  bezeichnet die Stelle von  $G(j\omega)$  mit  $A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{2}}$ 

Zusätzlich gilt:  $\omega_E = \frac{1}{T}$ 

Im  $PT_1$ -System gilt:  $A(\omega_E) = \frac{K}{\sqrt{2}}$   $\omega_B = \omega_E$ 

Baustein	Auswirkung auf Amplitude	Ausw. Phase	
Verstärkung $K$	A(w) = K	$\varphi(\omega) = 0$	
Pol im Ursprung	1:1 Abfall, $A(\omega=1)=1$	$\varphi(\omega) = -90^\circ$	
Reeller Pol $s=-\omega_E$	$A(\omega)=1$ für $\omega\ll\omega_E$	$\varphi(\omega) = 0$	
	1:1 Abfall für $\omega\gg\omega_E$	$\varphi(\omega) = -90^{\circ}$	
Weitere Auswirkungen siehe Skript S. 130			

### 7.4. Systeme mit Totzeit

lassen sich schwer regeln.

Stabilitätsbedingung:  $0 < K_0 < 1$ 

bleibende Regeldiffernz nach Sprunganregung  $\sigma(t)$  immer > 0, 5

# 8. Grundlagen Reglerentwurf

Ziel: ideale Führung und ideal Störungsrobust:

$$y(t) \stackrel{!}{=} 1 \cdot w(t) + \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot z_i(t)$$

Generell: P-Strecke mit I-Regler, I-Strecke mit P-Regler!

#### 8.1. Entwurfsvorschriften

Stabilität:  $\Psi_R > 0$ 

Gutes stationäres Verhalten:  $|G_o(j\omega)|_{\omega\ll\omega_D 1}\gg 1 o$  I-Regler oder

Gutes Einschwingverhalten:  $|G_o(j\omega)| \approx \frac{1}{-\omega}, \quad 0, 5\omega_{D1} \leq \omega \leq 5\omega_{D1}$ 

 $\begin{array}{l} {}^{\omega}D1 \\ {\rm Bandbreite:} \ \omega_B \approx \omega_{D1} \\ {\rm Einschwingzeit:} \ T_{\rm ein} = 3\tilde{T} \approx \frac{3}{\omega_{D1}} \end{array}$ 

gutes Folgeverhalten:  $\Psi \approx 60^{\circ}$ 

gutes Störverhalten:  $\Psi \approx 30^{\circ}$ 

wenig Messrauschen:  $|G_o(\mathrm{j}\omega)||_{\omega\gg\omega_{D1}}\ll 1$ 

#### 8.2. Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

U		U	
Regeltyp	$K_R$	$T_n$	$T_v$
Р	$0.5~K_{R,\mathrm{krit}}$	$(\infty)$	(0)
PI	0.45 $K_{R, krit}$	0.85 $T_{ m krit}$	(0)
PID	0.7 $K_{R, krit}$	0.4 $T_{krit}$	0.15 $T_{krit}$

#### 8.3. Wurzel Ortskurven WOK

Entspricht Verlauf der Polstellen pRK des geregelten Kreises  $G_{\mathsf{RK}}$  für steigendes K

WOK ist immer symm. zur Realachse!

Totzeitglied im System ⇒ WOK ungültig!



$$G_0(s;K) = K \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = KQ \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - q_{\mu}^0)}{\prod_{\nu=1}^n (s - p_{\nu}^0)}$$

Falls offener RK  $G_0$  linear vom Faktor K abhängt gelten folgende Regeln für den geschlossenen RK GRK:

- Die Pole p<sup>RK</sup> liegen symm, zur reellen Achse bzw. darauf
- n Äste beginnen für K=0 in den Polen  $p^0$
- m Äste enden für  $K \to \infty$  in den NST  $q^0$
- $\bullet$  n-m Äste enden für  $K o \infty$  im Unendlichen und laufen durch den Wurzelschwerpunkt  $p_w = \frac{\sum p^0 - \sum q^0}{n-m}$  und schließen mit der reellen Achse den Winkel  $\Phi_{I}$  ein
- $mit l = 1, \dots, (n - m)$
- Ein Punkt der reellen Achse ist genau dann Teil der WOK des geschlossenen Kreises, wenn die Anzahl der rechts von dem Punkt liegenden Pole und Nullstellen des offenen Kreises
  - für KQ>0 ungerade
  - für KQ < 0 gerade oder null

Verzweigungspunkt (Dplt. Polstelle):  $N_{RK}(s) = 0 \wedge N'_{RK}(s) = 0$ 

Falls eine Grenzgerade  $\mathrm{Re}\left\{s
ight\} \,=\, \sigma_{\mathrm{gr}}\,<\,0$  existiert und alle Pole links von dieser sind so schwingt das System schneller als  $T = \frac{1}{|\sigma_{rr}|}$  ein.

#### 8.4. Auswahl von Reglern

für praktische Anwendungen:

Тур	Strecke Beispiel	Regler P	1	ΡI	PD	PID
Р	Durchfluss	-	g	F,S	-	aufw.
$PT_1$	Druck	F,e	g	S	g	aufw.
$PT_n$	Temperatur	g,e	-	g	-	F,S
$T_n$	Förderband	-	g	F,S	-	-
$IT_n$	Füllstand	F	i i	S	F	S
$I_2$	Kurs, Lage	i	-	-	F,S	-

i: instabil, g: geeignet, F: gute Führung, S: Störungsrobust, e: bleibender Regelfehler, aufw.: zu aufwendig

# 9. Erweiterte Regelungsstrukturen

# 9.1. Vorsteuerung

Zusätzlich zum Eingang wird noch eine Steuerrung hinzugefügt Idealfall:  $G_V(s) = \frac{1}{G_H(s)G_S(s)}$ 

# 9.2. Störgrößenaufschaltung

Idealfall: 
$$G_{\mathsf{A}}(s) = -\frac{1}{G_{\mathsf{H}}(s)}$$

### 9.3. Kaskadenregelung

Verschachtelte Regelrückführungen. Wird von außen nach innen reaktiver! System lässt sich von innen nach außen hochfahren. Beispiel: Fahrzeugabstandregelung mit innerer Geeschwindigkeitsregelung

# 10. Zustandsregelung

Falls Stabilität der Zustände von Interesse. Erlaubt Platzierung der Eigenwerte/Pole durch Messung/Beobachtung der Zustände

### 10.1. Zustandsbeobachter (Simulation)

Ein Zustandsbeobachter ist ein dynamisches (Hilfs) System das alle nicht direkt messbaren Zustands- oder davon abgeleitete Größen aufgrund weniger direkter Messungen und durch ein Prozessmodell rekonstruiert bzw.

#### 10.1.1. Vollständiger Zustandsbeobachter

$ ilde{oldsymbol{x}}$	Schätzfehler
$\underline{\boldsymbol{v}},\underline{\boldsymbol{w}}$	Prozess- bzw. Messrauschen
$\underline{y}$	direkte Messungen
$\underline{u}$	Eingangsgrößen
$\underline{\boldsymbol{x}}$	Zustände
$\boldsymbol{L}$	Beobachter-Rückführmatrix

Gegeben: vollst. beobachtbares MIMO-System:

$$\underline{\dot{x}} = \underbrace{A}\underline{x} + \underbrace{B}\underline{u} + \underbrace{G}\underline{v} \qquad \underline{y} = \underbrace{C}\underline{x} + \underline{w}$$

allgemeiner Form eines Beobachters:

$$\hat{\underline{\hat{x}}} = \hat{A}\hat{\underline{x}} + \hat{B}\underline{u} + Ly \qquad \hat{y} = \hat{C}\hat{\underline{x}}$$

Schätzfehler:  $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)$ 

Asymptotischer Zustandsbeobachter

$$\frac{\dot{\hat{x}}}{\hat{A}} = \underbrace{(\hat{A} - \hat{L}\hat{C})}_{\hat{A} = \hat{A}_{\mathsf{Reo}}} \hat{x} + \hat{B}\underline{u} + \hat{L}\underline{y} \qquad \hat{y} = \hat{C}\hat{x}$$

alternative Schreibweise: 
$$\underline{\hat{x}} = A\hat{x} + B\underline{u} + L(\underline{y} - C\hat{x})$$

Anschaulich ist der Beobachter ein 'Regelkreis' der die Schätzwerte für unbekannte Größen im System kontinuierlich verbessert und letztenendes den 'Regel'fehler minimiert.

$$\text{Fehler-DGL (inkl. Rauschterm): } \underbrace{\frac{\overset{\text{inhomogen}}{\underline{\hat{\boldsymbol{x}}}} = (\underline{\boldsymbol{A}} - \underline{\boldsymbol{l}}\underline{\boldsymbol{c}}^\top)\underline{\tilde{\boldsymbol{x}}}}_{\text{homogen}} + \underline{\boldsymbol{l}}w - \underline{\boldsymbol{G}}\underline{\boldsymbol{v}}}_{\text{homogen}}$$

Faustregel (für einen guten Kompromiss zwischen schnellem Einschwingen und Rauschen): Re  $\{\lambda_i(\hat{\mathbf{A}})\} \leq \operatorname{Re}\{\lambda_i(\hat{\mathbf{A}})\} \quad \forall i$ 

#### 10.1.2. Kalman-Bucy-Filter

Ziel: Bestimmung einer (rausch)optimalen L-Matrix.

Filtergleichungen: 
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

$$L = \Pi_+ C^\top W^{-1}$$
 mit  $\Pi_+$  ist Kovarianzmatrix des Schätzfehlers.

Kovarianzgleichung:  $-A\Pi - \Pi A^{\top} + \Pi C^{\top} W^{-1} C\Pi = GVG^{\top}$ 

#### 10.1.3. Zustandsraum-Kompensator

Zusammengesetzte Regeleinrichtung aus Zustandsregler und Zustandsbe-

obachter 
$$G_{\text{komp}}^{y}(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} =$$

$$= -\underline{\boldsymbol{k}}^{\top} (s\boldsymbol{\tilde{E}} - \underline{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{komp}})^{-1} \underline{\boldsymbol{l}} = \frac{\det \begin{bmatrix} (s\boldsymbol{E} - \underline{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{komp}}) & -\underline{\boldsymbol{l}} \\ \underline{\boldsymbol{k}}^{\top} & 0 \end{bmatrix}}{\det [s\boldsymbol{E} - \underline{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{komp}}]}$$

$$\begin{split} G_{\mathsf{Komp}}^{w'}(s) &= \frac{U(s)}{W'(s)} = -\underline{\boldsymbol{k}}^\top (s \underline{\boldsymbol{E}} - \underline{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{komp}})^{-1} \underline{\boldsymbol{b}} + 1 \\ \mathrm{mit} \ \underline{\boldsymbol{A}}_{\mathsf{komp}} &= \underline{\boldsymbol{A}} - \underline{\boldsymbol{L}}\underline{\boldsymbol{c}}^\top - \underline{\boldsymbol{b}}\underline{\boldsymbol{k}}^\top \end{split}$$

$$\operatorname{mit} \, \underbrace{\mathbf{A}_{\mathsf{komp}}} = \underbrace{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{l}}\underline{\mathbf{c}}^{\top} - \underline{\mathbf{b}}\underline{\mathbf{k}}^{\top}$$

$$\text{Nullstellen } Z^y_{\mathsf{Komp}}(s) = -\det \begin{bmatrix} s \pmb{E} - \pmb{A}_{\mathsf{Komp}} & -\underline{\pmb{l}} \\ \underline{\pmb{k}}^\top & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Polstellen 
$$N_{\mathsf{Komp}}^{y,w'}(s) = \det(s\mathbf{E} - \mathbf{A}_{\mathsf{Komp}}) = 0$$

# 11. Zeitdiskrete Regelungsmodelle

$$\underline{\boldsymbol{x}}_k = \underline{\boldsymbol{x}}(t_k) = \underline{\boldsymbol{x}}(kT_{\mathsf{A}})$$

Differenzengleichung ( $\underline{\dot{\boldsymbol{y}}}_{k}=\underline{\boldsymbol{y}}_{k+1}$ ):

# $a_n y_{k-n} + a_{n-1} y_{k-n+1} + \dots + a_0 y_k = b_m u_{k-m} + \dots + b_0 u_k$

# 11.1. Z-Übertragungsfunktion

Z-Transformation 
$$x(t)$$
  $0 \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$ 

Differenzensatz: 
$$x_{k+1} \circ \overset{\mathbb{Z}}{\longrightarrow} zX(z) - zx_0$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_r z^r + \ldots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

MIMO 
$$\underline{\underline{H}}(z) = \frac{\underline{\underline{Y}}(z)}{\underline{\underline{U}}(z)} = \underline{\underline{C}}(z\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{D}}$$
  
Es gilt:  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}\underline{\underline{\Lambda}}\underline{\underline{T}}^{-1}$   $\underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{T}}\underline{\underline{\Lambda}}^k\underline{\underline{T}}^{-1}$ 

Es gilt: 
$$A = T\Lambda T^{-1}$$
  $A^k = T\Lambda^k T^{-1}$ 

#### 11.2. Stabilität

Anhand der Eigenwerte  $\lambda_i$  der zeitdiskreten Systemmatrix A:

System stabil für  $|\lambda_i(\mathbf{A})| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$ 

#### 11.3. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Allgemein analog zum kontinuierlichen Fall.

Steuersequenz  $\underline{u}_s$ , um Anfangszustand  $\underline{x}_0$  in endlicher Zeit in Nullzustand zu überführen, kann berechnet werden:

Lösungsformel: 
$$\underline{\boldsymbol{x}}_k = \underline{\boldsymbol{A}}^k\underline{\boldsymbol{x}}_0 + \sum\limits_{j=0}^{k-1}\underline{\boldsymbol{A}}^{k-j-1}\underline{\boldsymbol{B}}\underline{\boldsymbol{u}}_j$$

#### 11.4. Rechteck-Approximation

$$\begin{array}{lll} \Delta y := x_k h & \Rightarrow & y_k = y_{k-1} + x_k h \\ \text{Laplace in Z Umrechnen: } s \hat{=} \frac{z-1}{hz} = \frac{1-z^{-1}}{h} \end{array}$$

# 11.5. Trapez-Approximation

Laplace in Z Umrechnen:  $s = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{h} \frac{1-z^{-1}}{1+z-1}$ 

#### 11.6. Wahl der Abtastrate

Abtastrate 
$$h=T_A=\frac{1}{f_A}$$
  $15\omega_B\leq\omega_A\approx20\omega_g\leq50\omega_B$ 

- Zeitverhalten des kontinuierlichen geschlossenen Regelkreises bestimmen, z.B. durch Partialbruchzerlegung und Grenzwerte anhand Abb. 11.11 (S.199)
- T', T<sub>e</sub> bzw. T' berechnen.
- Nach Abbildung T<sub>A</sub> berechnen.

#### 11.7. Schutzfilter

Messrauschen lässt sich durch Schutzfilter dämpfen.  $\omega_A=2\pi f_A$ 

- ullet Butterworth-Filter 1. Ordnung o einfach
- $G_{\rm r}(s) = \frac{0.5\omega_A}{s\!+\!0.5\omega_A}$  Butterworth-Filter 2. Ordnung  $\rightarrow$  steilere Flanke

$$G_{\mathsf{r}}(s) = \frac{(0.5\omega_A)^2}{s^2 + \sqrt{2}(0.5\omega_A)s + (0.5\omega_A)^2}$$

# 12. Ereignisdiskrete Steuerung und Petrinetze

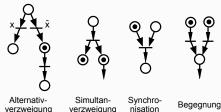
#### **12.1.** Petrinetze N = (P, T, F)

P die Menge Plätze (Zustände)

N die Menge der Transitionen oder Übergänge

 $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  Menge der gerichteten Kanten Marken auf Plätzen zeigen an, dass der Zustand aktiv ist.

Schalten: Alle Plätze vor transition müssen markiert sein, nach dem schalten sind alle Plätze hinter der transition markiert.



# 13. Technik

Kette

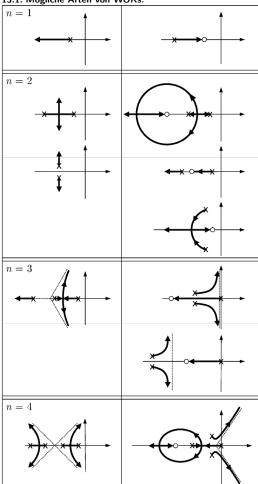


Auch wichtig:

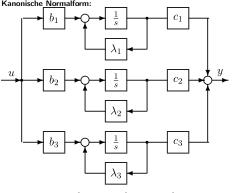
Schrödingers Katze:

# **Anhang**

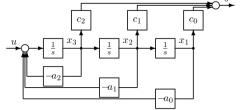
# 13.1. Mögliche Arten von WOKs:



#### 13.2. Normalformen Kanonische Normalform:

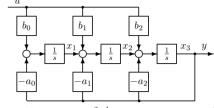


# egelungsnormalformnormalform:



$$G(s) = \frac{\frac{1}{s^3}(c_2s^2 + c_1s + c_0)}{1 + \frac{1}{s^3}(a_2s^2 + a_1s + a_0)} = \frac{c_2s^2 + c_1s + c_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

# Beobachtungsormalform: u



$$G(s) = \frac{(b_0 + b_1 s + b_2 s^2) \frac{1}{s^3}}{1 + \frac{1}{s^3} (a_0 + a_1 s + a_2 s^2)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

# 13.3. Strecke/Regler Auswahl

Regler $G_R(s)$		Regelstrecke $G_S(s)$	bleibende Regeldifferenz $e_{\infty}$ für			
			$z_1 = 0$ $z_2 = 0$ $w_0$ $t$	$z_1 = 0$ $z_2 = 0$ $w_0$ $1$ $t$	$w = 0$ $z_1$ $z_2 = 0$	$w = 0$ $z_1 = 0$ $z_0$
P	$K_P$	Р-Тур	$\frac{1}{1 + K_P \cdot K_S} \cdot w_0$	$\infty$	$\frac{-K_S}{1+K_P\cdot K_S}\cdot z_0$	$\frac{-1}{1 + K_P \cdot K_S} \cdot z_0$
I	$\frac{K_I}{s}$	entsprechend	0	$\frac{1}{K_I \cdot K_S} \cdot w_0$	0	0
PI	$K_P + \frac{K_I}{s}$	1+	0	$rac{1}{K_I \cdot K_S} \cdot w_0$	0	0
12	$\frac{K_I}{s^2}$	$K_S \cdot \frac{1 + \dots}{1 + \dots}$	0	0	0	0
P	$K_P$	І-Тур	0	$\frac{1}{K_S \cdot K_P} \cdot w_0$	$rac{-1}{K_P} \cdot z_0$	0
1	$\frac{K_I}{s}$	entsprechend	0	0	0	0
PI	$K_P + \frac{K_I}{s}$	$\frac{K_S}{s} \cdot \frac{1+\ldots}{1+\ldots}$	0	0	0	0

# 13.4. Zustandsbeobachter(Simulation)

