

## 1 Allgemeines

Dreiecksungleichung	$ x + y  \leq  x  +  y $ $  x  -  y   \leq  x - y $
Cauchy-Schwarz-Ungleichung:	$ \langle x, y \rangle  \leq \ x\  \cdot \ y\ $
Arithmetische Summenformel	$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
Geometrische Summenformel	$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Bernoulli-Ungleichung	$(1 + a)^n \geq 1 + na$
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
Binomische Formel	$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
Äquivalenz von Masse und Energie	$E = mc^2$
Wichtige Zahlen: $\sqrt{2} = 1,41421$ $\pi =$ ist genau 3 $e = 2,71828$ $\pi = 3,14159$	

**Fakultäten**  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$   $0! = 1! = 1$

### 2 Mengen

Eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Elemente zu einer Menge  
explizite Angabe:  $A = \{1; 2; 3\}$   
Angabe durch Eigenschaft:  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 4\}$

#### 2.1 Für alle Mengen A,B,C gilt:

- $\emptyset \subseteq B$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$   
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N} \}$$

Jede rationale Zahl  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  hat ein Dezimaldarstellung.  
 $0,25\overline{54} =: a \rightarrow 10000a - 100a = 2554 - 25 \Rightarrow a(9900) = 2529 \Rightarrow a = \frac{2529}{9900} = \frac{281}{1100}$

### 3 Vollständige Induktion

Behauptung:  $f(n) = g(n)$  für  $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$   
IA:  $n = n_0$ : Zeige  $f(n_0) = g(n_0)$ .  
IV: Annahme  $f(n) = g(n)$  gilt für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}$   
IS:  $n \rightarrow n + 1$ : Zeige  $f(n + 1) = \underset{=wahrr}{f(n)} \dots = g(n + 1)$

### 4 Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl  $z = a + bi$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  besteht aus einem Realteil  $\Re(z) = a$  und einem Imaginärteil  $\Im(z) = b$ , wobei  $i = \sqrt{-1}$  die imaginären Einheit ist. Es gilt:  $i^2 = -1$   $i^4 = 1$

#### 4.1 Kartesische Koordinaten

Rechenregeln:  
 $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$   
 $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$

Konjugiertes Element von  $z = a + bi$ :  
 $\overline{z} = a - bi$   
 $z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$   

$$e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$$

Inverses Element:  
 $z^{-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$

#### 4.2 Polarkoordinaten

$z = a + bi \neq 0$  in Polarkoordinaten:  
 $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi}$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \arg(z) = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b < 0 \end{cases}$$

**Multiplikation:**  $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$   
**Division:**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

**n-te Potenz:**  $z^n = r^n \cdot e^{n\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

**n-te Wurzel:**  $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right)$   
 $k = 0, 1, \dots, n - 1$

**Logarithmus:**  $\ln(z) = \ln(r) + i(\varphi + 2k\pi)$  (Nicht eindeutig!)

Anmerkung: Addition in kartesische Koordinaten umrechnen(leichter)!

### 5 Funktionen

Eine Funktion  $f$  ist eine Abbildung, die jedem Element  $x$  einer Definitio-  
onsmenge  $D$  genau ein Element  $y$  einer Wertemenge  $W$  zuordnet.  
 $f : D \rightarrow W, x \mapsto f(x) := y$

**Injektiv:**  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$   
**Surjektiv:**  $\forall y \in W \exists x \in D : f(x) = y$   
(Alle Werte aus  $W$  werden angenommen.)  
**Bijektiv**(Eindeutig):  $f$  ist injektiv und surjektiv  $\Rightarrow f$  umkehrbar.  
**Ableitung der Umkehrfunktion**  
 $f$  stetig, streng monoton, an  $x_0$  diff'bar und  $y_0 = f(x_0)$   
 $\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

#### 5.1 Symmetrie einer Funktion f

**Achsensymmetrie** (gerade Funktion):  $f(-x) = f(x)$   
**Punktsymmetrie** (ungerade Funktion):  $f(-x) = -f(x)$

Regeln für gerade Funktion  $g$  und ungerade Funktion  $u$ :  
 $g_1 \pm g_2 = g_3$   $u_1 \pm u_2 = u_3$   
 $g_1 \cdot g_2 = g_3$   $u_1 \cdot u_2 = g_3$   $u_1 \cdot g_1 = u_3$

#### 5.2 Kurvendiskussion von $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

**Kandidaten für Extrama (lokal, global)**

- Randpunkte von  $I$
- Punkte in denen  $f$  nicht diffbar ist
- Stationäre Punkte ( $f'(x) = 0$ ) aus  $(a, b)$

**Lokales Maximum**

wenn  $x_0$  stationärer Punkt ( $f'(x_0) = 0$ ) und

- $f''(x_0) < 0$  oder
- $f'(x) > 0, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$   
 $f'(x) < 0, x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

**Lokales Minimum**

wenn  $x_0$  stationärer Punkt ( $f'(x_0) = 0$ ) und

- $f''(x_0) > 0$  oder
- $f'(x) < 0, x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$   
 $f'(x) > 0, x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

#### Monotonie

$f'(x) \underset{(>)}{\geq} 0 \rightarrow f$  (streng) Monoton steigend,  $x \in (a, b)$

$f'(x) \underset{(<)}{\leq} 0 \rightarrow f$  (streng) Monoton fallend,  $x \in (a, b)$

**Konvex/Konkav**

$f''(x) \underset{(>)}{\geq} 0 \rightarrow f$  (strikt) konvex,  $x \in (a, b)$

$f''(x) \underset{(<)}{\leq} 0 \rightarrow f$  (strikt) konkav,  $x \in (a, b)$

$f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow x_0$  Wendepunkt  
 $f''(x_0) = 0$  und Vorzeichenwechseln an  $x_0 \rightarrow x_0$  Wendepunkt

#### 5.3 Asymptoten von f

Horizontal:  $c = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

Vertikal:  $\exists$  Nullstelle  $a$  des Nenners :  $\lim_{x \rightarrow a \pm} f(x) = \pm\infty$

Polynomasymptote  $P(x)$ :  $f(x) := \frac{A(x)}{Q(x)} = P(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$   
 $\rightarrow 0$

#### 5.4 Wichtige Sätze für stetige Fkt. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$

**Zwischenwertsatz:**  $\forall y \in [f(a), f(b)] \exists x \in [a, b] : f(x) = y$   
**Satz von Rolle:** Falls  $f(a) = f(b)$ , dann  $\exists x_0 : f'(x_0) = 0$   
**Mittelwertsatz:** Falls  $f$  diffbar, dann  $\exists x_0 : f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**Regel von L'Hospital:**

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

#### 5.5 Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n$

$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$   
Lösungen für  $ax^2 + bx + c = 0$   
**Mitternachtsformel:** 
$$\left. \begin{array}{l} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{array} \right| \text{Satz von Vieta:}$$
  

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{array} \right.$$

#### 5.6 Trigonometrische Funktionen

$$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0)$$

$$\begin{array}{ll} \sin(-x) = -\sin(x) & \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 & \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) & e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x) \\ \sin(x) = \frac{1}{2i} \left( e^{ix} - e^{-ix} \right) & \cos(x) = \frac{1}{2} \left( e^{ix} + e^{-ix} \right) \\ \sinh(x) = \frac{1}{2} (-e^{-x} + e^x) & \cosh(x) = \frac{1}{2} (e^{-x} + e^x) \end{array}$$

**Additionstheoreme**

$$\begin{array}{l} \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \\ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \end{array}$$

$\frac{x}{x}$	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
$\frac{x}{x}$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞

#### 5.7 Potenzen/Logarithmus

$$\ln(u^r) = r \ln u$$

### 6 Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}, n \rightarrow a(n) =: a_n$   
explizite Folge:  $(a_n)$  mit  $a_n = a(n)$   
rekursive Folge:  $(a_n)$  mit  $a_0 = f_0, a_{n+1} = a(a_n)$

#### 6.1 Monotonie

Im Wesentlichen gibt es 3 Methoden zum Nachweis der Monotonie.  
Für **(streng) monoton fallend** gilt:

- $a_{n+1} - a_n \underset{(<)}{\leq} 0$
- $\frac{a_n}{a_{n+1}} \underset{(>)}{\geq} 1 \quad \vee \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{(<)}{\leq} 1$
- Vollständige Induktion:  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \underset{(<)}{\leq} a_n$

#### 6.2 Konvergenz

$(a_n)$  ist *Konvergent* mit *Grenzwert*  $a$ , falls:  $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0 : |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq N$

Eine Folge konvergiert gegen eine Zahl  $a$ :  $(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

**Es gilt:**

- Der Grenzwert a einer Folge  $(a_n)$  ist eindeutig.
- Ist  $(a_n)$  Konvergent, so ist  $(a_n)$  beschränkt
- Ist  $(a_n)$  unbeschränkt, so ist  $(a_n)$  divergent.
- Das Monotoniekriterium:* Ist  $(a_n)$  beschränkt und monoton, so konvergiert  $(a_n)$
- Das Cauchy-Kriterium:* Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert gerade dann, wenn:  
 $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0 : |a_n - a_m| < \epsilon \forall n, m \geq N$

Regeln für konvergente Folgen  $(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  und  $(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ :  
 $(a_n + b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$   $(a_n b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$   $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$   
 $(\lambda a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda a$   $(\sqrt[n]{a_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$   $(|a_n|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$

**Grenzwert bestimmen:**

- Wurzeln: Erweitern mit binomischer Formel
- Brüche: Zähler und Nenner durch den Koeffizient höchsten Grades teilen
- Rekursive Folgen: Fixpunkte berechnen. Fixpunkte sind mögliche Grenzwerte. Monotonie durch Vergleich  $a_{n+1}$  und  $a_n$  zeigen. Beschränktheit mit Induktion beweisen.

#### 6.3 Wichtige Regeln

$$a_n = q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \pm\infty & q < -1 \\ +\infty & q > 1 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{n^k} \rightarrow 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$a_n = \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \rightarrow e^c$$

$$a_n = n \left(c^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln c$$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0 \quad (2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

#### 6.4 Limes Inferior und Superior

Der Limes superior einer Folge  $x_n \subset \mathbb{R}$  ist der größte Grenzwert konvergenter Teilfolgen  $x_{n_k}$  der Folge  $x_n$

Der Limes inferior einer Folge  $x_n \subset \mathbb{R}$  der kleinste Grenzwert konvergenter Teilfolgen  $x_{n_k}$  der Folge  $x_n$

7 Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$
Harmonische Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$
Geometrische Reihe
 $|q| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konvergent,} & \alpha > 1 \\ \text{divergent,} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

7.1 Konvergenzkriterien

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  divergiert, falls  $a_n \not\rightarrow 0$  oder  
Minorante:  $\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n$  (divergiert)  $\wedge a_n \geq b_n \quad \forall n \geq n_0$   
 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  konvergiert, if  $(a_n)$  monoton fallende Nullfolge (Leibnitz)  
oder Majorante:  $\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \quad \wedge \quad a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$

Absolute Konvergenz ( $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = a$  konvergiert), falls:  
1. Majorante:  $\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \quad \wedge \quad |a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$   
2. Quotienten und Wurzelkriterium (BETRAG nicht vergessen!)

$$\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \vee \quad \rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \forall n > N$$

Falls  $\begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ \rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \\ \rho = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ keine Aussage m\u00f6glich} \end{cases}$

Jede absolute konvergente Reihe ( $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ) ist konvergent ( $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ )

8 Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - c)^n$$

8.1 Konvergenzradius

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$R = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$f(x) \begin{cases} \text{konvergiert absolut} & |x - c| < R \\ \text{divergiert} & |x - c| > R \\ \text{keine Aussage m\u00f6glich} & |x - c| = R \end{cases}$$

Bei reellen Reihen gilt:  
 $\Rightarrow x$  konvergiert im offenen Intervall  $I = (c - R, c + R)$   
 $\Rightarrow$  Bei  $x = c - R$  und  $x = c + R$  muss die Konvergenz zus\u00e4tzlich \u00fcberpr\u00fcft werden.

Substitution bei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^\lambda$   
 $w = x^\lambda \rightarrow x = w^{\frac{1}{\lambda}} \rightarrow R = (R_w)^{\frac{1}{\lambda}}$

8.2 Wichtige Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

9 Ableitung und Integral

$f$  diffbar, falls  $f$  stetig und  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$  exist.

9.1 Ableitungsregeln:

Linearit\u00e4t:  $(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$   
Produktregel:  $(f \cdot g)' = f'g + fg'$   
Quotientenregel  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$   
Kettenregel:  $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$   
Potenzreihe:  $f : ]-R + a, a + R[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - a)^{n-1}$$
Tangentengleichung:  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

9.2 Newton-Verfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
 mit Startwert  $x_0$

9.3 Integrationsmethoden:

- Anstarren + G\u00f6ttliche Eingebung
- Partielle Integration:  $\int uv' = uv - \int u'v$
- Substitution:  $\int \underbrace{f(g(x))}_t \underbrace{g'(x)}_{dt} dx = \int f(t) dt$
- Logarithmische Integration:  $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)|$
- Integration von Potenzreihen:  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - a)^k$   
Stammfunktion:  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x - a)^{k+1}$
- Brechstange:  $t = \tan(\frac{x}{2}) \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$   
 $\sin(x) \rightarrow \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos(x) \rightarrow \frac{1-t^2}{1+t^2}$

9.4 Integrationsregeln

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$   
 $\int \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1} x^{q+1}$	$x^q$	$qx^{q-1}$
$\frac{1}{2\sqrt{ax^3}}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$\frac{1}{3} x \ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{e^x}{a^x}$	$e^x$	$e^x$
$\ln(a)$	$a^x$	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln  \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln  \sin(x) $	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln  1+x^2 $	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2} \ln  1+x^2 $	$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$

9.5 Rotationsk\u00f6rper

Volumen:  $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$   
Oberfl\u00e4che:  $O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$

9.6 Uneigentliche Integrale

$$\int_{\text{ok}}^{\text{b\u00f6se}} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \text{b\u00f6se}} \int_{\text{ok}}^b f(x) dx$$

Majoranten-Kriterium:  $|f(x)| \leq g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1 \end{cases} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Cauchy-Hauptwert

CHW  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx$

CHW  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$

9.7 Laplace-Transformation von  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto f(s)$

$$\mathcal{L} f(s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

9.8 Integration rationale Funktionen

Gegeben:  $\int \frac{A(x)}{Q(x)} dx \quad A(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$

- Falls,  $\deg A(x) \geq \deg Q(x) \Rightarrow$  Polynomdivision:  
 $\frac{A(x)}{Q(x)} = P(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$  mit  $\deg B(x) < \deg Q(x)$
- Zerlege  $Q(x)$  in unzerlegbare Polynome
- Partialbruchzerlegung  $\frac{B(x)}{Q(x)} = \frac{\dots}{(x-a_n)^m} + \dots + \frac{\dots}{\dots}$
- Integriere die Summanden mit folgenden Funktionen

mit  $\lambda = x^2 + px + q, \quad \beta = 4q - p^2 \quad \text{und} \quad p^2 < 4q!$

$$\int \frac{1}{(x-a)^m} dx = \begin{cases} \ln |x-a|, & m=1 \\ \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}, & m \geq 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(\lambda)^m} dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\beta}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{\beta}}, & m=1 \\ \frac{2x+p}{(m-1)(\beta)(\lambda)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(\beta)} \int \frac{dx}{(\lambda)^{m-1}}, & m \geq 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(\lambda)^m} dx = \begin{cases} \frac{B}{2} \ln(\lambda) + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{\lambda}, & m=1 \\ \frac{-B}{2(m-1)(\lambda)^{m-1}} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{(\lambda)^{m-1}}, & m \geq 2 \end{cases}$$

H\u00e4ufige Integrale nach Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{a+x} dx = \ln |a+x| \quad \int \frac{1}{(a+x)^2} dx = -\frac{1}{a+x}$$

$$\int \frac{1}{a-x} dx = -\ln |a-x| \quad \int \frac{1}{(a-x)^2} dx = \frac{1}{a-x}$$

9.9 Paratialbruchzerlegung

$$\frac{B(x)}{Q(x)} = \frac{\dots}{(x-x_0)} + \dots + \frac{\dots}{\dots}$$

Ansatz

- $n$ -fache reelle Nullstelle  $x_0$ :  $\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \dots$

- $n$ -fache komplexe Nullstelle:  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q} + \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}$

Berechnung von  $A, B, C, \dots$

- Nullstellen in  $x$  einsetzen (Terme fallen weg)
- Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich

10 Taylor-Entwicklung

Man approximiert eine  $m$ -mal diffbare Funktion  $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in I$  mit dem  $m$ -ten Taylorpolynom:

$$T_m(x_0; x) = \sum_{i=0}^m \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Taylor-Entw. von Polynomen/Potenzreihen sind die Funktionen selbst.  
F\u00fcr  $m \rightarrow \infty$ : Taylorreihe.

Konvergenzradius:  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

10.1 Das Restglied - die Taylorformel

F\u00fcr  $(m+1)$ -mal stetig diffbare Funktionen gilt  $\forall x \in I$  :  
 $R_{m+1}(x) := f(x) - T_m, f, x_0(x) = \frac{1}{m!} \int_{x_0}^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t) dt$  (Integraldarst.)  
 $= \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1} \quad \xi \in [x, x_0]$  (Lagrange)  
**Fehlerabsch\u00e4tzung:** W\u00e4hle  $\xi$  und  $x$  so, dass  $R_{m+1}(x)$  maximal wird.

11 Landau-Notation

- $f(x) = o(g(x))$  f\u00fcr  $x \rightarrow a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) = O(g(x))$  f\u00fcr  $x \rightarrow a \Leftrightarrow |f(x)| \leq C|g(x)|$  f\u00fcr  $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$  u.  $C > 0$   
oder  $0 \leq \limsup_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$

Bei *Taylor-Entwicklung*:

- $R_{m+1, f, x_0}(h) = f(x_0 + h) - T_m, f, x_0(h) = o(h^m)$   
 $f$  muss  $m$ -mal differenzierbar sein
- $R_{m+1, f, x_0}(h) = f(x_0 + h) - T_m, f, x_0(h) = O(h^{m+1})$   
 $f$  muss  $(m+1)$ -mal differenzierbar sein

11.1 Rechenregeln

- $f = O(f)$
- $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$
- $f_1 = o(g)$  u.  $f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$
- $f_1 = O(g)$  u.  $f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(g)$
- $f_1 = O(g)$  u.  $f_2 = O(g) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2)$
- $f_1 = O(g)$  u.  $f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$

11.2 Elementarfunktionen

- Exponentialfunktion  
 $e^x = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} + O(x^{m+1})$
- Trigonometrische Funktionen  
 $\sin x = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2m+3})$   
 $\cos x = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + O(x^{2m+2})$
- Logarithmusfunktion  
 $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + O(x^{m+1})$

12 Kurven

Eine Kurve ist ein eindimensionales Objekt.

$$\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \quad (\text{Funktionsvektor})$$

- $C^0$ -Kurve: Positionsstetigkeit (geschlossene Kurve)
- $C^1$ -Kurve: Tangentialstetigkeit (stetig diffbar)
- $C^2$ -Kurve: Krümmungsstetigkeit (2 mal stetig diffbar)
- regulär, falls  $\forall t \in [a, b] : \dot{\gamma}(t) \neq \vec{0}$  (Keine Knicke)

Besondere Punkte von Kurven:

- Singulär, falls  $\dot{\gamma}(t) = \vec{0}$  (Knick)
- Doppelpunkt, falls  $\exists t_1, t_2 : t_1 \neq t_2 \wedge \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
- Horizontaler Tangentenpunkt, falls  $\dot{\gamma}_1(t) \neq 0 \wedge \dot{\gamma}_2(t) = 0$
- Vertikaler Tangentenpunkt, falls  $\dot{\gamma}_1(t) = 0 \wedge \dot{\gamma}_2(t) \neq 0$

**Bogenlänge** einer Kurve:  $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$

**Upparametrisierung**  $\gamma$  nach Bogenlänge ( $\tilde{\gamma}$ ):

- Bogenlängenfunktion:  $s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| \, d\tau$   
 $s : [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)], t \mapsto s(t)$
- $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t)) \qquad \left\| \dot{\tilde{\gamma}}(t) \right\| = 1 \forall t$

Tangenteneinheitsvektor an  $\gamma(t) : T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

Krümmung von  $\gamma$ :  $\kappa(t) = \left\| \frac{d^2 \gamma}{ds^2} \right\| = \frac{\| \dot{T}(t) \|}{s'(t)}$

**Vereinfachung** im  $\mathbb{R}^2 \qquad \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt \qquad \tilde{\kappa}(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Wenn  $\gamma$  nach der Bogenlänge umparametrisiert, gilt

$$\tilde{\kappa}(t) = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}$$

13 Skalarfelder

Ein Skalarfeld ordnet jedem Vektor eines Vektorraums einen Wert zu.  
 $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$  Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ :  $D = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$   
Offene Kugelmenge vom Radius  $r$ :  $B_r(x_0)$   
*Topologische Begriffe* für  $D \subseteq \mathbb{R}^n$

- Das Komplement  $D^C$  von  $D$ :  $D^C := \mathbb{R}^n \setminus D$
- innerer Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  des Inneren  $\overset{\circ}{D}$  von  $D$ , falls  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$
- Die Menge  $D$  heißt offen, falls  $D = \overset{\circ}{D}$
- Randpunkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  des Rands  $\partial D$  von  $D$ , falls  $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap D \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap D^C \neq \emptyset \Rightarrow \partial D = \partial D^C$
- Abschluß  $\overline{D}$  von  $D$ :  $\overline{D} = D \cup \partial D$
- Die Menge  $D$  ist abgeschlossen, falls  $\partial D \subseteq D$
- beschränkt, falls  $\exists \mu \in \mathbb{R} \forall x \in D : \|x\| < \mu$
- kompakt, falls  $D$  abgeschlossen und beschränkt ist.

Es gilt: Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so ist  $D^C$  abgeschlossen.  
 $\mathbb{R}$  und  $\emptyset$  sind offen und abgeschlossen.