Analysis 2

1 Nützliches Wissen $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

1.1 Trigonometrische Funktionen

1.1.1 sinh, cosh $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\quad$ $\operatorname{arsinh} x := \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\quad$ $\operatorname{arcosh} x := \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cosh x + \sinh x = e^x$	$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$
$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$	

1.1.2 sin, cos $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\sin(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x)$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right)$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$	$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

1.2 log $\log(1) = 0$

$a^x = e^{x\ln a}$ $\qquad$ $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\qquad$ $\ln x \le x - 1$

1.3 Quadratische Gleichung

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

1.4 Ableitungsregeln:

Linearität: $(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Produktregel: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
Potenzreihe: $f : \underbrace{]-R+a, a+R[}_{\subseteq D} \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$
Tangentengleichung: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1.5 Integrale:

- Partielle Integration: $\int uv' = uv - \int u'v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t}) \underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
$\int \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\,\mathrm{d}x$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2\right\rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$x\operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2\right\rvert$	$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$

1.6 Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$ Harmonische Reihe $\qquad$ $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \overset{|q|<1}{=} \frac{1}{1-q}$ Geometrische Reihe $\qquad$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ Exponentialreihe

2 Kurven

Eine Kurve ist ein eindimensionales Objekt.

$\boldsymbol{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$ (Funktionenvektor)

- $\mathcal{C}^0$-Kurve: Positionsstetigkeit (geschlossene Kurve)
- $\mathcal{C}^1$-Kurve: Tangentialstetigkeit (stetig diffbar)
- $\mathcal{C}^2$-Kurve: Krümmungsstetigkeit (2 mal stetig diffbar)
- regulär, falls $\forall t \in [a,b] : \dot{\gamma}(t) \neq \mathbf{0}$ (Keine Knicke)

Besondere Punkte von Kurven:

- Singulär, falls $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{0}$ (Knick)
- Doppel-punk, falls $\exists t_1, t_2 : t_1 \neq t_2 \wedge \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
- Horizontaler Tangentenpunkt, falls $\dot{\gamma}_1(t) \neq 0 \wedge \dot{\gamma}_2(t) = 0$
- Vertikaler Tangentenpunkt, falls $\dot{\gamma}_1(t) = 0 \wedge \dot{\gamma}_2(t) \neq 0$

Bogenlänge einer Kurve: $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\mathrm{d}t$

Umparametrisierung γ nach Bogenlänge ($\tilde{\gamma}$):

- Bogenlängenfunktion: $s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\|\mathrm{d}\tau$
  $s : [a,b] \to [0, L(\gamma)], t \mapsto s(t)$
- $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t)) \qquad \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = 1 \forall t$

Tangenteneinheitsvektor an $\gamma(t)$: $T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

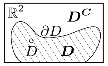
Krümmung von γ: $\kappa(t) = \|\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2}\| = \frac{\|\dot{T}(t)\|}{s'(t)}$

Vereinfachung für $n = 2$: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t \qquad \tilde{\kappa}(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

3 Skalarfelder

Ein Skalarfeld ordnet jedem Vektor eines Vektorraums einen Wert zu.
$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$
Teilmengen von $\mathbb{R}^n$: $D = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$
Offene Kugelmenge vom Radius r: $B_r(x_0)$
Topologische Begriffe für $D \subseteq \mathbb{R}^n$



- Das Komplement D^C von D: $D^C := \mathbb{R}^n \setminus D$
- innerer Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Inneren $\mathring{D}$ von D, falls
  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subseteq D$
- Die Menge D heißt offen, falls $D = \mathring{D}$
- Randpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Rands ∂D von D, falls $\forall \varepsilon > 0$:
  $B_\varepsilon(x_0) \cap D \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap D^C \neq \emptyset \Rightarrow \partial D = \partial D^C$
- Abschluß $\overline{D}$ von D: $\overline{D} = D \cup \partial D$
- Die Menge D ist abgeschlossen, falls $\partial D \subseteq D$
- beschränkt, falls $\exists \mu \in \mathbb{R} \forall x \in D : \|x\| < \mu$
- kompakt, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

Es gilt: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist D^C abgeschlossen.
$\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

3.1 Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Eine Folge $\left(X^{(k)}\right)$ ist eine Abbildung $\left(X^{(k)}\right) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^n, k \mapsto x^{(k)}$
Die Folge konvergiert, falls $\lim_{k\to\infty} \|x - x^{(k)}\| = 0$
Folge konvergiert, falls sie komponentenweise konvergiert!

Für $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bedeutet
Grenzwert: $\lim_{x\to x_0} f(x) = c \Leftrightarrow f\left(X^{(k)} \to x_0\right) \to c$
Stetigkeit: $\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
Satz von Max. und Min.: Ist $f(\boldsymbol{x})$ stetig und D kompakt, so
$\exists x_{max}, x_{min} \in D \forall x \in D : f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$

3.2 Differentiation von Skalarfeldern - Gradient

$\nabla f(x) = \operatorname{grad}\left(f(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix}$

Richtungsableitung: $\boxed{\partial_{\boldsymbol{v}} f(x) = \langle \nabla f(x), \boldsymbol{v} \rangle}$ $\boxed{\|\boldsymbol{v}\| = 1}$

Gradientenregeln: $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind partiell diffbar:
Linearität: $\nabla(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \nabla f(x) + \mu \nabla g(x)$
Produkt: $\nabla(f \cdot g)(x) = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x)$
Quotient: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\left(g(x)\nabla f(x) - f(x)\nabla g(x)\right)$

Kettenregeln:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$h := g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	$h := f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\boxed{\nabla h(x) = g'\left(f(x)\right) \cdot \nabla f(x)}$	$\boxed{h'(x) = \nabla f\left(g(x)\right)^T \cdot \dot{g}(t)}$

3.3 Differentialoperatoren $\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = 0$

Operator	Definition
Gradient: $\operatorname{grad} f$ S-Feld $\to$ V-Feld	$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$
Divergenz: $\operatorname{div} f$ V-Feld $\to$ S-Feld	$\nabla^\top \cdot f = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$
Rotation: $\operatorname{rot} f$ V-Feld $\to$ V-Feld	$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x) \end{pmatrix}$
Laplace: Δf S-Feld $\to$ S-Feld	$\nabla^2 = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i x_i}$ $\nabla^\top \cdot (\nabla f)$

3.4 Höhere Partielle Ableitungen $\partial_j \partial_i f(x) = f_{x_i x_j}(x)$

$\mathcal{C}^m(D) = \{$m-mal stetig partiell diffbare Funktion auf D$\}$
Satz von Schwarz: $f \in \mathcal{C}^2(D) \Rightarrow f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x) \quad \forall i, j$

Mittelwertsatz ($f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, xy \in D \quad x, y \subseteq D$)
$\exists \xi \in \overline{x,y}$ mit $f(y) - f(x) = \nabla f^\top(\xi)(y - x)$
Es gilt $|f(y) - f(x)| \le c|y - x|$ mit $c = \max\|\nabla f(z)\| \quad z \in \overline{x,y}$

Hessematrix: $H_f(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x) & \ldots & \partial_{1n} f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f(x) & \ldots & \partial_{nn} f(x) \end{bmatrix}$
Die Hessematrix ist symmetrisch, falls $f \in \mathcal{C}^2(D)$

$T_{2,f,\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) +$
$\quad + \nabla f(\boldsymbol{x}_0)^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) +$ (Tangentialebene)
$\quad + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^\top \boldsymbol{H}_f(x_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ (Schmiegequadrik)
$T_{3,f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum \partial_i f(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum \partial_i \partial_j f(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \frac{1}{6}\sum \partial_i \partial_j \partial_k f(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)(x_k - a_k)$

3.5 Jacobimatrix = Fundamentalmatrix

$\boldsymbol{J}_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1^\top \\ \vdots \\ \nabla f_m^\top \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Rechenregeln für die Jacobimatrix:
$f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ part. diffbar:
Linearität: $\boldsymbol{J}_{\alpha f + \beta g} = \alpha J_f + \beta J_g$
Produkt: $\boldsymbol{J}_{f^\top g} = g^\top J_f + f^\top J_g \quad (\nabla f^\top g = J_f^\top g + J_g^\top f)$
Komposition: $\boldsymbol{J}_{g \circ f}(x) = \boldsymbol{J}_g\left(f(x)\right) \cdot \boldsymbol{J}_f(x)$
Umkehrfunktion: $\boldsymbol{J}_{f^{-1}}(f(x)) = \boldsymbol{J}_f(x)^{-1}$

3.6 Lineare Abbildungen

$f : V \to W$ heißt linear, falls

- $f(v + w) = f(v) + f(w)$
- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$
- Tipp: Prüfe ob $f(0) = 0$

Kern von f: $\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ ist UVR von V
Bild von f: $\operatorname{Bild}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ ist UVR von W
Dualraum $V^* = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f = lin.\}$
Injektiv (aus $f(x) = f(y) \to x = y$)), falls $\ker(f) = \{0\}$
Surjektiv Alle Werte im Zielraum werden angenommen.

4 Taylorpolynom für Skalarfelder

Ist $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein $(m+1)$-mal stetig partiell differenzierbar Skalarfeld, D offen und konvex, so gilt für alle $\boldsymbol{a} \in D$ und

$\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h} \in D$ die Approximation durch das Taylorpolynom :

$$\boxed{T_m(\boldsymbol{a};\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}g''(0)+\cdots+\frac{1}{m!}g^m(0)}$$

(Teilen durch $n!$ nicht vergessen!)

$g:[0,1]\to\mathbb{R}$ ist definiert als $g(t)=f(a+th)$
Die Ableitungen von g an der Stelle 0 können wie folgt bestimmt werden:

- $g(0)=f(\boldsymbol{a})$
- $g'(0)=\nabla f(\boldsymbol{a})^\top \boldsymbol{h} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f(\boldsymbol{a}) h_i$
- $g''(0)=h^\top H_f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}\partial_{x_i} f(\boldsymbol{a}) h_i h_j$
- $g'''(0)=\sum_{i,j,k=1}^n \partial_{x_i}\partial_{x_j}\partial_{x_k} f(\boldsymbol{a}) h_i h_j h_k$
- ...

4.1 Das Restglied - die Taylorformel

$$R_{m+1}(a;a+h) = f(x)-T_m(a,a+h) = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^m g^{(m+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Es gibt eine Zwischenstelle $\xi\in(0,1)$ mit:

$$R_{m+1}(a;a+h)=\frac{1}{m!}g^{(m+1)}(\xi)$$

5 Koordinatensysteme

Transformationsvektoren. (Um einen Vektor in anderen Koordinaten darzustellen)

	$\begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}^\top$	
Zylinder	$\begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi)\\ r\cdot\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}$	$0\le\varphi<2\pi$
Kugel	$\begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ r\cdot\sin(\varphi)\sin(\theta)\\ r\cdot\cos(\theta)\end{pmatrix}$	$0\le\varphi<2\pi$ $0\le\theta\le\pi$

Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}_z$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{f_{\text{kart}}=\boldsymbol{S}_z\cdot f_{\text{zyl}} \qquad f_{\text{zyl}}=\boldsymbol{S}_z^{-1}\cdot f_{\text{kart}}}$$

Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}_k$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\varphi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\theta) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{f_{\text{kart}}=\boldsymbol{S}_k\cdot f_{\text{kug}} \qquad f_{\text{kug}}=\boldsymbol{S}_k^{-1}\cdot f_{\text{kart}}}$$

Die Spalten entsprechen den orthonormalen Basisvektoren im jeweiligen Koordinatensystem.
$\Rightarrow$ Trafo-Matrizen orthogonal: $\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{S}^\top$

5.1 Transformation eines Skalarfeldes $f(x,y,z)$

$\tilde{f}(r,\varphi,z)$ bzw. $\tilde{f}(r,\theta,\varphi)$ erhält man durch ersetzen von x, y und z durch die entsprechenden Einträge des Transformationsvektors.

5.2 Transformation eines Vektorfeldes $\boldsymbol{f}(x,y,z)$

$\tilde{\boldsymbol{f}}(r,\varphi,z)$ bzw. $\tilde{\boldsymbol{f}}(r,\theta,\varphi)$ durch ersetzen von x, y und z durch die entsprechenden Einträge des Transformationsvektors.

Zylinder: $\hat{\boldsymbol{f}}(r,\varphi,z)$ bzgl. $\{e_r,e_\varphi,e_z\}$: $\hat{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{S}_z^{-1}\cdot\tilde{\boldsymbol{f}}$

Kugel: $\hat{\boldsymbol{f}}(r,\theta,\varphi)$ bzgl. $\{e_r,e_\theta,e_\varphi\}$: $\hat{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{S}_k^{-1}\cdot\tilde{\boldsymbol{f}}$

5.3 Operatoren in anderen Koordinaten

(Detailliert in der Formelsammlung im Anhang)

	Zylinderkoordinaten
∇	$(\partial_r,\ \frac{1}{r}\partial_\varphi,\ \partial_z)^\top$
div	$\frac{1}{r}\partial_r(r\cdot\boldsymbol{f}_r)+\frac{1}{r}\partial_\varphi(\boldsymbol{f}_\varphi)+\partial_z(\boldsymbol{f}_z)$
Δ	$\frac{1}{r}\partial_{rr}(r\cdot f)+\frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}f+\partial_{zz}f$

	Kugelkoordinaten
∇	$(\partial_r,\ \frac{1}{r}\partial_\varphi,\ \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta)^\top$
div	$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\boldsymbol{f}_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi(\boldsymbol{f}_\varphi)+\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\boldsymbol{f}_\theta)$
Δ	$\frac{1}{r^2}\partial_{rr}(r^2f)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}(\sin\theta f)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_{\theta\theta}f$

6 Implizite Funktionen g

... werden als Nullstellenmenge einer expl. Funktion f angegeben.
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=0\}$ mit $y=g(x)\in\mathbb{R}$

6.1 Satz über implizite Funktionen:

Es gelte: $f:D\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\quad\to$ implizite Gleichung $f(x,y)=0$
Bedinungen für die Existenz von $y=g(x)$:

- D ist offen
- $f\in C^1(D)$
- $\exists(x_0,y_0)\in D$ mit $f(x_0,y_0)=0$
- $f_y(x_0,y_0)\neq 0$

$\Rightarrow \exists I\subseteq\mathbb{D}: I=(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon)$, $J\subseteq\mathbb{R}: J=(y_0-\delta,y_0+\delta)$ mit:

- $I\times J\subseteq D$ in $f_y(x,y)\neq 0\forall(x,y)\in I\times y$
- $\exists_1$ Funktion $g(x)$ mit $f(x,g(x))=0$ ("g wird implizit definiert")
- $g'(x)=\frac{-f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}=\frac{-f_x(x,y)}{f_y(x,y)}\quad\forall x\in I$

$$g''(x)=-\frac{f_{xx}(x,g(x))+2f_{xy}(x,g(x))\cdot g'(x)+f_{yy}(x,g(x))\cdot(g'(x))^2}{f_y(x,g(x))}$$

6.2 Satz über implizite Funktionen (allgemein)

$f:\mathbb{R}^{k+m}\to\mathbb{R}^m$ stetig diffbar,
$z_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^{k+m}$ $x_0\in\mathbb{R}^k$, $y_0\in\mathbb{R}^m$ mit $f(z_0)=0$
Falls $J_{f,y}=(\frac{\partial f_i(z_0)}{\partial x_j})_{i=1\ldots m j=k+1\ldots k+m}$ ist invertierbar ($\det J_{f,y}(z_0)\neq 0$)
Dann: $\exists$ offende Menge I in J mit $g:I\to J$ mit $f(x,g(x))=0$

6.3 Satz von der Umkehrabbildung

$D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f:D\to\mathbb{R}^n\in C^1(D).X_0\in D$ mit $J_f(x_0)$ ist invertierbar.
Dann: $\exists U$ Umgebung von x_0 mit $f|_U:U\to f(U)$ ist bijektiv.
Die Umkehrfunktion $(f|_u)^{-1}$ ist stetig diffbar und es gilt:
$J(f|_U)^{-1}(f(x))=(J_f(x))^{-1}\forall x\in U$

7 Matrizen

7.1 Determinante von $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A)=|A|$

$$\det\begin{pmatrix}A & 0\\ C & D\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}=\det(A)\cdot\det(D)$$

Hat $\boldsymbol{A}$ 2 linear abhäng. Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A|=0$
Entwicklung. n. $i$ter Zeile: $|A|=\sum\limits_{i=1}^n(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot|A_{ij}|$

7.2 Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwerte: $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{1})=0$, Det-Entwickl., Polynom-Div.
$\Rightarrow \chi_A=(\lambda_1-\chi)^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda_r-\chi)^{\nu_r}\quad \nu_i=\operatorname{alg}(\lambda_i)$

Eigenvektoren: $\operatorname{Eig}_A(\lambda_i)=\ker(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{1})=v_i$
$\to\dim(\operatorname{Eig}_A(\lambda_i))=\operatorname{geo}(\lambda_i)\quad\forall i: 1\le\operatorname{geo}(\lambda_i)\le\operatorname{alg}(\lambda_i)$

$\boxed{\boldsymbol{Av}=\lambda\boldsymbol{v}}$ mit $\boldsymbol{v}$ EV von $\boldsymbol{A}$
<u>Ähnlichkeit von Matrizen:</u> Matrizen A und B sind ähnlich, wenn

- sie die gleichen Eigenwerte besitzen
- die algebraischen mit den geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte übereinstimmen
- Es gilt: $\det A=\det B$

7.3 Diagonalmatrix

<u>Bedingungen für Diagonalisierbarkeit:</u>

- Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt in Linearfaktoren $\chi_A(t)=(\lambda_1-t)^{k_1}(\lambda_2-t)^{k_2}\ldots(\lambda_r-t)^{k_r}$
- Die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte stimmen mit den geometrischen überein $k_i=\dim V_{\lambda_i}$
- Jede **symmetrische** Matrix $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{AB}\qquad \boldsymbol{B}=\left[\boldsymbol{EV}_1,\boldsymbol{EV}_2,\ldots\right]$$

${}_BM(f)_B={}_B\ M(id)_{E3}\cdot{}_{E3}\ M(f)_{E3}\cdot{}_{E3}\ M(id)_B$
$B=({}_{E3}b_1,{}_{E3}b_2,{}_{E3}b_3)=(v_1,v_2,v_3)$

7.4 Definitheit

Eine sym. Matrix $A=A^\top\in\mathbb{R}^{n\times n}$ heißt
pos./neg. definit $\Leftrightarrow\forall v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}: \boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{Av}\gtrless 0\Leftrightarrow$ Alle EW $\lambda\gtrless 0$
pos./neg. semi definit $\Leftrightarrow\forall v\in\mathbb{R}^n: \boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{Av}\gtreqless 0\Leftrightarrow$ Alle EW $\lambda\gtreqless 0$
indefinit $\Leftrightarrow\exists v,w\in\mathbb{R}^n: \boldsymbol{v}^\top\boldsymbol{Av}<0\ \wedge\ \boldsymbol{w}^\top\boldsymbol{Aw}>0\Leftrightarrow\exists\lambda_1>0\wedge\lambda_2<0$
Alle EW von $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^\top$ sind reel. $\lambda\in\mathbb{R}$ selbst wenn EV $v\in\mathbb{C}$!
Überprüfung mit $\det\boldsymbol{A}=\prod\lambda_i\qquad \operatorname{Sp}\boldsymbol{A}=\sum\lambda_i$

Nur für 2×2-Matrix: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

Definitheit	Eigenwerte	$\det\boldsymbol{A}=ad-bc$	$\operatorname{Sp}\boldsymbol{A}=a+d$
indefinit	pos. und neg.	$\det\boldsymbol{A}<0$	
pos. semidef.	$\lambda\ge 0$	$\det\boldsymbol{A}=0$	$\operatorname{Sp}\boldsymbol{A}\ge 0$
neg. semidef.	$\lambda\le 0$	$\det\boldsymbol{A}=0$	$\operatorname{Sp}\boldsymbol{A}\le 0$
pos. definit	$\lambda>0$	$\det\boldsymbol{A}>0$	$\operatorname{Sp}\boldsymbol{A}>0$
neg. definit	$\lambda<0$	$\det\boldsymbol{A}>0$	$\operatorname{Sp}\boldsymbol{A}<0$

8 Extremwerte von Skalarfeldern $f(\boldsymbol{x})$

8.1 Extremewerte ohne NB

- Suche Kandidaten (stationäre Punkte): $\{\boldsymbol{x}_0\}:\nabla f(\boldsymbol{x}_0)=0$
- Falls $H_f(\boldsymbol{x}_0)\begin{cases}\text{neg. definit} & \Rightarrow \boldsymbol{x}_0=\text{lok. Max.}\\ \text{pos. definit} & \Rightarrow \boldsymbol{x}_0=\text{lok. Min.}\\ \text{indefinit} & \Rightarrow \boldsymbol{x}_0=\text{Sattelpunkt}\\ \text{semidefinit} & \Rightarrow \boldsymbol{x}_0=\text{keine Aussage}\end{cases}$
- globale Extreme $\to$ prüfe Rand

8.2 Extremwerte von $f(\boldsymbol{x})$ mit Nebenbedingung

Es seien $f,g:\Omega\subset\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$

- NB $g(x)=0$ ist nach einer Variable auflösbar.
  $\to$ Setze x_i in $f(x)$ ein $\to$ Bestimme EW
- Lagrange-Funktion
  Nebenbedingung $g(x)=0$
  $\boxed{L(x,\lambda)=f(x)+\lambda g(x)}$
  - Regularitätsbedingung: $\nabla g(x)\neq 0\quad\forall x\in\Omega$
  - Kandidaten: $\nabla L(x,\lambda)=0\Rightarrow\begin{cases}\nabla f(x)+\lambda\nabla g(x)=0\\ g(x)=0\end{cases}$
  - Vergleiche die Funktionswerte der Kandidaten
    $\to$Entscheidung über Extrema (auch Rand betrachten)

PS: Lagrange bestiehlt kleine Kinder!!!!

8.3 Lineare Ausgleichsrechnung (Polynom)

Man betrachtet eine Funktion $b=f(t)=x_0+x_1t+\ldots+x_nt^n$ mit unbekannten Koeffizienten $x_0,x_1,\ldots x_n$. Es sind m Paare (b_i,t_i) gegeben und sucht den Vektor $\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)^T$, für den $r_i(x)=b_i-x_0-x_1t-\ldots-x_nt^n$ minimal sind.

<u>Aufgabe:</u> Minimiere $\sum\limits_{i=1}^m(b_i-x_0-x_1t-\ldots-x_nt^n)^2$
$\Leftrightarrow$ Minimiere $\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\|^2$ mit $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n\\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

Man erhält Minimum durch Lösen der Normalengleichung
$\boxed{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}}$

8.4 Lineare Ausgleichsrechnung (aus HM)

Gegeben: n Stützstellen $(t_1,y_1),\ldots,(t_n,t_y)$.
Gesucht: Ausgleichsfunktion $f=f(x)=\lambda_1f_1+\cdots+\lambda_rf_r$ zu gegebenen $f_1,\ldots,f_r$

1. $b=(y_1,\ldots,y_n)^\top\qquad A=\begin{pmatrix}f_1(t_1) & \ldots & f_r(t_1)\\ \vdots & & \vdots\\ f_1(t_n) & \ldots & f_r(t_n)\end{pmatrix}$
2. Löse $A^\top Ax=A^\top b\qquad x=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)^\top$
3. $f=f(x)=\lambda_1f_1+\cdots+\lambda_rf_r$

9 Kurvenintegral

9.1 Skalares Kurvenintegral

von Skalarfeld $f(\boldsymbol{x})$ entlang einer Kurve $\boldsymbol{\gamma}(t)$ mit $\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\int_\gamma f\ \mathrm{d}s := \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|\mathrm{d}t}$$

Im Fall $n=2$ gibt $\int_\gamma f\ \mathrm{d}s$ den Flächeninhalt unter f entlang der Spur von $\boldsymbol{\gamma}$ an. $L(\boldsymbol{\gamma})$ ist das skalares Kurvenintegral über $f=1$

Anmerkung: Ist $\varrho(x, y, z)$ die Masse- oder Ladungsdichte eines Drahtes so ist die Gesamtmasse M:

$\int_{\gamma} f \ \mathrm{d}s = \int_{a}^{b} \varrho(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \mathrm{d}t$

Der Schwerpunkt $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$ ist: $S_i = \frac{1}{M(\boldsymbol{\gamma})} \cdot \int_{\gamma} x_i \varrho \ \mathrm{d}s$

9.2 vektorielles Kurvenintegral

von einem Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ längs der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\int \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} := \int_{a}^{b} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t))^{\top} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \ \mathrm{d}t}$$

Für beide Integrale gilt:

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g$

$\int_{\gamma} \lambda f + \mu g \ \mathrm{d}s = \int_{\gamma} \lambda f \ \mathrm{d}s + \int_{\gamma} \mu g \ \mathrm{d}s$

Ist $\gamma = \sum \gamma_i$ so gilt: $\int_{\gamma} f \ \mathrm{d}s = \sum \int_{\gamma_i} f \ \mathrm{d}s$

$\int_{\gamma} f \ \mathrm{d}s = \underset{\text{Bei VF}}{(-)} \int_{-\gamma} f \ \mathrm{d}s$

$\rightarrow g''(42) > 9000$ (over 9000)

9.3 Integrabilitätsbedingung (Gradientenfeld)

$\Rightarrow$ Kurve muss einfach zusammenhängend sein.
(Man muss die Kurve auf einen Punkt zusammenziehen könnnen)

$f : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ist ein Gradientenfeld, wenn $f(x) = \nabla F(x)$

$\Leftrightarrow \boxed{J_f(x) = J_f(x)^T}$ bzw. $\partial_{x_i} f_j(x) = \partial_{x_j} f_i(x)$

Sonderfälle:

- $n = 2$: $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$
- $n = 3$: $\mathrm{rot}\ v = 0 \Rightarrow$ Integrabilitätsbedinung ist erfüllt.

Potential

10 Integralarten (HM3)

10.0.1 Regulärer Bereich

$B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **regulärer Bereich**, wenn

- B abgeschlossen und einfach zusammenhängend
- B lässt sich in endlich viele Normalbereiche zerlegen

10.0.2 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern um x-Achse

$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \qquad O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \mathrm{d}x$

10.1 Skalares Kurvenintegral

$$\boxed{\int_{\gamma} f \ \mathrm{d}s := \int_{a}^{b} f(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \mathrm{d}t}$$

SF $f(\boldsymbol{x})$; $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$
$L(\boldsymbol{\gamma}) = \int_{\gamma} 1 \ \mathrm{d}s$

Gesamtmasse $M = \int_{\gamma} f \ \mathrm{d}s = \int_{a}^{b} \varrho(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \mathrm{d}t$

Schwerpunkt $\boldsymbol{S}$: $\quad S_i = \frac{1}{M(\boldsymbol{\gamma})} \cdot \int_{\gamma} x_i \varrho \ \mathrm{d}s$

10.2 vektorielles Kurvenintegral

$$\boxed{\int \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} := \int_{a}^{b} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t))^{\top} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \ \mathrm{d}t}$$

VF $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$; $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$

10.2.1 Fluss durch Kurve

Fluss von $\boldsymbol{v}$ von (in Durchlaufrichtung gesehen) links nach rechts.

$$\boxed{\int_{\omega} \boldsymbol{v} \ \mathrm{d}\boldsymbol{n} = \int_{\omega} \boldsymbol{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \ \mathrm{d}s}$$

10.3 Gebietsintegrale über Normalbereiche

$f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig

10.3.1 Flächenintegrale im $\mathbb{R}^2$

Typ I B_{I} regulärer Bereich

$B_{\mathsf{I}} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | a \le x_1 \le b; g(x_1) \le x_2 \le h(x_1) \right\}$

$$\boxed{\iint_B f \ \mathrm{d}F = \int_{x_1=a}^{b} \int_{x_2=g(x_1)}^{h(x_1)} f(x_1, x_2) \ \mathrm{d}x_2 \ \mathrm{d}x_1}$$

Typ II B_{II} regulärer Bereich

$B_{\mathsf{II}} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | c \le x_2 \le d; l(x_2) \le x_1 \le r(x_2) \right\}$

$$\boxed{\iint_B f \ \mathrm{d}F = \int_{x_2=c}^{d} \int_{x_1=l(x_2)}^{r(x_2)} f(x_1, x_2) \ \mathrm{d}x_1 \ \mathrm{d}x_2}$$

10.3.2 Volumenintegrale im $\mathbb{R}^3$

V regulärer Bereich

$V = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 | a \le x_1 \le b, u(x_1) \le x_2 \le o(x_1), u'(x_1, x_2) \le x_3 < o'(x_1, x_2) \}$

$$\boxed{\iiint_V f \ \mathrm{d}V = \int_{a}^{b} \int_{u(x_1)}^{o(x_1)} \int_{u'(x_1,x_2)}^{o'(x_1,x_2)} f(x_1, x_2, x_3) \ \mathrm{d}x_3 \ \mathrm{d}x_2 \ \mathrm{d}x_1}$$

10.4 Koordinatentransformationen

$D, B \subseteq \mathbb{R}^2$ reguläre Bereiche

$\boldsymbol{x} : D \to B$ mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u_1, u_2) \quad \boldsymbol{u} \in D$

$\Rightarrow \iint_B f(x_1, x_2) \ \mathrm{d}F(\boldsymbol{x}) = \iint_D f(\boldsymbol{x}(u_1, u_2)) \, |\det J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u})| \ \mathrm{d}F(\boldsymbol{u})$

$J_{\boldsymbol{x}} \neq 0$ bis auf Nullmengen

$D, B \subseteq \mathbb{R}^3$ reguläre Bereiche

$\boldsymbol{x} : D \to B$ mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u_1, u_2, u_3) \quad \boldsymbol{u} \in D$

$\Rightarrow \iiint_B f(\boldsymbol{x}) \ \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}) = \iiint_D f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})) \, |\det J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u})| \ \mathrm{d}V(\boldsymbol{u})$

$J_{\boldsymbol{x}} \neq 0$ bis auf Nullmengen

10.4.1 Oberflächen- und Volumenelemente

Zylinderkoordinaten

$r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi, \quad r \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}z \ \mathrm{d}r$

$\mathrm{d}V = r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}z$

Kugelkoordinaten

$r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\theta, \quad r^2 \sin(\theta) \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}\varphi, \quad r \sin(\theta) \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}r$

$\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta) \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi \ \mathrm{d}\theta$

10.4.2 Koordinatenwechsel

$\boldsymbol{x} : \boldsymbol{u} \in D \to \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) \in B$ orthogonale Transformation

$D, B \subseteq \mathbb{R}^3$

$B(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{u_1} & \boldsymbol{e}_{u_2} & \boldsymbol{e}_{u_3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{e}_{u_i} = \frac{\boldsymbol{x}_{u_i}}{\|\boldsymbol{x}_{u_i}\|}$

$\boxed{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})) = B(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u})}$

Kurvenintegrale

$\omega(t) \in D$: Kurve im $\boldsymbol{u}$-Raum

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\omega}(t))$: Zugehörige Kurve im x-Raum

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \cdot \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{u}) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \ \mathrm{d}u_1 \\ h_2 \ \mathrm{d}u_2 \\ h_3 \ \mathrm{d}u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 V_1(\boldsymbol{u}) \\ h_2 V_2(\boldsymbol{u}) \\ h_3 V_3(\boldsymbol{u}) \end{pmatrix} \cdot \ \mathrm{d}\boldsymbol{u}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = h_1 \boldsymbol{e}_{u_1} \ \mathrm{d}u_1 + h_2 \boldsymbol{e}_{u_2} \ \mathrm{d}u_2 + h_3 \boldsymbol{e}_{u_3} \ \mathrm{d}u_3$

$\mathrm{d}s(\boldsymbol{x}) = \sqrt{h_1^2 \dot{\omega_1}(t)^2 + h_2^2 \dot{\omega_2}(t)^2 + h_3^2 \dot{\omega_3}(t)^2} \ \mathrm{d}t$

Oberflächenintegrale

$T \subset D$: Fläche im u-Bereich

$S \subset B$: Entsprechende Fläche im x-Bereich

$S = \boldsymbol{x}(T)$; Parametrisierung in D: $(u, w) \in M \mapsto \boldsymbol{\phi}(u, w)$

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \ \mathrm{d}\boldsymbol{O} = \iint_M \left(V_1 h_2 h_3 \frac{\partial(\phi_2, \phi_3)}{\partial(u, w)} + V_2 h_3 h_1 \frac{\partial(\phi_3, \phi_1)}{\partial(u, w)} + V_3 h_1 h_2 \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(u, w)} \right) \mathrm{d}s \ \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{O}(\boldsymbol{x}) = \left[h_2 h_3 \frac{\partial(\phi_2, \phi_3)}{\partial(u, w)} \boldsymbol{e}_{u_1} + h_3 h_1 \frac{\partial(\phi_3, \phi_1)}{\partial(u, w)} \boldsymbol{e}_{u_2} + h_1 h_2 \frac{\partial(\phi_1, \phi_2)}{\partial(u, w)} \boldsymbol{e}_{u_3} \right] \mathrm{d}s \ \mathrm{d}t$$

10.5 Integration über Flächen in $\mathbb{R}^3$

10.5.1 Parametrisierung

Fläche im Zweidimensionalen wird zuerst parametrisiert:

$(u, w) \in M \mapsto \boldsymbol{\phi}(u, w) = \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$

Kreis mit Radius r:

$\phi = x^2 + y^2 \le r^2 \qquad \partial\phi = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$

Ellipse mit den Halbachsen a und b:

$\phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \qquad \partial\phi = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$

Eigenschaften der Parametrisierung $\boldsymbol{\phi}(u, w)$

- x flächentreu: $\|\boldsymbol{\phi}_u \times \boldsymbol{\phi}_w\| = 1$
- x winkeltreu: $\boldsymbol{\phi}_u \perp \boldsymbol{\phi}_w$ & $\|\boldsymbol{\phi}_u\| = \|\boldsymbol{\phi}_w\|$
- x längentreu: $\boldsymbol{\phi}_u \perp \boldsymbol{\phi}_w$ & $\|\boldsymbol{\phi}_u\| = \|\boldsymbol{\phi}_w\| = 1$

10.5.2 Skalares Oberflächenintegral

Fläche $\boldsymbol{\phi} : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u, w) \mapsto \boldsymbol{\phi}(u, w)$ und

SF $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \mapsto f(x, y, z)$

$$\boxed{\iint_{\boldsymbol{\phi}} f \ \mathrm{d}O := \iint_B f(\boldsymbol{\phi}(u, w)) \cdot \|\boldsymbol{\phi}_u \times \boldsymbol{\phi}_w\| \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}w}$$

10.5.3 Vektorielles Oberflächenintegral (Fluss)

Fläche $\boldsymbol{\phi} : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u, w) \mapsto \boldsymbol{\phi}(u, w)$ und

VF $\boldsymbol{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{v}(x, y, z)$

$$\boxed{\iint_{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{v} \cdot \ \mathrm{d}\boldsymbol{O} := \iint_B \boldsymbol{v}\Big(\boldsymbol{\phi}(u, w)\Big)^{\top} \cdot \Big(\boldsymbol{\phi}_u \times \boldsymbol{\phi}_w\Big) \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}w}$$

11 Integralsätze

Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet mit geschlossenem Rand $\partial B = \sum \boldsymbol{\gamma}_i$ mit $\boldsymbol{\gamma}_i \in \mathcal{C}^1$ und pos. param. (gegen Uhrzeigersinn), dann gilt $\forall \mathcal{C}^1$ VF $\boldsymbol{v}$:

11.1 Divergenzsatz von Grauß für einfache $\partial V = \sum \phi_i$

$$\boxed{\iiint_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \ \mathrm{d}z = \oiint_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \ \mathrm{d}\boldsymbol{O} = \sum \iint_{\boldsymbol{\phi}_i} \boldsymbol{v} \cdot \ \mathrm{d}\boldsymbol{O}}$$

$\boldsymbol{\phi}_i$ muss pos. param. sein! ($\boldsymbol{n} = \phi_{iu} \times \phi_{iy}$ nach außen)

Für Fläche A: $\boxed{\iint_A \mathrm{div}\ \boldsymbol{v} \ \mathrm{d}A = \oint_{\partial A} \boldsymbol{v}\Big(\boldsymbol{\gamma}(t)\Big)^{\top} \boldsymbol{n} \ \mathrm{d}s}$

$\mathrm{d}s = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| \ \mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{n} = \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}\|^{-1} (\gamma_2, -\gamma_1)^{\top}$

11.1.1 Sektorformel zur Flächenberechnung

$\omega(t) = \partial B$

$$\boxed{F(B) = \frac{1}{2} \int_a^b \omega_1 \dot{\omega_2} - \omega_2 \dot{\omega_1} \ \mathrm{d}t}$$

11.2 Satz von Stokes für doppelpunktfreien $\partial\phi = \sum \gamma_i$

$$\boxed{\iint_{\boldsymbol{\phi}} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} \ \mathrm{d}\boldsymbol{O} = \oint_{\partial\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{v} \ \mathrm{d}\boldsymbol{s}}$$

Rechte Hand Regel:
Flächennormale = Daumen
Umlaufrichtung = Finger

11.2.1 Satz von Green

$$\boxed{\iint_B \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \ \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = \oint_{\partial B} \boldsymbol{v} \cdot \ \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{k} \int_{\boldsymbol{\gamma}_i} \boldsymbol{v} \cdot \ \mathrm{d}s}$$

Fläche muss **gegen den Uhrzeigersinn** umlaufen werden.
Falls ein Teil der Parametrisierung im Uhrzeigersinn verläuft, muss dieses Integral **subtrahiert** statt addiert werden.

11.2.2 Satz von Stokes für ebene Felder

$\boldsymbol{v} : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\iint_B \mathrm{rot} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{e_3} \ \mathrm{d}F = \oint_{\partial B} \boldsymbol{v} \ \mathrm{d}\boldsymbol{x}}$$

Sind f, g zwei SF, so: $\iiint_B f\Delta g + \nabla f \nabla g \ \mathrm{d}V = \iint_{\partial B} f \nabla g \ \mathrm{d}\boldsymbol{O}$

für $f = 1$: $\iiint_B \Delta g \ \mathrm{d}V = \iint_{\partial B} \nabla g \ \mathrm{d}\boldsymbol{O}$

11.3 Gradientenfeld

$D \subset \mathbb{R}^n$ offen und **einfach zusammenhängend** und $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ mit $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{R}^n$ C^1-Vektorfeld. Wenn

- $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} = 0$ **oder**
- $J_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = J_{\boldsymbol{v}}^T(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in D$

Dann

- $\boldsymbol{v}$ ist Gradientenfeld mit $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\ \phi$
- $\int_{\omega} \boldsymbol{v} \cdot \ \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \dot{\boldsymbol{\gamma}} \ \mathrm{d}t = \Phi(\boldsymbol{\gamma}(b)) - \Phi(\boldsymbol{\gamma}(a))$ (wegunabhängig)
- $\oint_{\omega} \boldsymbol{v} \cdot \ \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \quad \forall C^1$-Kurven in D
- $\boldsymbol{v}$ konservativ auf $D \Rightarrow$ auch auf jeder Teilmenge von D
- **Stammfunktion:** Es gilt $\partial_i \Phi = v_i \ \rightarrow \ \Phi = \int v_i \ \mathrm{d}x_i + c(\boldsymbol{x_k}) \quad k \neq i$

Rezept: Stammfunktion eines Gradientenfeldes

Fall $n = 2$: Ist $\boldsymbol{v} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ ein Gradientenfeld, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^{\top}$, so findet man eine Stammfunktion f von $\boldsymbol{v}$ wie folgt:

1. Integration von v_1 nach x:
   $f(x, y) = \int v_1(x, y) \ \mathrm{d}x + g(y)$
2. Ableiten von f aus (1) nach y und Gleichsetzen mit v_2 liefert eine Gleichung für $g_y(y)$:
   $f_y(x, y) = v_2(x, y) \Rightarrow g_y(y)$
3. Integration von $g_y(y)$ nach y mit der Konstanten $c = 0$ liefert $g(y)$:
   $g(y) = \int g_y(y) \ \mathrm{d}y$
4. Setze $g(y)$ aus (3) in f aus (1) ein und erhalte eine Stammfunktion f

Fall $n = 3$: Ist $\boldsymbol{v} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ ein Gradientenfeld, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\top}$, so findet man eine Stammfunktion f von $\boldsymbol{v}$ wie folgt:

1. Integration von v_1 nach x:
   $f(x,y,z) = \int v_1(x,y,z)\ \mathrm{d}x + g(y,z)$
2. Ableiten von f aus (1) nach y und Gleichsetzen mit v_2 liefert eine Gleichung für $g_y(y,z)$:
   $f_y(x,y,z) = v_2(x,y,z) \Rightarrow g_y(y,z)$
3. Integration von $g_y(y,z)$ nach y liefert:
   $g(y,z) = \int g_y(y,z)\ \mathrm{d}y + h(z)$
4. $g(y,z)$ in f aus (1) einsetzen
5. Ableiten von f aus (4) nach z und Gleichsetzen mit v_3 liefert eine Gleichung für $h_z(z)$:
   $f_z(x,y,z) = v_3(x,y,z) \Rightarrow h_z(z)$
6. Integration von $h_z(z)$ nach z mit der Konstanten $c = 0$ liefert $h(z)$:
   $h(z) = \int h_z(z)\ \mathrm{d}z$
7. Setze $h(z)$ aus (6) in f aus (4) ein und erhalte eine Stammfunktion f

12 Differentialgleichungen DGL

12.1 Seperierbare DGL

Form: $y' = f(x)\cdot g(y)$; Lösung: $\int \frac{1}{g(y)}\ \mathrm{d}y = \int f(x)\ \mathrm{d}x$

12.2 lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

12.2.1 homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_0 y = 0$

- Stelle die charakteristische Gleichung $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$ auf
- Bestimme alle Lösungen von $p(\lambda)$
- Gib n linear unabhängige Lösungen der DGL an:
  - Ist λ eine m-fache reelle NST, dann wähle $y_1 = e^{\tilde{\lambda}x}$, $y_i = x^i e^{\lambda x}$
  - Ist λ eine m-fache konjugiert komplexe NST $\lambda = a + \mathrm{i}b$, dann streiche $\overline{\lambda}_i$ und wähle $y_1 = e^{ax}\cos(bx)$, $y_2 = e^{ax}\sin(bx)$ bzw. $y_i = x^i e^{ax}\sin(bx)$ und $y_{i+1} = x^i e^{ax}\cos(bx)$
- $y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ mit $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ ist Lösung der DGL

12.2.2 inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_0 y = s(t)$

- Löse homogene DGL ($s = 0$), liefert y_h
- Partikuläre Lösung y_p durch **Variation der Konstanten**
  - Stelle ein $y_p(x)$ mit variablen Konstanten $c(x)$ auf
  - Löse das System:
    $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$
    $c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{1}{a_n} s(x)$
    Beachte dabei auch die Ableitung nach der Produktregel
  - Erhalte $c(x)$ durch unbestimmte Integration aus $c'(x)$
  - $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ ist die partikuläre Lösung
- Partikuläre Lsg. y_p durch Ansatz vom komischen Typ auf der rechten Seite
  - Idee: y_p hat die Form von $s(x)$
    Falls $s(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)e^{ax}\begin{cases}\cos(bx)\\ \sin(bx)\end{cases}$, dann
    $y_p = x^r \cdot \left[(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m)\cos(bx) + (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)\sin(bx)\right]e^{ax}$
    mit $a + bi$ ist r-fache Nullstelle(Resonanz) vom char. Poly. von y_h
    Tipp: Bei Summen im Störglied entkoppelt, d.h. y_p getrennt berechnen und addieren.
- Die Lösung der DGL ist $y = y_p + y_h$

12.3 Die exakte DGL

DGL der Form: $\boxed{f(x,y) + g(x,y)\cdot y' = 0}$
bzw. $f(x,y)\ \mathrm{d}x + g(x,y)\ \mathrm{d}y = 0$

Bedingung für Exaktheit: $\partial_y f = \partial_x g$

Gradientenfeld $v(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y)\\ g(x,y)\end{pmatrix}$ hat Stammfkt. $F(x, y(x)) = C$

- Bestimme die Stammfunktion $F(x,y)$ von v durch sukzessive Integration:
  - $(*)\ F(x,y) = \int f dx + G(y)$
  - Bestimme $G'(y)$ aus $F_y = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = g$
  - Bestimme $G(y)$ aus $G'(y)$ durch Integration
  - Erhalte $F(x,y)$ aus Schritt $(*)$
- Löse $F(x,y) = c$ nach $y = y(x)$ auf, falls möglich
- Die von c abhängige Lsg. ist die allg. Lsg. der DGL

12.4 Homogene lineare DGL Systeme

→ Jede DGL lässt sich als DGL System darstellen
Transformiere eine DGL 2. Ordnung in ein DGL System 1. Ordnung:

- Substituiere $\dot{x} = y$
- Schreibe DGL-System:
  $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ a_1 & a_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ (Bestimme a_1 und a_2 aus DGL)

Löse das DGL-System

1. Bestimme EW λ_i und Basis aus EV $\boldsymbol{b}_i$ von $\boldsymbol{A}$
2. Setze $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{b}1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ und bestimme $\boldsymbol{S}^{-1}$ und $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}$
3. Berechne $e^{\boldsymbol{A}} = \exp(\boldsymbol{SDS}^{-1}) = \boldsymbol{S}e^{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{S}^{-1}$

$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{Ay} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\cdot e^{(x-x_0)\boldsymbol{A}} = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot e^{\lambda_i x}\cdot b_i$

Bei komplexen EW: Trennung in Real und Imaginärteil

12.5 Lösung für $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{Ay}$ falls $\boldsymbol{A}$ nicht diagbar

→ Es existiert eine Jordan-Normalform $\boldsymbol{J}$ mit $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}$

$e^{\boldsymbol{J}} = e^{\boldsymbol{D}+\boldsymbol{N}} = e^D e^N = e^D \cdot (\boldsymbol{E}_k + \boldsymbol{N} + \frac{1}{2}\boldsymbol{N}^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{N}^k)$

$e^{x\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}x^2 & \ldots & \frac{1}{(k-1)!}x^{k-1}\\ & 1 & x & & \\ & & & & \\ 0 & & 1 & & \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{S}$ ist die Transformationsmatr. auf Jordan-Normalform:
$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ mit $\boldsymbol{b}_1 \ldots \boldsymbol{b}_n$ sind EV bzw. HV von $\boldsymbol{A}$

Allgemeine Lösung:

$\boxed{\boldsymbol{y}(x) = e^{x\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{S}e^{x\boldsymbol{J}}\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}e^{x(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{N})}\boldsymbol{c}}$

Die Lösungsformel für (1×1), (2×2) **und** (3×3) **Kästchen**
$y_a(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}v_1$
$+ c_2 e^{\lambda_2 x}v_2 + c_3 e^{\lambda_2 x}(xv_2 + v_3)$
$+ c_4 e^{\lambda_3 x}v_4 + c_5 e^{\lambda_3 x}(xv_4 + v_5) + c_6 e^{\lambda_3 x}(\frac{1}{2}x^2 v_4 + xv_5 + v_6)$

$\rightarrow v_1, v_2, v_4$ EV, v_3, v_5 HV 2. Stufe und v_6 HV 3. Stufe

12.6 Lösen von allgemeinen DGL-Systemen

DGL-System: $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{b}(t)$

1. Finde n lin. unabhäng. Lösungsvektoren $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ mit der Wronski Determinante $W(t) = \det(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \overset{!}{\neq} 0$
2. Bestimme $\boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{c}(t)$ durch Variation der Konstanten
   $c(t) = \int \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t)\ \mathrm{d}t$ bzw. $\boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{b}$
3. Bestimme $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_p + \sum c_i \boldsymbol{y}_i$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

Gleichgewichtspunkt: $Ay_g + b = 0 \rightarrow (A|b) \rightarrow (E|y_g)$
Stabilität:

- $Re(\lambda_i) < 0 \rightarrow$ asymptotisch stabil
- $Re(\lambda_i) > 0 \rightarrow$ instabil
- $Re(\lambda_i) \leq 0 \rightarrow$ stabil

13 Lösen von linearen DGL-Systemen 1. Ordnung (ST)

$\underline{\dot{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) \quad$ mit $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

1. Eigenwerte berechnen

$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1}) \overset{!}{=} \mathbf{0}$
$\Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$
$T = a_{11} + a_{22} = Spur(\mathbf{A})$; $\quad \Delta = det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

Indizes so wählen, dass gilt: $|\lambda_1| < |\lambda_2|$
$\Rightarrow \lambda_1$ ist langsamer und λ_2 ist schneller Eigenwert!

Falls EW konjugiert komplex: $\lambda_1 = \alpha + j\beta$
Falls $\frac{T^2}{4} \geq \Delta \Rightarrow$ reelle Lösungen
Falls $\frac{T^2}{4} \leq \Delta \Rightarrow$ konjugiert komplexe Lösungen
Ein System ist stabil, wenn für alle λ_i gilt: $Re(\lambda_i) < 0$

2. Eigenvektoren berechnen

$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\cdot\underline{q} \overset{!}{=} \underline{0}$

$a_{12} \neq 0: \ \Rightarrow \underline{q}_1 = \begin{matrix} -a_{12}\\ a_{11} - \lambda_1\end{matrix}\Bigg]; \quad \underline{q}_2 = \begin{matrix} -a_{12}\\ a_{11} - \lambda_2\end{matrix}\Bigg]$

$a_{21} \neq 0: \ \Rightarrow \underline{q}_1 = \begin{matrix} a_{22} - \lambda_1\\ -a_{21}\end{matrix}\Bigg]; \quad \underline{q}_2 = \begin{matrix} a_{22} - \lambda_2\\ -a_{21}\end{matrix}\Bigg]$

$a_{12} = a_{21} = 0: \ \Rightarrow \underline{q}_1 = \begin{matrix} 1\\ 0\end{matrix}\Bigg]; \quad \underline{q}_2 = \begin{matrix} 0\\ 1\end{matrix}\Bigg]$

Falls Eigenvektoren konjugiert komplex:
$\underline{q}_r = Re(\underline{q}_1)$; $\quad q_i = Im(\underline{q}_1)$

3. Lösung

Homogene Zustandsgleichung (ohne Erregung)

$\underline{\dot{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t)$

<u>1. Fall:</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$\underline{x}_0 = c_1\underline{q}_1 + c_2\underline{q}_2$
$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{q}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{q}_2$

<u>2. Fall:</u> $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; $\quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$c_1 = x_{01}$; $\qquad c_2 = x_{02}$
$\underline{x}(t) = e^{\lambda t}[\mathbf{1} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})t]\cdot \begin{matrix} c_1\\ c_2\end{matrix}\Bigg]$

<u>3. Fall:</u> $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = \alpha \pm j\beta$; $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$
$\underline{x}_0 = c_1\underline{q}_r + c_2\underline{q}_i$
$\underline{x}(t) = c_1\cdot Re(e^{\lambda t}\underline{q}) + c_2\cdot Im(e^{\lambda t}\underline{q})$

$\underline{x}(t) = c_1 e^{\alpha t}[cos(\beta t)\underline{q}_r - sin(\beta t)\underline{q}_i] +$

$\qquad c_2 e^{\alpha t}[sin(\beta t)\underline{q}_r + cos(\beta t)\underline{q}_i]$

Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Thomas Wick
Dr. Dominik Meidner

Sommersemester 2015

Formelsammlung Koordinatentransformation

Es wird die Notation aus Vorlesung und Übung zur Analysis 2 (EI) verwendet.

Skalarfelder $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

kartesische Koordinaten im Punkt $(x,y,z)^T$	Zylinderkoordinaten im Punkt $(r,\varphi,z)^T$	Kugelkoordinaten im Punkt $(r,\theta,\varphi)^T$
f	$\tilde f$	$\tilde f$
$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\widetilde{\Delta} f = \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial z^2}$	$\widetilde{\Delta} f = \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \tilde f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial \tilde f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \varphi^2}$
$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_x, e_y, e_z \,\}$	$\widehat{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \tilde f}{\partial z} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\varphi, e_z \,\}$	$\widehat{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde f}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\theta, e_\varphi \,\}$

Vektorfelder $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

kartesische Koordinaten im Punkt $(x,y,z)^T$	Zylinderkoordinaten im Punkt $(r,\varphi,z)^T$	Kugelkoordinaten im Punkt $(r,\theta,\varphi)^T$
$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_x, e_y, e_z \,\}$	$\hat g = \begin{pmatrix} \hat g_1 \\ \hat g_2 \\ \hat g_3 \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\varphi, e_z \,\}$	$\hat g = \begin{pmatrix} \hat g_1 \\ \hat g_2 \\ \hat g_3 \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\theta, e_\varphi \,\}$
$\operatorname{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}$	$\widetilde{\operatorname{div}}\, g = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat g_1)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat g_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \hat g_3}{\partial z}$	$\widetilde{\operatorname{div}}\, g = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2\hat g_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\hat g_2\sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \hat g_3}{\partial \varphi}$
$\operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_x, e_y, e_z \,\}$	$\widehat{\operatorname{rot}}\, g = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial \hat g_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial \hat g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat g_1}{\partial z} - \frac{\partial \hat g_3}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat g_2)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat g_1}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\varphi, e_z \,\}$	$\widehat{\operatorname{rot}}\, g = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\hat g_3\sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \hat g_2}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \hat g_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat g_3)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat g_2)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat g_1}{\partial \theta} \end{pmatrix}$ bzgl. $\{\, e_r, e_\theta, e_\varphi \,\}$

14 Anhang: Krummlinige Koordinaten

	Skalarfelder $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$		
Koordinatentyp	karthesische Koordinaten im Punkt $(x, y, z)^T$	Zylinderkoordinaten im Punkt $(r, \varphi, z)^T$	Kugelkoordinaten um Punkt $(r, \varphi, \theta)^T$
	f	$\tilde{f}$	$\tilde{f}$
Laplace-Operator	$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\widetilde{\Delta f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial z^2}$	$\widetilde{\Delta f} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{cos\theta}{r^2 sin\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}$
Gradient	$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\widehat{\nabla f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \end{pmatrix}$	$\widehat{\nabla f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \\ \frac{1}{r \cdot sin\theta}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} \end{pmatrix}$
Basis	$\{e_x, e_y, e_z\}$	$\{e_r, e_\varphi, e_z\}$	$\{e_r, e_\varphi, e_\theta\}$
	Vektorfelder $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$		
Koordinatentyp	karthesische Koordinaten im Punkt $(x, y, z)^T$	Zylinderkoordinaten im Punkt $(r, \varphi, z)^T$	Kugelkoordinaten um Punkt $(r, \varphi, \theta)^T$
	$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$	$\hat{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix}$	$\hat{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{pmatrix}$
Divergenz	$\text{div} g = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}$	$\widetilde{\text{div} g} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_1)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \hat{g}_3}{\partial z}$	$\widetilde{\text{div} g} = \frac{1}{r2}\frac{\partial (r^2\hat{g}_1)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot sin\theta}\frac{\partial \hat{g}_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cdot sin\theta}\frac{\partial (\hat{g}_3 sin\theta)}{\partial \theta}$
Rotation	$\text{rot} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\widehat{\text{rot} g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial \hat{g}_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \hat{g}_1}{\partial z} - \frac{\partial \hat{g}_3}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_2)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$	$\widehat{\text{rot} g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cdot sin\theta}\frac{\partial (\hat{g}_2 sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \cdot sin\theta}\frac{\partial \hat{g}_3}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_3)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \cdot sin\theta}\frac{\partial \hat{g}_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r\hat{g}_2)}{\partial r} \end{pmatrix}$
Basis	$\{e_x, e_y, e_z\}$	$\{e_r, e_\varphi, e_z\}$	$\{e_r, e_\varphi, e_\theta\}$

Umrechnung zwischen den Koordinatensystemen:

Zylinderkoordinaten	$\Rightarrow$	kartesische Koordinanten	$x = r \cdot cos\varphi$	$y = r \cdot sin\varphi$	$z = z$
kartesische Koordinaten	$\Rightarrow$	Zylinderkoordinaten	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\varphi = arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = arctan\frac{y}{x}$	$z = z$
Kugelkoordinaten	$\Rightarrow$	kartesische Koordinaten	$x = r \cdot sin\theta \cdot cos\varphi$	$y = r \cdot sin\theta \cdot sin\varphi$	$z = r \cdot cos\theta$
kartesische Koordinaten	$\Rightarrow$	Kugelkoordinaten	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; tan\varphi = \frac{y}{x}$	$cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
Kugelkoordinaten	$\Rightarrow$	Zylinderkoordinaten	$r_z = r_k \cdot sin\theta$	$\varphi_z = \varphi_k$	$z_z = r_k \cdot sin\theta$
Zylinderkoordinaten	$\Rightarrow$	Kugelkoordinaten	$r_k = \sqrt{r_z^2 + z_z^2}$	$\varphi_k = \varphi_z$	$\theta = arctan\frac{r_z}{z_z}$

Quelle: http://www.calc3d.com/help/gcoord.html

Table of Integrals*

Basic Forms

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \tag{1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \tag{2}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| \tag{4}$$

Integrals of Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \tag{5}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \tag{6}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{9}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| \tag{10}$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{11}$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\ln|a^2+x^2| \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a+x}{b+x},\ a \neq b \tag{14}$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln|a+x| \tag{15}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{16}$$

Integrals with Roots

$$\int \sqrt{x-a}\, dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \tag{18}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \tag{19}$$

$$\int x\sqrt{x-a}\, dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \tag{20}$$

$$\int \sqrt{ax+b}\, dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b} \tag{21}$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \tag{22}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3}(x \mp 2a)\sqrt{x \pm a} \tag{23}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a\tan^{-1}\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \tag{24}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a\ln\left[\sqrt{x} + \sqrt{x+a}\right] \tag{25}$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2 + abx + 3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \tag{26}$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)}\, dx = \frac{1}{4a^{3/2}}\left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2\ln\left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right|\right] \tag{27}$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)}\, dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3}\right]\sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}}\ln\left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right| \tag{28}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{29}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{30}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{3}\left(x^2 \pm a^2\right)^{3/2} \tag{31}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{32}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{33}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \tag{34}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \tag{35}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{36}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{b+2ax}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{37}$$

$$\int x\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{1}{48a^{5/2}}\left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} \times \left(-3b^2+2abx+8a(c+ax^2)\right) + 3(b^3-4abc)\ln\left|b+2ax+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right|\right) \tag{38}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{39}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{40}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \tag{41}$$

Integrals with Logarithms

$$\int \ln ax\, dx = x\ln ax - x \tag{42}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 \tag{43}$$

$$\int \ln(ax+b)\, dx = \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x, a \neq 0 \tag{44}$$

$$\int \ln(x^2+a^2)\, \mathrm{d}x = x\ln(x^2+a^2) + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} - 2x \tag{45}$$

$$\int \ln(x^2-a^2)\, \mathrm{d}x = x\ln(x^2-a^2) + a\ln\frac{x+a}{x-a} - 2x \tag{46}$$

$$\int \ln\left(ax^2+bx+c\right) dx = \frac{1}{a}\sqrt{4ac-b^2}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x\right)\ln\left(ax^2+bx+c\right) \tag{47}$$

$$\int x\ln(ax+b)\, dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{b^2}{a^2}\right)\ln(ax+b) \tag{48}$$

$$\int x\ln\left(a^2-b^2x^2\right) dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)\ln\left(a^2-b^2x^2\right) \tag{49}$$

Integrals with Exponentials

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} \tag{50}$$

$$\int \sqrt{x}e^{ax} dx = \frac{1}{a}\sqrt{x}e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\operatorname{erf}\left(i\sqrt{ax}\right), \quad \text{where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2} dt \tag{51}$$

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x \tag{52}$$

$$\int xe^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} \tag{53}$$

$$\int x^2e^x dx = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x \tag{54}$$

$$\int x^2e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} \tag{55}$$

$$\int x^3e^x dx = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)e^x \tag{56}$$

$$\int x^ne^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, \mathrm{d}x \tag{57}$$

$$\int x^ne^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\Gamma[1+n, -ax], \quad \text{where } \Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\, \mathrm{d}t \tag{58}$$

$$\int e^{ax^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\operatorname{erf}\left(ix\sqrt{a}\right) \tag{59}$$

$$\int e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\operatorname{erf}\left(x\sqrt{a}\right) \tag{60}$$

$$\int xe^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} \tag{61}$$

$$\int x^2e^{-ax^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2} \tag{62}$$

Integrals with Trigonometric Functions

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax \tag{63}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{64}$$

$$\int \sin^n ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax \;\; {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{65}$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \tag{66}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax \tag{67}$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{68}$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)}\cos^{1+p} ax \times {}_2F_1\left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{69}$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3\sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \tag{70}$$

$$\int \cos ax \sin bx dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \tag{71}$$

$$\int \sin^2 ax \cos bx dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{72}$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x \tag{73}$$

$$\int \cos^2 ax \sin bx dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{74}$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a}\cos^3 ax \tag{75}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bx dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \tag{76}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \tag{77}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a}\ln\cos ax \tag{78}$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a}\tan ax \tag{79}$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax\right) \tag{80}$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a}\ln\cos ax + \frac{1}{2a}\sec^2 ax \tag{81}$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| = 2\tanh^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) \tag{82}$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a}\tan ax \tag{83}$$

$$\int \sec^3 x \,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| \tag{84}$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \tag{85}$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2}\sec^2 x \tag{86}$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n}\sec^n x, n \neq 0 \tag{87}$$

$$\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln|\csc x - \cot x| + C \tag{88}$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a}\cot ax \tag{89}$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2}\cot x\csc x + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| \tag{90}$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n}\csc^n x, n \neq 0 \tag{91}$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln|\tan x| \tag{92}$$

Products of Trigonometric Functions and Monomials

$$\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x \tag{93}$$

$$\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax \tag{94}$$

$$\int x^2\cos x dx = 2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x \tag{95}$$

$$\int x^2\cos ax dx = \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\sin ax \tag{96}$$

$$\int x^n cosx dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1}\left[\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n\Gamma(n+1, ix)\right] \tag{97}$$

$$\int x^n cosax dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n}\left[(-1)^n\Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, ixa)\right] \tag{98}$$

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x \tag{99}$$

$$\int x\sin ax dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \tag{100}$$

$$\int x^2\sin x dx = \left(2 - x^2\right)\cos x + 2x\sin x \tag{101}$$

$$\int x^2\sin ax dx = \frac{2 - a^2x^2}{a^3}\cos ax + \frac{2x\sin ax}{a^2} \tag{102}$$

$$\int x^n\sin x dx = -\frac{1}{2}(i)^n\left[\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n\Gamma(n+1, -ix)\right] \tag{103}$$

Products of Trigonometric Functions and Exponentials

$$\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \tag{104}$$

$$\int e^{bx}\sin ax dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(b\sin ax - a\cos ax) \tag{105}$$

$$\int e^x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \tag{106}$$

$$\int e^{bx}\cos ax dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{bx}(a\sin ax + b\cos ax) \tag{107}$$

$$\int xe^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x - x\cos x + x\sin x) \tag{108}$$

$$\int xe^x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x(x\cos x - \sin x + x\sin x) \tag{109}$$

Integrals of Hyperbolic Functions

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a}\sinh ax \tag{110}$$

$$\int e^{ax}\cosh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2-b^2}[a\cosh bx - b\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} + \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{111}$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a}\cosh ax \tag{112}$$

$$\int e^{ax}\sinh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2-b^2}[-b\cosh bx + a\sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} - \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{113}$$

$$\int e^{ax}\tanh bx dx = \begin{cases} \dfrac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)}{}_2F_1\left[1 + \dfrac{a}{2b}, 1, 2 + \dfrac{a}{2b}, -e^{2bx}\right] \\ \quad -\dfrac{1}{a}e^{ax}{}_2F_1\left[\dfrac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx}\right] & a \neq b \\ \dfrac{e^{ax} - 2\tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \tag{114}$$

$$\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a}\ln\cosh ax \tag{115}$$

$$\int \cos ax\cosh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[a\sin ax\cosh bx + b\cos ax\sinh bx\right] \tag{116}$$

$$\int \cos ax\sinh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\cos ax\cosh bx + a\sin ax\sinh bx\right] \tag{117}$$

$$\int \sin ax\cosh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[-a\cos ax\cosh bx + b\sin ax\sinh bx\right] \tag{118}$$

$$\int \sin ax\sinh bx dx = \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\cosh bx\sin ax - a\cos ax\sinh bx\right] \tag{119}$$

$$\int \sinh ax\cosh ax dx = \frac{1}{4a}\left[-2ax + \sinh 2ax\right] \tag{120}$$

$$\int \sinh ax\cosh bx dx = \frac{1}{b^2-a^2}\left[b\cosh bx\sinh ax - a\cosh ax\sinh bx\right] \tag{121}$$