Schaltungstechnik 1

Wichtiger Hinweis
Diese Formelsammlung ist noch in der Entwicklung und nicht Prüfungstauglich !
Allerdings würden wir uns über Unterstützung freuen das zu ändern.
Wer Lust hat kann uns über das Kontaktformular auf www.latex4ei.de erreichen.

1. Grundlagen

1.1. Sinus, Cosinus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π
φ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Verbraucherpfeilsystem: Spannung und Strom sind assoziiert. Positive Leistung bedeutet Leistungsaufnahme oder Verbrauch von Leistung. Negative Leistung bedeutet Leistungsabgabe oder Erzeugung von Leistung.
Das Gegenteil wäre das Erzeugersystem. In den meisten Fachgebieten wird im Verbrauchersystem gerechnet.

1.2. Begriffserklärung, Glossar

Zählpfeile: Zeigen die gemeinsame(assoziierte) Zählrichtung von Stromfluss und Spannungsabfall zwischen zwei Knoten an, unabhängig von den tatsächlichen Richtungen (Vorzeichen).
Masse (Signale) $\perp$: Gemeinsamer el. Bezugspunkt mit Potential $0V$
Erdung (Fehlstrom): Schutz vor Kurzschluss, führt nur im Fehlerfall Strom.
Kurzschluss (KS): ideal leitender Draht. $u_{\text{KS}} = 0$, $i_{\text{KS}} =$ beliebig
Leerlauf (LL): ideal isolierende Luft. $u_{\text{LL}} =$ beliebig, $i_{\text{LL}} = 0$
Tor: Ein Tor bilden zwei Anschlüsse bei denen der Stromzufluss des einen Anschluss gleich dem Stromabfluss des anderen Anschluss entspricht. $i_{\text{in}} = i_{\text{out}}$
Arbeitspunkt (AP): Betriebspunkt bei dem alle Kleinsignalquellen Null sind.

2. Netzwerktheorie

2.1. Kirchhoff-Gesetze

Konzentriertheitshypothese: $d << \lambda$ mit
$d =$ Größe der Schaltung, Wellenlänge $\lambda = cT$

Stromgesetz **KCL** (Kirchhoff's Current Law)	Spannungsgesetz **KVL** (Kirchhoff's Voltage Law)
Knotenregel	Maschenregel
$\sum_{\text{Knoten}} i_k(t) = 0$	$\sum_{\text{Masche}} u_m(t) = 0$
rausfließende Ströme positiv	Spannungen in Umlaufrichtung positiv
Maxwell: $\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{j}} = 0$	Maxwell: $\operatorname{rot} \underline{\boldsymbol{E}} = 0$
$(n-1)$ Gleichungen	$b - (n-1)$ Gleichungen

Knoteninzidenzmatrix: $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1b} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nb} \end{bmatrix}$ n Knoten

Spaltensummen von A' sind immer $= 0$
$\Rightarrow$ Zeile des Bezugsknotens streichen $\Rightarrow$
$\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\underline{\boldsymbol{i}} = 0$ (reduzierte Knoteninzidenzmatrix)
$\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}'^{\top}$ mit $\underline{\boldsymbol{u}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{M}}'\underline{\boldsymbol{u}}_k'$ $\Rightarrow$ KVL in Matrixform: $\underline{\boldsymbol{u}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^{\top}\underline{\boldsymbol{u}}_k = 0$

2.2. Schaltung und Netzwerkgraph

Der gerichtete Netzwerkgraph stellt die Verbindungsstruktur einer Schaltung durch n Knoten (node) und b Verbindungskanten (branch) mit Richtungspfeilen dar.
Jedes Bauelement mit zwei Anschlüssen entspricht einer Verbindungskante. Ein Knoten ist dort, wo ein oder mehr Anschlüsse von Bauteilen durch ideal leitenden Draht miteinander verbunden sind. Verbundene Anschlüsse entsprechen einem Kurzschluss, nicht verbundene Anschlüsse einem Leerlauf!
Um die Betriebspunkte einer Schaltung zu bestimmen sind $2b$ linear unabhängige Gleichungen nötig. Man erhält diese $2b$ Gleichungen aus den Beschreibungen der Bauelemente und den Kirchoff Gleichungen.

2.3. Eintorverschaltungen

Serienschaltung		Parallelschaltung	
$u = \sum u_i$	$i = \text{const.}$	$u = \text{const.}$	$i = \sum i_i$
$q = \text{const.}$	$\Phi_{\text{M}} = \sum \Phi_{\text{M},i}$	$q = \sum q_i$	$\Phi_{\text{M}} = \text{const.}$
$R = \sum R_i$	$M = \sum M_i$	$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$	$\frac{1}{M} = \sum \frac{1}{M_i}$
$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$	$L = \sum L_i$	$C = \sum C_i$	$\frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_i}$
$\boldsymbol{Z} = \sum \boldsymbol{Z}_i$	$\frac{1}{\boldsymbol{Y}} = \sum \frac{1}{\boldsymbol{Y}_i}$	$\frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \sum \frac{1}{\boldsymbol{Z}_i}$	$\boldsymbol{Y} = \sum \boldsymbol{Y}_i$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

2.4. Linearisierung

Großsignal	Kleinsignal
$i = I_{\text{AP}} + \Delta i$	$\Delta i = i - I_{\text{AP}}$
$u = U_{\text{AP}} + \Delta u$	$\Delta u = u - U_{\text{AP}}$

$\Delta\underline{\boldsymbol{i}} \approx \underset{\sim}{\boldsymbol{G}} \cdot \Delta\underline{\boldsymbol{u}}$ $\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{G}}$ ist die Jakobimatrix $\left.\frac{\partial g_i(\underline{\boldsymbol{u}})}{\partial u_j}\right|_{U_{\text{AP}}}$

$\Delta\underline{\boldsymbol{u}} \approx \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \cdot \Delta\underline{\boldsymbol{u}}$
Großsignal: $i \approx I_{\text{AP}} + G(U_{\text{AP}}) \cdot (u - U_{\text{AP}})$

Implizite Liniarisierung: $\Delta\underline{\boldsymbol{f}}(\Delta\underline{\boldsymbol{u}}, \Delta\underline{\boldsymbol{i}}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{M}}\Delta\underline{\boldsymbol{u}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}\Delta\underline{\boldsymbol{i}}$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{M}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{N}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_1} & \frac{\partial f_1}{\partial i_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial i_1} & \frac{\partial f_2}{\partial i_2} \end{bmatrix}$$

2.5. Resistive Eintore

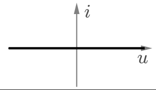
- Implizite Darstellung: $f_F(u, i) = 0$
- Parameterdarstellung: $u = u_F(\lambda)$ $\quad i = i_F(\lambda)$
- Explizite Darstellung: $\underset{\text{Leitwertdarstellung}}{i = g_F(u)}$ $\quad \underset{\text{Widerstandsdarstellung}}{u = r_F(i)}$
- Umpolung: $\overline{F}$ entsteht durch Punktspiegelung von F am Ursprung: $(\overline{u}, \overline{i}) = (-u, -i) \in \overline{F}$
- Dualität: $(u, i) \in F \Leftrightarrow (R_d i, \frac{u}{R_d}) \in F^d$
- Parallelschaltung von Widerstandsgeraden: $G = G_1 + G_2$
  $\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$
- Serienschaltung von Widerstandsgeraden: genauso wie Parallelschaltung nur R statt G
- Arbeitspunkt ermitteln:
  1. Schaltungs aufteilen in Quelle Q und Last L
  2. Parameterdarstellung $\Rightarrow$ Kennlinien zeichnen
  3. Lösung: Schnittpunkte der Kennlinien! $\Rightarrow$ ist die Funktion im AP stetig und diffbar, kann man sie dort *linearisieren*

Eigenschaften von F:

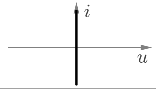
F ungepolt	Kennlinie punktsymm. zum Ursprung
F aktiv	mind. 1 Pkt. in II. od. IV. Quadr.
F verlustfrei	nur auf Koordinatenachsen
F quellenfrei	enthält den Ursprung
F streng linear	$(ku, ki) \in F \quad (u_1 + u_2, i_1 + i_2) \in F$

3. Resistive Eintore

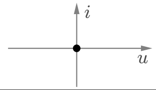
Leerlauf

$u =$ beliebig
$i = 0$
u, sl, v


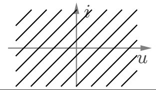
Kurzschluss

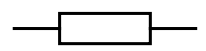
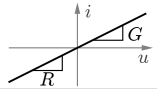
$u = 0$
$i =$ beliebig
u, sl, v


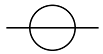
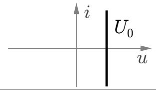
Nullator

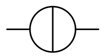
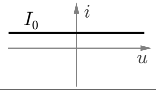
$u = 0 \quad i = 0$
u, sl, v, dual zu sich selbst


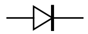
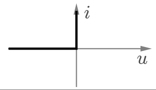
Norator

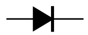
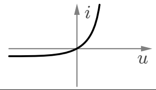
$u =$ beliebig
$i =$ beliebig
u, sl, a, dual zu sich selbst


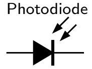
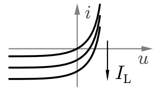
Widerstand

$u = R \cdot i$
$i = G \cdot u$
$G = \frac{1}{R}$


Spannungsq.

$u = U_0$
$i =$ beliebig


Stromquelle

$u =$ beliebig
$i = I_0$


ideale Diode

$u = 0$ falls $i > 0$
$i = 0$ falls $u < 0$


reale Diode

$u_D = u_T \cdot \ln\left(\frac{i_D}{I_S} + 1\right)$
$i_D = I_S \cdot \left(\exp\left(\frac{u_D}{U_T}\right) - 1\right)$


Photodiode

$i = I_{\text{S}}\left(e^{\frac{u_{\text{D}}}{U_{\text{T}}}} - 1\right) - i_L$


4. Resistive Zweitore

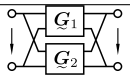
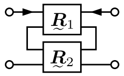
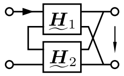
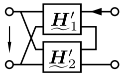
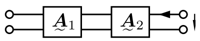
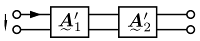
Ein Zweitor besteht aus zwei Eintoren.

4.1. Beschreibungsformen von Zweitoren

Beschreibung	nicht linear	linear
Implizit	$f_{\mathcal{F}}(\underline{u},\underline{i}) = \underline{0}$	$\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{N}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix} = 0$
Parametrisch	$\underline{u} = u_{\mathcal{F}}(\underline{\lambda})$ $\underline{i} = i_{\mathcal{F}}(\underline{\lambda})$	$\begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\cdot\underline{\lambda}$

Explizit	nicht linear	linear
Widerstand-beschreibung	$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r_1(i_1,i_2)\\r_2(i_1,i_2)\end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix}U_0\\U_0\end{bmatrix} + \underset{\sim}{\mathbf{R}}\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix}$
Leitwert-beschreibung	$\begin{bmatrix}i_1\\i_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_1(u_1,u_2)\\g_2(u_1,u_2)\end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix}I_0\\I_0\end{bmatrix} + \underset{\sim}{\mathbf{G}}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$
Hybrid-beschreibung	$\begin{bmatrix}u_1\\i_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_1(i_1,u_2)\\h_2(i_1,u_2)\end{bmatrix}$	$= \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}\cdot\begin{bmatrix}i_1\\u_2\end{bmatrix}$
Inver. Hybrid-beschreibung	$\begin{bmatrix}i_1\\u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_1'(u_1,i_2)\\h_2'(u_1,i_2)\end{bmatrix}$	$= \underset{\sim}{\boldsymbol{H}'}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\i_2\end{bmatrix}$
Ketten-beschreibung	$\begin{bmatrix}u_1\\i_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1(u_2,-i_2)\\a_2(u_2,-i_2)\end{bmatrix}$	$= \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}\cdot\begin{bmatrix}u_2\\-i_2\end{bmatrix}$
Inver. Ketten-beschreibung	$\begin{bmatrix}u_2\\i_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1'(u_1,-i_1)\\a_2'(u_1,-i_1)\end{bmatrix}$	$= \underset{\sim}{\boldsymbol{A}'}\cdot\begin{bmatrix}u_1\\-i_1\end{bmatrix}$

4.2. Verschaltung von Zweitoren
Es gibt sechs mögliche Verschaltungen.

Verschaltung	Bild
Parallel: $g_{ges} = g_{\mathcal{F}1} + g_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{G}_{\text{ges}} = \underset{\sim}{G}_1 + \underset{\sim}{G}_2$ Umrechnung:	
Serie: $r_{ges} = r_{\mathcal{F}1} + r_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{R}_{\text{ges}} = \underset{\sim}{R}_1 + \underset{\sim}{R}_2$	
Hybrid: $h_{ges} = h_{\mathcal{F}1} + h_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{H}_{\text{ges}} = \underset{\sim}{H}_1 + \underset{\sim}{H}_2$	
Hybrid Inv.: $h'_{ges} = h_{\mathcal{F}1} + h'_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{H}'_{\text{ges}} = \underset{\sim}{H}'_1 + \underset{\sim}{H}'_2$	
Kette: $a_{ges} = a_{\mathcal{F}1}\cdot a_{\mathcal{F}2}$ linear: $\underset{\sim}{A}_{\text{ges}} = \underset{\sim}{A}_1\cdot\underset{\sim}{A}_2$	
Kette Inv: $a'_{ges} = a'_{\mathcal{F}2}\cdot a'_{\mathcal{F}1}$ linear: $\underset{\sim}{A}'_{\text{ges}} = \underset{\sim}{A}'_2\cdot\underset{\sim}{A}'_1$	

4.3. Liste von Zweitoren

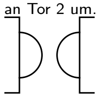
4.3.1 Übertrager (z.B. Transformator

$A = \begin{bmatrix}\text{ü} & 0\\ 0 & \frac{1}{\text{ü}}\end{bmatrix}$

$R_{in} = \frac{u_1}{i_1} = \text{ü}^2 R_L$

Eigenschaften: verlustlos(ideal)

4.3.2 Gyrator
Der Gyrator wandelt das an Tor 1 geschaltete Bauteil in das duale Bauteil an Tor 2 um.



$\mathcal{F}_{in} = \mathcal{F}^d \quad A = \begin{bmatrix}0 & R_1\\ \frac{1}{R_2} & 0\end{bmatrix}$

Eigenschaften: streng linear, verlustlos für $R_1 = R_2$

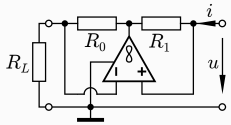
4.3.3 Negativ-Immitanz-Konverter

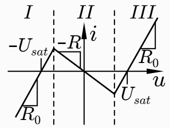
$A = \begin{bmatrix}-k & 0\\ 0 & \frac{1}{k}\end{bmatrix}$

$R_{in} = \frac{u_1}{i_1} = -k^2 R \quad -k^2 R$: negativer Widerstand(et voilà xD)

Eigenschaften: streng linear, aktiv

4.4. NIK allgemein (Polung beachten)





I negative Sättigung $u_d < 0 \Leftrightarrow u_{out} = -U_{sat}$
$u = R_0 i - U_{sat}$

II linearer Bereich $u_d = 0$
$u = -\frac{R_0}{R_1} R_L\cdot i \qquad -U_{sat} < \frac{R_L+R_1}{R_L} u < U_{sat}$

III positive Sättigung $u_d > 0 \Leftrightarrow u_{out} = U_{sat}$
$u = R_0 i + U_{sat}$

5. Eigenschaften von Ein- und Mehrtoren

Ein Mehrtor $\mathcal{F}(\underline{u},\underline{i})$ ist ...
Resistiv: Gedächtnislos; nur von u und i abhängig
Zeitvariant: Betriebsraum kann sich ändern
Reziprok:
Rezeprozität, Matrix transponierbar(r12=r21). Stärker: Symmetrie: r11=r22 Merke: Alle Mehrtore die nur aus R, L, C bestehen sind reziprok!

Eigenschaft	Bedingung
F quellenfrei	$\underline{0}\in\mathcal{F}$; enthält den Ursprung
F streng linear	$(ku, ki)\in F \quad (u_1+u_2, i_1+i_2)\in F$
Nur für Eintore:	
ungepolt	Kennlinie punktsymm. zum Ursprung $\mathcal{F}(u,i) = \mathcal{F}(-u,-i)$

5.1. Liniarität
Linear: $(ku, ki)\in F \quad (u_1+u_2, i_1+i_2)\in F$ (Kennlinie gerade)
Streng Linear: linear + quellenfrei, (Gerade durch Ursprung)

5.2. Zeitvarianz
Ein Mehrtor heißt zeitvariant, wenn sich sein Betriebsraum mit der Zeit ändern kann, ansonsten ist es Zeitinvariant.

5.3. Steuerung
Ein Bauelement ist von einer Größe gesteuert, wenn die jeweilige explizite Beschreibung existiert.

Stromgesteuert:	$u = \mathcal{R}(i)$	Spannungsgesteuert:	$i = \mathcal{G}(i)$
Ladungsgesteuert:	$u = \mathcal{C}^{-1}(q)$	Flussgesteuert:	$i = \mathcal{L}^{-1}(\Phi)$

5.4. Leistungsbetrachtung
Leistung: $P(t) = \underline{u}^T\cdot\underline{i} = u_1 i_1 + \ldots + u_n i_n$

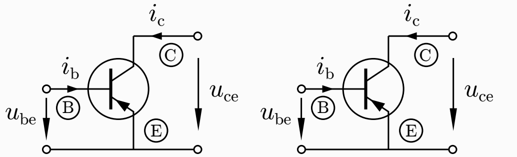
Passiv:	$\forall\mathcal{F}(u,i): P(t)\geq 0$	Kennlinie nur I. oder III. Quadrant
Aktiv:	$\exists\mathcal{F}(u,i): P(t) < 0$	Kennlinie im II. oder IV. Quadrant
Verlustlos:	$\forall\mathcal{F}(u,i): P(t) = 0$	Kennlinie nur auf Koordinatenachsen

Merke: Alle Mehrtore die nur aus passiven Bauelementen(R,C,L,...) bestehen, sind selbst passiv! inkremental passiv:
letztendlich passiv: $\exists U, I > 0\ \forall(u,i)\in\mathcal{F}: (|u| > U \vee |i| > I \Rightarrow ui > 0)$
Alle realen Bauteile sind letztendlich passiv, da sonst unendlich viel Energie entstehen würde.

6. Transistoren

Ein **Transfer Resistor** ist ein elektronisch gesteuerter Widerstand zum verstärken bzw. schalten von Strömen. Eigenschaften: passiv,

6.1. Emitterschaltung



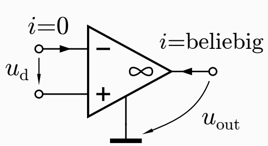
$i_b = I_S\left(\exp\left(\frac{u_{be}}{U_T}\right) - 1\right) \qquad u_{be} = U_T\ln\left(\frac{i_b}{I_S} + 1\right)$

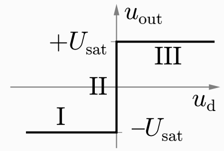
$i_c = \beta i_b$

7. Operationsverstärker (OpAmp)

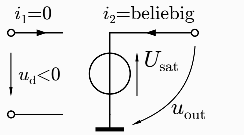
Der Operationsverstärker ist ein elektronischer Verstärker.

7.1. Idealer Operationsverstärker

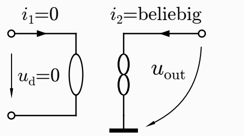




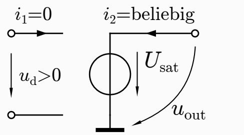
ESB I
Sättigungsbereich
$u_d < 0$
$u_{out} = -U_{sat}$



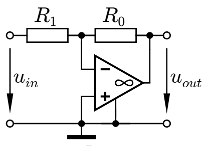
ESB II
streng linearer Bereich
$u_d = 0$
$|u_{out}| \leq |U_{sat}|$



ESB III
Sättigungsbereich
$u_d > 0$
$u_{out} = +U_{sat}$

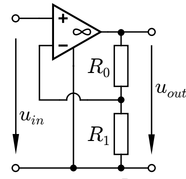


Invertierender Verstärker



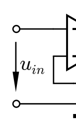
$u_{out} = \frac{-R_0}{R_1} u_{in}$

Nichtinvert. Verstärker



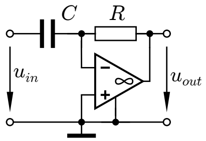
$u_{out} = \left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right) u_{in}$

Spannung



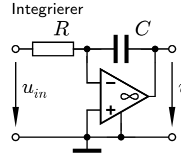
$u_{out} =$

Differenzierer



$u_{out} = -RC\cdot\dot{u}_{in}$

Integrierer

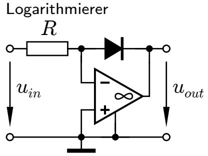


$u_{out} = -\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t_1} u_{in}\,dt$

Addierer

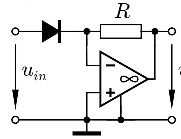
$u_{out} = -$

Logarithmierer



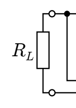
$u_{out} = -U_T\ln\frac{u_{in}}{R\cdot I_S}$

Exponentierer



$u_{out} = -R\cdot I_S\exp\left(\frac{u_{in}}{U_T}\right)$

NIK



$u = -R$

8. Allgemeine Analyseverfahren

8.1. Die Tableau-Gleichung
... beschreibt ein Netzwerk vollständig bezüglich Verschaltung und Bauteilverhalten. $\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix}\underset{\sim}{A} & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{B}\\ \underset{\sim}{M} & \underset{\sim}{N}\end{bmatrix}$

8.2. Knotenspannungsanalyse

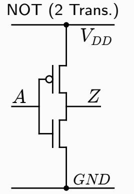
$\underbrace{\underset{\sim}{Y}_k}_{\text{Knotenleitwertsmatrix}}\cdot\underbrace{\underline{u}_k}_{\text{Spannungsvektor}} = \underbrace{\underline{i}_q}_{\text{Stromquellenvektor}}$

Vorgehen:
1. Nicht lineare Elemente linearisieren
2. Nicht spannungsgesteuerte Elemente (dual)wandeln
3. Aufstellen der Leitwertsmatrix $\underset{\sim}{Y}_k$
4. Bestimmung des Stromquellenvektors $\underline{i}_q$

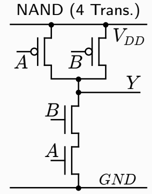
9. Digitale Logik

9.1. CMOS Logik
Komplementäre Logik durch pMos und nMos Transistoren auf einem Substrat.

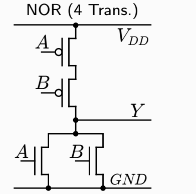
NOT (2 Trans.)



NAND (4 Trans.)



NOR (4 Trans.)



Schaltungstechnik 2

Wichtiger Hinweis
Diese Formelsammlung ist noch in der Entwicklung und nicht Prüfungstauglich !
Allerdings würden wir uns über Unterstützung freuen das zu ändern.
Wer Lust hat kann uns über das Kontaktformular auf www.latex4ei.de erreichen.

10. Allgemeines

10.1. Die vier zentralen Größen u, i, q, Φ

... beschreiben die Wirkungsweise von elektronischen Bauelementen.

Größe		Definition
Spannung	u	Potentialdifferenz. Richtung: Von hohem zu niedri
Stromfluss	i	Bewegte Ladung. Richtung: Bewegungsrichtung po
Ladung	q	Grundeigenschaft von Materie. Es gibt positive un
Magn. Fluss	Φ	Grundeigenschaften von elektr. magn. Feldern.

10.1.1 Allgemeine Zusammenhänge u, i, q, Φ

Ladung und Strom beschreiben den Zustand der Materie.
Spannung und magn. Fluss beschreiben den Zustand des elekt. magn. Feldes.

$i(t) = \dot{q}(t)$	$[i] = A$
$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$	$[q] = As = C$
$u(t) = \dot{\Phi}(t)$	$[u] = V$
$\Phi = \Phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$	$[\Phi] = Vs = Wb$

10.1.2 Arten von Bauelementen

Art	Symbol	Beschr.	linear
Resistivität	i_R, u_R	$f_R(u,i)$	$u = U_0 + R \cdot i$
Kapazität	i_C, u_C	$f_C(u,q)$	$q = Q_0 + C \cdot u$
Induktivität	i_L, u_L	$f_L(i,\Phi)$	$\Phi = \Phi_0 + L \cdot i$
Memristivität	i_M, u_M	$f_M(q,\Phi)$	$\Phi = \Phi_0 + M \cdot q$

10.2. Komplexe Wechselstromrechnung

Vorraussetzung: lineares, eingeschwungenes System mit sinusförmiger Erregung $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ Effektivwert $X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$

Differentialoperator: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\omega$

Reeles Zeitsignal:	$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_x)$
Effektiver Zeiger:	$\boldsymbol{X} = X_w + \mathrm{i}X_b = X\exp(\mathrm{i}\varphi_x)$
Scheitel Zeiger:	$\hat{\boldsymbol{X}} = \sqrt{2}\boldsymbol{X} = \hat{X}\exp(\mathrm{i}\varphi_x)$
Kompl. Zeitsignal:	$\boldsymbol{x}(t) = \hat{\boldsymbol{X}} \cdot e^{\mathrm{i}\omega t} = \hat{x} \cdot e^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi_x)}$
Phase:	$\varphi_x := \arg \boldsymbol{X} = \arctan \frac{X_b}{X_w}$

$$\underset{\text{Impedanz}}{\boldsymbol{Z}(j\omega)} = \underset{\text{Resistanz}}{R(j\omega)} + \underset{\text{Reaktanz}}{jX(j\omega)} \qquad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{I}$$

$$\underset{\text{Admittanz}}{\boldsymbol{Y}(j\omega)} = \underset{\text{Konduktanz}}{G(j\omega)} + \underset{\text{Suszeptanz}}{jB(j\omega)} \qquad \boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{U}$$

	Widerstand	Kondensator	Spule	Memristor
$Z =$	R	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega L$	M
$Y =$	$G = \frac{1}{R}$	$j\omega C$	$\frac{1}{j\omega L}$	$\frac{1}{M}$
$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	?

Merke: Am Kondens*ator*, eilt der Strom *vor*, bei Induktivi*täten*, wird er sich ver*späten*

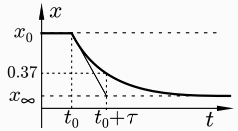
Merke: Ist das Mädchen brav, bleibt der Bauch konkav, hat das Mädchen Sex, wird der Bauch konvex.

10.3. Schaltungen ersten Grades

Zustandsgleichung:

$$\boxed{\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\tau} + \frac{x_\infty}{\tau}}$$

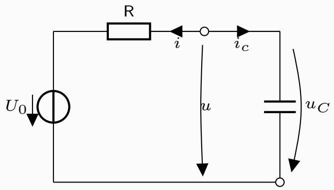
$\tau > 0$: System stabil
$\tau < 0$: System instabil



Lösung: $\boxed{x(t) = x_\infty + (x_0 - x_\infty)\exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right)}$

Mit Parameter aus ESB: C: $x_\infty = U_0(t)$, L: $x_\infty = I_0(t)$

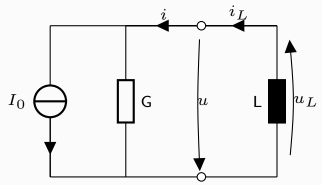
10.3.1 Helmholtz / Thévenin ESB



$i_C = -i \quad i_C = C \cdot \dot{u}_C \quad u_C(t_\infty) = U_0$

Zeitkonstante: $\tau = R \cdot C$

10.3.2 Mayer / Norton ESB



$u_L = -u \quad u_L = L \cdot \dot{i}_L \quad u_L = L \cdot \dot{i}_L$

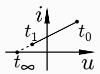
$i_L(t_\infty) = I_0$ Zeitkonstante: $\tau = G \cdot L$

10.4. Dynamischer Pfad

kapazitiv	induktiv
u_C stetig, i_C springt $\dot{u}(t) = -\frac{1}{C} \cdot i(t)$	i_L stetig, u_L springt $\dot{i}(t) = -\frac{1}{L} \cdot u(t)$
$i > 0 \Rightarrow \dot{u} < 0 \Rightarrow u$ fällt $i < 0 \Rightarrow \dot{u} > 0 \Rightarrow u$ steigt $i = 0 \Rightarrow \dot{u} = 0 \Rightarrow$ GGP	$u > 0 \Rightarrow \dot{i} < 0 \Rightarrow i$ fällt $u < 0 \Rightarrow \dot{i} > 0 \Rightarrow i$ steigt $u = 0 \Rightarrow \dot{i} = 0 \Rightarrow$ GGP

Zeitdauer auf linearen Pfaden:

$$\boxed{\Delta t = t_1 - t_0 = \tau \ln\left(\frac{x(t_0) - x_\infty}{x(t_1) - x_\infty}\right)}$$



$x(t_0)$: Startwert, $x(t_1)$: Zielwert, x_∞: (gedachter) GGP

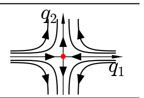
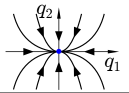
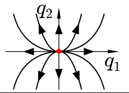
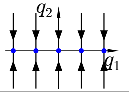
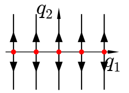
10.5. Übertragungsfunktion

11. Lösen von homogenen DGLs 2. Ordnung

Gegeben: Homogene Differnetialgleichungen der Form $\dot{\underline{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{x}}$
mit Anfangswerten $x_{0,1}$ und $x_{0,2}$

$\boxed{\boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}}}$ $\boxed{|\lambda_1| < |\lambda_2| \quad \Rightarrow \underline{\boldsymbol{q}}_2 \text{,,schneller''}}$

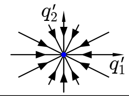
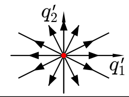
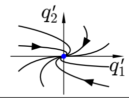
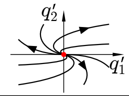
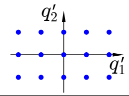
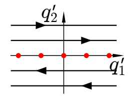
$$\underline{\boldsymbol{x}}(t) = x_{0,1} \cdot \exp(\lambda_1 t) \cdot \underline{\boldsymbol{q}}_1 + x_{0,2} \cdot \exp(\lambda_2 t) \cdot \underline{\boldsymbol{q}}_2$$

Matrix Λ	Eigenwerte	$\underline{\boldsymbol{x}} = 0$	Name	Portrait
$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	instabil	Sattelpunkt	
	$\lambda_2 < 0, \lambda_1 < 0$	stabil	Knoten 2	
	$0 < \lambda_1, 0 < \lambda_2$	instabil	Knoten 2	
$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$	$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 < 0$	stabil	Kamm	
	$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0$	instabil	Kamm	

$\boxed{\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}}}$

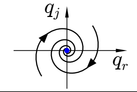
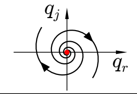
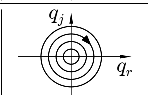
$$\boldsymbol{Q}' = \begin{bmatrix}\underline{\boldsymbol{q}}_1' & \underline{\boldsymbol{q}}_2'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a_{12} & -a_{12}\\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2} & \frac{a_{11}-a_{22}}{2} - 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\text{Eigen-}\\ \text{vektor}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\text{Haupt-}\\ \text{vektor}\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{x}}(t) = \left[\boldsymbol{1} + (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{1}) \cdot t\right] \cdot \exp(\lambda t) \cdot \begin{bmatrix}x_{0,1}\\ x_{0,2}\end{bmatrix}$$

Matrix Λ	Eigenwerte	$\underline{\boldsymbol{x}} = 0$	Name	Portrait
$\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$	$\lambda < 0$	stabil	Knoten 1	
	$\lambda > 0$	instabil	Knoten 1	
$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$	$\lambda < 0$	stabil	Knoten 3	
	$\lambda > 0$	instabil	Knoten 3	
$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	$\lambda = 0$	stabil	Ruheebene	
$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	$\lambda = 0$	instabil	Ruhegerade	

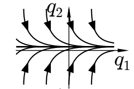
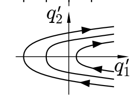
$\boxed{\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + \beta j \in \mathbb{C}}}$ $\boxed{\boldsymbol{Q}' = \begin{bmatrix}\mathrm{Re}\{\underline{\boldsymbol{q}}_1\} & \mathrm{Im}\{\underline{\boldsymbol{q}}_1\}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\underline{\boldsymbol{q}}_r & \underline{\boldsymbol{q}}_j\end{bmatrix}}$

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{x}}(t) &= x_{0,1} \cdot e^{\alpha t} \cdot \left[\cos(\beta t)\underline{\boldsymbol{q}}_r - \sin(\beta t) \cdot \underline{\boldsymbol{q}}_j\right] + \\ &+ x_{0,2} \cdot e^{\alpha t} \cdot \left[\sin(\beta t)\underline{\boldsymbol{q}}_r + \cos(\beta t) \cdot \underline{\boldsymbol{q}}_j\right]\end{aligned}$$

Matrix Λ	Eigenwerte	$\underline{\boldsymbol{x}} = 0$	Name	Portrait
$\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}$	$\alpha < 0,\ \beta \neq 0$	stabil	Strudel	
	$\alpha > 0,\ \beta \neq 0$	instabil	Strudel	
$\begin{bmatrix}0 & -\beta\\ \beta & 0\end{bmatrix}$	$\alpha = 0,\ \beta \neq 0$	stabil	Wirbel	

Zeitverlauf immer von $\underline{\boldsymbol{q}}_j$ nach $\underline{\boldsymbol{q}}_r$ bzw. von $\underline{\boldsymbol{q}}_r$ nach $-\underline{\boldsymbol{q}}_j$

Lösung für *inhomogene DGL*($\underline{\boldsymbol{v}} \neq 0$) mit singulärer Matrix $\boldsymbol{A}$ (nicht entkoppelbar):

$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$	$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 < 0$	instabil	Kamm	
$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	$\lambda = 0$	instabil	Knoten	

12. Zweitormatrizen

In $\rightarrow$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H}'$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}'$
$\boldsymbol{R}$	$\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{G}}\begin{bmatrix}g_{22} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}}\begin{bmatrix}\det \boldsymbol{H} & h_{12}\\ -h_{21} & 1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{11}}\begin{bmatrix}1 & -h'_{12}\\ -h'_{21} & \det \boldsymbol{H}'\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}}\begin{bmatrix}a_{11} & \det \boldsymbol{A}\\ 1 & a_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{21}}\begin{bmatrix}a'_{22} & 1\\ \det \boldsymbol{A} & a'_{11}\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{G}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{R}}\begin{bmatrix}r_{22} & -r_{12}\\ -r_{21} & r_{11}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}}\begin{bmatrix}1 & -h_{12}\\ -h_{21} & \det \boldsymbol{H}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{22}}\begin{bmatrix}\det \boldsymbol{H}' & -h'_{12}\\ -h'_{21} & 1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}}\begin{bmatrix}a_{22} & -\det \boldsymbol{A}\\ -1 & a_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{12}}\begin{bmatrix}a'_{11} & -1\\ -\det \boldsymbol{A} & a'_{22}\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}$	$\frac{1}{r_{22}}\begin{bmatrix}\det \boldsymbol{R} & r_{12}\\ -r_{21} & 1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}}\begin{bmatrix}1 & -g_{12}\\ -g_{21} & \det \boldsymbol{G}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{H}'}\begin{bmatrix}h'_{22} & -h'_{12}\\ -h'_{21} & h'_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{22}}\begin{bmatrix}a_{12} & \det \boldsymbol{A}\\ -1 & a_{21}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{11}}\begin{bmatrix}a'_{12} & 1\\ -\det \boldsymbol{A} & a'_{21}\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}'$	$\frac{1}{r_{11}}\begin{bmatrix}1 & -r_{12}\\ -r_{21} & \det \boldsymbol{R}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}}\begin{bmatrix}\det \boldsymbol{G} & g_{12}\\ -g_{21} & 1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{H}}\begin{bmatrix}h_{22} & -h_{12}\\ -h_{21} & h_{11}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}h'_{11} & h'_{12}\\ h'_{21} & h'_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{11}}\begin{bmatrix}a_{21} & -\det \boldsymbol{A}\\ 1 & a_{12}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{22}}\begin{bmatrix}a'_{21} & -1\\ \det \boldsymbol{A} & a'_{12}\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{A}$	$\frac{1}{r_{21}}\begin{bmatrix}r_{11} & \det \boldsymbol{R}\\ 1 & r_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{21}}\begin{bmatrix}-g_{22} & -1\\ -\det \boldsymbol{G} & -g_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}}\begin{bmatrix}-\det \boldsymbol{H} & -h_{11}\\ -h_{22} & -1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{21}}\begin{bmatrix}-\det H' & -h'_{22}\\ -h'_{11} & -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{A}'}\begin{bmatrix}a'_{22} & a'_{12}\\ a'_{21} & a'_{11}\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{A}'$	$\frac{1}{r_{12}}\begin{bmatrix}r_{22} & \det \boldsymbol{R}\\ 1 & r_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}}\begin{bmatrix}-g_{11} & 1\\ -\det \boldsymbol{G} & -g_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{12}}\begin{bmatrix}1 & h_{11}\\ h_{22} & \det \boldsymbol{H}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{12}}\begin{bmatrix}-\det \boldsymbol{H}' & -h'_{22}\\ -h'_{11} & -1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{bmatrix}a_{22} & a_{12}\\ a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a'_{11} & a'_{12}\\ a'_{21} & a'_{22}\end{bmatrix}$