Stochastische Signale

1. Mengenalgebra

1.1. Mengen- und Boolsche Algebra

Kommutativ	$A \cap B = B \cap A$	$A \uplus B = B \uplus A$
Assoziativ	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
	$(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$	
Distributiv	$A \cap (B \uplus C) = (A \cap B) \uplus (A \cap C)$	
	$A \uplus (B \cap C) = (A \uplus B) \cap (A \uplus C)$	
Indempotenz	$A \cap A = A$	$A \uplus A = A$
Absorbtion	$A \cap (A \uplus B) = A$	$A \uplus (A \cap B) = A$
Neutralität	$A \cap \Omega = A$	$A \uplus \emptyset = A$
Dominant	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \uplus \Omega = \Omega$
Komplement	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \uplus \overline{A} = \Omega$
	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\Omega} = \emptyset$
De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \uplus \overline{B}$	$\overline{A \uplus B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1.2. Kombinatorik

Mögliche Variationen/Kombinationen um k Elemente von maximal n Elementen zu wählen bzw. k Elemente auf n Felder zu verteilen:

	Mit Reihenfolge	Reihenfolge egal
Mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Permutation von n mit jeweils k gleichen Elementen: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{5}{2} = 10$

1.3. Grundbegriffe

Tupel	$(i,j) \neq (j,i)$ für $i \neq j$
Ungeordnetes Paar	$\{i,j\} = \{j,i\}$
Potenzmenge	$\mathrm{P}(\Omega)$ ist Menge aller Teilmengen von Ω

1.4. Integralgarten

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1} x^{q+1}$	x^q	$q x^{q-1}$
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x \ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2} e^{ax}(ax-1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$

$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{at+b}} = \frac{2\sqrt{at+b}}{a}$ $\qquad \int t^2 e^{at} \,\mathrm{d}t = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3} e^{at}$

$\int t e^{at} \,\mathrm{d}t = \frac{at-1}{a^2} e^{at}$ $\qquad \int x e^{ax^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a} e^{ax^2}$

1.5. Binome, Trinome

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2. Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P})$

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ besteht aus

- Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$: Menge aller möglichen **Ergebnisse** ω_i
- Ereignisalgebra $\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\}$: Menge von Ereignisen $A_i \subseteq \Omega$
- Wahrscheinlichkeitsmaß P

2.1. Ereignisalgebra $\mathbb{F} \subseteq \mathrm{P}(\Omega)$

- $\Omega \in \mathbb{F}$
- $A_i \in \mathbb{F} \Rightarrow A_i^{\complement} \in \mathbb{F}$
- $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{F} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

Daraus folgt:

- $\emptyset \in \mathbb{F}$
- $A_i \backslash A_j \in \mathbb{F}$
- $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

$|\mathbb{F}| = 2^{\text{Anzahl disjunkter Teilmengen}}$ (muss endlich sein)

2.1.1 σ-Algebra

Entwicklung $k \to \infty$. Unendlich viele Ereignisse, aber jedes A_i besteht aus abzählbar vielen Ergebnissen. Besitzt mindestens 2 Ereignisse.

2.2. Wahrscheinlichkeitsmaß P

$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $\qquad \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

2.2.1 Axiome von Kolmogorow

Nichtnegativität:	$\mathrm{P}(A) \geq 0 \Rightarrow \mathrm{P}: \mathbb{F} \mapsto [0,1]$
Normiertheit:	$\mathrm{P}(\Omega) = 1$
Additivität:	$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

2.2.2 Weitere Eigenschaften

- $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$
- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$
- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
- $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i)$

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:

$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

3.1.1 Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Es muss gelten: $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$ für $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Totale Wahrscheinlichkeit:	$\mathrm{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$
Satz von Bayes:	$\mathrm{P}(B_k|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}{\sum_{i \in I} \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}$

3.1.2 Multiplikationssatz

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)$

Beliebig viele Ereignisse:

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k) = \mathrm{P}\left(A_{\pi(1)}\right) \mathrm{P}\left(A_{\pi(2)} | A_{\pi(1)}\right) \mathrm{P}\left(A_{\pi(3)} | A_{\pi(2)} \cap A_{\pi(1)}\right) \times \cdots \times \mathrm{P}\left(A_{\pi(k)} | A_{\pi(k-1)} \cap \cdots \cap A_{\pi(1)}\right)$$

3.2. Stochastische Unabhängigkeit

Ereignisse A und B sind unabhängig falls:

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$

$\Rightarrow \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$

Allgemein:

$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathrm{P}(A_i)$ mit Indexmenge I und $\emptyset \neq J \subseteq I$

4. Zufallsvariablen

4.1. Definition

$X: \Omega \mapsto \Omega'$ ist Zufallsvariable, wenn für jedes Ereignis $A' \in \mathbb{F}'$ im Bildraum ein Ereignis A im Urbildraum $\mathbb{F}$ existiert, sodass $\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in A'\} \in \mathbb{F}$

4.2. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_n$ sind stochastisch unabhängig, wenn für jedes $\vec{x} = [x_1, \cdots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{\mathrm{P}(\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\{X_i \leq x_i\})}$$

Gleichbedeutend:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$

$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i)$

$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

4.3. Bedingte Zufallsvariablen

Bedingte Wahrscheinlichkeit für Zufallsvariablen:

Ereignis A gegeben:	$F_{X\,|\,A}(x|A) = \mathrm{P}\left(\{X \leq x\}|A\right)$
ZV Y gegeben:	$F_{X\,|\,Y}(x|y) = \mathrm{P}\left(\{X \leq x\}|\{Y = y\}\right)$
	$p_{X\,|\,Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
	$f_{X\,|\,Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\mathrm{d}F_{X\,|\,Y}(x|y)}{\mathrm{d}x}$

5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.0.1 Definition

$\mathrm{P}_X(A') = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega |\, X(\omega) \in A'\}) = \mathrm{P}(\{X \in A'\}) \quad \forall A' \in \mathbb{F}'$

5.0.2 Kumulative Verteilungsfunktion (KVF bzw. CDF)

$\boxed{F_X(x) = \mathrm{P}(\{X \leq x\})}$

Eigenschaften

- $F_X(x)$ ist monoton wachsend
- $F_X(x) \geq 0$
- $F_X(x)$ ist rechtsseitig stetig: $\forall h > 0 : \lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$; $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $\mathrm{P}(\{a < \mathrm{X} \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\mathrm{P}(\{\mathrm{X} > c\}) = 1 - F_X(c)$

5.0.3 Verteilung diskreter Zufallsvariablen

Bezeichnung	Abk.	Zusammenhang
Wahrscheinlichkeitsmassenfkt.	pmf	$p_X(x) = \mathrm{P}(\{X = x\})$
Kumulative Verteilungsfkt.	cdf	$F_X(x) = \sum_{\xi \in \Omega' : \xi \leq x} p_X(\xi)$

5.0.4 Verteilung stetiger Zufallsvariablen

Bezeichnung	Abk.	Zusammenhang
Wahrscheinlichkeitsdichtefkt.	pdf	$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$
Kumulative Verteilungsfkt.	cdf	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

Berechnung von $f_{\mathbf{X}}(x)$:

$f_X(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{x}^{x+\epsilon} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mathrm{P}\left(x \leq X \leq x + \epsilon\right)$

Normiertheit $\quad \sum p(x) + \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} 1$

5.1. Mehrdimensionale Verteilungen

5.1.1 Mehrdimensionale Zufallsvariable:

$\vec{X} = [X_1, \cdots, X_n]^T$ mit X_i Zufallsvariablen

5.1.2 Gemeinsame kumulative Verteilungsfunktion:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \boxed{F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \mathrm{P}(\{\vec{X} \leq \vec{x}\})} = \mathrm{P}(\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\})$

5.1.3 Diskrete Zufallsvariablen:

$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{P}(\{\vec{X} = \vec{x}\})$ (joint probability mass function)

5.1.4 Stetige Zufallsvariablen:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\cdots,X_n}(\xi_1, \cdots, \xi_n)\,\mathrm{d}\xi_n \cdots \mathrm{d}\xi_1$

$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ $\qquad f_{X,Y} = f_{Y,X}$

(joint probability density function)

5.1.5 Marginalisierung

Prinzip: Lasse alle vernachlässigbaren ZV gegen unendlich gehen.

$F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) = F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_m, \infty, \cdots, \infty)$

Randverteilung: Spezialfall der Marginalisierung um aus der mehrdimensionalen KVF die KVF für eine ZV zu erhalten.

$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \infty, \cdots, \infty)$

Randverteilung der Wahrscheinlichkeitsmasse (PMF) (für diskrete ZV)

$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\cdots,x_n} p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n)$

Randverteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte (WDF) (für stetige ZV)

$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2$

von Emanuel Regnath, Martin Zellner, Alexander Preißner, Hendrik Böttcher, Samuel Harder – Mail: samuel.harder@tum.de

6. Funktionen von Zufallsvariablen

$X : \Omega \to \Omega' = \mathbb{R}$ und jetzt $g : \Omega' \to \Omega'' = \mathbb{R}$
$\mathrm{P}(A'') = \mathrm{P}(Y \in A'') = \mathrm{P}(\{X \in \Omega' \,|\, g(X) \in A''\} = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, g(X(\omega)) \in A''\}$

6.1. Transformation von Zufallsvariablen

Berechnung von $f_Y(y)$ aus $f_X(x)$

$g(x)$ streng monoton & differenzierbar:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left[\left|\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=g^{-1}(y)}\right]^{-1}$$

$g(x)$ nur differenzierbar:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{N} f_X(x_i)\left[\left|\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i}\right]^{-1} \text{ mit } i \in \{1, \dots, N\}$$

x_i sind Nullstellen von $y - g(x) = 0$

6.1.1 Beispiel: lineare Funktion

$Y = aX + b \Leftrightarrow g(x) = ax + b$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash 0,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

6.2. Summe unabhängiger Zufallsvariablen

$Z = X + Y$ mit X und Y unabhängig.

$$\Rightarrow f_{Z=X+Y}(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y \,\mathrm{d}y$$

7. Stochastische Standardmodelle

7.1. Begriffe

Gedächtnislos

Eine Zufallsvariable X ist gedächtnislos, falls:
$\mathrm{P}(\{X > a + b)\} | \{X > a\}) = \mathrm{P}(\{X > b\}), \qquad a, b > 0$

7.2. Gleichverteilung

7.2.1 Diskret

$p_X(x) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad x \in \{1, \dots, |\Omega|\}$

Beispiele: Wurf einer fairen Münze, Lottozahlen

7.2.2 Stetig $(a, b : -\infty < a < b < \infty)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ Varianz	$\varphi_X(s) = \dfrac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$ Charakt. Funktion

Beispiele: Winkel beim Flaschendrehen, Phase einer empf. Sinusschwingung

7.3. Bernoulliverteilung $(p \in [0, 1])$

Wahrscheinlichkeitsmasse

2 Ereignisse: Erfolg und Misserfolg
p: Wahrscheinlichkeit

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1 - p & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1 - p & 0 \le k < 1 \\ 1 & k \ge 1 \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = p$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = p(1-p)$ Varianz	$G_X(z) = pz + 1 - p$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

Beispiele: Einmaliger Wurf einer (unfairen) Münze

7.4. Binomialverteilung $(p \in [0, 1], n \in \mathbb{N})$

Folgen von Bernoulli-Experimenten
p: Wahrscheinlichkeit
n: Anzahl der Bernoulli-Experimente

Wahrscheinlichkeitsmasse

$$p_X(k) = B_{n,p}(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k \in \{0, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\mathrm{E}[X] = np$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$ Varianz	$G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

Charakteristische Funktion $\quad \varphi_X(s) = (1 - p + pe^{s})^n$

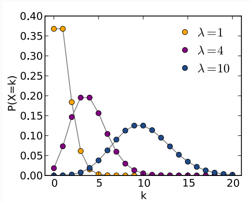
Beispiele: Anzahl der Übertragungsfehler in einem Datenblock endlicher Länge, Wiederholtes Werfen einer Münze

7.5. Poisson-Verteilung $(\lambda \ge 0)$

Asymptotischer Grenzfall der Binomialverteilung
$n \to \infty, p \to 0, np \to \lambda \qquad p_X(k) = \lim\limits_{n\to\infty} B_{n,\frac{\lambda}{n}}(k)$

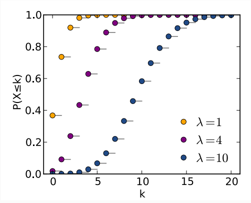
WMF/PMF:

$p_X[k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k \in \mathbb{N}_0$



KVF/CDF:

$F_X[k] =$ zu kompliziert



$\mathrm{E}[X] = \lambda$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = \lambda$ Varianz	$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

Charakteristische Funktion $\quad \varphi_X(s) = \exp\left(\lambda(e^{s} - 1)\right)$

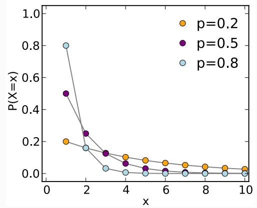
Beispiele: Zahl der Phänomene in einem Zeitintervall, Google-Anfragen in einer Stunde, Schadensmeldungen an Versicherungen in einem Monat

7.6. Geometrische Verteilung $(p \in [0, 1])$

Erster Erfolg eines Bernoulli-Experiments beim k-ten Versuch, Gedächtnislos

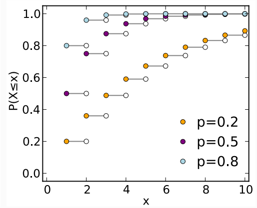
WMF/PMF:

$p_X[k] = (1-p)^{k-1} p, \ k \in \mathbb{N}$



KVF/CDF:

$F_X[k] = 1 - (1-p)^k, \ k \in \mathbb{N}$



$\mathrm{E}[X] = \dfrac{1}{p}$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$ Varianz	$G_X(z) = \dfrac{pz}{1 - z + pz}$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

Charakteristische Funktion $\quad \varphi_X(s) = \dfrac{pe^{\imath s}}{1 - (1-p)e^{\imath s}}$

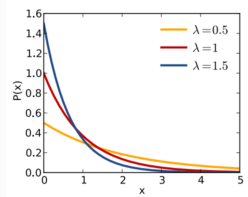
Beispiele: diskrete Dauer bis ein technisches Gerät zum ersten Mal ausfällt, Anzahl der Würfe bis man eine "6" würfelt

7.7. Exponentialverteilung $(\lambda > 0)$

Wie geometrische Verteilung für stetige Zufallsvariablen ("Lebensdauer"), Gedächtnislos

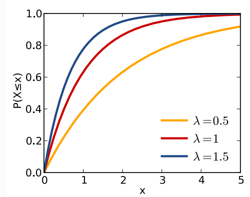
WDF/PDF:

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \ge 0$



KVF/CDF:

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \ge 0$

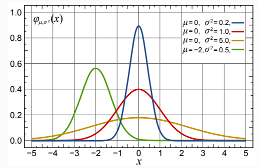


$\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ Varianz	$\varphi_X(\omega) = \dfrac{\lambda}{\lambda - j\omega}$ Charakt. Funktion

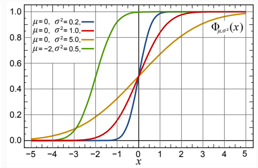
Beispiele: Lebensdauer von el. Bauteilen, Zeitdauer zwischen zwei Anrufen in einem Call-Center

7.8. Normalverteilung $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$

WDF/PDF:



KVF/CDF:



WDF $\quad f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$

$\mathrm{E}(X) = \mu$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ Varianz	$\varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$ Charakt. Funktion

Schreibweise $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Beispiele: Rauschen, Ort eines Teilchens relativ zu seiner Anfangsposition bei brownscher Molekularbewegung, abgefahrene Sachen, die man nicht genauer bestimmen will oder kann

7.8.1 Standartnormalverteilung

ist der Spezialfall $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Es gilt außerdem:

- $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{1}{\sigma}(Y - \mu) \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $X \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow Y = \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

8. Erwartungswert

8.1. Definition
Gibt den mittleren Wert einer Zufallsvariablen an

8.2. diskrete (reelle) Zufallsvariablen

$$\boxed{\mathsf{E}[X] = \sum_{x\in\Omega'} x\,\mathsf{P}(\{X = x\}) = \sum_{x\in\Omega'} x p_x(x)}$$

für $X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$
Für Funktionen von Zufallsvariablen:
$\mathsf{E}[Y] = E[g(X)] = \sum\limits_{x\in\Omega'} g(x)p_X(x)$
mit $X : \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

8.3. stetige Zufallsvariablen

$\boxed{\mathsf{E}[X] = \int\limits_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x}$ für $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Für Funktionen von Zufallsvariablen:
$\mathsf{E}[Y] = E[g(X)] = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)f_X(x)\,\mathrm{d}x$
mit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

8.4. Eigenschaften des Erwartungswerts

Linearität:	$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$
Monotonie:	$X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$

Beweis mit der Definition und der Linearität des Integrals bzw. der Summe.

Falls X und Y stochastisch unabhängig: $\mathsf{E}[X\,Y] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]$
Achtung: Umkehrung nicht möglich.
Stoch. Unabhängig $\Rightarrow$ Unkorreliertheit

Spezialfall für $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$:
$\mathsf{E}[X] = \int\limits_0^\infty \mathsf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ (stetig)
$\mathsf{E}[X] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X > k)$ (diskret)

9. Varianz und Kovarianz

9.1. Varianz
ist ein Maß für die Stärke der Abweichung vom Erwartungswert

$$\boxed{\mathsf{Var}[X] = \mathsf{E}\left[(X - \mathsf{E}[X])^2\right] = \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2}$$

9.1.1 Standard Abweichung
$\sigma = \sqrt{\mathsf{Var}[X]}$

9.2. Kovarianz

$$\boxed{\mathsf{Cov}[X, Y] = \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])(Y - \mathsf{E}[Y])] = \mathsf{Cov}[Y, X]}$$

andere Darstellungen:
$\mathsf{Cov}[X, Y] = \mathsf{E}[X\,Y] - \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y] = \mathsf{Cov}[Y, X]$

9.3. Spezialfälle
Kovarianz mit sich selbst:
$\mathsf{Var}[X] = \mathsf{Cov}[X, X]$

aus den Definitionsgleichungen:
$\mathsf{Cov}[\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta] = \alpha\gamma\,\mathsf{Cov}[X, Y]$
$\mathsf{Cov}[X + U, Y + W] = \mathsf{Cov}[X, Y] + \mathsf{Cov}[X, W] + \mathsf{Cov}[U, Y] + \mathsf{Cov}[U, W]$

wegen der Linearität des Erwartungswerts:
$\mathsf{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2\,\mathsf{Var}[X]$
für die Summe von Zufallsvariablen:
$\mathsf{Var}[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{Var}[X_i] + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j\neq i} \mathsf{Cov}[X_i, X_j]$

9.4. Unkorreliertheit
wenn gilt:

$$\boxed{\mathsf{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \mathsf{E}[X\,Y] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]}$$

Stoch. Unabhängig $\Rightarrow$ Unkorreliertheit

wenn ZV normalverteilt (sonst nicht!):
Unkorreliertheit $\Rightarrow$ stoch. Unabhängigkeit

bei paarweisen unkorrellierten Zufallsvariablen:
$\mathsf{Var}[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{Var}[X_i]$

9.5. Orthogonalität

$$\boxed{\mathsf{E}[X\,Y] = 0}$$

9.6. Korrelationskoeffizient
$\rho_{X,Y} = \frac{\mathsf{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathsf{Var}[X]}\sqrt{\mathsf{Var}[Y]}} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}$ mit $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$

Korrelationskoeffizient von X und Y

$$\text{Es gilt: } \begin{cases} \text{negativ korreliert} & \rho_{X,Y} \in [-1, 0) \\ \text{unkorreliert} & \rho_{X,Y} = 0 \\ \text{positiv korreliert} & \rho_{X,Y} \in (0, 1] \end{cases}$$

10. Erzeugende und charakter. Funktionen

10.1. Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion
für $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$

$$\boxed{G_X(z) = \mathsf{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k)z^k, \quad |z| \leq 1}$$

Anwendungen

$$p_X(n) = \mathsf{P}(\{X = n\}) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}G_X(z)\right]_{z=0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\mathsf{E}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G_X(z)\right]_{z=1}$$

$$\mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}G_X(z)\right]_{z=1}$$

$$\mathsf{Var}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}G_X(z)\right]_{z=1} - \mathsf{E}[X]^2 + \mathsf{E}[X]$$

Für $X_i : \Omega \to \mathbb{N}_0, i \in \{1, \dots, n\}$ stochastisch unabhängige, diskrete, nichtnegative ZV und $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$G_Z(z) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(z)$$

10.2. Charakteristische Funktion

$\boxed{\varphi_X(\omega) = E\left[e^{\imath\omega X}\right], \quad \omega \in \mathbb{R}}$ $\qquad \varphi_X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x} f_X(x)\,\mathrm{d}x$

$f_X(-x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \varphi(\omega)$

Erwartungswert:

$$\mathsf{E}[X^n] = \frac{1}{\imath^n}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\varphi_X(\omega)\right]_{\omega=0}$$

Summe von ZV: $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad \varphi_Z(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(\omega)$$

10.3. Der zentrale Grenzwertsatz
Definition: Seien $X_i, i \in 1, \dots, n$, stochastisch unabhängige und identisch verteilte reelle Zufallsvariablen und gelte $E[X_i] = \mu < \infty$ und $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Dann konvergiert die Verteilung der standardisierten Summe

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_- \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

d.h $E[Z_n] = 0$ und $Var[Z_n] = 1$, für $n \to \infty$ gegen die Standartnormalverteilung.
Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(Z_n \leq z) = \Phi(z)$$

11. Reelle Zufallsfolgen

Eine reelle Zufallsfolge ist ganz einfach eine Folge reeller Zufallsvariablen.

Ensemble
$\mathsf{S}_n : \Omega_n \times \Omega_{n-1} \times \cdots \times \Omega_1 \to \mathbb{R}$
$(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1) \mapsto s_n(\omega_n, \omega_{n-1}, \dots, \omega_1), \quad n \in \mathbb{N}$
Erklärung: Jede Realisierung von S_n wird erzeugt durch die Menge (das Ensemble) aufeinanderfolgender Realisierungen X_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$.

Pfad
$\vec{\mathsf{S}}_n = (\mathsf{S}_n, \mathsf{S}_{n-1}, \dots, \mathsf{S}_1) : \Omega^{(n)} \to \mathbb{R}^n$
$\vec{\omega}_n \mapsto \vec{s}_n(\vec{\omega}_n) = (s_n(\vec{\omega}_n), s_{n-1}(\vec{\omega}_n), \dots, s_1(\vec{\omega}_n)), \quad n \in \mathbb{N}$
Erklärung: Die Abfolge der Realisierungen von S_1 bis S_n (also der Pfad von S) und somit auch jedes einzelne S_k kann als Ergebnis des Ereignisses $\vec{\omega}_n$ angesehen werden.

11.1. Verteilungen und Momente

Erwartungswert	$\mu_X(n) = E[X_n]$
Varianzfolge	$\sigma_X^2(n) = Var[X_n] = E[X_n^2] - E[X_n]^2$
Autokorrelation	$r_X(k, l) = E[X_k\,X_l]$
Autokovarianz	$c_X(k, l) = Cov[X_k, X_l] = r_X(k, l) - \mu_X(k)\mu_X(l)$

11.2. Random Walk
$n \in \mathbb{N}$ Schritte mit 2 möglichen Bewegungsrichtungen $X \in \{+\delta, -\delta\}$

$\boxed{\mathsf{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}$
$\mathsf{P}(\{X_i = +\delta\}) = p$
$\mathsf{P}(\{X_i = -\delta\}) = 1 - p$
symmetrisch $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$, $\mu_S(n) = 0$

$E[S] = \mu_S(n) = n(2p - 1)\delta$	$E[X_i] = (2p - 1)\delta$
$Var[S] = \sigma_S^2(n) = 4np(1 - p)\delta^2$	$Var[X_i] = 4p(1 - p)\delta^2$

11.3. Stationarität
Eine Zufallsfolge ist **stationär**, wenn um ein beliebiges k ($k \in \mathbb{N}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen.
Im **weiteren Sinne stationär (W.S.S.)**, wenn:

$\mu_X(i) = \mu_X(i + k)$
$r_X(i_1, i_2) = r_X(i_1 + k, i_2 + k) = r_X(i_1 - i_2)$

stationär $\Rightarrow$ WSS (aber nicht anders herum!)

11.4. Markow-Ungleichung

$$\boxed{\mathsf{P}(\{|X| \geq a\}) \leq \frac{\mathsf{E}[|\,X\,|]}{a}}$$

11.5. Tschebyschow-Ungleichung

$$\boxed{\mathsf{P}(\{|X - \mathsf{E}[X]| \geq a\}) \leq \frac{\mathsf{Var}[X]}{a^2}}$$

11.6. Das schwache Gesetz der großen Zahlen
Sei $(X_i : i \in \mathbb{N})$ eine Folge reeller, paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen mit beschränkter Varianz:
$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mathsf{E}[X_i]) \to 0$
Für stochastisch unabhängige und identisch verteilte Folgenelemente mit $E[X_i] = E[X]$ und $Var[X_i] = Var[X] < \infty$ gilt:
$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i) \to \mathsf{E}[X_i]$

von Emanuel Regnath, Martin Zellner, Alexander Preißner, Hendrik Böttcher, Samuel Harder – Mail: samuel.harder@tum.de

12. Markowketten (bedingte Unabhängigkeit: Abschnitt 14)

12.1. Markowketten

12.1.1 Allgemein

Eine Zufallsfolge ($X_n : n \in \mathbb{N}$) heißt Markowkette, falls $\forall\, n_i \in \mathbb{N}$, $i \in 1, \dots k$ mit $n_1 < \dots < n_k$ gilt:
$(X_{n_1}, X_{n_2}, \dots X_{n_{k-2}}) \rightarrow X_{n_{k-1}} \rightarrow X_{n_k}$
$\Rightarrow$ Die Verteilung eines Folgeelements hängt nur vom direkten Vorgänger ab

$$p_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}, X_{n_{k-2}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1}) = p_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}})$$

$$f_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}, X_{n_{k-2}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1}) = f_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}})$$

12.1.2 Zustandsübergang

Zustandsübergangswahrscheinlichkeit:
$$p_{X_n \mid X_{n-1}}(x_n | x_{n-1})$$

Verbund-WMF:
$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} p_{X_i \mid X_{i-1}}(x_i | x_{i-1})$$

Zustandsübergangsdichte:
$$f_{X_n \mid X_{n-1}}(x_n | x_{n-1})$$

Verbund-WDF:
$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} f_{X_i \mid X_{i-1}}(x_i | x_{i-1})$$

Eine Markowkette heißt **homogen**, wenn die Übergangswahrscheinlichkeit unabhängig vom Index ist
$p_{X_{n+1} \mid X_n}(x_{n+1} | x_n) = p_{X_{n+1+k} \mid X_{n+k}}(x_{n+1} | x_n)$
$f_{X_{n+1} \mid X_n}(x_{n+1} | x_n) = f_{X_{n+1+k} \mid X_{n+k}}(x_{n+1} | x_n)$

12.1.3 Chapman-Kologorow Gleichung

2-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit:
$p_{X_{n+2} \mid X_n}(x_{n+2} | x_n) = \sum_{\xi \in \mathbb{X}} p_{X_{n+2} \mid X_{n+1}}(x_{n+2} | \xi) p_{X_{n+1} \mid X_n}(\xi | x_n)$

m+l-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit:
$p_{X_{n+m+l} \mid X_n}(x_{n+m+l} | x_n) = \sum_{\xi \in \mathbb{X}} p_{X_{n+m+l} \mid X_{n+m}}(x_{n+m+l} | x_{n+m}) p_{X_{n+m} \mid X_n}(x_{n+m} | x_n)$

12.1.4 Markowketten im endlichen Zustandsraum

$$\vec{p}_n \triangleq \begin{bmatrix} p_{X_n}(x_1) \\ p_{X_n}(x_2) \\ \vdots \\ p_{X_n}(x_N) \end{bmatrix} \in [0,1]^N \text{ mit } [\vec{p}_n]_i = p_{X_n}(x_i)$$

Übergangsmatrix: $\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \\ p_{N1} & & p_{NN} \end{bmatrix} \in [0,1]^{N \times N}$

Übergangswahrscheinlichkeit: $p_{ij} = p_{X_{n+1} \mid X_n}(\xi_i, \xi_j)$
Spaltensumme muss immer 1 ergeben!

$\vec{p}_{n+1} = \Pi \vec{p}_n \quad n \in \mathbb{N}$
$\vec{p}_{n+m} = \Pi^m \vec{p}_n \quad n, m \in \mathbb{N}$

Eine Verteilung heißt **stationär**, wenn gilt:
$$\vec{p}_\infty = \Pi \vec{p}_\infty$$

13. Reelle Zufallsprozesse

13.1. Ensemble und Musterfunktion

- Ein Zufallsprozess kann als **Ensemble** einer nicht abzählbaren Menge von Zufallsvariablen X_t mit $t \in \mathbb{R}$ interpretiert werden.
- Ein Zufallsprozess kann als **Schar von Musterfunktionen** $X_t(\omega) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, mit $X(\omega)$ als deterministische Funktion von t, mit einem gegebenen Ereignis $\omega \in \Omega$ interpretiert werden.

13.2. Verteilungen und Momente

Zeitlich, Kontinuierlich veränderliche Zufallsvariable X_t

Erwartungswertfunktion:
$\mu_X(t) = \mathrm{E}[X_t]$
Autokorrelationsfunktion:
$r_X(s,t) = \mathrm{E}[X_s X_t]$
Autokovarianzfunktion:
$c_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = r_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$

Hinweis: Bei Integration über r_X immer darauf achten, dass $s - t > 0$. Bei Bedarf Integral aufteilen und Grenzen anpassen.

13.3. Stationarität

Ein Zufallsprozess ist **stationär**, wenn um ein beliebiges s ($s \in \mathbb{R}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen.

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots x_n) = F_{X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s}}(x_1, \dots x_n)$$

Im **weiteren Sinne stationär (W.S.S.)**, wenn:

$$\mu_X(t) = \mu_X(t+s) \quad \wedge \quad r_X(t_1, t_2) = r_X(t_1+s, t_2+s)$$

Daraus folgt mit $s = t + \tau$
$r_X(s,t) = \mathrm{E}[X_s X_t] = \mathrm{E}[X_{t+\tau} X_t] = r_X(s-t) = r_X(\tau)$
Im **weiteren Sinne zyklisch stationär**, wenn:

$$\mu_X(t) = \mu_X(t+T) \quad \wedge \quad r_X(t_1, t_2) = r_X(t_1+T, t_2+T)$$

stationär $\Rightarrow$ WSS $\Rightarrow$ im weiteren Sinne zyklisch stationär (aber nicht anders herum!)

13.4. Mehrere Zufallsvariablen auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum

Kreuzkorrelationsfunktion:
$r_{X,Y}(s,t) = \mathrm{E}[X_s Y_t] = r_{Y,X}(t,s)$
Kreuzkovarianzfunktion:
$c_{X,Y}(s,t) = r_{X,Y}(s,t) - \mu_X(s)\mu_Y(t) = c_{Y,X}(t,s)$

13.4.1 Gemeinsame Stationarität

Zwei Zufallsprozesse auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum sind **gemeinsam stationär**, wenn die einzelnen ZPs jeweils selbst stationär sind und ihre gemeinsamen Verteilungen verschiebungsinvariant sind.

13.4.2 Gemeinsam im weiteren Sinne stationär

Voraussetzung: X_t und Y_t sind gemeinsam WSS wenn,

X_t und Y_t einzelnd WSS und
$r_{X,Y}(t_1, t_2) = r_{X,Y}(t_1+s, t_2+s)$
gemeinsam stationär $\Rightarrow$ gemeinsam WSS (aber nicht umgekehrt!)

Daraus folgt mit $s = t + \tau$
$r_X(s,t) = \mathrm{E}[X_{t+\tau} X_t] = r_X(\tau) = r_X(-\tau) \qquad r_X(\tau) \leq r_X(0)$
$r_{X,Y}(\tau) = \mathrm{E}[X_{t+\tau} Y_t] = \mathrm{E}[Y_t X_{t+\tau}] = r_{Y,X}(-\tau)$

13.4.3 Stochastische Unkorreliertheit

$c_{X,Y}(s,t) = 0 \Leftrightarrow r_{X,Y}(s,t) = \mu(s)\mu(t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

13.4.4 Orthogonalität

$r_{X,Y}(s,t) = 0, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

13.5. Wiener-Prozess ($\sigma > 0$)

Als Basis benutzen wir den Random Walk. Durch Multiplikation mit einer Heaviside-Funktion wird der Random Walk zeitkontinuierlich:
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \Rightarrow \qquad S_t = \sum_{i=1}^{n} X_i\, u(t - iT) \qquad T > 0$$
Für $n \to \infty$ und $T \to 0$, mit Schrittweite $\delta = \sqrt{\sigma^2 T}$ folgt der Wiener Prozess: W_t

$$f_{W_t}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

Eigenschaften
- Kein Zählprozess!
- $\mathrm{P}(\{W_0 = 0\}) = 1$
- hat unabhängige Inkremente $\rightarrow r_{xy}(s,t) = 0$
- $W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t), \forall 0 \leq t$
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)), \forall 0 \leq s \leq t$
- $W_t(\omega)$ ist eine stetige Musterfunktion mit Wahrscheinlichkeit 1

Erwartungswertfunktion.	$\mu_W(t) = 0$
Varianz	$\sigma_W^2(t) = \sigma^2 t$
Autokorrelationsfunktion	$r_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$
Autokovarianzfunktion	$c_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$

13.6. Poisson-Prozess ($N_t :\in \mathbb{R}_+$)

Beim Poisson-Prozess wird der **Zeitpunkt** der Sprünge durch ZV modelliert, nicht die Amplitude.
$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - T_i), \quad T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$$
X_j ist exponentiell verteilt, T_i ist Gamma-verteilt

$f_{T_i}(t) = \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$
$\mathrm{P}(\{N_t = n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(\lambda t)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+$

Eigenschaften
- ist ein Zählprozess
- ist Gedächtnislos
- hat unabhängige Inkremente
- $N_t - N_s$ ist Poisson-verteilt mit Parameter ($\lambda(t-s)$ für alle $0 \leq s \leq t$
- hat eine Rate λ
- Zeitintervalle zwischen den Inkremetierungen sind unabhängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter λ

Erwartungswertfunktion	$\mu_N(t) = \lambda t$
Varianz	$\sigma_N^2(t) = \lambda t$
Autokorrelationsfunktion	$r_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$
Autokovarianzfunktion	$c_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$

14. Bedingte Unabhängigkeit

14.1. Bedingte Unabhängigkeit

A und C heißen bedingt unabhängig gegeben B, wenn gilt:
$\mathrm{P}(A \cap C | B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(C|B)$ bzw.
$\mathrm{P}(A | B \cap C) = \mathrm{P}(A|B)$

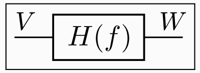
Dann gilt:
$p_{Z \mid Y, X}(y | y, x) = p_{Z \mid Y}(z|y)$
$f_{Z \mid Y, X}(z | y, x) = f_{Z \mid Y}(z|y)$
X, Z sind bedingt unabhängig gegeben Y, kurz: $X \rightarrow Y \rightarrow Z$

15. Zufallsprozesse(ZP) und lineare Systeme

15.1. Allgemeines

Im **Zeitbereich**:
$w(t) = (h * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) v(\tau)\, d\tau$

Im **Frequenzbereich:**
$W(f) = H(f)V(f)$



W_t Ausgang
V_t Eingang
$h(s,t)$ Impulsantwort

Falls Zufallsprozesse **WSS**:
Erwartungswert: $\mu_W = \mu_V \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt$
Kreuzkorrelationsfkt: $r_{W,V}(\tau) = \mathrm{E}[W_s V_t] = (h * r_V)(\tau)$
Autokorrelationsfkt: $r_W = \mathrm{E}[W_s W_t] = (\tilde{h} * h * r_V)(\tau)$
mit $\tilde{h}(\tau) = h(-\tau)$

15.2. Leistungsdichtespektrum (LDS)

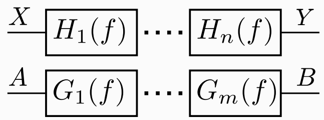
Nicht WSS $\Rightarrow$ Kein LDS

$$S_V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_V(\tau) e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau$$

$r_V(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_V(f)$
$r_{V,W}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_{V,W}(f)$
$r_{V,W}(-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_{V,W}^*(f)$

Auf Frequenz bezogene Signalleistung für infitisimales Frequenzband.

$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$
$S_{Y,X}(f) = H(f) S_X(f)$
$S_{X,Y}(f) = H^*(f) S_X(f)$



$S_{Y,X}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i(f)) S_X(f) \qquad S_{X,Y}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i^*(f)) S_X(f)$
$S_{Y,B}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i(f))(\prod_{j=1}^{m} G_j(f))^* S_{X,A}(f)$

$S_X(f) = S_X^*(f) \quad \& \quad S_{X,Y}(f) = S_{Y,X}^*(f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$
$S_X(f) = S_X(-f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$
$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df = r_X(0) = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{E}[X]^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$
$S_X(f) \geq 0, \quad \forall f \in \mathbb{R}$

Momenterzeugende Funktion, Multivariate Normalverteilung, Multivariate reelle Zufallsvariablen und Komplexe Zufallsvariablen waren im WS 2015/16 nicht prüfungsrelevant und werden hier deshalb nicht behandelt.
P.S. Stochastik ♡ dich.

von Emanuel Regnath, Martin Zellner, Alexander Preißner, Hendrik Böttcher, Samuel Harder – Mail: samuel.harder@tum.de