Formelsammlung für Ingenieurs- und Wirtschaftswissenschaften

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Allgemeines

Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$
$||x| - |y|| \leq |x - y|$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Arithmetische Summenformel $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Geometrische Summenformel $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Bernoulli-Ungleichung $(1+a)^n \geq 1 + na$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Binomische Formel $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Wichtige Zahlen: $\sqrt{2} = 1,41421$ $\pi =$ ist genau 3 $e = 2,71828$ $\pi = 3,14159$ $divB = 42!$

Fakultäten $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ $0! = 1! = 1$

1.2 Mengen

Eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Elemente zu einer Menge
explizite Angabe: $A = \{1; 2; 3\}$
Angabe durch Eigenschaft: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 < n < 4\}$

1.2.1 Für alle Mengen A,B,C gilt:

1. $\emptyset \subseteq B$
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N}\}$

Jede rationale Zahl $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ hat ein Dezimaldarstellung.
$0,25\overline{54} =: a \to 10000a - 100a = 2554 - 25 \Rightarrow a(9900) = 2529 \quad \Rightarrow a = \frac{2529}{9900} = \frac{281}{1100}$

1.3 Vollständige Induktion

Behauptung: $f(n) = g(n)$ für $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$
IA: $n = n_0$: Zeige $f(n_0) = g(n_0)$ =wahr.
IV: Behauptung gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ (Sei $f(n)$ =wahr)
IS: $n \to n+1$: Zeige $f(n+1) = \underbrace{f(n)}_{=wahr} \ldots = g(n+1)$

1.4 Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = a + b\mathbf{i}$, $z \in \mathbb{C}a, b \in \mathbb{R}$ besteht aus einem Realteil $\Re(z) = a$ und einem Imaginärteil $\Im(z) = b$, wobei $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ die immaginären Einheit ist. Es gilt: $i^2 = -1 \quad i^4 = 1$

1.4.1 Karthesische Koordinaten

Rechenregeln:
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}$
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\mathbf{i}$

Konjugiertes Element von $z = a + b\mathbf{i}$:
$\overline{z} = a - b\mathbf{i}$ $\quad e^{\overline{ix}} = e^{-ix}$
$z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

Inverses Element:
$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}z} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathbf{i}$

1.4.2 Polarkoordinaten

$z = a + b\mathbf{i} \neq 0$ in Polarkoordinaten:
$z = r(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi)) = r \cdot e^{\varphi \mathbf{i}}$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \arg(z) = \begin{cases} + \arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b \geq 0 \\ - \arccos\left(\frac{a}{r}\right), & b < 0 \end{cases}$$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = r_1 * r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

n-te Potenz: $z^n = r^n \cdot e^{n\varphi\mathbf{i}} = r^n(\cos(n\varphi) + \mathbf{i}\sin(n\varphi))$

n-te Wurzel: $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right)$
$k = 0, 1, \ldots, n-1$

Logarithmus: $\ln(z) = \ln(r) + \mathbf{i}(\varphi + 2k\pi)$ (Nicht eindeutig!)

Anmerkung: Addition in kartesische Koordinaten umrechnen(leichter)!

1.5 Funktionen

Eine Funktion f ist eine Abbildung, die jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Wertemenge W zuordnet.
$f : D \to W,\ x \mapsto f(x) := y$

Injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Surjektiv: $\forall y \in W \exists x \in D : f(x) = y$
(Alle Werte aus W werden angenommen.)
Bijektiv: f ist injektiv und surjektiv $\Rightarrow$ f umkehrbar.

1.5.1 Symmetrie einer Funktion f

Achsensymmetrie(gerade Funktion): $f(-x) = f(x)$
Punktsymmetrie(ungerade Funktion): $f(-x) = -f(x)$

Regeln für gerade Funktion g und ungerade Funktion u:
$g_1 \pm g_2 = g_3 \qquad u_1 \pm u_2 = u_3$
$g_1 \cdot g_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot u_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot g_1 = u_3$

1.5.2 Extrema, Monotonie und Krümmung von f

$$f'(x_0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \begin{cases} f''(x_0) < 0 \ \to \ \text{Maximum (lokal)} \\ f''(x_0) > 0 \ \to \ \text{Minimum (lokal)} \end{cases}$$

$f'(x) \underset{(>)}{\geq} / \underset{(<)}{\leq} 0 \ \to \ f$ (streng) Monoton steigend/fallend. $x \in [a, b]$

$f''(x) \underset{(>)}{\geq} / \underset{(<)}{\leq} 0 \ \to \ f$ (strikt) konvex/konkav. $x \in [a, b]$

1.5.3 Asymptoten von f

Horizontal: $c = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$
Vertikal: $\exists$ Nullstelle a des Nenners : $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = \pm\infty$
Polynomasymptote $P(x)$: $f(x) := \frac{A(x)}{Q(x)} = P(x) + \underbrace{\frac{B(x)}{Q(x)}}_{\to 0}$

1.5.4 Wichtige Sätze für stetige Fkt. $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$

Zwischenwertsatz: $\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a, b] : f(x) = y$
Mittelwertsatz: Falls f diffbar, dann $\exists x_0 : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Satz von Rolle: Falls $f(a) = f(b)$, dann $\exists x_0 : f'(x_0) = 0$
Regel von L'Hospital: (Falls $\exists$ ein Grenzwert)
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \to \left[\frac{0}{0}\right] / \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

1.5.5 Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n$

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
Lösungen für $ax^2 + bx + c = 0$

Mitternachtsformel:
$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Satz von Vieta:
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

1.5.6 Trigonometrische Funktionen

$f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi_0)$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$e^{ix} = cos(x) + i\, sin(x),\ e^{-ix} = sin(x) - i\, cos(x)$

Additionstheoreme

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	↯	0	↯	0

1.6 Matrizen

Eine Matrix ist eine Tabelle aus mathematischen Objekten. Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat m Zeilen mit Index i und n Spalten mit Index j

1.6.1 Allgemeine Rechenregeln

Merke: Zeile vor Spalte! (Multiplikation, Indexreihenfolge, etc...)

1) $A + 0 = A$ 2) $1 \cdot A = A$
3) $A + B = B + A$ 4) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (im allg.)
5) $(A + B) + C = A + (B + C)$ 6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Multiplikation von $A \in \mathbb{K}^{m \times r}$ und $B \in \mathbb{K}^{r \times n}$: $AB \in \mathbb{K}^{m \times n}$

1.6.2 Transponieren

Falls $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt: $A^\top = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$
Regeln:
$(A + B)^\top = A^\top + B^\top \qquad (A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$
$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top \qquad (A^\top)^\top = A$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist symmetrisch, falls $A = A^\top$ ($\Rightarrow$ diagbar)
$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist schiefsymmetrisch, falls $A = -A^\top$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist orthogonal(Spaltenvektoren=OGB), falls:
$AA^\top = E_n \qquad A^\top = A^{-1} \qquad \det A = \pm 1$
$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist hermitesch, falls $A = \overline{A}^\top$ (kmplx. konj. u. transp.)

1.6.3 Inverse Matrix $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$

für die inverse Matrix A^{-1} von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt: $A^{-1}A = E_n$
$(A^{-1})^{-1} = A \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar, falls: $\det(A) \neq 0 \quad \vee \quad rg(A) = n$

Berechnen von A^{-1} nach Gauß:
$AA^{-1} = E_n \quad \Rightarrow \quad (A|E_n) \xrightarrow{EZF} (E_n|A^{-1})$

1.6.4 Elementare Zeilen/Spaltenumformungen(EZF/ESF)

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ hat m Zeilen $z_i \in \mathbb{K}^n$ und n Spalten $s_j \in \mathbb{K}^m$

- **Addition** $(\lambda \neq 0)$: $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \quad / \quad \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$
- Vertauschen von Zeilen/Spalten
- Multiplikation mit $\lambda \neq 0$: $\lambda \cdot z \quad / \quad \lambda \cdot s$

1.6.5 Rang einer Matrix A

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit r lin. unabhängige Zeilen und l Nullzeilen":
Rang von A: $\mathrm{rg}(A) = m - l = r$
Vorgehensweise:
Zeilenrang (A): Bringe A auf ZSF $\Rightarrow$ Zeilenrang$(A) = rg(A)$
Zeilenraum (A): $Z_A =$ Zeilen ungleich 0
Spaltenrang: Bringe Matrix auf Spaltenstufenform
Kern: $ker(A) = dmex \in \mathbb{R}^n\, Ax = 0 \qquad \dim(ker(A)) = n - r$
Bild: $A^T \Rightarrow EZF \Rightarrow$ Zeilen $(\neq 0)$ bilden die Basis vom Bild. Die (lin. unabhängigen) Spalten von A bilden eine Basis vom Bild.

1.6.6 Lineares Gleichungssystem LGS

Das LGS $Ax = b$ kurz $(A|b)$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ hat m Gleichungen und n Unbekannte.

Lösbarkeitskriterium:
Ein LGS $(A|b)$ ist genau dann lösbar, wenn: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b))$
Die Lösung des LGS $(A|b)$ hat $\dim\ker A = n - \mathrm{rg}(A)$ frei wählbare Parameter.

Das homogene LGS: $(A|0)$ hat stets die triviale Lösung 0
Das LGS hat eine Lsg. wenn $\det A \neq 0 \quad \to \exists A^{-1}$
Summen und Vielfache der Lösungen von $(A|0)$ sind wieder Lösungen.

1.6.7 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = |A|$

- $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D)$
- $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix}$
- $A = B\cdot C \quad \Rightarrow \quad |A| = |B|\cdot|C|$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$
- $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot|A_{ij}|$ Entwcklng. n. $i$ter Zeile.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Ist A invertierbar, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen von $|A|$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

Vereinfachung für Spezialfall $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$:
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{K}^{2\times 2} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$

1.7 Vektorräume

Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen + und $\cdot$ heißt K-Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.
Linear Unabhängig: Vektoren heißen linear unabhängig, wenn aus:
$\lambda_1\underline{\boldsymbol{v}}_1 + \lambda_2\underline{\boldsymbol{v}}_2 + \ldots + \lambda_n\underline{\boldsymbol{v}}_n = \underline{\boldsymbol{0}}$ folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = 0$

1.7.1 Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$

Bilinear: $\langle \lambda v + v', w\rangle = \lambda\cdot\langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$

Symmetrisch: $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$

Positiv definit: $\langle v, v\rangle \geq 0$

Skalarprodukt bezüglich **symmetrischer, quadratischer** und **positiv definite** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\langle v, w\rangle_A = v^T A w$

Matrix A positiv definit falls $\det(a_{11}) > 0 \wedge \det\begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 \\ a_2 1 & a_2 2 \end{pmatrix} > 0 \wedge \ldots \wedge \det(A) > 0$

Orthogonale Projektion $p \in U^n$ von $q \in V^m$ auf $\sum u_i$:

$$p = \sum_{i=1}^{n}\left\langle q, \frac{u_i}{|u_i|}\right\rangle\frac{u_i}{|u_i|} \quad = q - p^\perp$$

Winkel $\langle \underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}\rangle = a\cdot b\cdot\cos\phi$ **Polynome** $< p(x), q(x) >= \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$

1.7.2 Betrag von Vektoren

$||\underline{\boldsymbol{a}}|| = \sqrt{< \underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{a}} >} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

1.7.3 Orthogonalität

Orthonormalisierungsvefahren von n Vektoren nach Gram-Schmidt:
1. $b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ (Vektor mit vielen 0en oder 1en)
2. $b_{k+1} = \frac{b'_{k+1}}{\|b'_{k+1}\|}$ mit $b'_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, b_i \rangle \cdot b_i$

Ausgleichsrechnung:
Experiment: $(t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = 1$ $\quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = x$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$A^\top A x = A^\top v \to$ LGS lösen nach x
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x_1 f_1(x) + \ldots + x_n f_n(x)$
Orthogonale Projektion in UVR:
1. Normiere Basis von U.
2. $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \langle b_2, v \rangle b_2 \ldots \Rightarrow u^\perp = v - u$
Abstand von v zu U: $\left\| u^\perp \right\|$

1.7.4 Vektorprodukt

$$\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^3$$

$\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{b}} \perp \underline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{b}}$ $\quad (\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{b}} = 0 \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{a}}; \underline{\boldsymbol{b}}$ linear abhängig.
$||\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{b}}|| = ||\underline{\boldsymbol{a}}|| \cdot ||\underline{\boldsymbol{b}}|| \cdot \sin(\measuredangle(\underline{\boldsymbol{a}}; \underline{\boldsymbol{b}})) \widehat{=}$ Fläche des Parallelogramms
Graßmann-Identität: $\underline{\boldsymbol{a}} \times (\underline{\boldsymbol{b}} \times \underline{\boldsymbol{c}}) \equiv \underline{\boldsymbol{b}} \cdot (\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{c}}) - \underline{\boldsymbol{c}} \cdot (\underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}})$

Spatprodukt:
$[a, b, c] := \langle \underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{c}} \rangle = \det(a, b, c) \widehat{=}$ Volumen des Spates.
$[a, b, c] > 0 \;\Rightarrow\; a, b, c$ bilden Rechtssystem
$[a, b, c] = 0 \;\Rightarrow\; a, b, c$ linear abhängig

Orthogonale Zerlegung eine Vektors v längs a:
$v = v_a + v_{a^\perp}$ mit $v_a = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle} * a$ und $v_{a^\perp} = v - v_a$

1.7.5 Basis (Jeder VR besitzt eine Basis!)

Eine Teilmenge B heißt Basis, von V wenn gilt:

- $\langle B \rangle = V$ B erzeugt V
- B ist linear unabhängig

1.7.6 Dimension

$$n := |B| \in \mathbb{N}_0 \text{ Dimension von } V \qquad \dim(V) = n$$

Mehr als n Vektoren sind stehts linear abhängig.
Für jeden UVR $U \subset V$ gilt: $\dim(U) < \dim(V)$

1.8 Untervektorräume

Eine Teilmenge U eines $K-$Vektorraums V heißt Untervektorraum (U-VR) von V, falls gilt:

1. $U \neq \varnothing$ $\quad (0 \in U)$
2. $u + v \in U$ $\quad \forall u, v \in U$
3. $\lambda u \in U$ $\quad \forall u \in U, \forall \lambda \in K$

Wegen (3.) enthält ein UVR U stets den Nullvektor 0. Daher zeigt man (1.) meist, indem man $0 \in U$ nachweist.

Triviale UVR: $U = \{0\}$ mit $B = \emptyset$ $\qquad U = V$ mit $B_U = B_V$

1.9 Folgen

Eine Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R},\; n \to a(n) =: a_n$
explizite Folge: (a_n) mit $a_n = a(n)$
rekursive Folge: (a_n) mit $a_0 = f_0,\; a_{n+1} = a(a_n)$

1.9.1 Monotonie

Im Wesentlichen gibt es 3 Methoden zum Nachweis der Monotonie:

1. $a_{n+1} - a_n \gtreqless (=)0$
2. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \gtreqless (=)1 \qquad \vee \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} \lesseqgtr (=)1$
3. Vollständige Induktion

1.9.2 Konvergenz

(a_n) ist **Konvergent** mit **Grenzwert** a, falls: $\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}_0 : |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq N$
Eine Folge konvergiert gegen eine Zahl a: $(a_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$

Es gilt:

- Der Grenzwert a einer Folge (a_n) ist eindeutig.
- Ist (a_n) Konvergent, so ist (a_n) beschränkt
- Ist (a_n) unbeschränkt, so ist (a_n) divergent.
- **Das Monotoniekriterium**: Ist (a_n) beschränkt und monoton, so konvergiert (a_n)
- **Das Cauchy-Kriterium:** Eine Folge (a_n) konvergiert gerade dann, wenn: $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N}_0 : |a_n - n_m| < \epsilon \, \forall n, m \geq N$

Regeln für konvergente Folgen $(a_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $(b_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$:

$(a_n + b_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b \qquad (a_n b_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab \qquad (\frac{a_n}{b_n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$

$(\lambda a_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda a \qquad (\sqrt{a_n}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a} \qquad (|a_n|) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a|$

1.9.3 Wichtige Regeln

$$a_n = q^n \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \begin{cases} 0 & |q| < 1 \\ 1 & q = 1 \\ \pm\infty & |q| > 1 \end{cases}$$

$a_n = \frac{1}{n^k} \to 0 \qquad \forall k \geq 1$

$a_n = \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \to e^c \qquad 2^n \geq n^2 \quad \forall n \geq 4$

1.10 Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$
Harmonische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad |q| < 1$$
Geometrische Reihe

1.10.1 Konvergenzkriterien

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, falls $a_n \not\to 0$ oder
Minorante:$\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n (div) \quad \wedge \quad a_n \geq b_n \ \forall n \geq n_0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert falls (a_n) monoton fallende Nullfolge
oder Majorante: $\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \quad \wedge \quad a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$

Absolute Konvergenz($\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = a$ konvergiert), falls:
1. Majorante: $\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \quad \wedge \quad |a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$
2. Quotienten und Wurzelkriterium:

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad \vee \qquad \rho := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\text{Falls} \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ \rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \\ \rho = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ keine Aussage möglich} \end{cases}$$

1.11 Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$$

Konvergenz:

$$\left| \frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-a| \overset{n\to\infty}{\to} q \cdot |x-a|$$

$$\text{Falls} \begin{cases} |x-a| < \frac{1}{q} & \text{konvergiert absolut} \\ |x-a| > \frac{1}{q} & \text{divergiert} \\ |x-a| = \frac{1}{q} & \text{keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Konvergenzradius: $R = \frac{1}{q}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

1.12 Ableitung und Integral

f diffbar, falls f stetig und $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x)$ exist.

1.12.1 Ableitungsregeln:

Linearität: $(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Produktregel: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$
Potenzreihe: $f \ : \underbrace{]-R+a, a+R[}_{\subseteq D} \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$
Tangentengleichung: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

1.12.2 Newton-Verfahren:

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit Startwert x_0

1.12.3 Integrationsmethoden:

- Anstarren + Göttliche Eingebung
- Partielle Integration: $\int uv' = uv - \int u'v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t}) \underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$
- Brechstange: $t = \tan(\frac{x}{2}) \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$

  $\sin(x) \to \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) \to \frac{1-t^2}{1+t^2}$

1.12.4 Integrationsregeln:

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
$\int \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\,\mathrm{d}x$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$ln\|f(x)\|$	$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$\frac{1}{q+1} x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln\|\cos(x)\|$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\|\sin(x)\|$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left\|1+x^2\right\|$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

1.12.5 Rotationskörper

Volumen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x$
Oberfläche: $O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x$

1.12.6 unbestimmtes Integral

$$\int_{\text{ok}}^{\text{böse}} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\text{böse}} \int_{\text{ok}}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

Majoranten-Kriterium: $|f(x)| \leq g(x)$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1 \end{cases} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Cauchy-Hauptwert: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

1.12.7 Laplace-Transformation von $f : [0,\infty[\to \mathbb{R},\ s \mapsto f(s)$

$$\mathcal{L}\, f(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$$

1.12.8 Integration rationale Funktionen

Gegeben: $\int \frac{A(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x \qquad A(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$

1. Falls, $\deg A(x) \geq \deg Q(x) \Rightarrow$ Polynomdivision:
   $\frac{A(x)}{Q(x)} = P(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$ mit $\deg B(x) < \deg Q(x)$
2. Zerlege $Q(x)$ in unzerlegbare Polynome
3. Partialbruchzerlegung $\frac{B(x)}{Q(x)} = \frac{\dots}{(x-a_n)} + \ldots + \frac{\dots}{\dots}$
4. Integriere die Summanden mit folgenden Funktionen

mit $\lambda = x^2 + px + q,\quad \beta = 4q - p^2$ und $p^2 < 4q$!

$$\int \frac{1}{(x-a)^m}\mathrm{d}x \begin{cases} \ln|x-a|, & m = 1 \\ \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} & m \geq 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{(\lambda)^m}\mathrm{d}x \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\beta}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{\beta}}, & m = 1 \\ \frac{2x+p}{(m-1)(\beta)(\lambda)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(\beta)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(\lambda)^{m-1}}, & m \geq 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(\lambda)^m}\mathrm{d}x \begin{cases} \frac{B}{2}\ln(\lambda) + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda}, & m = 1 \\ \frac{-B}{2(m-1)(\lambda)^{m-1}} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{\mathrm{d}x}{(\lambda)^{m-1}}, & m \geq 2 \end{cases}$$