HM II für EI (PD Dr. Karpfinger)

Mitschrift von Martin Zellner und Johannes Schäfer

21. Oktober 2011

Fehler bitte an martin.zellner@mytum.de oder an johannes.schaefer@fs.ei.tum.de melden.

Inhaltsverzeichnis

35 Martixnormen

Normen Ist V ein $\mathbb{R}$ Vektorraum, so nennt man eine Abbildung

$$\|.\| : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ V \mapsto \|V\| \end{cases} \tag{1}$$

eine Norm, falls:

- $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow V = 0$
- $\|\lambda v\| = \|\lambda\| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beispiele

- $\mathbb{R}^n, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \to \|V\| := \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$ euklidische Norm
- $\mathbb{R}^n, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \to \|v\|_1 = |v_1| + \ldots + |v_n|$
  $\|v\|_\infty = \max\{|vi|\,|i \in \{1, \ldots, n\}\}$ → Stichwort "l-Normen" (siehe früher)
- $V = \mathbb{R}^{m \times n}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \|A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2} = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$
  $\|A\|_\infty = \max\{|a_{ij}| i, j|\} = \sqrt{\sum_{i.j} a_{ij}^2}$ Frobeniusnorm

Man nennt eine Norm $\|.\|$ des $\mathbb{R}^{n \times n}$

- Submultiplikativ, falls $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \, \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Verträglich mit einer Vektornorm $\|.\|_v$ des R^n, falls $\|Av\| \leq \|A\| * \|v\| \, \forall v \in \mathbb{R}^n, \forall A \in \mathbb{R}^{nxn}$

Wie findet man Normen des $\mathbb{R}^{nxn}$, die mit einer Vektornorm $\|.\|_v$ verträglich sind und Submultiplikativ sind?

$$U \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \sup M = \text{kleinste obere Schranke von M}[0, 1) \to \sup = 1 \tag{2}$$

Jede Vektornorm $\|.\|_v$ des $\mathbb{R}^n$ lifert eine Matrixnorm - die von $\|.\|_v$ auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ induzierte Matrixnorm:

$$\|A\| := \sup \frac{\|Av\|}{\|V\|_v} V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{3}$$

$$M = \left\{ \frac{\|Av\|_v}{\|V\|_v} | v \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \tag{4}$$

Es gilt:

- Die von $\|.\|_v$ induzierte Matrixnorm $\|.\|$ ist eine Norm auf $R^{n\times n}$
- Die von $\|.\|_v$ induzierte Matrixnorm $\|.\|$ ist mit $\|.\|_v$ verträglich
- Die von $\|.\|_v$ induzierte Matrixnorm $\|.\|$ ist Submultiplikativ.

zu zeigen:

$$\|A*B\| \leq \|A\|\,\|B\| \sup \frac{\|AB*v\|_v}{\|v\|} = \sup \frac{\|ABv\|}{\|Bv\|}\frac{\|Bv\|}{\|v\|} \leq \|A\|\,\|B\| \tag{5}$$

- Es gilt: $\|A\| = \underset{\text{sup}}{\|v\|_v} = 1\, \|Av\|_v$

Wird $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ von $\|.\|_v$ induziert, so nennt man $\|.\|$ eine natürliche Matrixnorm, es gilt stets $\|E_n\| = 1$

Beispiel Gegeben:
Maximumsnorm

$$\|.\|_\infty \text{ des } \mathbb{R}^n : \|v\|_\infty = \max\{\|v_i\|\,|i = 1,\ldots,n\} \tag{6}$$

$$\rightarrow A \in \mathbb{R}^{n\times n} \rightarrow \|A\| = \sup_{\|V\|_\infty = 1} \|A*v\|_\infty = \sup_{\|v\|=1} \left\| \begin{pmatrix} z_1V \\ z_2V \\ \vdots \\ z_nV \end{pmatrix} \right\|_\infty \tag{7}$$

$$= \sup_{\|v\|_\infty = 1} \max\{|z_iv|\, i = 1,\ldots,n\} \tag{8}$$

$$= \sup_{\|v\|_\infty = 1} \max\{|z_{i1}v_1 + z_{i2}v_2 + \ldots + z_{in}v_n|\,|i = 1,\ldots,n|\} = \tag{9}$$

$$\max\{||z_{i1}| + |z_{i2}| + \ldots + |z_{in}||\} \tag{10}$$

$$= \text{ maximale Zeilensumme, betragsmäßig.} \tag{11}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \|A\| = 7 \tag{12}$$

Gegeben: l_1-Norm des

$$\mathbb{R}^n : v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots\; v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \|V\|_1 = \|v_1\| + \ldots + \|v_n\| \tag{13}$$

Analog zu oben zeigt man: $\|.\|_1$ induziert die "Spaltensummennorm" $\|.\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$, d.h:

$$\|A\| = \text{max. Spaltensummennorm, betragsmäßig} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \|A\| = 6 \tag{14}$$

Beispiel: Gegeben l^2-Norm = euklidische Norm des $\mathbb{R}^n \rightarrow$ induzierte Spektralnorm $\rightarrow$ Eigenwerte von A $\rightarrow$ Mitte des Semessters

36 Taylorentwicklung

Das m-te Taylorpolynom Wir "approximieren" eine oft genug diff'bare Funktion durch ein Polynom:

Gegeben: $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ m-mal diff'bar in $x_0 \in I$

Beachte: $T_{m,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^m(x_0)}{m!}(x - x_0)^m$
- Das m-te Taylorpolynom
T und f sind ähnlich (siehe Bilder)
Beispiel:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 3x + 2x^2$, $x_0 = 1$
  $\to T_{0,f,1}(x) = 6$, $T_{1,f,1}(x) = 6 + 7(x - 1)$, $T_{2,f,1}(x) = 6 + 7(x - 1) + 2(x - 1)^2$
- exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $exp(x) = e^x$, $x_0 = 0 \Rightarrow T_{0,exp,0}(x) = 1$, $T_{1,exp,0}(x) = 1 + x$, $T_{2,exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $T_{3,exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$
- sin, cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ $\begin{cases} T_{m,sin,0}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - ... \\ T_{m,cos,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - ... \end{cases}$

36.1 Das Restglied - die Taylorformel

Es gilt:

Die Taylorformel: Es sei $I = (a, b)$, f sei $(m + 1)$-mal stetig diff'bar, $x_0 \in I$
$\forall x \in : R_{m+1}(x) := f(x) - T_{m,f,x_0}(x)$.
Dann die Lagrange Restglieddarstellung:

$$R_{m+1}(x) = \underbrace{\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x}(x - t)^m f^{(m+1)}(t)\,dt}_{Integraldarstellung\,des\,Restes} = \frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{(m + 1)!}(x - x_0)^{m+1} \text{ mit einem } \zeta \text{ zwischen } x \text{ und } x_0 \quad (15)$$

Andere Schreibweise:

$$h := x - x_0 \to R_{m+1}(x_0 + h) = \frac{f^{(m+1)}(\zeta)}{(m + 1)!}h^{m+1} \quad (16)$$

$$\to T_{m,f,x_0}(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k \quad (17)$$

Formel suggeriert:

- m groß
- x_0 nahe x
- f'' beschränkt

$\Rightarrow R_{min} \approx 0$

Bsp Wir bestimmen e "ziemlich genau":

$$exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{m!}x^m + \frac{e^\zeta}{(m+1)!}x^{m+1} \tag{18}$$

$$e = exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m!} + \frac{e^\zeta}{(m+1)!} \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} + \frac{3^\zeta}{(m+1)!} \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} + \frac{3}{(m+1)!} \tag{19}$$

$$\Rightarrow e - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq \frac{3}{(m+1)!} \quad m = 10 \Rightarrow e - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq \frac{3}{11!} = \frac{3}{1209600} \tag{20}$$

36.2 Taylorreihen

$$f \in C^\infty(I), x_0 \in I \Rightarrow T_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{21}$$

Man nennt T_{f,x_0} die <u>Taylorreihe von f in x_0</u>.
T_{f,x_0} ist eine Potenzreihe $\rightarrow$ hat einen Konvergenzradius $R \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$

$$T_{f,x_0} : (x_0 - \mathbb{R}, x_0 + \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow T_{f,x_0}(x) \tag{22}$$

gilt $T_{f,x_0} = f$? Meistens ja, manchmal nein.

Bsp:

- $\forall$ Polynomfunktionen f: $T_{f,x_0} = f$
- $exp, sin, cos \Rightarrow T_{f,0} = f$ (siehe Kapitel zu Potenzreihen)
- $f : x \rightarrow \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow T_{f,0} \neq f$
- Ist f durch eine Potenzreihe gegeben, so ist diese Potenzreihe die Taylorreihe von f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \Rightarrow T_{f,x_0}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots \tag{23}$$

Wie erkennt man, ob $T_{f,x_0} = f$ gilt? Wenn für den Rest gilt: $R_{m+1} \xrightarrow{m\to\infty} 0$

$$|f(x) - T_{m,f,x_0}(x)| = |R_{m+1}(x)| \xrightarrow{m\to\infty} \Rightarrow f(x) = T_{f,x_0}(x) \forall x \in I \tag{24}$$

Bsp $exp(x) - T_{m,exp,0}(x) = \frac{e^\zeta}{(m+1)!} \xrightarrow{m\to\infty} 0$

36.3 Methoden zur Bestimmung von Taylorreihen

- Mit der Taylorformel → meist mühsam
- Mit Differenzieren/Integrieren:
  -
$$arctan'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k \tag{25}$$
$$arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} \tag{26}$$
  -
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty}x^k \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2})\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot x^k \tag{27}$$
- Bekannte Potenzreihen einsehen:
$$coshx = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{28}$$
- Durch Koeffizientenvergleich:
$$\frac{x}{x-1} = \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \Rightarrow 1x = \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k - \sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1} = \tag{29}$$
$$= a_0 + a_1 - a_0x^1 + (a_2-a_1)x^2 + (a_3-a_2 = x^3 + \dots \tag{30}$$
$$\Rightarrow a_0 = 0, a_1 - a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = 1, a_3 - a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = 1 \tag{31}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{1-s} = \sum_{k=1}^{\infty}x^k \tag{32}$$