Lineare Algebra

1 Allgemeines

Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$
Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
$\mathbb{K}$ steht für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

2 Matrizen

Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ hat m Zeilen mit Index i und n Spalten mit Index j.

2.1 Allgemeine Rechenregeln

Merke: Zeile vor Spalte! (Multiplikation, Indexreihenfolge, etc.)

1) $A + 0 = A$ 2) $1 \cdot A = A$
3) $A + B = B + A$ 4) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (im Allg.)
5) $(A + B) + C = A + (B + C)$ 6) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Multiplikation von $A \in \mathbb{K}^{m\times r}$ und $B \in \mathbb{K}^{r\times n}$: $AB \in \mathbb{K}^{m\times n}$

2.2 Elementare Zeilenumformungen (EZF) (gilt äquiv. für Spalten)

$A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ hat m Zeilen $z_i \in \mathbb{K}^n$

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$
- Addition des λ-fachen der Zeile z_i zur Zeile z_j

2.3 Transponieren

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt: $A^\top = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$
Regeln:
$(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$
$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ $(A^\top)^\top = A$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist symmetrisch, falls $A = A^\top$ ($\Rightarrow$ diagbar)
$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist schiefsymmetrisch, falls $A = -A^\top$
$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist orthogonal (Spalten-/Zeilenvektoren=ONB), falls:
$AA^\top = E_n \Leftrightarrow A^\top = A^{-1} \Leftrightarrow \det A = \pm 1$
$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist hermitesch, falls $A = \overline{A}^\top$ (kmplx. konj. u. transp.)

2.4 Inverse Matrix von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Für die inverse Matrix A^{-1} von A gilt: $A^{-1}A = E_n$
$(A^{-1})^{-1} = A$ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist invertierbar, falls: $\det(A) \neq 0 \quad \vee \quad rg(A) = n$

Berechnen von A^{-1} nach Gauß:
$AA^{-1} = E_n \quad\Rightarrow\quad (A|E_n) \overset{EZF}{\longrightarrow} (E_n|A^{-1})$
2x2-Matrix: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2.5 Rang einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

(N0-Zeilen = Nicht-Null-Zeilen)

Bringe A auf ZSF
Rang (Zeilrang) $\mathrm{rg}(A)$: Anzahl N0-Zeilen
Zeilenraum Z_A: Erzeugnis der Zeilen, Basis(Z_A) = { N0-Zeilen }
Kern: $\ker(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$
Dimensionsformel: $\mathrm{rg}(A) + \dim(\ker(A)) = n$
Bringe A auf Spaltenstufenform (transponieren, ZSF)
Spaltenrang: Anzahl der N0-Spalten
Spaltenraum S_A: Erzeugnis der Spalten, Basis(S_A) = { N0-Spalten }
Bild = Spaltenraum: Erzeugnis der Spalten

2.6 Lineares Gleichungssystem LGS

Das LGS $Ax = b$ kurz $(A|b)$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ hat m Gleichungen und n Unbekannte.

Lösbarkeitskriterium:
Ein LGS $(A|b)$ ist genau dann lösbar, wenn: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$
Die Lösung des LGS $(A|b)$ hat $\dim(\ker A) = n - \mathrm{rg}(A)$ frei wählbare Parameter.

Das LGS hat eine Lsg. wenn $\det A \neq 0 \quad \rightarrow \exists A^{-1}$
Das homogene LGS: $(A|0)$ hat stets die triviale Lösung 0
Summen und Vielfache der Lösungen von $(A|0)$ sind wieder Lösungen.

2.7 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = |A|$

- $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ Entwicklung n. j-ter Spalte
- $|A| = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ Entwicklung n. i-ter Zeile
- $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$
- $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix}$
- $A = B \cdot C \quad\Rightarrow\quad |A| = |B| \cdot |C|$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Ist A invertierbar, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

Umformung Determinante

- Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen von $|A|$
- Zeile/Spalte mit λ multiplizieren, $|A|$ um Faktor λ größer
- Addition des λ-fachen der Zeile X zur Zeile Y ändert $|A|$ nicht

Positiv definite Matrix
$\det(a_{11}) > 0 \wedge \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge \ldots \wedge \det(A) > 0$

Vereinfachung für Spezialfall $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$

2.8 Äquivalente Aussagen für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

(Wenn eine der Aussagen gilt, gelten alle anderen)

1) A ist invertierbar 2) $\mathrm{rg}(A) = n$
3) $\mathrm{Kern}(A) = 0$ 4) $\dim(S_A) = \dim(Z_A) = n$
5) $\det(A) \neq 0$ 6) Zeilen/Spalten von A linear unabhängig

3 Vektoren

Ein Vektor ist ein n-Tupel reeller oder komplexer Zahlen, also ein Element aus dem $\mathbb{K}^n$.

3.1 Skalarprodukt $\langle v, w\rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

1. Linear: $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \wedge \langle u, \lambda v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$
2. Symmetrisch: $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$
3. Positiv definit: $\langle v, v\rangle \geq 0 \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Kanonisches Skalarprodukt
$\langle v, w\rangle = v^\top w = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$

Skalarprodukt bzgl. sym., quadr. und positiv definiter Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$
$\langle v, w\rangle_A = v^\top A w$

Skalarprodukt Polynome $\langle p(x), q(x)\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\,dx$

Norm von Vektoren $\|a\| = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$
Orthogonalität $\langle a, b\rangle = 0 \Leftrightarrow a \perp b$
Orthogonale Zerlegung eine Vektors v längs a:
$v = v_a + v_{a\perp}$ mit $v_a = \frac{\langle v, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a$ und $v_{a\perp} = v - v_a$
Winkel $\cos\phi = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|} \qquad \phi = \arccos\left(\frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|}\right)$

3.2 Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}^3$

$a \times b \perp a, b$ (falls $a \times b = 0 \Leftrightarrow a, b$ linear abhängig)
$a \times b = -b \times a$
$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\measuredangle(a, b)) \,\widehat{=}\,$ Fläche des Parallelogramms
Graßmann-Identität: $a \times (b \times c) \equiv b \cdot (a \cdot c) - c \cdot (a \cdot b)$

Spatprodukt
$[a, b, c] := \langle a \times b, c\rangle = \det(a, b, c) \,\widehat{=}\,$ Volumen des Spates.
$[a, b, c] > 0 \Leftrightarrow a, b, c$ bilden Rechtssystem
$[a, b, c] = 0 \Leftrightarrow \{a, b, c\}$ linear abhängig

4 Vektorräume (VR)

Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt K-Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.
Bedingung $(u, v, w \in V \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R})$

1. $v + w \in V \qquad \lambda v \in V$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $0 \in V : v + 0 = v$
4. $v' \in V : v + v' = 0$
5. $v + w = w + v$
6. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
7. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
8. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
9. $1v = v$

4.1 Untervektorraum (UVR) $U \subset V (u, v \in U \quad \lambda \in \mathbb{R})$

1. $U \neq \emptyset \qquad (0 \in U)$
2. $u + v \in U$
3. $\lambda u \in U$

4.2 Basis (Jeder VR und jeder UVR besitzt eine Basis!)

Eine Teilmenge $B \subset V$ heißt Basis von V, wenn gilt:

- $\mathrm{span}(B) = V$, B erzeugt V
- B ist linear unabhängig

4.3 Dimension

$n = \dim(V) = |B| =$ Mächtigkeit von B
Mehr als n Vektoren aus V sind stets linear abhängig.
Für jeden UVR $U \subset V$ gilt: $\dim(U) \leq \dim(V)$

4.4 Linearkombination

Jeder Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ kann als Linearkombination einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathbb{K}^n$ dargestellt werden

$$v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \Rightarrow \text{Gauß} \left(b_1 \ b_2 \ b_3 \mid v\right)$$

Linear Unabhängig: Vektoren heißen linear unabhängig, wenn aus:
$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

4.5 Orthogonalität

$B \subset V$ heißt

- **Orthogonalsystem**, wenn $\forall v, w \in B : v \perp w$
- **Orthogonalbasis**, wenn B Orthogonalsystem und Basis von V
- **Orthonormalsystem**, wenn B Orthogonalssystem u. $\forall v \in B : \|v\| = 1$
- **Orthonormalbasis(ONB)**, wenn B Orthonormalsystem u. Basis von V ist

Matrix A heißt orthogonal, wenn $A^\top A = E_n$

- $A^{-1} = A^\top$
- $\det A = \pm 1$
- Spalten bilden ONB
- Zeilen bilden ONB
- $\|Av\| = \|v\|$

Orthonormalisierungsvefahren einer Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ nach Gram-Schmidt

1. $b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ (Vektor mit vielen 0en oder 1en)
2. $b_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|}$ mit $c_2 = v_2 - \langle v_2, b_1\rangle \cdot b_1$
3. $b_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|}$ mit $c_3 = v_3 - \langle v_3, b_1\rangle \cdot b_1 - \langle v_3, b_2\rangle \cdot b_2$

Orthogonale Projektion auf UVR
Gegeben: Vektorraum $V \in \mathbb{R}^n$, $v \in V$, Untervektorraum $U \subset V$

1. Basis von U bestimmen
2. Normiere Basis $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ von U
3. $v_U = \langle v, b_1\rangle\, b_1 + \langle v, b_2\rangle\, b_2 + \ldots$
4. $v_{U^\perp} = v - v_U$
5. Abstand von v zu $U = \left\| v_{U^\perp} \right\|$

Alternative Methode

1. Basis $\{b_1, \ldots, b_r\}$ von U bestimmen
2. Setze $A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times r}$
3. Löse das LGS $A^\top A x = A^\top v$ und erhalte den Lösungsvektor $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)^\top$
4. $v_U = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_r b_r$

5 Norm

Eine Abbildung $N : V \rightarrow \mathbb{R}$ eines reellen oder komplexen Vektorraums V heißt Norm auf V, falls $\forall v, w \in V$ und $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

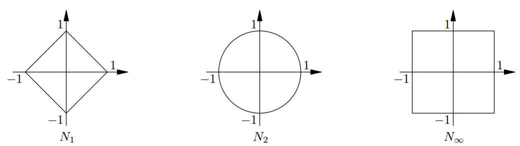
1. $N(v) \geq 0$ und $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $N(\lambda v) = |\lambda|\, N(v)$
3. $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ (Dreiecksungleichung)

5.1 Vektornorm

Allgemeine l-Norm N_l eines Vektors $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

$$N_l(v) = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^l\right)^{\frac{1}{l}}$$

- $N_1(v) = \sum_{i=1}^n |v_i|$ **1-Norm** (l^1-Norm)
- $N_2(v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ **euklidische Norm** (l^2-Norm)
- $N_\infty(v) = \max\{|v_i|\}$ **Maximumsnorm** (l^∞-Norm)



Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ mit der Länge 1 bzgl. der Normen N_1, N_2 und N_∞
Frobeniusnorm der Matrix $V = \mathbb{R}^{m\times n}$

$$N : \mathbb{R}^{m\times n} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } N(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

5.2 Induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$

Eigenschaften:

- verträglich mit Vektornorm: $\|Av\|_V = \|A\| \|v\|_V$
- submultiplikativ: $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- $\|E_n\| = 1$
- $|\lambda| \leq \|A\|$ für jeden Eigenwert λ von A
- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

Definition: Jede Vektornorm $\|\bullet\|_V$ des $\mathbb{R}^n$ definiert eine Matrixnorm $\|\bullet\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|A\| = \sup_{\|v\|_V=1} \|Av\|_V$$

Wichtige induzierte Matrixnormen auf $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- Die **Spaltensummennorm** induziert durch die l^1-Norm
$$\|A\|_1 = \max_{i=1,\dots,n}\{|a_{1i}| + \dots + |a_{ni}|\}$$
ist die betragsmäßig maximale Spaltensumme.
- Die **Zeilensummennorm** induziert durch die l^∞-Norm
$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}\{|a_{i1}| + \dots + |a_{in}|\}$$
ist die betragsmäßig maximale Zeilensumme.
- Die **Spektralnorm** induziert durch die l^2-Norm
$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} | \lambda \text{ ist Eigenwert von } A^\top A\}$$
ist die Wurzel aus dem größten Eigenwert von $A^\top A$.

6 Lineare Abbildungen

Abbildung $f : V \to W$ ist linear, wenn

1. $f(0) = 0$
2. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
3. $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

$\Rightarrow$ Abbildung als Matrix darstellbar

Injektiv, wenn aus $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Surjektiv: $\forall y \in W\ \exists x \in V : f(x) = y$
(Alle Werte aus W werden angenommen.)
Bijektiv(Eineindeutig): f ist injektiv und surjektiv $\Rightarrow$ f umkehrbar.

6.1 Koordinatenvektor bezüglich einer Basis B

$B = (b_1, \dots, b_n)$ geordnete Basis des Vektorraums V, so kann jeder Vektor $v \in V$ als Linearkombination bzgl. B dargestellt werden:
$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ Gauß)
$\Rightarrow v_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top$ ist der Koordinatenvektor bzgl. Basis B

6.2 Darstellungsmatrix

Lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
Darstellungsmatrix spaltenweise: $A = \begin{pmatrix} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{pmatrix}$

Allgemein $f : V \to W$ mit V, W Vektorräume
$B = (b_1, \dots, b_n)$ ist eine Basis von V
$C = (c_1, \dots, c_m)$ ist eine Basis von W

$$\Rightarrow A = M(f)^C_B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f(b_1)_C & f(b_2)_C & \cdots & f(b_n)_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ist die Darstellungsmatrix von f bzgl. B und C.
"In der j-ten Spalte der Abbildungsmatrix stehen die Koordinaten des Bildes $f(b_j)$ bzgl. der Basis $C = (c_1, \dots, c_m)$"

Eigenschaften von f mit Hilfe von A

- f injektiv, wenn $\ker(A) = \{0\}$
- f surjektiv, wenn $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^m$
- f bijektiv, wenn A invertierbar

6.3 Transformationsmatrix

Gegeben: Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n') \in V$
Darstellung der Elemente aus $\mathcal{B}'$ in der Basis $\mathcal{B}$:
$v_j' = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n$ mit a_{ij} als Koeffizienten des Vektors v_j' bzgl. der Basis $\mathcal{B}$
$\Rightarrow$ Transformationsmatrix $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = (a_{ij})$

Regeln und Berechnung (B ist Matrix der Basis $\mathcal{B}$)

- $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = B^{-1}B'$
- Falls $\mathcal{B}$ Standardbasis $\Rightarrow$ Matrix $B = E$ und $T^E_{\mathcal{B}'} = B'$
- $\left(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \qquad B' = BT^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$
- Vektor v bzgl. Basis E_n soll bzgl. Basis $\mathcal{B}'$ dargestellt werden: $v_{\mathcal{B}'} = T^{\mathcal{B}'}_E v$
- Abbildungsmatrix bzgl. Basis $\mathcal{B}$
$M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = T^{\mathcal{B}}_E \cdot M(f)^E_E \cdot T^E_{\mathcal{B}}$

7 Diagonalisierung (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben: Quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Gilt $Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$, so nennt man

- $v \in V$ einen **Eigenvektor** von A zum **Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$ und
- $\lambda \in \mathbb{R}$ einen **Eigenwert** von A zum **Eigenvektor** $v \in V$

Ist λ ein Eigenwert von A, so nennt man den Untervektorraum

- $\text{Eig}_A(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^n | Av = \lambda v\}$ den Eigenraum von A zum Eigenwert λ und
- $\dim(\text{Eig}_A(\lambda))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ
- $\text{geo}(\lambda) = \dim(\text{Eig}_A(\lambda))$

Diagonalisieren von Matrizen
A ist diag.bar falls eine invertierbar Matrix B existiert, sodass

$$D = B^{-1}AB \;\Leftrightarrow\; A = BDB^{-1}$$

und D eine Diagonalmatrix ist.

- Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar wenn $\text{alg}(\lambda) = \text{geo}(\lambda)$ für jeden Eigenwert λ von A gilt.
- Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.
- Eine symmetrische Matrix hat nur reelle Eigenwerte und ist diagonalisierbar.
- Die Determinante einer Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte: $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_n$

7.1 Rezept: Diagonalisieren

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. Bestimme das charakteristische Polynom von A
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$
2. Charakteristische Polynom p_A in Linearfaktoren zerlegen.
$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\nu_1} \dots (\lambda_r - \lambda)^{\nu_r}$$
Es gilt $\nu_1 + \dots + \nu_r = n$
$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind die Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit $\text{alg}(\lambda_i) = \nu_i$
Ist p_A nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegbar $\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar!
3. Bestimme zu jeden Eigenwert λ_i den Eigenraum V_i
$$V_i = \ker(A - \lambda_i E_n) = \text{span}(B_i)$$
Die Vektoren der Basis B_i sind die Eigenvektoren von λ_i.

   Einfacher: Der Eigenvektor v_i ist Lösung des homogenen LGS
$$(A - \lambda_i E_n)v_i = 0$$
$\dim(V_i) = \text{geo}(\lambda_i)$ geometr. Vielfachheit des Eigenwerts λ_i.
Gilt $\text{geo}(\lambda_i) \neq \text{alg}(\lambda_i)$ für ein i, ist A nicht diagonalisierbar!
4. $B = (v_1 \; \dots v_n)$ setzt sich aus den Eigenvektoren zusammen.
$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist die Diagonalmatrix der Eigenwerte.
$$D = B^{-1}AB \;\Leftrightarrow\; A = BDB^{-1}$$

8 Schurzerlegung

Zu jeder quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit einem in Linearfaktoren zerfallendem charakteristischem Polynom $p_A(\lambda)$ gibt es eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q^{-1} = Q^\top$, mit

$$Q^\top AQ = R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

R ist eine obere Dreiecksmatrix.

8.1 Rezept: Schurzerlegung

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Teil I

1. $A_1 = A$
2. Bestimme einen Eigenvektor v mit Norm $\|v\| = 1$ zum Eigenwert λ_1 von A_1
3. Ergänze v zu einer ONB des $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ orthogonale Matrix $B_1 = \begin{pmatrix} v & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$
4. Berechne
$$B_1^\top A_1 B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \text{ mit } A_2 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$$
5. Setze $Q_1 = B_1$

Teil II (wiederhole $(n-1)$ mal)

1. A_2 ist gegeben
2. Bestimme einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ_2 von A_2
3. Ergänze v zu einer ONB des $\mathbb{R}^{n-1}$ $\Rightarrow$ orthogonale Matrix $B_2 = \begin{pmatrix} v & v_2 & \dots & v_{n-1} \end{pmatrix}$
4. Berechne
$$B_2^\top A_2 B_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \text{ mit } A_3 \in \mathbb{R}^{(n-2)(n-2)}$$
5. Setze $Q_2 = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$

Setze $Q = Q_{n-1}$. Es gilt $Q^{-1} = Q^\top$ und die Schurzerlegung von A lautet

$$Q^\top AQ = R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

9 Singulärwertzerlegung

Bei der Singulärwertzerlegung wird eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ als Produkt dreier Matrizen U, S und V geschrieben

$$A = USV^\top$$

mit $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
U und V sind orthogonal, S ist eine Diagonalmatrix.

9.1 Rezept: Singulärwertzerlegung

Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1. Bestimme alle Eigenwerte λ_j und Eigenvektoren v_j der Matrix $A^\top A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ordne sie
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$ mit $r \leq n$
2. Bestimme eine ONB des $\mathbb{R}^n$ aus den Eigenvektoren v_j und erhalte $V = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
3. Die Singulärwerte sind $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \qquad j = 1, \dots, \min\{m, n\}$
$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \sigma_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad m < n$$
$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad m > n$$
4. Bestimme $u_1, \dots, u_r$ aus $u_i = \frac{1}{\sigma_j} Av_j$ für alle $j = 1, \dots, r$ (alle $\sigma_j \neq 0$)
5. Falls $r < m$ ergänze $u_1, \dots, u_r$ zu einer ONB, bzw. zu $U = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m \end{pmatrix}$ orthogonal.
6. $A = USV^\top$

10 Lineare Differentialgleichungen

Gegeben: $\dot{x} = Ax$ mit $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
A ist diagonal, diagonalisierbar oder ein Jordanblock.
Allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{tA}x_0 \text{ mit } x_0 = x(0)$$

10.1 Exponentialfunktion von Matrizen

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$AB = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$$

Diagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{a_n t} \end{pmatrix} = \text{diag}\left(e^{a_1 t}, \dots, e^{a_n t}\right)$$

Diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und den Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ mit $V = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$: $A = VDV^{-1}$

$$e^{tA} = Ve^{tD}V^{-1} = V \,\text{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right) V^{-1}$$

Jordanblock $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$

Aufteilen von A in $A = D + N = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt}$$
$$= \text{diag}\left(e^{a_1 t}, \dots, e^{a_n t}\right) \left(E_n + tN + t^2 \frac{N^2}{2} + \dots\right)$$

Die Potenzreihe von e^{Nt} ist auf endliche Summanden begrenzt.