



# Elektromagnetischer Feldterror

## 1. Nützliches Wissen $\text{rot } E \equiv 0$

Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$   
Elektrostatik heißt  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$ ,  $\vec{j} = 0$  und Magnetostatik  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  sonst spricht man von Elektrodynamik

### 1.1. Konstanten




Lichtgeschwindigkeit.	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
Elektr. Feldkonst.	$\epsilon_0 = 8.854\,188 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Magn. Feldkonst.	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$

### 1.2. Maxwellsche Gleichungen (Naturgesetze)

Gaußsches Gesetz: $\text{div } \vec{D} = \rho$	Faradaysches ind. Gesetz $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Quellfreiheit des magn. Feldes $\text{div } \vec{B} = 0$	Ampèresches Gesetz $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Zusammen mit Materialgleichungen bildet  $(\vec{E}, \vec{H})$  ein 6 komponentiges Elektromagnetisches Feld

### 1.3. Bauteilgleichungen

Resistiv	Kapazitiv	Induktiv
$dI = G \, dU$ $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ $dI = \vec{j} \, dA$ $\vec{j} = qn\vec{v}$	$dQ = C \, dU$ $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $dU = \vec{E} \, d\vec{r}$ $Q(V) \equiv \oint_V \vec{D} \, d\vec{A}$	$d\Phi_M = L \, dI$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $d\Phi_M = \vec{B} \, dA$ $I(A) \equiv \oint_{dA} \vec{H} \, d\vec{r}$
Widerst. $R = \rho \frac{1}{A}$ 	Kondensator $C = \epsilon \frac{A}{d}$ 	Spule $L = \mu A \frac{N^2}{l}$ 

	D-Feld	H-Feld
Durchflutung	$\oint_V \vec{D} \cdot d\vec{a} \equiv Q(V)$	$\oint_{dA} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I(A)$
Vereinfacht	$4\pi r^2 D(r) = Q(V)$	$2\pi r H(r) = I(A)$
Material	$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
Divergenz	$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\text{div } \vec{B} = 0$
Rotation	$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

### 1.4. Formeln der Elektrostatik

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad \vec{F} = q\vec{E} \quad \text{rot } E = 0$$
$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{r} \text{ ist wegunabhängig} \quad \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$
$$\text{div}(\epsilon \text{ grad}(\Phi) = -\rho \quad \vec{E} = -\text{grad } \Phi$$
$$U_{12} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \quad \vec{D} \cdot \vec{N} = \sigma \quad C = \frac{Q}{U}$$
$$W_{12} = \int_C \vec{F} d\vec{r} = q \cdot U_{12} \quad w_{el} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad W_{el} = \frac{1}{2} C U^2$$

### 1.5. Formeln der Magnetostatik

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad \vec{F}_L = \vec{j} \times \vec{B} \quad d\vec{F}_L = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

### 1.6. Formeln zur Induktion

$$U_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} \quad \Phi_{\text{mag}} = \int_A \vec{B} d\vec{a}$$
$$U_{\text{ind}} = -\int_{A(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{a} + \int_{\partial A(t)} (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{r}$$

### 1.7. Formeln zu stationären Strömen

$$I_A = \frac{dQ}{dt} |_A \quad I_A = \int_A \vec{j} d\vec{a} \quad \vec{j} = \sum_{i=1}^n q_i n_i \vec{v}_i$$
$$\vec{v} = \text{sgn } q \mu \vec{E} \quad U = RI \quad p_{\text{el}} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad P = UI$$
$$\int_{\partial V} \vec{j} d\vec{a} = -\frac{dQ(V)}{dt} \quad \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

### 1.8. Integralgleichungen

$$\int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a} = \int_V \text{div } \vec{D} d^3r$$
$$\int_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = \int_A \text{rot } \vec{H} d\vec{a}$$

### 1.9. Durchflutungsgesetze:

$$\oint_V \vec{D} \cdot d\vec{a} \equiv Q(V)$$
$$\oint_{dA} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I(A) = \int_A \vec{j} d\vec{a}$$
$$\text{div}(\epsilon \cdot \text{grad}(\Phi)) = -\rho$$

## 2. Das elektrische Feld

1. Wird erzeugt von Ladung oder sich veränderndes Magnetfeld
2. Innerhalb eines idealen Leiters ist das E-Feld Null(Influenz).
3. Die Feldlinien stehen immer senkrecht auf eine Leiteroberfläche.
4. Die Feldlinien laufen von positiven zu negativen Ladungen.
5. Bei Kugelladungen sinkt das E-Feld radial mit  $\frac{1}{r^2}$
6. Bei unendlicher Linienladung sinkt das E-Feld radial mit  $\frac{1}{r}$
7. Bei unendlicher Flächenladung bleibt das E-Feld konstant.
8. Feldlinien verlaufen lieber in hohem  $\epsilon_r$

### 2.1. Elektrische Energiedichte

Energie die in einem Bereich nötig ist, um alle Ladungen aus dem unendlichen an ihre Position zu bewegung.

$$W_{el} = \sum_{k=2}^N \Delta W_{el}^{(k)} = \frac{1}{8\pi\epsilon} \sum_{i,k=1}^N \frac{q_i q_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} =$$

$$\iiint_V \iiint_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r d^3r'$$

Substitutionsregel:

$$q_i = dQ(\vec{r}_i) = \rho(\vec{r}_i) dV$$
$$\sum_{i=1}^N \{\vec{r}_i \dots\} q_i \rightarrow \iiint_V \{\vec{r}_i \dots\} \rho(\vec{r}) dV$$

$$\delta W_{el} = \iiint_V \Phi(\vec{r}) \delta \rho(\vec{r}) d^3r = \iiint_V \vec{E} \cdot \delta \vec{D} d^3r$$

### 2.2. Energie

Die Gesamtenergie einer Ladungsverteilung mit  $n$  Ladungen besteht aus  $\frac{1}{2}(n^2 + n)$  summierten Termen.

	Elektrisch	Magnetisch
	$\delta w_{el} = \vec{E} \cdot \delta \vec{D}$	$\delta w_{mag} = \vec{H} \cdot \delta \vec{B}$
Energiedichte:	$w_{el} = \int_0^{\vec{D}} \vec{E}' \cdot d\vec{D}'$	$w_{mag} = \int_0^{\vec{B}} \vec{H}' \cdot d\vec{B}'$
Falls $\epsilon = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$	$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2\epsilon} \vec{D}^2$	$w_{mag} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2$
Energie:	$W_{el} = \int_V w_{el} dV$	$W_{mag} = \int_V w_{mag} dV$

$$\text{Leistung: } P_{em} = \int_V \Pi_{em} dV = -\iiint_V \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) dV$$

Energie eines Teilchens beim durchlaufen einer Spannung:  $E = U \cdot Q$   
Energie des el. Feldes im Plattenkondensator:  $E = \frac{1}{2} E D V = \frac{1}{2} U Q$

### 2.3. Elektromagnetisches Feld

Poynting Vektor:  $\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}$   
Extensive Größe  $X$  besitzt eine Volumendichte  $x(\vec{r}, t)$ , so dass für jedes Kontrollvolumen  $V \subset \mathbb{R}^3$  gilt:  $X(V) = \int_V x(\vec{r}, t) dV$   
Extensive Größe ist eine Größe die man abzählen kann.

Beispiele für extensive Größen:			
phys. Größe	$X$	Volumendichte	$x$
Ladung	$Q$	Ladungsdichte	$\rho_{el}$
Masse	$m$	Massendichte	$\rho_m$
Teilchenzahl	$N$	Konzentration	$n$
Energie	$W$	Energiedichte	$w$
$X$ besitzt Stromdichte $\vec{J}_X(\vec{r}, t)$ mit $X = \int_V \vec{J}_X(\vec{r}, t) d\vec{a}$ $X$ hat Produktionsrate $\Pi_X(\vec{r}, t)$ für Zeit und Volumen			
Bilanzgleichung:	$\frac{dX(V)}{dt} = -\int_{\partial V} \vec{J}_X d\vec{a} + \int_V \Pi_X dV$		
Differentielle Form:	$\frac{\partial x}{\partial t} X = -\text{div } \vec{J}_X + \Pi_X$		

Halbleiter:  
Elektronen  $\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div } \vec{J}_n + G_n$   
Löcher  $\frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div } \vec{J}_p + G_p$  mit  $G_n = G_p$

Energiebilanz des El.mag.-Feldes:

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{J}_{em} = \Pi_{em}$$

mit  $w_{em} = w_{el} + e_{mag}$ ,  $\vec{J}_{em} = \vec{E} \times \vec{H} + \vec{S}_0$ ,  $\Pi_{em} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$

## 3. Potentialtheorie

Elektromagnetisches Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ :  $\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t)$   
Elektromagnetisches Skalarpotential  $\Phi$ :  $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r}, t)$

$$\text{Umeychen: } \vec{A}' = \vec{A} - \nabla\chi \quad \Phi' = \Phi + \dot{\chi}$$

Eichfunktion: Riemansche Räume haben an jedem Punkt ein anderes Längenmaß. Die Eichfunktion gibt an, welches Längenmaß an welchem Punkt verwendet werden muss.

### 3.1. Maxwell Gleichungen in Potenttiarldarstellung

$$\text{div}(\epsilon \nabla \Phi) + \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\epsilon \vec{A}) = -\rho$$

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } A\right) + \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \epsilon \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \vec{j}$$

$$\text{Lorenzbeziehung: } \text{div } \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\text{Wellengleichungen: } \left( \Delta - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Coulombbeziehung:  $\text{div } A = 0$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \left( \vec{j} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) \right)$$

NF Anteil:  $-\nabla\Phi$

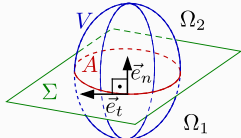
HF Anteil:  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$

Transversale Stromdichte:  $\vec{j}_t = \vec{j} + \epsilon \frac{\partial \nabla \Phi}{\partial t}$

Gesetz bei dem Bert sabbert:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

### 3.2. Feldverhalten an Materialgrenzen



An Grenzflächen gibt es Flächenladung  $\sigma$ :

$$Q = \lim_{h \rightarrow 0} \int_V \rho dV = \int_A \sigma d\vec{a}$$

$$\vec{D}_2 \vec{n} - \vec{D}_1 \vec{n} = \sigma_{\text{int}}$$

$$\vec{B}_2 \vec{n} - \vec{B}_1 \vec{n} = 0$$

$$\vec{E}_1 \times \vec{n} - \vec{E}_2 \times \vec{n} = 0$$

$$\vec{H}_2 \times \vec{n} - \vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{j}$$

Brechungsgesetz für elektrische Feldlinien:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

### 3.3. Randwertprobleme der Potentialtheorie

Zu lösen ist die Poisson-Gleichung  $\text{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho$  auf  $\overset{\circ}{\Omega}$ :

Nr.	RWP	Randbedingungen auf $\partial\Omega$	Lösung
1.	Dirichlet	$\Phi _{\partial\Omega} = \Phi_D$	eindeutig $\Phi \in \mathcal{C}^2$
2.	Neumann	$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big _{\partial\Omega} = F_N$	eindeutig $(\Phi + C) \in \mathcal{C}^2$
3.	Gemischt	$\left( \Phi + k \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \Big _{\partial\Omega} = F_N$	eindeutig $\Phi \in \mathcal{C}^2$

Mit Richtungsableitung  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{1/2} = \lim_{\vec{r} - \vec{r}_0 \rightarrow 0} \vec{n}(\vec{r}_0) \cdot \nabla \Phi(\vec{r})$   
 $\vec{r} \in \Omega_{1/2}$

Lösungsansatz:  $\Phi = \Phi^{(0)} + \varphi$   
 $\Phi^{(0)}$ : erfüllt hom. DGL und inhom. RB  
 $\varphi$ : erfüllt inhom. DGL und hom. RB

In den meisten Elektrostatistischen Problemen gilt  $\rho = 0$ , da sich die Ladung nur auf den Grenzflächen von Leitern befindet und nicht im Gebiet  $\Omega$  in dem die Lösung von  $\Phi$  gesucht wird.  
In der Praxis sind die meisten RWPs gemischt, wie Leiterkontakte oder Wärmeleitung

Mehrelektroden-Kondensator Q-RWP:

$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \Phi) = 0$  in  $\overset{\circ}{\Omega}$  und  $\int_{\partial \Omega_l} \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \, \mathrm{d} \vec{a} = Q_l$  und besitzt bis auf eine additive Konstante eine eindeutige Lösung

**Spektralzerlegung**

Lösungsverfahren:

1. Konstruiere  $\Phi = \Phi^{(0)} + \varphi$
2. finde Eigenfunktionen:  $-\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \vec{b}_\nu) = \lambda_\nu \vec{b}_\nu$   
Es gilt  $\lambda_\mu \in \mathbb{R}^+$
- 3.

**3.4. Greenfunktion**  $G(\vec{r}, \vec{r}')$

Def: Lösung des RWP mit hom. Randbed. und Störung  $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$  (Einheitspunktladung bei  $\vec{r}'$ )

Allg. Lösung:  $\Phi(\vec{r}) = \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') \, \mathrm{d}^3 \vec{r}'$

Beispiel Punktladung:  $G_{\text{Vac}}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$

**Spektralzerlegung mit Greenfunktion**

Problem:  $-\Delta \varphi = \vec{f}$

- Soperationsansatz für die Eigenfunktionen:  
 $b(\vec{r}) = b_1(x_1)b_2(x_2)b_3(x_3)$
- $-\frac{\ddot{b}_1(x_1)}{b_1(x_1)} - \frac{\ddot{b}_2(x_2)}{b_2(x_2)} - \frac{\ddot{b}_3(x_3)}{b_3(x_3)} = \lambda$
- Aufteilen des Problems:  
 $-\frac{\ddot{b}_1(x_1)}{b_1(x_1)} = \lambda_1$   
 $-\frac{\ddot{b}_2(x_2)}{b_2(x_2)} = \lambda_2$   
 $-\frac{\ddot{b}_3(x_3)}{b_3(x_3)} = \lambda_3$
- Lösungsansatz für  $b_1, b_2, b_3$ :  
 $b_j(x_j) = A_j \sin(k_j x_j) + B_j \cos(k_j x_j)$  mit  $k_j = \sqrt{\lambda_j}$
- $\Rightarrow B_j = 0$  und  $k_j L_j = n_j \pi$
- Eigenfunktionen lauten:  
 $b_j(x_j) = A_j \sin(n_j \frac{\pi}{L_j} x_j)$
- Normiere die Eigenfunktionen:  
 $1 \stackrel{!}{=} \int_0^{L_k} b_j(x_j)^2 \, \mathrm{d} x_j$

Die Greenfunktion lautet nun:  
 $G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}} b_{n_1 n_2 n_3}(\vec{r}) \frac{1}{\lambda_{n_1} \lambda_{n_2} \lambda_{n_3}} b_{n_1 n_2 n_3}(\vec{r}')$

**Spiegelladungsmethode**

negierte Ladung gespiegelt an Metallfläche

$$G_{\text{Halb}}(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0^*\|} \right)$$

**3.5. Stationäre Ströme und RWP**

Einflüsse: Drift, Diffusion, Hall-Effekt, Seebeck-Effekt

Drift-Diffusionsmodell:

$$\begin{aligned} \vec{j} = & \sum_{\alpha=1}^N |q_\alpha| n_{\alpha} \mu_\alpha \vec{E} & - \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha D_\alpha \nabla n_\alpha + \\ & \text{Driftstrom} & \text{Diffusionsstrom} \\ & + \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha R_\alpha^H \vec{j}_\alpha \times \vec{B} & - \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha P_\alpha \nabla T \\ & \text{Halleffekt} & \text{Seebeck} \end{aligned}$$

$$- \sum_{\alpha=1}^N \sigma_\alpha P_\alpha \nabla T$$

**4. Kompaktmodelle**

Modellierung als Netzwerk ohne Wellenausbreitung. Voraussetzungen:

**Knoten:** ideal leitend, überall gleiches Potential.

**Zweige:** flusserhaltend, gerichtete Spannung.

**4.1. Kirchoffsche Gesetze**

$$\sum U_i = U_{\text{ind}}$$

$$\sum I_i = -\dot{Q}_K$$

**4.2. Mehrelektroden Kondensatoranordnung**

Finde  $N + 1$  Grundlösungen  $\Phi_i(\vec{r})$  zum V-RWP mit  $\Phi_k|_{\partial \Omega_l} = \delta_{kl}$

Gewichtete Superposition:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{k=0}^N V_k \Phi_k(\vec{r})$$

$$\sum_{l=1}^N \Phi_l = 1$$

$$c_{kl} = \int_{\Omega} \nabla \Phi_k \varepsilon \nabla \Phi_l \, \mathrm{d}^3 r$$

$\underline{C}$  ist symmetrisch, positiv semi-definit, nicht invertierbar.

$$W_{\text{el}} = \sum_{k,l=0}^N \frac{1}{2} V_k C_{kl} V_l = \frac{1}{2} \vec{V}^\top \underline{C} \vec{V}$$

$$\vec{Q} = \underline{C} \vec{V} \qquad \frac{\partial W_{\text{el}}}{\partial V_k} = Q_k \qquad \frac{\partial^2 W_{\text{el}}}{\partial V_k \partial V_l} = C_{kl}$$

Nullraum des Potentials hat die Dimension  $1 \Rightarrow \underline{C}$  ist nicht invertierbar!  
Zeilen- und Spaltensumme ist Null!

Kapazität

$$\vec{Q} = \underline{C} \vec{U}$$
$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \vec{V}^\top \underline{C} \vec{V}$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}^3 r$$

Induktivität

$$\vec{\Phi}_M = \underline{L} \vec{I}$$
$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{I}^\top \underline{L} \vec{I}$$

**5. Komplexe Wechselstromrechnung**

Voraussetzung: lineares, eingeschwungenes System mit sinusförmiger

Erregung  $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$  Effektivwert  $X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$

Reeles Zeitsignal:  $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_x)$

Effektiver Zeiger:  $\mathbf{X} = X_w + \mathrm{i} X_b = X \exp(\mathrm{i} \varphi_x)$

Scheitel Zeiger:  $\hat{\mathbf{X}} = \sqrt{2} \mathbf{X} = \hat{X} \exp(\mathrm{i} \varphi_x)$

Kompl. Zeitsignal:  $\boldsymbol{x}(t) = \hat{\mathbf{X}} \cdot e^{\mathrm{i} \omega t} = \hat{x} \cdot e^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi_x)}$

Phase:  $\varphi_x := \arg \mathbf{X} = \arctan 2 \frac{X_b}{X_w}$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{Z}(j\omega) = & R(j\omega) + jX(j\omega) & \mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \\ \text{Impedanz} & \text{Resistanz} & \text{Reaktanz} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{Y}(j\omega) = & G(j\omega) + jB(j\omega) & \mathbf{I} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{U} \\ \text{Admittanz} & \text{Konduktanz} & \text{Suszeptanz} \end{array}$$

$$\Delta \varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

$$p(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\varphi_u - \varphi_i)}_{P_m = \text{Eff. Leistungsmittel}} - \underbrace{\frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{Schwingung um } P_m}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \mathbf{I}^* = \mathbf{Z} \mathbf{I} \mathbf{I}^*$$

$$P_W = U I \cos(\Delta \varphi)$$

**5.1. Grundlagen Wechselstromlehre**

periodische, sinusförmige Strom- & Spannungsverläufe:

- Transformierbarkeit(Energieübertragung)
- Modularbarkeit (Informations- und Nachrichtentechnik)
- Anpassung an Generatoren und Motoren

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

**6. Elektromagnetische Wellen**

Transportieren Feldenergie mit Lichtgeschwindigkeit.  $\varepsilon \mu c^2 = 1$   
Unendliche Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit ohne Medium.

Wechselwirkung mit der Materie.

Frequenzabhängigkeit von  $\varepsilon(\omega), \mu(\omega), \sigma(\omega)$

Annahmen:  $\rho = 0$  außer bei Antennen, keine thermischer Strom.

**6.1. Beschreibung**

6-Komponentiges, elektromagnetisches Wellenfeld:

$$\left[ \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right] \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla \left( \frac{\rho_0}{\varepsilon} \right) - \mu \dot{\vec{j}}_0 \\ \operatorname{rot} \vec{j}_0 \end{pmatrix}$$

Notwendig, aber nicht hinreichend für Maxwellsche Gleichungen.  
( $\varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = \rho, \operatorname{div} \vec{H} = 0$ )

4-Komponentiges, elektromagnetisches Potential (falls  $\sigma = 0$ ):

$$\left( \Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Harmonische, ebene EM Wellen ( $\sigma = 0$ )

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{01} \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t - \phi_1) \vec{e}_1 + E_{02} \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t - \phi_2) \vec{e}_2$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t - \phi_0)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k}}{\mu \omega} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\omega = c \left\| \vec{k} \right\| \qquad \varepsilon \mu c^2 = 1 \qquad \lambda \left\| \vec{k} \right\| = 2\pi$$

$$\left\| \vec{E} \right\| = Z \left\| \vec{H} \right\| \qquad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\vec{S} = w_{\text{em}} c \vec{n}$$

Ellipsengleichung:

$$\left( \frac{E_1}{E_{01}} \right)^2 + \left( \frac{E_2}{E_{02}} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_1}{E_{02}} \right) \left( \frac{E_1}{E_{02}} \right) \cos(\phi_{02} - \phi_{01}) = \sin^2(\phi_{02} - \phi_{01})$$

Linear:  $\phi_{02} - \phi_{01} = n\pi$   $\frac{E_1}{E_{01}} = \pm \frac{E_2}{E_{02}}$

Kreis:  $\phi_{02} - \phi_{01} = (n + \frac{1}{2})\pi \wedge E_{01} = E_{02}$

$$\left( \frac{E_1}{E_{01}} \right)^2 + \left( \frac{E_2}{E_{02}} \right)^2$$

$$\vec{E}(\mathbf{z}, t) = \vec{e}_x \hat{A} (e^{\mathrm{i}(\omega t - k z)} + \hat{r} e^{\mathrm{i}(\omega t + k z)})$$

$$\vec{e}(\omega) = \varepsilon(\omega) + \mathrm{i} \frac{\sigma(\omega)}{\omega}$$

$$\vec{k}(\omega) = \frac{\beta(\omega)}{\text{Phasenmaß}} + \mathrm{i} \frac{\alpha(\omega)}{\text{Dämpfungsmaß}}$$

**statisch:** Keine Veränderung über die Zeit  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

**stationär:** zeitliche Veränderung, aber keine Wellenausbreitung

**Quasi-Stationär:** Zeitliche Veränderungen sind so langsam, dass sie als statisch angenommen werden  $\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$

**Normalgebiet:** zusammenhängend, beschränkt, mit glattem lipschitstetigem Rand

**Lipschitstetig:** irgendwas zwischen stetig und differenzierbar

$$\mathcal{L}_2(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\omega} |f(\vec{r})|^2 \, \mathrm{d}^3 \vec{r} < \infty \}$$