Analysis 3

1. Nützliches Wissen $\quad e^{\imath x} = \cos(x) + \imath \cdot \sin(x)$

1.1. Sinus, Cosinus $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin x = \frac{1}{2\imath}(e^{\imath x} - e^{-\imath x}) \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{\imath x} + e^{-\imath x})$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{ax\sin(ax)+\cos(ax)}{a^2}$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x\sin(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)-ax\cos(ax)}{a^2}$
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\int \sin^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

$\sin(x \pm y) = \sin x \ \cos y \pm \cos x \ \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \ \cos y \mp \sin x \ \sin y$

Sinus/Cosinus Hyperbolicus

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\imath\sin(\imath x) \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(\imath x) \qquad \cosh x + \sinh x = e^x$

Kardinalsinus $\mathrm{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $\qquad$ genormt: $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

1.2. Integrale $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x = (e^x)'$

Partielle Integration: $\int uw' = uw - \int u'w$

Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\,\underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\int e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = e^{at}\frac{a\sin(bt)-b\cos(bt)}{a^2+b^2} \qquad x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\int \frac{1}{\sqrt{at+b}}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{at+b}}{a} \qquad \int t^2e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{(at-1)^2+1}{a^3}e^{at}$

$\int te^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{at-1}{a^2}e^{at} \qquad \int xe^{ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}e^{ax^2}$

1.3. Exponentialfunktion und Logarithmus $k \in \mathbb{Z}$

$a^x = e^{x\ln a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \ln x \le x - 1$

$\ln(x^a) = a\ln(x) \qquad \ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a \qquad \log(1) = 0$

$e^0 = e^{\imath 2\pi k} = 1 \qquad e^{\imath\pi k} = (-1)^k \qquad e^{\imath\frac{\pi}{2}k} = \imath^k$

1.4. Betrag komplexer Zahlen und komplexe Wurzel

$|\boldsymbol{z}|^2 = \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^* = x^2 + y^2$

$\sqrt[n]{\boldsymbol{z}} = \sqrt[n]{|\boldsymbol{z}|}\exp\left(\frac{\imath\varphi}{n} + k\frac{2\pi\imath}{n}\right)$ mit $k = 0, \dots, n-1$

1.5. Reihen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to \infty$ Harmonische Reihe

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n \overset{|z|<1}{=} \frac{1}{1-z}$ Geometrische Reihe

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = e^z$ Exponentialreihe

2. Fourierreihe $\quad f(x) \sim F(x) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

Voraussetzungen:

1. f ist T-periodisch im Intervall I, meist $I = [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ oder $I = [0, T)$
2. I aufteilbar in Teilintervalle, in denen f stetig und monoton
3. In den endlich viele Unstetigkeitsstellen existieren links- und rechtsseitige Grenzwerte

f ist T-periodisch, falls $f(x+T) = f(x) \Rightarrow$ auch $n \cdot T$ periodisch.

Reelle Fourierreihe:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)$$

$$\text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R}\ (\text{bzw. } \mathbb{C}) : \begin{cases} a_k \\ b_k \end{cases} = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\begin{cases}\cos \\ \sin\end{cases}(k\omega x)\,\mathrm{d}x$$

a_0 immer separat berechnen mit $k = 0$

Komplexe Fourierreihe:

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\exp(\imath k\omega x)$$

$$\text{mit } c_k \in \mathbb{C} : c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp(-\imath k\omega x)\,\mathrm{d}x$$

c_0 immer separat berechnen mit $k = 0$

Konvergenz: $F(x) \sim f(x)$

- f in x **stetig & stückweise stetig differenzierbar** $\Rightarrow F(x) = f(x)$
- f in x **nicht stetig** $\Rightarrow x = a_i$ und $F(x) = \frac{f(a_i^+)+f(a_i^-)}{2}$

2.1. Rechenregeln

Linearität	$\alpha f + \beta g \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha c_k + \beta d_k$
Konjugation	$\overline{f} \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \overline{c_{-k}}$
Zeitumkehr	$f(-t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ c_{-k}$
Streckung	$f(\gamma t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ c_k; \gamma > 0; \tilde{T} = \frac{T}{\gamma} \Leftrightarrow \tilde{\omega} = \gamma\omega$
Verschiebung t	$f(t+a) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{\imath k\omega a}c_k$
Verschiebung ω	$e^{\imath n\omega t}f(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ c_{k-n}$
Ableitung	$\dot{f}(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \imath k\omega c_k$
Ableitung bei Sprungstellen	$\dot{f}(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \imath k\omega c_k - \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N}\Delta_j e^{-k\omega tj}$
Stammfunktion	$\int_0^t f(t) \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \begin{cases}\frac{c_k}{\imath k\omega} & k \neq 0 \\ -\frac{1}{T}\int_0^T tf(t)\,\mathrm{d}t & k = 0\end{cases}$
	$c_{0_{f(t)}} \overset{!}{=} 0$
Faltung	$f * g \ \circ\!\!-\!\!\bullet\ c_kd_k$

2.2. Symmetrien

- f gerade (achsensym.) Funktion: $f(t) = f(-t)$
  $c_k = c_{-k}$
  $b_k = 0 \qquad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,\mathrm{d}x$
- f ungerade (punktsym.) Funktion: $f(t) = -f(-t)$
  $c_k = -c_{-k}$
  $a_k = 0 \qquad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)\,\mathrm{d}x$
- f $\frac{T}{2}$-periodisch: $f(\frac{T}{2} + t) = f(t)$
  $c_{2k+1} = a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$
  $\begin{cases} a_{2k} \\ b_{2k}\end{cases} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(t)\begin{cases}\cos(2k\omega t) \\ \sin(2k\omega t)\end{cases}\mathrm{d}t$
- f ohne $\frac{T}{2}$-periodischen Anteil: $f(\frac{T}{2} + t) = -f(t)$
  $c_{2k} = a_{2k} = b_{2k} = 0$
  $\begin{cases} a_{2k+1} \\ b_{2k+1}\end{cases} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} f(t)\begin{cases}\cos((2k+1)\omega t) \\ \sin((2k+1)\omega t)\end{cases}\mathrm{d}t$

2.3. Umrechnungsformeln

- $a_0 = 2c_0 \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad b_k = \imath(c_k - c_{-k})$
- $c_0 = \frac{a_0}{2} \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - \imath b_k) \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \imath b_k)$

2.4. Umrechnung von T in S periodische Funktionen

f ist T periodisch, $g(x) = f\left(\frac{T}{S}x\right)$, S periodisch, denn $g(x+S) = f\left(\frac{T}{S}(x+S)\right) = f\left(\frac{T}{S}x + T\right) = f\left(\frac{T}{S}x\right) = g(x)$

2.5. LTI-Systeme (c_k sind Fourierkoeffizienten von $x(t)$)

$L[y](t) = a_ny^{(n)}(t) + \dots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) = x(t)$

$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \to s^n \Rightarrow P(s) = a_ns^n \dots + a_1s + a_0$

$h_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_ke^{\imath k\omega t}$ mit $d_k = \frac{1}{P(\imath k\omega)}$

$y(t) = h_T(t) * x(t) = \int_0^T h_T(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum c_kd_ke^{\imath k\omega t}$

2.6. Funktionen

2.6.1. Sägezahnfunktion

$s(t) = \frac{1}{2}(\pi - t), \quad 0 < t < 2\pi, \quad T = 2\pi, \quad \omega = 1$

$c_0 = 0 \qquad c_{k\neq 0} = \frac{1}{2k\imath}$ bzw. $a_0 = 0 \qquad a_k = 0 \qquad b_k = \frac{1}{k}$

$S(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{e^{\imath kt}-e^{-\imath kt}}{2\imath} = \sum_{k\neq 0}\frac{1}{2\imath k}e^{\imath kt}$

2.6.2. Weiterer Sägezahn, Rechteck und Treppenfunktion (2π-periodisch)

$f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = x$	$a_k = 0, b_k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$
$f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{sgn}(x)$	$a_k = 0, b_{2k-1} = \frac{4}{(2k-1)\pi}$
Treppe mit Sprungwert Δ_n an t_n	$c_k = \frac{1}{2k\pi\imath}\sum_{n=0}^{m}\Delta_ne^{\imath kt_n}$

3. Fouriertransformation $\quad f(t) \to F(\omega)$

Voraussetzungen:

1. f stückweise stetig differenzierbar
2. $f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$
3. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ (f absolut integrierbar)

$$f(t) \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-\imath\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$\delta(t-T) \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ e^{-\imath\omega T}$	$1 \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ 2\pi\delta(\omega)$
$\mathrm{u}(t) \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{1}{\imath\omega} + \pi\delta(\omega)$	$t^n \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ 2\pi\imath^n\delta^{(n)}(\omega)$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{1}{(a+\imath\omega)^n}$	$\lvert t^n\rvert \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{2n!}{(\imath\omega)^{n+1}}$
$\lvert t\rvert e^{-\lvert t\rvert} \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}$	$e^{-\lvert t\rvert} \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{2}{1+\omega^2}$

$\cos(at) \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \pi\left(\delta(\omega+a) + \delta(\omega-a)\right)$

$\sin(at) \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \imath\pi\left(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a)\right)$

$\begin{cases} A, & |t-a| \le T \\ 0, & |t-a| > T\end{cases} \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ 2ATe^{-\imath\omega a}\mathrm{si}(\omega T)$

3.1. Die Inverse Fouriertransformation

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(\imath\omega t)\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} f(t) & , f \text{ stetig in } t \\ \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} & , f \text{ unstetig } t\end{cases}$$

+

3.2. Faltung

$$(g * f)(x) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

3.3. Lineare DGLn

$L[y](t) = P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)y(t) = b(t) \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ P(\imath\omega)Y(\omega) = B(\omega)$

$Y(\omega) = \frac{1}{P(\imath\omega)}B(\omega) \qquad \Rightarrow \frac{1}{P(\imath\omega)} = H(\omega) \ \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ h(t)$

$y(t) = h * b(t)$ (Partikuläre Lösung)

3.4. Rechenregeln

Linearität	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$
Konjugation	$\overline{f(t)}$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \overline{F(-\omega)}$
Skalierung	$f(ct)$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{1}{\lvert c\rvert}F(\frac{\omega}{c})$
Verschiebung t	$f(t-a)$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \exp(-\imath\omega a)F(\omega)$
Verschiebung ω	$\exp(\imath\tilde{\omega}t)f(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ F(\omega - \tilde{\omega})$
Ableitung t	$f^{(n)}(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ (\imath\omega)^nF(\omega)$ [FT Bedingung]
Ableitung ω	$t^nf(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \imath^nF^{(n)}(\omega)$
Integration t	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{1}{\imath\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Integration ω	$\frac{1}{t}x(t) + \pi x(0)\delta(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \int_{-\infty}^{\omega} X(\Omega)\,\mathrm{d}\Omega$
Faltung:	$(f * g)(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ F(\omega) \cdot G(\omega)$
Modulation	$f(t) \cdot g(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$

3.5. Symmetrie

$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(\omega)}$
reell	$F(-\omega) = F^*(\omega)$
gerade	gerade
ungerade	ungerade
reell u. gerade	reell u. gerade
reell u. ungerade	imaginär u. ungerade
imaginär u. gerade	imaginär u. gerade
imaginär u. ungerade	reell u. gerade

4. Laplacetransformation $\quad \mathcal{L}\big(f(t)\big) = F(s)$

Voraussetzung: $|f(t)| \le Me^{\sigma t} \quad \forall t > 0; \qquad \sigma = Re(s)$

$$f(t) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ F(s) := \int_0^{\infty} f(t)\exp(-st)\,\mathrm{d}t$$

$1 \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{1}{s}$	$\delta(t-t_0) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ e^{-st_0}$
$t^n \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at} \ \overset{s>a}{\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}}\ \frac{1}{s-a}$
$\sin(at) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{a}{s^2+a^2}$	$\cos(at) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh(at) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{a}{s^2-a^2}$	$\cosh(at) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{s}{s^2-a^2}$
$\frac{\sin(at)}{t} \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{1}{s^n}$
$e^{-at}\sin(bt) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	
$e^{-at}\cos(bt) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	
$\frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b} \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{s}{(s+a)(s+b)}$	

4.1. Die Inverse Laplacetransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\gamma-\imath\infty}^{-\gamma+\imath\infty} F(s)\exp(st)\,\mathrm{d}s$$

4.2. Rechenregeln

Linearität	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \alpha F(s) + \beta G(s)$
Skalierung	$f(ct)$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$
Verschiebung t	$f(t-a)\,\mathrm{u}(t-a)$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ e^{-as}F(s)$
Verschiebung s	$e^{-at}f(t)$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ F(s+a)$
Ableitung t	$f'(t)$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ sF(s) - f(0)$
	$f''(t)$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$f^{(n)} \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0)\dots - f^{(n-1)}(0)$	
Ableitung s	$(-t)^nf(t)$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ F^{(n)}(s)$
Integration t	$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \frac{1}{s}F(s)$
Integration s	$\frac{1}{t}f(t)$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ \int_s^{\infty} F(s')ds'$
Faltung	$(f * g)(t)$	$\overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ F(s) \cdot G(s)$

Faltung: $(f * g)(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

Es gibt eine eineindeutige Korespondens zwischen den Originalfkt und Bildfkt. Meist Nennergrad $>$ Zählergrad: Bruch geschickt umformen!

Laplacetransformierte als Summe nie auf gemeinsamen Nenner bringen!!

4.3. DGL Laplace-Transformierbar

Geg.: $af''(t) + bf'(t) + cf(t) = s(t)$ mit $f(0) = d$ und $f'(0) = e$

Falls gilt $f(t) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ F(s)$ und $s(t) \ \overset{\mathcal{L}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\ S(s)$:

$a\big(s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\big) + b\big(sF(s) - f(0)\big) + cF(s) = S(s)$

Auflösen der Gleichung liefert $F(s) = \frac{S(s)+a(sd+e)+bd}{as^2+bs+c}$

Rücktransformation von $F(s)$ liefert die Lösung $f(t)$

4.4. DGL-System Laplace-Transformierbar

$\dot{x}(t) = ax(t) + by(t) + s_1(t)$

$\dot{y}(t) = cx(t) + dy(t) + s_2(t)$

mit $x(0) = e$ und $y(0) = f$

Falls alle Funktionen LaPlace transformierbar gilt:

$$\begin{bmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(s) \\ S_2(s)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f\end{pmatrix}$$

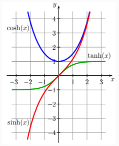
Die Resolvente ist definiert als: $(s\underset{\sim}{\boldsymbol{I}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{A}})^{-1} \ \overset{\mathcal{L}}{\bullet\!\!-\!\!\circ}\ \exp(t\underset{\sim}{\boldsymbol{A}})$

von Lukas Kompatscher und Roberto Gudelj – Mail: lukas.kompatscher@tum.de

5. Funktionentheorie (Komplexe Funktionen)

5.1. Reellifizierung

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{f}(x + \imath y) = u(x, y) + \imath v(x, y)$



Trigonometrische Funktionen

$\sin(\boldsymbol{z}) = \sin(x)\cosh(y) + \imath\cos(x)\sinh(y)$
$\cos(\boldsymbol{z}) = \cos(x)\cosh(y) - \imath\sin(x)\sinh(y)$
$\sinh(\boldsymbol{z}) = \cos(y)\sinh(x) + \imath\sin(y)\cosh(x)$
$\cosh(\boldsymbol{z}) = \cos(y)\cosh(x) + \imath\sin(y)\sinh(x)$

5.2. Holomorphe (analytische, reguläre) Funktionen $\boldsymbol{f}$

Eine Funktion $\boldsymbol{f}$ ist ...

holomorph	falls $\boldsymbol{f}$ in G komplex differenzierbar ist.
ganz	falls $\boldsymbol{f}$ in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.
konform	falls Kurven Winkel- und Orientierungstreu bleiben.

$\boldsymbol{f}$ ist genau dann holomorph, falls $\boldsymbol{f}(x + y\imath) = u(x, y) + \imath v(x, y)$ und
- u, v sind stetig partiell diffbar
- Cauchy-Riemann DGLen sind erfüllt auf Gebiet G:
  $\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y) \qquad \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y)$

Holomorph: $\exp, \sin, \cosh$, Polynome, $\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f}\boldsymbol{g}$, $\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g})$, $\boldsymbol{f}^{(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Mittelwerteigenschaft: Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph so ist der Wert $f(z_0)$ der Mittelwert der Funktionswerte auf dem Rand des Kreises mit dem Mittelpunkt z_0:
$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}(z_0 + re^{it})\,\mathrm{d}t$

5.3. Harmonische Funktionen u, v

u bzw. v sind harmonisch, falls gilt:
$\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 0 \qquad \Delta v = \partial_{xx} v + \partial_{yy} v = 0$

oder falls $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = u + \imath v$ holomorph ist; denn mit Satz von Schwarz:
$\Delta u = \partial_{yx} v - \partial_{xy} v = 0 \qquad \Delta v = -\partial_{yx} u + \partial_{xy} u = 0$

Bestimmen der harmonischen Konjugierten

- Geg: harm. Fkt. $u : G \to \mathbb{R}, (x, y) \to u(x, y)$
- Ges: harm. Fkt. $v : G \to \mathbb{R}, (x, y) \to v(x, y)$ so, dass $f : G \to \mathbb{V}$, $f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$
- $v(x, y) = \int u_x\,\mathrm{d}y$ mit Integrationskonstante $g(x)$
- $v_x = -u_y \Rightarrow g'(x)$
- $g(x) = \int g'(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow v$ bis auf Konstante C bestimmt
- zugehörige holomorphe Fkt. $f(z) = u(x, y) + \imath v(x, y)$

Einzige bijektive, holomorphe, konforme Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ auf sich selbst.
$\boldsymbol{f} : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \frac{a\boldsymbol{z} + b}{c\boldsymbol{z} + d} \qquad ad - bc \neq 0$
$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{w}) = \frac{d\boldsymbol{w} - b}{-c\boldsymbol{w} + a}$

5.4. Komplexes Kurvenintegral

für $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, $\boldsymbol{\gamma} : [t_1, t_2] \to$ stetig diffbar Kurve

Berechnen eines komplexen Kurvenintegrals

- Bestimme Parametrisierung von $\boldsymbol{\gamma}$
  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \ldots + \boldsymbol{\gamma}_2$, $\boldsymbol{\gamma}_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$
- Stelle Integrale auf
  $\int_{\boldsymbol{\gamma}_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \int_{a_i}^{b_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_i(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_i(t)\,\mathrm{d}t$
  Falls $\boldsymbol{f}$ holomorph: $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(b)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(a))$
- Berechne die Integrale und addiere:
  $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{h} \int_{\boldsymbol{\gamma}_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}$

5.5. Cauchy-Integralformel

Ist γ eine geschlossene, doppelpunktfreie und positiv durchlaufene Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt für jedes z_0 im Inneren von γ:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_0) = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}$$

$$\boxed{\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})}{(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \frac{2\pi\imath}{k!}\boldsymbol{f}^{(k)}(\boldsymbol{z}_0)}$$

5.6. Integralsatz von Cauchy

Falls keine Unstetigkeitsstelle innerhalb der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$
$\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{C}$ komplex diffbar auf offenem, einfach zusammenhängendem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. $\boldsymbol{\gamma}$ sei einfach geschlossene Kurve in G (keine Doppelpunkte).
$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = 0$

5.7. Existenz einer Stammfunktion und Wegunabhängigkeit

Ist $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf dem einfach zsh. Gebiet G, so existiert zu $\boldsymbol{f}$ eine Stammfunktion $\boldsymbol{F}$, und es gilt für jede in G verlaufende Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ mit Anfangspunkt $\boldsymbol{\gamma}(a)$ und Endpunkt $\boldsymbol{\gamma}(b)$:

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(b)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(a))$$

5.8. Singularitäten

Isolierte Singularität $\boldsymbol{z}_0 \in G$: $\quad \boldsymbol{f} : G \setminus \{\boldsymbol{z}_0\} \to \mathbb{C}$ (einzelne Punkte, wo f nicht definiert ist)
- Hebbare Singularität, falls f auf punktierter Umgebung beschränkt ist.
- Pol m-ter Ordnung: $(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0)^m \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ ist hebbar in $\boldsymbol{z}_0$
- Wesentliche Singularität: Sonst.

5.9. Taylorreihe und Laurentreihe

Taylorreihe: Falls $\boldsymbol{f}$ holomorph ist.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{f}^{(k)}(\boldsymbol{z}_0)}{k!}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0)^k$$

Laurentreihe: Falls $\boldsymbol{f}$ nicht holomorph ist.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k}_{\text{Nebenteil}}$$

Konvergenz falls Hauptteil und Nebenteil konvergiert.
Konvergenzradien: $R = \lim \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| \in [0, \infty]$
Resiudensatz: $\operatorname{Res}_{z_0} \boldsymbol{f} = c_{-1} = \frac{1}{2\pi\imath}\oint f(z)\,\mathrm{d}z$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{Res}_{\boldsymbol{z}_0} \dfrac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}} = \dfrac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_0)}{\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{z}_0)} & \operatorname{Res}_{\boldsymbol{z}_0} \dfrac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})}{(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0)^m} = \dfrac{\boldsymbol{g}^{(m-1)}(\boldsymbol{z}_0)}{(m-1)!} \\ \operatorname{Res}_{\boldsymbol{z}_0} \boldsymbol{g}\dfrac{\boldsymbol{h}'}{\boldsymbol{h}} = m\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_0) & m : \text{Ordnung der Polstelle} \end{array}}$$

Allgemeiner Residuensatz $f : G \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph
$\forall$ doppelpunktfrei, geschlossene und pos. orientierte Kurven γ mit $z_1, \ldots, z_n$ liegen im Inneren von γ:

$$\oint_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f$$

Bestimmen reeller Integrale mit dem Residuenkalkül

- Reelles Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$
- Bestimme Singularitäten $z_1, \ldots, z_n$ der komplexen Funktion $f(\boldsymbol{z}) = \frac{p(\boldsymbol{z})}{q(\boldsymbol{z})}$ in der oberen Halbebene, $\operatorname{Im}\{z_i\} > 0$
- Bestimme Residuen von $f(z)$ in den Singularitäten $z_1, \ldots, z_n$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f$

Bestimmen reeller trigonometischer Integrale mit dem Residuenkalkül

- Reelles Integral $\int_{-0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$
- Substituiere $\frac{1}{2}(z + 1/z) = \cos t$, $\frac{1}{2\imath}(z - 1/z) = \sin t$, $\frac{1}{\imath z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$
- Erhalte komplexe Fkt. $f(z) = R\left(\frac{1}{2}(z + 1/z), \frac{1}{2\imath}(z - 1/z)\right)\frac{1}{\imath z}$
- Bestimme Singularitäten $z_1, \ldots, z_n$ der komplexen Funktion $f(\boldsymbol{z}) = \frac{p(\boldsymbol{z})}{q(\boldsymbol{z})}$ in des Einheitskreises $|z| < 1$
- Bestimme Residuen von $f(z)$ in den Singularitäten $z_1, \ldots, z_n$
- $\int_{-0}^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_k} f$

5.10. Wichtige Taylorreihen

e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	$\forall z \in \mathbb{C}$
$\ln(z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z - 1)^n$	$0 < z \leq 2$
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$\|z\| < 1$
$\sin z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$	$\forall z \in \mathbb{C}$
$\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$	$\forall z \in \mathbb{C}$
$\sinh z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\forall z \in \mathbb{C}$
$\cosh z$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	$\forall z \in \mathbb{C}$

6. Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

6.1. Lineare pDGLen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Geg.: $au_x + bu_y = f(x, y)$ mit $a \neq 0 \neq b$, ges.: $u = u(x, y)$

Lösen einer linearen pDGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Substitution: $r = r(x, y) = bx + ay$ und $s = s(x, y) = bx - ay$
- $U(r, s) = u(\frac{r+s}{2b}, \frac{r-s}{2a}) = u(x, y)$ und
  $F(r, s) = f(\frac{r+s}{2b}, \frac{r-s}{2a}) = f(x, y)$
- Einsetzen liefert $U_r = \frac{1}{2ab}F(r, s)$
- Lösung U: $\quad U(r, s) = \int \frac{1}{2ab}F(r, s)\,\mathrm{d}r + G(s)$ mit diff'barem $G(s)$
- Rücksubstitution liefert $u(x, y)$
- Anfangsbedingung z.B. $u(x, 0) = g(x)$ legt $G(s)$ fest

6.2. Lineare pDGL 1. Ordnung

Geg.: $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$, ges.: $u = u(x, y)$

Lösen einer linearen homogenen pDGL 1. Ordnung (2 Variablen)

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$ (ist gDGL), alternativ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}$
- Löse gDGL und erhalte $y = y(x) = F(x, c)$
- Löse die Gleichung $y(x) = F(x, c)$ nach $c = c(x, y)$ auf (falls möglich)
- $u(x, y) = f(c(x, y))$ ist für jede stetig diff'bare Fkt. f eine Lösung der pDGL
- f wird durch evtl. gegebene Anfangsbedingung festgelegt

Geg.: $a(x, y, z)u_x + b(x, y, z)u_y + c(x, y, z)u_z = 0$, ges.: $u = u(x, y, z)$

Lösen einer linearen homogenen pDGL 1. Ordnung (3 Variablen)

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x,y,z)}{a(x,y,z)}$ und $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{c(x,y,z)}{a(x,y,z)}$ (ist ein System von gDGL), alternativ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ oder $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$
- Löse das System von gDGLen und erhalte
  $y = y(x) = F(c_1, x)$ und $z = z(x) = G(c_2, x)$
- Löse das System $y(x) = F(c_1, x)$ und $z(x) = G(c_2, x)$ nach $c_1 = c_1(x, y, z)$ und $c_2 = c_2(x, y, z)$ auf (falls möglich)
- $u(x, y, z) = f(c_1(x, y, z), c_2(x, y, z))$ ist für jede stetig diff'bare Fkt. f eine Lösung der pDGL
- f wird durch evtl. gegebene Anfangsbedingung festgelegt

6.3. Quasilineare pDGL 1. Ordnung

Geg.: $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$, ges.: $u = u(x, y)$

Lösen einer quasilinearen pDGL 1. Ordnung

- Betrachte lineare pDGL in drei Variablen x, y, u:
  $a(x, y, u)F_x + b(x, y, u)F_y + c(x, y, u)F_u = 0$
- Löse lineare pDGL mit Ansatz aus 6.2 und erhalte $F = F(x, y, u)$
- Durch $F(x, y, u) = 0$ ist implizit eine Lösung $u = u(x, y)$ gegeben

AWP gegeben $u(p(x), q(x)) = r(x)$, z.B. $u(x, 0) = x$

Lösen einer quasilinearen pDGL 1. Ord. mit dem Charakteristikverfahren

- Ansatz: $v(s) = u(x(s), y(s)) \qquad$ (u hängt nur von einer Variable s ab)
- Ableiten des Ansatzes nach s (Kettenregel): $\quad \dot{v} = u_x\dot{x} + u_y\dot{y}$
- Vergleichen mit pDGL liefert DGL-System:
  $\dot{x} = a(x, y, u) \qquad \dot{y} = b(x, y, u) \qquad \dot{v} = c(x, y, u)$
- Setze $s = 0$ in Ansatz $v(s)$: $\quad v(0) = u(x(0), y(0))$ mit $x = x_0$
- Vergleichen mit AWP der pDGL liefert AWP für DGL-System:
  $x(0) = p(x_0) \qquad y(0) = q(x_0) \qquad v(0) = r(x_0)$
- Löse DGL-System und erhalte $v(s)$
- Bestimme $s = f(x, y)$ und $x_0 = g(x, y)$ und mit Rücksub. $u(x, y)$

7. Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

7.1. Lösungsmethode

Lösen der pDGL mit dem Separationsansatz

- Setze $u(x, y) = f(x)g(y)$ in die pDGL ein und erhalte zwei gDGLen für f und g. (Faktor k nicht vergessen!)
- Löse die zwei gDGLen und erhalte $f = f(x)$ und $g = g(y)$
- Eine Lösung der pDGL ist $u(x, y) = f(x)g(y)$

8. Laplace- und Poissongleichung $\quad -\Delta u = f$

8.1. Laplacegleichung $\quad -\Delta u = 0$

8.1.1. Allgemeine Lösung der Laplacegleichung

$$u(r, \varphi) = \begin{cases} u_n(r, \varphi) = (a_n\cos(n\varphi) + b_n\sin(n\varphi))r^n & \text{für } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ a + b\,\ln(r) & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

für beliebige $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ bzw. $a, b \in \mathbb{R}$.

8.1.2. Dirichlet'sches RWP für einen Kreis

Geg.: $-\Delta u(x, y) = 0$ für $x^2 + y^2 < R^2$ und $u(x, y) = u_0(x, y)$ für $x^2 + y^2 = R^2$

Lösen eines Dirichlet'schen RWP für einen Kreis

- Bestimme die Koeffizienten a_n und b_n der Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $u_0(\varphi) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$
- Erhalte die Lösung $u = u(r, \varphi)$ als Reihendarstellung in Polarkoordinaten:
  $u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\varphi) + b_k\sin(k\varphi))(\frac{r}{R})^k$
- Falls AWP gegeben als $x^2 + y^2 > R^2$, wird r und R vertauscht:
  $u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\varphi) + b_k\sin(k\varphi))(\frac{R}{r})^k$
- Umformen von $u(r, \varphi)$ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ergibt $u(x, y)$

8.1.3. Dirichlet'sches RWP für ein Quadrat

Geg.: $-\Delta u(x, y) = 0$ auf dem Quadrat $D = [0, a]^2$ mit definierten Randwerten $u(x, 0)$, $u(x, a)$, $u(0, y)$ und $u(a, y)$ für $x, y \in [0, a]$

Lösen eines Dirichlet'schen RWP mit dem Separationsansatz

- Ansatz $u(x, y) = f(x)g(y)$ aus 7.1 liefert: $\frac{f''}{f} = k$ und $\frac{g''}{g} = -k$
- Lösen der gDGLen 2. Ordnung liefert:
  $$f(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{k}x} + c_2 e^{-\sqrt{k}x} & \text{für } k > 0 \\ c_1 + c_2 x & \text{für } k = 0 \\ c_1\cos\sqrt{-k}x + c_2\sin\sqrt{-k}x & \text{für } k < 0 \end{cases} \quad \text{und}$$
  $$g(y) = \begin{cases} d_1\cos\sqrt{k}y + d_2\sin\sqrt{k}y & \text{für } k > 0 \\ d_1 + d_2 y & \text{für } k = 0 \\ d_1 e^{\sqrt{-k}y} + d_2 e^{-\sqrt{-k}y} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$
- Vorgegebene Randwerte definieren die Lösung des RWP $u(x, y) = f(x)g(y)$ durch die Konstanten $k, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$

9. Wärmeleitungsgleichung $\quad u_t = c^2\,\Delta u$

$u_t = c^2 u_{xx}$ für $x \in (0, l)$, $t \geq 0$
Geg: $u(x, 0) = g(x)$ und $u(0, t) = u(l, t) = 0$ und Länge l und $c = \text{const} > 0$

Lösen eines Nullrandproblems für einen Stab

- Bestimme Koeffizienten b_n von $g(x)$:
  $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x \qquad$ für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
- Lösung $u(x, t)$ als Reihendarstellung:
  $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\exp\left(-c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right)\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)$$

$u_t = c^2 u_{xx}$ für $x \in (0, l)$, $t \geq 0$
Geg: $u(x, 0) = g(x)$ und $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$

Lösen eines modifizierten Nullrandproblems für einen Stab

- Bestimme Koeffizienten a_n von $g(x)$:
  $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x \qquad$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- Lösung $u(x, t)$ als Reihendarstellung:
  $$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\exp\left(-c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right)\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)$$

10. Wellengleichung $\quad u_{tt} = c^2\,\Delta u$

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$
Geg: l = Länge der Saite und $u(x, 0) = g(x)$, $u_t(x, 0) = v(x)$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$ und $c = \text{const} > 0$

Lösung eines Anfangs-Randwertproblems für eine schwingende Saite

- Bestimme Koeffizienten a_n von $g(x)$ und b_n von $v(x)$:
  $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x \qquad$ für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
  $b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l v(x)\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x \qquad$ für $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$
- Lösung $u(x, t)$ als Reihendarstellung:
  $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left(a_n\cos\left(c\frac{n\pi}{l}t\right) + b_n\sin\left(c\frac{n\pi}{l}t\right)\right)$$