Ingenieursgrundlagenblatt

Allgemeines

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$

Wichtige Zahlen:

$\pi \approx 3,14159$
$e \approx 2,71828$
$\sqrt{2} \approx 1,41421$
$\sqrt{3} \approx 1,73205$

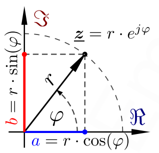
Quantoren:

$\forall x$	für alle x / für jedes x
$\exists_1 x$	(Es) existiert genau ein x
$\exists x$	(Es) existiert mind. ein x
$\nexists x$	(Es) existiert kein x
:	gilt / mit der Eigenschaft

$10^{\pm}$	21	18	15	12	9	6	3	2
+	Z zetta	E exa	P peta	T tera	G giga	M mega	k kilo	h hecto
−	z zepto	a atto	f femto	p pico	n nano	μ micro	m milli	c centi

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

1. Analysis $\quad e^{\alpha + \mathrm{i}\beta} = e^{\alpha} \cdot (\cos(\beta) + \mathrm{i} \cdot \sin(\beta))$



Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:
$z = \Re + \Im \mathrm{i} = a + b\mathrm{i} = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}$
Imaginäre Einheit: $\mathrm{i}^2 = -1 \qquad \mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$
Konjugiert: $\overline{z} = a - b\mathrm{i} \qquad z\overline{z} = a^2 + b^2$
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$
$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$

Dreiecksungleichung: $\quad ||x| - |y|| \le |x \pm y| \le |x| + |y|$
Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $\quad \left|\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y}\right| \le \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$

$a^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \ln x \le x - 1$
$\ln(x^a) = a\ln(x) \qquad \ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a \qquad \log(1) = 0$

1.1 Sinus, Cosinus $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π
φ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$

Stammfunktionen
$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\sin(x)$
$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x)$
$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

1.1.1 Sinus/Cosinus Hyperbolicus $\sinh, \cosh$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x) \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(\mathrm{i}x) \qquad \cosh x + \sinh x = e^x$
Der Graph von $\cosh(x)$ entspricht dem Verlauf eines hängenden Seils
Kardinalsinus $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ $\qquad$ genormt: $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

1.2 Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$ — Harmonische Reihe
$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \overset{|q|<1}{=} \frac{1}{1-q}$ — Geometrische Reihe
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ — Exponentialreihe

1.2.1 Taylorpolynom $T_{m,f,x_0}(x)$ (Reihe für $m \to \infty$)

$$\boxed{T(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i}$$

Konvergenzradius $a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$
$R = \lim_{i \to \infty} \left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right|$

1.3 Integrale $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x = (e^x)'$

Partielle Integration: $\int uw' = uw - \int u'w$
Substitution: $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\int e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = e^{at}\frac{a\sin(bt) + b\cos(bt)}{a^2+b^2}$
$\int xe^{ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}e^{ax^2} \qquad \int t^2 e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3}e^{at}$

1.3.1 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern um x-Achse

$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \qquad O = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$

1.3.2 Weg- und Oberflächenintegrale

$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \left\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\right\|\,\mathrm{d}t \qquad \int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} := \int_a^b \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma}(t))^\top \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t$

$$\boxed{\iint_{\boldsymbol{\phi}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{O} := \iint_B \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{\phi}(u,w)\big)^\top \cdot \left(\boldsymbol{\phi}_u \times \boldsymbol{\phi}_w\right)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w}$$

Integralsatz von Gauß:
$$\boxed{\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}}$$

Integralsatz von Stokes:
$$\boxed{\iint_A \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}A = \oint_{\partial A} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}}$$

1.4 Abbildungen $f: \mathbb{D}^n \to \mathbb{W}^m, \ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Bild $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$ $\qquad$ **Kern** $\ker f := \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$
Komposition $f \circ g := f(g(x))$ $\qquad$ **Fixpunkt** $a := f(a)$
Injektiv $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Surjektiv $\quad \forall y \in W \exists x \in D: f(x) = y$
} beides: **Bijektiv**

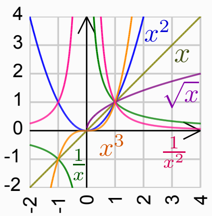
1.5 Funktionen $f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}, \ x \mapsto f(x)$

Achsensym.(g): $f(-x) = f(x)$ $\qquad$ **Punktsym.**(u): $f(-x) = -f(x)$
$g_1 \pm g_2 = g_3 \qquad u_1 \pm u_2 = u_3 \qquad$ gerade/ungerade Fkt. g/u
$g_1 \cdot g_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot u_2 = g_3 \qquad u_1 \cdot g_1 = u_3$

1.5.1 Asymptoten von f

Horizontal: $c = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \qquad$ Vertikal: $\exists$ Nullst. a des Nenners
Polynomasymptote $P(x)$: $f(x) := \frac{A(x)}{Q(x)} = P(x) + \left(\frac{B(x)}{Q(x)} \to 0\right)$
Regel von L'Hospital: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \to \left[\frac{0}{0}\right] / \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

1.6 Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ vom Grad n



Gerade durch Punkt $P(x_0, y_0)$:
$y = m(x - x_0) + y_0$

Quadratisch: $y = ax^2 + bx + c$
Mitternachtsformel für Nullstellen:
$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

1.7 Lineare Abbildungen (Homomorphismus)

$\boldsymbol{f}: V \to U$ heißt linear, falls $\boldsymbol{f}(\lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{w}) = \lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) + \mu\boldsymbol{f}(\boldsymbol{w})$
lin. Abbildung $\Leftrightarrow$ lin. Gleichungssystem $\Leftrightarrow$ Matrix: $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = {}_U\boldsymbol{F}_V \cdot \boldsymbol{x}$

$$\boxed{\begin{aligned}\dim V &= \dim(\ker \boldsymbol{f}) + \dim(\mathrm{Bild}\,\boldsymbol{f})\\ \mathrm{rg}\,\boldsymbol{f} &= \dim(\mathrm{Bild}\,\boldsymbol{f}) = \dim(U) - \dim(\ker \boldsymbol{f})\end{aligned}}$$

1.8 Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$

Die Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat m Zeilen $\boldsymbol{z}_i^\top$ und n Spalten $\boldsymbol{s}_j$
$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{B}^\top \cdot \boldsymbol{A}^\top \qquad (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
$(\boldsymbol{A}|\mathbb{1}) \xrightarrow{\text{EZF}} (\mathbb{1}|\boldsymbol{A}^{-1}) \qquad$ EZF/ESF ($\lambda \neq 0$): $\boldsymbol{z}_1' = \lambda_1\boldsymbol{z}_1 + \lambda_2\boldsymbol{z}_2$

1.8.1 Spezialfall 2×2 Matrix A

$\det(\boldsymbol{A}) = ad - bc$
$\mathrm{Sp}(\boldsymbol{A}) = a + d$
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

1.8.2 Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\underline{v}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\underline{v} = \lambda\underline{v} \qquad \det\boldsymbol{A} = \prod\lambda_i \qquad \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{A} = \sum\lambda_i}$$

Eigenwerte: $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbb{1}) = 0$, Det-Entwickl., Polynom-Div.

1.9 Vektorräume V über $\mathbb{K}^n$

Basis $\underline{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots\}$: n Vektoren, linear unabhängig, erzeugen V
Lineare Unabhängigkeit: $\forall\underline{v}_i \nexists\lambda_i \neq 0: \sum\lambda_i\underline{v}_i = \underline{0}$
Linearkomb.: $\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$ $\qquad$ **Skalarprodukt:** $\underline{v}^\top \cdot \underline{w} = \sum v_i w_i$

Kreuzprodukt($\mathbb{R}^3$): $\underline{v} \times \underline{w} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$

1.10 Differentialoperatoren $\qquad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}) \equiv 0$

Gradient grad f
$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}$

Rotation rot $\boldsymbol{f}$
$\nabla \times \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}$

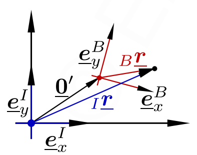
Divergenz div $\boldsymbol{f}$
$\nabla^\top \cdot \boldsymbol{f} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

Laplace $\Delta f = \mathrm{Sp}\,\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x})$
$\underset{\nabla^\top \cdot (\nabla f)}{\nabla^2 f} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i x_i}$

Ableitungs-/Gradientenregeln: SF f, g sind partiell diffbar:
Linearität: $\quad \nabla(\lambda f + \mu g)(\boldsymbol{x}) = \lambda\nabla f(\boldsymbol{x}) + \mu\nabla g(\boldsymbol{x})$
Produkt: $\quad \nabla(f \cdot g)(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\nabla f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x})$
Quotient: $\quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{g^2(\boldsymbol{x})}\left(g(\boldsymbol{x})\nabla f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x})\right)$
Kettenregeln:
$h := g(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ für SF f, Fkt. g $\qquad h := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(x))$ für SF f, Kurve g
$\boxed{\nabla h(\boldsymbol{x}) = g'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \cdot \nabla f(\boldsymbol{x})} \qquad \boxed{h'(x) = \nabla f(\boldsymbol{g}(x))^\top \cdot \dot{\boldsymbol{g}}(x)}$

Jacobimat. $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{bmatrix}$
Hessematrix $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f & \cdots & \partial_{1n} f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f & \cdots & \partial_{nn} f \end{bmatrix}$
sym $\Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^2$

1.11 Koordinatensysteme $\qquad 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta \le \pi$



Vektor $\underline{r}$ zur Basis B:
${}_B\underline{r} = r_x\underline{e}_x^B + r_y\underline{e}_y^B + r_z\underline{e}_z^B$
$\underline{e}_i^B \quad$ Basisvektor von B in i-Richtung
$r_i \quad$ Koordinate in i-Richtung
$r_i\underline{e}_i^B \quad$ i-Komponente bezüglich B
$I \quad$ Basis des Inertialsystems I

Um einen karthesischen Vektor mit anderen Koordinaten darzustellen:

Zylinderkoordinaten:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$

Kugelkoordinaten:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r \cdot \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Basistransformation von Basis A zur Basis B mit Trafo-Matrix ${}_B\boldsymbol{T}_A$:
$\boxed{{}_B\underline{v} = {}_B\boldsymbol{T}_A \cdot {}_A\underline{v}}$ $\quad$ Spalten von ${}_B\boldsymbol{T}_A$ entsprechen Basisvektoren von A in B dargestellt.

Basis-Trafo-Matrizen ${}_Z\boldsymbol{T}_{kart}$ für Zylinder- und Kugelkoordinaten:
$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) & \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \end{bmatrix}$
Die Spalten entsprechen den orthonorm. Basisvektoren. $\Rightarrow \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^\top$

1.12 Differentialgleichungen DGL

Gleichungen mit Funktion y und deren n-ten Ableitungen $y', y'', \ldots$
Anfangswertproblem AWP = DGL + Anfangsbedingung:
$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = s(t) \qquad y(0) = d, y'(0) = e$

Jede DGL lässt sich als DGL System erster Ordnung darstellen!
1. Substituiere $x_i := y^{(i-1)}$ $\qquad$ 2. Drücke $\dot{x}_i$ durch $x_1, \ldots, x_n$ aus.
$\Rightarrow \boxed{\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{s}(t)}$ $\quad$ mit $\underline{x}_{ges} = \underline{x}_{hom} + \underline{x}_{part}$
Hom. Lösung: 1. Bestimme EW λ_i und Basis aus EV $\underline{b}_i$ von $\underline{A}$
2. $\underline{x}_{hom} = \underline{c} \cdot e^{(x - x_0)\underline{A}} = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot e^{\lambda_i x} \cdot \underline{b}_i$

2. Stochastik

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ besteht aus
Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ $\qquad$ Ergebnis $\omega_j \in \Omega$
Ereignisalgebra $\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ $\qquad$ Ereignis $A_i \subseteq \Omega$
Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathrm{P}: \mathbb{F} \to [0,1]$, $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$
Es gilt: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:
$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$
Multiplikationssatz: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)$

Erwartungswert $\mathrm{E}[X] = \mu = \sum x_i P(x_i) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$

Varianz $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$
Standard Abweichung $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$
Covarianz $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{Cov}[Y,X]$

Binominialverteilung (diskret, n Versuche, k Treffer):
$P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \mu = np \qquad \sigma^2 = np(1-p)$

2.1 Kombinatorik

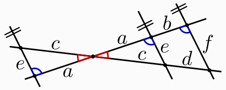
Mögliche Variationen/Kombinationen um k Elemente von maximal n Elementen zu wählen bzw. k Elemente auf n Felder zu verteilen:

	Mit Reihenfolge	Reihenfolge egal
Mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Permutation von n mit jeweils k gleichen Elementen: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$
Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

3. Geometrie $a^2 + b^2 = c^2$

Strahlensatz:

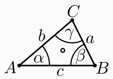


$a : b = c : d \qquad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$

Innenwinkelsumme im n-Eck: $(n-2) \cdot 180°$

Allg. Dreieck $\triangle ABC$ mit Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ:

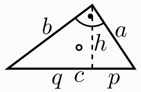


Kosinussatz:	$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\gamma)$
Sinussatz:	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$
Projektionssatz:	$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$

Höhe $h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha$ Fläche $A = \frac{1}{2}h_c c = \frac{1}{2}h_a a$

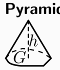
Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \quad y_S = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

Rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\gamma = 90°$ bei C



Pythagoras:	$a^2 + b^2 = c^2$
Höhensatz:	$h^2 = pq$
Kathetensatz:	$a^2 = pc$
	$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\tan\alpha$

Pyramide mit beliebiger Grundfläche G



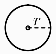
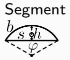
$V = \frac{1}{3}G \cdot h$

SP: liegt auf h mit $y_S = h/4$

Zylinder/Prisma

$V = G \cdot h$

$M = U \cdot h$

	Kreis (2D)	Kugel (3D)
	$A = \pi r^2$ $U = 2\pi r$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $O = 4\pi r^2$
Sektor 	$A = \pi r^2 \frac{\varphi}{360°}$ $b = 2\pi r \frac{\varphi}{360°}$ $y_S = \frac{4r\sin(\varphi/2)}{3\varphi}$	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ $O = r\pi(2h + \varrho)$ $y_S = \frac{6r-3h}{8}$
Segment 	$A = \frac{1}{2}r^2(\varphi - \sin\varphi)$ $s = 2r\sin(\varphi/2)$ $h = r - r\cos(\varphi/2)$ $y_S = \frac{4}{3}\frac{r\sin^3(\varphi/2)}{\varphi - \sin(\varphi)}$	$V = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h)$ $O = 4\pi r h - h^2\pi$ $h = r - r\cos(\varphi/2)$ $y_S = \frac{3}{4}\frac{(2r-h)^2}{(3r-h)}$

4. Physik $E_0 = m_0 \cdot c^2 \qquad E_0^2 = E^2 - c^2p^2$

Δ : endl. Differenz, δ : unendlich kleine Differenz, d : Differential

Strecke $\vec{x}, \vec{s}$, Fläche A, Volumen V, Radius r, Zeit t, $\mathrm{J} \cdot e = \mathrm{eV}$

Naturkonstanten

Lichtgeschwindigkeit	$c_0 = 299\,792\,458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
Elementarladung	$e = 1.602\,177 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
PLANCK-Konst.	$h = 6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
Elektr. Feldkonst.	$\varepsilon_0 = 8.854\,188 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$
Magn. Feldkonst.	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$
AVOGADRO-Konst.	$N_A = 6.022\,141 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Atomare Masse	$\mathrm{u} = 1.660\,539 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Elektronenmasse	$m_e = 9.109\,383 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Protonenmasse	$m_p = 1.674\,927 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Neutronenmasse	$m_n = 1.672\,622 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Gravitationskonst.	$G = 6.673\,84 \times 10^{-11}\ \mathrm{kg\,s^{-2}}$
BOLTZMANN-Konst.	$k = 1.380\,655 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$

Größe	Definition	Einheit	SI-Notation
Frequenz	$f = \frac{c}{\lambda}$	Hertz	$\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$
Kraft	$\vec{F} := m \cdot \vec{a}$	Newton	$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s^2}}$
Druck	$p := \frac{F_\perp}{A}$	Pascal	$\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s^2}}$
Arbeit, Energie	$W := \int \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}$	Joule	$\mathrm{J} = \mathrm{N\,m} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$
Leistung	$P := \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$	Watt	$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}}$
Spannung	$U := \frac{W}{Q}$	Volt	$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A\,s^3}}$
Ladung	$Q := \int I\,\mathrm{d}t$	Coulomb	$\mathrm{C} = \mathrm{A\,s}$
Resistivität	$R := \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I}$	Ohm	$\Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A^2\,s^3}}$
Kapazität	$C := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}U}$	Farad	$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{A^2\,s^4}}{\mathrm{kg\,m^2}}$
Induktivität	$L := \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I}$	Henry	$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A^2\,s^2}}$
Magnetischer Fluss	$\Phi_M := \int \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}$	Weber	$\mathrm{Wb} = \mathrm{V\,s} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A\,s^2}}$
Magnetische Flussdichte	$\vec{B} := \mu_0 \vec{H}$	Tesla	$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A\,s^2}}$

1 in = 2.54 cm	1 ft = 30.5 cm	1 mi = 1.609 km
1 bar = 10^5 Pa	1 Å = 10^{-10} m	1 L = $10^{-3}\ \mathrm{m^3}$
$\mathrm{J} \cdot e = \mathrm{eV}$		

4.1 Mechanik $\vec{F} = m\vec{a}$

	Translation	Rotation (Radius r)
Strecke/Winkel	$\vec{x}$	$\vec{\varphi} = \frac{\vec{x}}{r}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{x}}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}} = \frac{\vec{v}}{r}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}$	$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}} = \frac{\vec{a}}{r}$
Masse/Trägh.	m	$\Theta = \int_V \vec{r}_\perp^2\,\mathrm{d}m$
Impuls/Drall	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = \mathbf{\Theta}\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p}$
Kraft/Moment	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\vec{a}$	$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \mathbf{\Theta}\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{F}$
Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$
Leistung	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Bewegungsgleichungen:

$v = v_0 + at$
$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$
$2ax = v^2 - v_0^2$

$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$
$2\alpha\varphi = \omega^2 - \omega_0^2$

$F_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \approx \vec{g}m \qquad F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}$

$F_Z = -m\frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r \qquad F_R = \mu F_N \qquad F_H \le \mu_0 F_N$

Energie: $E = \int \vec{F}^\top \cdot \mathrm{d}\vec{s} \qquad E_{pot} = mgh = \frac{1}{2}kx^2$

4.2 Relativitätstheorie $E_0 = m_0 c^2$

$\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad E = E_0 + E_{kin} = m^* c^2 \qquad m^* = \gamma \cdot m_0$

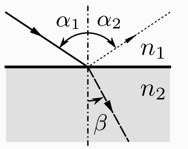
$E_0^2 = E^2 - c^2p^2 \qquad t_0 = \gamma \cdot t^*$

4.3 Wellen $\Psi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \Delta\Psi = \Box\Psi = 0 \qquad c = \lambda f = \frac{\omega}{k} \qquad k\lambda = 2\pi$

$\omega = 2\pi f \qquad 2l = n\lambda$ stehend

4.4 Optik $n_1 < n_2 \qquad n^2 = \varepsilon_r\mu_r$



Reflexion: $\underset{\text{Einfallwinkel}}{\alpha_1} = \underset{\text{Ausfallwinkel}}{-\alpha_2}$

Brechung: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

Brewster-Winkel: $\tan(\alpha_B) = \frac{n_2}{n_1}$

Grenzwinkel: $\sin(\alpha_G) = \frac{n_2}{n_1}$

Phasensprung um π bei (Total-)Reflexion am optisch dichteren Medium!

4.5 Elektrizität und Magnetismus

$U = \dot{\Phi}_M \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

$I = \dot{Q} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Resistiv	Kapazitiv	Induktiv
$\mathrm{d}I = G\,\mathrm{d}U$	$\mathrm{d}Q = C\,\mathrm{d}U$	$\mathrm{d}\Phi_M = L\,\mathrm{d}I$
$\vec{j} = \sigma\vec{E}$	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
$\mathrm{d}I = \vec{j}\,\mathrm{d}A$	$\mathrm{d}U = \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}$	$\mathrm{d}\Phi_M = \vec{B}\,\mathrm{d}A$
$\vec{j} = qn\vec{v}$	$Q(V) \equiv \oiint_{\partial V} \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A}$	$I(A) \equiv \oint_{\partial A} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r}$

Widerst. $R = \rho\frac{l}{A}$ — Kondensator $C = \varepsilon\frac{A}{d}$ — Spule $L = \mu A\frac{N^2}{l}$

El. Potential $\Phi_{el}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{\mathbb{R}^3}\rho(\vec{x})\frac{\vec{x}-\vec{r}}{\|\vec{x}-\vec{r}\|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{\|\vec{r}\|}$

$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = \int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\,\mathrm{d}r \qquad$ Poisson: $\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$

El. magn. Kraft: $\vec{F}_{em} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$

4.6 Komplexe Wechselstromrechnung

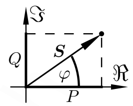
Vorraussetzung: lineares, eingeschwungenes System mit sinusförmiger Erregung $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ Effektivwert $X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$

Effektiver Zeiger: $\vec{X} = X_w + \mathrm{j}X_b = X\exp(\mathrm{j}\varphi_x)$

Reeles Zeitsignal: $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi_x)$

	Widerstand	Kondensator	Spule	Memristor
$Z =$	R	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$	$\mathrm{j}\omega L$	M
$Y =$	$G = \frac{1}{R}$	$\mathrm{j}\omega C$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}$	$\frac{1}{M}$

Wirkleistung	$P = \Re(\vec{S}) = UI \cdot \cos(\varphi)$	[W]
Blindleistung	$Q = \Im(\vec{S}) = UI \cdot \sin(\varphi)$	[Var]
Scheinleistung	$\vec{S} = P + \mathrm{j}Q = \vec{U} \cdot \vec{I}^*$	[VA]



4.7 Thermodynamik

$\underset{\text{innere Energie}}{\mathrm{d}U} = \underset{\text{Wärmeenergie}}{\delta Q} + \underset{\text{Volumenarbeit}}{\delta W} \qquad Q = C \cdot \Delta T \qquad C = c \cdot m = c_m \cdot n$

Thermische Energie eines Teilchens mit f Freiheitsgraden:

$E_{th} = \frac{f}{2}kT$

Thermische Rauschenergie bei 300K: $\Delta E_{th} = kT = 25.85$ meV

Zustandsgleichung ideales Gas: $pV = nT \cdot N_A k$

4.8 Quantenphysik $E_{Ph} = f \cdot h = \omega \cdot \hbar = \frac{hc}{\lambda}$

De Broglie: $\lambda \cdot \vec{p} = h \qquad p = \hbar k \qquad h = 2\pi\hbar \qquad k\lambda = 2\pi$

Unschärferelationen: $\Delta x \cdot \Delta p_x \ge \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta E \cdot \Delta t \ge \frac{\hbar}{2}$

Lichtspektrum: λ : 700, 600, 570, 520, 460 in nm

4.9 Kernphysik

Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda t) \qquad T_{1/2} \cdot \lambda = \ln(2)$

α−Zerfall $\quad {}^{m}_{n}\mathrm{X}^0 \longrightarrow {}^{m-4}_{n-2}\mathrm{Y}^{2-} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}$

$\beta^{\mp}$−Zerfall $\quad {}^{m}_{n}\mathrm{X}^0 \longrightarrow {}^{m}_{n\pm1}\mathrm{Y}^{\pm} + {}^{0}_{\mp1}e^{\mp} + {}^{0}_{0}\overline{\nu}_e$

γ−Zerfall $\quad {}^{m}_{n}\mathrm{X}^* \longrightarrow {}^{m}_{n}\mathrm{X} + {}^{0}_{0}\gamma$

5. Informatik 8 bit = 1 Byte

Komplexität mit Landausymbol $\mathcal{O}(g(n))$

Schrankenfunktionen: $1 < \log_{10}(n) < \ln(n) < \log_2(n) < \sqrt{n} < n < n \cdot \ln(n) < (\log n)! < n^2 < e^n < n! < n^n < 2^{2^n}$

Datentypen: boolean, char, word, int, long, float, double

Datenstrukturen: Array, List, Stack, Queue, Tree, Hashtable

Moores Gesetz (1965): Die Anzahl der Bauelemente pro Computerchip verdoppelt sich etwa alle 18 Monate.

6. Elektrotechnik $u = R \cdot i$

Serienschaltung		Parallelschaltung	
$u = \sum u_i$ $q = \mathrm{const.}$	$i = \mathrm{const.}$ $\Phi = \sum \Phi_i$	$u = \mathrm{const.}$ $q = \sum q_i$	$i = \sum i_i$ $\Phi = \mathrm{const.}$
$R = \sum R_i$ $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}$	$M = \sum M_i$ $L = \sum L_i$	$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$ $C = \sum C_i$	$\frac{1}{M} = \sum \frac{1}{M_i}$ $\frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_i}$
$\boldsymbol{Z} = \sum \boldsymbol{Z}_i$	$\frac{1}{\boldsymbol{Y}} = \sum \frac{1}{\boldsymbol{Y}_i}$	$\frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \sum \frac{1}{\boldsymbol{Z}_i}$	$\boldsymbol{Y} = \sum \boldsymbol{Y}_i$

6.1 Halbleiter $np = n_i^2 \qquad \sigma = q(\mu_n n + \mu_p p)$

	Isolator	Metall	undotiert	n-Typ	p-Typ
Ladungsträger	Keine	e^-	e^-/e^+	e^-	e^+
Leitfäh.	Keine	hoch	schlecht	Hoch	Mittel
Temp. Abh.	k.A.	$\propto \frac{1}{T}$	$\propto T$	$\propto T$	$\propto T$

HauptQZ $n = 0, 1, \ldots$
NebenQZ $l = 0, \ldots, n-1$
Magn. QZ: $m = -l, \ldots, l$
Spin: s

Elektronegativität: <,∨
Dichte ∧,<

Rel. Masse
O El α
Name des Elements

O: Ordnungszahl
α: Strahlungsart

n=	s1	s2	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	p1	p2	p3	p4	p5	p6
1	1,00794 1 H Wasserstoff																	4,00260 2 He Helium
2	6,941 3 Li Lithium	9,01218 4 Be Berylium											10,811 5 B Bor	12,0107 6 C Kohlenstoff	14,0067 7 N Stickstoff	15,9994 8 O Sauerstoff	18,9984 9 F Fluor	20,180 10 Ne Neon
3	22,9898 11 Na Natrium	24,305 12 Mg Magnesium											26,9815 13 Al Aluminium	28,0855 14 Si Silicium	30,9738 15 P Phosphor	32,065 16 S Schwefel	35,453 17 Cl Chlor	39,948 18 Ar Argon
4	39,0983 19 K Kalium	40,078 20 Ca Calcium	44,9551 21 Sc Scandium	47,867 22 Ti Titan	50,9415 23 V Vanadium	51,9961 24 Cr Chrom	54,9380 25 Mn Mangan	55,845 26 Fe Eisen	58,9332 27 Co Cobalt	58,6934 28 Ni Nickel	63,546 29 Cu Kupfer	65,409 30 Zn Zink	69,723 31 Ga Gallium	72,61 32 Ge Germanium	74,9216 33 As Arsen	78,96 34 Se Selen	79,904 35 Br Brom	83,798 30 Kr Krypton
5	85,4678 37 Rb Rubidium	87,62 38 Sr Strontium	88,9059 39 Y Yttrium	91,224 40 Zr Zirkonium	92,9064 41 Nb Niob	95,94 42 Mo Molybdän	98 4,2Ma 43 Tc β Technetium	101,07 44 Ru Ruthenium	102,906 45 Rh Rhodium	106,42 46 Pd Palladium	107,868 47 Ag Silber	112,411 48 Cd Cadmium	114,818 49 In Indium	118,710 50 Sn Zinn	121,750 51 Sb Antimon	127,60 52 Te Tellur	126,904 53 I Iod	131,293 54 Xe Xenon
6	132,905 55 Cs Caesium	137,327 56 Ba Barium	174,967 71 Lu Lutetium	178,49 72 Hf Hafnium	180,948 73 Ta Tantal	183,84 74 W Wolfram	186,207 75 Re Rhenium	190,23 76 Os Osmium	192,217 77 Ir Iridium	195,084 78 Pt Platin	196,967 79 Au Gold	200,59 80 Hg Quecksilber	204,383 81 Ti Titan	207,2 82 Pb Blei	208,980 83 Bi Bismut	209,98 84 Po Polonium	209,987 85 At Astat	222 3,8d 86 Rn α Radon
7	223 22m 87 Fr α Francium	226 1,6ka 88 Ra α Radium	262 103 La Lawrencium	263 104 Rf Rutherford	262 105 Db Dubium	266 106 Sg Seaborg	264 107 Bh Bohrium	269 108 Hs Hassium	268 109 Mt Meitnerium	271 110 Dt Darmstadt	272 111 Rg Roentgen	277 112 Cn Copernic						