第5章　再帰法と帰納法

胡　振江

自然数の上の再帰法

- **べき乗の再帰的な定義**

```
x^0 = 1                <^.1>
x^(n+1) = x * x^n      <^.2>
```

Base

Recursion

- Fibonacci**の再帰的な定義**

```
fib 0 = 0                      <fib.1>
fib 1 = 1                      <fib.2>
fib (n+2) = fib n + fib (n+1)  <fib.3>
```

自然数の上の帰納法による証明

命題p(n)**が任意の自然数**n**について成立**

⇧

- P(0)**が成立**
- P(1)**が成立**
- P(n),p(n-1)**が成立**➔P(n+1)**が成立**

x^(m+n) = (x^m)*(x^n)

- m**について帰納法で証明する。**
  - 0**の場合**

```
x^(0+n) = x^n          <^.1>
        = 1 * x^n      <*の法則>
        = x^0 * x^m    <^.1>
```

  - m+1**の場合**

```
x^((m+1)+n)
  = x^((m+n)+1)        <+の法則>
  = x * x^(m+n)        <^.2>
  = x * x^m * x^n      <仮定>
  = x^(m+1) * x^n      <^.2>
```

リストの上の再帰法

- **リストの長さを求める関数**

```
length [] = 0                    base
length (x:xs) = 1 + length xs    recursion
```

- **リストの連接**

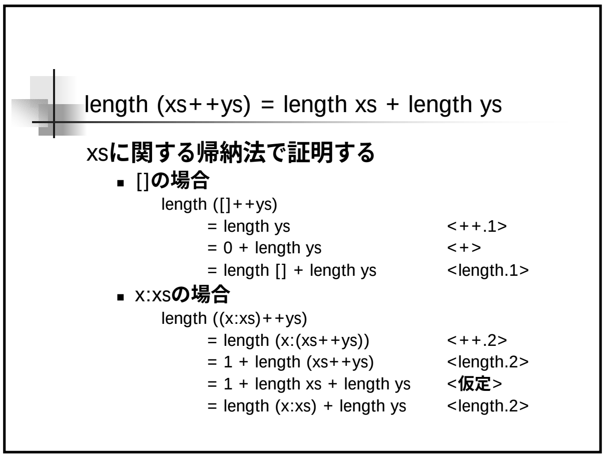
```
[] ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs++ys)
```

帰納法による証明

任意の有限リストxs**について**P(xs)**が成立**

⇧

- P[] **が成立**
- P[x]**が成立**
- P(xs)**が成立**➔P(x:xs)**が成立**



length (xs++ys) = length xs + length ys

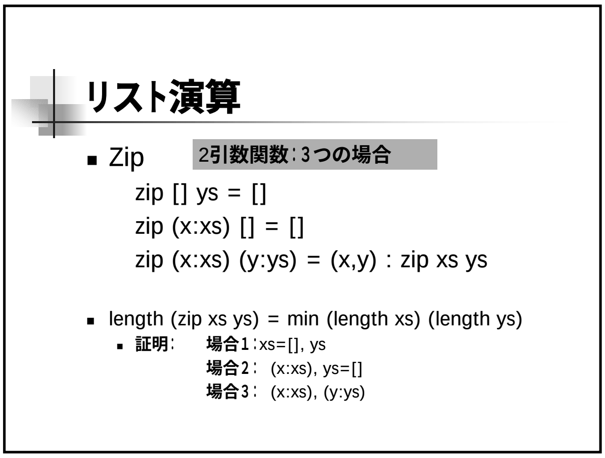
xsに関する帰納法で証明する

- []の場合

```
length ([]++ys)
      = length ys                  <++.1>
      = 0 + length ys              <+>
      = length [] + length ys      <length.1>
```

- x:xsの場合

```
length ((x:xs)++ys)
      = length (x:(xs++ys))        <++.2>
      = 1 + length (xs++ys)        <length.2>
      = 1 + length xs + length ys  <仮定>
      = length (x:xs) + length ys  <length.2>
```

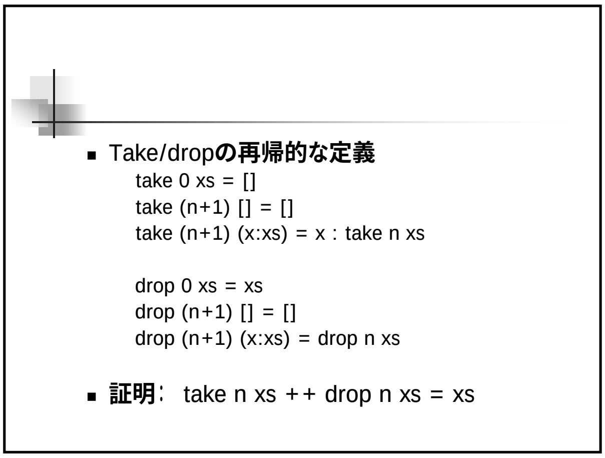


リスト演算

- Zip　2引数関数：3つの場合

```
zip [] ys = []
zip (x:xs) [] = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
```

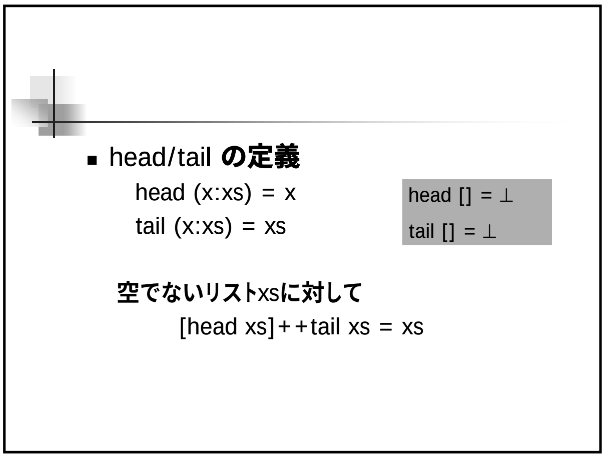
- length (zip xs ys) = min (length xs) (length ys)
  - 証明：　場合1：xs=[], ys
    場合2：　(x:xs), ys=[]
    場合3：　(x:xs), (y:ys)



- Take/dropの再帰的な定義

```
take 0 xs = []
take (n+1) [] = []
take (n+1) (x:xs) = x : take n xs

drop 0 xs = xs
drop (n+1) [] = []
drop (n+1) (x:xs) = drop n xs
```

- 証明：　take n xs ++ drop n xs = xs



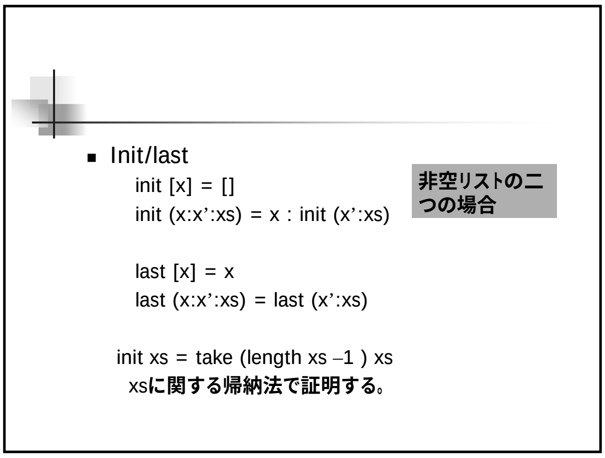
- head/tail の定義

```
head (x:xs) = x
tail (x:xs) = xs
```

head [] = ⊥
tail [] = ⊥

空でないリストxsに対して

[head xs]++tail xs = xs

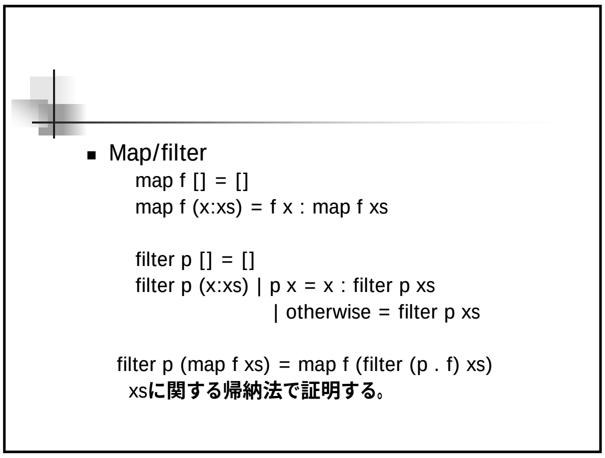


- Init/last

```
init [x] = []
init (x:x’:xs) = x : init (x’:xs)

last [x] = x
last (x:x’:xs) = last (x’:xs)
```

非空リストの二つの場合

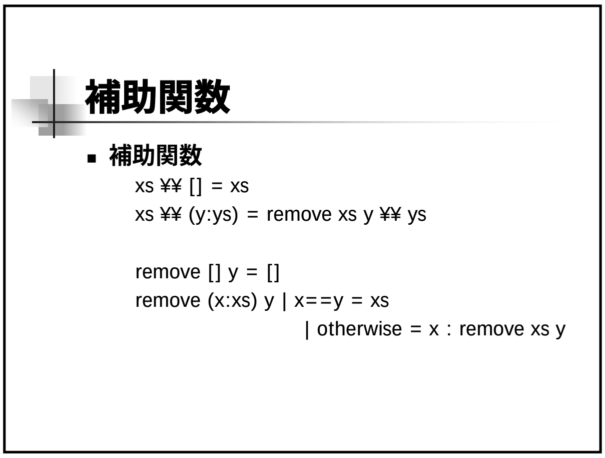
init xs = take (length xs –1) xs
xsに関する帰納法で証明する。



- Map/filter

```
map f [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs

filter p [] = []
filter p (x:xs) | p x = x : filter p xs
                | otherwise = filter p xs
```

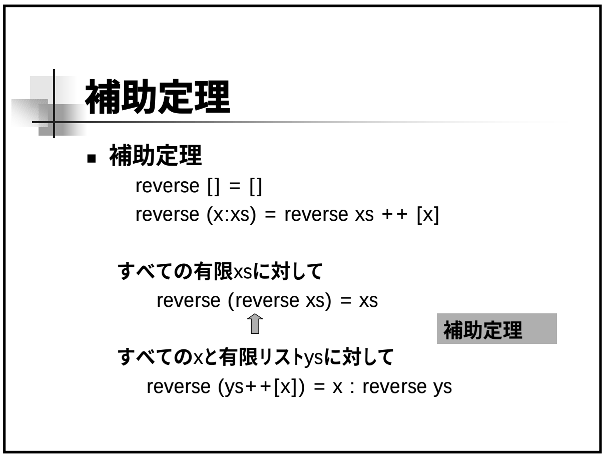
filter p (map f xs) = map f (filter (p . f) xs)
xsに関する帰納法で証明する。



補助関数

- 補助関数

```
xs ¥¥ [] = xs
xs ¥¥ (y:ys) = remove xs y ¥¥ ys

remove [] y = []
remove (x:xs) y | x==y = xs
                | otherwise = x : remove xs y
```



補助定理

- 補助定理

```
reverse [] = []
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

すべての有限xsに対して

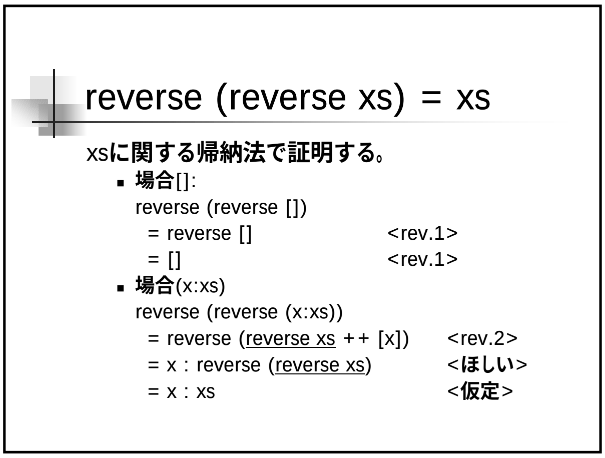
reverse (reverse xs) = xs

⇧

すべてのxと有限リストysに対して

reverse (ys++[x]) = x : reverse ys

補助定理



reverse (reverse xs) = xs

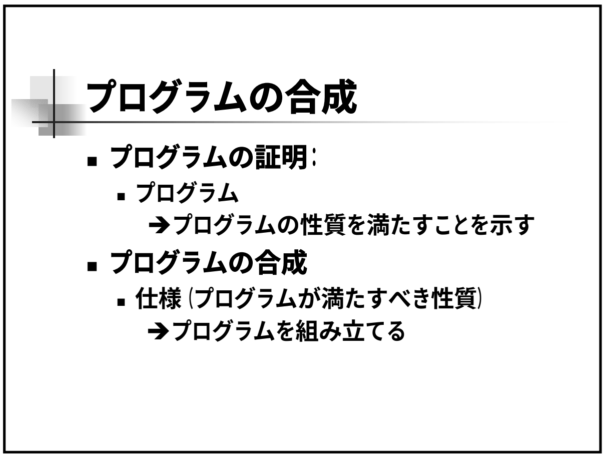
xsに関する帰納法で証明する。

- 場合[]:

```
reverse (reverse [])
  = reverse []                <rev.1>
  = []                        <rev.1>
```

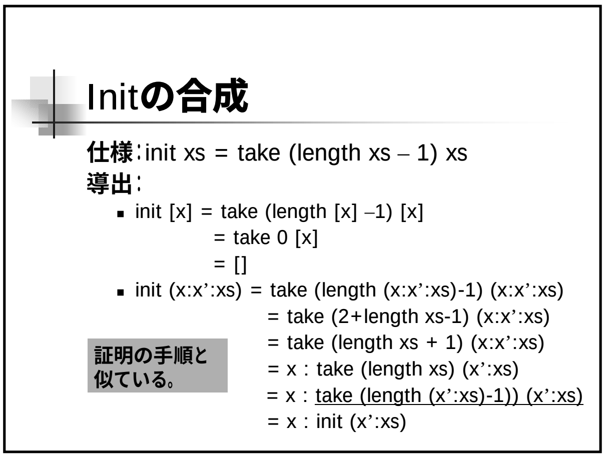
- 場合(x:xs)

```
reverse (reverse (x:xs))
  = reverse (reverse xs ++ [x])    <rev.2>
  = x : reverse (reverse xs)       <ほしい>
  = x : xs                         <仮定>
```



プログラムの合成

- プログラムの証明:
  - プログラム
    ➔プログラムの性質を満たすことを示す
- プログラムの合成
  - 仕様 (プログラムが満たすべき性質)
    ➔プログラムを組み立てる



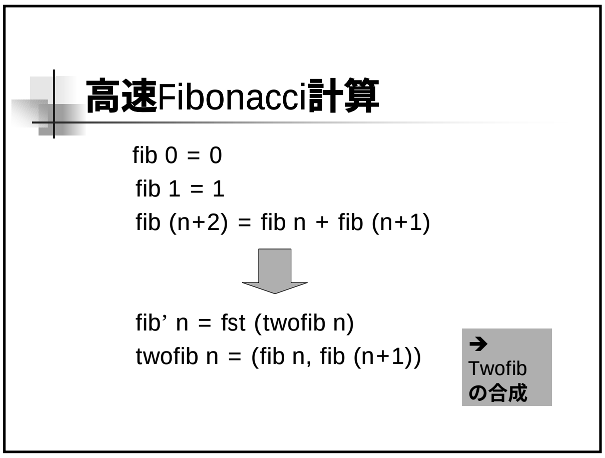
Initの合成

仕様: init xs = take (length xs – 1) xs

導出:

```
init [x] = take (length [x] –1) [x]
         = take 0 [x]
         = []
init (x:x’:xs) = take (length (x:x’:xs)-1) (x:x’:xs)
               = take (2+length xs-1) (x:x’:xs)
               = take (length xs + 1) (x:x’:xs)
               = x : take (length xs) (x’:xs)
               = x : take (length (x’:xs)-1)) (x’:xs)
               = x : init (x’:xs)
```

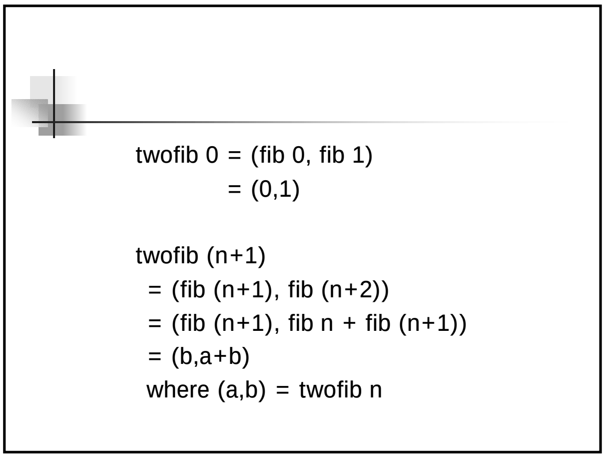
証明の手順と似ている。



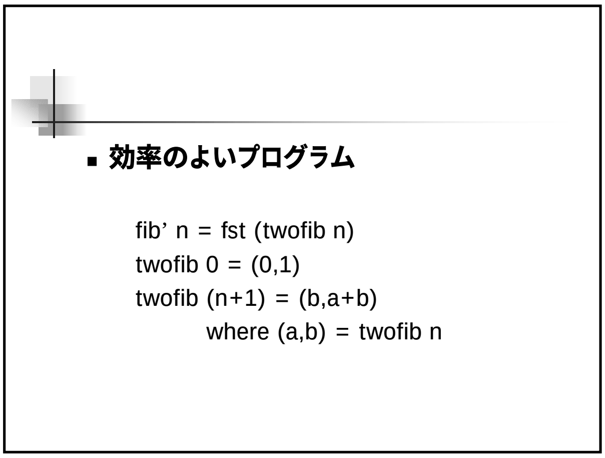
高速Fibonacci計算

```
fib 0 = 0
fib 1 = 1
fib (n+2) = fib n + fib (n+1)

fib’ n = fst (twofib n)
twofib n = (fib n, fib (n+1))
```

➔ Twofibの合成

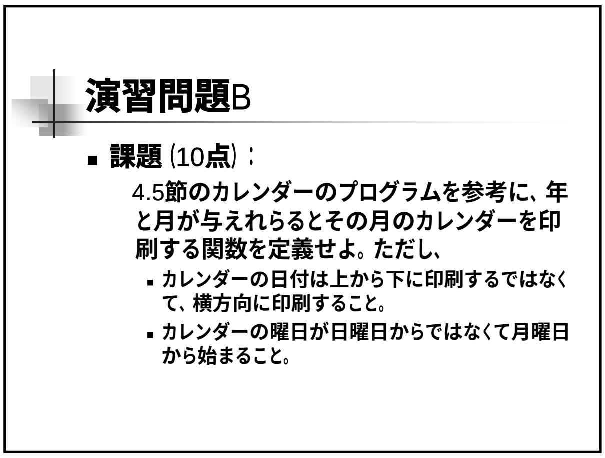


```
twofib 0 = (fib 0, fib 1)
         = (0,1)

twofib (n+1)
 = (fib (n+1), fib (n+2))
 = (fib (n+1), fib n + fib (n+1))
 = (b,a+b)
 where (a,b) = twofib n
```



- **効率のよいプログラム**

```
fib’ n = fst (twofib n)
twofib 0 = (0,1)
twofib (n+1) = (b,a+b)
      where (a,b) = twofib n
```

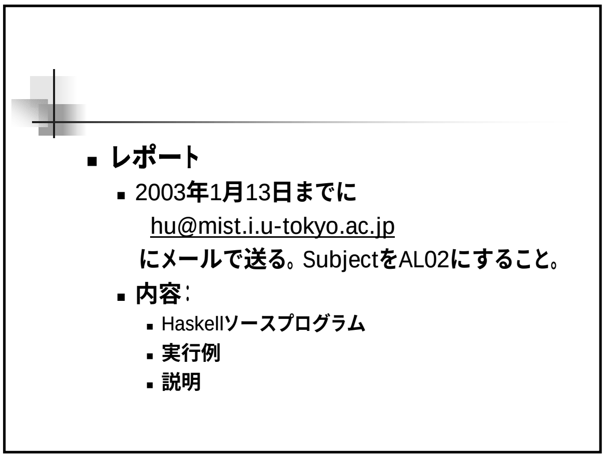


演習問題B

- 課題（10点）：

  4.5節のカレンダーのプログラムを参考に、年と月が与えれらるとその月のカレンダーを印刷する関数を定義せよ。ただし、

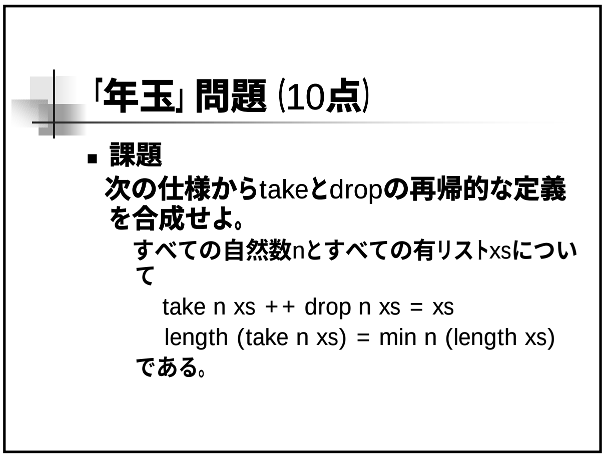
  - カレンダーの日付は上から下に印刷するではなくて、横方向に印刷すること。
  - カレンダーの曜日が日曜日からではなくて月曜日から始まること。



- レポート
  - 2003年1月13日までに

    hu@mist.i.u-tokyo.ac.jp

    にメールで送る。SubjectをAL02にすること。
  - 内容：
    - Haskellソースプログラム
    - 実行例
    - 説明



「年玉」問題（10点）

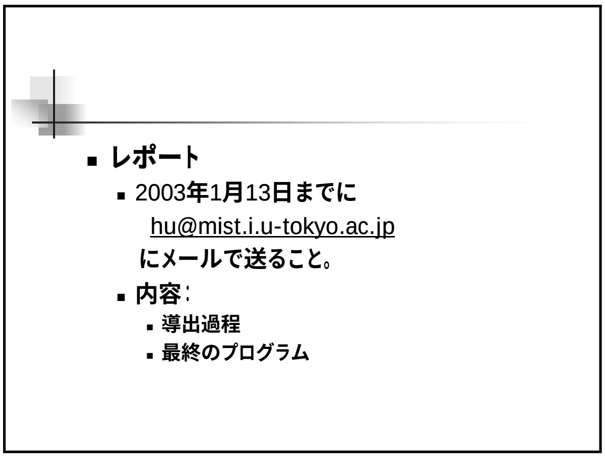
- 課題

  次の仕様からtakeとdropの再帰的な定義を合成せよ。

  すべての自然数nとすべての有リストxsについて

  ```
  take n xs ++ drop n xs = xs
  length (take n xs) = min n (length xs)
  ```

  である。



- レポート
  - 2003年1月13日までに

    hu@mist.i.u-tokyo.ac.jp

    にメールで送ること。
  - 内容：
    - 導出過程
    - 最終のプログラム