

# 「計算モデルの数理」試験(2005年度夏学期)

2005年8月1日8時30分～10時00分

工学部6号館61号室

**問題1 [ラムダ計算]** Church数  $c_0, c_1, c_2, \dots$  を次のように定義する.

$$c_n \equiv \lambda f x. f^n x$$

ここで,  $f^n x$  が  $\underbrace{f(f \cdots (f x))}_n$  を表す.  $E \equiv \lambda x y. y x$  とする.

すべての自然数  $n, m$  について, 以下が成り立つことを証明せよ.

- (1)  $(c_n x)^m y =_\beta x^{n \times m} y$
- (2)  $(c_n)^m x =_\beta c_{(n^m)} x \quad (m > 0)$
- (3)  $E c_n c_m =_\beta c_{(n^m)} \quad (m > 0)$

**問題2 [Scott 理論]** 整数の全体からなる平坦な完備半順序集合 (CPO, complete partial order) を  $Z$  とする.  $Z \times Z$  上の関数の定義

$$f(x, y) = \text{if } x = y \text{ then } y + 1 \text{ else } f(x, f(x - 1, y + 1))$$

に対する汎関数

$$F(f)(x, y) = \text{if } x = y \text{ then } y + 1 \text{ else } f(x, f(x - 1, y + 1))$$

に関して, 以下の問いに答えよ. ただし,  $Z \times Z$  上の算術演算  $+, -$ , および  $Z \times Z$  から平坦 CPO  $\{\text{True}, \text{False}, \perp\}$  への述語  $=, \geq$  は, いずれも, どの引数についても正格 (strict) であるものとする. すなわち, これらの2項演算子  $\oplus$  は, 任意の  $z \in Z$  に対して,

$$z \oplus \perp = \perp \oplus z = \perp$$

である. また, 条件式については,

$$\begin{aligned} \text{if } \perp \text{ then } p \text{ else } q &= \perp \\ \text{if } \text{True} \text{ then } p \text{ else } q &= p \\ \text{if } \text{False} \text{ then } p \text{ else } q &= q \end{aligned}$$

である.

- (1)  $h(x, y) = x + 1$  は, 上の汎関数  $F$  の不動点であるかどうかをその理由とともに答えよ.
- (2) 上の汎関数  $F$  の一つの不動点として,

$$g(x, y) = \text{if } x \geq y \text{ then } x + 1 \text{ else } y - 1$$

が存在することを示せ.

- (3)  $f_0(x, y) = \perp$  とし,  $f_{i+1} = F(f_i)$  による関数列の極限を求めることにより, 上の汎関数  $F$  の最小不動点を示せ.

**問題3 [Hoare 論理]** 関数  $fib(n)$  が次のように定義される.

$$\begin{aligned} fib(0) &= 0 \\ fib(1) &= 1 \\ fib(n+2) &= fib(n+1) + fib(n) \end{aligned}$$

以下のプログラムの部分的正当性を証明せよ.

```
{N ≥ 1}
x := 0;
y := 1;
n := 1;
While n < N Do
    t := x;
    x := y;
    y := t + y;
    n := n + 1
End
{ y = fib(N) }
```

**問題4 [言語理論]** アルファベット  $\{a, +, \times\}$  上に, 次の生成規則によって定義される言語について, 以下の問いに答えよ. ただし,  $S$  が文法の開始記号である.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S + T \\ T &\rightarrow T \times F \\ F &\rightarrow a \end{aligned}$$

- (1) 上の文法は正規文法 (regular grammar), 文脈自由文法 (context-free grammar), 文脈依存文法 (context-sensitive grammar) のいずれであるか, 理由とともに答えよ.
- (2) 上の文法によって定義される言語が正規言語 (regular language) であることを示せ.
- (3) 上の文法によって定義される言語を定義する正規表現 (regular expression) を示せ.

説明：

- 教科書，ノートを持ち込み可.
- 講義のアンケートを取る.
- 各問に一枚の解答用紙を使う. (合計 4 枚の解答用紙を配る)