計算モデル:ラムダ計算(2)

胡　振江
東京大学計数工学科

β簡約

$$(\lambda x.P)Q \to_\beta P[x := Q]$$

$$\frac{M \to_\beta N}{LM \to_\beta LN}$$

$$\frac{M \to_\beta N}{ML \to_\beta NL}$$

$$\frac{M \to_\beta N}{\lambda x.M \to_\beta \lambda x.N}$$

- 例

$$(\lambda x.xy)zw \to_\beta zyw$$

$$II \equiv (\lambda x.x)I \to_\beta I$$

$$KI(II) \equiv (\lambda xy.x)I(II) \to_\beta (\lambda y.I)(II) \to_\beta I$$

$$KI(II) \overset{*}{\to}_\beta I$$

β 同値関係

$$\frac{M \overset{*}{\to}_\beta N}{M =_\beta N}$$

$$\frac{M =_\beta N}{N =_\beta M}$$

$$\frac{M =_\beta N \quad N =_\beta L}{M =_\beta L}$$

β正規形

- β 正規形: 部分項に β 可簡約項を含まない λ 項
- M =$_\beta$ N かつ N が β 正規形であるとき、M は β 正規形を持つという。

問題:次の項はβ正規形を持つか？
- (λ x. x y) z w
- Ω = (λ x. x x) (λ x. x x)
- K I Ω

Church-Rosser定理 （CR性）

$$M =_\beta N \;\Rightarrow\; \exists L.(M \overset{*}{\to}_\beta L \;\wedge\; N \overset{*}{\to}_\beta L)$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, phantom, "=_\beta"] \arrow[dr, "\beta\ *"'] & & N \arrow[dl, "*\ \beta"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

➔正規形が唯一！

合流性 (Congrence)

$$M \xrightarrow{*}_\beta M_1 \;\wedge\; M \xrightarrow{*}_\beta M_2$$
$$\Rightarrow \exists M_3.\; M_1 \xrightarrow{*}_\beta M_3 \;\wedge\; M_2 \xrightarrow{*}_\beta M_3$$

CR性 ←→ 合流性

簡約の方法

どの位置にある簡約項を簡約するかによって、次の簡約方法が考えられる。
- 最左簡約
- 内部簡約

最左簡約 (leftmost reduction)

- 最左可簡約項
  - 最も左にある簡約項
  - 例 (λ x. x) ((λ y. y) u)
- 最左簡約
  - M →ₗ N

頭部簡約項は最左簡約項である

内部簡約 (internal reduction)

- 内部可簡約項
  - 例 (λ x. x) ((λ y. y) u)
- 内部簡約
  - M $\rightarrow_i$ N

標準簡約

- $\rightarrow_s$

任意の簡約 $M \xrightarrow{*} N$ に対して、
$M \xrightarrow{*}_s N$
となるような簡約方法。

最左簡約、内部簡約は標準簡約ではない。

どうして?

内部簡約:標準簡約ではない

M = (λ x y z. z x) (I I) Ω
N = λ z. z I

内部簡約
M $\rightarrow_i$ (λ x y z. z x) I Ω
$\rightarrow_i$ (λ y z. z I) Ω

頭部簡約の後内部簡約でOK

最左簡約は標準簡約ではない

M = (λ x y z. z x) (I I) Ω

N = (λ z. z I) Ω

最左簡約

M $\rightarrow_l$ (λ y z. z (I I)) Ω

$\rightarrow_l$ λ z. z (I I)

標準簡約の定義

1. 可簡約項を左から右へと縮約する
2. 左にある可簡約項を縮約しない場合、後で縮約することができない

例： M = (λ x y z. z x) (I I) Ω

– O: M → (λ y z. z (I I)) Ω
 → (λ y z. z I) Ω

– ×: M → (λ y z. z (I I)) Ω
 → (λ y z. z I) Ω
 → λ z. z I

正規化簡約戦略

- 正規化戦略
  - β正規形をもつ任意のλ項Mに対して、有限個の簡約ステップで正規形を求めることができる簡約戦略
- 最左簡約戦略は正規化戦略

- 最左簡約戦略例

 x ((λ u v w. u w (v w)) (I x) (I (I I)) z)
 → x ((λ v w. (I x) w (v w)) (I (I I)) z)
 → x ((λ w. (I x) w ((I (I I)) w)) z)
 → x ((I x) z ((I (I I)) z))
 → x (x z ((I (I I)) z))
 → x (x z ((I I) z))
 → x (x z (I z))
 → x (x z z)

λ 項による計算のコーディング

- ブール計算
  - true = λ t f. t
  - false = λ t f. f
  - test = λ l m n. l m n
  - and = λ b c. b c false

    注： λ b c. test b c false
  - or = ?
  - not = ?

- 組
  - pair = λ f s b. b f s
  - fst = λ p. p true
  - snd = λ p. p false

問題：fst (pair v w) = v を証明せよ。

- Church numbers
  - 0 = λ s z. z
  - 1 = λ s z. s z
  - n = λ s z . s (s … (s z)…)
  - succ = λ n s z. s (n s z)
  - plus = λ m n s z. m s (n s z)
  - times = λ m n. m (plus n) 0
  - isZero = λ m. m (λ x. false) true

演習問題

1. M[x:=N][x:=L] = M [x:=N[x:=L]] を証明せよ。
2. M=(λ y. (λ x. y (x x)) (λ x. y (x x))) a とする。Mをβ簡約して得られるλ項をすべて求めよ。また、M =$_\beta$ a M であることを示せ。
3. (λ x y. (λ w. w w) x y) (S a) (K I)を最左簡約戦略でβ正規形までの簡約を示せ。
4. snd (pair v w) = w を証明せよ。

レポートの提出に関して

- 演習問題を解いて，５月９日までに胡のポストに入れてください．
  - 学生証番号を忘れずに記入すること.