「計算モデルの数理」試験 (2006 年度夏学期)

2006 年 7 月 24 日 8 時 30 分〜10 時 00 分

工学部 6 号館 61 号室

問題１ [ラムダ計算] 自然数が次のように定義される。

$$\begin{array}{lcl} 0 & \equiv & \lambda f\, x.\, x \\ 1 & \equiv & \lambda f\, x.\, f\, x \\ 2 & \equiv & \lambda f\, x.\, f\,(f\, x) \\ 3 & \equiv & \lambda f\, x.\, f\,(f\,(f\, x)) \end{array}$$

また、自然数上の足し算と掛け算が次のように定義される。

$$\begin{array}{lcl} \mathit{plus} & \equiv & \lambda\, a\, b\, f\, x.\, a\, f\,(b\, f\, x) \\ \mathit{times} & \equiv & \lambda\, a\, b.\, b\, a \end{array}$$

(1) $\mathit{plus}\ 1\ 2 =_\beta 3$ を示せ。

(2) 自然数 n を受け取り、$n+1$ を返す関数 succ をラムダ表現で定義せよ。

(3) 自然数 n を受け取り、$2n$ を返す関数 double をラムダ表現で定義せよ。

(4) 任意の自然数 n に対して、$\mathit{plus}\ n\ n =_\beta \mathit{double}\ n$ が成立することを証明せよ。

[ヒント：succ と double が plus と times で表現できる。]

問題２ [Scott 理論]

(1) 元の数が n であるような集合 A に対して、$A \to A$ の全域関数の個数を答えよ。

(2) 元の数が n であるような集合 A に対して、$A \to A$ の部分関数の個数を答えよ。

(3) 元の数が n であるような集合 A と底要素 $\perp$ からなる平坦領域 (flat domain)$A^+ = A \cup \{\perp\}$ に対して、$A^+ \to A^+$ の単調関数の個数を答えよ。一般の n に対する個数を表現する式を簡単な形に簡約する必要はないが、その式に $n = 3$ を与えたときの値も示すこと。

問題３ [**Hoare 論理**] 次のプログラムの部分的正当性を証明せよ。

$\{\ N \geq 1\ \}$
p := N-1;
x := 1;
y := 1;
$\{\ N = x * y + p\ \}$
While $p \neq 0$ **Do**
  If p mod x = 0
  Then p := p-x; y := y+1
  Else
    If p mod y = 0
    Then p := p-y; x := x+1
    Else p:=p;
    End
  End
End
$\{\ x * y = N\ \}$

問題４ [**言語理論**]

(1) アルファベット $\{0, 1\}$ 上の正規表現

$$(101) * (110)*$$

を受理する非決定性オートマトンの遷移図を示せ。

(2) (1) の非決定性オートマトンと同値である決定性オートマトンの状態遷移図を示せ。

試験監督への説明：

- 教科書、ノートを持ち込み可。
- 講義のアンケートを取る。
- 各問に一枚の解答用紙を使う。（合計４枚の解答用紙を配る）