# 「計算モデルの数理」試験 (2007年度夏学期)

2007年7月23日(月) 8時30分〜10時00分

工学部6号館61号室

**問題1 [ラムダ計算 ]**

(1) $Y \equiv \lambda f.\,(\lambda x.\,f\,(x\,x))(\lambda x.\,f\,(x\,x))$ とする。$Y$ は不動点演算子であること、すなわち、任意の $\lambda$ 式 $M$ について $M\,(Y\,M) =_\beta Y\,M$ を示せ。

(2) $Y^0 \equiv Y$, $Y^{n+1} \equiv (Y^n)\,(S\,I)$ とする。ここで、$S \equiv \lambda x\,y\,z.\,x\,z\,(y\,z)$ である。任意の自然数 $i$ について、$Y^i$ は不動点演算子であることを示せ。

(3) $M \twoheadrightarrow_\beta N$ かつ $N$ が $\beta$ 正規形を持たないとき、$M$ は $\beta$ 正規形を持たないことを示せ。

**問題2 [Scott 理論 ]**

(1) 任意の集合 $S$ のべき集合 (powerset)$P(S)$ の上に、$S$ の部分集合の間の包含関係 $\subseteq$ によって半順序を定めることにより、$(P(S), \subseteq)$ は空集合 $\{\ \}$ を底要素とする完備半順序集合 (CPO, Complete Partial Order) となる。この完備半順序集合上の任意の鎖 (chain)$S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq ...$ の上限 (least upper bound) $\bigsqcup\{S_0, S_1, S_2, ...\}$ は和集合 $S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup ...$ であることを示せ。

(2) $S = \{\langle, \rangle\}^*$ (すなわち、左括弧 $\langle$ と右括弧 $\rangle$ からなる任意の列を元とする集合) のとき、完備半順序集合 $(P(S), \subseteq)$ 上に定義される関数 $f : P(S) \to P(S)$

$$f(X) = \textbf{if } X = \{\} \textbf{ then } \{\langle\rangle\} \textbf{ else } X \cup \{\langle x \rangle | x \in X\} \cup \{xy | x \in X, y \in X\}$$

は連続関数であることを示せ。

(3) 完備半順序集合 $(P(S), \subseteq)$ 上の任意の連続関数が最小不動点をもつことから、上記 (2) の関数 $f$ も最小不動点をもつ。その最小不動点がどのようなものであるか (すなわち、最小不動点である $S$ の部分集合に属する元がどのようなものであるか) 簡潔に示せ。(ヒント:$S_0 = \{\}$, $S_1 = f(S_0)$, $S_2 = f(S_1)$, ... のようにして $X = f(X)$ の最小不動点 $\bigsqcup\{S_0, S_1, S_2, ...\}$ を求めればよい。)

**問題3 [言語理論 ]**

(1) 問題2の (3) で求めた $f$ の最小不動点 ($S$ の部分集合) は終端記号の集合 $\{\langle, \rangle\}$ 上に定義されるひとつの言語 (すなわち、一定の規則に従った $\langle$ と $\rangle$ の列からなる集合) を定める。非終端記号を必要に応じて導入して、その言語を定義する生成規則を示せ。

(2) 上記 (1) で定義される言語は正規表現 (regular expression) で表すことができるかどうかを、その理由とともに答えよ。

**問題 4 [Hoare 論理 ]**

次の仕様を満たすプログラム、すなわち以下の $e$, $S$, $B$, $T$ を導出せよ。

(1) $\{i < 5\}\, i := e\, \{i < 10\}$

(2) $\{s = n^2\}\, s := e; n := n + 1\, \{s = n^2\}$

(3) $\{0 < N\}\, S; \textbf{while}\ B\ \textbf{do}\ T\ \textbf{end}\, \{s = \Sigma i \,|\, 0 \le i < N : a[i] * X^i\}$

試験監督への説明：

- 教科書、ノートを持ち込み可。
- 各問に一枚の解答用紙を使う。（合計 4 枚の解答用紙を配る）