第6章
効率：計算時間と空間

胡　振江

漸近的性質

- 効率の異なるプログラム例

```
reverse [] = []
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
[] ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs++ys)
```

簡約ステップ数：リストの長さの二乗に比例する

```
rev xs =  shunt [] xs
shunt ys [] = ys
shunt ys (x:xs) = shunt (x:ys) xs
```

簡約ステップ数：リストの長さに比例する

漸近的解析

- O-記法

  g(n) = O(h(n))

  ← どの正の数nについても

  |g(n)| <= M |h(n)|

  であるような定数Mが存在する

- 例

  T_reverse(x) = O(n^2)

  T_rev(x) = O(n)

  - T_f(x): f xの計算に要する簡約ステップ数
  - リストxの長さをnとする

簡約モデル

- 次のような定義を行ったとしよう。

```
pyth x y = sqr x + sqr y
sqr x = x * x
```

- 簡約例

```
pyth 3 4  → sqr 3 + sqr 4
          → (3*3) + sqr 4
          → 9 + sqr 4
          → 9 + (4*4)
          → 9 + 16
          → 25
```

簡約項

簡約順序

- 簡約段数は簡約順序に依存

```
fst (x, y) = x
fst (sqr 4, sqr 2)  → fst (4*4, sqr 2)
                    → fst (16, sqr 2)
                    → fst (16, 2*2)
                    → fst (16, 4)
                    → 16
fst (sqr 4, sqr 2)  → sqr 4
                    → 4*4
                    → 16
```

最内簡約法

最外簡約法

簡約の停止性

- 簡約順序によって簡約過程が停止しないことがある。

```
answer = fst (42, loop)
loop = tail loop
answer ➔ fst (42, loop)
       ➔ fst (42, tail loop)
       ➔ fst (42. tail (tail loop))
       ➔ …
Answer ➔ fst (42, loop)
       ➔ 42
```

簡約法

- 正規簡約法(normal order reduction)
  - 最外簡約法
  - 性質1：正規形を持つ項は必ず正規簡約法によって正規形に簡約することができる。
  - 性質2：解をもとめるために本質的に必要でなければ、簡約を行わない。➔ 遅延評価
- 作用的簡約法(applicative order reduction)
  - 最内簡約法
    - ➔ 先行評価 (f ⊥ = ⊥)

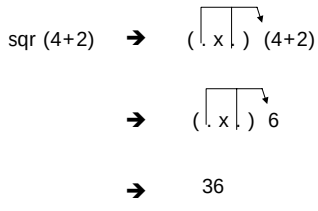
グラフ簡約：我々の計算モデル

- 最外簡約に要する簡約段数が最内簡約の段数を越えることはない? ➔ ×

```
sqr (4+2)  ➔ sqr 6
           ➔ 6*6
           ➔ 36
sqr (4+2)  ➔ (4+2) * (4+2)
           ➔ 6 * (4+2)
           ➔ 6 * 6
           ➔ 36
```

- グラフ簡約を用いると、… ➔ ○

共有



頭部正規形

- ときには、式の全体を正規形するのではなく、ある部分項だけを簡約する必要がある。

```
head (map sqr [1..7])
  ➔ head (map sqr (1:[2..7]))
  ➔ head (sqr 1 : map sqr [2..7])
  ➔ sqr 1
  ➔ 1*1
  ➔ 1
```

- 定義：簡約項でなく、その部分項のどれを簡約しても簡約項にはならない項は頭部正規形

簡約順序と所要領域

```
sum = foldl (+) 0
```

最外簡約

```
sum [1..1000]
  ➔ foldl (+) 0 [1..1000]
  ➔ foldl (+) (0+1) [2..1000]
  ➔ foldl (+) ((0+1)+2) [3..1000]
  ➔ …
  ➔ foldl (+) (… ((0+1)+2)+…+1000) []
  ➔ (… ((0+1)+2)+…+1000)
  ➔ …
  ➔ 500500
```

O(n)領域

最内簡約

```
sum [1..1000]
  ➔ foldl (+) 0 [1..1000]
  ➔ foldl (+) (0+1) [2..1000]
  ➔ foldl (+) 1 [2..1000]
  ➔ …
  ➔ 500500
```

O(1)領域

簡約順序の制御

- 計算モデル：最外簡約
- strictを用いて簡約順序を制御する
  - strict f eの簡約
    - まずはじめにeを頭部正規形に簡約する
    - 次にfを適用する

strict sqr (4+2)
→ sqr 6
→ 6*6
→ 36

効率化手法：分割統治法

- 効率のよいアルゴリズムの設計の有用な方法の一つ

問題Pを幾つかの部分問題（それぞれはPと同類の問題であるが、入力の大きさが小さいもの）に分割し、部分問題の解を集めてもとの問題の解とする手法

整列：挿入整列法

- リストを第一要素と残りの部分に分割して処理を行う。

```
isort = foldr insert []
insert x xs = takeWhile (<=x) xs ++ [x] ++
              dropWhile (<=x) xs
```

T_insert(n) = O(n)
T_isort(n) = T_insert(0) + T_insert(1) + … + T_insert(n)
= O(n^2)

併合整列法

- リストをほぼ同じ大きさの2つの部分に分割し、それぞれの部分を整列したあとで併合する。

```
msort xs | n <= 1    = xs
         | otherwise = merge (msort us) (msort vs)
    where n = length xs
          us = take (n `div` 2) xs
          vs = drop (n `div` 2) xs

merge [] ys = ys
merge (x:xs) [] = x:xs
merge (x:xs) (y:ys) | x<=y     = x : merge xs (y:ys)
                    | otherwise = y : merge (x:xs) ys
```

T_sort(n)
= O(1), if n<=1
= 2T_sort(n/2)+T_merge(n), otherwise

T_merge(n) = O(n)

クイック整列法

- 複雑な分割＋簡単な統合

```
qsort [] = []
qsort (x:xs) = qsort [u|u<-xs,u<x] ++
               [x] ++
               qsort [u|u<-xs,u>=x]
```

T_qsort(n) = O(n^2)（平均的に O(n log n)）

二分探索法

- 問題
  - 整数aと整数bと述語pが与えられたとき、区間[a..b]内でp xが成立するような最小のxを求める。
- 仕様

```
find p a b = min [ x | x <- [a..b], p x]
```

  - 正しい：問題の翻訳
  - 効率が悪い ← b-a+1回のpの計算が必要

効率化1

- [a..b]の単調性質の利用

```
find p a b = min [ x | x <- [a..b], p x]
  (pはb-a+1回評価される)
➔
find p a b = head [ x | x <- [a..b], p x]
  (pは1からb-a+1回評価される)
```

効率化2

- 述語pが単調の場合

p x = True ∧ x < y ならば　p y = True


```
find p a b   | a==b && p a          = a
             | a<b && p m           = find  p a m
             | a<b && not (p m)     = find p (m+1) b
  where
      m = (a+b) `div` 2
```

T(n) = O(log n)

期末試験

- 日時：　2月10日、8:30-10:00?
- 場所：　６３号室

- 教科書、ノートを持ち込み可