

哈爾濱工業大學

畢業設計（論文）

題 目 具有時滯和擴散的雲杉蚜蟲模型的
离散分支分析

專 業 信息與計算科學

學 號 130610222

學 生 姚朕

指 導 教 師 馬強

答 辯 日 期 2017 年 6 月 22 日

摘 要

微分方程的理论在物理学、化学、人口动力学以及航天科学等众多科学和工程领域中有着极其重要的应用,因此对于该领域的研究受到了学者们的广泛关注。由于滞后因素的影响,学者在系统中又不断加入延迟项和扩散项来更精确地模拟实际问题,而能够精确求解的方程又少之又少,于是学者们又采用数值方法如 Runge-Kutta 方法来近似方程的解。分支现象则是微分方程与动力系统中一个重要的课题,研究对象是具有一个或者多个参数的结构不稳定的系统。因此本文就针对云杉蚜虫模型研究其分支现象,并探讨其在实际应用中的作用。

云杉蚜虫对于生态环境的破坏巨大,因此从 70 年代就引起了大量学者的关注。经过几十年的发展,云杉蚜虫模型已经得到了很大的改进。在学者们加入延迟项与扩散项之后,该模型能够更好地模拟蚜虫繁殖的现实情况。因此本文对该系统的分支情况产生了极大的兴趣。

本文将运用向前欧拉差分格式来对带有延迟项和扩散项云杉蚜虫模型进行离散化,通过对离散系统在内部正不动点处的雅可比矩阵特征值的分析,得到了正不动点的局部稳定性和 Neimark-Sacker 分支的存在性。最后,本文选取不同数据,运用数值模拟来对产生 Neimark-Sacker 分支的条件是否正确进行了检验,得出了与理论结果一致的结果。

关键词: 偏微分方程; 向前欧拉差分格式; Neimark-Sacker 分支; 云杉蚜虫模型

Abstract

The theory of differential equation holds great value in the physics, chemistry, population dynamics, space science and other fields, it obtained many scholars' attention and interest. Because of the delay, scholars added time delay and diffusion into the differential system to obtain better models to simulate real problems. But just a few equations could be solved. Thus scholars used various numerical methods, like Runge-Kutta method, to solve these equations approximately. Bifurcation is another important topic in the research of differential equations and dynamic systems, whose research objects are unstable systems with one or many factors. In this paper, the spruce budworm model and its condition of bifurcation are analyzed.

Spruce budworm has significant influence to the ecosystem, so since 70s, many scholars studied this species and proposed many models. After decades, spruce budworm model has been improved. Adding time delay and diffusion, the spruce budworm model can simulate its actual reproduction. Thus we have great interest in its bifurcation.

In this paper, forward Euler scheme is used to discretize the spruce budworm model with time delay and diffusion. Then, its condition of local stability of positive constant state and Neimark-Sacker bifurcation are proposed by analyzing the eigenvalue of Jacobi matrix of discrete system at internal positive constant state. And numerical simulation are constructed to verify the conditions we obtained.

Keywords: partial differential equations, forward Euler scheme, Neimark-Sacker bifurcation, spruce budworm model

目 录

摘 要	I
Abstract	II
第 1 章 绪 论	
1.1 课题背景及研究的目的和意义	1
1.2 问题研究现状	1
1.2.1 延迟微分方程的数值方法	2
1.2.2 延迟偏微分方程的数值方法	2
1.2.3 分支理论	3
第 2 章 云杉蚜虫模型的离散分支分析	
2.1 模型介绍	4
2.2 数值离散格式的分支分析	5
2.3 本章小结	13
第 3 章 数值实验	
3.1 数值实验	14
3.2 本章小结	17
结 论	18
参考文献	19
致 谢	21

第 1 章 绪 论

1.1 课题背景及研究的目的和意义

微分方程的理论在物理学、化学、人口动力学以及航天科学等众多科学和工程领域有着极其重要的应用,因此对于微分方程的研究受到了学者们的广泛关注。上世纪四五十年代,学者们发现对事物的运动规律有影响的不仅仅是当前的运动状态,还有过去的运动状态,从而延迟微分方程越来越受到人们的重视。延迟微分方程又称时滞微分方程(简称 DDE),同样时滞微分方程在很多领域也有重要研究。在微分方程中加入了延迟项,使得延迟微分方程无论是定性研究还是数值求解都困难很大。但是在很多领域中,延迟项是无法忽略的,这就使得对于延迟微分方程数值解的研究变的尤为重要。

微分方程的定性理论是该领域研究新的突破。因为从实际的角度出发,人们更关心系统的动力学行为。在研究动力学性质的问题上,分支研究是一个很受关注的课题,它反应了参数的变化对流的拓扑结构所带来的影响,在实际应用中和数学理论上都有较大的研究意义。

对于 DDE,人们发现可以精确求解的方程类型甚少。因此除了定性理论外,其数值解的建立和理论也迅速发展起来。在上世纪七八十年代,学者们主要研究数值解的建立和数值方法的收敛性、稳定性。然而,在求 DDE 的数值解时,更重要的是研究数值方法是否能保持原系统的动力学性质。

此外,对数值离散系统动力学行为的研究,在一定程度上丰富了 DDE 系统动力学行为的研究内容。对于带有扩散项的 DDE 分支的研究,无论是广度和深度上都不如常微分方程(简称 ODE)。用数值方法求解 DDE 时,得到对应于原系统的离散系统,从而可以利用有限维动力系统的理论去分析数值离散系统的动力学行为^[1]。

综上所述,对于延迟偏微分方程数值离散系统,数值方法是否保持原系统的动力学行为,是一项非常值得研究的课题。本文的研究目的就是对一类延迟偏微分方程,用数值方法得到离散系统,讨论其保持连续系统的分支问题。

1.2 问题研究现状

本部分介绍延迟微分方程的数值方法、延迟偏微分方程的数值方法和分支理论三个内容的研究现状。

1.2.1 延迟微分方程的数值方法

常微分方程中能够精确求解的很少,而延迟微分方程能够得到解的解析表达式的则更少。在 DDE 的理论快速发展下,DDE 的数值方法也迅速发展起来。1984 年, Dekker 等^[2]讨论了延迟刚性非线性微分方程的 Runge-Kutta 方法的稳定性问题。1988 年, Bellen 等^[3]讨论了中立型 DDE 单步法的稳定性问题。

保持原系统的一些动力学行为的数值方法近年来受到了大量学者的关注。Hout 等^[4]证明了 DDE 通过合适的数值方法离散,其离散系统具有吸引的不变曲线且收敛于周期轨的阶与数值方法的收敛阶相同。2009 年, Gan^[5]研究了中立型非线性 DDE 的耗散性问题。

1.2.2 延迟偏微分方程的数值方法

对延迟偏微分方程数值方法的研究近几年也吸引了大量学者的关注。2001 年,文献[6]讨论了求解带有延迟项的线性抛物方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = Lu(x,t) + \mu u(x,t-\tau), t > 0, x \in \Omega \\ u(x,t) = u_0(x,t), t \in [-\tau, 0], x \in \Omega \\ u(x,t) = g(x,t), t > 0, x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1-1)$$

的线性多步法、Runge-Kutta 方法的稳定性。其中, L 是一个线性椭圆微分算子, $\tau > 0$ 和 μ 是给定实数, Ω 是 \mathbb{R}^d 上的一个有界域, u_0 和 g 分别为初始函数和边界函数。通过,对(1-1)进行空间半离散,得到微分方程

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t) + \mu U(t-\tau) + r(t), t > 0 \\ U(t) = U_0(t) \end{cases} \quad (1-2)$$

其中 A 是一个 $N \times N$ 矩阵, $U(t)$ 的分量是精确解 $u(t)$ 的逼近, $r(t)$ 是与函数 g 和 A 有关的 N 维向量。利用数值方法求解方程(1-2)得到如下数值格式

$$z_{n+1} = \varphi_0(hA)z_n + \cdots + \varphi_m(hA)z_{n-m} + hr_n, n \geq 0 \quad (1-3)$$

其中, $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ 是一些有理函数, h 为步长, m 为一个自然数, 满足 $\tau \leq hm$. z_n 则是在网格点处 $U(t)$ 的近似值。则(1-3)式可以写作矩阵形式

$$Z_{n+1} = CZ_n + R_n, n \geq 0 \quad (1-4)$$

然后离散系统(1-2)的稳定性研究就转化为对(1-4)的数值稳定性研究。

文献[7]给出了对于带有延迟的非线性反应扩散方程的数值解的研究。利

用中心差分算子离散拉普拉斯算子得到标准矩阵 A ，然后用向前欧拉法解半离散系统，给出了稳态解的存在性和稳定性条件。2008 年，Tian^[8]研究了如下的延迟抛物微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + r \frac{\partial^2 u(x,t-\tau)}{\partial x^2}, & t > 0, 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t), & t \geq -\tau \\ u(x,t) = \Phi(x,t), & -\tau \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (1-5)$$

分别应用向前欧拉差分、向后欧拉差分和 Crank-Nicolson 差分，得到了延迟抛物微分方程(1-5)相应的离散系统渐近稳定的充要条件。

1.2.3 分支理论

分支是微分方程与动力系统中的一个重要课题，研究对象是具有一个或者多个参数的结构不稳定的系统。在参数变化到某个特定数值时，在这个特定值附近做出微小变化，研究对象的拓扑结构发生突变，这种现象称为分支现象。对于分支问题的研究，Hopf 分支是一个重要的动态分支，产生的现象是系统平衡点的稳定性发生变化时，在平衡点附近出现闭轨现象。学者们研究延迟偏微分方程得到了关于局部 Hopf 分支存在性以及分支周期解稳定性结论^[9]。总结为，大多数情况下的时滞会使得模型的正解不稳定且产生 Hopf 分支。

第 2 章 云杉蚜虫模型的离散分支分析

2.1 模型介绍

云杉蚜虫(spruce budworm)是北美森林中一种有害的昆虫。通常这种昆虫的数量是由捕食者(通常是鸟类)的数量控制。但是,近几十年间该虫的泛滥,引起了科学家们的关注。鸟类不仅仅只捕食云杉蚜虫,所以鸟类的数量在一定程度上与蚜虫的数量是独立的。

在 1978 年, Ludwig 等^[12]提出了没有空间依赖性的局部蚜虫密度应该满足的方程

$$u_t = ru \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{Bu^2}{A^2 + u^2}$$

其中右边第一项则是回归项,与蚜虫所在地的森林面积成正比;第二项则是蚜虫的被捕食量,被捕食量的饱和量则是 B , 因为捕食者的数量和捕食者的捕食能力是有限的。在 1979 年, Ludwig^[13]提出了带有扩散项的蚜虫的数量变化模型

$$u_t = d\Delta u + ru \left(1 - \frac{u}{K} \right) - \frac{Bu^2}{A^2 + u^2}$$

在 2013 年, Wang 和 Yeh^[14]研究了该方程的不动点问题。该方程被广泛接受,但是蚜虫数量变化不仅仅由捕食者和环境承载能力决定。因此, Vaidya 和 Wu 等^[15]在 2008 年提出了如下的具有时滞的云杉蚜虫模型

$$u_t = -Du(t) - \frac{\beta u^2(t)}{\gamma^2 + u^2(t)} + q_1 e^{-d\tau} u(t-\tau) e^{-\alpha_1 u(t-\tau)}$$

并通过数值实验表明该方程较好地吻合加拿大新不伦瑞克省的 Green River 地区的蚜虫数量的变化情况。2017 年, Wei 和 Xu^[16]研究了带有时滞和延迟项的 Dirichlet 边界条件下的云杉蚜虫模型

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta u(x,t) - Du(x,t) - \frac{\beta u^2(x,t)}{\gamma^2 + u^2(x,t)} + q_1 e^{-\tilde{d}\tau} u(x,t-\tau) e^{-\alpha_1 u(x,t-\tau)} \quad (2-1)$$

并研究了该方程不动点的稳定性和正不动点周围分支的存在性。其中, d_1 是扩散系数, D 是成年蚜虫的平均死亡率, \tilde{d} 是未成年蚜虫的平均死亡率, β 是鸟的捕食率, γ 则是捕食率达到最大值的一半时蚜虫的数量, τ 则是蚜虫的成熟时间延迟, $b(u) = q_1 u e^{-\alpha_1 u}$ ($q_1, \alpha_1 > 0$) 则是蚜虫的出生方程。

2.2 数值离散格式的分支分析

本节将通过向前欧拉差分格式离散方程(2-2)，研究离散系统在初始条件(2-3)下的稳定性和 Neimark-Sacker 分支的存在性。

对方程(2-1)，本章考虑它在 Dirichlet 边界条件下的情况，为了简化模型，做如下变化

$$\hat{u}(x, \hat{t}) = \frac{1}{\gamma} u(x, t), \quad \hat{t} = \frac{\beta t}{\gamma}, \quad \hat{\tau} = \frac{\beta \tau}{\gamma}$$

把 \hat{u} 仍写作 u ，就有以下模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - r_1 u - \frac{u^2}{1+u^2} + be^{-r_2 \tau} u_{\tau} e^{-\alpha u_{\tau}}, & x \in \Omega, t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0 \\ u = \eta(x, t) \geq 0, & x \in \Omega, t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2-2)$$

其中

$$d = \frac{\gamma d_1}{\beta}, \quad r_1 = \frac{\gamma D}{\beta}, \quad b = \frac{\gamma q_1}{\beta}, \quad r_2 = \frac{\gamma \tilde{d}}{\beta}, \quad \alpha = \gamma \alpha_1 \quad (2-3)$$

这里 $\Omega = (0, \pi)$ ， $\eta(x, t)$ 为 Holder 连续， $\eta(x, 0) \in C^1(\bar{\Omega})$ 。

由 Xu^[16]的研究可知方程(2-2)存在两个不动点 $u=0$ 和 u_0 ，且 u_0 满足以下方程

$$r_1 + \frac{u}{1+u^2} = be^{-r_2 \tau} e^{-\alpha u} \quad (2-4)$$

由文献[16]，当 $be^{-r_2 \tau} \leq r_1$ 时，那么 $u=0$ 是方程(2-2)唯一的不动点；当 $be^{-r_2 \tau} > r_1$ 且 $\alpha > 1$ 时，除了平凡不动点，方程(2-2)还存在唯一的正不动点 u_0 。考虑反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - r_1 u - \frac{u^2}{1+u^2} + be^{-r_2 \tau} u_{\tau} e^{-\alpha u_{\tau}}, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

并令 $\hat{u}(x, t) = u(x, t\tau)$ ，把 \hat{u} 再写为 u ， $t\tau$ 写为 t ，得到

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d\tau \Delta u(x, t) - r_1 \tau u(x, t) - \frac{\tau u^2(x, t)}{1+u^2(x, t)} + \tau be^{-r_2 \tau} u(x, t-1) e^{-\alpha u(x, t-1)}$$

再进行变换 $\hat{u} = u - u_0$ ，使平衡点 u_0 变为原点，仍记 \hat{u} 为 u 得到

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d\tau \Delta u(x,t) - \tau[r_1(u(x,t) + u_0) - \frac{(u(x,t) + u_0)^2}{1 + (u(x,t) + u_0)^2} + be^{-r_2\tau}(u(x,t-1) + u_0)e^{-\alpha u(x,t-1) + u_0}] \quad (2-5)$$

设 k 和 h 分别是时间和空间步长, 假设 k 满足 $mk=1$, 其中 $m \geq 1$ 为整数。定义网格点

$$t_n = nk, \quad n = -m, -m+1, \dots$$

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

此处 $h = \pi / N$, 其中 N 为给定整数。用向前欧拉差分方法离散方程(2-5), 得到下面的表达式

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = d\tau \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \\ \quad - \tau \left[r_1(u_i^n + u_0) - \frac{(u_i^n + u_0)^2}{1 + (u_i^n + u_0)^2} + be^{-r_2\tau}(u_i^{n-m} + u_0)e^{-\alpha u_i^{n-m} + u_0} \right] \\ u_0^n = u_N^n = 0, n = 0, 1, \dots \\ u_i^n = \eta(x_i, t_n), i = 0, 1, 2, \dots, N; n = -m, -m+1, \dots, 0 \end{cases} \quad (2-6)$$

对各部分进行泰勒展开, 可以得到差分方程(2-6)的线性部分为

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} = d\tau \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \\ \quad - \tau \left[\left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) u_i^n - \left(r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} \right) (1 - \alpha u_0) u_i^{n-m} \right] \\ u_0^n = u_N^n = 0, n = 0, 1, \dots \\ u_i^n = \eta(x_i, t_n), i = 0, 1, 2, \dots, N; n = -m, -m+1, \dots, 0 \end{cases} \quad (2-7)$$

(2-7)可以记为

$$U^{n+1} = AU^n + CU^{n-m} \quad (2-8)$$

其中 $l = k / h^2$

$$U^n = (u_1^n, \dots, u_{N-1}^n)^T \quad (2-9)$$

$$\begin{cases} A = \left[1 - 2d\tau l - \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) \right] I + d\tau l S \\ C = \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} \right) (1 - \alpha u_0) I \end{cases} \quad (2-10)$$

其中, I 为单位矩阵, 且

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

为了研究(2-6)的平凡解的稳定性, 将(2-8)式写为一阶差分方程的增广系统

$$\Lambda^{n+1} = H\Lambda^n \quad (2-11)$$

其中 $\Lambda^n = (U^n, U^{n-1}, \dots, U^{n-m})^T$, 并且有

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 & -C \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}$$

计算该矩阵的特征方程有

$$\det(\lambda I - H) = \prod_{\lambda_j \in \sigma(S)} \left\{ \lambda^{m+1} - \left[1 - 2d\tau l - \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) + d\tau l \lambda_j \right] \lambda^m + \tau k \left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2} \right) (1 - \alpha u_0) \right\} \quad (2-12)$$

其中 λ_j 是矩阵 S 的第 j 个特征值, 其值为

$$\lambda_j = 2\cos(jh), \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

因此我们需要讨论

$$\lambda^{m+1} - \left[1 - 2d\tau l - \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) + d\tau l \lambda_j \right] \lambda^m + \tau k \left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2} \right) (1 - \alpha u_0) = 0 \quad (2-13)$$

引理 2.1 对于充分小的 $\tau > 0$, 当 $u_0 \leq 1/\alpha$ 时, 方程(2-13)的所有根的模小于1.

证明: 对于 $\tau = 0$, 方程(2-13)可以写为

$$\lambda^{m+1} - \lambda^m = 0$$

方程有一个 m 重根 $\lambda_1 = 0$ 和一个单根 $\lambda_2 = 1$.

现在考虑 $\lambda(\tau)$ 使得 $\lambda(0) = 1$, 显然

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\tau} = \lambda \frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} + \bar{\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}$$

在方程(2-13)两边对 τ 求导, 可得

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\left[1 - 2dl - k\left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2}\right) + dl\lambda_j\right]\lambda^m - k\left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2}\right)(1-\alpha u_0)}{(m+1)\lambda^m - m\left[1 - 2d\tau l - \tau k\left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2}\right) + d\tau l\lambda_j\right]\lambda^{m-1}}$$

进一步地, 可得到

$$\left.\frac{d|\lambda|^2}{d\tau}\right|_{\lambda=1, \tau=0} = 2\left\{dl(\lambda_j - 2) - k\left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2}\right) - k\left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2}\right)(1-\alpha u_0)\right\} \quad (2-14)$$

其中 $r_1 = \gamma D / \beta > 0$ ($\gamma > 0$, $D > 0$, $\beta > 0$) 和 $|\lambda_j| \leq 1$, 所以

$$dl(\lambda_j - 2) - k\left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2}\right) < 0$$

现在只需讨论 $1 - \alpha u_0$ 的情况, 当 $1 - \alpha u_0 \geq 0$, 即 $u_0 \leq 1/\alpha$, 则

$$\left.\frac{d|\lambda|^2}{d\tau}\right|_{\lambda=1, \tau=0} < 0$$

所以对于充分小的 $\tau > 0$, 当 $u_0 \leq 1/\alpha$ 时, 方程(2-13)的所有根的模小于 1. \square

对于(2-4)式, 容易看出, 如果 $be^{-r_2\tau} \leq r_1$, 那么对于 $u \in (0, \infty)$

$$r_1 + \frac{u}{1+u^2} \geq r_1 \geq be^{-r_2\tau} \geq be^{-r_2\tau} e^{-\alpha u}$$

因此, 当 $be^{-r_2\tau} \leq r_1$ 时, 方程(2-2)没有正的不动点。现在考虑 $be^{-r_2\tau} > r_1$, 即 $b > r_1$ 的情况, 从 $be^{-r_2\tau} > r_1$ 有

$$0 \leq \tau < \tau_{\max} := \frac{1}{r_2} \ln \frac{b}{r_1}$$

假设 $\alpha > 1$, 那么方程(2-2)就只有一个正的不动点。事实上, 在(2-4)两边乘上 $1+u^2$ 并记为

$$g_1(u) = r_1(1+u^2) + u, \quad g_2(u, \tau) = be^{-r_2\tau}(1+u^2)e^{-\alpha u} \quad (2-15)$$

其中 $g_1(0) = r_1$, $g_2(0, \tau) = be^{-r_2\tau}$. 那么 u_0 是方程(2-4)的正根, 当且仅当 u_0 是 $g_1(u) = g_2(u)$ 的正根。从(2-15)可以得到

$$g_1'(u) = 2r_1u + 1, \quad \frac{\partial g_2(u, \tau)}{\partial u} = be^{-r_2\tau} e^{-\alpha u} (2u - \alpha - \alpha u^2) \quad (2-16)$$

对于上式, 当 $u \in (0, \infty)$ 和 $\alpha > 1$ 时, 有 $[2u - \alpha - \alpha u^2]_{\max} = \frac{1}{\alpha} - \alpha < 0$, 故 $g_1'(u) > 0$ 且

$$\frac{\partial g_2(u, \tau)}{\partial u} < 0$$

因此可以从 $g_1(0) < g_2(0, \tau)$ 和 $u \rightarrow \infty$ 时, 得到 $g_1 - g_2 \rightarrow \infty$, 方程 $g_1(u) = g_2(u, \tau)$ 有唯一的正解。

由引理 2.1 可知, u 的最大值在 $\tau=0$ 处取到 $u_{\max} = u_0(0)$ 并且满足

$$r_1 + \frac{u}{1+u^2} = be^{-\alpha u}$$

将正不动点写作 $u_0 = u_0(\tau)$, 因为 u_0 满足(2-4)并取决于 τ 的取值。

引理 2.2^[16] 如果 $b > r_1$ 和 $\alpha > 1$, 那么 $u_0(\tau)$ 在 $[0, \tau_{\max})$ 上是一个递减函数。

证明: 从上述可知 $u_0(\tau)$ 满足方程 $g_1(u) = g_2(u, \tau)$. 运用反证法, 假设对于 $i=1, 2$, $\tau_i \in [0, \tau_{\max})$, u_i 是 $g_1(u) = g_2(u, \tau_i)$ 的唯一解和 $\tau_1 < \tau_2$. 下面只需证明在此情况下 $u_1 > u_2$. 假如 $u_1 \leq u_2$, 通过(2-15)的 g_2 的定义, 就有

$$g_2(u_1, \tau_2) < g_2(u_1, \tau_1) = g_1(u_1) \leq g_1(u_2) = g_2(u_2, \tau_2) \leq g_2(u_1, \tau_2)$$

矛盾, 于是引理得证。 □

定理 2.1^[16] 假设 $\alpha > 1$ 并记 $b_0 = er_1 + e\alpha / (1 + \alpha^2)$

(i) 若 $r_1 < b \leq b_0$, 则对于方程(2-2), $u = u_0$ 对于任意 $\tau \in [0, \tau_{\max})$ 是局部渐近稳定的。

(ii) 若 $b > b_0$, 则存在一个 $\hat{\tau} \in (0, \tau_{\max})$ 使得 $g_1(1/\alpha) = g_2(1/\alpha, \hat{\tau})$, 并且对于方程(2-2), $u = u_0$ 对于任意 $\tau \in (\hat{\tau}, \tau_{\max})$ 是局部渐近稳定的。

证明: (i) 假设 $\alpha > 1$ 和 $b > r_1$ 成立, 那么可以得到

$$b \leq b_0 \Leftrightarrow g_2\left(\frac{1}{\alpha}, 0\right) \leq g_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow u_{\max} \leq \frac{1}{\alpha}$$

则有 $u_0 \leq u_{\max} \leq 1/\alpha$, 根据引理 2.2, 就能得到 $\frac{d|\lambda|^2}{d\tau} < 0$.

(ii) 假设 $b > b_0$, 则有 $u_0 > 1/\alpha$, 不妨设存在某个 $u_0(\hat{\tau})$ 使得 $u_0(\hat{\tau}) = 1/\alpha$, 则有

$$r_1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} = be^{-r_2 \hat{\tau}} e^{-1}$$

由 $b_0 = er_1 + e\alpha / (1 + \alpha^2)$, 可以得到

$$\hat{\tau} = \frac{1}{r_2} \ln \frac{b}{b_0}$$

由引理 2.1 可知 $u_0(\tau)$ 是在 $[0, \tau_{\max})$ 上严格递减的函数, 因此可得, 对于任意

$\tau \in (\hat{\tau}, \tau_{\max})$, 有 $u_0(\tau) \leq 1/\alpha$. 根据引理 2.2, 就能得到 $\frac{d|\lambda|^2}{d\tau} < 0$. □

为了下面叙述方便, 定义

$$(I1) \quad \tau = \hat{\tau} \text{ 且 } u_0 = \frac{1}{\alpha}.$$

$$(I2) \quad \tau \in (\hat{\tau}, \tau_{\max}) \text{ 即 } u_0 \leq \frac{1}{\alpha}, \quad r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} + dlj^2 + be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0 - 1) < 0.$$

$$(I3) \quad \tau \in (\hat{\tau}, \tau_{\max}) \text{ 即 } u_0 \leq \frac{1}{\alpha}, \quad r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} + dlj^2 + be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0 - 1) > 0.$$

$$(I4) \quad \tau \in (0, \hat{\tau}) \text{ 即 } u_0 > \frac{1}{\alpha}, \quad r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} + dlj^2 + be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0 - 1) < 0.$$

$$(I5) \quad \tau \in (0, \hat{\tau}) \text{ 即 } u_0 > \frac{1}{\alpha}, \quad r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} + dlj^2 + be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0 - 1) > 0.$$

引理 2.3 设空间步长 h 充分小, l 是一个固定值, 并且(I1)、(I3)、(I5)中的任意一个条件满足, 那么特征方程(2-13)没有根在单位圆上。

证明: 根据 Neimark-Sacker 分支定理, 随着参数的变化, 当特征方程(2-13)的两个共轭复根穿过单位圆时, 则系统就存在 Neimark-Sacker 分支。假设特征方程(2-13)存在两个共轭根, 设为 e^{iw} , $w \in (-\pi, \pi]$. 因为特征方程(2-13)是实多项式方程, 只需要满足 $w \in (0, \pi]$ 即可, e^{iw} 是特征方程(2-13)的根当且仅当 e^{iw} 满足方程(2-13), 将方程(2-13)两边除以 λ^m 后将 e^{iw} 代入可得

$$e^{iw} - \left[1 - 2d\tau l - \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) + d\tau l \lambda_j \right] + \tau k \left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2} \right) (1 - \alpha u_0) e^{-imw} = 0 \quad (2-17)$$

分离实部与虚部就能得到方程组

$$\begin{cases} \cos w - \left[1 - 2d\tau l - \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) + d\tau l \lambda_j \right] + \tau k \left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2} \right) (1 - \alpha u_0) \cos mw = 0 \\ \sin w - \tau k \left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2} \right) (1 - \alpha u_0) \sin mw = 0 \end{cases}$$

通过公式 $\sin^2 mw + \cos^2 mw = 1$ 得到

$$\cos w = 1 + \frac{\left[2d\tau l + \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) - d\tau l \lambda_j \right]^2 - \left[\tau k \left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2} \right) (1 - \alpha u_0) \right]^2}{2 \left[1 - 2d\tau l - \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) + d\tau l \lambda_j \right]} := 1 + \frac{P}{2Q}$$

为了方便计算, 将分子记为 P , 分母记为 $2Q$. 其中

$$\begin{aligned}
 Q &= 1 - 2d\tau l - \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) + 2d\tau l \cos(jh) \\
 &= 1 - 2d\tau l - \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) + 2d\tau l \left(1 - \frac{(jh)^2}{2} \right) + O(h^4) \quad (2-18) \\
 &= 1 - \tau l h^2 \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) - d\tau (jh)^2 + O(h^4) \\
 P &= \left[k\tau r_1 + \frac{2u_0 k\tau}{(1+u_0^2)^2} + d\tau (jh)^2 + \tau k b e^{-r_2\tau} e^{-\alpha u_0} (\alpha u_0 - 1) \right] \cdot \\
 &\quad \left[k\tau r_1 + \frac{2u_0 k\tau}{(1+u_0^2)^2} + d\tau (jh)^2 - \tau k b e^{-r_2\tau} e^{-\alpha u_0} (\alpha u_0 - 1) \right] + O(h^6) \quad (2-19) \\
 &= (\tau l h)^2 \left[r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} + dj^2 + b e^{-r_2\tau} e^{-\alpha u_0} (\alpha u_0 - 1) \right] \cdot \\
 &\quad \left[r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} + dj^2 - b e^{-r_2\tau} e^{-\alpha u_0} (\alpha u_0 - 1) \right] + O(h^6)
 \end{aligned}$$

因此, 当空间步长 h 充分小, l 是一个固定值时, 能够保证 $Q > 0$. 现在只需讨论 $P > 0$ 的情况, 因为当 $P > 0$ 且 $Q > 0$ 时, $\cos w > 1$, 产生矛盾. 只需让 P 的第三个乘积因子

$$r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} + dj^2 - b e^{-r_2\tau} e^{-\alpha u_0} (\alpha u_0 - 1) > 0$$

即可, 所以当(I1)、(I3)、(I5)中的任意一个条件满足, 方程(2-13)在单位圆上没有根. \square

如果 $Q > 0$ 且满足(I2)、(I4), 因为 $|\cos w| < 1$, 从方程(2-13)可以得到

$$\tau = \frac{\sin w}{\sin mw} \cdot \frac{1}{k \left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2} \right) (1 - \alpha u_0)} \quad (2-20)$$

引理 2.4 设 $\lambda_\xi(\tau) = \bar{r}_\xi(\tau) e^{i w_\xi(\tau)}$ 是特征方程(2-13)在 $\tau = \tau_\xi$ 附近满足 $\bar{r}_\xi(\tau_\xi) = 1$ 和 $w_\xi(\tau_\xi) = w_\xi$ 的一个根, 那么可得

$$\left. \frac{d\bar{r}_\xi(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_\xi, w=w_\xi} > 0$$

证明: 从方程(2-13)得到

$$\lambda^m = \frac{-\tau k \left(r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^2} \right) (1-\alpha u_0)}{\lambda - \left[1 - 2d\tau l - \tau k \left(r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^2)^2} \right) + d\tau l \lambda_j \right]}$$

先求 $\frac{d\lambda}{d\tau}$, 再计算

$$\left. \frac{d\bar{r}_\xi(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_\xi, W=W_\xi} = 2\Re(\bar{\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}) \Big|_{\tau=\tau_\xi, W=W_\xi}$$

先对方程(2-13)两边对 τ 求导, 得到

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{1}{\tau} \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda(m+1)-mQ}$$

因此有

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{1}{\tau} \frac{\lambda-1}{\lambda(m+1)-mQ} \\ &= \frac{1}{\tau} \frac{e^{iw} - 1}{e^{iw}(m+1)-mQ} \\ &= \frac{1}{\tau} \frac{\cos w + i \sin w - 1}{(\cos w + i \sin w)(m+1)-mQ} \\ \left. \frac{d\bar{r}_\xi(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_\xi, W=W_\xi} &= 2\Re(\bar{\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}) \Big|_{\tau=\tau_\xi, W=W_\xi} = \frac{2}{\tau} \frac{AC+BD}{C^2+D^2} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \cos w - 1 & B &= \sin w \\ C &= (m+1)\cos w - mQ & D &= (m+1)\sin w \end{aligned}$$

最终得到

$$\left. \frac{d\bar{r}_\xi(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_\xi, W=W_\xi} = -\frac{1}{\tau} \frac{P(m(Q+1)+1)}{(C^2+D^2)} > 0 \quad (P < 0) \quad \square$$

定理 2.3 对离散系统(2-6), 当空间步长 h 充分小且 l 是定值并且 $Q > 0$ 时, 得到下面的结论:

- (i) 若满足(I1)、(I3)、(I5)中的任意一个条件, 则零解是渐近稳定的;
- (ii) 若满足(I2)、(I4)中的任意一个条件, 则零解是不稳定的; 当 $\tau=\tau_\xi$ 时, $\xi=1, 2, \dots, [\frac{m-1}{2}]$, 系统(2-6)在 $\tau=\tau_\xi$ 处经历 Neimark-Sacker 分支。

证明: (i) 由引理 2.2 和 2.4, 若满足(I1)、(I3)、(I5)中的任意一个, 则方程(2-

13)没有根在单位圆上。应用文献[17]中的推论 2.4, 得到方程(2-13)的所有根的模小于1. 结论成立。

(ii) 若满足(I2)、(I4), 应用引理 2.2 和 2.5, 则方程(2-13)的根中至少有一对根的模大于1. 结论成立。□

2.3 本章小结

本章运用向前欧拉差分格式讨论了带有 Dirichlet 边界条件具有时滞和扩散的云杉蚜虫模型的离散动力学行为, 并得出了正不动点的渐近稳定和 Neimark-Sacker 分支产生的条件。

第 3 章 数值实验

3.1 数值实验

本小节对于方程(2-2)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - r_1 u - \frac{u^2}{1+u^2} + be^{-r_2\tau}u_\tau e^{-\alpha u_\tau}, x \in \Omega, t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, t > 0 \\ u = \eta(x, t) \geq 0, x \in \Omega, t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

给出数值实验，并且验证定理 2.3 的结论的正确性。

拟采用以下参数

$$r_1 = 0.1980, \quad r_2 = 1.1, \quad b = 648649.8, \quad \alpha = 11.8572, \quad d = 0.03 \quad (3-1)$$

在这组数据下，可得 $b > b_0 \approx 0.7658$ 和 $\alpha > 1$ 。通过计算，能得到

$$\hat{\tau} \approx 12.4086, \quad \tau_{\max} \approx 13.64$$

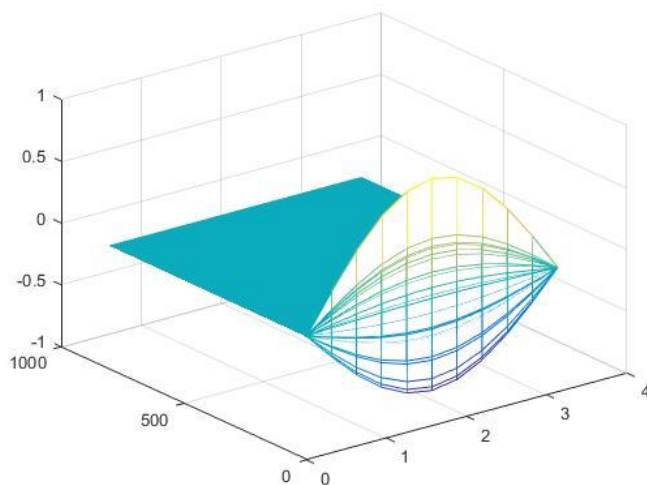


图 3-1 用向前欧拉差分法当步长 $h = \pi/10$ 和 $k = 1/4$ ， $\tau=1$ ， $u_0 = 0.3$ 时求解方程(2-2)的数值解

图 3-1 描绘了向前欧拉差分格式对方程(2-2)解的仿真，当 $\tau=1$ ， $u_0 = 0.3$ 时，平

平衡点是渐近稳定的, 此时 $u_0 > 1/\alpha$, 并且参数满足条件(I5), 即

$$r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} + dlj^2 + be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0 - 1) > 0$$

在该条件下, 零解是渐近稳定的。

图 3-2, 当 $\tau=0.0617$, $u_0=5$ 时, 平衡点不是渐近稳定的, 此时 $u_0 > 1/\alpha$, 并且参数满足条件(I4), 即

$$r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} + dlj^2 + be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0 - 1) < 0$$

在该条件下, 零解不是渐近稳定的。与定理 2.3 的结论吻合。

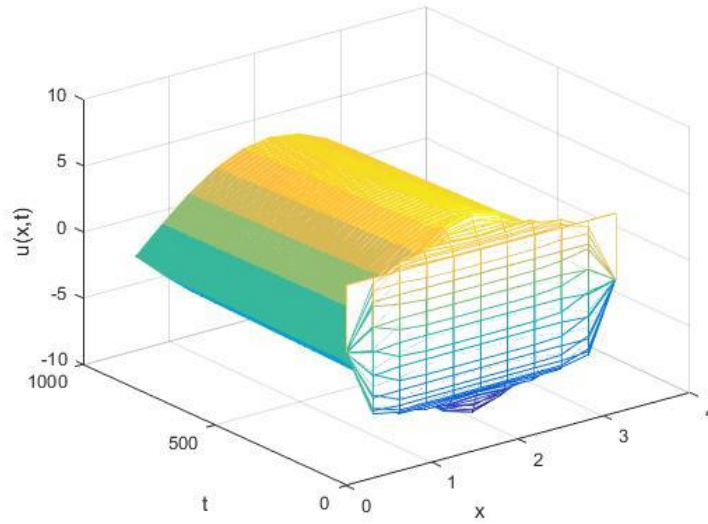


图 3-2 用向前欧拉差分法当步长 $h = \pi/10$ 和 $k = 1/4$, $\tau=0.0617$, $u_0=5$ 时求解方程 (2-2) 的数值解

接下来更改时间步长 $k=1/6$ 来看另一组数值算例, 如下图 3-3, 当 $\tau=0.75$, $u_0=0.3$ 时, 平衡点是渐近稳定的, 此时 $u_0 > 1/\alpha$, 并且参数满足条件(I5), 即

$$r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} + dlj^2 + be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0 - 1) > 0$$

在该条件下, 零解是渐近稳定的。

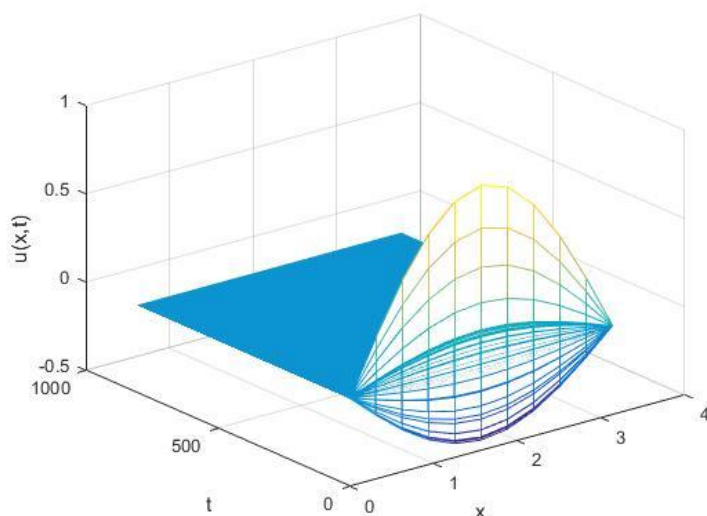


图 3-3 用向前欧拉差分法当步长 $h = \pi/10$ 和 $k = 1/6$, $\tau = 1$, $u_0 = 0.3$ 时求解方程(2-2)的数值解

如下图 2-4, 当 $\tau = 0.0643$, $u_0 = 5$ 时, 平衡点不是渐近稳定的, 此时 $u_0 > 1/\alpha$, 并且参数满足条件(I4), 即

$$r_1 + \frac{2u_0}{1+u_0^2} + dlj^2 + be^{-r_2\tau} e^{-\alpha u_0} (\alpha u_0 - 1) < 0$$

在该条件下, 零解不是渐近稳定的。与定理 2.3 的结论吻合。

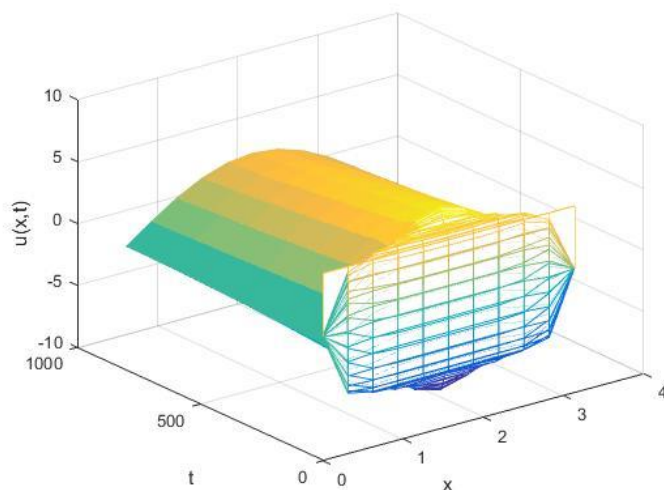


图 3-4 用向前欧拉差分法当步长 $h = \pi/10$ 和 $k = 1/6$, $\tau = 0.0643$, $u_0 = 5$ 时求解方程(2-2)的数值解

3.2 本章小结

本章通过适当选取方程(2-2)的参数，通过 Matlab 模拟(2-2)的解，并描绘出解曲面，所得结果充分验证了第二章所得的结论。

结 论

因为数值模拟和科学计算的需求,应用数值方法研究延迟偏微分方程保持原来系统动力学行为,成为一个重要的课题。其中分支研究又是一个非常重要的课题。本文就对具有时滞与扩散的云杉蚜虫模型的离散分支进行了研究。

本文对云杉蚜虫模型

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta u(x,t) - Du(x,t) - \frac{\beta u^2(x,t)}{\gamma^2 + u^2(x,t)} + q_1 e^{-\tilde{d}\tau} u(x,t-\tau) e^{-\alpha_1 u(x,t-\tau)}$$

运用向前欧拉差分格式进行了离散化处理,得到其离散形式的现行部分。利用其增广矩阵的特征方程的特征根的分布进行研究,对其正不动点稳定性和 Neimark-Sacker 分支进行了分析,得出了离散系统正不动点稳定和产生 Neimark-Sacker 分支的条件。并选取多组步长,利用数值模拟实验,得到的图像验证了我们理论的正确性。

我们在今后可以进一步对云杉蚜虫模型进行研究,也可以用其他差分格式对该方程进行离散,比如向后欧拉差分格式和 Crank-Nicolson 差分格式,研究这几种方法得到的离散系统的稳定性并对几种数值方法进行比较。另外,对于该系统分支方向和分支稳定性的研究还有待我们进一步的深入研究。

由此看来,今后仍有很多问题需要解决,对具有实际生物学意义的模型的分支问题还有更多的内容可以研究。

参考文献

- [1] 王媛媛. 几类延迟微分方程的数值离散分支研究[D]. 哈尔滨工业大学, 2013.
- [2] DEKKER K, VERWER J. Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations[M]. New York: North Holland, 1984.
- [3] BELLEN A, JACKIEWICZ Z, ZENNARO M. Stability Analysis of One-Step Methods for Neutral Delay Differential Equations[J]. Numerische Mathematik, 1988, 52: 605-619.
- [4] HOUT K, LUBICH C. Periodic Orbits of Delay Differential Equations under Discretization[J]. BIT Numerical Mathematics, 1998, 38(1): 72-91.
- [5] GAN S. Dissipativity of θ -Methods for Nonlinear Volterra Delay Integro Differential Equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 206(2): 898-907.
- [6] ZUBIK-KOWAL B. Stability in the Numerical Solution of Linear Parabolic Equations with a Delay Term[J]. BIT Numerical Mathematics, 2001, 41(1): 191-206.
- [7] HIGHAM D, SARDAR T. Existence and Stability of Fixed Points for a Discretised Nonlinear Reaction-Diffusion Equation with Delay[J]. Applied Numerical Mathematics, 1995, 18(1-3): 155-173.
- [8] TIAN H. Asymptotic Stability of Numerical Methods for Linear Delay Parabolic Differential Equations[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2008, 56(7): 1758-1765.
- [9] LIU M, ZHANG C, XU X. Hopf Bifurcation for a Class of Neutral Three Neurons Network[C]. Proceedings of the 31st Chinese Control Conference, 2012: 3389-3391.
- [10] LIU M, XU X. Bifurcation Analysis in a Two-Dimensional Neutral Differential Equation[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013(2013): 367589.
- [11] HENRÍQUEZ H, PIERRI M, PROKOPCZYK A. Periodic solutions of abstract neutral functional differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 385(2): 608-621.
- [12] LUDWIG D, JOHNS D, HOLLING C. Qualitative Analysis of Insect Outbreak System: The Spruce Budworm and Forest[J]. Journal of Animal Ecology, 1978, 47(1): 315-332.
- [13] LUDWIG D. Spatial Patterning of the Spruce Budworm[J]. Journal of

- Mathematical Biology, 1979, 8(3): 217-258.
- [14] WANG S, YEH T. S-Shaped and Broken S-Shaped Bifurcation Diagrams with Hysteresis for a Multiparameter Spruce Budworm Population Problem in One Space Dimension[J]. Journal of Differential Equations, 2013, 55(5): 812-839.
- [15] VAIDYA N, WU J. Modeling Spruce Budworm Population Revisited: Impact of Physiological Structure on Outbreak Control[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2008, 70(3): 769-784.
- [16] XU X, WEI J. Bifurcation Analysis of a Spruce Budworm Model with Diffusion and Physiological Structures[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 262(10): 5206-5230.
- [17] RUAN S, WEI J. On the Zeros of Transcendental Functions with Applications to Stability of Delay Differential Equations with Two Delays[J]. Dynamics of Continuous, Discrete Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis, 2002, 10: 863-874.

致 谢

弹指一挥间，大学四年已经接近了尾声，一路走来，收获颇丰。大学的学习生活并不是一帆风顺的，这期间遇到了很多的困难，但我也因此成长了许多。我的成长得益于我敬爱的导师马强、辅导员杨薇、推荐老师魏俊杰、丁效华和一直帮助我的学姐石瑶和学长王振宇，还有一直支持、帮助我的同学们以及爱我、懂我的家人。现谨借此文表达我最真诚的感谢。

我首先要感谢我的导师马强。马老师是一位平易近人、学识渊博、讲课认真、对学生负责的老师，令人印象深刻。在学术上，他对学生对自己都严格要求，在科技立项讨论班上，他会让学生讲解每一个可能出现错误或是学生可能不理解的知识；在工作上，作为老师他兢兢业业，每天都会出现在办公室里，不曾懈怠；在授课上，他别出心裁，总能循序渐进的指导我们的专业学习和论文的推导。在完成毕业设计论文的过程中，他总是能给予我帮助，让我在迷茫的时候找到正确的方向，可以说，我能够顺利完成论文离不开马老师的辛勤付出。在这里，我要再次真诚的感谢马老师一路上的悉心指导。

其次，我还要感谢帮助过我的师兄、师姐们，很高兴能够与你们相识相交成为朋友。

最后，感谢百忙之中前来的各位评审老师。感谢你们的宝贵意见。