哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

# 2017年毕业设计答辩

## 题目:具有时滞和扩散的云杉蚜虫模型的离散分支分析

指导教师：马强

答辩人：姚朕

专业：信息与计算科学

1.研究内容

2.数值实验

3.总结

# 1. 研究内容

具有扩散和时滞的云杉蚜虫模型如下

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=d_1\Delta u(x,t)-Du(x,t)-\frac{\beta u^2(x,t)}{\gamma^2+u^2(x,t)}+q_1\mathrm{e}^{-\tilde{d}\tau}u(x,t-\tau)\mathrm{e}^{-\alpha_1 u(x,t-\tau)} \qquad (1)$$

研究了该方程不动点的稳定性和正不动点处分支的存在性。其中，$d_1$是扩散系数，$D$是成年蚜虫的平均死亡率，$\tilde{d}$ 是未成年蚜虫的平均死亡率，$\beta$是鸟的捕食率，$\gamma$ 则是捕食率达到最大值的一半时蚜虫的数量，$\tau$ 则是蚜虫的成熟时间延迟，$b(u)=q_1 u\mathrm{e}^{-\alpha_1 u}$ $(q_1, \alpha_1>0)$ 则是蚜虫的出生方程。

# 1. 研究内容

对上述方程，考虑它在Dirichlet边界条件下的情况，为了简化模型，可以作一系无量纲变换得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - r_1 u - \dfrac{u^2}{1+u^2} + b\mathrm{e}^{-r_2\tau} u_\tau \mathrm{e}^{-\alpha u_\tau}, \ x \in \Omega, \ t > 0 \\
u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ t > 0 \\
u = \eta(x,t) \geq 0, \ x \in \Omega, \ t \in [-\tau, 0]
\end{cases}
\qquad (2)
$$

其中$\Omega = (0,\pi)$，$\eta(x,t)$ 为Holder连续，$\eta(x,0) \in C^1(\bar{\Omega})$.

# 1. 研究内容

显然方程(2)存在两个不动点 $u=0$ 和 $u_0$ ，$u_0$满足下列方程

$$r_1+\frac{u}{1+u^2}=be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u}$$

当$be^{-r_2\tau}\le r_1$时，那么 $u=0$ 是(2)的唯一不动点；当 $be^{-r_2\tau}>r_1$时且$\alpha>1$，除了零不动点之外，方程(2)还存在唯一的正不动点 $u_0$. 对(2)式进行变换 $\hat{u}=u-u_0$，将不动点 $u_0$ 变为原点，得到方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=d\tau\Delta u(x,t)-\tau[r_1(u(x,t)+u_0)$$

$$-\frac{(u(x,t)+u_0)^2}{1+(u(x,t)+u_0)^2}+be^{-r_2\tau}(u(x,t-1)+u_0)e^{-\alpha u(u(x,t-1)+u_0)}]$$

# 1. 研究内容

考虑 $be^{-r_2\tau} > r_1$ 时的情况，有

$$0 \le \tau < \tau_{\max} := \frac{1}{r_2}\ln\frac{b}{r_1}$$

并记

$$g_1(u) = r_1(1+u^2) + u,\ g_2(u,\tau) = be^{-r_2\tau}(1+u^2)e^{-\alpha u}$$

# 1. 研究内容

接下来运用向前欧拉差分格式离散(2)式，设 $k$ 和 $h$ 为时间、空间步长，$k$ 满足 $mk=1$，定义网格点

$$t_n = nk,\quad n=-m,-m+1,\cdots$$
$$x_i = ih,\quad i=0,1,\cdots,N$$

其中 $h=\pi/N$. 离散(2)式得到

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} = d\tau\dfrac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{h^2} \\ \qquad\qquad -\tau\left[r_1(u_i^n+u_0)-\dfrac{(u_i^n+u_0)^2}{1+(u+u_0)^2}+b\mathrm{e}^{-r_2\tau}(u_i^{n-m}+u_0)\mathrm{e}^{-\alpha u(u_i^{n-m}+u_0)}\right] \\ u_0^n=u_N^n=0,\ n=0,1,\cdots \\ u_i^n=\eta(x_i,t_n),\ i=0,1,2,\cdots,N;\ n=-m,-m+1,\cdots,0 \end{cases} \tag{3}$$

# 1. 研究内容

得到(3)式的线性部分

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} = d\tau \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \\ \qquad\qquad -\tau\left[\left(r_1+\dfrac{2u_0}{(1+u_0{}^2)^2}\right)u_i^n - \left(r_1+\dfrac{2u_0}{1+u_0{}^2}\right)(1-\alpha u_0)u_i^{n-m}\right] \\ u_0^n = u_N^n = 0,\ n=0,1,\cdots \\ u_i^n = \eta(x_i,t_n),\ i=0,1,2,\cdots,N;\ n=-m,-m+1,\cdots,0 \end{cases} \tag{4}$$

上式可以简记为

$$U^{n+1} = AU^n + CU^{n-m} \tag{5}$$

其中 $l = k/h^2$,

## 1. 研究内容

$$U^n = (u_1^n, \cdots, u_{N-1}^n)^{\mathrm{T}}$$

和

$$\begin{cases} A = \left[1 - 2d\tau l - \tau k\left(r_1 + \dfrac{2u_0}{(1+u_0^{\ 2})^2}\right)\right] I + d\tau l S \\ C = \tau k\left(r_1 + \dfrac{2u_0}{1+u_0^{\ 2}}\right)(1-\alpha u_0) I \end{cases}$$

$I$ 为单位矩阵，且

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

# 1. 研究内容

将(5)式写为一阶差分方程的增广系统

$$\Lambda^{n+1} = H\Lambda^{n}$$

其中

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & 0 & -C \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}$$

其特征方程为

$$\det(\lambda I - H) = \prod_{\lambda_j \in \sigma(S)} \left\{ \lambda^{m+1} - \left[ 1 - 2d\tau l - \tau k \left( r_1 + \frac{2u_0}{(1+u_0^{\,2})^2} \right) + d\tau l \lambda_j \right] \lambda^{m} + \tau k \left( r_1 + \frac{u_0}{1+u_0^{\,2}} \right)(1 - \alpha u_0) \right\}$$

# 1. 研究内容

因此我们只需研究

$$\lambda^{m+1}-\left[1-2d\tau l-\tau k\left(r_1+\frac{2u_0}{(1+u_0^{\,2})^2}\right)+d\tau l\lambda_j\right]\lambda^m+\tau k\left(r_1+\frac{u_0}{1+u_0^{\,2}}\right)(1-\alpha u_0)=0 \tag{6}$$

**引理1** 对于充分小的$\tau>0$，当$u_0\le 1/\alpha$，方程(6)的所以根的模小于1.

**引理2** 如果$b>r_1$和$\alpha>1$ ，那么$u_0(\tau)$在$[0,\tau_{\max})$上是一个递减函数。

**定理1** 假设$\alpha>1$，并记 $b_0=\mathrm{e}r_1+\mathrm{e}\alpha/(1+\alpha^2)$

(1)若$r_1<b\le b_0$，则对于方程(2)，$u_0(\tau)$对于任意$\tau\in[0,\tau_{\max})$是局部渐近稳定的。

(2)若$b>b_0$，则存在一个$\hat{\tau}\in(0,\tau_{\max})$，使得 $g_1(1/\alpha)=g_2(1/\alpha,\hat{\tau})$，并且对于方程(2)，$u_0(\tau)$对于任意的是$\tau\in(\hat{\tau},\tau_{\max})$局部渐近稳定的。

# 1. 研究内容

为了方便叙述，定义：

(I1) $\tau=\hat{\tau}$ 且 $u_0=\dfrac{1}{\alpha}$，

(I2) $\tau\in(\hat{\tau},\ \tau_{\max})$ 即 $u_0\le\dfrac{1}{\alpha}$， $r_1+\dfrac{2u_0}{1+u_0{}^2}+dlj^2+be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0-1)<0$

(I3) $\tau\in(\hat{\tau},\ \tau_{\max})$ 即 $u_0\le\dfrac{1}{\alpha}$， $r_1+\dfrac{2u_0}{1+u_0{}^2}+dlj^2+be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0-1)>0$

(I4) $\tau\in(\hat{\tau},\ \tau)$ 即 $u_0>\dfrac{1}{\alpha}$， $r_1+\dfrac{2u_0}{1+u_0{}^2}+dlj^2+be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0-1)<0$

(I5) $\tau\in(\hat{\tau},\ \tau)$ 即 $u_0>\dfrac{1}{\alpha}$， $r_1+\dfrac{2u_0}{1+u_0{}^2}+dlj^2+be^{-r_2\tau}e^{-\alpha u_0}(\alpha u_0-1)>0$

# 1. 研究内容

**引理3** 设空间步长 $h$ 充分小，$l$ 为固定值，并且满足(I1)、(I3)、(I5)中任意一个，那么特征方程(6)没有根在单位圆上。

**引理4** 设 $\lambda_\xi(\tau)=\bar{r}_\xi(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}w_\xi(\tau)}$是特征方程(6)在 $\tau=\tau_\xi$ 附近满足$\bar{r}_\xi(\tau_\xi)=1$和$w_\xi(\tau_\xi)=w_\xi$的一个根，那么可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}\bar{r}_\xi(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=\tau_\xi,w=w_\xi}>0$$

**定理2** 对离散系统(4)，当空间步长 $h$ 充分小且 $l$ 是定值并且 $Q>0$，得到

(1)若满足(I1)、(I3)、(I5)中的任意一个条件，则零解是渐近稳定的。

(2)若满足(I2)、(I4)中的任意一个条件，则零解是不稳定的；当$\tau=\tau_\xi$，$\xi=1,2,\cdots,[\frac{m-1}{2}]$时，系统(4)在 $\tau=\tau_\xi$处经历Neimark-Sacker分支。

## 2. 数值实验

对于方程(3)

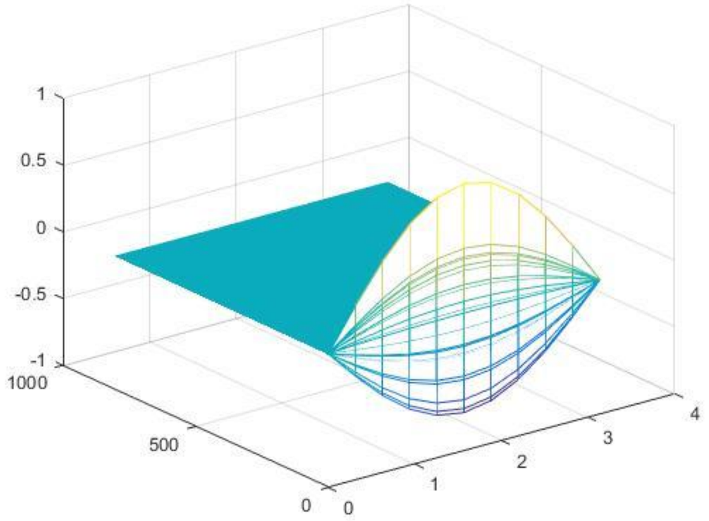
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - r_1 u - \dfrac{u^2}{1+u^2} + b\mathrm{e}^{-r_2\tau} u_\tau \mathrm{e}^{-\alpha u_\tau},\ x \in \Omega, t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, t > 0 \\ u = \eta(x,t) \ge 0, x \in \Omega, t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

选取如下数值参数，通过Matlab给出数值实验

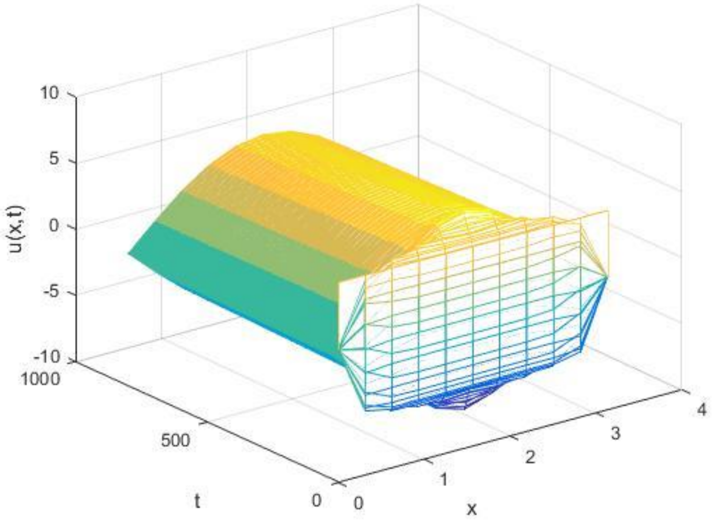
$$r_1 = 0.1980\,, r_2 = 1.1\,, b = 648649.8\,, \alpha = 11.8572\,, d = 0.03$$

# 2. 数值实验

$h=\pi/10$，$k=1/4$ 时：



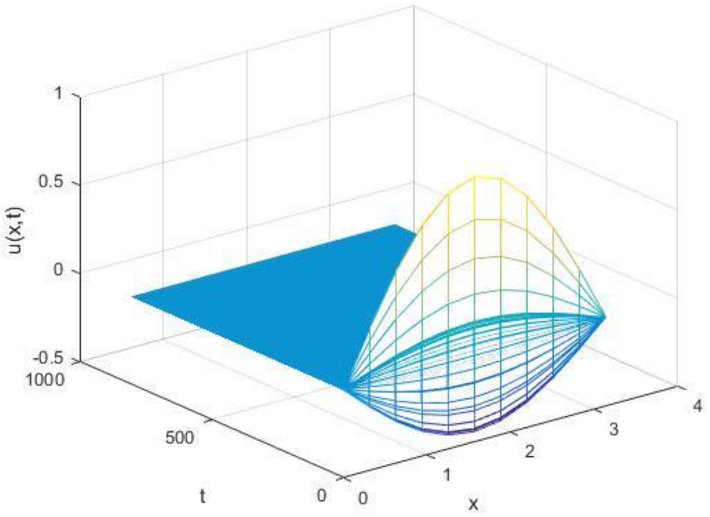

向前欧拉差分法当$\tau$=1，$u_0=0.3$，此时$u_0>1/\alpha$，满足条件(I5).



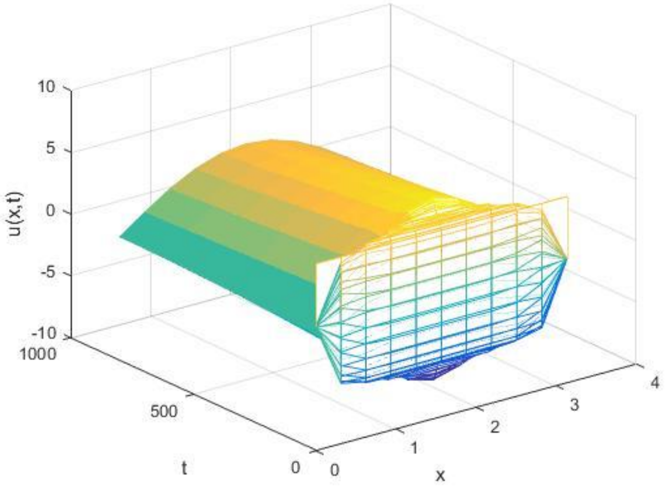

向前欧拉差分法当 $\tau$=0.0617，$u_0=5$，此时 $u_0>1/\alpha$，满足条件(I4).

## 2. 数值实验

$h=\pi/10$，$k=1/6$ 时：




向前欧拉差分法当$\tau$=1，$u_0=0.3$，此时$u_0>1/\alpha$，满足条件(I5).




向前欧拉差分法当$\tau$=0.0643，$u_0=5$，此时 $u_0>1/\alpha$ ，满足条件(I4).

# 3. 总结

本文对云杉蚜虫模型运用向前欧拉差分格式进行了离散化处理，并对其正不动点稳定性和Neimark-Sacker分支进行了分析，得出了正不动点稳定和产生Neimark-Sacker分支的条件，并用数值模拟实验对其进行验证。

感谢各位老师！