微分几何笔记

钱振烨

2024 年 6 月 15 日

第一版前言

作者：钱振烨

2024 年 6 月 15 日

目录

第一章　局部曲线理论

1.1　$\mathbf{E}^3$ 中的曲线

1.1.1　回顾

回顾 $\mathbf{E}^3$ 中的幺正标架 $\{O;\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3\}$，对任一向量 $\mathbf{x}\in\mathbf{E}^3$，有线性表示

$$\mathbf{x}=x^i\mathbf{E}_i \tag{1.1}$$

注记 1.1.1. 这里 $x^i\mathbf{E}_i:=\sum_{i=1}^3 x^i\mathbf{E}_i$，称为 *Einstein* 求和约定。

倘若 $\mathbf{x}$ 为关于单参数 t 的向量值函数，则公式1.1表示为 $\mathbf{x}(t)=x^i(t)\mathbf{E}_i$，其中 $x^i(t)$ 称为 $\mathbf{x}(t)$ 的第 i 个分量函数。向量值函数 $\mathbf{x}$ 的可微性由每个分量函数特征，即

$$\mathbf{x}'=\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\left(\frac{dx^1}{dt},\frac{dx^2}{dt},\frac{dx^3}{dt}\right) \tag{1.2}$$

称 $\mathbf{x}'$ 为 $\mathbf{x}$ 在 t 处的**切向量**。同时，定义模长为

$$|\mathbf{x}'|=\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|=\left(\sum_{i=1}^3\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

定义 1.1.1. 称可微同胚 $\mathbf{x}:I(\subset\mathbb{R})\to\mathbf{E}^3$ 为 **(局部) 正则曲线** (一般记为 C)，如果切向量 $\mathbf{x}'$ 非零。

切向量非零点称**正则点**，否则称**奇点**。事实上“正则点”的定义可视为一般 (微分) 流形间可微映射的特殊情况，本质上表示可微映射的切映射非退化[1]，会在流形理论中详细展开，[2, 8, 10, 5, 7] 中皆有论述，有兴趣的读者可以自行翻阅。

例子 1.1.1. 显然曲线 $\mathbf{x}=(t^3,t^2,0)$ 在 $(0,0,0)$ 处奇异，俗称尖点。

[1]即“大范围”的**浸入**或“小范围”的**嵌入**，更多涉及流形的说法我们留给后续的课程。

1.1.2　弧长与弧长参数

设正则曲线 C 的参数化 $\mathbf{x}: I=[0,1]\to\mathbf{E}^3$，区间 I 的分割 T 为 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$。令 $||T||=\max_i\{t_i-t_{i-1}\}$，考察 *Riemann* 和

$$L(\mathbf{x},T):=\sum_{i=1}^{n}|\mathbf{x}(t_i)-\mathbf{x}(t_{i-1})| \tag{1.3}$$

等式1.3两边对 $||T||$ 取极限，称曲线 C 可求长，如果存在极限

$$s:=\lim_{||T||\to 0}L(\mathbf{x},T)=\lim_{||T||\to 0}\sum_i\frac{|\mathbf{x}(t_i)-\mathbf{x}(t_{i-1})|}{t_i-t_{i-1}}(t_i-t_{i-1})$$

其中 s 称 C 的**弧长**，写成变上限积分为

$$s(t)=\int_0^t\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt \tag{1.4}$$

两边对 t 求导，可得

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| \tag{1.5}$$

注记 1.1.2. 物理上看，等式*1.5*表示瞬时速率在数值上等于瞬时速度。

考虑另一组参数 τ。方面起见，取微分同胚 $t=t(\tau)$，考察公式1.4

$$s(t)=\int_0^t\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|dt=\int_0^\tau\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}\right|\frac{dt}{d\tau}d\tau=\int_0^\tau\left|\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\right|d\tau$$

若以弧长 s 为参数，由等式1.5可知

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right|=\frac{ds}{ds}=1$$

因此切向量**单位化**；反之，取单位切向量，可知

$$s(t)=\int_0^t dt=t$$

总结以下命题。

命题 1.1.1. 弧长参数 s 特征了单位切向量。

考虑另一组幺正标架 $\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$，显然过渡矩阵正交，记为 $\mathbf{T}=(t_i^j)$，使得

$$y^j=t_i^j x^i \tag{1.6}$$

其中 $\mathbf{x}=x^i\mathbf{E}_i=y^j\mathbf{e}_j$。考察弧长

$$\begin{aligned}\int_0^t\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|&=\int_0^t\left(\sum_{j=1}^3\left(\frac{dy^j}{dt}\right)^2\right)^{\frac12}dt\\&=\int_0^t\left(\sum_{j=1}^3\left(t_i^j\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right)^{\frac12}dt\\&=\int_0^t\left(\sum_{i=1}^3\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2\right)^{\frac12}dt\\&=s(t)\end{aligned}$$

第三个等号利用 $\mathbf{T}\mathbf{T}^T=\mathbf{I}$ 可得。因此弧长 $s(t)$ 与参数和标架[2]的选取无关，是一个**几何量**[3]。

1.1.3　曲率与挠率

为作区分，往后对弧长参数求导，默认使用 $Newton$ 记号，即 $\dot{\mathbf{x}}:=\frac{d\mathbf{x}}{dt}$，切向量用 T 表示。选取弧长作为参数，切向量单位化，于是“变化”仅体现在方向上，随之定义“弯曲”。

定义 1.1.2. 称曲线 C 切向量 T 在 s 处的“变化率” $\kappa:=|\dot{T}|(=|\ddot{x}|>0)$ 为**曲率**。

注意到 $T\cdot T=1$，两边对 s 求导，可知 $T\cdot\dot{T}=0$，即 $T\perp\dot{T}$。

定义 1.1.3. 若 $\kappa\neq0$，在 $\dot{T}$ 的方向上取单位向量 N，称为**主法向量**，取 $B=T\times N$ 为**从法向量**，于是在 s 处给定幺正标架 $\{O;T,N,B\}$，称为 $Frenet$ **标架**。

由定义可知 $\dot{T}=\kappa N$，一般称为**曲率向量**。光滑与正则性良好时，$Frenet$ 标架可微地依赖于 s。当 $\kappa\neq0$ 时，N,B 被唯一确定，我们有

1. 注意到 $T\cdot B=0$，两边对 s 求导可得 $T\cdot\dot{B}=-(\kappa N)\cdot B=0$，即 $\dot{B}\perp T$。
2. 又注意到 $B\cdot B=1$，两边对 s 求导可得 $\dot{B}\cdot B=0$，即 $\dot{B}\perp B$。

因此 $\dot{B}\perp span\{T,B\}$，故 $\dot{B}//N$，我们引出如下定义。

定义 1.1.4. 若 $\kappa\neq0$ 令 $\dot{B}=-\tau N$，称 τ 为曲线的**挠率**。

[2]以后我们验证几何量都不再关心标架的选取，一般都是无关的，这一点在微分流形课程中会有更严格的叙述。

[3]与标架和参数选取无关的量，称为**几何量**。

下面考察弧长参数下曲率挠率的计算。由定义易知

$$\kappa = |\ddot{\mathbf{x}}|$$

对 $\dot{B} = -\tau N$，两边内积 N，可得

$$\tau = -(T, \dot{N}, N) \tag{1.7}$$

又 $N = \frac{1}{\kappa}\dot{T}$，两边对 s 求导可得

$$\dot{N} = \dot{\left(\frac{1}{\kappa}\right)}\dot{T} + \frac{1}{\kappa}\ddot{T} \tag{1.8}$$

将等式1.8带入公式1.7有

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2}(T, \dot{T}, \ddot{T})$$

即

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \dddot{\mathbf{x}})}{|\ddot{\mathbf{x}}|^2} \tag{1.9}$$

例子 1.1.2. 考察单位圆周 S^1，弧长参数表示为 $\mathbf{x} = (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}, 0)$，计算曲率

$$\kappa = |\ddot{\mathbf{x}}| \equiv \frac{1}{r}$$

定义 1.1.5. 称 $\rho = \frac{1}{\kappa}$ 为**曲率半径**，$\mathbf{x} + \rho N$ 为曲率中心。

下面说明曲率和挠率为几何量。取两个幺正标架 $\{O, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ 和 $\{O', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$。曲线 C 的表示分别为 $\mathbf{x}_1 = x^i\mathbf{E}_i$ 和 $\mathbf{x}_2 = y^i\mathbf{e}_i$，存在刚体变换使得

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}, \quad \text{其中 } \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \text{ 且 } \mathbf{b} \text{ 为常数向量}$$

于是计算

$$\kappa_2^2 = |\ddot{\mathbf{x}}_2|^2 = (\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_2)^T(\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_2) = |\ddot{\mathbf{x}}_1|^2 = \kappa_1^2$$

和

$$\tau_2 = \frac{(\dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2, \dddot{\mathbf{x}}_2)}{|\ddot{\mathbf{x}}_2|^2} = det(\mathbf{A})\frac{(\dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2, \dddot{\mathbf{x}}_2)}{|\ddot{\mathbf{x}}_1|^2} = \tau_1$$

故与幺正标架的选取无关。取一般参数 t，我们有结论：

一般参数下的曲率与挠率

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}{|\mathbf{x}'|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''')}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2} \tag{1.10}$$

证明. 注意到 $\kappa(t) = |\ddot{\mathbf{x}}| = \left|\frac{dT}{ds}\right|$，变形得到

$$\kappa(t) = \left|\frac{dT/dt}{ds/dt}\right| = \left|\frac{dT/dt}{|dx/dt|}\right| \triangleq \frac{|T'|}{|\mathbf{x}'|}$$

计算 T'

$$T' = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}'|}\right) \tag{1.11}$$

注记 1.1.3. 等式*1.11*第三个等号 $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ 可以直接来自于对“速度向量” $\mathbf{x}'$ 的单位化，也可以源于链式法则。

进一步推导等式1.11

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}'|}\right) = \frac{\mathbf{x}''|\mathbf{x}'| - \mathbf{x}'|\mathbf{x}'|'}{|\mathbf{x}'|^2}$$

注意到 $|\mathbf{x}'| = (\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}')^{\frac{1}{2}}$，于是

$$|\mathbf{x}'|' = \frac{\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}'|}$$

带入等式1.11，可得

$$T' = \frac{(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}')\cdot\mathbf{x}'' - (\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'')\cdot\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3}$$

由双重外积公式,得到 $T' = \frac{(\mathbf{x}'\times\mathbf{x}'')\times\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3}$,带回原式易得。又注意到 $\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = |\mathbf{x}'|\dot{\mathbf{x}}$，同理得到 $\mathbf{x}''$ 和 $\mathbf{x}'''$，易知挠率。 □

弧长参数下，直线由微分方程 $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = 0$ 特征，其等价于 $\kappa \equiv 0$，我们得到如下命题。

命题 1.1.2. $\kappa \equiv 0$ 特征了直线。

此外，若 $\kappa \neq 0$，考虑 $Im(\mathbf{x}) \subset span\{T, N\}$，取单位法向量 $\mathbf{n}_0 \perp span\{T, N\}$，恒等式 $(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0))\cdot\mathbf{n}_0 \equiv 0$ 两边对 s 求导可得

$$T\cdot\mathbf{n}_0 \equiv 0$$

再求导得到

$$N\cdot\mathbf{n}_0 \equiv 0$$

因此 $B = \epsilon\mathbf{n}_0,\quad \epsilon = \pm 1$，故 $\dot{B} \equiv 0$，即 $\tau \equiv 0$。反之，若 $\tau \equiv 0$，以上过程可逆，$\mathbf{x} - \mathbf{x}(0) \equiv 0$ 特征了平面曲线。故我们得到以下命题。

命题 1.1.3. $\tau \equiv 0$ 特征了平面曲线。

1.1.4 *Frenet* 公式

我们对向量组 (矩阵)

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

作用一个微分算子 d，由前面的讨论，得到一个常微分方程组

$$\begin{pmatrix} dT \\ dN \\ dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tds \\ Nds \\ Bds \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

其中 a,b 为关于 s 的函数。对 $\dot{N}$ 两边内积分别 T,B 得到

$$T\cdot\dot{N} = a, \quad B\cdot\dot{N} = b \tag{1.13}$$

注意到 $T\cdot N = B\cdot N = 0$，对 s 求导得到 $T\cdot\dot{N} = -\kappa|N|^2$ 和 $B\dot{N} = \tau|N|^2$，故

$$a = -\kappa, \quad b = \tau$$

于是

$$\begin{pmatrix} dT \\ dN \\ dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tds \\ Nds \\ Bds \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

定义 1.1.6. 我们称方程组1.14为 *Frenet* **公式**。

注记 1.1.4.

1. *上述矩阵是一个***反对称***矩阵，事实上微分算子 d 在单位正交基上的作用有如此形式*[4]*。*

2. *根据常微分方程理论，的方程组1.14局部存在唯一解。*

1.2 平面曲线与高维曲线

下面我们讨论一般的平面曲线，即 $\tau\equiv 0$。事实上，从历史观点看，最先研究的是平面上的曲线，其中不乏精深的工作；其次，纵然 $\mathbf{E}^2$ 上曲线亦然可以视为 $\mathbf{E}^3$ 中的曲线，但在法向量的选取上有所不同。

定义 1.2.1. 对于平面曲线 $\mathbf{x}$，定义**切向量** $T := \dot{\mathbf{x}}$，选取 N_r 为 T 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角，称为曲线的**相对法向量**。

[4]见公式1.16，节3.2中真正给出了这种反对称性的刻画。

注记 1.2.1. 此时 $\{\mathbf{x}; T, N_r\}$ 成为**右手系**，相应的 *Frenet* **公式**表达为

$$\begin{pmatrix} dT \\ dN_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_r \\ -\kappa_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tds \\ N_r ds \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

其中 κ_r 称为**相对曲率**。

从 $\mathbf{E}^3$ 中看，有 $dN = -\kappa T ds (\kappa \geq 0)$，此时有

$$N_r = \epsilon N, \quad \epsilon = \pm 1$$

对比公式1.15发现 $\kappa N = (\epsilon\kappa)(\epsilon N) = (\epsilon\kappa) N_r$，因此

$$\kappa_r = \epsilon\kappa$$

于是 $\kappa = |\kappa_r|$。事实上，我们有以下性质：

[4] 的 P11-15 讨论了高维空间中的曲线。一般地，对于 $\mathbf{E}^n$ 中的曲线，有 *Frenet* **公式**：

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ \vdots \\ de_{n-1} \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\omega_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 ds \\ e_2 ds \\ \vdots \\ e_{n-1} ds \\ e_n ds \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

其中 $\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-2$，而 ω_{n-1} 符号不定，本质上源于 e_n 由 $Gram-Schimdt$ 正交化得到，此时 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 自成右手系。

以下定理本质地刻画了曲线，为微分方程与几何的研究提供了典范，后续我们将见到这个定理的曲面版本。

定理 1.2.1 (曲线论基本定理)**.** *区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上连续可微函数 $\bar{\kappa}(s) > 0$ 和连续函数 $\bar{\tau}(s)$，在平移和正交变换下唯一特征了以 s 为弧长参数的正则曲线 $\mathbf{x}$，其曲率和挠率分别为 $\bar{\kappa}(s)$ 和 $\bar{\tau}(s)$。*

证明. 证明留给 *Frobenius* 定理的应用。 □

1.3 曲线论基本定理与应用

曲线论基本定理，即定理1.2.1有如下应用：

例子 1.3.1. 设弧长参数 s 下的**圆柱螺线**为

$$\mathbf{x} = (r\cos\sigma s, r\sin\sigma s, a\sigma s)$$

其中 $r, a, \sigma = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}$ 为常数。易知 $\kappa \equiv \sigma^2 r$ 和 $\tau \equiv \sigma^2 a$。可以得到一个简单的事实: 恒定的曲率挠率特征了圆柱螺线。

注记 1.3.1. *注意到 $\kappa \propto \frac{1}{r}$ 以及 $\tau \propto a\sigma$，可见曲率与"横向半径"呈负相关，挠率与"爬升速度"呈正相关。*

把这个问题一般化。

例子 1.3.2. 称切向量与固定方向成定角的非直曲线为**一般螺线**，$\tau/\kappa \equiv C$ 特征了一般螺线。

证明. 先考虑充分性。给定非直正则曲线 $\mathbf{x}$ 和固定单位常向量 $\mathbf{a}$ 使得 $T\mathbf{a} \equiv \cos\theta$，其中 θ 为常角。对 s 求导得 $N \cdot \mathbf{a} \equiv 0$，因此 $\mathbf{a} \in span\{T, B\}$。不妨 $\mathbf{a} = \cos\theta T + \sin\theta B$，两边对 s 求导得到 $\tau/\kappa \equiv \cot\theta$。必要性只要定义方向向量为 $\mathbf{a} = \cos\theta T + \sin\theta B$，即可，剩余细节为充分性的逆。 □

1.4　利用 *Frenet* 公式研究局部性态

这里研究的曲线默认都是光滑的，对 $s = 0$ 处作 *Taylor* 展开:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}(0) = s\dot{\mathbf{x}}(0) + \frac{1}{2}s^2\ddot{\mathbf{x}}(0) + \frac{1}{6}s^3\dddot{\mathbf{x}}(0) + \circ(s^3) \tag{1.17}$$

注意到

$$\dddot{x} = -\kappa^2 T + \dot{\kappa}N + \kappa\tau B$$

于是

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}(0) = (s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3)T + (\frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\dot{\kappa}s^3)N + (\frac{1}{6}\kappa\tau s^3)B + \circ(s^3) \tag{1.18}$$

令 $y^1 = s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3, y^2 = \frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\dot{\kappa}s^3, y^3 = \frac{1}{6}\kappa\tau s^3$, 得到曲线 $\mathbf{y} := \mathbf{x}(0) + y^1 T + y^2 N + y^3 B$，与原曲线有三**阶切触**。

定义 1.4.1. 定义曲线在一点处的**法平面**为 $span\{N, B\}$，**从切平面**为 $span\{T, B\}$，**密切平面**为 $span\{T, N\}$。

从切触曲线上不难发现: 挠率的正 (负) 刻画了曲线自下 (上) 而上 (下) 地穿过密切平面。

曲线弧长参数的刻画是关键，我们以几道习题结束局部曲线论。

练习 1. *设两曲线可建立 1-1 对应，使它们在对应点有相同的主法线，则称它们为 Bertrand 曲线，其中一条称为另一条的***侣线***。证明: 它们在对应点的距离为常数，切线作成定角。*

第二章　局部曲面理论

2.1　$\mathbf{E}^3$ 中的曲面

2.1.1　回顾

定义 2.1.1. 设 D 为 $\mathbf{E}^2$ 中一连通区域，其上坐标为 (u^1, u^2)，称同胚 $\mathbf{x}: D \to \mathbf{E}^3$，参数表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2) := (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2))$$

为 **(局部) 正则曲面**，如果

1. 每个坐标函数 x^i 具有 $k(k \geq 2)$ 阶连续偏导数，
2. 切向量 $\mathbf{x}_\alpha := \partial \mathbf{x}/\partial u^\alpha (\alpha = 1, 2)$ 线性无关。

注记 2.1.1. *条件 1. 保证曲面具有一定的光滑性; 条件 2. 保证曲面切空间非退化，代数上等价于同胚* $\mathbf{x}$ *的 Jacobian 矩阵*

$$D(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial u^1 & \partial x^1/\partial u^2 & \partial x^1/\partial u^3 \\ \partial x^2/\partial u^1 & \partial x^2/\partial u^2 & \partial x^2/\partial u^3 \end{pmatrix}$$

*秩为 2。正则性限定了局部微分几何主流讨论的对象，某些非正则点被排除，例如锥面的***尖点**。

固定 u_0^β，改变 $u^\alpha (\alpha \neq \beta)$，在曲面上生成的轨迹称为参数 $u^\alpha-$ **线**；离散改变固定值，得到**参数网**。

2.1.2　切空间与法向量场

固定一点，记 $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)$。

定义 2.1.2. 称 $T_{\mathbf{x}_0}M = span\{\mathbf{x}_1|_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{x}_2|_{\mathbf{x}_0}\}$ 为曲面 M 在 $\mathbf{x}_0$ 处的**切空间** (或称切平面)，其中元素称切向量。

注记 2.1.2. *记号 span 是形式上的，事实上我们关心切向量的起点。*

定义 2.1.3. 称可微映射 $\mathbf{n} := \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 / |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|$ 为曲面 M 上的 (单位) **法向量场**。

注记 2.1.3. 曲面的光滑性保证 $\mathbf{n}$ 可微地依赖于 u^1, u^2。

下面验证切空间与法向量场不依赖于参数的选取。考虑另一连通区域 $\bar{D}$ 连同坐标 $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$，有微分同胚：

$$\begin{cases} \bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2) \\ \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

即

$$\left(\frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)}\right)_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \partial\bar{u}^1/\partial u^1 & \partial\bar{u}^1/\partial u^2 \\ \partial\bar{u}^2/\partial u^1 & \partial\bar{u}^2/\partial u^2 \end{pmatrix}$$

满秩。

考察切向量

$$\mathbf{x}_\alpha = \frac{\partial x}{\partial u_\alpha} = \begin{pmatrix} \partial\mathbf{x}/\partial\bar{u}^1 & \partial\mathbf{x}/\partial\bar{u}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\bar{u}^1/\partial u^\alpha \\ \partial\bar{u}^2/\partial u^\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2$$

注意到

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\mathbf{x}/\partial u^1 & \partial\mathbf{x}/\partial u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\bar{u}^1/\partial u^1 & \partial\bar{u}^1/\partial u^2 \\ \partial\bar{u}^2/\partial u^1 & \partial\bar{u}^2/\partial u^2 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

因此 $T_{\mathbf{x}}M = span\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = span\{\mathbf{x}_{\bar{1}}, \mathbf{x}_{\bar{2}}\}$，其中 $\mathbf{x}_{\bar{\alpha}} = \partial\mathbf{x}/\partial\bar{u}^\alpha, (\alpha = 1, 2)$。

此外，考察 $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$，注意到

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial x^1/\partial u^1 & \partial x^1/\partial u^2 & \partial x^1/\partial u^3 \\ \partial x^2/\partial u^1 & \partial x^2/\partial u^2 & \partial x^2/\partial u^3 \end{pmatrix}$$

由公式2.1可得

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{\bar{1}} \times \mathbf{x}_{\bar{2}} \cdot \frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)} \tag{2.2}$$

当行列式大于 0 时 (称**保向**的微分同胚)，法向量场不变；反之，法向量场反向。得到以下命题：

命题 2.1.1. 正则曲面 M 的切空间与法向量场为保向微分同胚下的不变量。

2.2 第一基本形式与度量

2.2.1 第一基本形式的讨论

断言: 作微积分的基础是赋予研究对象恰当的度量结构。为了研究曲面上的度量结构，我们需要澄清一个概念：曲面上的正则曲线 C 指同胚 $\gamma : I(= (a, b)) \to M$，满足适当的光滑性和正则性。

由于曲面 (映射)$\mathbf{x}$ 与 γ 皆同胚，于是存在同胚 $c: I \to D(=\mathbf{x}^{-1}(M))$ 使得 $\gamma = \mathbf{x}\circ c$。事实上，$\gamma = \mathbf{x}|_{c(I)}$，故曲线的表达为

$$\gamma(t) := \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$$

考察 C 的弧长 s，由公式1.5可得

$$ds = |d\mathbf{x}| \tag{2.3}$$

称等式左侧为曲面 M 的**线素**。此外，注意到

$$ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = \left(\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du^1\\ du^2\end{pmatrix}\right)^2 \triangleq g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \tag{2.4}$$

其中 $g_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta$。

定义 2.2.1. 称公式2.4中的二次型 $g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ 为曲面 M 的**第一基本形式**。

例子 2.2.1. 标准球面 S^2 在不同参数下的第一基本形式矩阵 $(g_{\alpha\beta})$ 不同，但二次型的形式不变。我们先考察球坐标系下的表示：

$$\begin{cases} x^1 = r\cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r\cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r\sin u^1 \end{cases} \tag{2.5}$$

为保证同胚，选取开区间 $\{-\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}, 0 < u^2 < 2\pi\}$，事实上并没有整体覆盖球面的“坐标卡”[1]。

易知第一基本形式为

$$I = r^2(du^1du^1 + \cos^2 u^1 du^2du^2) \tag{2.6}$$

其次考察**球极投影**，有同胚

$$\begin{cases} x^1 = \frac{2r^2\bar{u}^1}{r^2+|\bar{u}|^2} \\ x^2 = \frac{2r^2\bar{u}^2}{r^2+|\bar{u}|^2} \\ x^3 = \frac{|\bar{u}|^2-r^2}{r^2+|\bar{u}|^2} \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $\bar{u} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2)$，可得第一基本形式为

$$\bar{I}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \frac{4}{\left(1+\frac{|\bar{u}|^2}{r^2}\right)^2}(d\bar{u}^1d\bar{u}^1 + d\bar{u}^2d\bar{u}^2) \tag{2.8}$$

[1]这说明仅利用局部性质是无法整体研究曲面的，这需要一个“大范围的“坐标系统，即微分流形的概念。

命题 2.2.1. 曲面 M 的第一基本形式与参数的选取无关。

证明. 选取如上参数，考察

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \mathbf{x}_{\bar{\alpha}} \cdot \mathbf{x}_{\bar{\beta}} = \mathbf{x}_{\gamma}(\partial u^{\gamma}/\partial \bar{u}^{\alpha}) \cdot \mathbf{x}_{\delta}(\partial u^{\delta}/\partial \bar{u}^{\beta}) = g_{\alpha\beta}(\partial u^{\gamma}/\partial \bar{u}^{\alpha})(\partial u^{\delta}/\partial \bar{u}^{\beta}) \tag{2.9}$$

注记 2.2.1. 等式*2.9*给出不同参数选取下第一基本形式量的转移关系。

计算第一基本形式

$$I(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} d\bar{u}^{\alpha} d\bar{u}^{\beta} = g_{\gamma\delta}(\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\gamma}} \cdot \frac{\partial u^{\delta}}{\partial \bar{u}^{\beta}}) d\bar{u}^{\alpha} d\bar{u}^{\beta}$$

由一阶微分形式不变

$$(\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\gamma}} \cdot \frac{\partial u^{\delta}}{\partial \bar{u}^{\beta}}) d\bar{u}^{\alpha} d\bar{u}^{\beta} = du^{\gamma} du^{\delta}$$

可知

$$I(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = g_{\gamma\delta} du^{\gamma} du^{\delta} = I(u^1, u^2)$$

□

注记 2.2.2. “不变”仅体现在形式上，第一基本形式为合同变换下的不变量，事实上进一步是等距变换下的不变量。

命题 2.2.2. 曲面 M 的第一基本形式诱导切空间 $T_{\mathbf{x}}M$ 上的内积，使之成为欧式空间。

证明. 只要验证 $(g_{\alpha\beta})$ 的正定性即可，$g_{11}, g_{22} > 0$ 是显然的，对于 $det(g_{\alpha\beta})$，即

$$det(g_{\alpha\beta}) = g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2 = (\mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_1})(\mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_2}) - (\mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_2})^2$$

由 Lagrange 恒等式

$$det(g_{\alpha\beta}) = |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| > 0$$

□

注记 2.2.3. 因此，熟悉微分流形的读者可以将这里的曲面视为“二维 *Riemann* 流形”，其中第一基本形式给出了一种 *Riemann* 度量，参见 *[4]*。

定义 2.2.2. 在既定参数 u^1, u^2 下的 $\{\mathbf{x}; \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{n}\}$ 为 M 上的**自然标架**。

注记 2.2.4. 直观地看，曲面与标架之选取无关；而一个便捷的标架在计算与分析上大有裨益。

为自然标架施以 $Gram - schmidt$ 正交化

$$\mathbf{x_1} \mapsto e_1 := \frac{\mathbf{x_1}}{|\mathbf{x_1}|}$$

$$\mathbf{x_2} \mapsto e_2 := \frac{\mathbf{x_2} - (\mathbf{x_2} \cdot e_1)e_1}{|\mathbf{x_2} - (\mathbf{x_2} \cdot e_1)e_1|}$$

反过来表达有

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} = \sqrt{g_{11}}\mathbf{e_1} \\ \mathbf{x_2} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}e_1 + \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2}}{\sqrt{g_{11}}}e_2 \end{cases} \tag{2.10}$$

定义 2.2.3. 称 $\{\mathbf{x}; e_1, e_2, \mathbf{n}\}$ 为 M 上的**幺正标架**。

注记 2.2.5. 式*2.9*的结果不重要，我们有意地忽略它，于是“待定系数”。

记 $\mathbf{x_1} = a_1^\alpha e_\alpha, \mathbf{x_2} = a_2^\beta e_\beta$。

注记 2.2.6. *1.* 其实

$$\begin{cases} a_1^1 = \sqrt{g_{11}} \\ a_1^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2^1 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} \\ a_2^2 = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2}}{\sqrt{g_{11}}} \end{cases}$$

2. a_α^β 本质上为关于 u^1, u^2 的可微函数，其 $(a_\alpha^\beta)_{2\times 2}$ 非退化。

计算 M 上的“有向”线素，

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha du^\alpha = (a_\alpha^\beta e_\beta)du^\alpha = (a_\alpha^\beta du^\alpha)e_\beta$$

记 $\omega^\beta = a_\alpha^\beta du^\alpha, \beta = 1, 2$(作为余切向量 du^1, du^2 的线性组合)。

注记 2.2.7. ω^β 本质上为 *1* 阶**微分形式**，或 $(0,1)$ 型**张量**。

此时，

$$I = |d\mathbf{x}|^2 = (\omega^\alpha \omega^\beta)\delta_{\alpha\beta} = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

旋转幺正标架 $\{e_1, e_2, n\}$，即

$$(\bar{e_1}\bar{e_2}) = (e_1, e_2)R$$

其中，

$$R = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

此时，

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e_1} \\ \bar{e_2} \end{pmatrix}$$

那么

$$I = |d\mathbf{x}|^2 = \bar{\omega}^{\alpha}\bar{\omega}^{\beta}\sigma_{\alpha\beta} = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2$$

其中 $\bar{\omega}^1 = \cos\theta\omega^1 - \sin\theta\omega,\quad \bar{\omega}^2 = \sin\theta\omega^1 + \cos\theta\omega^2$。故第一基本形式与幺正标架的选取无关。

2.2.2　曲面上的度量结构

下面我们利用第一基本形式计算曲面上的**度量**关系。不妨以曲线 C 为 $\gamma(t) = \mathbf{x}\circ c(s) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t)), t \in [0,1]$，则弧长表达为

$$L = \int_0^{s(1)} ds = \int_0^{s(1)} |d\gamma| = \int_0^1 \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = \int_0^1 \left|\mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{dt}\right| dt$$

由式2.4可得

$$L = \int_0^1 (g_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{dt}\frac{du^\beta}{dt})^{\frac{1}{2}} dt \tag{2.11}$$

我们曾在命题2.2.2中赋予了切空间 $T_{x_0}M$ 一个内积，下面利用这个内积诱导其上的度量结构。对任一向量 $v \in T_xM$ 有线性表示

$$v = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha$$

规定**欧式范数**为

$$||v||_E := (v\cdot v)^{\frac{1}{2}} = (v^\alpha\mathbf{x}_\alpha)\cdot(v^\beta\mathbf{x}_\beta)^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

无歧义时，记 $|v| \triangleq ||v||_E$，称**模长**。

注记 2.2.8. 事实上，若令 $\bar{v} = v^\alpha\mathbf{E}_\alpha$，其中 $\mathbf{E}_\alpha$ 为欧式平面 E^2 的自然基，显然有 $|\bar{v}| = (\delta_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta)^{\frac{1}{2}}$，因此，"$g_{\alpha\beta}$" 可视为曲面" 不依赖外界"的"弯曲"。

再规定向量夹角，对另一向量 $w = w^\beta\mathbf{x}_\beta \in T_{\mathbf{x}}M$。记 $\theta = \angle(v,w)$，于是

$$cos\theta = \frac{v\cdot w}{|v||w|} = \frac{g_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta}{(g_{\gamma\delta}v^\gamma w^\delta)^{\frac{1}{2}}(g_{\sigma\tau}v^\sigma w^\tau)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.13}$$

若 $g_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta = 0$，称 v 与 w **正交**。特别地，若 u^1-线与 u^2-线的切向量处处正交，称这是一组**正交参数**，其中 $I = g_{11}du^1du^1 + g_{22}du^2du^2$。

一个自然的问题是：若参数曲线不正交，那么夹角如何表示？事实上

$$-1 \le cos\theta = \frac{\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1|\cdot|\mathbf{x}_2|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \le 1 \tag{2.14}$$

例子 2.2.2. 曲面上参数曲线的角平分线满足以下微分方程,

$$\sqrt{g_{11}}du^1 = \epsilon\sqrt{g_{22}}du^2, \epsilon = \pm 1 \tag{2.15}$$

证明. 不妨设 C 为曲面上平分参数曲线夹角的曲线, 则弧长参数表达为

$$\gamma(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$$

有

$$\frac{\dot{\gamma}\cdot\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|} = \epsilon\frac{\dot{\gamma}\cdot\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|}, \epsilon = \pm 1$$

于是

$$\frac{\left(\mathbf{x}_\alpha\frac{du^\alpha}{ds}\right)\cdot\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|} = \epsilon\frac{\left(\mathbf{x}_\beta\frac{du^\beta}{ds}\right)\cdot\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|}$$

因此,

$$\frac{g_{11}du^1 + g_{12}du^2}{\sqrt{g_{11}}} = \epsilon\frac{g_{12}du^1 + g_{22}du^2}{\sqrt{g_{22}}}$$

整理可得,

$$\sqrt{g_{11}}\left(1 - \frac{\epsilon g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right)du^1 = \sqrt{g_{22}}\left(1 - \frac{\epsilon g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\right)du^2$$

由不等式2.14 , $1 - \frac{\epsilon g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \neq 0$, 因此原命题成立。 □

沿 $u^\alpha-$ 线方向取 $1-$ 形式 $\mathbf{x}_\alpha du^\alpha, \alpha = 1,2$(非求和), 考察 $2-$ 形式的绝对值, 记为 dA, 有

$$dA = |\mathbf{x}_1 du^1 \wedge \mathbf{x}_2 du^2| = |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2$$

由命题2.2.2的证明, 可得

$$dA = (det(g_{\alpha\beta}))^{\frac{1}{2}} du^1 \wedge du^2 \tag{2.16}$$

注记 2.2.9. 公式*2.16*还适用于高维。

于是我们可以定义局部曲面片 $\mathbf{x} : D \to \overline{D}$ 的面积为

$$A = \int_D dA = \int_D (det(g_{\alpha\beta}))^{\frac{1}{2}} du^1 \wedge du^2 \tag{2.17}$$

容易验证, 局部曲面片的面积与幺正标架的选取无关。下面考虑不同参数下的曲面片:

$$\bar{A} = \int_{\bar{D}} |\mathbf{x}_{\bar{1}} \times \mathbf{x}_{\bar{2}}| d\bar{u}^1 \wedge d\bar{u}^2$$

由公式2.2可得

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \int_{\bar{D}} |\mathbf{x}_{\bar{1}} \times \mathbf{x}_{\bar{2}}| \frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)} d\bar{u}^1 \wedge d\bar{u}^2 \\ &= \int_D |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2 \\ &= A\end{aligned}$$

因此, 面积为**几何量**。

例子 2.2.3. 圆环面 $\mathbf{x} = (\cos u^1(R + r\cos u^2), \sin u^1(R + r\cos u^2), r\sin u^2)$，其中 $D = \{u^\alpha \in (0, 2\pi), \alpha = 1, 2\}$

计算可得

$$g_{11} = (R + r\cos(u^2))^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = r^2$$

由公式2.17可得

$$A(\epsilon) = \int_\epsilon^{2\pi} du^1 \int_\epsilon^{2\pi} r(R + r\cos u^2) du^2$$

令 $\epsilon \to 0$，可知

$$S = 4\pi^2 ab$$

注记 2.2.10. 由上述的讨论可知，第一基本形式不依赖于曲面在欧氏空间中的浸入形式，并且赋予切空间一个度量。于是我们将只由第一基本形式诱导的量称为**内蕴几何量**，如上述的弧长、角度和面积，还有将来我们会证明的 *Gauss* 曲率。

有时我们会关注"非欧式"的几何对象，也就是**抽象曲面**的概念，这里先行使用"微分流形"的概念来叙述，有兴趣的读者可以参考 [2, 8, 10, 4, 6]，其中 [7] 中介绍的仍然是欧式空间的子集。

微分流形的观点

事实上，"曲面"完全可以是抽象的，只不过在古典的欧氏空间子集下讨论一切变得显而易见，有兴趣可以直接参考 [7] 的第一章。

现给定两张曲面 $M, \bar{M}$，由曲面的定义，有同胚 $\mathbf{x} : D \to \mathbf{x}(D)$ 和 $\bar{\mathbf{x}} : \bar{D} \to \bar{\mathbf{x}}(\bar{D})$。称 $\mathbf{x}$ 为 D 到曲面 (流形)M 的拉回 (或者参数化)；逆映射 $\mathbf{x}^{-1}$ 称为流形上的推出 (或坐标化)。有时，又把 D 称为**参数域**，连同同胚的二元组 $(D, \mathbf{x})$ 称为**坐标邻域**。另一张曲面 M 上的术语同理。

注记 2.2.11. 这里我们只限制到一个坐标领域，事实上可以有一组坐标领域开覆盖，这是标准的微分流形的定义，我们后续会以此定义整体曲面。

若参数域之间有一个同胚 $\sigma : D \to \bar{D}$，由传递性易知

$$\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \sigma \circ \mathbf{x} : M \to \bar{M}$$

为曲面 (片) 之间的同胚。

注记 2.2.12. 习惯上直接将 $\bar{\mathbf{x}}^{-1} \circ \sigma \circ \mathbf{x}$ 记为 σ，称为曲面之间的 *(同胚)* 映射，性质由前者的 σ 特征。

定义 2.2.4. 若存在映射 φ 使得 $M, \bar{M}$ 的第一基本形式 I 和 $\overline{I}$ 之间有如下关系:

$$\overline{I} = \varphi^2 I \tag{2.18}$$

称 $M, \bar{M}$ 是**共形对应的**，若 $\varphi \equiv 1$，称**等距对应**。

注记 2.2.13. 公式*2.18*的 I 和 $\overline{I}$ 的参数皆为 (u^1, u^2)，只有相同参数下的几何量才值得比较。

函子的观点

形式上视 $T_{\mathbf{p}}$ 为函子：$M, \overline{M}$ 为两张曲面，σ 为二者之间的可微映射，$T_{\mathbf{p}}$ 诱导了切空间 $T_{\mathbf{p}}M$ 与 $T_{\sigma(\mathbf{p})}\overline{M}$ 之间的**线性算子**。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "T_{\mathbf{p}}"] \arrow[d, "\sigma"] & T_{\mathbf{p}}M \arrow[d, "\sigma_*"] \\ \bar{M} \arrow[r, "T_{\sigma(\mathbf{p})}"] & T_{\sigma(\mathbf{p})}\overline{M} \end{tikzcd} \tag{2.19}$$

注意到函子 $T_{\mathbf{p}}$ 是协变的，本质上为“拉回”函子的对偶，在流形理论中有进一步的讨论。

对 T_pM 中任一向量 v[2]，有线性表示 $v = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha$。设 γ 为 M 上过 p 点的正则曲线，其中 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$，满足

$$\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} = \mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{dt}|_{t=0} \tag{2.20}$$

只要令 $v^\alpha = \frac{du^\alpha}{dt}|_{t=0}$

注记 2.2.14. 可知 $v^\alpha dt = du^\alpha$，等式右侧为平面线素。

现在 σ 将 M 映到 $\bar{M}$，记 $\bar{\gamma} = \sigma \circ \gamma$。考察

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dt}|_{t=0} = \bar{\mathbf{x}}_\alpha \frac{d\bar{u}^\alpha}{dt}|_{t=0} = \mathbf{x}_\beta (\frac{\partial^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\bar{u}^\alpha}{dt}|_{t=0}) = \bar{\mathbf{x}}_\alpha \frac{du^\alpha}{dt} = \bar{\mathbf{x}}_\alpha v^\alpha \tag{2.21}$$

记 $\sigma_*(v) = \frac{d(\sigma\circ\gamma)}{dt}|_{t=0}$，由等式 2.21$\sigma_*$ 仅与 σ 和 v 有关，与曲线的选取无关，因此是良性的；此外可见线性，因此是线性算子。

定义 2.2.5. 称上述线性算子 σ_* 为 σ 诱导的**切映射**。

命题 2.2.3. 共形对应保持曲面切向量夹角不变，又称保角变换；等距变换保持曲面切空间的度量。

---

[2]注意到 $\sigma : M \to \bar{M}$，因此考虑以 v 为切向量的曲线。

证明. 对任意 $v_i \in T_pM(i=1,2)$，令 $\bar{v}_i = \sigma_*(v_i) \in T_{\sigma(P)}M(i=1,2)$，记

$$v_i = v_i^\alpha \mathbf{x}_\alpha (i=1,2)$$

那么

$$\bar{v}_i = v_i^\alpha \mathbf{x}_\alpha (i=1,2)$$

考察夹角余弦

$$cos\angle(v_1,v_2) = \frac{g_{\alpha\beta}v_1^\alpha v_2^\beta}{(g_{\alpha\beta}v_1^\alpha v_2^\beta)^{\frac{1}{2}}(g_{\gamma\delta}v_1^\gamma v_2^\delta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$cos\angle(\bar{v}_1,\bar{v}_2) = \frac{\bar{g}_{\alpha\beta}v_1^\alpha v_2^\beta}{(\bar{g}_{\alpha\beta}v_1^\alpha v_2^\beta)^{\frac{1}{2}}(\bar{g}_{\gamma\delta}v_1^\gamma v_2^\delta)^{\frac{1}{2}}}$$

由 $\bar{I} = \phi^2 I$。故

$$cos\angle(v_1,v_2) = cos\angle(\bar{v}_1,\bar{v}_2)$$

第二句话是显然的。 □

例子 2.2.4. 我们曾计算了不同坐标卡下的球面第一基本形式。

1. 球坐标系

$$I = r^2(du^1du^1 + cos^2u^1du^2du^2)$$

2. 球极投影

$$\bar{I}(\bar{u}^1,\bar{u}^2) = \frac{4}{\left(1+\frac{|\bar{u}|^2}{r^2}\right)^2}(d\bar{u}^1d\bar{u}^1 + d\bar{u}^2d\bar{u}^2) \tag{2.22}$$

注意到后者与平面是**共形**的。

一个惊人的事实是：任意曲面上每一点都有一个邻域，它可以和欧式平面的一个区域间建立保角变换。这个结论的证明要用到偏微分方程的工具，有兴趣的读者可以参考 Chern S S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1955, 6(5): 771-782.。

注记 2.2.15. 等距变换保持第一基本形式，蕴含曲线弧长、切向量、模长、夹角和曲面片面积不变。我们在几何上视等距对应的曲面是一致的，尽管直观上它们相去甚远。如以下几例：

例子 2.2.5. 考察旋转曲面，设 C 为 x^20x^3 平面上的正则曲线，有参数方程

$$\begin{cases} x^2 = f(u^2) \\ x^3 = g(u^2) \end{cases}$$

绕 x^3 轴旋转生成曲面

$$\mathbf{x}(u^1,u^2) = (f(u^2)\cos u^1, f(u^2)\sin u^1, g(u^2))$$

可得第一基本形式

$$I = f^2 du^1 du^1 + ((f')^2 + (g')^2) du^2 du^2$$

特别地，令 $f = ach\frac{u^2}{a}$，$g = u^2$，称其为**悬链面**。易得第一基本形式为

$$I = ch^2 \frac{u^2}{a} (a^2 du^1 du^1 + du^2 du^2) \tag{2.23}$$

例子 2.2.6. 螺旋面方程为 $\mathbf{x}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = (f(\bar{u}^2) cos\bar{u}^1, f(\bar{u}^2) sin\bar{u}^1, g(\bar{u}^2) + a\bar{u}^1)$ 计算第一基本形式为

$$I = (f^2 + a^2) du^1 du^1 + 2ag' du^1 du^2 + ((f')^2 + (g')^2) du^2 du^2$$

取 $f = u^2$，$g = 0$。此时称**正螺旋面**。有

$$I = ((\bar{u}^2)^2 + a^2) d\bar{u}^1 d\bar{u}^1 + d\bar{u}^2 d\bar{u}^2$$

若取 $u^2 = ash\frac{\bar{u}^2}{a}$，$u^1 = \bar{u}^1$，有

$$I = ch^2 \frac{u^2}{a} (a^2 du^1 du^1 + du^2 du^2) \tag{2.24}$$

因此悬链面与正螺旋面可建立等距对应！

定义 2.2.6. 称曲面为**直纹面**，如果具有形式 $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$，其中 $|b| \equiv 1$，a 称为**准线**，b 称为**方向向量**。

计算易知

$$\mathbf{x}_1 = a^1 + u^2 b^1, \mathbf{x}_2 = b$$

由 $|b| \equiv 1$，可化简第一基本形式为

$$I = (a^1 + u^2 b)^2 du^1 du^1 + 2a^1 b du^1 du^2 + du^2 du^2$$

定义 2.2.7. 称直纹面为**可展曲面**，如果每条直母线各点的切空间重合。

定理 2.2.1. 直纹面 $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$ 是可展曲面当且仅当 $(a', b, b') \equiv 0$

证明. 固定位置 u_0^1，给出直母线方向上的一个变差 Δu^2，即

$$\mathbf{x}(u_0^1, u^2) = a(u_0^1) + u^2 b(u_0^1)$$

$$\mathbf{x}(u_0^1, u^2 + \Delta u^2) = a(u_0^1) + (u^2 + \Delta u^2) b(u_0^1)$$

计算切向量

$$\mathbf{x}_1(u_0^1, u^2) = a'(u_0^1) + u^2 b'(u_0^1)$$

$$\mathbf{x}_2(u_0^1, u^2) = b(u_0^1)$$

法向量

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = (a'(u_0^1) + u^2 b'(u_0^1)) \times b'(u_0^1) \triangleq A$$

记 $a'(u_0^1) = a_0'$，$b''(u_0^1) = b_0'$，$b^1(u_0^1) = b_0$，同理

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2(u_0^1, u^2 + \Delta u^2) = (a_0' + (u^2 + \Delta u^2) b_0') \times b_0 \triangleq B$$

考察

$$\begin{aligned} A \times B &= (a_0' + u^2 b_0') \times b_0 \times (a_0' + (u^2 + \Delta u^2) b_0') \times b_0 \\ &= \Delta u^2 (a_0' \times b_0) \times (b_0' \times b_0) \\ &= -\Delta u^2 \cdot (a_0', b_0, b_0') \cdot b_0 \end{aligned}$$

因此 A, B 平行当且仅当 $(a_0', b_0, b_0') = 0$，命题得证。 □

定理 2.2.2. 可展曲面局部必为柱面、锥面和切线面其一。

证明. 容易验证柱面 $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b$, 锥面 $\mathbf{x} = a + u^2 b(u^1)$, 切线面 $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 a'(u^1)$, 满足定理2.2.1条件。下证必要性。

已知可展曲面 $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$，由微分方程

$$(a', b, b') \circ 0$$

特征。由 $|b| = 1$ 可知 $b \cdot \dot{b} = 0$。

1）若 $b \times \dot{b} = 0$，则 $\dot{b} = 0$，蕴含 b 为常向量。此时为柱面。

2）若 $b \times \dot{b} \neq 0$，则 b 非常向量。对 $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$，考察

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{a}(u^1) + u^2 b(u^1) \quad \bar{a}'(u^1)//b \;\; \bar{a}'(u^1) \perp b \tag{2.25}$$

不妨设 $\bar{a}(u^1) = a(u^1) + f(u^1) b(u^1)$。而 $\bar{a}' \cdot b = 0$，又 $\bar{a}'(u^1) = a'(u^1) + f'(u^1) b(u^1) + f(u^1) b'(u^1)$，故

$$a' b + f |b|^2 = 0. \tag{2.26}$$

取 $f = -\frac{a'b}{|b|^2}$，此时

$$\mathbf{x} = \bar{a}(u^1) + (u^2 - f) b(u^1) \tag{2.27}$$

考察

$$(a', b, b') = ((\bar{a} - fb)', b, b') = (\bar{a}' - f'b + f', b, b') = (\bar{a}', b, b')$$

因此 $\bar{a}', b, b'$ 共面，又2.25的强行构造 $\bar{a}' \perp b'$，且 $b \perp b'$（欧式公理），故 1）$\bar{a}' = 0$ 蕴含 $\bar{a}$ 为常向量，$\mathbf{x}$ 为锥面。2）$\bar{a}' \neq 0$ 蕴含 $\bar{a}'//b$ 为常向量，$\mathbf{x}$ 为切线面。 □

2.3 第二基本形式与弯曲

下面从欧式空间 $\mathbf{E}^3$ 的角度下考察曲面的“外蕴”弯曲程度。

2.3.1 高度函数水平集

设 M 为一张曲面，其在 p 点 $\mathbf{x}(u^1,u^2)$ 处有切空间 T_pM，邻近 p 点处有 q 点 $\mathbf{x}(u^1+\Delta u^1,u^2+\Delta u^2)$。

记高度函数 $H(p,q)$ 为

$$H(p,q) := |[\mathbf{x}(u^1+\Delta u^1,u^2+\Delta u^2)-\mathbf{x}(u^1,u^2)]\cdot\mathbf{n}| \tag{2.28}$$

对式2.28取极限 $(\Delta u^1,\Delta u^2)\to 0$，由 Taylor 定理，可得

$$\begin{aligned}
\lim_{(\Delta u^1,\Delta u^2)\to 0} H(p,q) = \lim_{(\Delta u^1,\Delta u^2)\to 0} &|\{\mathbf{x}_1(u^1,u^2)\Delta u^1+\mathbf{x}_2(u^1,u^2)\Delta u^2 \\
&+\frac{1}{2}[\mathbf{x}_{11}(u^1,u^2)\Delta(u^1)^2+2\mathbf{x}_{12}(u^1,u^2)\Delta u^1\Delta u^2 \\
&+\mathbf{x}_{22}(u^1,u^2)\Delta(u^2)^2]+\circ(|(u^1,u^2)|^2)\}\cdot\mathbf{n}| \\
&=\frac{1}{2}\lim_{(\Delta u^1,\Delta u^2)\to 0}|[\mathbf{x}_{\alpha\beta}(u^1,u^2)\Delta u^\alpha\Delta u^\beta]\cdot\mathbf{n}+\circ(|(u^1,u^2)|^2)| \\
&=\frac{1}{2}\{(\mathbf{x}_{\alpha\beta})du^\alpha du^\beta\}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

记 $h_{\alpha\beta}=\mathbf{x}_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{x}_\alpha\cdot\mathbf{n}_\beta=-\mathbf{x}_\beta\cdot\mathbf{n}_\alpha$。(由于 $\mathbf{x}_\alpha\cdot\mathbf{n}=0$)。

定义 2.3.1. 称二次型 $II=h_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ 为曲面的**第二基本形式**。

注记 2.3.1. 由式*2.29*，可知

$$2dH=(\mathbf{x}_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{n})du^\alpha du^\beta=-(\mathbf{x}_\alpha\cdot\mathbf{n}_\beta)du^\alpha du^\beta=-(\mathbf{x}_\alpha du^\alpha)\cdot(\mathbf{n}_\beta du^\beta)=-d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{n} \tag{2.30}$$

因此高度函数 H 刻画曲面的弯曲程度，本质上由微分形式 $d\mathbf{x}$ 和 $d\mathbf{n}$ 共同决定。

此外，由 $\mathbf{n}=\frac{\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}$，可知

$$h_{\alpha\beta}=\mathbf{x}_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{n}=\frac{(\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_\beta,\mathbf{x}_{\alpha\beta)}}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|} \tag{2.31}$$

例子 2.3.1. 计算旋转面 $\mathbf{x}=(f(u^2)cosu^1,f(u^1)sinu^1,g(u^2))$ 的第二基本形式。易知

$$\begin{cases}
\mathbf{x}_{11}=(-fcosu^1,-fsinu^1,0)\\
\mathbf{x}_{12}=(-fsinu^1,fcosu^1,0)\\
\mathbf{x}_{22}=(f''cosu^1,-f''sinu^1,g'')
\end{cases}$$

从而

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = (fg'cosu^1, fg'sinu^1, -ff')$$

故

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} = \frac{f}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}(g'cosu^1, g'sinu^1, -f')$$

可得第二基本形式为 $II = \frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}(-fg'du^1du^1 + \begin{vmatrix} f'' & g'' \\ f' & g' \end{vmatrix} du^2du^2)$ 令 $f = rcosu^2$, $g = rsinu^2$，易知球面的第二基本形式

$$II = -r(cos^2u^2du^1du^1 + du^2du^2)$$

对比2.6可知

$$II = -rI \tag{2.32}$$

例子 2.3.2. 计算直纹面 $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2b(u^1)$ 的第二基本形式，易知

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{11} = a'' + u^2b'' \\ \mathbf{x}_{12} = b' \\ \mathbf{x}_{22} = 0 \end{cases}$$

从而，

$$\mathbf{n} = \frac{(a' + u^2b') \times b}{|(a' + u^2b') \times b|}$$

故第二基本形式为

$$II = \frac{1}{|(a' + u^2b') \times b|}((a'' + u^2b''), (a' + u^2b), b)du^1du^1$$

2.3.2　曲线与线素

设 C 为 M 上一曲线，参数化为 $\gamma(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$，其中 s 为弧长参数。考察

$$\begin{aligned} kN = \dot{T} &= \ddot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{d}{ds}(\mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{ds}) \\ &= \mathbf{x}_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} + \mathbf{x}_\alpha \frac{d^2u^\alpha}{ds^2} \end{aligned} \tag{2.33}$$

记 $k_n(T) = \dot{T} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n})\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds} = h_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}$，进一步有

$$k_n|ds|^2 = h_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$$

即

$$k_n = \frac{II(du^\alpha, du^\beta)}{I(du^\alpha, du^\beta)} \tag{2.34}$$

对任一单位切向量 $\bar{v}=\frac{du^\alpha}{ds}\mathbf{x}_\alpha\in T_pM$，易知

$$k_n(\bar{v}=II(du^\alpha,du^\beta) \tag{2.35}$$

对非单位的情形，$v=\frac{du^\alpha}{dt}\mathbf{x}_\alpha\in T_pM$，则 $\frac{v}{|v|}=\frac{\frac{du^\alpha}{dt}\mathbf{x}_\alpha}{(I(du^\alpha,du^\beta))^{\frac{1}{2}}}$，故

$$k_n(\frac{v}{|v|})=\frac{II(du^\alpha,du^\beta)}{I(du^\alpha,du^\beta)} \tag{2.36}$$

因此 k_n 仅与线素 ds 方向有关，与同向曲线选取无关，于是有如下定理。

定理 2.3.1 ($Meusnier$ 定理)**.** 曲面上任何相切曲线，在切点处曲率相等。

注记 2.3.2. 对式*2.34*，事实上有

$$k_n(T)=\frac{II(T,T)}{I(T,T)}=II(\frac{T}{|T|},\frac{T}{|T|})$$

此外，若有微分同胚 $\bar{u}^\alpha=\bar{u}^\alpha(u^1,u^2),\alpha=1,2$，那么

$$\begin{aligned}
h_{\bar{u}^\alpha\bar{u}^\beta}&=(\mathbf{x}_{\bar{u}^\alpha\bar{u}^\beta}\cdot\mathbf{n})d\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta\\
&=[(\mathbf{x}_\gamma\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^\alpha})'_{\bar{\beta}}\cdot\mathbf{n}]d\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta\\
&=(\mathbf{x}_{\gamma\sigma}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^\sigma}{\partial\bar{u}^\beta}+\mathbf{x}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^\alpha}\frac{\partial\bar{u}^\alpha}{\partial\bar{u}^\beta}\cdot nd\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta\\
&=(\mathbf{x}_{\gamma\sigma}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^\sigma}{\partial\bar{u}^\beta})\cdot nd\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta\\
&=\mathbf{x}_{\gamma\sigma}du^\gamma du^\sigma
\end{aligned}$$

故第二基本形式为一个几何量，进而 k_n 为几何量。

定义 2.3.2. 称 $k_n(v)$ 为曲面在切方向 v 上的**法曲率**。

2.4　$Weingarten$ 算子

2.4.1　$Weingarten$ 变换

下面考察曲面切空间 $T_{\mathbf{p}}M$ 上的线性算子 W，考虑其在基向量 $\mathbf{x}_\alpha,\alpha=1,2$ 上的作用

$$W(\mathbf{x}_\alpha)=h_\alpha^\beta\mathbf{x}_\alpha \tag{2.37}$$

其中

$$h_\alpha^\beta=h_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} \tag{2.38}$$

这里 $(g^{\gamma\beta}) := (g_{\alpha\beta})^{-1}$，使得 $g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$。称等式2.38右侧为：把第二基本形式量 $h_{\alpha\beta}$ 的指标用 $g^{\gamma\beta}$ 拉上去。再线性扩充到整个切空间，对任一切向量 $v \in T_{\mathbf{p}}M$，

$$W : T_{\mathbf{p}}M \to T_{\mathbf{p}}M$$

满足

$$v^\alpha \mathbf{x}_\alpha = v \mapsto W(v) = v^\alpha h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta$$

定义 2.4.1 ($Weingarten$ 算子)**.** 称上述算子 W 为 $Weingarten$ **算子**。

考察内积

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{x}_\beta &= h_\alpha^\gamma \mathbf{x}_\gamma \cdot \mathbf{x}_\beta \\ &= (h_{\alpha\delta} g^{\delta\gamma}) g_{\gamma\beta} \\ &= h_{\alpha\beta} \\ &= h_{\beta\alpha} \\ &= W(\mathbf{x}_\beta) \cdot \mathbf{x}_\alpha \\ &= \mathbf{x}_\alpha \cdot W(\mathbf{x}_\beta) \end{aligned}$$

称上述递等式的第二个等号为把指标拉下来。易知 W 为自共轭算子或自对偶算子，即 $W = W^*$。

考察算子 W 的 (计重) 的**谱** $SpecW = \{k_1, k_2\}$。由自共轭性易知

$$W(\mathbf{e}_\alpha) = k_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \tag{2.39}$$

这里 $\mathbf{e}_\alpha$ 为算子的特征向量，且 k_α 一定是实数。此外

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \tag{2.40}$$

定义 2.4.2. 称上述实特征值 k_α 为**主曲率**，特征向量表示的方向为主方向。

考察 $1-$ 形式 $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha du^\alpha$ 在 W 下的变换：

$$W(d\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}_\alpha) du^\alpha = h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta du^\alpha$$

通过 $g_{\beta\gamma}$ 拉下指标，有

$$W(d\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = II(du^\alpha, du^\gamma) \tag{2.41}$$

注记 2.4.1. 公式*2.41*给出第二基本形式的另一表达。

进一步，对任一切向量 $v = \mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{ds} \in T_{\mathbf{p}}M$，易知

$$W(v) \cdot v = II\left(\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}\right) \tag{2.42}$$

随即得到法曲率的表达：

$$k_n(v) = \frac{W(v) \cdot v}{|v|^2}$$

取单位切向量 $\bar{v}$，设其与 $\mathbf{e}_1$ 的夹角为 $\theta, (0 \leq \theta < 2\pi)$，有线性表示

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

于是

$$W(\bar{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \cos\theta \\ k_2 \sin\theta \end{pmatrix}$$

故

$$k_n(\bar{v}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \tag{2.43}$$

称公式2.43为 $Euler$ **公式**。可见 $k_n(\bar{v})$ 仅与 θ 有关，不妨记为 $k_n(\theta)$。对上式关于 θ 求导，有

$$\frac{dk_n}{d\theta} = -(k_1 - k_2)\sin 2\theta \tag{2.44}$$

作如下讨论：

1. $k_1 \neq k_2$，$\frac{dk_n}{d\theta} =$ 蕴含 $\theta = 0$或$\frac{\pi}{2}$。易知 k_n 在 $\mathbf{e}_1$ 或 $\mathbf{e}_2$ 处取极值 k_1 或 k_2。

2. $k_1 = k_2$ 蕴含 k_n 为常值。

定义 2.4.3. 称 $k_1 = k_2$ 的点为**脐点**，特别的，$k_1 = k_2 = 0$ 的为平点，此外为圆点。

在脐点 $\mathbf{p}$ 意义下，对任一 $v = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha \in R_{\mathbf{p}}M$，有

$$k_n(v) \equiv \lambda \tag{2.45}$$

其中 λ 为常数。

命题 2.4.1. 全平点曲面当且仅当平面。

证明. 充分性是显然的，下证必要性。取等式2.45中的 $\lambda = 0$，于是

$$0 = h_{\alpha\beta} = -\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

又 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$，对 u^β 求导，有

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\beta = 0$$

因此 $\mathbf{n}_\beta = 0$，故 $\mathbf{n}$ 为常向量。考察

$$((\mathbf{x}-\mathbf{x}(0))\cdot\mathbf{n})'_\beta = \mathbf{x}_\beta\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{x}-\mathbf{x}(0))\cdot\mathbf{n}_\beta = 0$$

又由初值条件 $(\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}(0))\cdot\mathbf{n} = 0$，故

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}(0))\cdot\mathbf{n} = 0$$

□

注记 2.4.2. 由等式*2.32*可知球面上任一点为圆点，以后我们将知道这个命题是充分的。

记 $\mathbf{A} = (h_\alpha^\beta)$，考察算子 W 的特征多项式。

$$\chi_W(\lambda) = det(\lambda I - \mathbf{A}) = \lambda^2 - 2H\lambda + K \tag{2.46}$$

其中

$$H = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2det(g_{\alpha\beta})} = \frac{k_1+k_2}{2} \tag{2.47}$$

以及

$$K = \frac{det(h_{\alpha\beta})}{det(g_{\alpha\beta})} = k_1k_2 \tag{2.48}$$

注记 2.4.3. 以上整理使用指标的拉上拉下。

2.4.2　两个重要曲率

定义 2.4.4. 称上述的 H 为**平均曲率**或中曲率；K 为 *Gauss* **曲率**或总曲率。

注记 2.4.4. 此外，称 $H \equiv 0$ 的曲面为**极小曲面**。

例子 2.4.1. 容易计算，环面的平均曲率 $H = -\frac{1}{r}$，*Gauss* 曲率 $K = \frac{1}{r^2}$。

例子 2.4.2. 由例2.2.5，可以计算旋转曲面的两个曲率。

$$H = \frac{f\begin{vmatrix} f'' & g'' \\ f' & g' \end{vmatrix} - g'((f')^2+(g')^2)}{2f^2((f')^2+(g')^2)^2} \tag{2.49}$$

$$K = \frac{-g'\begin{vmatrix} f'' & g'' \\ f' & g' \end{vmatrix}}{f((f')^2+(g')^2)^2} \tag{2.50}$$

令 $f = cosh\frac{u^2}{a}, g = u^2$，易知 $h \equiv 0$，故悬链面为极小曲面。

定义 2.4.5. 曲面 M 上的曲线 C，$\gamma = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ 是**曲率线**，如果切向量 $\dot{\gamma}$ 是 M 的主方向，即 $Weingarten$ 算子的特征向量。

定理 2.4.1 ($Rodiriguer$ 定理)**.** 曲线 C 是曲面 M 上曲率线的充要条件为

$$dn(s) = -\lambda(s)d\mathbf{x}(s) \tag{2.51}$$

这里的 $\lambda(s)$ 为 $\mathbf{x}(s)$ 方向的主曲率。

证明. 设曲线 $\mathbf{x}(s)$，由曲率线定义可知

$$\mathbf{x}(s) \text{ 为曲率线} \Leftrightarrow \omega(d\mathbf{x}) = \lambda(s)d\mathbf{x}\text{，其中 } \lambda(s) \text{ 为主曲率}$$

而 $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha du^\alpha$，则

$$\omega(d\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}_\alpha)du^\alpha = h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta du^\alpha \tag{2.52}$$

由 $|n| = 1$，可得 $n_\alpha \cdot n = 0$，故 $n_\alpha \in span\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$。令 $n_\alpha = b_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta$ 可得

$$-h_\alpha^\delta = b_\alpha^\delta \tag{2.53}$$

于是 $n_\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta$，考察

$$dn = n_\alpha du^\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta du^\alpha \overset{(2.52)}{=} -\lambda(s)d\mathbf{x}$$

即可。 □

定义 2.4.6. 公式2.53蕴含

$$n_\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta \tag{2.54}$$

称为 $Weingarten$ **公式**。

断言，在不含脐点的曲面上存在一组由曲率线构成的参数 $u_\alpha-$ 线形式参数网，称为**曲率线网**。此时 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 正交，有第一基本形式为

$$I = g_{11}du^1du^1 + g_{22}du^2du^2 \tag{2.55}$$

而 $W(\mathbf{x}_\alpha) = k_\alpha \mathbf{x}_\alpha$，故

$$h_{\alpha\beta} = \omega(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{x}_\beta = k_\alpha g_{\alpha\beta}$$

因此

$$II = k_1 g_{11}du^1du^1 + k_2 g_{22}du^2du^2 \tag{2.56}$$

取 $e_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{g_{11}}}$，$e_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\sqrt{g_{22}}}$ 为幺正基。

$$I = (\mathbf{x}_\alpha du^\alpha)^2 = (e_1\sqrt{g_{11}}du^1 + e_2\sqrt{g_{22}}du^2)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 \tag{2.57}$$

其中，$\omega^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}du^\alpha$，并且

$$II = k_1(\omega^1)^2 + k_2(\omega^2)^2 \tag{2.58}$$

下面通过 *Rodirigues* 定理计算曲率线。注意到

$$\omega(d\mathbf{x}) = \lambda d\mathbf{x} = -dn$$

即

$$\lambda \mathbf{x}_\alpha du^\alpha = -n_\alpha du^\alpha$$

两边内积 $\mathbf{x}_\beta$，得

$$\lambda g_{\alpha\beta} du^\alpha = h_{\alpha\beta} du^\alpha$$

整理有线性方程组

$$\begin{cases} \{h_{11}du^1 + h_{21}du^2\} \cdot (-1) + \{g_{11}du^1 + g_{21}du^2\} \cdot \lambda & = 0 \\ \{h_{12}du^1 + h_{22}du^2\} \cdot (-1) + \{g_{12}du^1 + g_{22}du^2\} \cdot \lambda & = 0 \end{cases} \tag{2.59}$$

方程组2.79存在非零解等价于如下行列式不为 0，

$$\begin{vmatrix} h_{11}du^1 + h_{21}du^2 & g_{11}du^1 + g_{21}du^2 \\ h_{12}du^1 + h_{22}du^2 & g_{12}du^1 + g_{22}du^2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.60}$$

整理可得

$$\{g_{22}h_{12} + g_{12}h_{22}\}(du^2)^2 + \{g_{22}h_{11} + g_{11}h_{12}\}du^1du^2 + \{g_{12}h_{11} + g_{11}h_{12}\}(du^1)^2 = 0$$

即

$$-\begin{vmatrix} g_{22} & g_{12} \\ h_{22} & h_{12} \end{vmatrix}(du^2)^2 + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{22} \\ h_{11} & h_{22} \end{vmatrix}du^1du^2 - \begin{vmatrix} g_{12} & g_{11} \\ h_{12} & h_{11} \end{vmatrix}(du^1)^2 = 0 \tag{2.61}$$

故

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.62}$$

常微分方程2.62解的存在性保证非脐点曲面曲率线网的存在性。

2.4.3　利用曲率线网研究曲面

令 $p, p' \in M$，其中，$p = \mathbf{x}(u^1, u^2), p' = \mathbf{x}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2)$。由 Taylor 定理

$$\mathbf{x}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) = \mathbf{x}(u^1, u^2) + \mathbf{x}_\alpha(u^1, u^2)\Delta u^\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{x}_{\alpha\beta}(u^1, u^2)\Delta u^\alpha \Delta u^\beta + \cdots$$

观察上式，一个自然的想法是利用标架 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, n\}$ 线性表示 $\mathbf{x}_{\alpha\beta}$。不妨记为

$$\mathbf{x}_\alpha\beta := \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\gamma + Bn \tag{2.63}$$

对等式2.63两边分别内积 $\mathbf{x}_\alpha, n$，其实可知 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ 与 B。其中 $B = h_{\alpha\beta}$。称 $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ **第二类** $Christoffel$ **符号**或克氏符号。

令 $e_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{g_{11}}}, e_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\sqrt{g_{22}}}, \delta = \sqrt{(\Delta u^1)^2 + (\Delta u^2)^2}$，那么

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) = \mathbf{x}(u^1, u^2) &+ \{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\Delta u^\alpha + o(\delta)\}e_\alpha \\ &+ \frac{1}{2}\{h_{\alpha\beta}\Delta u^\alpha \Delta u^\beta + o(\delta^2)\}n\end{aligned}$$

再令 $(\Delta u^1, \Delta u^2) \to 0$，则有

$$d\mathbf{x} = \{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}du^\alpha\}e_\alpha + \{\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta\}n \tag{2.64}$$

取 $y^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}du^\alpha, \alpha = 1, 2$；$y^3 = \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$，观察得到

$$y^3 = k_1(y^1)^2 + k_2(y^2)^2 \tag{2.65}$$

标架 $O - y^1y^2y^3$ 近似了曲面，进一步我们定义:

1. $K = k_1k_2 > 0$ 称**椭圆点**。
2. $K = k_1k_2 < 0$ 称**双曲点**。
3. $K = k_1k_2 = 0$ 且 $y^1 \neq 0$ 称**抛物点**。

容易混淆的另一个概念是渐近线。

定义 2.4.7. 若曲面某点的一个切方向 du^1/du^2 的第二基本形式为 0，则称该方向为**渐进方向**。

即

$$II(du^1/du^2) = h_{11}\left(\frac{du^1}{du^2}\right)^2 + 2h_{12}\left(\frac{du^1}{du^2}\right) + h_{22} \tag{2.66}$$

可知

$$\Delta = -4det(h_{\alpha\beta}) \tag{2.67}$$

于是

1. $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 双曲点，2 个渐进方向。
2. $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 抛物点，1 个渐进方向。

3. $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 椭圆点，没有渐进方向。

渐进方向的积分曲线称为**渐近线**。注意，不是每张曲面都有渐近方向。若一张曲面有两个渐近方向，即在局部有两族渐近线 (作为参数曲线)，这样的参数线网称为**渐近线网**。下面考察渐进线网的第二基本形式。

对 u^1- 线 $(u^2 \equiv 0, du^2 = 0)$，有

$$II(du^1, du^2) = 0 \Leftrightarrow h_{11}(du^1)^2 \Leftrightarrow h_{11} = 0$$

同理

$$h_{22} = 0$$

故

$$II(du^1, du^2) = 2h_{12}du^1du^2 \tag{2.68}$$

命题 2.4.2. 全圆点曲面当且仅当球面。

证明. 仅证明必要性。设 $\mathbf{p}$ 为圆点。则 $h_{\alpha\beta} = \lambda(\mathbf{p})g_{\alpha\beta}, \quad \lambda(\mathbf{p}) \neq 0$。

注意到 $h_{\alpha\beta} = \lambda(\mathbf{p})g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow h_\alpha^\beta = \lambda(\mathbf{p})\delta_\alpha^\beta$。由 $Weingarten$ 公式，可得

$$n_\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta = -\lambda(\mathbf{p})\delta_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta = -\lambda(\mathbf{p})\mathbf{x}_\alpha$$

考察

$$n_1 = -\lambda(\mathbf{p})\mathbf{x}_1$$

对上式两边关于 u^2 方向求导，可得

$$n_{12} = -\lambda_2(\mathbf{p})\mathbf{x}_1 = -\lambda(\mathbf{p})\mathbf{x}_{12}$$

故

$$n_{12} + \lambda(\mathbf{p})\mathbf{x}_2 = \lambda_2(\mathbf{p})\mathbf{x}_1$$

又 $n_{12} = n_{21}, \mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_{21}$，故

$$\lambda_1\mathbf{x}_2 + \lambda_2\mathbf{x}_1 = 0$$

蕴含 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，因此 λ 为常值。

注意到

$$d\mathbf{n} = \mathbf{n}_\alpha du^\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta du^\alpha = -\lambda \mathbf{x}_\alpha du^\alpha = -\lambda d\mathbf{x} \tag{2.69}$$

即

$$d(\mathbf{n} + \lambda\mathbf{x}) = 0$$

这表明

$$d(\mathbf{n} + \lambda\mathbf{x}) \equiv \mathbf{c}$$

其中 $\mathbf{c}$ 为常向量，变形得到

$$\left|\mathbf{x}-\frac{\mathbf{c}}{\lambda}\right|=\left|\frac{\mathbf{n}}{\lambda}\right|=\frac{1}{\lambda}$$

故为球面。 □

注记 2.4.5. 根据定理*2.4.1*，等式*2.24*说明**脐点**处每个方向都是曲率线方向。

例子 2.4.3. 设 M 为无脐点曲面，$K<0$。则 M 上一条渐近线的正交轨线的法曲率 k_n 等于同一点处平均曲率的两倍。

证明. 设 $\mathbf{x}(s)=\mathbf{x}(u^1(s),u^2(s))$ 为渐近线，方向为 $\mathbf{T}(s)=\dot{\mathbf{x}}(s)$。选取曲率线网为参数网。令 $\angle(\mathbf{T},\mathbf{e}_1)=\theta$，由 *Euler* 公式可知

$$0=k_n(\theta)=k_n(T)=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^{\theta}$$

而正交轨线方向的法曲率为

$$k_n(\theta+\frac{\pi}{2})=k_1\cos\theta+\frac{\pi}{2}+k_2\sin^2\theta+\frac{\pi}{2}$$

则

$$k_n(\theta+\frac{\pi}{2})=k_n(\theta+\frac{\pi}{2})+0=k_n(\theta+\frac{\pi}{2})+k_n(\theta)=2H$$

□

2.5　*Gauss* 映射与第三基本形式

2.5.1　*Gauss* 映射与第三基本形式

下面我们介绍 *Gauss* 本人研究曲面的方式——*Gauss* 映射。设曲面 $M:\mathbf{x}(u^1,u^2)$ 的局部参数域为 D，记 $\mathcal{D}=\mathbf{x}(D)$。取 M 的法向量场 $\mathbf{n}(u^1,u^2)$，构造映射 $g:\mathcal{D}\to S^2(1)$，　$\mathbf{p}\mapsto\mathbf{n}_{\mathbf{p}}$，记 $\mathcal{D}'=g(\mathcal{D})$。写成交换图，如下：

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\mathbf{x}"] \arrow[dr, "\mathbf{n}"] & \mathcal{D} \arrow[d, "g"] \\ & \mathcal{D}' \end{tikzcd}$$

定义 2.5.1 (*Gauss* 映射)**.** 称 $g:M\to S^2(1)$，其中 $g:\mathbf{x}(u^1,u^2)\mapsto\mathbf{n}(u^1,u^2)$ 为 *Gauss* 映射，$S^2(1)$ 为 *Gauss* 球面。

此时，若视 $S^2(1)$ 的参数域为 D，则局部表示为 $\mathbf{n}(D)$。那么 $S^2(1)$ 关于 $\mathbf{n}$ 的第一基本形式称为 M 的**第三基本形式**，即

$$III=|d\mathbf{n}|^2=|(\mathbf{n}_\alpha du^\alpha)(\mathbf{n}_\beta du^\beta)|=|(\mathbf{n}_\alpha\cdot\mathbf{n}_\beta)du^\alpha du^\beta|$$

记 $f_{\alpha\beta}=\mathbf{n}_\alpha\cdot\mathbf{n}_\beta$。

注记 2.5.1. 曲面的第一、二、三基本形式不是独立的，它们由如下定理保证。

定理 2.5.1. 曲面的三个基本形式满足以下方程：

$$II - 2HII + KI = 0 \tag{2.70}$$

证明. 对非脐点的一个邻域，选取曲率线网为参数网。由 $Weingarten$ 公式可得

$$\mathbf{n}_\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta$$

由

$$h_\alpha^\beta = h_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$$

可知

$$h_1^1 = k_1, \quad h_2^2 = k_2$$

且

$$h_2^1 = h_1^2 = 0$$

注记 2.5.2. 上述讨论来自于 $(g_{\alpha\beta})$ 与 $(h_{\alpha\beta})$ 为对角矩阵，蕴含 (h_β^α) 为对角矩阵。事实上，自共轭算子 W 在曲率线网 *(*即恰当的单位正交基*)* 下的矩阵是对角的，且对角元为主曲率，即

$$(W)_{2\times 2} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{参数网为曲率线网}$$

那么

$$\begin{aligned}
III &= |d\mathbf{n}|^2 \\
&= f_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \\
&= (h_\alpha^\gamma \mathbf{x}_\gamma) \cdot (h_\beta^\delta \mathbf{x}_\delta) du^\alpha du^\beta \\
&= (k_1 \mathbf{x}_1 du^1 + k_2 \mathbf{x}_2 du^2) \cdot (k_1 \mathbf{x}_1 du^1 + k_2 \mathbf{x}_2 du^2) \\
&= k_1^2 g_{11} du^1 du^1 + k_2^2 g_{22} du^2 du^2
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
2HII &= (k_1 + k_2)\{k_1 g_{11} du^1 du^1 + k_2 g_{22} du^2 du^2\} \\
&= \{k_1^2 g_{11} du^1 du^1 + k_2^2 g_{22} du^2 du^2\} + (k_1 k_2)(g_{11} du^1 du^1 + g_{22} du^2 du^2) \\
&= III + KI
\end{aligned}$$

故

$$III - 2HII + KI = 0$$

对脐点的领域是显然的。 □

2.5.2　*Gauss* 曲率的另一种解释 (Gauss 的原始思想)

下面考察 *Gauss* 曲率的另一种表示，即 $\mathcal{D}'$ 与 $\mathcal{D}$ 的面积比。注意到 2− 形式的绝对值为面积元

$$dA = |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2$$

$$dA' = |\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2| du^1 \wedge du^2$$

由 *Weingraten* 公式

$$|\mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_\beta| = |(h_1^1 \mathbf{x}_1 + h_1^2 \mathbf{x}_2) \times (h_2^1 \mathbf{x}_1 + h_1^2 \mathbf{x}_2)| = det(h_\beta^\alpha)|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| = K|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|$$

因此，在微分意义下，有

$$K = \frac{dA'}{dA} \tag{2.71}$$

局部上，有

$$A' = \iint_{\mathcal{D}'} dA' = \iint_{D} K|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2$$

而

$$A' = \iint_{D} |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2$$

由积分中值定理，可得

$$K(\mathbf{x}_0) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{A'}{A} = \lim_{\mathbf{x}^* \to \mathbf{x}_0} K(\mathbf{x}^*) \tag{2.72}$$

因此，*Guass* 曲率的几何意义为 *Gauss* 球面的面积元与曲面本身的面积元之比。

注记 2.5.3. *通过公式2.71或公式2.72也可以定义 Gauss 曲率，蕴含 $K = k_1 k_2$。事实上，前在几何上更为直观，也是 Gauss 本人的原始思想。*

例子 2.5.1. 易知直纹面 $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1), |b| \equiv 1$，则其第一、二基本形式量分别为

$$g_1 1 = (a' + u^2 b')^2, \quad g_{12} = g21 = a' \cdot b, \quad g_{22} = 1$$

$$h_{11} = \frac{(a' + u^2 b', b, a'' + u^2 b'')}{|(a' + u^2 b) \times b|}, \quad h_{12} = h_{21} = \frac{(a', b, b')}{|(a' + u^2 b) \times b|}, \quad h_{22} = 0$$

直接计算得

$$K = -\frac{(a', b, b')}{det(g_{\alpha\beta})|(a' + u^2 b) \times b|^2} \tag{2.73}$$

由定理2.2.1，公式2.73蕴含：直纹面可展当且仅当 $K \equiv 0$。

注记 2.5.4. *我们将在??中给出进一步的刻画。*

以下例子是定理2.5.1的简单应用。

例子 2.5.2. 曲面 M 上一条曲率不为 0 的渐近线的挠率 $\tau = \sqrt{-K}$。

证明. 设 C 为渐近线，有表示 $\mathbf{x}(s) = (\mathbf{u^1}(\mathbf{s}), \mathbf{u^2}(\mathbf{s}))$，$T = \dot{\mathbf{x}}$，于是

$$\dot{T} = kN$$

两边内积 n

$$0 = k_n = \dot{T} \cdot n = kN \cdot n$$

而 $k \neq 0$，则 $N \cdot n = 0$，又 $T \perp n$，则

$$n = \epsilon B, \epsilon = \pm 1$$

而 $\dot{B} = -\tau N$，故 $\dot{n} = -\epsilon\tau N$，即

$$dn = -\epsilon\tau N ds$$

注意到

$$2HII - KI = III = |dn|^2 = \tau^2$$

因此

$$0 - K = \tau^2$$

即

$$\tau = \sqrt{-K} \tag{2.74}$$

□

2.6　面积变分与极小曲面

下面利用变分法推出极小曲面 $(H = 0)$ 的几何意义。选取 $\mathbb{R}^2$ 中联通区域 D，参数为 (u^1, u^2)，引入 D 上的光滑函数，即曲面族 M^t

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{x}(u^1, u^2) + t\varphi(u^1, u^2)n(u^1, u^2)$$

其中 $-\epsilon < t < \epsilon$，$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$，称为曲面变分。

考察 M^t 的面积元

$$dA(t) = \sqrt{g_{11}^t g_{22}^2 - (g_{12}^t)^2} du^1 \wedge du^2 \tag{2.75}$$

注意到

$$\begin{aligned} g_{11}^t = \mathbf{x}_1^t \cdot \mathbf{x}_1^t &= (\mathbf{x}_1 + t\varphi_1 n + t\varphi n_1) \cdot (\mathbf{x}_1 + t\varphi_1 n + t\varphi n_1) \\ &= g_{11} + 2\varphi \mathbf{x}_1 \cdot n_1 t + o(t) \\ &= g_{11} - 2\varphi h_{11} t + o(t) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} g_{12}^t &= \mathbf{x}_1^t \cdot \mathbf{x}_2^t = (\mathbf{x}_1 + t\varphi_1 n + t\varphi n_1) \cdot (\mathbf{x}_2 + t\varphi_2 n + t\varphi n_2) \\ &= g_{12} - 2\varphi h_{12} t + o(t) \end{aligned}$$

同理

$$g_{21}^t = g_{12}^t, g_{22}^t = g_{22} - 2\varphi h_{22} t + o(t)$$

考察

$$\begin{aligned} det(g_{\alpha\beta}^t) = g_{11}^2 g_{22}^t - (g_{12}^t)^2 \\ &= (g_{11} - 2\varphi h_{11} t + o(t))(g_{22} - 2\varphi h_{22} t + o(t)) \\ &- (g_{12} - 2\varphi h_{12} t + o(t))^2 \\ &= det(g_{\alpha\beta}) - 4\varphi\{h_{22} g_{11} - 2h12 g_{12} + h_{11} g_{22}\} t + o(t) \end{aligned}$$

于是 M^t 的面积泛函为

$$\begin{aligned} A(t) &= \iint_D \sqrt{det(g_{\alpha\beta}^t)} du^1 \wedge du^2 \\ &= \iint_D \sqrt{det(g_{\alpha\beta}) - 4\varphi\{h_{22} g_{11} - 2h_{12} g_{12} + h_{11} g_{22}\} t + o(t)} du^1 \wedge du^2 \\ &= \iint_D \sqrt{1 - \frac{4\varphi\{h_{22} g_{11} - 2h_{12} g_{12} + h_{11} g_{22}\}}{det(g_{\alpha\beta})} t + o(t)} \cdot \sqrt{det(g_{\alpha\beta})} du^1 \wedge du^2 \\ &= \int_D \sqrt{1 - 4\varphi H t + o(t)} \sqrt{det(g_{\alpha\beta})} du^1 \wedge du^2 \end{aligned} \tag{2.76}$$

对泛函 $A(t)$ 关于 t 求导，在 $t=0$ 处的导数为

$$\frac{dA(t)}{dt}|_{t=0} = \iint (-2\varphi H) \sqrt{det(g_{\alpha\beta})} du^1 \wedge du^2 \tag{2.77}$$

总结以下定理。

定理 2.6.1. 上述区域 D 上取极小曲面 $(H=0)$ 当且仅当 D 上的曲面面积达到临界值。

证明. 必要性。由 $H=0$，即得 $\frac{dA(t)}{dt}|_{t=0} = 0$，故达到临界值。

充分性。由 φ 的任意性，若有一点 p 满足 $H(p) > 0$，则存在 p 的一个领域 U，使得 $H(U) > 0$，只要选择 $\varphi|_U > 0$，其余值为 0，那么

$$\frac{dA(t)}{dt}|_{t=0} = \iint_D -2\varphi H \sqrt{det(g_{\alpha\beta})} du^1 \wedge du^2 < 0.$$

与临界值矛盾。$H(p) < 0$ 同理。 □

注记 2.6.1. 若 $x(D)$ 落在欧氏空间，则面积极小。

至此，我们断言：旋转面中悬链面以及与之等距的正螺面是极小曲面。一个自然的问题是：除了悬链面，旋转面中是否有其他极小曲面?

我们已经计算了旋转面的第一、二基本形式，现在考察平均曲率 H。由

$$H=\frac{h_{11}g_{22}-2h_{12}g_{12}+h_{22}g_{11}}{det(g_{\alpha\beta})}=0.$$

考虑

$$h_{11}g_{22}-2h_{12}g_{12}+h_{22}g_{11}=0.$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\{f^2f''-f(1+(f')^2)\}=0.$$

注意到 $\sqrt{1+(f')^2}\neq 0$，$f\neq 0$，故

$$1+(f')^2=ff'' \tag{2.78}$$

注记 2.6.2. 等式 (2.78) 是一个 ODE，故上述问题转化为 ODE 解的唯一性。

其实我们可以求解这个 ODE，变形等式 (2.78) 为

$$\frac{f'f''}{1+(f')^2}=\frac{f'}{f}.$$

即

$$\frac{d(1+(f')^2)}{1+(f')^2}=\frac{df}{f}.$$

故

$$ln(1+(f')^2)+lnC=lnf\ C\quad .$$

于是

$$f=C\sqrt{1+(f')^2}.$$

变形得

$$f'=\pm\sqrt{(\frac{f}{C})^2-1}.$$

即

$$\frac{1}{C}du^2=\pm\frac{d(\frac{f}{C})}{\sqrt{(\frac{f}{C})^2-1}}$$

两边积分可得

$$\vec{b}+\frac{u^2}{C}=\pm ch^{-1}(\frac{f}{C})\ \vec{b}$$

故

$$f=\pm Cch(\frac{u^2}{C}+\vec{b})$$

因此悬链面为旋转面中唯一的极小曲面。

回忆曲线论中的 $Frenet$ 公式，本质上是一个 ODE。设曲线 C 为 $\mathbf{x}(s)$，在 $s=0$ 处有标架 $\{\mathbf{x}(0);T,N,B\}$，满足

$$\begin{cases}\dot{T}=kN\\ \dot{N}=-kT+\tau B\\ \dot{B}=-\tau N\end{cases} \tag{2.79}$$

我们希望曲面论的讨论中也能得到一个类似的“$Frenet$”公式，不过是一个 PDE。设 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^1,u^2)$ 为一张曲面，在 $(0,0)$ 处有标架 $\{\mathbf{x}(0);\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,n\}$。由公式 (2.63) 及前的讨论，我们已经知道

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_{\gamma}+b_{\alpha\beta}n \tag{2.80}$$

其次有 $Weingarten$ 公式

$$n_{\alpha}=-h^{\beta}_{\alpha}\mathbf{x}_{\beta}$$

组合来看，有

$$\begin{cases}\mathbf{x}_{\alpha\beta}= & \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_{\gamma}+b_{\alpha\beta}n\\ n_{\alpha}= & -h^{\beta}_{\alpha}\mathbf{x}_{\beta}\end{cases}$$

下面来求这个克氏符。注意到

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}. \tag{2.81}$$

对式 (2.80) 两边内积 $\mathbf{x}_{\delta}$，得

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{x}_{\delta}=\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} \tag{2.82}$$

注意到

$$\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}=(\mathbf{x}_{\alpha}\cdot\mathbf{x}_{\delta})_{\beta}=\mathbf{x}_{\alpha\beta}\cdot\mathbf{x}_{\delta}+\mathbf{x}_{\delta\beta}\cdot\mathbf{x}_{\alpha}.$$

对式 (2.82) 交换指标 α,δ，得

$$\mathbf{x}_{\delta\beta}\cdot\mathbf{x}_{\alpha}=\Gamma^{\gamma}_{\delta\beta}g_{\gamma\alpha}.$$

因此

$$\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}=\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}+\Gamma^{\gamma}_{\delta\beta}g_{\gamma\alpha} \tag{2.83}$$

对式 (2.83) 分别交换指标 α,β 和 β,δ，有

$$\frac{\partial g\beta\delta}{\partial u^{\alpha}}=\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}g_{\gamma\delta}+\Gamma^{\gamma}_{\delta\alpha}g_{\gamma\beta} \tag{2.84}$$

$$\frac{\partial g\alpha\beta}{\partial u^{\delta}}=\Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}g_{\gamma\beta}+\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}g_{\gamma\delta} \tag{2.85}$$

$(2.83)+(2.84)-(2.85)$ 得

$$2\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}=\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g\beta\delta}{\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial g\alpha\beta}{\partial u^{\delta}}. \tag{2.86}$$

注记 2.6.3. 将等式 (2.86) 左侧的指标拉下来，记 $\Gamma_{\alpha\beta\delta}=\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}$，称为**第一类** *Christorff* **符号**。

利用 g^{σ}_{δ} 把指标拉上去得

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\delta^{\sigma}_{\gamma}=\frac{1}{2}g^{\delta\sigma}\{\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g\beta\delta}{\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial g\alpha\beta}{\partial u^{\delta}}\}$$

故

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\delta\sigma}\{\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g\beta\delta}{\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial g\alpha\beta}{\partial u^{\delta}}\} \tag{2.87}$$

称等式 (2.87) 为 *Gauss* **公式**。至此，我们已经能完整地刻画一开始的方程组，即

$$\begin{cases}\mathbf{x}_{\alpha\beta}= & \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_{\gamma}+b_{\alpha\beta}n\\ n_{\alpha}= & -h^{\beta}_{\alpha}\mathbf{x}_{\beta}\end{cases} \tag{2.88}$$

其中

$$\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\delta\sigma}\{\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}}+\frac{\partial g\beta\delta}{\partial u^{\alpha}}-\frac{\partial g\alpha\beta}{\partial u^{\delta}}\}$$

注记 2.6.4. 注意到，由式 (2.87) 可知克氏符仅与第一基本形式量有关，是一个内蕴量。

2.6.1　测地曲率与测地线

下面我们利用方程组 (2.88) 来研究曲面上一个重要的内蕴量——测地曲率。

我们已经知道，曲面上一条曲线 $C:\mathbf{x}(s)=\mathbf{x}(u^1(s),u^2(s))$，沿曲线方向 $T=\dot{\mathbf{x}}$ 的法曲率定义为曲率向量 $\dot{T}=kN$ 在法向量场上的投影，它是一个外蕴量，即

$$k_n(T)=\dot{T}\cdot n=kN\cdot n$$

一个自然的问题是: 曲率向量在切空间上的投影如何表达?

我们考察以下内积

$$\begin{aligned}\dot{T}\cdot\mathbf{x}_{\alpha}&=\frac{d}{ds}(\mathbf{x}_{\beta}\frac{du^{\beta}}{ds})\cdot\mathbf{x}_{\alpha}\\&=\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}g_{\delta\alpha}\frac{du^{\gamma}}{ds}\frac{du^{\beta}}{ds}+g_{\alpha\beta}\frac{d^2u^{\beta}}{ds^2}\end{aligned}$$

假设

$$\dot{T}=f^{\tau}\mathbf{x}_{\tau}+k_n\mathbf{n}$$

两边内积 $\mathbf{x}_{\alpha}$，有

$$\dot{T}\cdot\mathbf{x}_{\alpha}=f^{\tau}g_{\tau\alpha}$$

用 $g^{\alpha\sigma}$ 拉上指标，可得

$$g^{\alpha\sigma}\dot{T}\cdot\mathbf{x}_{\alpha}=f^{\sigma} \tag{2.89}$$

于是

$$g^{\alpha\sigma}\{\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}g_{\delta\alpha}\frac{du^{\gamma}}{ds}\frac{du^{\beta}}{ds}+g_{\alpha\beta}\frac{d^2u^{\beta}}{ds^2}\}=f^{\sigma}$$

因此我们有

$$\dot{T}=\{\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\frac{du^{\beta}}{ds}\frac{du^{\gamma}}{ds}+\frac{d^2u^{\sigma}}{ds^2}\}\mathbf{x}_{\sigma}+k_n\mathbf{n} \tag{2.90}$$

设

$$\{\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\frac{du^{\beta}}{ds}\frac{du^{\gamma}}{ds}+\frac{d^2u^{\sigma}}{ds^2}\}\mathbf{x}_{\sigma}=Q$$

其中 Q 为单位切向量，称 kg 为曲面 C 在曲面上的**测地曲率**。

注记 2.6.5. 对等式*2.90*两边内积 T，可知 $Q\perp T$，又 $Q\perp\mathbf{n}$。于是只要令 $Q:=\mathbf{n}\times T$ 即可。

容易知道

$$\kappa^2=kg^2+k_n^2 \tag{2.91}$$

并且

$$kg-\dot{T}\cdot Q=(\dot{T},\mathbf{n},T) \tag{2.92}$$

定义 2.6.1. 称测地曲率 $kg=0$ 的曲线为**测地线**。

立即得到测地线的等价刻画

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{du^{\alpha}}{ds}\frac{du^{\beta}}{ds}+\frac{d^2u^{\gamma}}{ds^2}=0,\quad \gamma=1,2 \tag{2.93}$$

称常微分方程组2.93为**测地线方程**，这是一个内蕴的方程。根据常微分方程理论，只要给定初值

$$\begin{cases} u^{\alpha}(0)=u_0^{\alpha} \\ \dfrac{du^{\alpha}}{ds}(0)=v_0^{\alpha} \end{cases} \tag{2.94}$$

即初始位置与初始速度，那么存在唯一的解，即测地线。

下面从几何的角度考察测地线。

1. 曲线上的直线一定是测地线，即

$$0=\kappa=\kappa^2=kg^2+k_n^2$$

蕴含

$$kg=0$$

2. 曲面上的非直线是测地线，这句话等价于

$$\kappa N=\dot{T}=0\cdot Q+k_n$$

即

$$N与n共线$$

例子 2.6.1. 球面上的大圆弧是测地线。

例子 2.6.2. 平面上的直线是测地线; 等距变换下，圆柱面上的圆柱螺线也是测地线。

2.6.2 exp 映射、法坐标系与测地极坐标系

最后，我们引入一个工具来简化测地线以及以测地线为参数曲线时的计算。

考察曲面 M 的切空间 T_pM，去幺正标架 $\{p, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$。对一充分短的切向量 $v = y^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad |v| = \epsilon \to 0$。定义从 p 点出发，以 v 为初始方向的测地线 (存在且唯一)，在测地线上取一点 q，使得沿着测地线从 p 点到 q 点的曲线弧长为 ϵ。构造**指数映射** $exp_p : T_pM \to M$ 满足

$$exp_p : v \mapsto q \tag{2.95}$$

可以证明，exp_p 在小邻域内时一个微分同胚。

设 $\{y^1, y^2\}$ 为 q 点对应的坐标，称为**法坐标**，即映射

$$\text{坐标表示} : q \mapsto \{y^1, y^2\}$$

定义 2.6.2. 在切空间 T_pM 中，取 p 为原点的幺正标架 $\{p = O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$，称为**法坐标系**。

注记 2.6.6. 坐标系本质上是点与有序数组的一一对应，即坐标卡表示、流形上的推出。

记 $v_0 = \frac{v}{\epsilon} = y_0^\alpha \mathbf{e}_\alpha$，则 $exp_p(tv_0), (t > 0)$ 小范围内为测地线，并且有表示

$$(tv_0) = (ty^1, ty^2), \quad q_t \mapsto tv_0 \tag{2.96}$$

于是线性方程

$$\begin{cases} y^1 = ty_0^1 \\ y^2 = ty_0^2 \end{cases} \tag{2.97}$$

为测地线的参数方程。

定理 2.6.2. 在法坐标系下，有

$$g_{11}(p) = g_{22}p = 1, \quad g_{12}(p) - g_{21}(p) = 0 \tag{2.98}$$

且

$$\frac{g_{\alpha\beta}}{u^\gamma}(p) = 0 \quad (\Longleftrightarrow \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(p) = 0) \tag{2.99}$$

证明. 设 $y^\alpha-$ 线为从 p 点出发，以 $\mathbf{e}_\alpha$ 为初始方向的测地线，且 y^α 为弧长参数。则

$$\mathbf{x}_\alpha(p) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^\alpha}(p) = \mathbf{e}_\alpha$$

故

$$g_{\alpha\beta}(p) = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

可得式2.98. 再将公式2.97带入方程2.93，可得

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{dy^\alpha}{ds}\frac{dy^\beta}{ds} + \frac{d^2u^\gamma}{ds^2} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

最后根据公式2.83-公式2.85可得

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = 0$$

□

下面考察 p 的小邻域内的另一种坐标表示——**测地极坐标系**。

$$\begin{array}{ccc} \{\text{幺正标架}\} & \xrightarrow{diffeo} & \{\text{测地极标架}\} \\ \big\downarrow{\scriptstyle exp_p} & & \big\downarrow{\scriptstyle exp_p} \\ q = \{y^1, y^2\} & \longrightarrow & q = \{\rho, \theta\} \end{array}$$

其中 $deffeo$ 指的是以 q 为唯一奇点的微分同胚，即 $y^1 = \rho\cos\theta, y^2 = \rho\sin\theta$。我们做如下断言:

1. θ 为常数时，ρ 在切空间 T_pM 上为以 p 为起点的射线;$exp_p(\rho)$ 为以 p 为起点 θ 角方向的测地线。

2. ρ 为常数时，θ 为以 p 为圆心的同心圆;$exp_p(\theta)$ 为以 ρ 为半径的测地圆。

记 $u^\alpha = y^\alpha; \overline{u}^1 = \rho, \overline{u}^1 = \theta$，记邻域 $B_\epsilon(p) - \{p\}$ 为测地极坐标邻域，有如下定理:

定理 2.6.3. *在以 p 点为中心的测地极坐标系 $\{p; \overline{u}^1, \overline{u}^2\}$ 下，在 $B_\epsilon(p) - \{p\}$ 内有*

1.
$$g_{\overline{11}} = 1 \tag{2.100}$$

2.
$$g_{\overline{12}} = g_{\overline{21}} = 0 \tag{2.101}$$

3.
$$\lim_{\rho\to 0} g_{\overline{22}} = 0 \tag{2.102}$$

4.

$$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{g_{\overline{22}}}=1 \tag{2.103}$$

注记 2.6.7. *定理2.6.2和定理2.6.3说明在选取测地线作为参数曲线的第一基本形式具有如下简单的形式:*

1.

$$I(p)=du^1du^1+du^2du^2 \tag{2.104}$$

2.

$$I(p)=d\overline{u}^1d\overline{u}^1 \tag{2.105}$$

3.

$$I(\overline{u}^1,\overline{u}^1)=d\overline{u}^1d\overline{u}^1+d\overline{u}^2d\overline{u}^2 \tag{2.106}$$

其次，公式2.104只对单点 p 成立; 公式2.105时退化的，本质上为 $\rho=0$ 的奇性，而曲面当然是正则的。

最后，公式2.101说明在 $B_\epsilon(p)-\{p\}$ 内测地线与测地圆正交，这是著名的Gauss **引理**。

证明. 我们分别证明四个公式。

1. 注意到 ρ 为弧长，易知 $g_{\overline{11}}=1$。

2. 由测地线方程

   $$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{d\overline{u}^\alpha}{ds}\frac{d\overline{u}^\beta}{ds}+\frac{d^2\overline{u}^\gamma}{ds^2}=0,\quad \gamma=1,2$$

   取 $\alpha=\beta=1,\gamma=2$，有

   $$\Gamma^{\overline{2}}_{\overline{11}}=1$$

   又

   $$\Gamma^{\overline{2}}_{\overline{11}}=\frac{1}{2}g^{\overline{2}\alpha}\left\{\frac{\partial g_{\overline{1}\alpha}}{\partial u^{\overline{1}}}+\frac{\partial g_{\alpha\overline{1}}}{\partial u^{\overline{1}}}-\frac{\partial g_{\overline{11}}}{\partial u^\alpha}\right\}$$

   分别讨论 $\alpha=1,2$ 可知 $\frac{\partial g_{\overline{12}}}{\partial u^{\overline{1}}}=0$，故 $g_{\rho\theta}$ 与 ρ 无关。又

   $$g_{\rho\theta}=\frac{1}{2}\rho\{\sin 2\theta(g_{22}-g_{11})+2\cos 2\theta g_{12}\}$$

   故

   $$g_{\overline{12}}=\lim_{\rho\to 0}g_{\rho\theta}(\theta)=0$$

3. 由 1.2. 可知

$$\sqrt{g_{22}} = \rho\sqrt{det(g_{\alpha\beta})} \tag{2.107}$$

对上式两边令 $\rho \to 0$，则有

$$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{g_{22}} == 0$$

4. 对式2.107两边关于 ρ 求导，得

$$\sqrt{g_{22}}_{\rho} = \sqrt{det(g_{\alpha\beta})} + \frac{\rho}{2\sqrt{det(g_{\alpha\beta})}}\left\{\frac{\partial(det(g_{\alpha\beta}))}{\partial u^1}\cos\theta + \frac{\partial(det(g_{\alpha\beta}))}{\partial u^2}\sin\theta\right\}$$

令 $\rho \to 0$，可得

$$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{g_{22}}) = 1$$

□

例子 2.6.3. 计算 $Gauss$ 曲率 $K \equiv -\frac{1}{a^2}$ 的旋转曲面。

证明. 设 $\mathbf{x} = (v\cos u, v\cos u, f(v))$ 为旋转曲面，其 $Gauss$ 曲率为

$$\frac{f'f''}{v(1+(f')^2)^2} \equiv -\frac{1}{a^2}$$

变形得

$$\frac{d(1+(f')^2)}{(1+(f')^2)^2} = \left(-\frac{1}{a^2}\right)d(v^2)$$

两边积分得

$$\frac{1}{1+(f')^2} = \frac{1}{a^2}v^2 + c_1$$

不妨 $c_1 = 0$，于是

$$f' = \pm\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}$$

令 $v = a\cos\theta$，可得

$$df = \pm\frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}d\theta$$

故

$$f = aln(\sec\theta + \tan\theta - \sin\theta) + c_2$$

不妨 $c_2 = 0$，得到

$$\begin{cases} v = a\cos\theta \\ f = aln(\sec\theta + \tan\theta - \sin\theta) \end{cases} \tag{2.108}$$

这是**曳物线**方程，旋转曲面为**伪球面**。 □

最后，我们对测地线做进一步的讨论，称测地线的挠率为**测地挠率**，记为 τ_g。设 $\mathbf{x}(s)=\mathbf{x}(u^1(s),u^2(s))$ 为曲面 $\mathbf{x}(u^1,u^2)$ 上一条非直测地线。由

$$\tau=-\dot{B}\cdot N=B\cdot\dot{N}=(T,N,\dot{N}) \tag{2.109}$$

又

$$\kappa^2=k_g^2+k_n^2=k_n^2$$

以及

$$\kappa N=k_gQ+k_n\mathbf{n}=k_n\mathbf{n}$$

故 $n=\pm N$。不妨 $\mathbf{n}=N$，因此

$$\tau=-(\dot{\mathbf{n}},\dot{\mathbf{x}},\mathbf{n})=-(\mathbf{n}_\alpha,\mathbf{x}_\beta,\mathbf{n})\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}$$

具体而言，即

$$\tau ds=-\{(\mathbf{n}_1,\mathbf{x}_1,\mathbf{n})du^1du^1+[(\mathbf{n}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{n})+(\mathbf{n}_2,\mathbf{x}_1,\mathbf{n})]du^1du^2+(\mathbf{n}_2,\mathbf{x}_2,\mathbf{n})du^2du^2\}$$

计算

$$(\mathbf{n}_1,\mathbf{x}_1,\mathbf{n})=\frac{(\mathbf{n}_1\times\mathbf{x}_1)\cdot(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}=\frac{(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)-(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}$$

$$(\mathbf{n}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{n})=\frac{(\mathbf{n}_1\times\mathbf{x}_2)\cdot(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}=\frac{(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)-(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}$$

$$(\mathbf{n}_2,\mathbf{x}_1,\mathbf{n})=\frac{(\mathbf{n}_2\times\mathbf{x}_1)\cdot(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}=\frac{(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)-(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}$$

$$(\mathbf{n}_2,\mathbf{x}_2,\mathbf{n})=\frac{(\mathbf{n}_2\times\mathbf{x}_2)\cdot(\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}=\frac{(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_2)-(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}$$

故

$$\begin{aligned}\tau ds=&\frac{-1}{|\mathbf{x}_1\times\mathbf{x}_2|}\{[(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)-(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1)]du^1du^1\\&=+\{[(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)-(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)]+[(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)-(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1)]\}du^1du^2\\&=+[(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{x}_2)-(\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_2)]du^2du^2\}\end{aligned}$$

整理可得

$$\tau ds=\frac{1}{det(g_{\alpha\beta})}\begin{vmatrix}(du^1)^2 & -du^1du^2 & (du^2)^2\\ g_{11} & g_{12} & g_{22}\\ h_{11} & h_{12} & h_{22}\end{vmatrix} \tag{2.110}$$

对比公式2.62，可得以下定理:

定理 2.6.4. 设 C 为非直测地线，则 C 的测地挠率 $\tau_g=0$ 当且仅当 C 为曲率线。

第三章　$E.Cartan$ 活动标架法

“活动标架法是由法国大数学家 $E.Cartan$ 发扬光大的，现已成为研究为几何与几何分析的有力工具。”

3.1　引言

我们在古典曲线、曲面理论中使用的工具是自然标架，即研究曲线、曲面本身。自然标架 $\{\mathbf{x};\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{n}\}$ 的特点是复杂而形象，前者仙子了我们从更高的观点研究几何;我们曾简单讨论过幺正标架，其特点是简单而抽象，前者赋予我们更简洁的记号和更高的观点，但抽象性是需要适应的。事实上，公式2.10表示了自然标架到幺正标架的转移关系，系啊没将重新揭示这一点，并且以幺正标架为主进行讨论。

注记 3.1.1. *为现代微分几何和高维流形记号上叙述方便，并且为与古典记号有个区分，往后大标架 $\{O;\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3\}$、幺正标架 $\{\mathbf{x};\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 和大部分的向量 (值函数)$\mathbf{x}$(视为仿射空间 $\mathbf{E}^3$ 中的点)，统一不再用粗体。*

定义 3.1.1. 称上述 $\{x;e_1,e_2,e_3\}$ 为 $\mathbf{E}^3$ 中一个 (以 x 为“原点”的一个) **活动幺正标架**。$\mathbf{E}^3$ 中全体活动幺正标架构成的集合称为 $\mathbf{E}^3$ 的一个**标架空间**。

首先, $x\in\mathbf{E}^3$ 有表示 $x=x^iE_i$, 即 x 的坐标为 (x^1,x^2,x^3), 简记为 $x=(x^1,x^2,x^3)$。这说明 x 依赖于 3 个参数 (或 3 个自由度)。其次，向量 e_i 可视为 O 为起点，于是有表示

$$e_i=a_i^jE_j \tag{3.1}$$

其中 $A=\{a_i^j\}_3$ 为保向正交矩阵，即 $detA=1$，记 $B=\{b_i^j\}_{3\times3}$ 为 A 的逆矩阵，有 $a_i^jb_j^k=\delta_i^k$。

注意到 A 的算子正定正交，作用对应了 3 个 $Euler$ 角，即对 3 个标架向量的旋转，故 A 依赖于 3 个参变量 (或 3 个自由度)。事实上，由于 A 满足

$$\begin{cases}(a_1^1)^2+(a_2^1)^2+(a_3^1)^2=1\\(a_1^2)^2+(a_2^2)^2+(a_3^2)^2=1\\(a_1^3)^2+(a_2^3)^2+(a_3^3)^2=1\end{cases} \tag{3.2}$$

且

$$\begin{cases} a_1^1a_1^2 + a_2^1a_2^2 + a_3^1a_3^2 = 0 \\ a_1^1a_1^3 + a_2^1a_2^3 + a_3^1a_3^3 = 0 \\ a_1^2a_1^3 + a_2^2a_2^3 + a_3^2a_3^3 = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

也说明 A 仅 3 个自由度，详见 [9] 的 P10-16。

故标架空间是一个 6 维数的空间，即 x 的位置坐标和标架的旋转各自提供 3 个自由度。我们称 $\mathbf{E}^3$ 中的一个**运动**为点的平移或旋转，显然运动不改变空间中两点的距离和两向量的夹角，且构成一个群，称为保向的等距变换群，记为 M_3^+，或简称 G，称 $\mathbf{E}^3$ 的**运动群**。

注记 3.1.2. *事实上，代数中有 $M_3^+/(_{\mathbb{R}}V^3,+) \cong SO(3)$，参见 [1] 的 P158。*

给定一个活动幺正标架，运动群 G 的作用遍历整个标架空间，因此 $\mathbf{E}^3$ 的运动群与标架空间是一一对应的，我们把活动幺正标架看成运动群 G 的几何表示，从而使标架空间与 G 等同。现设 $\mathbf{E}^3$ 中连续可微的幺正标架依赖于 $m(m \le 6)$ 个参变量 $u^1,\cdots,u^m$，即

$$\{x(u^1,\cdots,u^m); e_i(u^1,\cdots u^m)\}_{i=1,2,3} \tag{3.4}$$

这样的活动幺正标架全体称为 m 参数的活动标架场，其成为标架空间 G 的一个 m 维子空间。

“E.Cartan 的活动标架法的主要思想是，通过活动标架这座桥梁，把所研究的几何图形 (子空间) 看成 G 的子空间，然后把 G 的性质自然地诱导到这个子空间上，从而得到 G 变换下不变的几何性质。这正式 Lie 群在微分几何上的应用。”——《整体微分几何初步》(沈一兵)

例子 3.1.1. 设 $\mathbf{E}^3$ 中一条正则曲线 $C: x = x(s)$，为 C 上每点配置一个 $Frenet$ 标架。

$$\{x, T, N, B\}$$

记 $e_1 = T, e_2 = N, e^3 = B$，则 $\{x;, e_1, e_2, e_3\}$ 构成单参数幺正标架场。因此，正则曲线 C 确定一个单参数标架场; 反过来，一个单参数标架场的“原点”刻画出一条曲线。因此，空间曲线可以视为运动群 G 的一维子空间。

例子 3.1.2. 设 $\mathbf{E}^3$ 中一张正则曲面 $M: x = x(u^1, U^2)$，在其上配置一个幺正标架:

$$\begin{cases} x = x(u^1, u^2) \\ e_1 = \dfrac{x_1}{x_1} \\ e_2 = \dfrac{x_2 - (x_2 \cdot e_1)e_1}{|x_2 - (x_2 \cdot e_1)e_1|} \\ e_3 = e_1 \times e_2 (= \mathbf{n}) \end{cases} \tag{3.5}$$

即 $\{x; e_1, e_2, e_3\}$ 构成一个双参数幺正标架场。反过来，一个双参数幺正标架场刻画了一张空间曲面，于是曲面可以视为运动群 G 的一个二维子空间。

3.2　双参数下的外微分与外乘法

设 u^1, u^2 为两个参变量，du^1, du^2 为它们的微分，称为坐标微分。

定义 3.2.1. 微分 du^1, du^2 的 $C^\infty(u^1, u^2)-$ 模线性组合

$$\omega = f_1 du^1 + f_2 du^2, \quad f_1, f_2 \in C^\infty(u^1, u^2) \tag{3.6}$$

称为一个**一次外微分形式**或 1− 形式。

注记 3.2.1. 这里的 $C^\infty(u^1, u^2) : \{f(u^1, u^2) | f \in C^\infty\}$ 构成一个交换环，允许适当降低光滑性

在坐标微分之间引入**外乘法**，记为 $\wedge$，使得

$$du^\alpha \wedge du^\beta = -du^\beta \wedge du^\alpha \tag{3.7}$$

蕴含

$$du^\alpha \wedge du^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

且

$$du^\alpha \wedge du^\beta \wedge du^\gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2$$

定义 3.2.2. 称形式

$$f du^\alpha \wedge du^\beta$$

为**二次外微分形式**或 2− 形式。随即 f 称零次外微分形式。

下面考察将外乘法 $\wedge$ 线性扩张到外微分空间，令

$$\begin{cases} \omega^1 = a_1^1 du^1 + a_2^1 du^2 \\ \omega^2 = a_1^2 du^1 + a_2^2 du^2 \end{cases} \tag{3.8}$$

记 $A = \{a_i^j\}_{2\times 2}$，于是有

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = det A du^1 \wedge du^2 \tag{3.9}$$

因此 $\omega^1 \wedge \omega^2 == 0$ 当且仅当 $det A = 0$，即 ω^1 与 ω^2 相差一个因子，称此时 ω^1 与 ω^2 线性相关。

定义 3.2.3. 称 d 为一个**外微分算子**，满足:

1. $df = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha$，即为 f 的全微分;
2. $d\omega = d(a_\alpha du^\alpha) := (da_\alpha) \wedge du^\alpha = \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta \wedge du^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(u^1, u^2)$

以下定理在外微分理论中相当重要，与经典代数拓扑也有联系，参见 [3]，我们先介绍它的一个简单版本。

定理 3.2.1 ($Poincare$ 引理)**.**

$$d^2 = 0$$

证明. 只验证 $d^2 f = 0$，考察

$$\begin{aligned}
d^2 f = d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta \\
&= \sum_{\alpha<\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta + \sum_{\alpha>\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta \\
&= \sum_{\alpha<\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta - \sum_{\alpha<\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta \\
&= \sum_{\alpha<\beta} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\right) du^\alpha du^\beta \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

此外，对任一微分形式 ω 与其组合 $f\omega$，考察外微分算子 d 的作用:

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega \tag{3.10}$$

同时

$$d(\omega f) = f d\omega + \omega \wedge df = -df \wedge \omega + f d\omega \tag{3.11}$$

下面将外微分作用域幺正标架 $\{x(u); e_i(u)\}_{i=1,2,3}$,　$u = (u^1, \cdots, u^m), (m \leq 6)$，其关于固定标架 $\{O; E_1, E_2, E_3\}$ 的表示为

$$\begin{cases} x = x^i E_i \\ e_i = a_i^j E_j \end{cases} \tag{3.12}$$

对方程组3.12作用外微分算子 d，可得

$$\begin{cases} dx = dx^i E_i \\ e_i = da_i^j E_j \end{cases} \tag{3.13}$$

从几何上看，点 $x(u)$ 发生运动成为 $x(u + \Delta u)$，即

$$\begin{cases} x(u) \mapsto x(u + \Delta u) \\ e_i(u) \mapsto e_i(u + \Delta u), \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

令 $\Delta u\to 0$，可得

$$\begin{cases} x(u)\mapsto x(u)+dx \\ e_i(u)\mapsto e_i(u+)+de_i, \quad i=1,2,3 \end{cases} \tag{3.14}$$

即 d 的作用为“微小运动”。

现在又 $E_i=b_i^je_j$，带入方程组3.13，可得

$$\begin{cases} dx=dx^ib_i^je_j \\ de_i=da_i^jb_j^ke_k \end{cases} \tag{3.15}$$

记 $\omega^j=dx^ib_i^j,\quad \omega_i^k=da_i^jb_j^k$。

考察

$$\omega^j=dx^ib_i^j=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}b_i^jdu^\alpha:=\Gamma_\alpha^j(u)du^\alpha$$

以及

$$\omega_i^k=da_i^jb_j^k=\frac{\partial a_i^j}{\partial u^\alpha}b_j^kdu^\alpha:=\Gamma_{i\alpha}^k(u)du^\alpha$$

故 ω_i 和 ω_i^k 为 $1-$ 形式。

定义 3.2.4. 称

$$\begin{cases} dx=\omega^ie_i \\ de_i=\omega_i^je_j, \quad i=1,2,3 \end{cases} \tag{3.16}$$

为幺正标架的**运动方程**，ω_i 和 ω_i^k 称为**无穷小运动分量**。

其二，写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

回忆注记1.1.4处的断言以及公式1.16，这个矩阵是反对此的，即只有 3 个有效分量。事实上，$e_i\cdot e_j=\delta_{ij}$，对其作用微分算子 d 后可得

$$de_i\cdot e_j+e_i\cdot de_j=0$$

带入无穷小运动分量有

$$\omega_i^k(e_k\cdot e_j)+e_i\cdot(\omega_j^ke_k)=0$$

注意到 $e_i\cdot e_j=\delta_{ij}$，于是

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0 \tag{3.17}$$

即

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ -\omega_1^2 & 0 & \omega_2^3 \\ -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

连同方程组3.16，共 6 个有效分量，再次验证了标架空间的维数！

因此，运动方程的完整写法为

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i \\ de_i = \omega_i^j e_j, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{3.19}$$

其中 $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$。

此时，第一基本形式表达为

$$ds^2 = |dx|^2 = (\omega^\alpha e_\alpha)^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + (\omega_3)^2 \tag{3.20}$$

一个自然的问题是，方程组3.19是否决定一个几何对象，其次，这个几何对象是否唯一? 这是一个微分方程的问题，前者归结为 $Frobenius$ 定理，后者目前可以解决。

注记 3.2.2. 由于此前将几何对象域标架场等同，因而问题转化为标架场 $\{x, e_i\}_{i=1,2,3}$ 的存在唯一性。

定理 3.2.2. 给定两个 $m(m \le 6)$ 参数的活动幺正标架场

$$\{x; e_i\}_{i=1,2,3}, \quad \{\overline{x}; \overline{e}_i\}_{i=1,2,3}$$

相应的无穷小运动分量为 $\{\omega^i, \omega_i^j\}$ 和 $\{\overline{\omega}^i, \overline{\omega} i^j\}$ 满足 $\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \overline{\omega}_i^j + \overline{\omega}_j^i = 0$。若

$$\omega^i = \overline{\omega}^i, \quad \omega_i^j = \overline{\omega}_i^j$$

成立，那么两个标架场至多相差一个运动。

证明. 取定 $u_0 = (u_0^1, \cdots, u_0^m)$，对应 $x(u_0) \in \mathbf{E}^3$。让 $\overline{x}(u_0)$ 平移至 $x(u_0)$ 且 $\overline{e}_i(u_0)$ 通过旋转与 $e_i(u_0)$ 重合，记为

$$\begin{cases} x(u_0) = \overline{x}(u_0) \\ e_i(u_0) = \overline{e}_i(u_0) \end{cases} \tag{3.21}$$

在大标架 $\{O, E_1, E_2, E_3\}$ 下，以上两组活动标架分别由表示

$$\begin{cases} x(u) = x^i(u) E_i \\ e_i(u) = a_i^j(u) E_j \end{cases}, \quad \begin{cases} \overline{x}(u) = \overline{x}^i(u) E_i \\ \overline{e}_i(u) = \overline{a}_i^j(u) E_j \end{cases} \tag{3.22}$$

由公式3.21知它们在 u_0 处相等，即

$$\begin{cases} x_i(u) = \overline{x}^i(u)E_i \\ a_i^j(u) = \overline{a}_i^j(u)E_j \end{cases} \tag{3.23}$$

下证对任意的 u 都成立。注意到 $de_i(u) = d(a_i^j(u))E_j$，而

$$de_i(u) = \omega_i^j e_j = \omega_i^j a_j^k E_k$$

故

$$da_i^k(u) = \omega_i^j a_j^k(u)$$

同理

$$d\overline{a}_i^k(u) = \omega_i^j \overline{a}_j^k(u)$$

而 $a_i^k a_i^l = \delta^{kl}$，考察

$$d(a_i^k \overline{a}_i^l) = (da_i^k)\overline{a}_i^l + a_i^k(d\overline{a}_i^l) = \omega_i^j a_j^k \overline{a}_i^l + a_i^k \omega_i^j \overline{a}_j^l = 0$$

因此 $a_i^k \overline{a}_i^l$ 与 u 无关，故 $a_i^k \overline{a}_i^l(u) - a_i^k \overline{a}_i^l(u_0), \forall u$。又

$$(a_k - \overline{a}_i^k)\overline{a}_i^l = a_i^k \overline{a}_i^l - \overline{a}_i^k \overline{a}_i^l = \delta^{kl}(u_0) - \delta^{kl}(u_0) = 0$$

由于 $\{\overline{a}_i^k\}$ 可你，上式蕴含 $a_i^k(u) = \overline{a}_i^k(u), \forall u$。进而 $e_i = \overline{e}_i$，考察

$$d(x - \overline{x}) = \omega^i e_i - \omega^i \overline{e}_i = 0$$

故 $x - \overline{x}$ 与 u 无关，即 $x(u) - \overline{x}(u) = x(u_0) - \overline{x}(u_0)$。 □

3.3　外微分形式引入

3.3.1　*Grassman* 代数

在曾经曲线论部分的讨论中，我们曾遇到过微分算子 d 作用在合适的单位正交基下有标准的反对称矩阵，见方程1.16。此外，在运动方程的讨论中，也出现了反对称的结构，如方程3.17. 这些现象启发我们构造一个 (事实上本来就有) 代数结构去叙述它们。

设 V 为 $\mathbb{R}$ 上的 m 维向量空间，对 $k \in \mathbb{N}$ 个 V 作张量积，记为 $T^k(V)$，即

$$T^k(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k\text{个}} \tag{3.24}$$

显然 $T^k(V)$ 构成 $\mathbb{R}$ 上的 m^k 维向量空间。若取 V 的一组基 $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_m\}$，于是对任意 $\xi\in V$，都有表示

$$\xi=\xi^\alpha\sigma_\alpha \tag{3.25}$$

进而 $T^k(V)$ 的基为 $\{\sigma_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\sigma_{\alpha_k}|\alpha_1,\cdots,\alpha_k=1,\cdots,m\}$。于是对任意 $T\in T^k(V)$，都有表示

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_k}\sigma_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes\sigma_{\alpha_k} \tag{3.26}$$

记 k 重置换群为 S_k，其中任一置换记为 σ，符号为 $sgn\sigma$，满足

$$sgn\sigma=\begin{cases}+1 & \sigma\text{ 为偶置换}\\ -1 & \sigma\text{ 为奇置换}\end{cases}$$

定义 $T^k(V)$ 上的关心 $\sim$ 满足

$$T_1\otimes\cdots\otimes T_k\sim T_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes T_{\sigma(k)}\Longleftrightarrow T_1\otimes\cdots\otimes T_k+T_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes T_{\sigma(k)}=0\quad\text{其中 } sgn\sigma=-1$$

构造商空间 $\wedge^k(V):=T^k(V)/\sim$，记 $T_1\otimes\cdots\otimes T_k$，记等价类为

$$T_1\wedge\cdots\wedge T_k \tag{3.27}$$

其上被诱导一个自然的运算 $\wedge$，成为外乘法或外积。以上是纯代数层面的构造，详见陈志杰. (2001). 代数基础 · 代数基础: 模, 范畴, 同调代数与层. 华东师范大学出版社. 的 P66-73。为了显化外乘法在实际操作中的作用，我们通过以下一个构造与线性扩张的方式来引入。

直接对 V 的基 $\{\sigma_1,\cdots,\sigma_m\}$ 定义一种乘法 $\wedge$，使得

1. 形式上有

$$\sigma_\alpha,\quad \alpha=1,\cdots,m$$
$$\sigma_\alpha\wedge\sigma_\beta,\quad 1\le\alpha<\beta\le m$$
$$\sigma_\alpha\wedge\sigma_\beta\wedge\sigma_\gamma\quad 1\le\alpha<\beta<\gamma\le m$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$\sigma_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_k}\quad 1\le\alpha_1<\cdots<\alpha_k\le m$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$\sigma_1\wedge\cdots\wedge\sigma_m$$

2. 满足反对称性，即对任意 $k(\ge 2)$ 个基向量，有

$$\sigma_\alpha\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_p}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_q}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_k}=-\sigma_\alpha\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_q}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_p}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_k} \tag{3.28}$$

其中 $\alpha_1\cdots\alpha_k=1,\cdots,m,\quad 1\le p<q\le k,\quad 2\le k\le m$。

3. 利用线性扩张，把上述乘法推广到整个 V 上，容易验证:

   (a) 对任意 $\xi = \xi^\alpha \sigma_\alpha, \eta = \eta^\alpha \sigma_\alpha$，有

$$\xi \wedge \eta = \sum_{\alpha<\beta} \begin{vmatrix} \xi^\alpha & \xi^\beta \\ \eta^\alpha & \eta^\beta \end{vmatrix} \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta \tag{3.29}$$

   (b) 对任意 $\xi = \xi^\alpha \sigma_\alpha, \eta = \eta^\alpha \sigma_\alpha, \zeta = \zeta^\alpha \sigma_\alpha$，有

$$\xi \wedge \eta \wedge \zeta = \sum_{\alpha<\beta<\gamma} \begin{vmatrix} \xi^\alpha & \xi^\beta & \xi^\gamma \\ \eta^\alpha & \eta^\beta & \eta^\gamma \\ \zeta^\alpha & \zeta^\beta & \zeta^\gamma \end{vmatrix} \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta \wedge \sigma_\gamma \tag{3.30}$$

定义 3.3.1. 称返祖上述条件的乘法 $\wedge$ 为**外乘法**或**外积**。V 中任意 $k(0 \leq k \leq m)$ 个元素的外积称为一个 k **重元素**，其必形如

$$a^{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} \quad (1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq m), \quad a^{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \in \mathbb{R} \tag{3.31}$$

显然，所有 k 重元素都落在以 $\{\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} | 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq m\}$ 为基的 C_m^k 维向量空间中，事实上，使用纯代数的记号，有

$$\wedge^0(V) = \mathbb{R}$$

$$\wedge^1(V) = V$$

$$\wedge^2(V) = span\{\sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta | 1 \leq \alpha < \beta \leq m\}$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$\wedge^k(V) = span\{\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} | 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq m\}$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$\wedge^m(V) = span\{\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_m\}$$

且

$$dim \wedge^k (V) = C_m^k \tag{3.32}$$

容易发现，外积 $\wedge$ 可以被线性扩张到所有 $\wedge^k(V)(0 \leq k \leq m)$ 之间，即

$$(\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p}) \wedge (\sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q}) = \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p} \wedge \sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q} \tag{3.33}$$

同时，$\wedge$ 满足结合律与分配律，对任意 φ, ψ, θ 为 p, q, r 重元素，以及 $a, b \in \mathbb{R}$ 有

1. $(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta = \varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$

2. $(a\varphi + b\psi) \wedge \theta = a\varphi \wedge \theta + b\psi \wedge \theta$

3. $\varphi\wedge(a\psi+b\theta)=a\varphi\wedge\psi+b\varphi\wedge\theta$

于是直和形式 $\bigoplus_{k=1}^{m}\wedge^k(V)$ 构成 $\mathbb{R}$ 上的一个结合的分次代数，记为 $G(V)$。

定义 3.3.2. 称上述代数 $G(V)$ 为 $\mathbb{R}$ 上一个关于 V 的 $Grassman$ **代数**或外代数。

注记 3.3.1. $dimG(V^m)=2^m$

命题 3.3.1. *$G(V)$ 上的外积 $\wedge$ 具有以下性质:*

1. 设 $\varphi\in\wedge^p(V),\psi\in\wedge^q(V)$，则

$$\varphi\wedge\psi=(-1)^{pq}\psi\wedge\varphi \tag{3.34}$$

2. 设 $\varphi_r=a_r^{\alpha}\sigma_\alpha\in\wedge^1(V),\quad 1\le r\le k,1\le\alpha\le m$，则

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k=\sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_k}\begin{vmatrix}a_1^{\alpha_1}&\cdots&a_1^{\alpha_k}\\ \vdots&&\vdots\\ a_k^{\alpha_k}&\cdots&a_k^{\alpha_k}\end{vmatrix}\sigma_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_k} \tag{3.35}$$

证明. 1. 只要验证基上的作用即可。当 $p+q>m$ 时自然成立，下证 $p+q\le m$ 的情形。令

$$\varphi=\sigma_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_p},\quad \psi=\sigma_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\beta_q}$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi\wedge\psi&=(\sigma_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_p})\wedge(\sigma_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\beta_q})\\ &=(-1)^p\sigma_{\beta_1}\wedge(\sigma_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_p})\wedge(\sigma_{\beta_2}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\beta_q})\\ &\cdots\\ &=(-1)^{pq}\psi\wedge\varphi\end{aligned}$$

2. 由

$$\begin{aligned}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k&=\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k=1}^{m}a_1^{\alpha_1}\cdots a_k^{\alpha_k}\sigma_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_k}\\ &=\sum_{1\le\alpha_1<\cdots<\alpha_k\le m}\left\{\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k}(-1)^{\sigma_k\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}}a_1^{\alpha_1}\cdots a_k^{\alpha_k}\right\}\sigma_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_k}\\ &=\sum_{\alpha_1<\cdots<\alpha_k}\begin{vmatrix}a_1^{\alpha_1}&\cdots&a_1^{\alpha_k}\\ \vdots&&\vdots\\ a_k^{\alpha_k}&\cdots&a_k^{\alpha_k}\end{vmatrix}\sigma_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\sigma_{\alpha_k}\end{aligned}$$

□

3.3.2 外微分形式

现在将上述事实特殊化到微分形式上。考察 $\mathbb{R}^m := \{(u^1,\cdots,u^m)|u^\alpha\in\mathbb{R},\alpha=1,\cdots,m\}$，对每点 $u=(u^1,\cdots,u^m)$ 有 m 个独立的微分 $du^1,\cdots,du^m$，以它们为基向量张成一个 $\mathbb{R}$ 上的 m 维向量空间，记为 Lu，即上述的 V。直接构造其上的 $Grassman$ 代数

$$\wedge(Lu) := \bigoplus_{k=0}^{m} \wedge^k(Lu) \tag{3.36}$$

对任一子空间 $\wedge^k(Lu)$ 的 k 重元素 φ，有

$$\varphi = \sum_{1\leq<\alpha_1<\cdots<\alpha_k\leq m} a_{\alpha_1\cdots\alpha_k} du^{\alpha_1}\wedge du^{\alpha_k} \tag{3.37}$$

设 $U\subset\mathbb{R}^m$ 为一开区域。

定义 3.3.3. 定义 U 上的 k **次外微分形式**或 $k-$ 形式，对每点 $u\in U$，确定 $\wedge^k(Lu)$ 中的一个 k 重元素，且它在 U 上连续可微地变化。

注记 3.3.2. 即 φ 中的系数 (函数)$a_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\in C^1(U)$。

因此 U 上任意一个 $k-$ 形式 ω 可以表示为

$$\omega = \sum_{1\leq\alpha_1<\cdots<\alpha_k\leq m} a_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(u) du^1\wedge\cdots\wedge du^{\alpha_k}, \quad u\in U \tag{3.38}$$

事实上，式3.38的表达可以简化为如下形式:

$$\omega = \sum_{1\leq\alpha_1<\cdots<\alpha_m\leq m} \tilde{a}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(u) du^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge d^{\alpha_k}, \quad u\in U \tag{3.39}$$

其中 $\tilde{a}_{\alpha_1\cdots\alpha_m}(u)$ 关于指标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是**反对称**的。事实上只要做如下变换:

$$a_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}+a_{\beta\alpha}}{2} + \frac{a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}}{2}$$

记 $x_{\alpha\beta}=\frac{a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}}{2}, y_{\alpha\beta}=\frac{a_{\alpha\beta}-a_{\alpha\beta}}{2}$，于是

$$\sum_{1\leq\alpha<\beta\leq m} a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = \sum_{1\leq\alpha<\beta\leq m} y_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

后者是反对称的。

对于 U 中固定一点 u，式3.39中的 ω 表示 $\wedge^k(Lu)$ 的一个 k 重元素; 于是一个 $k-$ 形式就是区域 U 上的 k 重元素场或 k 形式场，其中 $1-$ 形式又称 $Pfaff$ **形式场**。

定义 3.3.4. 设 $\{\omega^r\}_{r=1}^p$ 为区域 U 上 p 个 $1-$ 形式，有

$$\omega^r = a^r_\alpha du^\alpha, \quad r=1,2,\cdots,p \tag{3.40}$$

称这 p 个 $1-$ 形式**线性独立**或线性无关，如果 $p\times m$ 的矩阵 $\{a^r_\alpha\}$ 的秩在 U 上处处为 p。

命题 3.3.2. 式3.40表达的 p 个 1− 形式线性独立的充要条件是

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^p \neq 0 \tag{3.41}$$

证明. 由公式3.40的表达，有

$$\omega^q \wedge \cdots \wedge \omega^p = \sum_{\leq 1\alpha_1 < \cdots < \alpha_p \leq m} \begin{vmatrix} a_1^{\alpha_1} & \cdots & a_1^{\alpha_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_k^{\alpha_k} & \cdots & a_k^{\alpha_p} \end{vmatrix} du^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge du^{\alpha_p} \tag{3.42}$$

那么

$$\{\omega^r\}_{r=1}^p \text{线性无关} \Leftrightarrow \text{至少一个 p 阶子式不为零} \Leftrightarrow \omega^1 \wedge \cdots \wedge^p \neq 0$$

□

引理 3.3.1 (*Cartan* 引理)**.** 设 $\{\omega^r, \varphi^r\}_{r=1}^p (p \leq m)$ 为 U 上 $2p$ 个 1− 形式，其中 $\{\omega^r\}_{r=1}^p$ 线性独立，则下述等式

$$\sum_{r=1}^p \varphi^r \wedge \omega^r = 0 \tag{3.43}$$

成立的充要条件为 φ^r 可被 $\{\omega^r\}_{r=1}^p$ **对称地**线性表出，即

$$\varphi^r = C_s^r \omega^s \tag{3.44}$$

其中 $C_s^r = C_r^s, \quad r, s = 1, 2, \cdots, p$。

证明. 充分性是显然的，下证必要性。先将 $\{\omega^r\}_{r=1}^p$ 扩充为 $\wedge^1(Lu)(\forall u \in U)$ 的一组"基"，不妨记为 $\{\omega^s, \omega^t\}_{s=1}^p{}_{t=p+1}^m$，那么每个 φ^r 被它们线性表示，即

$$\varphi^r = \sum_{s=1}^p C_s^r \omega^s + \sum_{t=p+1}^m C_t^r \omega^t$$

带入等式3.43有

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{r=1}^p \varphi^r \wedge \omega^r \\ &= \sum_{r=1}^p \left\{ \sum_{s=1}^p C_s^r \omega^s + \sum_{t=p+1}^m C_t^r \omega^t \right\} \wedge \omega^r \\ &= \left\{ \sum_{r<s} C_s^r \omega^s \wedge \omega^r + \sum_{r>s} C_s^r \omega^s \wedge \omega^r \right\} + \sum_{r=1}^p \sum_{t=p+1}^m C_t^r \omega^t \wedge \omega^r \\ &= \sum_{r<s} (C_s^r - C_r^s) \omega^s \wedge \omega^r + \sum_{r=1}^p \sum_{t=p+1}^m C_t^r \omega^t \wedge \omega^r \end{aligned}$$

注意上式中的 $\{\omega^s \wedge \omega^r, \omega^t \wedge \omega^r\}$ 线性独立，因此有

$$C_s^r = C_r^s \quad 且 C_t^r = 0$$

□

注记 3.3.3. 上述证明中的 $\sum_{r,s=1}^{p} C_s^r \omega^s \wedge \omega^r$ 的变形

$$\sum_{r<s} (C_s^r - C_r^s) \omega^s \wedge \omega^r$$

是经典的技巧，我们曾在定理*3.2.1*使用过，在证明一般形式的 $Poincare$ 引理时还会用到。

推论 3.3.1. 设 ω 为非零 1− 形式，则 1− 形式 φ 满足 $\varphi \wedge \omega = 0$ 的充要条件为 $\varphi = c\omega$。

3.4　可积系统

3.4.1　$\mathbb{E}^3$ 中的结构方程

3.4.2　$Frobenius$ 定理

3.5　曲线和曲面的基本理论

3.5.1　曲线论基本定理

3.5.2　利用活动幺正标架研究曲面

3.5.3　测地曲率的 $Liouville$ 公式

3.5.4　自然标架与幺正标架下方程的对比

3.5.5　曲面论基本定理

3.5.6　自然标架与幺正标架下的方程对比 (续)

第四章　整体微分几何序章

4.1　整体曲线

4.2　平面曲线的某些整体性质

4.2.1　等周不等式

4.2.2　曲线的旋转指标

4.2.3　旋转指标定理

4.3　整体曲面

4.4　整体 $Gauss - Bonnet$ 定理

第五章　整体曲线理论选讲

5.1　凸闭曲线

5.2　空间曲线的某些整体性质

5.2.1　球面上的 $Crofton$

5.2.2　空间曲线的全曲率

5.2.3　空间曲线的全挠率

第六章　整体曲面理论选讲

6.1　$Poincare - Hopf$ 指标定理与 $Jacobi$ 曲线定理

6.1.1　$Poincare - Hopf$ 指标公式

6.1.2　$Jacobi$ 曲线定理

6.2　球面的刚性:$Liemann$ 定理

6.2.1　两个重要引理

6.2.2　球面刚性的叙述与 $Liemann$ 定理的证明

6.3　凸曲面与积分公式

6.3.1　凸曲面的 $Hadmard$ 定理

6.3.2　卵形面的刚性:$Cohn - Vossen$ 定理

6.3.3　$Minkowski$ 积分公式

6.4　$Minkowski$ 问题和 $Cristoff$ 问题的唯一性

6.4.1　$Minkowski$ 问题和 $Cristoff$ 问题的叙述

6.4.2　$Minkowski$ 问题的证明

6.4.3　$Cristoff$ 问题的证明

6.5　全平均曲率与 $Willmore$ 能量

6.5.1　全平均曲率

6.5.2　球面的一个特征

6.5.3　环面的全平均曲率与 $Willmore$ 猜想

参考文献

[1] Michael Artin. *Algebra*. Algebra, 1993.

[2] William M. Boothby. An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry. *ACADEMIC PR., INC*, 1975.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. 清华大学出版社有限公司, 2005.

[4] Wilhelm Klingenberg. *A course in differential geometry*, volume 51. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] John Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202. Springer Science & Business Media, 2010.

[6] John M Lee and John M Lee. *Smooth manifolds*. Springer, 2012.

[7] John Willard Milnor and David W Weaver. *Topology from the differentiable viewpoint*, volume 21. Princeton university press, 1997.

[8] 陈维桓陈省身. *微分几何讲义*. 北京大学出版社, 1983.

[9] 陈维桓. *微分几何初步*. 微分几何初步, 1990.

[10] 陈维桓. *微分流形初步第 2 版*. 微分流形初步第 2 版, 2001.