复分析

钱振烨

2024 年 6 月 16 日

第一版前言

复数 (域) 的出现最早源于 17-18 世纪三次代数方程的研究，而单复变函数理论作为一门独立的学科是从 Cauchy 对 C^1 型复变函数的结论 (弱形式 *Cauchy* 积分定理) 的推导开始的，当时一个重要的观察是“仅复可微的函数也适合 *Cauchy* 积分定理”；事实上，在此期间人们发现复可微的函数具有独立于一般实可微函数的良好性质，但大部分关于单复变函数的理论本源上来自于 Goursat 于 1900 年证明的结果，即我们现在所见的 *Cauchy* **积分定理**。在 20 世纪代数拓扑语言的发展下，*Cauchy* 积分定理获得了更严格与几何化的叙述，这也源于 Riemann 在 19 世纪中叶首先提出的同伦和同调的概念，然而 Riemann 对复分析的贡献远不止于此。

本科数学系所教授的单复变函数理论大体上涵盖了以下三部分，其实也概括整个 19-20 世纪中叶单复变函数的发展方向，即:

1. *Cauchy* **积分理论**

2. *Weierstrass* **级数理论**

3. *Riemann* **几何理论**

事实上，如果专心阅读 [6] 的话可以发现，我们上面所列的内容仅整本书的前 100 页加上一章共形映射理论 (一般的学校可能无法完成完整的 *Riemann* 几何理论教授)；换言之，本科阶段所教授的单复变函数理论只是放映了一部电影的节选。然而目前单复变函数理论已经俨然成为一门成熟的学科，国内外出现不少讲述这门课程的经典教材，例如 20 世纪研究单复变函数论的大师 Ahlfors 所著的 [3]、调和分析学家 Stein 所写分析四部曲之二 [6] 以及华罗庚先生的学生复分析学家龚□教授所著的 [9] 以及临近 20 世纪经过中国科学技术大学史济怀教授编写的 [8] 等等。

考虑到理论已经成熟，从教育的角度上看，如何把书写得通俗、精炼又自洽是重要的事情; 此外，由这套理论我们能够得到不少的工具，这些技术早已运用到其他邻域，例如代数拓扑的思想方法、复流形与 *Riemann* 曲面的研究、$Riemann-\zeta$ 函数与素数定理、复代数几何等等。由于笔者时间有限，目前已写完基本的三个理论的内容，另外简要叙述了个别选题:*Dirichlet* **定理**; **整函数**的理论，即 *Hadamard* **定理**; **多复变函数**与**复流形**简介。我对数院的部分本科生往往背诵一些“期末考纲”上的积分公

式、计算公式却不挖掘其内涵，而对“考纲”以外的内容不屑于一读感到惋惜，即使那些具有拓展与提高观点的意义，甚至是一门学科真正核心的问题。但是我还是强烈建议本科生能够学习应用单复变函数的额外选题，例如 $Riemann$ **曲面**、$Gamma$ **函数**、ζ **函数与素数定理 (Riemann 的原始思想)**、**椭圆模函数**、**模形式**以及简单了解**多复变函数**。另外，若在学习单复变函数理论中将全纯函数的性质与**调和函数**对比，也是不错的选择。

笔者在大学一年级念了 Stein 分析的第一册，在二年级读了第二册，即复分析。我一直希望真正做学问的人不会拘泥于所谓“教材考纲”所限，而是发自内心热爱而去学习与研究。这份笔记整理了我二年级 2023-2024 春夏学期听课、读书和自己研究所获得的一些结果。作为一份笔记，在行文章法与逻辑的推理上是经过我本人筛选提炼以后得到的，在可读性上与标准的教材有很大的差距，完全不适合复分析的初学者阅读，而是希望已经念过一轮复变函数的读者能够在其中找到一些“蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”的思维体验。我在本小册中加入了不少自己对一些结论的看法，或许多有疏漏，望诸位指出。

关于笔记叙述上的部分细节我在这里先行点出，阅读之时可以稍加留意:

1. 关于复数 (域) 的由来我参考了不少资料，从古典代数 (方程式)、近世代数和几何的角度都有对复数的刻画，希望能够“知其然知其所以然”，另有关于复数 (域) 来源的读者欢迎与我讨论。

2. 复变函数、全纯函数以及 $Cauchy-Riemann$ 方程的刻画与推导我提供了不同视角的三种方法，列在附录中。读者不妨比较它们，想一想真正导致这种特殊方程产生的本质是什么?

3. 不同的是，我将 $Cauchy$ 积分理论与 $Weierstrass$ 级数理论合并[1]，一共分成两个章节分别叙述纯的全纯函数的结果 (多数是**小范围的**) 和稍差的亚纯函数的结果 (多数是**大范围的**)。其中积分理论我使用了**代数拓扑**的语言去叙述它，并且需要在刻画清楚复对数函数以后才能完善多值函数的理论，为此我在这件事情的叙述上花了一些篇幅。事实上，在真正叙述的过程中，很多结论并没有所谓“谁先谁后”的次序要求，利用不同技术可以互相推导，这让我在梳理章法时顾虑很久，最终也难免捉襟见肘，其中比较混乱的是将 $Weierstrass$ 级数理论分拆成了两块，其中一半归属于 $Cauchy$ 积分公式的应用，另一半归属于级数求导的敛散性。

4. 注意到共形映射与 $Riemann$ 几何理论大部分都是整体的结果，因此我将它们放在靠后的位置叙述; 有心的读者也可以注意到，我们在处理这些复平面的几何问

[1]一些经典的教材分别叙述二者，例如 [9, 8, 3]; 而事实上我发现二者在本质和证明技术上只依赖于区域 surgery 与 $\frac{1}{z-z_0}$ 型函数破坏成幂级数，并不总是需要使用“负项”幂级数的理论，不过在证明中会出现，因此我简略了部分 $Laurent$ 级数的叙述。

题时，总是需要灵活地使用前两者 (积分理论与级数理论) 的局部结果，为此我在最终 *Riemann* 映射定理的证明中加了较多的索引超链接以便读者查阅。

5. 最后迫于时间原因，我只在第一章和第二章的一小部分放置了习题。这些习题都经过我的挑选，原则当然是: 能够充分应用正文中的理论; 对习题结论可以做适当推广; 对往后的知识体系有前置作用。希望有兴趣的读者可以将部分习题作为一个 project 去完成。此外有部分内容我没有整理在这份笔记中，例如利用积分公式和留数公式计算一些经典的积分的过程、解析延拓中的 *Schwarz* 反射原理、偏微分方程中带状区域的 *Dirichlet* 问题、$\overline{\partial}$ 问题，未来有时间我会对这些内容作补充，有需要的读者可以自行查阅 [9, 8, 6]。

我撰写和整理这份笔记的工作收到了一些老师和同学的支持。部分同学成为了该小册的第一批读者，并且参与了后期的部分审核工作。另外，这份笔记尚不成熟，定期会进行更新，如需获取最新版的笔记，可以到我的主页下载:

https://zhenye-math.github.io/

最后，由于本人对分析学的认识尚浅，书写笔法拙劣，这份笔记纵然不能与优秀的教材所媲美，但总是花费了小半年的心血所成，也求偶然翻阅到该小册的读者批评赐教，不胜感激。

作者：钱振烨

2024 年 6 月 16 日

目录

第一章　复数域与复变函数

1.1　复数 (域)

1.1.1　复数与复数域的由来

从历史上看，复数起源于意大利数学家 $Cardan$ 关于三次方程的研究，其中讨论了一个问题：如何将数字 10 分成两部分，使得他们的乘积为 40。回答如下：

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$$

这是文献中第一次出现对负数开根号的例子。事实上，对于任意实系数的三次方程，其根不可避免地会出现“对负数开根号”的情况[1]，即复数 (参见 [4])，因此引入复数对于后续的数学研究是必要的。

从代数上看，复数域是对原实数域的二次扩域。只要考察实系数多项式 x^2+1，显然为实数多项式环 $\mathbb{R}[x]$ 上的不可约多项式，我们定义**复数域**为一个商结构 $\mathbb{C}:=\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$，其中 (x^2+1) 为该多项式生成的理想，关于复数的引入，读者可以移步第六章的第一节。该扩域有自然的 $Galois$ 群，即 $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})=\mathbb{Z}_2$，因此扩域填上的非平凡元素从作用上看代表一个“反射”，记为 i，满足 $i^2=-1$。同时 $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{R}$ 上的 2 维向量空间，基底为 1 和 i，分别张成相互正交的子空间，记为实轴与虚轴，因此任意复数 z 可以表示为 $z=a+bi$，其中 a 称为**实部**，记为 Rez，b 称为**虚部**，记为 Imz；其关于实轴的对称元称为**共轭**，记为 $\overline{z}:=a-bi$。

复数域的**加法**运算自然继承于实数域，即

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

乘法运算利用 i 的性质可得，即

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \tag{1.1}$$

同样，除法运算也是自然导出的，并且共轭与有理运算可交换，即

$$\overline{R(z,w)}=R(\overline{z},\overline{w}),\quad \text{其中 } R(,) \text{ 表示有理运算}$$

[1]从著名的 $Cardan$ 公式或者多项式根的分布都可以看出。

事实上，复数域的乘 (除) 法运算是光滑的，因此 $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ 在该运算下构成一个 Lie 群，参见 [7]，之后我们将看到这个 Lie 群结构 $\mathbb{C}^*$ 在商拓扑下有丰富的几何含义。

注记 1.1.1. *复数域不是***有序域***，参见 [8] 的 P2。*

从代数结构[2]上看，我们发现 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ 在以下前 4 条性质下构成一个 $\mathbb{R}-$ 交换代数:

1. 结合律
2. 存在单位元
3. 双线性性
4. 交换律
5. 对非零元可逆

并且可以断言:

1. 若 $\mathbb{R}^2$ 上一个二元运算满足以上 5 条，则其必同构于 $\mathbb{C}$;
2. 若 $\mathbb{R}^3$ 上一个二元运算满足以上前 4 条，则其必存在零因子;

以上断言 1. 保证复数域代数结构被唯一确定，2. 宣告了“三元数”是不存在的。事实上，我们构造 $\mathbb{R}^2$ 上“代数”结构的方式具有普适性，可以在 $\mathbb{R}^{2^k}, k \in \mathbb{N}$ 上建立类似的结构，例如在 $\mathbb{R}^{2^2}$ 上建立的四元数，是一个非交换代数，$\mathbb{R}^{2^3}$ 上建立的八元数 (也称 $Cayley$ 数) 等等，它们统称为 $Clifford$ 代数。关于复数域代数上的合理性，有兴趣的读者可以参考 [3, 4]。

1.1.2 复数平面的拓扑与一点紧化

复平面的拓扑 从几何上看，复数域 $\mathbb{C}$ 作为向量空间构成一个平面，下面我们考虑为其赋予自然的欧式拓扑。定义复数 $z = a + bi$ 的**模长**为

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

并且有**极坐标**表示，即

$$z = re^{i\theta}$$

其中 r 为其模长，$\theta(0 \le \theta < 2\pi)$ 定义为**辐角**，记为 $argz$。

[2]读者容易判断，因此这里我们不赘述性质属于加法还是乘法。

注记 1.1.2. 事实上，复数极坐标表示的几何含义依赖于著名的 *Euler* 恒等式:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{1.2}$$

这严格依赖于复级数理论。教材 *[8]* 中直接定义了这个公式，从历史上复数的发展看这并不自然，但为了后续教学与表示的方便这一点无可厚非；此外教材 *[3]* 中先“大费周章”地介绍了复级数理论再自洽地给出了这个公式；教材 *[6]* 中由于第一部 *Fourier* 分析充分的铺垫，因此叙述起来轻松很多，有兴趣的读者可以阅读 *Stein, E. M. , & Shakarchi, R. . (2003). Fourier Analysis: An Introduction.* 世界图书出版公司北京公司.。

将复数写成极坐标带入乘法公式1.1不难发现，复数的乘法在几何上为: 模长相乘，辐角相加。这就是著名的 *De Moivre* 定理。

容易验证以下性质:

1. 模长表示:
$$|z|^2=z\overline{z},\quad \frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2},\quad |zw|=|z||w|,\quad \left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$$
2. 实部与虚部:
$$Rez=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad Imz=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$
3. 三角不等式:
$$|z+w|\le|z|+|w|,\quad \text{取等号当且仅当 } z,w \text{ 共线} \tag{1.3}$$

以下性质在利用复数解决平面几何问题时是有用的。由于 $arg(\frac{z}{w})=argz-argw$，注意到 $z\overline{w}=\frac{z}{w}|w|^2$，于是我们有

1. 若 $Re(z\overline{w})=0$，那么互相垂直;
2. 若 $Im(z\overline{w})=0$，那么互相平行。

定义开圆盘为 $D_r(z_0)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$，闭圆盘为 $\overline{D}_r:=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le r\}$，圆周[3]为 $C_r(z_0)\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=r\}$; 一般地我们记单位开圆盘为 $\mathbb{D}$。

复数序列被定义为 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中每一项都是复数，**复数级数** $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 亦然。称复数序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的，如果存在复数 z_0，对任意 $\epsilon>0$，都存在 N，对任意 $n>N$ 都有

$$|z_n-z_0|<\epsilon$$

[3]曲线积分时，若无额外说明，默认为绕一圈的曲线，且定向为逆时针 (正向)。

利用复数序列可以定义复平面上的极限点，即其子列的极限。同样，复数域上有 $Cauchy$ **收敛原理**，即若上述复数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，当且仅当

$$|z_n - z_m| < \epsilon$$

因此复平面 $\mathbb{C}$ 是**完备的**，参见 [6] 的 P5。

注意到

$$\max\{|Rez|, |Imz|, \frac{1}{\sqrt{2}}(|Rez| + |Imz|)\} \leq |z| \leq |Rez| + |Imz| \tag{1.4}$$

复数列的敛散性由其实、虚部完全刻画。此外，复平面被赋予欧式拓扑，细节上可以参考 [3, 6]，相应的概念与术语我们不再赘述。

最后，几个由欧式拓扑 (其中 1.3. 仅来自于度量拓扑) 自然诱导的结果对后续的证明相当有用，我们呈现如下 (证明可以参考 [3, 6]):

1. (紧集[4]套定理) 设 $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots \supset \Omega_n \cdots$ 为 $\mathbb{C}$ 上的紧集套序列，若

   $$diam(\Omega_n) \to 0, \quad n \to \infty$$

   其中 $diam(\Omega) := \sup_{z,w\in\Omega} |z - w|$，那么存在紧集套序列的唯一公共点 z_0。

2. (距离正下界) 设 K 为 $\mathbb{C}$ 中紧集，D 为闭子集。若 $K \cap D = \emptyset$，那么存在 $\epsilon > 0$ 使得

   $$d(K, D) \geq \epsilon > 0$$

   其中 $d(K, D) := \inf_{z\in K, w\in D} |z - w|$。

3. (连通的刻画)$\mathbb{C}$ 上的连通开子集当且仅当道路连通，参见 [6] 的 P26 习题 6。我们将连通开子集称为**区域**; 此外，设开子集 Ω 连通，若

   $$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

   且 Ω_1, Ω_2 也为开子集，那么要么 Ω_1 为空集，要么 Ω_2 为空集。换言之，连通开子集不能分成非空开 (闭) 集之并。

[4]复平面 $\mathbb{C}$ 上的紧集等价于 (参见 [6] 的 P6-7，也可以参考 [3, 5])

(a) 有界闭集

(b) $Heine - Borel$ 定理: 任意开覆盖存在有限子覆盖

(c) $Bolzano - Weierstrass$ 定理: 任意其中序列存在收敛子列

复平面的紧化　显然复平面不是一个紧 *Lie* 群，回忆基础拓扑中的一点紧化技术，这里我们只要为复平面赋予一个**无穷远点** ∞，满足

$$z \pm \infty = \infty, \quad z \cdot \infty = \infty, \quad \frac{z}{\infty} = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

记 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$，称为**扩充复平面**。从拓扑上看，复平面 $\mathbb{C}$ 同胚于二维胞腔 e_2，而无穷远点被视为零维胞腔 e_0; 注意到二维拓扑球面 S^2 被视为胞腔复形 $e_0 \sqcup e_2$(参见 [2])，于是我们有同胚关系

$$\hat{\mathbb{C}} \cong S^2$$

事实上，上述同胚关系可以通过**球极投影**的方式得到，有兴趣的读者可以参考 [9, 3, 4, 6]，此外，球极投影的方式将复平面的度量结构自然地诱导到了球面上，我们将这样的球面称为 *Riemann* **球面**。

另一个紧化的方式是对 (刺破) 复平面作商。定义等价关系 $\sim$ 为 $z \sim w \Longleftrightarrow |z| = |w|$，易知商拓扑同胚于单位圆周 S^1，即

$$\mathbb{C}^*/\sim \cong S^1$$

由于 S^1 是一个紧 *Lie* 群，于是 $\mathbb{C}^*/\sim$ 被紧化。而 *Fourier* 分析本质上就是在圆周 (紧 *Lie* 群) 上的调和分析，以后我们将知道全纯函数具有特殊的 *Fourier* 级数展开，这富有简洁优雅的性质。从 S^1 上再来看乘法，我们发现复数被限制在了单位圆周上，即模长恒为 1，因此复数的乘法变成了简单的“辐角相加”，即**旋转**。

练习 1. 证明*Lagrange* **恒等式**:

$$\left|\sum_{i=1}^{2n} z_i w_i\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right) - \sum_{1 \le j \le k \le n} |z_i \overline{w}_k - z_k \overline{w}_j|^2$$

进而证明*Cauchy* **不等式**，并解释几何含义 *(参见 [8]P5 的习题 7)，[3] 的 P10-11):*

$$\left|\sum_{i=1}^{2n} z_i w_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right)$$

练习 2. 定义*Blaschke* **因子**$F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 为

$$z \to \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}, \quad 其中\ |z|, |w| < 1$$

试证明 *(参见 [8]P4-5 的习题 6，[6]P26-27 的习题 7):*

1. $\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| < 1, \quad$ 如果 $|z|, |w| < 1$
2. $\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| = 1, \quad$ 如果 $|z|$ 或 $|w| = 1$
3. F 是全纯的双射。

练习 3. 用至少三种方法证明 *(参见 [8]P11 的习题 3;Stein, E. M. , & Shakarchi, R. . (2003). Fourier Analysis: An Introduction.* 世界图书出版公司北京公司. 的 *P37):*

$$\sum_{n=0}^{N}\cos n\theta=\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

和

$$\sum_{n=0}^{N}\sin n\theta=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos(N+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

并计算 *Dirichlet* 积分 *(*参见谢惠民*,* 恽自求*,* 易法槐*, &* 钱定边*. (2003).* 数学分析习题课讲义. 上册. 高等教育出版社. 的 *P322-323;* 谢惠民*. (2005).* 数学分析习题课讲义. 下册. 高等教育出版社. 的 *P87)*。

$$D_N(\theta)=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

1.2　复变函数

1.2.1　复微分与全纯函数

单复变函数　设 D 为 $\mathbb{C}$ 上一区域, 称映射 $f:D\to\mathbb{C}$ 为单复变函数[5]。称 f 在 $z_0\in D$ 点连续，如果对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意 $z\in D$ 满足 $|z-z_0|<\delta$ 都有

$$|f(z)-f(z_0)|<\epsilon$$

称函数 f 在子集 D 上连续，如果对 D 内每一点都连续，记为 $f\in C(D)$。易知紧集 K 上的连续函数 f 满足**极值原理**，即在 K 上存在最大 (小) 值。

全纯函数　我们推广实变函数中的导数概念，并且将复变函数视为“单变量”函数。

定义 1.2.1. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为一区域，称复变函数 $f:D\to\mathbb{C}$ 在 $z_0\in D$ 处复可微，如果极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\tag{1.5}$$

存在，并称极限为其导数，记为 $f'(z_0)$。若 f 在 D 上处处可导，则称 f 在 D 上**全纯**或**解析**[6]。倘若谈在 z_0 一点处全纯，意为在 z_0 某个邻域内全纯。

注记 1.2.1. 称 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数为**整函数**。

[5]本小册中总是称单复变函数为**复变函数**。

[6]一般意义上 (实变版本中) 的“解析”是指可以在局部展开成幂级数的形式, 我们将在之后证明“全纯即解析”。

若记 $\Delta z = z - z_0$，那么式1.5可以写成

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)$$

这当且仅当

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=f'(z_0)\Delta z+\circ(|\Delta z|) \tag{1.6}$$

等式1.6直接蕴含：

命题 1.2.1. *若 f 在 z_0 处复可微，则必连续。*

逆命题不成立，如下例子是最基本的：

例子 1.2.1. 函数 $f=\overline{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处不可微。

对任意 $z_0\in\mathbb{C}$，利用定义直接验证：

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\overline{z_0+\Delta z}-\overline{z_0}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

易知极限不存在，故不可微。

可以发现，函数 $\overline{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处连续，但处处不可导，这在实变函数中是需要构造的，参见 [5]，这说明复变函数可微的要求更强。之后我们将会介绍复变函数的“实可微”版本，事实上这里的 $\overline{z}$ 是导致不复可微的本源，带着这个观点读者可以证明 Rez 和 $|z|$ 等函数可微性很差，我们在介绍“实可微”之后给出简洁的证明。

容易验证，求导运算是 $\mathbb{C}-$ 线性的，即对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$,复可微的函数$f,g$，有

$$(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$$

并且满足 *Leibniz* 法则，即

$$(fg)'=f'g+fg'$$

若 $g\neq 0$，有

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(\frac{f'g-fg'}{g^2}\right)$$

利用等式1.6，可以证明满足**链式法则**。在合适的定义域与值域下，我们有

$$(g\circ f(z))'=g'(f(z))f'(z)$$

1.2.2　映射观点下复变函数

$Cauchy-Riemann$ **方程**　为了阐明复变函数复可微的充要条件，我们先引入“实可微”的概念，这将把“单变量”的复变函数视为“双变量”的向量值函数，即一般映射。

定义 1.2.2. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为定义在区域 $D\in\mathbb{C}$ 上的复变函数，其中 $z_0=x_0+iy_0\in D$。称 f 在 z_0 处**实可微**，如果 u,v 作为实二元函数在 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 处可微。

于是我们可以模仿公式1.6得到一个分别关于 x_0,y_0 的无穷小增量式，考察

$$\begin{aligned}
f(z_0+\Delta z)-f(z_0) &= u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)\\
&\quad +i\{v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)\}\\
&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\circ(|\Delta z|)\\
&\quad +i\{\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\circ(|\Delta z|)\}\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\circ(|\Delta z|)
\end{aligned}$$

其中记

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

注意到 $\begin{cases}\Delta x=\dfrac{1}{2}(\Delta z+\overline{\Delta z})\\ \Delta y=\dfrac{1}{2i}(\Delta z-\overline{\Delta z})\end{cases}$，带入上式，我们有

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta z+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{\Delta z}+\circ(|\Delta z|)$$

引入**微分算子**[7]:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\end{cases}\tag{1.7}$$

于是我们有表达:

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta z}+\circ(|\Delta z|)\tag{1.8}$$

于是得到以下命题:

命题 1.2.2. *复变函数实可微的充要条件为等式1.8成立。*

[7]或称形式偏导数。事实上在复变函数理论中利用微分算子来讨论问题是方便的，我们已经知道 $|z|,Rez,Imz$ 等都以 $z,\overline{z}$ 为基本组成元素，对它们求导往往比较简单；并且在多复变函数论中更多地倾向于讨论微分算子而不是分开来讨论实、虚部。

事实上式1.7中定义的微分算子可以按如下“链式法则”来记忆，这里我们暂且视 $z, \overline{z}$ 为独立变量，那么有

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

以及

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

注记 1.2.2. *以上两式各自的第二个等号事实上我们承认了一个形式上的微分同胚 (参见 [3] 的 P24-28)，即*

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \text{其中 } (z, \overline{z}) \mapsto (x, y)$$

这里 $z = x + yi$，可以显式上述映射，即如下线性变换

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z}) \end{cases}$$

发现这个微分同胚的 Jacobian 行列式为 $\frac{i}{2} \neq 0$，因此在复数意义下处处正则。

对比公式1.6与1.8，可以发现，$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ 为“坏项”，得到如下定理：

定理 1.2.1. *复变函数 f 复可微当且仅当实可微且算子 $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ 零化 f。*

因此，往后复可微的函数 f 的导数 f' 就表示 $\frac{\partial f}{\partial z}$。我们称 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ 为 $Cauchy-Rimeann$ **方程**。若将 f 写作 $u + iv$，由算子的定义1.7，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

故 $Cauchy-Rimeann$ 方程等价于如下偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{1.9}$$

于是定理1.2.1等价于

定理 1.2.2. *复变函数 $f = u + iv$ 复可微当且仅当实可微且方程组1.9成立。*

若视区域 D 上的 f 为二元实变函数，一般记 f 实可微为 $f \in C^1(D)$；若视 f 为复变函数，记 $H(D)$ 为 D 上全纯函数全体，于是我们有

$$H(D) \subset C^1(D)$$

将来会证明

$$H(D) \subset C^{\infty}(D)$$

利用定理1.2.1我们能够简洁地判断一些实可微但复不可微的函数。

例子 1.2.2. 复变函数 $f = Rez, g = |z|, h = argz$ 的可微性很差。

证明. 对 f, g，注意到 $Rez = \frac{z+\overline{z}}{2}, |z| = \sqrt{z\overline{z}}$ 对 $\overline{z}$ 方向求导即可。对 h，注意到 $argz = \arctan\frac{y}{x}$，其中 $z = x+iy$，利用方程组1.9计算即可。 □

例子 1.2.3. 复变函数 $f = z^n, n \in \mathbb{Z}$ 在 $n = -1$ 时可微性很差。

证明. 注意到 $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ 求导即可。 □

例子 1.2.4. 利用定义式1.8，容易验证：

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}} \tag{1.10}$$

以及，记 $w = f(z)$

$$\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} \tag{1.12}$$

共轭调和函数　利用公式1.7可以计算

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

不妨 $u, v \in C^2(D)$，于是

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \triangle \tag{1.13}$$

立即得到 (我们默认光滑性)：若 $f = u + iv \in H(D)$，则 u, v 为 D 上的**调和函数**。注意到这里 u, v 由 f 成对出现，于是将满足方程组1.9的一对调和函数互称**共轭**。

一个自然的问题是：若 u 在区域 D 上为调和函数，那么是否存在其共轭 v，组合成为全纯函数 $f = u + iv$？在**单连通**区域，这是肯定的。事实上，记微分形式

$$P = -\frac{\partial u}{\partial y}dx, Q = \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

容易发现微分形式 $P+Q$ 为闭形式，即 $d(P+Q) = 0$，又由于 D 单连通，进而 $P+Q$ 为恰当形式[8]，知下述积分与路径无关，直接计算

$$v = \int P + Q = \int -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

[8]回忆 *de Rham* 理论，见 [7]。

并且满足方程组1.9。这启发我们通过已知调和函数 u，计算其共轭的机械方法：直接求偏导，得到 $-\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$，再分别对 x, y 方向积分，但一般不容易[9]，参见 [8] 的 P42-44。

注记 1.2.3. *必须指出，我们上述的讨论必须依赖单连通的性质，事实上可以举出反例。*

例子 1.2.5. 设 $D = \mathbb{C} - \{0\}$，其上定义实变函数 $u = log|z|$，调和但不存在共轭。

证明. 首先说明 u 在 D 上调和，为此我们给一个一般的结论：$h : D' \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$ 全纯，则 $log|h(z)|$ 调和。直接计算 *Laplace* 算子：

$$4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} log|h(z)| = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} \frac{1}{2} log|h(z)|^2 = 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} log(h\overline{h}) = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{h}{h\overline{h}} = 2\frac{h\overline{h} - h\overline{h}}{(h\overline{h})^2} = 0$$

假设存在共轭 v，那么记 $f = u + iv$ 在 D 上全纯；考虑 $g = log|z| + iargz$，显然在 $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ 全纯。因此 $f - g$ 在 $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ 也全纯。

由于 $Re(f - g) = 0$，这说明 $f - g$ 是常函数[10]，于是

$$f = log|z| + iargz + c, \quad c \text{ 为常数}$$

又由于 f 在 D 上连续，考察

$$f(-1) = \lim_{y \to 0^+} f(-1 + iy) = i\pi + c$$

$$f(-1) = \lim_{y \to 0^-} f(-1 + iy) = -i\pi + c$$

矛盾！ □

练习 4. *假设 f 为开子集 D 上的全纯函数，证明以下任一性质蕴含 f 为常数:*

1. *Ref 为常数;*
2. *Imf 为常数;*
3. *$|f|$ 为常数;*
4. *$f' \equiv 0$。*

练习 5. *设 D 为一区域，f 为 D 上单叶全纯函数，证明 $log|f|$ 和 $arg|f|$ 为 D 上调和函数。(提示: 利用微分算子，注意到 $|f|^2 = f\overline{f}$。)*

[9] 事实上，在 [3] 的 P25-28 讨论了一种计算共轭调和函数的方法，有兴趣的读者可以参考。

[10] 这里使用了结论，读者可以参考 [8]P44 的习题 2。

练习 6. 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta), f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$，证明 $Cauchy-Riemann$ 方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\end{cases}$$

练习 7. 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta), f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$，证明微分算子的表示:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}e^{i\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}-\dfrac{i}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}=\dfrac{1}{2}e^{-i\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{i}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\right)\end{cases}$$

1.3 初等全纯函数

基本的初等函数只有指数函数与三角函数与它们的反函数。容易验证:

1. e^z 为整函数;
2. $(e^z)'=e^z$;
3. $e^{iy}=\cos y+i\sin y$;
4. $e^z\neq 0, \quad |e^z|=e^x>0$;
5. $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$;
6. e^z 为以 $2\pi i$ 为周期的周期函数。

注记 1.3.1. *我们断言，以上性质中 2. 是本质的，参见 [3] 的 P42-44。*

注意，一般而言 $(e^{z_1})^{z_2}\neq e^{z_1z_2}$，原因在于前者的多值性。此外，对于性质 6. 我们多说几句，事实上这里的周期性可以写成

$$e^{z_1}=e^{z_2}\Longleftrightarrow z_1\equiv z_2 \quad (mod \quad 2\pi i)$$

这件事情本质上是一个等价关系，随即在复平面 $\mathbb{C}$ 上诱导了一个商拓扑，我们将在 $Riemann$ 曲面中提到，有兴趣的读者可以直接移步本章的第 3 节。

因此我们发现，这个函数大范围下不是单射，有时我们希望函数有光滑程度的同胚，于是需要限制定义域。

定义 1.3.1. 设 f 为 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的复变函数，若 f 在 $D\subset\Omega$ 上是单射，称 f 在 D 上是**单叶**的，又称 D 为 f 的**单叶性域**。

我们又希望单射的范围尽可能大，例如

$$e^z : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{C} - [0, +\infty)$$

几何上它将“条状区域”映成“角状区域”，显然大范围下不是共形的，但局部总是适合第 3 节的结果。

若 e^z 不限制定义域，不太可能是单射，此意义下不会有“逆映射”的概念，我们只能考虑它的纤维，即完全反像，这是多值函数想法的起源。

设 $z \neq 0$，若 $e^w = z$，则称 w 为 z 的**对数**，记为 $Logz$；显然 $Logz$ 不是通常的映射[11]，称为**多值函数**。为了方便讨论，我们都记 $z = re^{i\theta}, w = x = iy$，由 $e^w = z$，我们有

$$e^x = r, \quad y = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

即

$$Logz = log|z| + iArgz \tag{1.14}$$

我们发现上式代表了一系列函数，取一代表记为 $w_k := logr + i(\theta + 2k\pi)$。于是 w_k 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上有定义，但不连续[12]。于是考虑缩小定义域为 $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$，这样函数是连续的，进一步是全纯的[13]，即 $w_k \in H(\mathbb{C} - (-\infty, 0])$。并且注意到 $k \in \mathbb{Z}$，因此 $Logz$ 有无穷多单值分支。

这里我们发现 $0, \infty$ 是特殊的点，其实是支点，对数函数绕其一周会发生“分支跳跃”。

定义 1.3.2. 当 z 沿着包含 z_0 的简单闭曲线绕一周时，多值函数 f 的值从一支变成另一支，则称 z_0 为 f 的一个**支点**。

定义

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

---

[11]这里的 $Logz$ 其实是一个集合，参见 [8] 的 P54。这里我们承认在不引入基本代数拓扑的语言 (曲线同伦与单连通) 的前提下讨论“复对数函数” $logz$ 是很难说清楚的，有兴趣的读者可以参考 [8, 3, 6]，可以发现不同教材对多值性的叙述章法迥异，强调几何直观可以参考 [4]。不引入多值概念直接讨论复平面上的对数函数也有典例，回忆 Stein, E. M. , & Shakarchi, R. . (2003). Fourier Analysis: An Introduction. 世界图书出版公司北京公司. 最后一章关于 *Direchlet* 定理中 L 函数的说明; 当然在念完复分析中的多值性以后再看这个说明就会有更深刻的理解。此外，多值函数的想法与 *Riemann* 曲面和经典代数拓扑中的复叠空间、基本群概念有密切的联系，感兴趣的读者可以阅读相关教材。我们模仿 [6] 中的叙述，用代数拓扑的语言来叙述多值函数，主要是 $logz$，初读复分析的读者不妨跳过这一节的讨论，在读完小节2.1.4以后再回过头来读多值函数。

[12]本质上来源于 arg 的不连续性。

[13]这一步可以直接验证，也可以利用复分析版本的“逆映射定理”通过指数函数的全纯性来诱导。

称为复形式的三**角函数**，它们与实变版本唯一的区别就是无界性，其他性质参见 [8] 的 P60-61。

幂函数与实变版本有很大的区别，并且我们可以从一些特殊的幂函数中得到区域的拓扑信息。这里使用的技术只有

$$w = z^{\mu} = e^{\mu Logz}, \quad \mu \in \mathbb{C} \tag{1.15}$$

不妨记 $z = re^{i\theta}$，则 $w = e^{\mu(logr+i(\theta+2k\pi))}, k \in \mathbb{Z}$，我们对 μ 的取值做分类讨论：

1. $\mu = n$ 为整数，则 $w = e^{n(logr+i(\theta+2k\pi))} = e^{n(logr+i\theta)}$ 是单值的，将区域辐角扩大 n 倍。
2. $\mu = \frac{1}{n}$，则 $w = e^{\frac{1}{n}(logr+i(\theta+2k\pi))} = e^{(logr+\frac{\theta+2k\pi}{n})}, k = 0, 1, \cdots, n-1$，是 n 值的，将区域辐角缩小 n 倍。我们一般把 $k = 0$ 的情形称为主支，记为 $\sqrt[n]{z}$。
3. $\mu = a + ib$，容易计算得到 $w = e^{alogr-b(\theta+2k\pi)} \cdot e^{i(blogr+a(\theta+2k\pi))}$
   (a) $b \neq 0$，是无限多值的。
   (b) $b = 0, a = n$ 为整数，是单值的。
   (c) $b = 0, a = \frac{p}{q}$，是 q 值的。
   (d) $b = 0, a$ 为无理数，是无限多值的

1.4　导数的几何意义

数学分析中我们知道一元函数导数的几何意义为切线的斜率，这里单复变函数的导数具有更强的几何含义。

设 γ_1 和 γ_2 为区域 $D \subset \mathbb{C}$ 上两条光滑曲线，再设 $f \in H(D)$ 且在讨论的点处 $f' \neq 0$，那么显然有夹角

$$arg\frac{\gamma_1'}{\gamma_2'} = arg\frac{f'\gamma_1'}{f'\gamma_2'} \tag{1.16}$$

因此全纯函数 f 的作用，保持了曲线夹角，称为**共形变换**。更进一步，我们有

$$arg(f\gamma(t_0))' \equiv arg\gamma'(t_0) + argf'(\gamma(t_0)) \quad (mod \quad 2\pi) \tag{1.17}$$

说明函数 f 的导数 f' 在模 2π 意义下提供了 $argf'(\gamma(t_0))$ 的转角。

若固定 D 上一点 z_0，临近取 D 中一点 z，记它们在 f 下的像点为 w_0, w，由 f 全纯，在微分意义下考察如下极限：

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{w-w_0}{z-z_0}\right| = \lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = |f(z_0)'|$$

这说明函数 f 的导数 f' 提供了其模长 $|f'|$ 倍的伸缩。

注记 1.4.1. 我们对模长 $|f'|$ 多说几句。若视 f 为二元实 *(向量值)* 函数，那么 f 的全纯性保证了它是一个微分同胚，于是有 *Jacobian* 行列式 J_f 的概念，本质上是映射下面积的变化率。我们来计算这个量：

$$J_f = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{1.18}$$

这恰好是 $|f'|^2$ 的值 *(利用算子的定义1.7和链式法则)*，即

$$|f'|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

事实上，若 f 只有实可微，我们也有微分同胚的概念，不过此时需要带上算子 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$。本质上公式*1.19*是如下公式的特殊情形，证明是一致的，有兴趣的读者可以参考 *[8]* 的 *P45* 习题 *9*:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{1.20}$$

经过上述讨论，我们断言全纯函数 f 的作用提供了区域 D 上全体微分三角形**保角变换**。事实上，在连通区域上，这句话的逆命题也成立，即对连通区域上任意微分三角形保角的复变函数是全纯的。读者可以利用定理1.2.1与区域的连通性证明。

例子 1.4.1. 复变函数 $f(z) = z^2$ 也可表示为 $u + iv = (x^2 - y^2) + 2xyi$，即如下方程组：

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

注意到

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

由隐函数定理 (参见 [5]) 可知，存在逆映射 f^{-1}。

这是数学分析中的典例，但实际上为一组共轭调和函数，并且满足 $Cauchy - Riemann$ 方程；它具有简洁的表示，即 z^2，并且 $|f'| = 2|z|$ 在复分析中也是简洁的。

1.5 复积分

回忆数学分析中 $Riemann - Stieltjes$ 积分的概念 (参见 [5] 的 P122-123). 视 $\mathbb{C}$ 为 $\mathbb{R}^2$，那么 $\mathbb{C}$ 中区域 D 可以视为 $\mathbb{R}^2$ 中的区域，于是连续[14]复变函数 f 沿着 D 中 (分段) 光滑曲线 γ 的积分可以视为 $Riemann - Stieltjes$ 积分，即

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz \tag{1.21}$$

[14]后面谈及复变函数的积分我们都默认连续。

注记 1.5.1. *按照数学分析中的第二型曲线积分同样可以定义连续复变函数的积分，与上述定义是等价的，参见 [8] 的 P87-88。*

利用复的微分形式，1.21中的定义可以与实变的版本互相切换。我们记 $f=u+iv$，并且 $z=x+iy$，于是 $dz=dx+idy$，那么有

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma (u+iv)(dx+idy)=\int_\gamma (udx-vdy)+i\int_\gamma (vdx+udy) \tag{1.22}$$

为了方便计算，若 γ 光滑 (分段光滑直接分段相加)，有

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \tag{1.23}$$

其中 $\gamma:[a,b]\to D$。利用一阶微分形式不变性，可以验证积分与参数的选取无关。

同样，来自 $Riemann-Stieltjes$ 积分的推广，我们有

1. $\mathbb{C}-$ 线性性：
$$\int_\gamma \alpha f+\beta g=\alpha\int_\gamma f+\beta\int_\gamma g$$
2. $$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f=\int_{\gamma_1} f+\int_{\gamma_2} f$$
3. 记 γ^- 为 γ 的反向，则
$$\int_\gamma f=-\int_{\gamma^-} f$$

以下例子在往后的讨论中经常使用。

例子 1.5.1. 计算 $\int_\gamma z^n dz,\quad n\in\mathbb{Z}$ 的值，其中 $\gamma(t)=\{z\in\mathbb{C}|z=re^{2\pi t},t\in[0,m]\}$，这里 $m\in\mathbb{N}^+$。

证明. 利用替换 $z=re^{it}$ 容易计算:

$$\int_\gamma z^n dz=\begin{cases}2m\pi i & \text{如果} n=-1\\ 0 & \text{如果} n\neq -1\end{cases} \tag{1.24}$$

□

我们发现，在整数次幂函数中，只有 $\frac{1}{z}$ 在围道积分中是特殊的，这里 m 实际上为曲线 γ 的**卷绕数**，记为 $ind(\gamma)$，它有曲线本身的拓扑有关，感兴趣的读者可以参考 [4] 的 P303-306，或者参考经典的代数拓扑教材，例如 [2]。

另外两种积分的形式我们不常用，这里直接给出:

$$\int_\gamma f(z)|dz|=\int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt,\quad \text{这里 } |dz| \text{ 是弧长微元 } ds$$

我们记弧长为 L，那么有

$$L=\int_\gamma |dz|=\int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

以及

$$\int_\gamma f(z)d\overline{z}=\int_a^b f(\gamma(t))\overline{\gamma'(t)}dt$$

最后我们给出关于积分的一个不等式，在很多问题的估计中是常用的，称为长大不等式，证明很容易，参见 [8] 的 P91。

命题 1.5.1 (长大不等式)**.** 设 $M=\sup_{z\in\gamma}|f|$，于是有

$$\left|\int_\gamma f\right|\leq ML \tag{1.25}$$

练习 8. 设曲线 γ 为以原点 O 为圆心，半径 r 的曲线，其中 $|a|<r<|b|$，验证积分

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)}=\frac{2\pi i}{a-b}$$

练习 9. 解释积分 $\int_\gamma \frac{dz}{z+2}=0$,其中 γ 为以 O 为圆心，1 为半径的圆周，的几何意义，并与*1.5.1*对比。利用该积分证明*:*

$$\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$$

练习 10. 设 γ 为一正向可求长简单闭曲线，证明其内部面积为 *(*回忆数学分析中的面积表示与微分形式的语言，参见 *[5]*，注意复微分形式的应用，参见 *[9]):*

$$\frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{z}dz$$

练习 11. 完成 *[8]P92-93* 的习题 *11-12*, 对比 *[9]P33-35* 的 *Pompeiu* 公式, 回忆 *Green* 表示公式和 *Poisson* 乘积公式。

练习 12. 设 D 为一区域，且 $f\in C^1(D)$。证明*:*f 在 D 上全纯当且仅当对任意 $a\in D$，都有

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\int_\gamma f=0$$

其中 γ 为以 a 为圆心 r 为半径的圆周。

1.6　多值函数诱导的 *Riemann* 曲面

这里只对部分多值函数诱导的 *Riemann* 曲面做介绍，事实上 *Riemann* 曲面是一门单独研究的学科，感兴趣的读者可以参考 Farkas, H. M., Kra, I., Farkas, H. M., & Kra, I. (1992). Riemann surfaces (pp. 9-31). Springer New York. 或者 J.Milnor 的著作 Milnor, J. (2011). Dynamics in one complex variable.(AM-160):(AM-160)- (Vol. 160). Princeton University Press.

对数函数诱导的 $Riemann$ **曲面**　取 $Logz$ 的一个全纯单值分支:

$$w_k : \mathbb{C} - (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$$

现取 $|\mathbb{Z}|$ 个复平面 C，割开实负半轴，即 $D := \mathbb{C} - (-\infty, 0]$，编号为

$$\cdots, D_{-k}, \cdots, D_{-1}, D_0, D_1, \cdots, D_k, \cdots$$

记每个割破平面 D_k 割线上部为 l_k^+，下部为 l_k^-，粘连 l_k^+ 和 l_{k+1}^- 组成的“复叠”结构记为 S，那么

$$Log : S \to \mathbb{C}$$

为多值函数，并且有每个全纯的单值分支 $w_k := Log|_{D_k} : D_k \to \mathbb{C}$

指数函数诱导的 $Riemann$ **曲面**　我们从相反的角度来看:

$$e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$$

不是单叶的，考虑在 $\mathbb{C}$ 中定义**等价关系** $\sim$:

$$z_1 \sim z_2 \Longleftrightarrow z_1 \equiv z_2 (mod \quad 2\pi i)$$

从拓扑上看 $\mathbb{C}/\sim \cong S^1 \times \mathbb{R}$，于是“单叶”的指数函数可以视为**圆柱面**上的函数。

第二章 $Cauchy$ 积分定理与 $Weierstrass$ 级数理论

2.1 $Cauchy$ 积分理论

2.1.1 $Cauchy$ 积分定理

从 $Cauchy$ 积分定理开始，复变函数才作为独立的对象来研究。

注记 2.1.1. 从历史观点看，我们需要剔除上文中全纯函数 f 的“光滑性假设”，即 f' 不一定连续。初学者需要循序渐进地对最强版本 $Cauchy$ 积分定理尝试独立证明或看懂证明，逐渐剥离条件；已经学过一遍的读者只要“欣赏”结论以及熟练应用结论，对此我们断言，*Goursat* 于 *1900* 年给出的强形式证明是值得反复推敲改进的，可以参考 *[8, 6, 3]* 感受不同分析大师的叙述章法。

我们先援引 Cauchy 于 1825 年得到的版本。

定理 2.1.1 (Cauchy,1825)**.** 设 D 为 $\mathbb{C}$ 中单连通区域，$f \in H(D)$ 且 f' **连续**，于是对 D 中任意可求长闭曲线 γ 有

$$\int_\gamma f = 0$$

注意到 f' 连续，故可以使用 $Green$ 公式 (参见 [9])，设 γ 围成的区域为 A，于是

$$\int_\gamma f = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy = \int_A -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} + i\int_A \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

由 $Cauchy - Riemann$ 方程立即得证。

事实上 Goursat 于 1900 证明了一个更强的版本，不依赖于函数 f 的光滑性，只需要连续性。他最先证明了三角形区域上的弱条件 $Cauchy$ 积分定理，利用更精细的分析技术，可以推广到单连通区域的内部的任意可求长曲线上。为此，我们先叙述一个引理。

引理 2.1.1 (折线积分估计)**.** 设 D 为 $\mathbb{R}^n, (n \geq 2)$ 内一区域[1]。f 为 D 内一连续函数，γ 为 D 内可求长曲线，对 $\forall \epsilon > 0$，存在一条折线 S 使得

[1]不一定是凸集，可能形似“腰果”。

1. S 的起终点与 γ 的起终点重合并且折点在 γ 上;

2. 有估计

$$\left|\int_\gamma f - \int_S f\right| < \epsilon$$

证明. Step1 **区域限制**：由于 γ 的像紧致且 ∂D 为闭集，故 $\rho := d(\gamma, \partial D) > 0$。那么可以构造区域 G 使得 $\gamma \in G, \overline{G} \subset D$。

Step2 **一致连续性**：又因为 $\overline{G}$ 为紧集，f 在 D 上连续，所有 f 在 $\overline{G}$ 上一致连续，即对 $\forall\epsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，当 $z', z'' \in \overline{G}, |z' - z''| < \delta$ 时，有

$$|f(z') - f(z'')| < \frac{\epsilon}{2L}$$

其中 L 为曲线 γ 的长度。

Step3 **构造折线**：取 $\eta = \min\{\rho, \delta\}$，在 γ 的像上有序取分点 $z_0, \cdots, z_n$，使得每段弧 $z_{k-1}z_k$ 长度不超过 η，且 z_0, z_n 为 γ 的起终点。再线性连接每对 z_{k-1}, z_k 构造折线 S，我们断言 S 在 D 内并且 f 在 S 上一致连续，事实上 $|z_k - z_{k-1}| \leq \eta < \rho$。

Step4 **积分估计**：记 $\gamma_k = z_{k-1}z_k, S_k = \overline{z_{k-1}z_k}$，对 $k = 1, \cdots, n$ 考察

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_k} f - \int_{S_k} f\right| &\leq \left|\int_{\gamma_k} f - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right| + \left|\int_{S_k} f - f(z_{k-1})(z_k - z_{k-1})\right| \\
&= \left|\int_{\gamma_k} f(z) - f(z_{k-1})\right| + \left|\int_{S_k} f(z) - f(z_{k-1})\right| \\
&\leq |\gamma_k|\frac{\epsilon}{L}
\end{aligned}$$

于是

$$\left|\int_\gamma f - \int_S f\right| = \sum_{k=1}^n \left|\int_{\gamma_k} f - \int_{S_k} f\right| < \sum_{k=1}^n |\gamma_k|\frac{\epsilon}{L} < \epsilon$$

□

结合引理的结果，我们可以证明:

定理 2.1.2 (Cauchy-Goursat,1900)**.** *设 D 为 $\mathbb{C}$ 中单连通区域，$f \in H(D)$，于是对 D 中任意可求长闭曲线 γ 有*

$$\int_\gamma f = 0$$

证明的难点在于函数 f 缺少光滑性，无法使用 *Green* 公式[2]，因此需要使用更精细的分析技术做估计。我们将证明过程分三步:

[2]事实上 *Green* 公式不是本质的，本质在于 f 存在“原函数”。

证明. Step1 三角区域估计：取 D 内任一三角形区域 $\triangle$，记其边界为 γ 并令

$$M = \left|\int_\gamma f\right| \geq 0$$

只要证明 $M=0$。现将 $\triangle$ 分成 4 个全等三角形[3]记为 $\triangle^{(1)},\cdots,\triangle^{(4)}$,边界为 $\gamma^{(1)},\cdots,\gamma^{(4)}$。于是有

$$M = \left|\int_\gamma\right| \leq \left|\int_{\gamma^{(1)}}\right| + \cdots + \left|\int_{\gamma^{(4)}}\right|$$

因此不妨设 $\left|\int_{\gamma^{(1)}}\right| \geq \frac{M}{4}$，并记该三角形为 $\triangle_1$，边界为 γ_1，再对其重复上述操作，于是得到序列 $\{\triangle_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足：

1. $D \supset \triangle \supset \triangle_1 \supset \cdots \supset \triangle_n \supset \cdots$
2. $diam\triangle_n \to 0 \quad (n \to \infty)$
3. 有周长估计：
$$|\gamma_n| = \frac{L}{2^n}, \quad \text{其中 } L \text{ 为 } \gamma \text{ 的周长}$$
4. 有积分估计：
$$\left|\int_{\gamma_n}\right| \geq \frac{M}{4^n}$$

由紧区间套定理，又 D 单连通，则存在唯一的 z_0 在每个三角形 $\triangle_n$ 中。又 $f \in H(D)$，即对 $\forall\epsilon > 0$，$\exists\delta > 0$ 使得 $z \in D_\delta(z_0)$ 满足

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon|z - z_0|$$

取充分大的 n 使得 $\triangle_n \subset D_\delta(z_0)$，那么 $|z - z_0| \leq |\gamma_n|$。由上述 3.4.，我们得到如下估计

$$\begin{aligned}
M &\leq 4^n \left|\int_{\gamma_n} f\right| \\
&\leq 4^n \left|\int_{\gamma_n} f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| \\
&\leq 4^n \int_{\gamma_n} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \\
&< 4^n \int_{\gamma_n} \epsilon|z - z_0| \\
&< L^2\epsilon
\end{aligned}$$

这说明 $M = 0$。

Step2 对 D 内任一多边形区域，记边界为 γ，对其做三角剖分，每个子三角形由一致的定向，由 Step1 可知 $\int_\gamma f = 0$。

---

[3]其实是 2 维单形的剖分。

Step3 对 D 内任一可求长曲线 γ，由引理2.1.1可知，存在折线逼近，即存在多边形逼近，重复 Step2 即可。 □

注记 2.1.2. 事实上 *Goursat* 利用三角形的方式是本质的，这来自于拓扑学中的经典技术，即“三角剖分”，我们知道任意紧致的二维流形都可以三角剖分。

2.1.2 局部恰当性: 原函数的局部存在性

此后我们总是将复平面 $\mathbb{C}$ 视为二维实流形[4]，记其上 n 形式空间为 $\Omega^n(\mathbb{C}), n=0,1$。回忆数学分析 (或微分流形)，局部邻域上的闭形式总是恰当的。特别地，对 $z_0\in\mathbb{C}$ 处局部非零的复微分 $1-$ 形式 $\omega=f(z)dz$(其中 f 在合适的区域上为全纯函数)，取充分小的局部圆盘 $D_\delta(z_0)$，使得在其上存在该微分形式的原形式 $F(z)$，即 $F'(z)=f(z)dz$。

定义 2.1.1. 设 f 为区域 $D\subset\mathbb{C}$ 上的全纯函数,称 F 为 f 的**原函数**,如果 $F'(z)=f(z)$。

由定义立得 $F(z)$ 在 D 内全纯的，并且利用 *Green* 公式易知: 对区域 D 内任一可求长简单闭曲线 γ，都有

$$\int_\gamma F(z)dz=0$$

即 $f(z)$ 在 D 内沿曲线的第二型曲线积分与路径无关。

根据上述讨论，我们已经知道全纯函数局部原函数的存在性，一个自然的问题是：是否任意区域上的全纯函数都存在原函数？答案是否定的，注意到例1.5.1中取 $n=-1$，有 $f(z)=\frac{1}{z}\in H(\mathbb{D}-\{0\})$，但它不存在原函数[5]。事实上，将 $f(z)$ 视为双变量映射时，我们将复微分形式 $f(z)dz$ 写作 $[u(x+iy)+iv(x+iy)](dx+idy)$，进而

$$f(z)dz=udx-vdy+i(vdx+udy) \tag{2.1}$$

因此 $\frac{1}{z}dz=\frac{\overline{z}}{|z|^2}dz$ 的虚部可写为

$$\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy \tag{2.2}$$

这个微分形式在 $\mathbb{D}-\{0\}$ 上不是恰当形式，事实上我们可以找到“原函数” $arctan\frac{y}{x}$ 或 $arccot\frac{x}{y}$，但二者在上述区域内不连续。

我们断言问题出在区域 $\mathbb{D}-\{0\}$ 的拓扑性质上，它不是单连通的。回忆 *de Rham* 理论，拓扑空间 X 的第 n 个奇异上同调群 $H^n(X)$ 与第 n 个 *de Rham* 上同调群 $H^n_{dR}(X)$ 同构，即有

$$H^n(X)\cong H^n_{dR}(X) \tag{2.3}$$

[4]实际上为一维复流形。

[5]回忆 [6] 的 P108 的习题 20。

由于 $\mathbb{C}$ 上单连通区域 X 的第 1 个同调群 $H^1(X)$ 平凡，因此其上闭形式都是恰当形式，故单连通区域上的全纯函数都存在原函数。这个事实也可以通过 *de Rham* 上同调群的同伦不变性得到，参见 [7]。

我们上述断言是高屋建瓴的，实际上从复变函数的发展来看，直接通过函数论的方式证明这个断言是可以的，为此我们叙述一个函数论的版本 (参见 [8] 的 P104-107)，与先前叙述殊途同归。

定理 2.1.3. 设 f 在区域 D 内连续，且对 D 内任一可求长闭曲线 γ，均有 $\int_\gamma f = 0$，那么

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \quad z_0\text{为 } D \text{ 内一固定点}$$

这里 $F \in H(D)$，且 $F' = f$，

证明. 由条件可知 f 在 D 内的第二型曲线积分与路径无关，于是 F 确实是一个映射。下证对任意 $a \in D$ 有 $F'(a) = f(a)$。由于 f 在 a 点连续，即对 $\forall \epsilon > 0$，$\exists \delta > 0$ 使得 $z \in D_\delta(a)$ 有

$$|f(z) - f(a)| < \epsilon$$

在 $\overline{za}$ 上做如下估计：

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z)-F(a)}{z-a} - f(a)\right| &= \frac{1}{|z-a|}|F(z) - F(a) - f(a)(z-a)| \\
&= \frac{1}{|z-a|}\left|\int_{\overline{z_0 z}} f - \int_{\overline{z_0 a}} f - f(a)(z-a)\right| \\
&= \frac{1}{|z-a|}\left|\int_{\overline{az}} f - f(a)(z-a)\right| \\
&= \frac{1}{|z-a|}\left|\int_{\overline{az}} f(z) - f(a)\right| \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

由 a 的任意性唯一确定了 F。 □

注记 2.1.3. *以上证明来自于 [8] 的 P104-105，也可以参考 [6] 的 P37-39，事实上二者都是利用函数 f 的连续性。在介绍完代数拓扑的语言之后，我们将在定理2.1.6和定理2.1.7中采用 [6] 的叙述方式。*

利用单连通区域的 *de Rham* 理论，上述定理蕴含：

推论 2.1.1. 若 D 是**单连通**的，且 $f \in H(D)$，则上述 $F = \int_{z_0}^{z} f$ 为其在 D 内的原函数。

并且我们有类似微积分中的 $Newton - Leibniz$ 公式：

定理 2.1.4. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为**单连通**区域，F 为 f 的原函数，则对区域内任意两点 z_1, z_2 有

$$\int_{z_1}^{z_2} f = F(z_2) - F(z_1)$$

注记 2.1.4. 一般多连通区域上并不成立，从这一小节开头的叙述中就可以预见。事实上，我们可以用代数拓扑的语言对这些事实做更几何的刻画，参见 *[2, 4, 6]*。

2.1.3 利用代数拓扑语言叙述积分定理

我们在定理2.1.2与推论2.1.1中已经呈现了一般形式的 *Cauchy* 积分定理。事实上，要严格理解这个理论的叙述需要引入代数拓扑的语言。值得注意的是，代数拓扑中最核心的两个概念，即**同伦**与**同调**本质上来自于 Riemann 关于 *Cauchy* 积分理论的研究。而大部分复变函数的讨论只需要在一些特定的区域上，例如三角形、矩形与圆盘等等，教材 [6] 中直到第三章末尾才引入这个工具。更细致的叙述可以参考 [2, 4]。

我们称区域 $D \subset \mathbb{C}$ 上两条定端曲线 $\gamma_1 : [a,b] \to D, \gamma_2 : [a,b] \to D, (\gamma_1(a) = \gamma_2(a), \gamma_1(b) = \gamma_2(b))$ 是**同伦的**，如果存在连续映射 $H : [a,b] \times [0,1] \to D$ 使得 $H(s,0) = \gamma_1, H(s,1) = \gamma_2, (\forall s \in [a,b])$ 且 $H(a,t) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a), H(b,t) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b), (\forall t \in [0,1])$。特别地，取 $\gamma(a) = \gamma(b) = z_0 \in D$，称为区域 D 内 z_0 点的**回路**，将回路全体的集合商去同伦关系，施以同伦类的复合为运算，构成一个群，称为区域 D 关于点 z_0 的**基本群**，记为 $\pi_1(D, z_0)$。由连通性，简记 $\pi_1(D, z_0)$ 为 $\pi_1(D)$。我们称区域 D 是**单连通的**，如果 $\pi_1(D) = 0$，与传统单连通的定义如出一辙。

于是，定理2.1.2可以来自于 (参见 [8] 的 P100-101 或 [6] 的 P93-97)

定理 2.1.5. 若函数在区域 D 内全纯，对 D 内任两条同伦的定端[6]曲线 γ_1, γ_2，都有

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

证明参见 [6] 的 P93-96。由此可知，闭曲线的**卷绕数**为同伦不变量。

2.1.4 多值函数的严格刻画

利用代数拓扑语言下的 *Cauchy* 积分理论，现我们可以严格地讨论多值函数，其中尤其重要的是复对数函数 $logz$。现在令 $z = re^{i\theta}$，于是对数函数可以写作

$$logz = logr + i\theta$$

[6]实际上两条曲线的起止点可以不相同，历史上最早关于曲线同伦的概念是由 Riemann 提出的，即环面的内外同向边界。

注意到这里的 $logr$ 是标准的实对数函数，而 θ 作为关于 z 的函数 (辐角 (函数)) 呈现多值性，即使

$$Argz \ni \theta \equiv argz \pmod{2\pi}$$

因此，固定 θ 可以确定 z 的辐角，反过来不成立; 若 z 发生微小的扰动，θ 可以连续变化。于是在局部可以定义复对数函数，但不适用于整体的结果，例如从 $z=1$ 绕原点 O 一周回到 $z=1$，这样辐角 θ 回不到原来的值 (事实上相差一个 2π)。

为了定义出**单值**的复对数函数，我们需要限制 $logz$ 的定义域，称限制了定义域的 $logz$ 为一个**单值分支**。以下定理告诉我们如何大范围地定义 $logz$ 的单值区域。以下定理告诉我们如何大范围地定义复对数函数的单值区域。

定理 2.1.6. 设 Ω 为包含 1 但不包含原点 O 的单连通区域，那么 Ω 总是复对数函数 $F(z) = log_\Omega(z)$ 的单叶性域，满足

1. F 在 Ω 上全纯;
2. $e^{F(z)} = z, \quad \forall z \in \Omega$;
3. $F(r) = logr, \quad$ 当 $r \in \mathbb{R}$ 或复数 r 充分靠近 1。

证明. 1. 只要验证 $F(z)$ 为 $\frac{1}{z}$ 的原函数即可。由 $0 \notin \Omega$，于是 $f(z) := \frac{1}{z} \in H(\Omega)$。对任意从 1 到 $z \in \Omega$ 的道路，定义

$$F(z) = log_\Omega(z) = \int_\gamma f$$

Ω 单连通蕴含 $F(z)$ 与路径无关，因此 $F(z)$ 确实是一个映射。注意到 $f(z) \in C(D)$，于是有

$$f(w) = f(z) + \circ(|w-z|), \quad w \to z$$

取 z 附近且落在 Ω 内的直线段 $\eta : z \mapsto z+h$，同样定义 $F(z+h)$。考察

$$F(z+h) - F(z) = f(z)\int_\eta + \int_\eta \circ(|w-z|)$$

带入上式，由于 $\int_\eta = h$

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \to f(z), \quad h \to 0$$

2. 对 $ze^{-F(z)}$，考察

$$\frac{d}{dz}\left(ze^{-F(z)}\right) = e^{-F(z)} - zF'(z)e^{-F(z)} = (1 - zF'(z))e^{-F(z)} = 0$$

由于 Ω 单连通，故 $ze^{-F(z)}$ 为常数，又 $e^{-F(1)} = 1$，故其在 Ω 上恒为 1。

3. 直接验证
$$F(r)=\int_1^r \frac{1}{x}dx,\quad x\in\mathbb{R}$$
即可。

□

例如，对分割平面 $\Omega=\mathbb{C}-\{(-\infty,0]\}$，我们有**对数主支**:

$$logz=logr+i\theta$$

这里 $z=re^{i\theta},\quad 0\le\theta<2\pi$。事实上,从几何角度看,对上述主支,取圆弧 $\eta:[0,\theta)\to\Omega$ 其中 $\eta(t)=re^{it}$，我们有

$$logz=\int_1^r \frac{1}{x}dx+\int_\eta \frac{dw}{w}=logr+\int_0^\theta \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt=logr+i\theta$$

一个重要的观察是

$$log(zw)\neq logz+logw$$

如果 z,w 的辐角之和超过 2π。

注记 2.1.5. *最后我们断言: 在上述定理的保障下，可以严格定义由复对数函数的多值性*[7]*导出的其他函数的多值结果，例如幂函数 (回忆节1.3)*。

映射观点下的复对数函数　我们已经知道对任一非零复数 z，可以写成 $w=e^z$。一般地，我们将复对数“函数”视为映射[8]，不妨称为对数映射。

一个重要的结果是:

定理 2.1.7. [9] *设 f 为单连通区域 Ω 上处处非零的全纯函数，则存在全纯函数 g 使得在 Ω 上有*
$$f(z)=e^{g(z)}$$

证明. 对任意 $z_0\in\Omega$，利用 Ω 的单连通性，定义
$$g(z)=\int_\gamma \frac{f'}{f}+c_0$$
其中 γ 为任一从 z_0 到 z 的曲线，$c_0\in\mathbb{C}$ 满足 $e^{c_0}=f(z_0)$。模仿定理2.1.6中的证明，同样有
$$g'=\frac{f'}{f}$$

---

[7]本质上是辐角函数 θ 的多值性。

[8]注意到大范围下不是映射，我们已经讨论过它的多值性，但是模仿上一小节中限制定义域的方式，可以找出这个“映射”的合理单值区域。

[9]这个定理在研究整函数性态中是基本的工具，例如 *Weierstrass* 因子分解定理与 *Hadamard* 定理。

考察
$$\frac{d}{dz}\left(fe^{-g}\right)=f'e^{-g}-fg'e^{-g}=(f'-fg')e^{-g}=0$$
于是 fe^{-g} 为常数，又 $fe^{c_0}=1$，故 $fe^{-g}=1$。 □

2.1.5 应用: 计算积分

这里我们罗列一些利用 $Cauchy$ 积分定理计算的经典积分的结果，采用的技术为区域“**surgery**”[10]，参见 [8] 的 P100-102、[6] 的 P39-45。

1. $Fourier$ 变换
$$e^{-\pi\xi^2}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi x^2}e^{-2\pi ix\xi^2}dx \tag{2.4}$$
参见 Stein, E. M. , & Shakarchi, R. . (2003). Fourier Analysis: An Introduction. 世界图书出版公司北京公司.

2.
$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

3. $Fresnel$ 积分
$$\int_0^{\infty}\sin(x^2)dx=\int_0^{\infty}\cos(x^2)dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tag{2.5}$$
一般形式的 $Fresnel$ 积分为
$$\int_0^{\infty}\sin(x^n)dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sin(\frac{\pi}{2n}),\quad \int_0^{\infty}\cos(x^n)dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cos(\frac{\pi}{2n})$$

4.
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

5.
$$\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos bxdx=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \int_0^{\infty}e^{-ax}\sin bxdx=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2.2 $Cauchy$ 积分公式

2.2.1 局部表示

回忆偏微分方程中，区域上调和函数在每点处的值被其边界完全确定，即 $Green$ 表示公式，参见 [1]; 以及圆盘上的热稳态方程 (调和方程)
$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

[10]回忆数学分析 (或微分流形) 中证明 $stokes$ 定理的技术，参见 [7, 5]。

的解，其被边界圆周上的值完全确定，回忆 *Poisson* 核的卷积 (*Poisson* 乘积公式)(参见 [1]、Stein, E. M. , & Shakarchi, R. . (2003). Fourier Analysis: An Introduction. 世界图书出版公司北京公司.)

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}P_r(\theta-\varphi)u(1,\varphi)d\varphi$$

事实上全纯函数的实部与虚部都是调和函数，因此在全纯函数理论中也有相应的结果这点不值得意外。我们也可以将下述定理称为“表示公式”：

定理 2.2.1 (*Cauchy* 积分公式)**.** [11] *设 D 为可求长简单闭曲线 γ 围成区域的内部，对于 $f\in H(D)\cup C(\overline{D})$，以及任意 $z\in D$ 有*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{2.6}$$

回忆练习11，证明同样采用 surgery 的方法[12]，与 *Green* 表示公式如出一辙。此外，若减弱条件为 $f\in(D)$，那么积分公式转化为 *Pompeiu* 公式，这直接依赖于复分析的 *Green* 公式，证明参见 [9]。

证明. 对任意的 $z\in D$，由 f 在 z 处连续，即对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|\zeta-z|<\delta$ 时，都有

$$|f(\zeta)-f(z)|<\epsilon$$

取 $r\in\delta$ 使得 $D_r(z)\subset D$，故 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\in H(D-\overline{D_r(z)})\cap C(\overline{D-\overline{D_r(z)}})$。由 γ 与 $C_r(z)$ 同伦，可知

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

又 $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z)}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta=1$，故

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

最后考察

$$\begin{aligned}\left|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z)}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|\\&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z)}\frac{f(z)-f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|\\&\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\epsilon}{r}\cdot 2\pi r\\&=\epsilon\end{aligned}$$

即可 □

[11] 注意这里定理的条件被减弱过，参见 [8]。

[12] 在本小册中，我们将 *Cauchy* 积分公式利用 surgery 的技术作为典范，此后再使用时将不再赘述细节，有兴趣的读者可以参考 [6]。

我们得到的公式称为 *Cauchy* **积分公式**，它表明全纯函数在区域内的值可以被其边界[13]上的值完全确定。

进一步，利用归纳法，它的各阶导数也可以被确定，即

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta,\quad n\in\mathbb{N}\tag{2.7}$$

证明. 对 n 作归纳。当 $n=0$ 时，即 *Cauchy* 积分公式。假设 $n-1$ 时成立，即

$$f^{(n-1)}=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n}}d\zeta$$

为计算 $f^{(n)}$，利用导数的定义，取充分小的 h，有

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z)}{h}&=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{h}\cdot\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^n}-\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\right]d\zeta\\&=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{h}\left[\frac{1}{(\zeta-z-h)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}d\zeta\right]\end{aligned}$$

注意到 $A^n-B^n=(A-B)[A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1}]$。取 $A=\frac{1}{\zeta-z-h},B=\frac{1}{\zeta-z}$，有

$$A^n-B^n=\frac{h}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}[A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots+AB^{n-2}+B^{n-1}]$$

带入以上公式，令 $h\to 0$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{h}\left[\frac{1}{(\zeta-z-h)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}\right]d\zeta&=\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\frac{n}{(\zeta-z)^{n-1}}d\zeta\\&=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\end{aligned}$$

□

这直接蕴含了全纯函数的**光滑性**，至此，我们真正承认了 $H(D)\subset C^\infty(D)$。基于公式2.6与公式2.7能够得到全纯函数导数的诸多性质，我们再次断言这本质上来源于调和函数的**椭圆正则性**，有兴趣的读者可以参考 [1]。

2.2.2　正则性:*Cauchy* 不等式

利用公式2.7，容易得到估计，称为 *Cauchy* **不等式**: 设 $f\in H(D_R(a))$，且 $\sup_{z\in D_R(a)}|f(z)|=M$

$$|f^{(n)}|\le\frac{n!M}{R^n},\quad n\in\mathbb{N}^+\tag{2.8}$$

有时我们也将公式2.8中的 M 记为 $||f||$，称为极大范数，换言之，全纯函数导数的模长可以被函数本身的极大范数控制。在 (高维) 调和函数理论中同样有关于函数导数的控制不等式，参见 [1]。

[13] 具体计算的时候可以挑选与边界同伦的曲线。

2.2.3 解析性: 幂级数展开式

复值序列与复值级数可以视为数学分析的平行推广，参见 [8] 的 P16-17，P131-132。此外，复变函数项级数的一致收敛性也可视为数学分析的平行推广，并且涉及复变函数的**连续性**与**积分**与实变版本差别不大，参见 [8] 的 P132-135。

注记 2.2.1. *但是由于复数域非有序域，实变版本关于级数的 $A-D$ 判别法需要改进为***有界变差***版本，当然本质还是 Abel 变换，有兴趣的读者可以尝试 [8]P138 的习题 2。*

我们只对幂级数做一些回顾，援引自 [8, 9]。不妨设复变量幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

作为数学分析的平行推广，易知收敛半径为

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

于是在收敛圆内部收敛，而在圆外发散，参见 [8] 的 P140-143；或回忆数学分析的版本，[5] 的 P69-70。但是我们断言：一旦涉及复变函数项级数的**导数**，就会产生与实变版本本质性的差别，将在小节2.3.4，特别是定理2.3.7中进一步讨论它。为此，我们先叙述一个定义，这与实变是一致的。

定义 2.2.1. 称函数列 $f_n(z)$ 在 D 上**内闭一致收敛**，如果在 D 的任一紧子集上一致收敛。

定理 2.2.2 (Abel 第一定理)**.** *若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 z_0 处收敛，则它在 $\Omega := D_{|z_0|}(0)$ 内内闭绝对一致收敛。*

证明. 设 $K \subset \Omega$ 为紧集，取 $r < |z_0|$ 使得 $K \subset D_r(0)$。因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ 收敛，故存在 M 使得 $|a_n z_0^n| < M, \forall n \in \mathbb{N}^+$。对 $\forall z \in K$，有

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= \left| a_n z_0^n \cdot \frac{z^n}{z_0^n} \right| \\ &\le M \left(\frac{|r|}{|z_0|} \right)^n \end{aligned}$$

由 $r < |z_0|$，于是 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ 在 K 内一致收敛。 □

配合 *Weierstrass* 定理，即定理2.3.7立即得到:

定理 2.2.3. *幂级数在其收敛圆内确定一个全纯函数。*

最后我们回到对全纯函数的解析性讨论中，可以将下面定理视为定理2.2.3的反问题。

定理 2.2.4. 若 $f \in H(D_R(a))$，则 f 可以在 $H(D_R(a))$ 内展开成幂级数[14]如下：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in D_R(a) \tag{2.9}$$

其中

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

证明. Step1 **区域限制**：取任意 $z \in D_R(a)$，以及 $r < R$ 使得 $|z-a| < r$。由 *Cauchy* 积分公式，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Step2 **构造级数**：注意到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{\zeta - a}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta - a}{\zeta - z}} \\ &= \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta - a + a - z}{\zeta - z}} \\ &= \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

由于 $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$，于是上式可以写成幂级数：

$$\frac{1}{\zeta - a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$$

它是一致收敛的。

Step3 **算子换序**：于是有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \cdot (z-a)^n \end{aligned}$$

由 *Cauchy* 积分公式，我们有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

□

[14]有些教材也称其为 *Taylor* 级数，参见 [8]。

注记 2.2.2. 公式*2.10*的构造方法是值得收集的，我们将在不少地方使用，例如 *Runge* 逼近定理 *(*见*2.3.9)* 和 *Laurent* 级数理论 *(*定理*3.1.7)*。

并且可以证明这个展开是唯一的，参见 [8] 的 P151。进一步可以得到如下推论[15]:

定理 2.2.5. 复变函数 f 在区域 D 上全纯当且仅当 f 在 D 内每点的某个领域中可展开为幂级数。

2.3 全纯函数的局部结果

至此，我们初步建立了发展结果所需要的基本工具，事实上它们都来自于 *Cauchy* 积分公式，即公式2.6。下面作为应用，我们呈现几例应用 *Cauchy* 积分理论导出的结果。

2.3.1 *Liouville* 定理与应用

由定理2.1.4，可以发现: 整函数 f 的导数 $f' \equiv 0$ 蕴含 $f \equiv C$，其中 C 为常数。这提示我们，非平凡的整函数具有如下性质:

定理 2.3.1 (*Liouville* 定理)**.** 有界整函数必为常数。

证明. 只要证明对任一 $z_0 \in \mathbb{C}$，都有 $f'(z_0) = 0$。为此取 $|f|$ 的上界 B 与任意半径 $R > 0$，利用 *Cauchy* 不等式，即公式2.8施以估计

$$|f'(z_0)| \leq \frac{B}{R}$$

令 $R \to \infty$，得到 $|f'(z_0)| = 0$，再由 z_0 的任意性推出 $f \equiv C$，其中 C 为常数。 □

利用 *Liouville* 定理，我们可以证明著名的**代数基本定理**。

推论 2.3.1 (代数基本定理)**.** 任意 $\mathbb{C}$ 上多项式 $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ 在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个复根。

证明. 用反证法。假设多项式 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无根，蕴含 $a_0 \neq 0$，于是 $\frac{1}{P(z)}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的有界函数，由 *Liouville* 定理，可知 $P(z)$ 为常数。 □

注记 2.3.1. 历史上关于代数基本定理的证明有很多，第一个令人信服的证明由 *Gauss* 给出，他分别于 *1799* 年、*1815* 年与 *1816* 年提供了三个不同的证明。对微分拓扑感兴趣的读者可以参考 *Milnor, J. W. . (1965). Topology from the Differentiable Viewpoint. University Press of Virginia.* 中的证明，其中利用了对复平面紧化和正则值的技术。

[15]这真正刻画了“解析性”。

进而我们说明了 n 次复多项式必有 n 个复根，因此，上述多项式可以写作

$$P(z) = a_n(z-w_1)\cdots(z-w_n)$$

其中 $w_i, i=1,\cdots,n$ 为 n 个复根。

2.3.2 零点局部信息、刚性与解析延拓: 唯一性定理

我们已经知道圆盘 $D_R(a)$ 上的全纯函数 $f(z)$ 能够局部表示为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

我们断言: 非平凡的全纯函数，其零点分布是**孤立的**；换言之，“汇聚”的零点集将全纯函数零化。

定理 2.3.2 (孤立零点定理)**.** *设 f 为区域 D 上的全纯函数，若存在 D 内的零点序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得其极限点都在 D 内，那么 $f|_D \equiv 0$。特别地，若存在 D 的开子集 ω，使得 $f_\Omega \equiv 0$，那么 $f|_D \equiv 0$。*

注记 2.3.2. *上述条件暗示 f(极限点) $=0$(由极限换序性)。因此极限点必须为 $\overline{D}$ 的**内点**。事实上全纯函数也会在区域边界 ∂D 上光滑地 (或全纯地) “bump”，反例的构造可以考虑带周期性的函数，例如 $\sin\frac{1}{1-z}$，参见 [8] 的 P154。*

在证明这个定理之前我们给出它的一个应用。

定理 2.3.3 (唯一性定理)**.** *设 f,g 为区域 D 上的全纯函数，若存在 D 内的点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，其极限点都在 D 内，满足 $f(z_n)=g(z_n), \forall n \in N^+$，则 $f|_D \equiv g|_D$。特别地，若存在 D 的开子集 Ω，使得 $f_\Omega \equiv g_\Omega$，那么 $f|_D \equiv g|_D$。*

这个定理告诉我们，全纯函数的大范围信息被局部信息唯一确定，因此在考虑局部全纯函数向大范围延拓的时候，延拓的结果是唯一的。这项技术在解析数论中常用，称为**解析延拓**。

为了证明定理2.3.2，我们需要刻画全纯函数的零点信息，为此引入如下概念:

定义 2.3.1. 称 z_0 为全纯函数 $f(z)$ 的 m **阶零点**, 如果 $f^{(m-1)}(z_0)=0, n=0,1,\cdots,m-1$，且 $f^{(m)}(z_0)\neq 0$。

一个自然的问题是: 我们为什么要给零点再做区分，换言之，不同阶的零点有何区别? 回忆代数学中多项式的知识，我们知道多项式函数的零点会出现“重合”的情况，这使得从图像上难以区分; 此外又注意到多项式函数的导数会“消磨”零点的重数，于是我们利用求导的次数来定义 (或判断) 多项式的零点重数。回到全纯函数的

问题，注意到这类函数在某点附近可以做幂级数[16](即形式多项式) 展开，这为我们刻画零点“重数”提供了思路，不过这里称“重数”[17]为阶数; 特别地，若全纯函数为多项式函数，那么零点理论与多项式中的结果完全一致。

利用全纯函数的幂级数展开，零点局部的函数可以被如下刻画:

定理 2.3.4 (零点局部刻画). 设 f 为区域 D 上的全纯函数，且 z_0 为 D 内 m 阶零点，则存在 z_0 的一个邻域 $U \subset D$ 以及 U 上非零全纯函数 g，使得

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \tag{2.11}$$

证明. 设 z_0 为 f 的 m 阶零点，利用幂级数展开得到

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m [a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \cdots] \end{aligned}$$

即知。 □

下面我们来证明孤立零点定理。

证明. 设 z_0 为零点序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个极限点，利用连续性，我们有

$$f(z_0) = 0$$

不妨记 z_0 为 m 阶零点，倘若 f 在 z_0 不恒为零，则 f 在局部可以表示为公式2.11的形式。对充分大的 n 将 z_n 带入公式2.11，于是 $(z_n - z_0)^m \neq 0, g(z_n) \neq 0$，这与 $f(z_n) = 0$ 矛盾，因此 f 在 z_0 局部恒为零。

注意到这是一个局部的结果，下面我们利用拓扑信息 (连通性)，将这个结果延拓到整体。设 f 为零的定义域的内部为 U，其显然为 D 上非空开集；利用函数的**连续性**可知 U 为闭集，记 $V = D - U$，其显然为开集，因此

$$D = U \cup V$$

由连通性可知，V 为空集，故 $U = D$。 □

[16]如果关心全纯函数的大范围性质，可能会遇到非解析的点，即奇点，对于零点的对偶 (极点) 我们也有类似对偶的方式去刻画它，见定理3.1.7。

[17]利用重数来理解阶数是合适的，它本质地刻画了“亚纯映射”对曲线拓扑的影响，我们将在小节3.2.1中看到这样思考的优势。

注记 2.3.3. 注意到证明中我们先得到了一个“微观”的结果，那么如何将其推广到局部甚至整体？这需要用到拓扑学的工具，类似的性质有连通性 (上述证明的技术是经典的)、紧致性; 也可以采用分析的技术，参见 [8] 的 *P152-153*。

我们有把唯一性定理称为全纯函数的**刚性定理**，这是一个极为深刻的结果，说明区域中全纯函数被极限在区域内的点列的值完全确定！这说明了全纯函数具有类似**多项式**的**零点控制性**[18]，但稍弱于其；换句话说，全纯函数的“形状”种类比光滑的实变函数少得多。此外，有了唯一性我们就可以良性地得到初等全纯函数的 $Taylor$ 级数，而且与实变版本是类似的。

1. 指数函数

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

2. 对数函数

$$log(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$log(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

$$(1-z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\alpha} z^n, \quad |z| < 1$$

3. 三角函数

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

2.3.3 *Morera* 定理

$Morera$ 定理是非常实用的工具，往往在判断一个函数是全纯函数时有奇效。

定理 2.3.5 ($Morera$ 定理)**.** 如果 f 是区域 D 上的连续函数，且沿 D 内任一可求长闭曲线的积分为零，那么 $f \in H(D)$。

证明. 模仿定理2.1.6的证明方式，验证原函数即可。 □

[18] 读者可以与 $Lagrange$ 插值法和 $Hamilton$ 插值法对比。

2.3.4　*Weierstrass* 级数理论

例子 2.3.1. 考察幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$，在收敛圆 $C_1(0)$ 上仅在 $z=1$ 处发散。

证明. 将 $z=e^{i\theta}$ 带入级数，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$$

由数学分析的知识易得。 □

进一步我们可以具体计算这个级数，记 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$，则 $f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\frac{1}{1-z}$，这说明 $f(z)=-log(1-z),|z|<1$。于是

$$\begin{aligned} f(z)&=-log|1-e^{i\theta}|-iarg(1-e^{i\theta})\\ &=-log(2\sin\frac{\theta}{2})+i\frac{\pi-\theta}{2}\end{aligned}$$

与级数的实部虚部对比，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}=-log(2\sin\frac{\theta}{2})$$

以及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}$$

上述两式在 $0<\theta<2\pi$ 时成立[19]。特别地，取 $\theta=\pi$，对第一式，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=log2$$

取 $\theta=\frac{\pi}{2}$，对第二式，我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

上面我们遗留了一个重要的问题：为什么对任意的 $0<\theta<2\pi$，级数与函数能比较实、虚部？引出 *Abel* **第二定理**。

定理 2.3.6 (*Abel* 第二定理)**.** 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛半径为 $R=1$，且在 $z=1$ 时收敛于 S(即 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S$)，则 f 在 $z=1$ 处有非切向极限 S。

注记 2.3.4. 这个定理取自 *[8]* 的 *P144-146*，关于**非切向极限**的定义也可以参考之。

定理 2.3.7 (*Weierstrass* 定理,Weierstrass)**.** 设 D 为一区域，如果

[19] 见 *Abel* 第二定理。

1. $f_n \in H(D), n \in \mathbb{N}^+$
2. $f_n(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 f,

那么

1. $f \in H(D)$
2. $f_n^{(k)}(z)$ 在 D 上内闭一致收敛到 $f^{(k)}, k \in N^+$

注记 2.3.5. 必须指出，实变版本中函数项级数的导数定理要弱得多，参见 *[5]* 的 *P152-153*。

利用这个定理，Riemann 推广了 $zeta$ 函数到复平面 $\mathbb{C}$ 上。考察

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

注意到 $|n^{x+iy}| = |e^{xlogn+iylogn}| = |e^{xlogn}| = n^x$，当 $Rez = x \geq x_0 > 1$ 时，有 $|n^z| \geq |n^{x_0}| > 1$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ 在半平面 $Rez > 1$ 上内闭一致收敛，因而**全纯**。

我们采用 [6]P53-55 中的证明方式[20]。

证明. 首先对第一个结论。取 $\forall z_0 \in D$，选取 r 使得 $\overline{D_r(z_0)} \subset D$，在 $D_r(z_0)$ 内任取可求长闭曲线 γ，由 f_n 在 D 上一致收敛于 f，又 $f_n \in H(D)$[21]，故

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = 0$$

由 $Morera$ 定理，$f \in H(D_r(z_0))$。由 z_0 的任意性即得 $f \in H(D)$。

对第二个结论，递归意义下我们断言: 由于正则性，只要证明 $k = 1$ 的情形。对 $\forall \epsilon > 0$，以及 $\forall z \in D$，取 $D_{2r}(z_0) \subset D$，对任意 $z \in B_r(z_0)$，由 $Cauchy$ 积分公式和 f_n 的一致收敛性，对充分大的 n，有

$$\begin{aligned}
|f_n'(z) - f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{\epsilon}{r^2} \right| \\
&= \frac{\epsilon}{r}
\end{aligned}$$

---

[20]为证明第二个结论，[8] 的 P136-137 中引入对区域要求更高的导数估计:

引理 2.3.1. 设 D 为一区域, K 为 D 内紧子集, 并且包含于 G, 满足 $\overline{G} \subset D$ 且 $\overline{G}$ 紧致, 对 $f \in H(D)$ 有如下导数估计

$$\sup\{|f^{(k)}(z)| z \in K\} \leq C \sup\{f(z)| z \in G\} \tag{2.12}$$

注记 2.3.6. 我们也称这样的 G **相对于**D **是紧的**, 参见 *[8]* 的 *P136*。

[21]事实上连续就行。

于是 f_n' 在 $D_r(z_0)$ 上一致收敛。对任一紧子集 $K\subset D$，以及任一 $z\in K$，都存在 $r_{(z)}$ 使得 f_n' 在 $D_r(z)$ 内一致收敛。并且 $\{B_r(z)|z\in K\}$ 构成 K 的一族开覆盖。由紧致性得到一组有限开覆盖，使得 f_n' 在其上一致收敛，即在 K 上一致收敛，由 K 的任意性得证。 □

在 [6] 的 P55-57 中呈现了**含参变量积分**的版本，我们来叙述一下[22]。

定理 2.3.8. 设 D 为一区域，对 $F(z,s):D\times[0,1]\to\mathbb{C}$ 使得

1. $\forall s\in[0,1]$，有 $F(z,s)\in H(D\times\{s\})$；
2. F 连续，

则 $f(z)=\int_0^1 F(z,s)ds\in H(D)$。

证明. 这个定理的证明是经典的，原理是将积分转化成 *Riemann* 和并约化为上述函数列。对 $\forall z_0\in D$，取 r_0 使得 $\overline{D_{r_0}(z_0)}\subset D$，下证 $f\in H(\Omega)$，其中 $\Omega:=D_{r_0}(z_0)$。记

$$f_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}F(z,\frac{k}{n})$$

由可积性易知 f_n 收敛于 f。并且有 $F(z,s)$ 在 $\overline{\Omega}\times[0,1]$ 上一致连续。那么对 $\forall\epsilon>0$，$\exists\delta>0$，$|s_1-s_2|<\delta$，使得对 $\forall z\in\overline{\Omega}$ 有

$$F(z,s_1)-F(z,s_2)<\epsilon$$

取 $n>\frac{1}{\delta}$，进而有

$$\begin{aligned}|f_n(z)-f(z)|&\le\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}F(z,\frac{k}{n})-F(z,s)\right|\\&\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|F(z,\frac{k}{n})-F(z,s)|\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\epsilon}{n}\\&<\epsilon\end{aligned}$$

即 f_n 在 $\overline{\Omega}$ 上一致收敛。用同样的方式证明整个 D 上 f 是一致收敛的。对任一可求长闭曲线 $\gamma\in D$，有

$$\int_\gamma f=\int_\gamma\lim_{n\to\infty}f_n=\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n=0$$

再由 *Morera* 定理可知 $f\in H(D)$。 □

[22] 也有和函数的概念，这里不再赘述，参见 [6] 的 P55。

2.3.5 *Runge* 逼近定理

我们在这里另附一块内容，有兴趣的读者可以参考 [6] 的 P60-64。回忆数学分析中，紧区间 $[a,b]$ 上的连续函数可以被多项式一致逼近，我们称 $Wereistrass$ **定理**，参见 [5] 的 P159-161。一个自然的问题是：在 $\mathbb{C}$ 的一个紧子集 K 上的全纯函数 f 是否可以被多项式一致逼近？

答案是否定的，例如 $\frac{1}{z}$ 在 $C_1(0)$ 上全纯，若能够被多项式 $P_n(z)$ 一致逼近，那么

$$\int_{C_1(0)} \frac{dz}{z} = \int_{C_1(0)} P_n(z)dz = 0$$

矛盾！我们断言原因出在 K^c 不是**连通**的，需要退而求其次选择有理函数[23]。

定理 2.3.9 (*Runge* 逼近定理,Runge)**.** *设 $K \in \mathbb{C}$ 为紧子集，*

1. *若 $f \in H(K)$，则存在***有理函数***$R_n(z)$ 一致逼近 f 且 R_n 的奇点在 K^c 中。*

2. *进一步，若 K^c* **连通***，则存在多项式 P_n 一致逼近 f。*

为了证明第一个结论，我们引入两个引理。

引理 2.3.2. *设 $D \subset \mathbb{C}$ 为区域，且 $K \subset D$ 为紧子集，若 $f \in H(D)$，则存在 $D - K$ 中有限条折线段 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 使得*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in K$$

有兴趣的读者可以直接查阅 [6] 的 P61-62。事实上我们在之前的讨论中已经证明了这个引理 (的更强结论)。

引理 2.3.3. *设 γ 为 $D - K$ 内光滑曲线，则存在有理函数序列 $R_n(z)$，使得 $R_n(z)$ 的奇点在 γ 的像内，并且一致逼近 $\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$。*

证明. 设 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ 为曲线的参数化，那么

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt$$

根据定理2.3.9的证明过程，立即得到上述含参变量积分可以被 Riemann 和序列一致逼近，而此序列是有理函数序列。

□

[23] 这个直觉不是偶然的，事实上可以发现全纯函数的积分表示总是依赖于区域的单连通性质，这是一个比较强的拓扑条件，划定非单连通区域的全纯函数往往会呈现例如 $\frac{1}{z}$ 的情况。

为了证明第二个结论，任一有理函数的奇点都来自于形如 $\frac{1}{z-z_0}$ 的因子，引入引理:

引理 2.3.4. *若 K^c 连通，$z_0 \notin K$，则 $\frac{1}{z-z_0}$ 可被多项式一致逼近。*

证明. 证明的技术与定理2.3.2的第二种证明是类似的，我们利用区域 K^c 的 (道路) 连通性构造向所求点逼近的曲线。

首先，选择充分大的 z_1，以其为模长包住 K(由 K 的有界性)。于是

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1}\frac{1}{1-z/z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

易知上述级数一致收敛 $z \in K$。并且部分和为多项式，故可得 $\frac{1}{z-z_1}$ 的多项式逼近。

现在只要说明对 $D-K$ 内任一点 z_0 的函数 $\frac{1}{z-z_0}$ 都可以被以 $\frac{1}{z-z_1}$ 为项的多项式逼近即可。为此，由于连通性构造从 z_1 到 z_0 的曲线 γ，并且对其作划分。由于 K,γ 为紧集，故 $r := d(K,\gamma) > 0$，于是每段弧长以小于 r 的标准为作划分，分点依次记为 $\{z_0 = w_0, w_1, \cdots, z_1 = w_l\}$。

我们断言若 w 为 γ 上一点，对任一 $w' \in \gamma$ 满足 $|w-w'| \in r$，$\frac{1}{z-w}$ 可以被 $\frac{1}{z-w'}$ 为项的多项式逼近。事实上

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-w} &= \frac{1}{z-w'}\frac{1}{1-\frac{w-w'}{z-w'}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-w')^n}{(z-w')^{n+1}}\end{aligned}$$

有限次传递后得到所求的多项式逼近。 □

第三章　亚纯函数的一般结果

3.1　奇点局部信息

3.1.1　奇点局部信息与分类

为了将全纯函数的局部结果推广到大范围上，我们需要对大范围区域的拓扑信息做充分的考量，特别是当函数在某些点处的情况很“差”时。回忆 $Morse$ 理论，流形上光滑函数的**非退化临界点**[1]刻画流形拓扑的整体信息。我们在复分析中需要考虑的“临界点”(称奇点) 主要有三类，按照影响的严重程度罗列为:

1. 可去奇点
2. 极点 (对偶零点)
3. 本性奇点

不同的奇点对大范围的“全纯”函数有影响。

定义 3.1.1. 若 f 在去心圆盘 $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ 内全纯，且 z_0 处非解析，则称 z_0 为**孤立奇点**。

可去奇点

定义 3.1.2. 称 f 的奇点 z_0 为**可去奇点**，如果狭义极限 $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在。

因此可去奇点 z_0 是最无关紧要的奇点，即使函数 f 在 z_0 处不解析，只要选择合适的 $f(z_0)$ 的值，便可以使得函数解析。但是以下定理给出可去奇点的另一种刻画，而采用的证明利用了前面这句话。

定理 3.1.1 ($Riemann$ 可去奇点定理)**.** *假设函数 f 为区域 Ω 上除了点 z_0 以外处处解析的函数，则 f 在 $\Omega - \{z_0\}$ 上***有界***当且仅当 z_0 为可去奇点。*

[1]参见 Milnor, J. W. . (1965). Topology from the Differentiable Viewpoint. University Press of Virginia.

证明. 利用对区域 surgery 的技术即可证明。我们总是可以考虑以 z_0 为圆心的小圆盘 D，倘若能证明对 $z(\in\Omega)\neq z_0$ 都有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

即这个函数被上式右侧的积分公式弥补了 z_0 处的奇性，这验证了之前的断言。下面我们通过 surgery 的方式来证明上述公式。只要对 z_0,z 处分别以它们为圆心挖去充分小半径为 ϵ 的圆盘，记负定向边界为 $\gamma_\epsilon,\gamma'_\epsilon$，用充分狭窄的廊道连接 ∂D 与两个圆盘可得单连通区域，由 $Cauchy$ 积分定理可知

$$\int_{\partial D}+\int_{\gamma_\epsilon}+\int_{\gamma'_\epsilon}=0$$

利用 $Cauchy$ 积分公式，有

$$\int_{\gamma'_\epsilon}=2\pi i f(z)$$

再根据 f 在 z_0 处的极限有限性 (蕴含局部有界)，利用长大不等式得到估计 (注意这里是 $\zeta-z$ 而不是 $\zeta-z_0$！)

$$\left|\int_{\gamma_\epsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|\leq C\epsilon$$

得证。 □

注记 3.1.1. *我们将会看到，在可去奇点的估计中，函数 f 若表示为 Laurent 级数，其负项系数全为 0，换言之，可去奇点呈现“伪奇性”，参见 [8] 的 P186-187。*

极点

我们将极点定义为零点的对偶，即

1. 称 z_0 为函数 f 的 m 阶**极点**，如果 z_0 为 $\frac{1}{f}$ 的 m 阶零点。

2. 零点局部刻画定理，即定理2.3.4的对偶表述为

   定理 3.1.2 (极点局部刻画定理)**.** *若函数 f 存在 m 阶极点 $z_0\in D$，那么存在该点的一个邻域，以及其上非零全纯函数 h，使得*

$$f(z)=(z-z_0)^{-m}h(z) \tag{3.1}$$

我们需要准确地定义“大范围”的“全纯函数”。

定义 3.1.3. 设 f 为区域 D 上的复变函数，称 f 是**亚纯的**，如果存在 D 内无极限点的极点点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $f\in H(D-\{z_n\}_{n=1}^{\infty})$。

作为 $Riemann$ 可去奇点定理，即定理3.1.1的推论，有

推论 3.1.1 (极点定理). 假设亚纯函数 f 在区域 D 内有孤立奇点 z_0，则 z_0 为**极点**当且仅当 $|f| \to \infty (z \to z_0)$。

因为这里的非零全纯函数 h 仍然具有幂级数表达，记为 $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$，带入等式3.1可得

$$f(z) = (z-z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n$$

整理可得

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + G(z) \tag{3.2}$$

其中 G 为局部非零全纯函数。我们称公式3.2为 $Laurent$ **级数**的特殊形式，记 $P(z) := \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)}$ 为**主要部分**，$G(z)$ 为全纯部分。

对上述函数 f 关于 D 内包含极点 z_0 的可求长简单闭曲线 γ 积分，可得

$$\int_\gamma f = \int_\gamma P = \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

这说明

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz \tag{3.3}$$

我们发现亚纯函数 f 的积分被系数 a_{-1} 唯一决定。这为计算一些“复杂”函数的积分提供了工具，也就是说，我们只需要计算出系数 a_{-1} 的值即可。

定义 3.1.4. 称上述系数 a_1 为亚纯函数 f 在极点 z_0 处的**留数**，记为 $resf_{z_0}f$。

利用等式3.2的信息，我们可以计算 m 阶极点 z_0 处的留数，即

$$resf_{z_0}f = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{(m-1)} (z-z_0)^m f(z) \tag{3.4}$$

特别地，对单极点 (阶数为 1) 有公式

$$resf_{z_0}f = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) \tag{3.5}$$

留数公式　结合以上的讨论，可以得到如下定理:

定理 3.1.3 (留数公式). 设 f 为区域 D 内亚纯函数，其中 $\{z_n\}_{n=1}^N$ 为极点，则有如下公式成立

$$2\pi i \sum_{n=1}^{N} res_{z_n} f = \int_\gamma f \tag{3.6}$$

其中 γ 为包含极点集 $\{z_n\}_{n=1}^N$ 的闭曲线。

利用留数公式，配合公式3.4可以计算如下结果:

1.
$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

2.
$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad 0 < a < 1 \tag{3.7}$$

3.
$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{\cosh \pi x} dx = \frac{1}{\cosh \pi \xi}$$

4.
$$\int_{\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} \frac{\sin \pi a}{\cosh \pi x + \cos \pi a} dx = \frac{2 \sinh 2a\xi}{\sinh 2\pi \xi}$$

本性奇点

到目前为止，我们可以对前两类奇点做一个解释:

1. 可去奇点: 附近有界
2. 极点: 附近**全**无界

然而，本性奇点附近的函数性态是复杂的，例如函数 $e^{1/z}$ 在 0 附近，参见 [6] 的 P73。但本性奇点仍然可以用以下定理刻画:

定理 3.1.4 (Casorati-Weierstrass 定理)**.** 假设函数 f 为刺破区域 $D-\{z_0\}$ 上的全纯函数，且 z_0 为其**本性奇点**，那么刺破区域 $D-\{z_0\}$ 的像 $f(D-\{z_0\})$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上**稠密**。

证明. 利用反证法，假设不稠密。则存在 $w \in \mathbb{C}$ 以及 $\delta > 0$ 使得

$$|f(z) - w| > \delta, \quad \forall z \in D - \{z_0\}$$

于是可以在 $D-\{z_0\}$ 上定义全纯函数

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

它以 $\frac{1}{\delta}$ 为上界。由 *Riemann* 可去奇点定理可知 z_0 为可去奇点，若 $g(z_0) \neq 0$，则 z_0 非奇点，矛盾; 若 $g(z_0) = 0$，则 z_0 为极点，矛盾! □

更进一步的结论是:

定理 3.1.5 (Picard)**.** f 无限次取到任一有限复数，只有至多一个点例外。

3.1.2 扩充复平面上的亚纯函数

下面我们将复平面紧化为 *Riemann* 球面，即引入无穷远点 ∞，因此可以定义无穷远点处的奇点。

1. 称 ∞ 为 f 的**可去奇点**，如果 0 为 $\frac{1}{f}$ 的可去奇点。
2. 称 ∞ 为 f 的**极点**，如果 0 为 $\frac{1}{f}$ 的极点。
3. 称 ∞ 为 f 的**本性奇点**，如果 0 为 $\frac{1}{f}$ 的本性奇点。

援引自 [6] 的 P86-89，一个深刻的结果是:

定理 3.1.6. 扩充复平面上的亚纯函数是有理函数。

3.1.3 *Laurent* 级数

我们已经在公式3.2中初步得到了不同于全纯函数的“级数展开”，源于刺破点 z_0 为函数的极点，下面将这个理论一般化[2]，我们选择“圆环”上的全纯函数。

定理 3.1.7. 设 f 为闭圆环区域 $\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z - z_0| \leq R\}$ 上的全纯函数，则有级数表示为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{3.8}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{其中 } \gamma \text{ 为圆环内任一简单闭曲线}$$

我们称 $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ 为**主要部分**，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ 为**全纯部分**。

证明. 证明利用对区域的 surgery 技术，与 *Cauchy* 积分定理，即定理2.2.4类似。设 $D := \{z : r < |z - z_0| < R\}$，任取半径 a, b 使得

$$r < a < |z - z_0| < b < R$$

利用 surgery 技术，对任意 $z \in D$，我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_b} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

回忆定理2.2.4的证明，我们发现要得到定理中的 a_n，采用的技巧是将形式 $\frac{1}{\zeta - z}$ “破坏”成幂级数的形式。注意到幂级数的公比无非

$$\frac{\zeta - z}{\zeta - z_0}, \quad \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z}$$

---

[2]一些教材将 *Laurent* 级数视作亚纯函数的“幂级数”，并且在亚纯函数大范围结果的讨论中主要使用这类级数，意图与全纯函数的幂级数展开对立，例如 [9, 8, 3]。

两种。而 z 是介于 a,b 之间的点且 ζ 作为积分哑元正好落在 a,b 上，因此上述两个公比中: 若 ζ 取 b，则**左**侧公比蕴含收敛; 若若 ζ 取 a，则**右**侧公比蕴含收敛。

于是为估计 $f(z)$ 的积分表示，对于第一项 $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_b}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$，只要考察

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

而第二项只要考察

$$\frac{\zeta-z_0}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

分别带回原式立即得到所求的 a_n，根据曲线同伦，γ 的选取是任意的。 □

3.2　一般结果与大范围结果

本节中的前 5 个主题参考了 [6, 4], 另外涉及到部分曲线拓扑的内容, 有兴趣的读者可以查阅 [2] 以及整体微分几何教材关于曲线论的部分，这里推荐沈一兵. (2005). 整体微分几何初步. 浙江大学出版社.[3]。最后一个专题参考自 [9, 3]。

3.2.1　辐角公式、卷绕数与曲线拓扑

我们在第一章讨论的复值对数函数实质上是多值的，当时难以清楚地刻画它，利用辐角公式和之后几个全纯函数的几何性质可以直观上刻画这个多值性以及找到它的单值分支。首先我们将 log 视为映射，那么对任意的单叶全纯函数 $f(z)$，有

$$log(f(z))=log|f(z)|+iarg(f(z))$$

这里 $log|f(z)|$ 是一个实值函数，$arg(f(z))$ 表示 $f(z)$ 的辐角。注意到，尽管 $log(f(z))$ 映射可能不是单射，但其切映射 (导函数)$f'(z)/f(z)$ 一定是**单叶的** (因为 f 是单叶函数)，特别地可取 $f(z)=z$，那么 $(logz)'=\frac{1}{z}$。并且沿着闭曲线 γ 的积分

$$\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

可以被解释为变量 z 遍历曲线 γ 时 f 辐角的变化，进一步地，这个变化与曲线 γ 包含的 f 的零点与极点个数有关。

在解释这些现象之前我们回忆一些不同于实变函数的反常结果。首先，log 映射不再有同态性[4]，即

$$log(f_1f_2)=logf_1+logf_2$$

[3]事实上我们这里所谈的卷绕数是一个“外蕴”的拓扑量，它受曲线与原点 O 的位置关系影响，本质上刻画的是曲线向量值函数 (由原点 O 指向曲线上的点的向量) 的旋转次数，与真正的“内蕴的”拓扑量 (曲线的旋转指标) 还是有所区别。

[4]回忆小节2.1.4。

一般不成立。但对其切映射仍然成立，即

$$\frac{\left(\prod_{n=1}^{N} f_n\right)'}{\prod_{n=1}^{N} f_n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n'}{f_n}$$

下面我们单独分析切映射 $\frac{f'(z)}{f(z)}$。若 f 为全纯函数，且有 m 阶零点 z_0，利用2.3.4可以写作

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

其中 $g(z)$ 为局部非零的全纯函数。于是可得

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + G(z) \tag{3.9}$$

其中 $G(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$ 为全纯函数。也就是说: **若函数 f 具有 m 阶零点 z_0，那么 $\frac{f'}{f}$ 具有留数为 m 的单极点 z_0**。对偶地，若若函数 f 具有 m 阶极点 z_0，那么 $\frac{f'}{f}$ 具有留数为 $-m$ 的单极点 z_0，因为

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_0} + H(z) \tag{3.10}$$

总结而言，若 f 为亚纯函数，则 $\frac{f'}{f}$ 在 f 的零点与极点处具有单极点。

回忆例1.5.1，当 $n = -1$ 时，积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}$ 表示闭曲线关于原点 O 的卷绕数，这是因为 $f(z) = z$ 为恒等映射，事实上我们判断的是像曲线 $\Gamma := f(\gamma)$ 的卷绕数。回到公式3.9与公式3.10，若选取绕零点 z_0 的简单闭曲线 γ，那么有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m$$

同理，若绕极点 z_0，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -m$$

我们得到如下定理:

定理 3.2.1 (辐角原理)**.** *假设 f 为区域 D 上的亚纯函数，对 D 内任意简单闭曲线 γ，其包含 f 的零点集 $\{z_n\}_{n=1}^{p}$(计重) 以及极点集 $\{w_n\}_{n=1}^{q}$(计重)，并且 f 在曲线 γ 上无极点与零点，那么*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \#(zeros) - \#(poles) \tag{3.11}$$

其中 $\#(zeros), \#(poles)$ 分别表示计重零点与极点数。

这个定理揭示了深刻的几何含义。现在假设上述的 $\Gamma = f \circ \gamma$ 为 $w-$ 平面 $(w = f(z))$ 上的一条可求长 (未必简单) 闭曲线，回忆

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w} = ind(\Gamma)$$

这说明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'}{f}=ind(\Gamma) \tag{3.12}$$

利用上述定理，我们有

$$ind(\Gamma)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \tag{3.13}$$

这说明 $z-$ 平面上简单闭曲线 γ，在全纯映射 (函数)f 下的像曲线 Γ 的**卷绕数**恰好等于 f 在 γ 内部的 (计重) 零点个数！我们把这个几何含义称为**辐角原理**，更多细节可以参考 [8] 的 P158-161。

注记 3.2.1. 一方面这为考察一些闭曲线的拓扑提供思路，即直接计算全纯映射的零点；另一方面这为考察全纯映射 *(*主要是多项式*)* **零点分布**提供了几何技术，即观察像曲线的旋绕数。

作为辐角定理的应用，我们证明以下三个重要的定理:

1. *Rouche* **定理**: 全纯函数轻微摄动不改变零点数。
2. **开映射定理**: 全纯映射将开集映到开集。
3. **最大模原理**: 紧集上的全纯函数最大值 (模) 出现在边界上。

第一个定理在证明其他问题时是常用的工具，读者不妨利用 *Rouche* 定理证明代数基本定理; 第二个定理刻画了全纯函数 (这里视为映射) 在几何拓扑上深刻的含义，它自动诱导“同胚”; 第三个定理本质上来自于调和函数的性质。

Rouche 定理

定理 3.2.2 (*Rouche* 定理)**.** 设 $f,g\in H(D)$，γ 为 D 中可求长简单闭曲线，γ 内部位于 D 中。如果对 $z\in\gamma$，有不等式

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)| \tag{3.14}$$

那么 f,g 在 γ 内部零点个数一致。

注记 3.2.2. 注意到 $g(z)=f(z)+(g(z)-f(z))$，因此不等式*3.14*说明 γ 上的全纯函数 g 可以分成 ***main part*** 和 ***samll part*** 两部分，其中 ***main part*** 具有与原函数 g 一致的零点个数；换言之，全纯函数去掉一个 ***samll part*** 不改变 γ 内部的零点个数。

证明. 证明带有较强的几何直觉。首先注意到不等式3.14蕴含 f,g 在 γ 上无零点。对其两边同除 $|f|$，有

$$\left|1-\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$$

这说明当 z 在 γ 上变化时，$\frac{g}{f}$ 仅在以原点为圆心，半径严格小于 1 的圆盘上动，因此像曲线 $\frac{g}{f}\circ\gamma$ 的旋绕数为 0，因此 f, g 导致辐角的变化相同，由辐角原理可知零点个数一致。 □

这个定理来自于 [8]，有兴趣的读者可以参考其他教材的证明，例如 [6]。

开映射定理　*Rouche* 作为一个强大的工具，可以证明不少结论，我们试举一例。

定理 3.2.3 (开映射定理)**.** 区域 D 上的全纯映射 f 为开映射。

证明. 设任意 f 的像中的点 w_0，存在 z_0 使得 $f(z_0) = w_0$，只要证明 w_0 为其内点。对充分靠近 w_0 的点 w，构造函数 $g(z) = f(z) - w$，考察

$$g(z) = (f(z) - w_0) + (w_0 - w)$$

选择 $\delta > 0$ 使得 $D_\delta(z_0)$ 落在 D 内且 $f|_{C_\delta(z_0)} \neq w_0$(由零点的孤立性)。于是可以选择 $\epsilon > 0$，使得 $|f|_{C_\delta(z_0)} - w_0| \geq \epsilon$。只要让 $|w_0 - w| < \epsilon$ 即可使用 *Rouche* 定理，于是 $g(z)$ 与 $f(z) - w_0$ 在 $D_\delta(z_0)$ 零点个数一致。而 $f(z) - w_0$ 在 $D_\delta(z_0)$ 内至少有一零点，故存在 z 使得 $w = f(z)$。因此 w_0 为内点。 □

最大模原理　利用开映射定理立即可证最大模原理，换言之，一般的开映射都将最大值向区域边界“挤压”。

定理 3.2.4 (最大模原理)**.** 设 f 为区域 D 上非常数全纯函数，则 $|f|$ 无法取得最大值。

证明. 假设 f 在区域 D 的一个内点 z_0 处取得最大值, 由于 f 为开映射, 故存在 $z \in D$ 使得 $f(z) > f(z_0)$，矛盾! □

以下推论更有用一些:

推论 3.2.1. 设 D 为一区域，其存在紧闭包 $\overline{D}$，若 $f \in C(\overline{D}) \cap H(D)$，那么

$$\sup_{z\in D} |f| \leq \sup_{z\in \overline{D}-D} |f|$$

事实上，f 在边界 ∂D 上取得最大值。

注记 3.2.3. 条件 $\overline{D}$ 为紧集 *(*有界闭集*)* 不可减弱，事实上，对于函数 $F(z) = e^{-iz^2}$ 在无界区域 $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ 上不存在最大值，参见 *[6]* 的 *P92-93*。

Fourier **级数、调和函数的平均值定理**　回忆 Stein, E. M. , & Shakarchi, R. . (2003). Fourier Analysis: An Introduction. 世界图书出版公司北京公司. 中 *Fourier* 级数的展开式

$$f(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{in\theta}$$

其中

$$a_n=\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-2\pi inx/2\pi}dx,\quad n\in\mathbb{Z}$$

注意到这里的 f 是圆周 S^1[5]上的函数，因此只依赖于一个变量 θ(模长为 1)。

那么全纯函数的 *Fourier* 展开与幂级数展开之间有什么联系？以下定理展示了这种关系。

定理 3.2.5. 圆盘 $D_R(z_0)$ 上的全纯函数 f 的幂级数系数可以写作

$$a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta,\quad n\in N,0<r<R \tag{3.15}$$

此外，

$$0=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

将 $z=re^{i\theta}$ 带入幂级数展开即可。

注记 3.2.4. 从上述定理可以发现,从 *Fourier* 分析角度看全纯函数,其负项的 *Fourier* 展开全部为零，正项的 *Fourier* 系数极为幂级数系数。

注意到 $a_0=f(z_0)$，因此我们得到以下事实:

定理 3.2.6 (平均值性质)**.** 设 f 为圆盘 $D_R(z_0)$ 上的全纯函数，那么

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta}),\quad 0<r<R \tag{3.16}$$

注意到实部为调和函数，有

推论 3.2.2.

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(z_0+re^{i\theta}),\quad 0<r<R \tag{3.17}$$

事实上推论3.2.2的结果不是偶然，对于一般的调和函数仍然具有平均值公式。这里我们不加证明地援引几例，设 u 为 (高维) 有界区域 Ω 上的调和函数，则有:

---

[5]回忆我们第一章中通过作商紧化复平面。

1. 平均值性质 (平均值性质等价地刻画了调和函数):

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y$$

   或者

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy$$

   其中 ω_n 表示 n 维球面的体积，$B_r(x)$ 表示以 x 为球心 r 为半径的 n 维球面。利用变量替换可以有另一种写法，参见 [1]。

2. 最大模原理: 调和函数 u 的最大值在边界 $\partial\Omega$ 上取得。

3. $Weyl$ 定理: 对任意函数 $\varphi \in C_0^2(\Omega)$，都有

$$\int_\Omega u \Delta\varphi = 0$$

   反过来也成立，同样等价地刻画了调和函数。

更多关于调和函数的性质可以参考 [8] 的倒数第二章和 [1]。

3.2.2　一般结果补注

至此，$Cauchy$ 积分理论与 $Weierstrass$ 理论的局部与大范围结果已经叙述完毕，关于复变函数理论一些额外的选题放在这一小节中留作参照。第一个重要的结果是 $Pompeiu$ 公式，它刻画了非全纯时复变函数的积分表达，可以认为 $Cauchy$ 积分公式是其特殊形式，参见 [9] 的 P33-35。

定理 3.2.7 ($Pompeiu$ 公式)**.** 设复变函数 $f(z)$ 在区域 D 上实可微，于是

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}$$

第四章　共形映射与 $Riemann$ 几何理论

4.1　双全纯映射

4.1.1　双全纯映射与分式线性变换

与前三章不同，本章的结果大部分是“整体的”，我们倾向于称全纯函数为映射。本章的叙述的最终目标和动机是证明:

给定复平面 $\mathbb{C}$ 的两个开子集 U, V，它们之间存在全纯的双射。

要解决这个问题可以先考虑一些特殊的集合，例如单位开圆盘 $\mathbb{D}$，倘若能够证明任一复平面的开子集 Ω 与 $\mathbb{D}$ 存在全纯的双射，那么以上问题被彻底解决。一个自然的问题是: 开子集 Ω 应该满足什么样的条件，能够与 $\mathbb{D}$ 建立全纯的双射?

在第一章的讨论中我们已经知道全纯映射局部是保角的，换言之，是共形变换。

定义 4.1.1. 称复平面 $\mathbb{C}$ 的开子集 U, V 间双射的全纯映射 $f : U \to V$ 是**共形映射**或**双全纯映射**。此时，称 U, V 是**共形等价的**或**双全纯的**。

回忆数学分析 (或微分流形) 中的逆映射定理 (参见 [7])，简单而言，就是切映射非退化的光滑映射诱导局部的光滑同胚。在全纯映射理论中也有相应的结果，但是我们要求全纯映射本身是**单叶的**。

命题 4.1.1. *如果 $f : U \to V$ 是单叶全纯映射，那么切映射非退化，即 $f'(z) \neq 0, \forall z \in U$。进一步，映射 f 存在全纯的逆映射 f^{-1}。*

证明. 第一句话用反证法。若存在 $z_0 \in U$ 使得 $f'(z_0) = 0$，那么对充分靠近 z_0 的 z，由导数的定义有

$$f(z) - f(z_0) = a(z - z_0)^m + R(z - z_0)$$

其中 $a \neq 0, m \geq 0$ 且 $R(z - z_0)$ 为 $z - z_0$ 的至少 $m + 1$ 阶无穷小。对充分小的 w，我们有

$$f(z) - f(z_0) - w = (a(z - z_0)^m - w) + G(z)$$

使得在以 z_0 为圆心半径充分小的圆周上 $|a(z-z_0)^m - w| > |G(z)|$，$a(z-z_0)^m - w$ 在圆周内至少有两个零点。由 *Rouche* 定理可知 $f(z) - f(z_0) - w$ 在该圆周内也至少有两个零点。注意到 z_0 的充分小邻域内，任意 $z \neq z_0$ 都有 $f'(z) \neq 0$，这蕴含充分小邻域内 $f(z) - f(z_0) - w$ 无重零点，这与 f 是单射矛盾！

由于 f 是单射，记 $g = f^{-1}$ 为 f 值域 V 内的逆映射。对任意 $w_0 \in V$，取充分靠近 w_0 的 $w \in V$，记 $w_0 = f(z_0), w = f(z)$，于是有

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w - w_0}{g(z) - g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$

由于 $f'(z_0) \neq 0$，令 $z \to z_0$，可知 g 是全纯的，并且有 $g'(w_0) = \frac{1}{f'(g(w_0))}$。 □

注记 4.1.1. 利用上述命题，我们证明两个开子集 U, V 全纯等价，只需要证明存在一个全纯映射 $U \to V$ 即可。

事实上我们这里定义的概念“共形映射”在其他的教材中是如下解释的:

称全纯映射 $f : U \to V$ 是**共形的**，如果 $f'(z) \neq 0, \forall z \in U$

注意到这个定义并不能大范围地保证同胚，具体而言，不能保证单射。我们回忆微分流形中的子流形浸入问题，事实上仅依靠切映射的非退化性不能保证整个子流形的浸入是单射，它仍会有自交点; 回到复分析中，我们同样能够举出反例，即 $f(z) = z^2$，它在 $\mathbb{C}^*$ 上切映射非退化，但显然不是单射。再回忆数学分析 (或微分流形)，我们注意到局部地浸入一定是嵌入，即逆映射定理，它保证了切映射非退化的光滑映射在局部一定是光滑同胚; 而在复分析理论中同样有类似的定理，我们姑且称它为“全纯逆映射定理”，即切映射非退化的全纯映射在局部诱导双全纯映射 (或言全纯同胚)，有兴趣的读者可以利用 *Rouche* 定理证明之，参考 [6]P248 的习题 1。

下面我们举一个全纯等价的例子。定义上半平面为 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$。断言: 上半平面 $\mathbb{H}$ 与单位圆盘 $\mathbb{D}$ 能够建立全纯同胚。为此，定义函数

$$F(z) = \frac{i - z}{i + z}, \quad G(w) = i\frac{1 - w}{1 + w} \tag{4.1}$$

定理 4.1.1. 映射 $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ 为共形映射，其逆映射为 $G : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$。

证明. 注意到映射 F, G 显然是全纯的，因此只要说明映射 F 将 $\mathbb{H}$ 打到 $\mathbb{D}$，G 将 $\mathbb{D}$ 打到 $\mathbb{H}$，再验证互为逆映射即可。观察到在上半平面，自变量 z 的取值更靠近 i，因此 $|F| < 1$。要验证第二句话，令 $w = u + iv$，我们有

$$\begin{aligned} ImG(w) &= Re\frac{1 - u - iv}{1 + u + iv} \\ &= Re\frac{(1 - u - iv)(1 + u - iv)}{(1 + u + iv)(1 + u - iv)} \\ &= \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 + u)^2 + v^2} > 0 \end{aligned}$$

验证了第二句话。最后验证它们互为逆映射，考察

$$G(F(z)) = i\frac{1-\frac{i-z}{i+z}}{1+\frac{i-z}{i+z}} = i\frac{\frac{2z}{i+z}}{\frac{2i}{i+z}} = z$$

$F(G(w)) = w$ 是容易的，留给读者。 □

我们来观察全纯映射 F, G 对开子集 $\mathbb{H}, \mathbb{D}$ 边界的作用。注意到映射 F 除了 $-i$ 点以外都是全纯的，因此其在边界 $\mathbb{R}$ 上的作用是连续的，并且边界到 $\pm i$ 的距离一致，因此 $|F(\mathbb{R})| = 1$，即 F 将上半平面的边界 $\mathbb{R}$ 打到单位圆盘的"边界" $S^1 - \{-1\}$ 上。事实上可以写成

$$F(x) = \frac{i-x}{i+x} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

为实数轴 x 赋予参数化 $x = \tan t, (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$。由于

$$\cos 2t = \frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}, \quad \sin 2t = \frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$$

我们有

$$F(x) = e^{i2t}$$

这显式化了上述同胚。

定义 4.1.2. 称具有如下形式的映射为**分式线性变换**:

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \tag{4.2}$$

4.1.2　共形映射的例子

平移、伸缩与旋转

1. 向 h 方向平移 $|h|$ 个单位:

$$z \to z + h, \quad h \in \mathbb{C}$$

2. 逆时针旋转 φ 角:

$$z \to e^{i\varphi} z$$

3. 伸长 c 倍:

$$z \to cz, \quad z \in \mathbb{R}$$

将扇形变成上半平面

$$z \to z^n, \quad S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < argz < \frac{\pi}{n}\} \to \mathbb{H}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

特别地，取 $0 < \alpha < 2\pi$，则有

$$z \to z^\alpha, \quad \mathbb{H} \to S = \{\mathbb{C} : 0 < argz < \alpha\pi\}$$

注意到，这里需要选择 z^α 的主支部分，即

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha\theta}, \quad 0 < \theta < \pi$$

将半圆盘变成 $\frac{1}{4}$ 平面 定义全纯映射 $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$。设 $z = x + iy$，于是有

$$f(z) = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x-iy)(1-x+iy)} = \frac{1-(x^2+y^2)}{(1-x)^2+y^2} + i\frac{2y}{(1-x)^2+y^2}$$

若限制 f 的定义域为 $\{z = x + iy : |z| > 1, y > 0\}$，于是 $Ref(z) > 0, Imf(z) > 0$，因此值域为 $\{w = u + iv : u > 0, v > 0\}$。其逆映射表示为 $g(w) = \frac{w-1}{w+1}$。

对于边界的变化情况，不妨记 $z = e^{i\theta}$，于是

$$f(z) = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}} = \frac{i}{\tan(\theta/2)}$$

注意到 θ 从 0 到 π，$f(\theta)$ 沿着虚轴从 ∞ 到 0。在看实轴，令 $z = x$，于是

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

注意到 x 从 -1 到 1，$f(x)$ 沿实轴从 0 到 $+\infty$。

将上半平面变成带状区域 由于 $logz$ 大范围内不是单值函数，由我们之前对多值函数的讨论，只要割破非正实轴 $(-\infty, 0]$ 就能在 $\mathbb{C}$ 上定义单值的复对数函数。这里我们为了突出几何性态，将定义域再缩小一些，即上半平面 $\mathbb{H}$，它在对数映射下的像为 $log(\mathbb{H}) = \{w = u + iv : u \in \mathbb{R}, 0 < v < \pi\}$，即带状区域。事实上，若令 $z = e^{i\theta}, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$，有

$$logz = logr + i\theta$$

它的逆映射就是指数映射，即 $w \to e^w$。

4.2 *Schwarz* 引理与全纯自同构

4.2.1 *Schwarz* 引理

我们为 *Riemann* 映射定理的证明提供第一个工具。

引理 4.2.1 (*Schwarz* 引理)**.** 设 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为全纯映射，满足 $f(0)=0$，那么

1. $|f(z)|\le|z|,\quad z\in\mathbb{D}$;

2. 若存在 $z_0(\in\mathbb{D})\neq 0$ 使得 $|f(z_0)|=|z_0|$，那么 f 是一个旋转;

3. 有 $|f'(0)|\le 1$，取等号当且仅当 f 是旋转。

证明. 1. 我们先对 f 在 0 附近作幂级数展开，注意到在整个 $\mathbb{D}$ 上是收敛的

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots$$

由于 $f(0)=0$，于是 $a_0=0$，因此 $f(z)/z$ 在 $\mathbb{D}$ 上是全纯的。若 $|z|=r<1$，由于 $|f(z)|\le 1$，我们有

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{1}{r}$$

利用最大模原理，上述不等式对所有 $|z|\le r$ 成立。再令 $r\to 1$ 即可。

2. 注意到 $f(z)/z$ 在内部取到最大值，因而为常数，即 $f(z)=cz$。带入 z_0 不难验证 $c=1$，因此 $c=e^{i\theta}$ 只能为旋转。

3. 最后考察极限

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=f'(0)$$

易知 $|f'(0)|\le 1$，并且若取等号，则 $f(z)/z$ 在 0 处取 1，由最大模原理可知为常数，与 2. 同理。

□

4.2.2　圆盘的全纯自同构群

应用 *Schwarz* 引理，我们可以对圆盘的全纯自同构群做一个刻画。

定义 4.2.1. 称开集 Ω 到自身的共形映射为**自同构**，所有自同构构成的集合在映射复合运算下构成一个群，称为 Ω 的**全纯自同构群**，记为 $Aut(\Omega)$。

下面我们来讨论开圆盘 $\mathbb{D}$ 的全纯自同构群 $Aut(\mathbb{D})$。由 *Schwarz* 引理，我们容易验证旋转 $r_\theta z\to e^{i\theta}z$ 是它的一个全纯自同构。回忆练习2，*Blaschke* 因子是一种共形映射，我们选取 $|w|<1$，于是

$$\psi_w(z)=\frac{w-z}{1-\overline{w}z}$$

是 $\mathbb{D}$ 的全纯自同构。事实上，倘若我们选取边界 $|z|=1$，于是 $z=e^{i\theta}$，那么有

$$\psi_w(e^{i\theta})=\frac{w-e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-\overline{w})}=-e^{-i\theta}\frac{\alpha}{\overline{\alpha}}$$

这里 $\alpha = w - e^{i\theta}$，因此 $|\psi_w(z)| = 1$。由最大模原理，可得 $|\psi_w(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{D}$。最后，我们发现 $\psi^2 := \psi \circ \psi = id$，因此 *Blaschke* 因子是幂等的全纯自同构，并且作为 2 阶群元素。另一个深刻的观察是:

$$\psi_w(0) = w, \quad \psi_w(w) = 0$$

这说明 ψ_w 对换了圆心 O 与点 w，也一定程度上解释了幂等性。而开圆盘的全纯自同构群仅由上述两种变换生成。

定理 4.2.1. 旋转与 *Blaschke* 因子是 $Aut(\mathbb{D})$ 的生成元，即

$$Aut(\mathbb{D}) = < r_\theta, \psi_w | \quad 0 \le \theta < 2\pi, |w| < 1 >$$

换言之，任一 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 的自同构必然形如

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{w - z}{1 - \overline{w} z}$$

证明. 假设 f 为任一开圆盘的全纯自同构，于是存在唯一一点 $w \in \mathbb{D}$ 使得 $f(w) = 0$。现在我们考虑另一个自同构 g，满足 $g = f \circ \psi_w$。那么 $g(0) = 0$，并且由 *Schwarz* 引理可知

$$|g(z)| \le |z|, \quad z \in \mathbb{D}$$

此外还有 $g^{-1}(0) = 0$，再对 g^{-1} 应用 *Schwarz* 引理，可得

$$|g^{-1}(\alpha)| \le |\alpha|, \quad \alpha \in \mathbb{D}$$

注意到 $\alpha = g(z)$，以上不等式其实为

$$|z| \le |g(z)|$$

因此 $|g(z)| = |z|$。这说明 g 是一个旋转，即使 $g = e^{i\theta}$，故 $f(z) = e^{i\theta}\psi_w(z)$。 □

若置 $w = 0$，可以得到以下推论:

推论 4.2.1. $Aut(\mathbb{D})$ 中保持圆心 O 不动的全纯自同构只有旋转。

在定理4.2.1的意义下，倘若我们要讨论单位开圆盘 $\mathbb{D}$ 在全纯自同构下的变化情况，除了旋转就是 *Blaschke* 因子自己; 而由上述讨论我们知道:*Blaschke* 因子从几何上看就是将一个点与另一个点对换，换言之，将一个点**传递**到指定点处。因此，给定单位开圆盘上任意两点 z, w，只要构造自同构 $\psi = \psi_w \circ \psi_z$ 即可将 z 传递到 w。

4.2.3　上半平面的全纯自同构群

回忆我们在定理4.1.1中建立的单位开圆盘到上半平面的双全纯映射 F，下面来得到上半平面的全纯自同构群 $Aut(\mathbb{H})$。事实上只要考察全纯映射

$$\Gamma : Aut(\mathbb{D}) \to Aut(\mathbb{H})$$

回忆群作用的知识，我们只要考察 φ 通过 Γ 的**共轭**作用，即 Γ 视为圆盘自同构 φ 的一个特殊的泛函，于是有

$$\Gamma(\varphi) : F^{-1} \circ \varphi \circ F$$

不难发现 $\Gamma(\varphi)$ 也是一个 $\mathbb{D}$ 上的全纯自同构，并且 $\Gamma^{-1}(\varphi) = F \circ \varphi \circ F^{-1}$。此外，可以验证 Γ 是一个群同态，进而是群同构，因此 $Aut(\mathbb{H})$ 与 $Aut(\mathbb{D})$ 可视为同一个群。

我们通过 F 将圆盘的自同构拉回到上半平面的自同构，于是可以验证 $Aut(\mathbb{H})$ 中的元素都形如以下特殊的线性变换:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \tag{4.3}$$

这里 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 且 $ad - bc = 1$。借用齐次坐标 $z/1$ 将复平面 $\mathbb{C}$ 射影化，不难发现上述变换可以写作

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

利用线性群的知识不难发现上述线性变换全体构成一个 2×2 的**特殊线性群**，即

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

于是给定一个特殊线性群的元素 (矩阵)M，我们可以定义一个分式线性变换

$$f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

注记 4.2.1. 一个细节的观察是，$Aut(\mathbb{H})$ 并不完全与 $SL_2(\mathbb{R})$ 同构。事实上我们发现 f_M 与 f_M 是一致的。因此，需要将 M 与 $-M$ 视为一个元素，在此观点下我们得到了一个商结构，即**射影特殊线性群**，记为 $PSL_2(\mathbb{R})$。这是一个 *Lie* 群，拓扑结构被 $SL_2(\mathbb{R})$ 的结构作商后诱导。

4.3　*Riemann* 映射定理

基本的问题是确定开集 Ω 的条件，以保证 $F : \Omega \to \mathbb{D}$ 全纯映射的存在性。几个简单的观察是:

1. $\Omega \neq \mathbb{C}$。由 *Liouville* 定理可知 $\Omega = \mathbb{C}$ 时 F 必为常数。

2. 从拓扑性质上看，Ω 必须是**单连通**的开子集。

综上所述，我们定义 $\mathbb{C}$ 上的**真开子集** Ω，满足 $\Omega \neq \emptyset, \mathbb{C}$。

定理 4.3.1 (*Riemann* 映射定理)**.** *设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的单连通真开子集，如果 $z_0 \in \Omega$，则存在唯一的共形映射 $F : \Omega \to \mathbb{D}$，满足*

$$F(z_0) = 0, \quad F'(z_0) > 0$$

利用这个定理可以得到:

推论 4.3.1. *$\mathbb{C}$ 上两个单连通的真开子集是全纯等价的。*

注记 4.3.1. *事实上，关于共形映射理论，倘若将视角放到一般的曲面上，一个重要的结果是: 所有的曲面都能够与平面建立共形映射，换言之，所有的曲面是共形的。这是 20 世纪中叶微分几何学的一个重要结果，陈省身先生于 1955 年利用单复变函数论的技术估计了一个积分方程解的存在唯一性，证明了所有曲面上第一基本形式中等温参数网的存在性，最终解决了这个问题，参见 Chern, S. S. (1955). An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. Proceedings of the American Mathematical Society, 6(5), 771-782.。*

回到 *Riemann* 映射定理，我们证明的思路是: 首先穷尽所有单叶的全纯映射 $f : \Omega \to \mathbb{D}$，满足 $f(z_0) = 0$。希望选中其中一个 f 使得其像打满整个 $\mathbb{D}$。而这要求 $|f'(z_0)|$ 尽可能得大，为做到这一点，我们需要从给定的函数列中提取 f 作为极限。以下讨论这个问题。

4.3.1　$Arzela - Ascoli$ 定理与 $Montel$ 定理

定义 4.3.1. 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中开子集，称一族全纯函数 $\mathcal{F}$ 为**正规族**，如果 $\mathcal{F}$ 中每个序列都存在在 Ω 上内闭一致收敛的子列。

实际上，函数族是正规族的证明是依赖于两个性质的结果，即一致有界性与等度连续性。

1. 称函数族 $\mathcal{F}$ 在 Ω 的每个紧子集上是**一致有界的**，即**内闭一致有界**，如果对任意 Ω 的紧子集 K，都存在 $B > 0$ 使得

$$|f(z)| \leq B, \quad \forall z \in K, f \in \mathcal{F}$$

2. 称函数族 $\mathcal{F}$ 在紧集 K 上是**等度连续的**，如果对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，对任意 $z, w \in K, \quad |z - w| < \delta$，使得

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

注记 4.3.2. *必须指出，等度连续性是一个很强的条件。它要求 δ 对自变量 z(一致连续) 以及所有函数 (函数族一致性) 都具有一***致性**。

定理 4.3.2. *设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上全纯函数族，满足 $\mathcal{F}$ 在 Ω 上***内闭一致有界**，*那么*

1. *$\mathcal{F}$ 在 Ω 的每个紧子集上***等度连续**。
2. *$\mathcal{F}$ 是正规族。*

注意到该定理由两部分组成:

1. 第一部分说明 Ω 上全纯函数族 $\mathcal{F}$ 的内闭一致有界性蕴含其在 Ω 的每个紧子集上的等度连续性。证明需要应用 *Cauchy* 积分公式，因此这个事实依赖于全纯函数的性质。
2. 第二部分本质上不依赖于全纯函数的性质，从证明中可以看出:$\mathcal{F}$ 是正规族仅源于 $\mathcal{F}$ 的内闭一致有界性与等度连续性[1]。而在全纯意义下内闭一致有界性蕴含等度连续性，因此全纯的情形我们直接有: 全纯函数族内闭一致有界蕴含正规。这就是著名的 *Montel* **定理**。

定义 4.3.2. 称开子集 Ω 的紧子集序列 $\{K_l\}_{l=1}^{\infty}$ 是一个 **exhaustion**，如果

1. $K_l \subset K_{l+1}, \quad l = 1, 2, \cdots$
2. 对 Ω 的任一紧子集 K，都存在 K_l 使得 $K \subset K_l$。特别地，$\Omega \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l$

引理 4.3.1. *复平面的任一开集 Ω 都存在 exhaustion。*

下面我们来证明定理4.3.2。

证明. 设 K 为 Ω 的紧子集。选择充分小的 $r > 0$ 使得 $D_{3r}(z) \subset \Omega, \forall z \in K$。对 $z, w \in K, |z-w| < r$，再令 γ 为 $D_{2r}(w)$ 的边界曲线。由 *Cauchy* 积分公式可得

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w}\right] d\zeta$$

注意到

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w}\right| = \frac{|z-w|}{|\zeta - z||\zeta - w|} \leq \frac{|z-w|}{r^2}$$

因此

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi r}{r^2} B|z-w|$$

即

$$|f(z) - f(w)| < C|z-w|$$

[1]我们将这个事实称为 *Arzela – Ascoli* **定理**，参见 [8] 的 P270-271。

注意到这里的 C 是一致的，蕴含了等度连续性。

对于第二个结论的证明是经典的，称为**对角线法则**。

Step1. **构造单一紧子集上的子列**: 首先设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为族 $\mathcal{F}$ 中的序列且 K 为 Ω 的紧子集。选择 Ω 中的稠密点列 $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$。由于 $\{f_n\}$ 是一致有界的[2]，于是存在子列 $\{f_{n,1}\} := \{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{3,1}, \cdots\}$ 使得其在 w_1 上取值的常数列 $\{f_{n,1}(w_1)\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的。在 $\{f_{n,1}\}$ 中选取使得 w_2 处取值的常数列收敛的子列 $\{f_{n,2}\}$; 以此类推我们得到收敛的常数列 $f_{n,j}(w_j)$。

Step2. **证明子列一致收敛**: 取 $g_n = f_{n,n}$，称为对角线子列。根据构造，易知 $\{g_n(w_j)\}_{n=1}^{\infty}, \forall j \in \mathbb{N}^+$ 是收敛的。我们断言: 等度连续性蕴含 g_n 在 K 上一致收敛。对任意的 $\epsilon > 0$，利用等度连续性的定义选择 δ。注意到紧集 K 可以被有限开圆盘 $D_\delta(w_1), \cdots, D_\delta(w_J)$ 覆盖。选取充分大的 N，对 $n, m > N$，有

$$|g_n(w_j) - g_m(w_j)| < \epsilon, \quad j = 1, 2, \cdots, J$$

于是，对任意 $z \in K$，必有 $z \in D_\delta(w_j)$，因此

$$|g_n(z) - g_m(z)| \leq |g_n(z) - g_n(z_j)| + |g_n(w_j) - g_m(w_j)| + |g_m(w_j) - g_m(z)| < 3\epsilon$$

这蕴含 g_n 在 K 上一致收敛。这说明可以在每个紧子集 K 上找到 $\{f_n\}$ 的一致收敛子列。

Step3. **构造每个紧子集上一致收敛的子列**: 最后我们再一次使用对角线法则得到一个子列使得对 Ω 上任一紧子集都一致收敛，即在 Ω 上内闭一致收敛。为此我们需要使用 exhaustion 的概念。设 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_l \subset \cdots$ 为 Ω 的一个 exhaustion。选取 $g_{n,1}$ 为 $\{f_n\}$ 在 K_1 上一致收敛的子列; 再从 $\{g_{n,1}\}$ 中选取在 K_2 中一致收敛的子列 $\{g_{n,2}\}$，以此类推得到 $\{g_{n,l}\}$ 在 K_{l+1} 上一致收敛的子列 $\{g_{n,l+1}\}$。最后选取对角线子列 $\{g_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ 即可。 □

4.3.2 *Riemann* 映射定理的证明

我们先引入一个命题。

命题 4.3.1. 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的一个连通开子集，若 $\{f_n\}$ 为 Ω 上单叶的全纯函数序列满足在 Ω 上内闭一致收敛于全纯函数 f，那么 f 要么是单叶的，要么是常函数。

证明. 利用反证法。假设 f 不是单射，因而存在 $a \neq b \in \Omega$ 使得 $f(a) = f(b)$。定义 $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$，由 f_n 是单射得到 g_n 除 a 以外无其余零点，且 g_n 内闭一致收敛于 $g(z) = f(z) - f(a)$。若 g 不恒为 0，由 Ω 的连通性以及 b 为 g 的孤立零点可知

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'}{g}$$

[2]蕴含列 $\{f_n\}$ 在每个 w_j 上取值的常数列存在收敛子列。

其中 γ 为以 b 为圆心的小圆，使得 $g|_\gamma \neq 0$，因此 $\frac{1}{g_n}$ 内闭一致收敛于 $\frac{1}{g}$。于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g_n'}{g_n}\text{内闭一致收敛于}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'}{g}$$

于是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'}{g} = 0$$

矛盾！ □

证明. Step1. **对开子集限制**: 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 上任一单连通真开子集。我们断言 Ω 全纯等价于以原点 O 为圆心的单位开圆盘 $\mathbb{D}$。事实上，选择一个复数 $\alpha \notin \mathbb{D}$，注意到 $z-\alpha|_\Omega \neq 0$。因此我们可以定义一个复对数函数

$$f(z) = log(z-\alpha)$$

利用定理2.1.7可知有指数化表示，即 $e^{f(z)} = z-\alpha$，故 $f(z)$ 是一个单射。选取 $w \in \Omega$，注意到

$$f(z) \neq f(w) + 2\pi i, \quad \forall z \in \Omega$$

否则指数化上式，可知 $f(z) = f(w)$，这与 f 为单射矛盾[3]。考察映射

$$F(z) = \frac{1}{f(z) - (f(w)) + 2\pi i}$$

由于 f 为单射，可知 F 也为单射。因此 $F : \Omega \to F(\Omega)$ 是共形映射。由上述讨论，$F(\Omega)$ 有界。于是可以通过平移与缩放使得 $F : \Omega \to \mathbb{D}$ 是共形映射。

Step2. **构造共形映射**: 由 Step1. 可以假设 Ω 为 $\mathbb{D}$ 内开子集且 $0 \in \Omega$。考察 $\Omega \to \mathbb{D}$(不一定满) 的全体单叶全纯映射构成的函数族 $\mathcal{F}$，满足固定原点 O，即

$$\mathcal{F} := \{f : \Omega \to \mathbb{D} | f(0) = 0, \quad f \text{ 为单叶全纯映射}\}$$

首先注意到 $\mathcal{F}$ 非空 (由于 id 在其中)，并且一致有界。现在我们把问题转向寻找 $f \in \mathcal{F}$ 使得 $|f'(0)|$ 最大。利用 *Cauchy* 不等式，即不等式2.8可知 $|f'(0)|^2$ 一致有界。进而，令

$$s = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$$

我们选择 $\mathcal{F}$ 的一个序列 $\{f_n\}$ 使得 $|f_n'(0)| \to s$。由 *Montel* 定理，即定理4.3.2可知，存在子列在 Ω 上内闭一致地收敛到极限函数 f。由于 $s \geq 1$(因为 id)，且 f 非常值映射，

[3]事实上，我们能断言: 在复平面上 $f(z)$ 严格分离于 $f(w)+2\pi i$。即，存在以 $f(w)+2\pi i$ 为圆心的小圆盘使得其中没有 $f(\Omega)$ 中的任何点。否则存在 Ω 上的点列 $\{z_n\}$ 使得 $f(z_n) \to f(w)+2\pi i$。我们指数化这个关系，由指数函数的连续性可知 $z_n \to w$，而这蕴含 $f(z_n) \to f(w)$，矛盾！

由命题4.3.1可知 f 是单射。并且由极值原理可知 $|f(z)| \leq 1, \forall z \in \Omega$。利用最大模原理可知 $|f(z)| < 1$(由开集性质)。因为连续性，有 $f(0) = 0$，于是 $f \in \mathcal{F}$ 且 $|f'(0)| = s$。

Step3. **证明 f 是满射**: 最后我们需要说明上述构造的 f 是一个共形映射，由于 f 已是单射，故只要验证 f 是满射即可。利用反证法。若不然，可构造 $\mathcal{F}$ 中的函数 g 满足 $g'(0) > s$。事实上，假设存在 $\alpha \in \mathbb{D}$ 使得 $f(z) \neq \alpha$。考察 *Blaschke* 因子

$$\psi_\alpha = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

由于 Ω 单连通，故 $U := (\psi_\alpha \circ f)(\Omega)$ 也单连通。此外由于 $f(z) \neq \alpha$，因而 $0 \notin U$。因此可以定义良性的平方根函数

$$g(w) = e^{\frac{1}{2} log w}$$

进一步，考虑

$$F(z) = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f$$

我们断言 $F \in \mathcal{F}$。显然 $F \in H(\Omega)$, $F(0) = 0$ 并且 F 是单射。定义平方函数 $h(w) = w^2$，一定有

$$f = \psi_\alpha \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}^{-1} \circ F := \Phi \circ F$$

注意到 $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 以及 $\Phi(0) = 0$。由于 h 可知 F 不是单射。

最后利用 *Schwarz* 引理，即引理4.2.1，有 $|\Phi'(0)| < 1$。我们注意到

$$f'(0) = \Phi'(0) F'(0)$$

因此

$$|f'(0)| < |F'(0)|$$

这与 $|f'(0)|$ 在 $\mathcal{F}$ 中的**极大性**矛盾！故 f 是满射。选取适当的旋转，使得 $f'(0) > 0$，最终完成了证明。 □

第五章　额外的选题

本章中的内容我们只作简介，有兴趣的读者可以阅读相关书籍。

5.1　*Dirichlet* 定理与 L 函数简介

本节我们介绍 *Dirichlet* 定理与解决这个问题首创的技术，即 L 函数，内容上参考了 Stein, E. M. , & Shakarchi, R. . (2003). Fourier Analysis: An Introduction. 世界图书出版公司北京公司. 的最后两章，在笔者的微信公众号中有一些描述，可以参考:

Dirichlet 定理证明的启发与思考——解析数论的起源

数论学家 Legendre 曾提出过一个猜想，最终被 Dirichlet 利用解析数论的工具证明，下面我们将这个猜想叙述成定理的形式:

定理 5.1.1 (*Dirichlet* 定理,Dirichlet)**.** *设 q, l 为互素整数，则形如 $qk + l, k \in \mathbb{Z}$ 的数中有无限个素数。*

从历史上看，Dirichlet 关于猜想的证明思路上来源于 Euler 的工作，即 *Euler* 乘积公式:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\text{为素数}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \tag{5.1}$$

这个公式建立了函数与素数序列的本质联系，稍加修改就能导出现代解析数论的基本研究对象——L **函数**。如我们上文所言，提出 *Dirichlet* 定理作为猜想的第一个数学家是 Legendre(所以我在小标题中称这是 "*Legendre* 猜想")，他的原始思想是利用这个定理证明二次互反律；但是第一个证明后者的数学家是 Gauss，他没有过分重视二次互反律与 "*Legendre* 猜想" 的联系并且在之后给出互反律许多不同的证明，从这里我们也能预测 *Dirichlet* 定理联系了数论不同细分邻域。最后，伟大的 Riemann 把 *zeta* 函数推广到复平面 (我们已经看到)，并且指出这个函数的 non-vanishing 问题在素数分布中的核心地位，为后来数学家证明素数定理铺垫了引导性的工作。

我们从一个古老的问题出发，介绍不同处理数论问题的方法。

定理 5.1.2 (素数无限猜想)**.** *素数有无穷多个。*

两千年前 Euclid 就证明了这个猜想。证明的方法简洁而有力，但不能称为“完美”(因为对类似问题有一定局限性)。

证明. 思路是假定素数有穷，不妨假设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 那么多个，于是

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

必为合数，但其没有素因子，矛盾！ □

Eucild 方法无疑解决了这个问题，但倘若我们进一步发问：

定理 5.1.3. 奇素数 $mod \quad 4$ 意义下被分成两类——$4k+1, 4k+3 (k \in \mathbb{Z})$，这两类中的素数各自都有无限个。

这其实是 *Dirichlet* 定理的特殊情形，但 Euclid 方法只能解决 $4k+3$ 型的问题，只要类似构造

$$N = 4p_1 p_2 \cdots p)n + 3$$

并且注意到的 $4k+1$ 两个数相乘保持结构即可；但对 $N = 4p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ 失效 (读者自行尝试)！这宣告了利用古典数论技术解决这个猜想的失败。于是我们将视角拉回到最先提出的 *Euler* 乘积公式。

我们对公式5.1的两边取对数，可以得到如下估计

$$\sum_p \frac{1}{p^s} + O(1) = log\zeta(s)$$

这直接蕴含

命题 5.1.1. 级数 $\sum_p \frac{1}{p^s}$ 发散。

进而素数有无限个。

注记 5.1.1. 不难发现，*Euler* 乘积公式在解决一系列问题上比 *Euclid* 方法更具优势，同时，可以通过修正 *Euler* 乘积公式来创造新的工具，它更富有柔性。这时注意到公式本身确实只能用于“素数无限”的论证，无法解决“$4k+1$ 型素数无限”的问题，这体现了原始工具的局限性，启发我们修正这个工具，它的柔性就体现在这里：修正是容易想到的 (读者不妨试一试)。

类比 Euler 的原始思想，只要证明：

命题 5.1.2. 级数 $\sum_{p\equiv 1 (mod 4)} \frac{1}{p^s}$ 发散。

蕴含以上小问题成立。

我们构造一个特征函数:

$$\chi(n)=\begin{cases}0 & =\text{当 } n \text{ 为偶数}\\ 1 & =\text{当 } n=4k+1\\ -1 & =\text{当 } n=4k+3\end{cases} \tag{5.2}$$

为此我们定义 L 函数为

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} \tag{5.3}$$

进而

$$logL(s,\chi)=\sum_{p\equiv 1}\frac{1}{p^s}-\sum_{p\equiv 3}\frac{1}{p^s}+O(1) \tag{5.4}$$

容易通过以上级数的敛散性解决上述小问题，这里就不赘述了。

我们回到一般形式的 *Dirichlet* 定理，目前已经可以断定，要解决这个问题需要进一步修正先前定义的 L 函数，得到一个一般化的结果。为此我们需要利用有限 *Abel* 群的复表示以及其上的 *Fourier* 变换来得到特征函数 χ，具体可以参见 Stein, E. M. , & Shakarchi, R. . (2003). Fourier Analysis: An Introduction. 世界图书出版公司北京公司. 利用一般化的特征函数可以定义一般的 L 函数，使得其能够解决任意形式的素数问题。但遗憾的是，这里我们得到的 L 函数一般都是复变函数，取对数尝试估计时就会碰到复对数函数的情形，事实上我们在复分析中能够彻底地严格讨论这件事情，篇幅原因这里不再赘述。

5.2 整函数的性态

本节中主要讨论全局范围下的全纯函数性态，即**整函数**，我们主要关心如下三个问题:

1. 这类函数的零点情况如何？我们将会看到一个充要条件: 若 $\{z_n\}$ 为 $\mathbb{C}$ 上没有极限点的点列, 那么存在以这个点列为零点的整函数。事实上这个现象的猜测来自于 $\sin \pi z$ 函数的 *Euler* 乘积公式的启发，回忆 [6] 的 P142-144; 谢惠民. (2005). 数学分析习题课讲义. 下册. 高等教育出版社. 的 P31-32。我们将得到一个更一般化的乘积公式，即 *Weierstrass* **无穷乘积公式**[1]。

2. 这类函数是如何增长的？在分析中我们绕不开所谓**阶**的概念，因此这里会引入整函数的阶。回忆代数基本定理，即推论2.3.1，可以发现多项式的次数与其零点个数是一致的。这是一个值得留意的观察！事实上，我们能够断言: 整函数的阶约**高**，所含零点个数越**多**。为此我们将叙述 *Jesen* 公式，它蕴含了圆盘上函数零点个数与函数在圆周上对数均值之间的深刻联系。

3. 这类函数多大程度上被其零点确定？我们能够证明如果整函数具有有限阶的增长速度，那么这个这个整函数可以被它的零点 (乘上一个因子) 所确定，即 *Hadamard* 因子分解定理。

Jensen **公式**　首先我们叙述这个重要的公式。

定理 5.2.1. *设 Ω 为包含圆盘 D_R 闭包的开集。令 f 为其上全纯函数，满足 $f(0) \neq 0$ 且在圆周 C_R 上恒不为零。如果 $z_1, \cdots, z_N$(计重) 为其在圆盘内的零点，那么*

$$log|f(0)| = \sum_{n=1}^{N} log\left(\frac{|z_n|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} log|f(Re^{i\theta})|d\theta \tag{5.5}$$

为了刻画上述公式与函数零点个数的关系，我们记 $\#_f(r)$ 为函数 f 在圆盘 D_r 内的零点个数。于是我们有引理

引理 5.2.1.

$$\int_0^R \#_f(r)\frac{dr}{r} = \sum_{n=1}^{N}\left|\frac{R}{z_n}\right|$$

利用这个公式，我们可以将等式5.5改写为

$$\int_0^R \#_f(r)\frac{dr}{r} = \int_0^{2\pi} log|f(Re^{i\theta})|d\theta - log|f(0)| \tag{5.6}$$

观察这个公式，可以发现: 范围越广，零点个数越多; 函数增长越快，原点 O 处值越小，零点越多。

---

[1]事实上我们在数学分析中早已见到了实数版本的形式，参见谢惠民. (2005). 数学分析习题课讲义. 下册. 高等教育出版社. 的 P28-34。

有限阶整函数　这里我们需要引入阶的概念。

定义 5.2.1. 设 f 为整函数。如果存在正数 ρ 以及常数 $A, B > 0$ 使得

$$|f(z)| \leq Aexp(B|z|^{\rho})$$

则称函数 f 具有 $\leq \rho$ 的增长阶，记 ρ_f 为其增长的**阶**，其中

$$\rho_f = \inf \rho$$

定理 5.2.2. *设整函数 f 具有 $\leq \rho$ 阶的增长速度，那么*

1. *对常数 C 以及充分大的 r，有 $\#_f(r) \leq Cr^{\rho}$;*

2. *若 $z_1, z_2, \cdots$ 为 f 的零点，且 $z_k \neq 0$。那么对任意 $s > \rho$ 都有*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^s} < \infty$$

$Weierstrass$ **无穷乘积**　回忆无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$$

与级数

$$\sum |a_n|$$

之间的敛散性关系。参见 [6] 的 P140-142; 谢惠民. (2005). 数学分析习题课讲义. 下册. 高等教育出版社. 的 P28-34。我们有

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{5.7}$$

受等式5.7的启发，记

$$E_0 = 1 - z, \quad E_k = (1 - z)^{z + z^2/2 + \cdots + z^k/k}, k \geq 1 \tag{5.8}$$

为**典范因子**。于是可以定义 $Weierstrass$ **无穷乘积**为

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/a_n) \tag{5.9}$$

$Hadamard$ **定理**　最后我们叙述 $Hadamard$ 因子分解定理:

定理 5.2.3 ($Hadamard$ 因子分解定理)**.** *设 f 为整函数且具有 ρ_0 的增长阶。其中 ρ_0 满足 $k \leq \rho_0 < k + 1, k \in \mathbb{Z}$。如果 $z_1, z_2, \cdots$ 为 f 的零点，那么*

$$f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_k(z/a_n)$$

其中 $P(z)$ 是小于等于 k 阶的多项式，m 是函数 f 在 $z = 0$ 点的零点阶数。

5.3 多复变函数与复流形简介

[2] 我们在前面章节讨论的都是单复变函数的全纯函数的问题，事实上这套体系在 20 世纪以后逐渐走向成熟。于是我们考虑从单复变的问题中开发出一个更一般的领域，即多变量的复变函数问题。这将引发一个自然的问题: 当复变量增加到两个及以上时，所谓的多复变全纯函数是否保持原先全纯函数的良好性质? 1906 年 Hartogs 发现在 n 个复变量的空间中存在一种区域，这种区域中的每一个全纯函数都可以解析延拓到比它更大的区域上去，这在单复变函数论中是不可能的[3]，我们将这种现象称为 *Hartogs* 现象。由此立即可得，多复变函数的零点不是孤立的。由此可见多复变函数具有与单复变截然不同的性质，以至其逐渐成为现代数学研究的主流方向之一。

我们用 $\mathbb{C}^n$ 表示 n 个坐标都是复数的 n 维向量的集合，即

$$\mathbb{C}^n := \{z = (z_1, \cdots, z_n) | z_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

将 $\mathbb{C}^n$ 视为 $\mathbb{R}^{2n}$，那么加法与数乘都是自然定义的，同理模长定义为

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

$\mathbb{C}^n$ 上两类有界区域我们要留意: 以 a 为中心，r 为半径的**多圆柱**和以 a 为中心 r 为半径的**球**。它们分别是

$$P(a, r) := \{z || z_i - a_i| < r_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n\}$$

$$B(a, r) := \{z | \sum_{i=1}^{n} |z_i - a_i|^2 < r^2\}$$

特别地，取 $a = 0, r = 1$，我们有**单位多圆柱**，记为 U^n；与**单位球**，记为 B^n。

注记 5.3.1. *必须指出的是:Riemann 映射定理对多复变函数不成立，例如 Poincare 定理:U^n 与 B^n 之间不存在双全纯映射。*

复流形 下面我们介绍复流形，有兴趣的读者可以参考几何学大师陈省身先生的著作 Chern,S.S. (1979). Complex manifolds without potential theory.。

回忆微分流形 (参见 [7])，我们要定义一个流形结构首先需要带有 “良好” 拓扑结构的集合，使得它成为一个拓扑流形，但是不同的是我们需要将流形的坐标卡与 $\mathbb{C}^n$ 的开集发生同胚。

定义 5.3.1. 称一个 *Hausdorff* 空间 M^m 是一个**复流形**，如果其一个覆盖坐标卡中的每一个坐标邻域都同胚于 $\mathbb{C}^m$ 的一个开集，并且每两个坐标邻域间的转移函数是全纯的。

[2]笔者对多复变函数理论了解不多，如有错误请指出。

[3]事实上复平面上任何单连通开集都存在一个不能解析延拓到这个开集之外的全纯函数，这样的开集称为**全纯域**。

附录

复数的另外一些有趣性质

复数两种表示的说明　我们对第一章中复数的表示多说几句，注意到复数有两种刻画，分别是坐标刻画 $z = a + bi$ 和极坐标刻画 $z = re^{i\theta}$。事实上这两种刻画在大部分情况下是等价的，我们有微分同胚 $\sigma : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$，其中

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{5.10}$$

并且可知其 $Jacobian$ 行列式为 r。

复数的矩阵表示　我们曾在引入复数的时候确定了它的代数结构,即 $\mathbb{R}-$ 交换代数,下面通过矩阵子代数的方式从另一角度刻画这个结构。记 $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$，容易验证其构成 $\mathbb{R}$ 上的二维交换代数，构造映射

$$\varphi : \mathbb{C} \to H$$

满足

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

这显然是一个代数同构，即 $\mathbb{C} \cong H$。利用第一章中的断言可知 H 作为 2×2 矩阵代数的子代数，其结构是唯一确定的。

复数开平方　了解到复幂函数一般不是单叶函数，因此其逆映射一般是多值函数，参见 [9] 的 P56-59 和 62-65。事实上对复数开平方足见丰富的性质，这里我们稍加阐述，具体可以参考 [3] 的 P3-4，以及 [4]。首先注意到

$$(x + yi)^2 = a + bi$$

对比上式的实、虚部，我们有

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \tag{5.11}$$

于是只要从上式中解出 x, y 即可，一般来说二次的方程会有多根的情况，因此我们需要小心处理，观察到

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = a^2 + b^2 \tag{5.12}$$

从上式中我们可以得到许多丰富的数论结果，事实上这可以得到无穷多对**勾股数**。回到复数上，我们得到关于平方的“线性方程组”

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) \\ y^2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 + b^2}) \end{cases}$$

最后注意到复数 $x + yi$ 的实、虚部 x, y 之积为 $\frac{b}{2}$，因此 b 刻画了 x, y 的符号，因此有一般的表达式，即 $b \neq 0$ 时

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right) \tag{5.13}$$

$Cauchy - Riemann$ 方程的另外两种推导

我们在第一章中通过引入微分算子的方式推导了 $Cauchy - Riemann$ 方程，它分别有复与实两种形式。下面通过另外两种不同的方式推导这个方程，为此我们断言:

1. 从分析上看，$Cauchy - Riemann$ 方程来自于复变函数完善复可微性的“无奈之举”；或者视为刻画实可微与复可微差距的一个量 (见公式1.8)。

2. 从代数上看，$Cauchy - Riemann$ 方程来自于复数域 $\mathbb{C}$ 本身的代数结构。

3. 事实上从更进一步的观点看,我们将在偏微分方程和调和分析理论中看到:$Cauchy - Riemann$ 方程是一对共轭调和函数组合的结果 (见公式1.13)。

复可微的定义　回忆第一章中对复可微的定义 (见公式1.6)，注意到增量 $\overline{\Delta z}$ 可以从不同方向趋向 z_0。特别地，我们选取从实轴与虚轴两个方向 (参见 [3] 的 P24-25)。于是有

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

以及

$$f' = \lim_{k\to 0}\frac{f(z+ik)-f(z)}{ik} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

对比两式立即得到 $Cauchy - Riemann$ 方程。

复数域 $\mathbb{C}$ 的代数结构　将 f 视为双变量的向量值函数，即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

利用复可微的定义可知

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \circ(z-z_0)$$

由之前的讨论，我们知道 $\mathbb{C} \cong H$，利用反对称性立即得到 $Cauchy - Riemann$ 方程。

参考文献

[1] Qing Han and Fanghua Lin. *Elliptic partial differential equations*, volume 1. American Mathematical Soc., 2011.

[2] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* 清华大学出版社有限公司, 2005.

[3] D Martin and LV Ahlfors. *Complex analysis.* McGraw-Hill, New York, 1966.

[4] Tristan Needham. 复分析: 可视化方法, 2009.

[5] Walter Rudin et al. *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-hill New York, 1964.

[6] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2. Princeton University Press, 2010.

[7] Frankw. Warner and 沃纳. 可微流形和李群基础. 可微流形和李群基础, 2004.

[8] 史济怀 and 刘太顺. 复变函数. 中国科学技术大学出版社, 1998.

[9] 龚$\boxed{\text{F}}$. 简明复分析. 中国科学技术大学出版社, 2009.