基础拓扑

车倪逸、钱振烨、沈添奕

2024 年 7 月 1 日

目录

1 拓扑空间与连续映射

1.1 拓扑与拓扑空间

点集拓扑 我们对拓扑的定义始于数学分析中对连续映射的观察，而定义连续的关键是**开集**，采用集合论的语言.

定义 1.1. 设 X 为一非空集合，其子集族 τ 称为 X 的一个**拓扑**，如果

1. $X, \emptyset \in \tau$;
2. 对 $A_i \in \tau, i \in I$，都有 $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$;
3. 若 $A, B \in \tau$，则 $A \cap B \in \tau$.

称 (X, τ) 为一个**拓扑空间**，τ 中元素称为**开集**.

注记 1.1. 其中 *3.* 等价于"对有限交封闭".

例子 1.1. 典型的拓扑有如下几例:

1. $\{2^X\}$ 称为**离散拓扑**；$\{X, \emptyset\}$ 称为**平凡拓扑**.
2. 设 X 为无限集，定义 $\tau_f := \{A^c | A$ 为 X 中有限子集$\} \cup \{\emptyset\}$，称为**余有限拓扑**.
3. 设 X 为不可数集，定义 $\tau_c := \{A^c | A$ 为 X 中可数子集$\} \cup \{\emptyset\}$，称为**余可数拓扑**.
4. 设 $X = \mathbb{R}^n$，定义 $\tau_e := \{U | U$ 为 X 中开集之并$\}$，称为**欧式拓扑**，并记 $\mathbf{E}^n := (\mathbb{R}^n, \tau_e)$

我们说集合 X 上两个拓扑 τ_1, τ_2，若 $\tau_1 \subset \tau_2$，则称 τ_2 比 τ_1 **精细**. 上述例子中取 $X = \mathbb{R}$，于是 $\tau_f \subset \tau_c, \tau_e$，而 τ_c 与 τ_e 不可比大小.

度量拓扑 一个重要的拓扑是度量拓扑. 事实上我们往后处理的大部分情形依赖于度量. 集合 X 上的一个度量指映射 $d : X \times X \to \mathbb{R}$，满足

1. 正定性：$d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x, y \in X$;
2. 对称性：$d(x, y) = d(y, x)$;
3. 三角不等式：$d(x, z) \leq d(d, y) + d(y, z)$.

称 (X, d) 为一个**度量空间**. 最典型的度量空间是欧式空间 $(\mathbb{R}^n, d)$.

我们断言度量诱导了一个拓扑，称为**度量拓扑**，记为 τ_d，其中开集定义为 $\epsilon-$ 球之并. 所谓 $\epsilon-$ 球指的是

$$B_\epsilon(x_0) : \{x \in X | d(x, x_0) < \epsilon\}$$

证明可以参考 [3] 的 P13-15.

基本概念　我们利用开集来定义以下拓扑学的基本概念:

1. **闭集**: 称 A 为一个**闭集**，如果 A^c 是开集.

2. **邻域**、**内点**、**内部**: 对 X 的子集 A 以及 $x \in A$，称 A 为 x 的一个**邻域**，如果存在 X 的开集 U 使得 $x \in U \in A$. 称 x 为 A 的**内点**，将 A 所有内点的集合称为 A 的**内部**，记为 $Int(A)$.

3. **聚点**、**导集**、**闭包**: 对 X 的子集 A 以及 $x \in X$，称 x 为 A 的**聚点**，如果对 x 的任一邻域 U 有 $(U - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.$A$ 所有聚点的集合称为**导集**，记为 A'，且称 $\overline{A} := A \cup A'$ 为**闭包**.

回忆开集的定义，注意到闭集是开集的对偶，自然有相对的性质:

1. $X, \emptyset$ 是闭集;

2. 任意多闭集之交是闭集;

3. 有限闭集之并是闭集.

注记 1.2. *相对地，可以利用闭集来定义一个拓扑，例如 Zariski 拓扑，参见 [1].*

容易看出，集合的内部与闭包是一对矛盾，显然有 $Int(A) = (\overline{A^c})^c$. 在性质上是对偶的，我们有以下命题:

命题 1.1. *设 A 为 X 的子集.*

1. *若 $A \subset B$，则 $Int(A) \subset Int(B)$.*

2. *$\bigcup_{U \subset A} U = Int(A)$，其中 U 为开集. 即 $Int(A)$ 为 A 中最大的开集.*

3. *$A = Int(A) \Longleftrightarrow A$ 为开集.*

4. *$Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.*

5. *$Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$.*

同理可以得到闭包的以上 5 条性质.

必须指出，与欧式空间相比聚点在一般的拓扑空间中是反直觉的.

例子 1.2. 令 $X = \{a, b, c\}$，$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$. 易知 b, c 为 $\{a\}$ 的聚点，但 a 不是 $\{a\}$ 自身的聚点.

称拓扑空间 X 的子集 A 是**稠密的**，如果 $\overline{A} = X$. 若 X 有可数的稠密子集，则称 X 是**可分的**.

例子 1.3. 令 $X=\mathbb{R}$，为其赋予不同的拓扑：

1. τ_e，可分性是显然的，取 $A=\mathbb{Q}$.
2. τ_f，可分，事实上任一无限子集是稠密的.
3. τ_c，不可分.

注记 1.3. 在一般的拓扑空间中，我们不再关心序列及其敛散性，因为序列的收敛性质在一般拓扑空间中是反常的：

1. 序列可能收敛到多个点. 例如 $(\mathbb{R},\tau_f)$ 中取两两不同的序列 $\{x_n\}$，可以收敛到 $\mathbb{R}$ 的任一值[1].

2. 聚点可能不存在向其收敛的序列. 例如 $(\mathbb{R},\tau_c)$ 中取其不可数真子集 A，显然 $\overline{A}=\mathbb{R}$，利用[2]

$$(\mathbb{R},\tau_c)\text{ 中序列 } x_n\to x \text{ 当且仅当几乎所有 } x_n=x$$

可知不存在趋向 $x(\notin A)$ 的 A 中的序列.

子空间拓扑　下面考察拓扑的子结构.

定义 1.2. 设 A 为拓扑空间 (X,τ) 的一个非空子集. 规定 A 的子集族

$$\tau_A:=\{U\cap A|U\in\tau\}$$

为 A 上的一个拓扑 (显然满足公理). 称为 τ 诱导的 A 上的**子空间拓扑**. 称 (A,τ_A) 为 (X,τ) 的**拓扑子空间**.

以后，对拓扑空间的子集都视为拓扑 (子) 空间，并且不难发现子空间拓扑是“遗传的”，例如 $B\subset A\subset X$，那么有 $(\tau_A)_B=\tau_B$. 同样地，对度量空间 (X,d) 的子集 A 而言，可以证明 $(A,(\tau_d)_A)=(A,T(d|_A))$.

注记 1.4. 在子空间意义下，开集及其导出的概念是**相对**的概念，例如 $(0,1)$ 是 $\mathbb{R}$ 的开集但不是 $\mathbb{R}^2$ 的开集. 因此在说明开集前需要先指定拓扑.

然而，在一些具体的情况下开集概念是可以“遗传的”.

命题 1.2. 设 X 为拓扑空间，$B\subset A\subset X$，于是有

1. 若 B 为 X 的开 (闭) 集，则 B 也为 A 的开 (闭) 集.

2. 若 A 为 X 的开 (闭) 集且 B 为 A 的开 (闭) 集，则 B 为 X 的开 (闭) 集.

证明参见 [3] 的 P19.

---

[1]这再次验证了上例中的 2..

[2]参见 [3]P21 的习题 13.

1.2 连续映射与同胚

连续映射 有了开集的概念，可以定义连续映射.

定义 1.3. 设 X, Y 为拓扑空间，$f: X \to Y$ 为一映射，称 f 在 X 上**连续**，如果任一开集 $V \subset Y$ 都有 $f^{-1}(V)$ 为开集.

简单而言，连续就是“开集的原像是开集，闭集的原像是闭集”. 连续映射反映了拓扑的“柔性”，显然离散拓扑与平凡拓扑为定义域的映射都是连续的.

注记 1.5. 然而，在一般拓扑空间中，序列的收敛性质不能刻画连续性，即当任意 $x_n \to x$ 时有 $f(x_n) \to f(x)$，不能蕴含 f 连续. 例如构造单射 $f: (X, \tau_c) \to (Y, 2^Y)$，注意到 $x_n = x$(对充分大的 n) $\Longleftrightarrow x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x)$ 推出 f 在 x 点不连续，因为开集 $\{f(x)\}$ 的原像 $\{x\}$ 是闭集.

例子 1.4. 一些常用的映射是连续的.

1. 恒等映射 $\mathbf{1}_X : X \to X$.
2. 含入映射 $i : A \to X(A \subset X)$，满足 $i(a) = a, \forall a \in A$
3. 常值映射 $c : X \to Y$，满足 $c(X) = y_0 \in Y$.

覆盖 覆盖是考虑拓扑“分块”的思想方法，与紧致性配合时有重要的刻画.

定义 1.4. 称拓扑空间 X 的子集族 τ 是一个**覆盖**，如果

$$\bigcup_{T \in \tau} T = X$$

即对任意 $x \in X$，都存在 $T \in \tau$ 使得 $x \in T$. 若 $|\tau|$ 有限，称为**有限覆盖**. 称覆盖 τ 是**局部有限的**，如果对任意 $x \in X$，存在邻域只与 τ 中有限个成员相交. 称覆盖 τ' 为 τ 的**加细**，如果对任意 $T' \in \tau'$，存在 $T \in \tau$ 使得 $T' \subset T$.

以下定理在进行拓扑操作时比较有用，我们叙述一下.

定理 1.1 (粘接引理)**.** 设 $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 为拓扑空间 X 的一个有限闭覆盖. 如果映射 $f: X \to Y$ 在每个 A_i 上的限制都是连续的，则 f 是连续映射.

证明参见 [3] 的 P24.

同胚映射 同胚是拓扑学中最重要的变换，我们先引入一个问题. 设 $f: X \to Y$ 是 $1-1$ 的并且连续，能否推出 f^{-1} 连续?

答案是否定的，参见 [3] 的 P24-25. 但是对于上述情形我们可以定义:

定义 1.5. 称 $f: X \to Y$ 为**开 (闭) 映射**，如果对 X 中任意开 (闭) 集 U，都有 $f(U)$ 为开 (闭) 集.

由定义立即得到:

$$f \text{ 是 } 1-1 \text{ 的，那么 } f \text{ 为连续映射} \Longleftrightarrow f \text{ 为开 (闭) 映射}$$

注记 1.6. *开映射是一个深刻的刻画，回忆复变函数中我们说明所有单叶的全纯映射是开映射，以此导出了最大模定理，参见 [5].*

定义 1.6. 称 $f: X \to Y$ 是**同胚映射**，如果 f 是 $1-1$ 的且 f 与 f^{-1} 是连续的. 在此意义下，称 X 与 Y **同胚**，记为 $X \cong Y$.

显然同胚是一个等价关系，这启发我们对整个拓扑空间范畴做拓扑分类，这是拓扑学开创以来的核心目标，但目前只在 1、2 和 3 维的部分拓扑空间 (流形) 有结果. 在发展过程中我们将问题导向为“如何判断两个拓扑空间是 (不) 同胚的?” 但这依旧是困难的问题，目前的工具只能简单判断一小部分；为了解决更多的问题需要引入更多的工具，例如代数拓扑中的同伦同调论以及微分拓扑.

例子 1.5. 有以下几例同胚:

1. 开区间 $(0,1)$ 与 $\mathbf{E}^1$.
2. 单位球体 $D^n := \{x \in \mathbf{E}^n : ||x|| \leq 1\}$ 的内部 $Int(D^n)$ 与 $\mathbf{E}^n$ 同胚. 考虑映射 $f(x) = \frac{x}{1-||x||}$ 即可.
3. $\mathbf{E}^n - \{0\}$ 与 $\mathbf{E}^n - D^n$ 同胚. 考虑映射 $f(x) = x + \frac{x}{||x||}$ 即可.
4. $S^n - \{N\}$ 与 $\mathbf{E}^n$ 同胚. 考虑**球极投影**即可.
5. 任何凸多边形 (包含内部) 互相同胚[3]，利用这个事实可以证明凸多边形与单位闭圆盘同胚.

我们将同胚下不变的量称为**拓扑 (不变) 量**，解决拓扑分类问题的一个重要观点是找到尽可能多的拓扑量，我们所熟悉的有：可分性、分离性、可数性、连通性与紧致性。在代数拓扑中有更多的拓扑量，例如：基本群、同伦群、同调群等等.

[3]利用粘接引理可以证明.

1.3 乘积空间与拓扑基

乘积空间 下面考察如何将两个拓扑空间连同其上的拓扑做“乘积”结构. 在集合范畴上考虑是简单的，只要做 *Decartes* 积即可. 为了使拓扑满足要求，我们定义

定义 1.7. 设 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个子集族，规定新子集族

$$\overline{\mathcal{B}} := \{u \subset X | U \text{ 为 } \mathcal{B} \text{ 中元素之并}\}$$

称 $\overline{\mathcal{B}}$ 为 $\mathcal{B}$ **生成**的子集族.

设 $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ 为两个拓扑空间，现要在 $X_1 \times X_2$ 上规定一个与 τ_1, τ_2 相关的拓扑 τ 并且要使得典范投影

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, \quad \pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$$

连续. 我们记 $\mathcal{B} := \{U_1 \times U_2 | U_i \in \tau_i, i = 1, 2\}$，那么 $\overline{\mathcal{B}}$ 就是满足要求的最小子集族，并且满足公理，即最小拓扑，参见 [3] 的 P30-31. 于是可以定义：

定义 1.8. 称 $\overline{B}$ 为 $X_1 \times X_2$ 上的**乘积拓扑**，$(X_1 \times X_2, \overline{\mathcal{B}})$ 为 $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ 的**乘积空间**.

注记 1.7. 有限个拓扑空间的乘积空间可以自然定义，但到无限时我们需要定义指标集

$$\prod_{i \in I} X_i := \{f : I \to \bigsqcup_{i \in I} X_i | f(i) \in X_i, \forall i \in I\}$$

乘积拓扑有两种选择：

1. 箱拓扑：$\mathcal{B}_1 := \{\prod_{i \in I} X_i | U_i \in \tau_i\}$
2. 积拓扑：$\mathcal{B}_2 := \{\prod_{i \in I} X_i | U_i \in \tau_i \text{且出去有限个 } i \text{ 外} U_i = \tau_i\}$ 必须指出，上述两种拓扑都使得典范投影连续，但积拓扑是使得连续的**最弱**拓扑.

定理 1.2. 对任何拓扑空间 Y 和映射 $f : Y \to X_1 \times X_2$，f 连续当且仅当 f 的分量 $\pi_i \circ f (i = 1, 2)$ 连续.

证明参见 [3] 的 P31-32.

拓扑基 类比线性空间的基、代数结构的生成元，可以找到拓扑空间的“代表”.

定义 1.9. 称集合 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 为**集合 X 的拓扑基**，如果 $\overline{\mathcal{B}}$ 的一个拓扑；称称拓扑空间 (X, τ) 的子集族 $\mathcal{B}$ 为**拓扑空间 X 的拓扑基**，如果 $\overline{\mathcal{B}} = \tau$.

注记 1.8. 这是两个不同的概念，前者要求生成子集族是一个拓扑即可，后者要求这个拓扑就是原空间的拓扑.

命题 1.3. $\mathcal{B}$ 是集合 X 的拓扑基的充要条件[4]为:

1. $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$;

2. 若 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 则 $B_1 \cap B_2 \in \overline{\mathcal{B}}$.

命题 1.4. $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的拓扑基的充要条件为:

1. $\mathcal{B} \subset \tau$;

2. $\tau \subset \overline{\mathcal{B}}$.

证明参见 [3] 的 P32-33. 这两个命题在判断子集族是否为拓扑基时很有用，同时为证明两个拓扑空间 (不) 同胚提供了思路.

例子 1.6. 设 $\mathcal{B}$ 为拓扑空间 (X, τ) 的拓扑基，$A \subset X$，规定 $\mathcal{B}_A : \{A \cap B | B \in \mathcal{B}\}$. 它是子空间拓扑 (A, τ_A) 的拓扑基.

[4]这其实是分析中“滤子基”的概念，参见 [2].

第一节习题

练习题

练习 1. *判断以下陈述是否正确:*

1. $Int(A) \cup Int(B) = Int(A \cup B)$;
2. $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$;
3. 假设 X, Y 为拓扑空间,$A \subset X, B \subset Y$ 为子集,x 为 A 在 X 中聚点,$y \notin \overline{B}$, 那么 (x, y) 一定是 $A \times B$ 在 $X \times Y$ 中的聚点.

练习 2. *证明在 $\mathbb{R}$ 上,$\{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}$ 可以成为一组拓扑基. 证明:A 为这个拓扑空间的开集当且仅当 $A = \emptyset$ 或 $A = (-\infty, a), a \in \mathbb{R}$.*

练习 3. *设 $\mathbb{R}$ 的子集族 $\mathcal{B} : \{(a, b) | a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$, 则 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbf{E}^1$ 的拓扑基.*

思考题

练习 4. *令 K 为 $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^+\}$ 的子列族. 举例说明存在 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in K$ 满足 $a_n b_n \to 0$ 而 a_n, b_n 均不都为 0.*

只要考察“分段序列”

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2k} & 若\ n = 2k \\ 0 & 若\ n = 2k+1 \end{cases}, \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{2k+1} & 若\ n = 2k+1 \\ 0 & 若\ n = 2k \end{cases}$$

练习 5. *给定 $n \in \mathbb{N}$, 证明存在唯一的映射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足 $f(0) = n, f(m+1) = f(m) + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.*

证明. 证明请参见 [4] 的 P4-6. □

练习 6. *如果复数 α 满足 $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{Q}$, 则称 α 为代数数. 证明:代数数全体是可数集.*

证明. 注意到 $|\mathbb{Q}^{n+1}| = |\{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 | a_i \in \mathbb{Q}\}|$, 而 $a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ 至多 n 个根, 于是全体代数数的集合

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

是可数集, 其中 A_n 表示 n 次全体有理系数多项式的根的集合. □

参考文献

[1] 刘擎. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6. Oxford Graduate Texts in Mathe, 2002.

[2] 卓里奇. *数学分析: 第一卷第一分册*. 高等教育出版社, 1987.

[3] 尤承业. *基础拓扑学讲义*. 北京大学出版社, 1997.

[4] 聂灵沼 and 丁石孙. *代数学引论*. 北京大学出版社, 2000.

[5] 龚□. *简明复分析*. 中国科学技术大学出版社, 2009.