

球面的刚性：Liebmann 定理

钱振烨

2024 年 7 月 3 日

旨趣 我们先介绍一个整体几何基本的工具，即**极值原理**. 操作机理为：紧致闭曲面上的连续函数必有极值，再通过极值性刻画几何. 利用极值原理可以证明球面的 Liebmann 定理，其刻画了球面的刚性. 从证明中可以发现，Hilbert 引理是本质的，我们选取了**主曲率函数**作为讨论极值的函数. 最后发现主曲率函数之间的单调关系是导致极值可操作的底层逻辑，刻画了一般的 Weingarten 曲面，并做推广.

目录

1	极值原理	1
2	Liebmann 定理	2
2.1	第一引理	2
2.2	第二引理：Hilbert 引理	4
3	Liebmann 定理的证明	5
4	推广	5

1 极值原理

操作原理 一些朴素的观念在解决问题时有奇效，数学分析中我们知道紧集上的连续函数必存在极值. 现在将这个观点推广到微分几何，即 \mathbf{E}^3 中紧致曲面上的连续函数必存在极值. 将这个简单的事实称为**极值原理**，并且我们断言：(紧致) 曲面上的特殊连续函数是否取极值刻画了曲面的几何. 这个预见性的推断将几何与分析联系起来，而“极值性”担任了二者之间简单却深刻的桥梁. 我们先从抽象层面解释极值原理的操作思路.

设 M 为 \mathbf{E}^3 中一紧致曲面, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为光滑映射. 由极值原理, 不妨设 f 在 $p \in M$ 处取极大 (小) 值. 于是有

$$df = 0, \quad d^2f \text{ 的 Hesse 矩阵半负 (正) 定}$$

前者断言算子 df 是零化算子, 往往能推出硬性的几何信息, 例如正交; 后者给出范围性的条件, 往往能推出某个几何量小 (大) 于等于零.

更细致的刻画需要归结为一元函数. 不妨在极值点附近任取光滑曲线 γ , 这是 $f \circ \gamma$ 为单变量函数, 于是极值性改写为

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(\gamma(s)) = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} f(\gamma(s)) \leq (\geq) 0$$

反证 有时极值原理可以反其道而行说明曲面**不紧致**. 只要在曲面上构造出不存在极值的连续函数.

例 1.1. 证明 $\text{Int}(D^2) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ 为 \mathbf{E}^3 中非紧致曲面.

证明. 取 $\text{Int}(D^2)$ 上连续函数 $f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ 即可. □

2 Liebmann 定理

定理 2.1 (Liebmann, 1899). 设 M 为 \mathbf{E}^3 中紧致连通闭曲面, 且 Gauss 曲率 K 为常数, 则 M 必为标准球面.

这是整体微分几何范畴具有代表性的工作. 一般整体微分几何往往由局部的几何信息加上**弱的**整体信息 (例如拓扑条件: 紧致性、连通性等等) 推出一个**强的**整体结果. 必须指出: 拓扑条件中, 只有紧致性与闭曲面是本质的, 连通性只为了保证不出现多个球面. 若读者熟悉黎曼几何, 从内蕴的角度看可以发现, 条件中“ \mathbf{E}^3 中的曲面”是不可缺少的, 它表示曲面 M 是 \mathbf{E}^3 的光滑嵌入子流形. 事实上我们有反例, 即**平坦环面** T^2 , 它的 Gauss 曲率恒为零. 从这一点也可以看出, 不存在光滑嵌入到 \mathbf{E}^3 中的平坦环面.¹

2.1 第一引理

从定理的结果可以看出, 拓扑条件下, 常 Gauss 曲率蕴含 Gauss 曲率大于零. 因此, 最初的想法是要确定: \mathbf{E}^3 中紧致闭曲面至少**存在** Gauss 曲率大于零的点, 即椭圆点.

¹实际上, 不存在 C^2 的嵌入, 但存在 C^1 的嵌入, 即 Nash – Kuiper 定理, 参见 [3]. 但直到 2012 年才找到这样 C^1 嵌入的构造, 参见 [1].

引理 2.1. 设 M 为 \mathbf{E}^3 中紧致闭曲面, 则必存在至少一个椭圆点.

注记 2.1. 事实上, 即使不为解决以上定理, 我们会自然猜想: \mathbf{E}^3 中紧致闭曲面上一定存在椭圆点. 直观上这很容易理解, 条件保证曲面作为 \mathbf{E}^3 的子集是有界闭集, 考虑以原点为球心的大球面包住该曲面再逐渐缩小, 直至与该曲面产生第一个交 (切) 点, 这个点处曲面的弯曲必然大于球面的弯曲, 则曲面该点必为椭圆点.

我们将这个直观严格刻画出来.

证明. 虽然上述说法提供了很强的几何观念, 但是我们还是利用构造函数及其极值原理的方法来说明证明, 事实上函数的极值点就是上述的交 (切) 点, 读者很容易发现这个几何关系.

取曲面 M 的位置向量 $x(p), p \in M$, 构造**距离平方函数**

$$d^2(p) = x(p) \cdot x(p)$$

显然函数光滑, 由紧致性可知在 M 上存在极大值点, 不妨记为 p_0 . 我们有

$$d|_{p_0} d^2 = 0, \quad d^2|_{p_0} d^2 \leq 0$$

取过 p 点 M 上任一光滑曲线 γ 使得 $\gamma(0) = p_0$, 不妨 $x = x \circ \gamma(s)$. 第一式得到 $x(0) \cdot \dot{x}(0) = 0$, 蕴含 $x(0) \perp \dot{x}(0)$. 令 n 为 M 的法向量场, 于是 $x(p_0) = \lambda n(p_0)$, 其中 $\lambda \neq 0$.²第二式得到

$$x(0) \cdot \ddot{x}(0) + \dot{x}(0) \cdot \dot{x}(0) \leq 1$$

注意到 $\gamma(\dot{0})$ 方向的法曲率 $k_n(\gamma(\dot{0})) = \ddot{x}(0) \cdot n(p_0)$ 于是

$$k_n(\gamma(\dot{0})) \leq -\frac{1}{\lambda}$$

由曲线 γ 的任意性可知主曲率满足

$$k_1, k_2 \leq -\frac{1}{\lambda}$$

因此 $K = k_1 k_2 \geq \frac{1}{\lambda^2} > 0$.³ □

注记 2.2. 从思想方法上看, 这里的距离平方函数反映了曲面的 (外蕴) 几何, 这是分析在几何上的一次简单应用.

回到引理前的断言, 我们说明了 \mathbf{E}^3 中紧致闭曲面若具有常 Gauss 曲率, 则必有**正的**常 Gauss 曲率. 随即有以下推论:

推论 2.1. \mathbf{E}^3 中不存在常零 Gauss 曲率或常负 Gauss 曲率的紧致闭曲面.

²直观上可以发现, p_0 点必为与球面的交 (切) 点, 但不一定是第一个交点.

³不难看出, 这里的 λ 就是球面的半径.

2.2 第二引理：Hilbert 引理

再次回到定理条件，从 Gauss 曲率为常数我们知道

$$k_1 k_2 \equiv \text{const}$$

若将 $k_1, k_2 (k_1 \geq k_2)$ 分别视为曲面的两个**主曲率函数**，它们显然是连续的，若无脐点则具有光滑性. 在常 Gauss 曲率下注意到：当 k_1 取局部极大值时 k_2 必取极小值. 在这个极值点处，我们有以下非平凡观察：

定理 2.2 (Hilbert, 1909). 上述主曲率函数 k_1, k_2 若满足：

1. k_1 在 p_0 点处达局部极大值；
2. k_2 在 p_0 点处达局部极小值；
3. $k_1 \neq k_2$ ，即 p_0 非脐点.

则 $K \leq 0$.

证明. 我们利用 *E.Cartan* 么正标架法给一个简洁的证明，主要思路是用主曲率函数以及两个微分形式 ω^1, ω^2 表示联络 1- 形式 ω_1^2 ，再通过 Gauss 方程得到“外蕴表达的”⁴Gauss 曲率.

由 3. 可知 P_0 不是脐点，于是在局部主曲率函数光滑，不妨选择曲率线网. 于是有 Weingarten 公式：

$$\begin{cases} \omega_1^3 = k_1 \omega^1 \\ \omega_2^3 = k_2 \omega^2 \end{cases}$$

结合 Codazzi 方程整理得到

$$\begin{cases} 0 = \left[-\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}} \omega^1 + (k_1 - k_2) \omega_1^2 \right] \wedge \omega^2 \\ 0 = \left[-\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} \omega^2 + (k_1 - k_2) \omega_1^2 \right] \wedge \omega^1 \end{cases}$$

从上式中观察得到

$$(k_1 - k_2) \omega_1^2 = \frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}} \omega^1 + \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} \omega^2$$

对上式两边取外微分，结合极值原理和 Gauss 方程可得

$$K = -\frac{1}{(k_1 - k_2)} \left[\frac{(k_1)_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{(k_2)_{uu}}{\sqrt{E}} \right]$$

由于 $k_1 > k_2$ ，又 k_1, k_2 分别取极大极小值，故 $(k_1)_{vv} \leq 0, (k_2)_{uu} \geq 0$ ，因此

$$K \leq 0$$

□

⁴所谓外蕴表达指的是在表示过程中用到了 Weingarten 公式与 Codazzi 方程. 事实上，回忆古典微分几何，联络 1- 形式 ω_1^2 可以仅用 Gauss 公式推出，再结合 Gauss 方程得到一个内蕴的表达.

3 Liebmann 定理的证明

我们援引陈省身先生基于 Hilbert 的工作给出的证明, 参见 [2].

证明. 由推论2.1可知曲面 M 上每点都是椭圆点, 由紧致性可知条件 $k_1 k_2 = K \equiv \text{const} > 0$ 蕴含某点处 k_1, k_2 分别取极大极小值 (由于 K 是一致的常数, 故取最大最小值), 不妨记为 p_0 . 由定理2.2可知 p_0 必为脐点. 以下不等式说明对每一点 $p \in M$, 都是脐点

$$k_1(p_0) \geq k_1(p) \geq k_2(p) \geq k_2(p_0) = k_1(p_0)$$

故 M 是球面 (的一部分). 紧致性蕴含 M 为闭子集, 光滑性 (微分流形) 蕴含 M 为开子集, 再由连通性可知 M 为标准球面. \square

4 推广

我们观察以上证明, 条件 $K \equiv \text{const}$ 只是用来说明“当 k_1 取极大值时 k_2 取极小值”, 而本质上 k_2 是关于 k_1 的递减函数, 即存在递减函数 $k_2 = f(k_1)$. 在 [4] 中给出更一般的刻画, 称为 Weingarten 曲面. 上述递减的情形称为**椭圆型** Weingarten 曲面. 在这个观点下将 Liebmann 定理的条件改写为“设 M 为 \mathbf{E}^3 中紧致连通闭曲面, 存在递减函数 f 使得主曲率函数 k_1, k_2 满足关系 $k_2 = f(k_1)$ ”. 于是可以模仿上述证明给出椭圆型 Weingarten 曲面的结果 (这是更本质的).

定理 4.1. 设 M 为 \mathbf{E}^3 中紧致连通闭曲面, 且是具有正 Gauss 曲率的椭圆型 Weingarten 曲面, 则 M 必为标准球面.

注意到 $k_2 = f(k_1)$ 其中 f 是递减函数的情况可以很多, 例如常 (正) 平均曲率曲面, 即 $k_1 + k_2 = H \equiv \text{const}$. 我们有如下推论:

推论 4.1. 设 M 为 \mathbf{E}^3 中紧致连通闭曲面, 且是具有正 Gauss 曲率常平均曲率曲面, 则 M 必为标准球面.

注意到上述推论4.1中, 条件 $K > 0$ 实际上为曲面加了拓扑限制, 即同胚于球面 (或者说单连通). 而事实上条件 $K > 0$ 可以弱化为“曲面同胚于球面”, 这就是著名的 Hopf 定理.

参考文献

- [1] Vincent Borrelli, Saïd Jabrane, Francis Lazarus, and Boris Thibert. Flat tori in three-dimensional space and convex integration. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(19):7218–7223, 2012.
- [2] Shiing-shen Chern. Some new characterizations of the euclidean sphere. 1945.
- [3] John Nash. C^1 isometric imbeddings. *Annals of mathematics*, 60(3):383–396, 1954.
- [4] 沈一兵. 整体微分几何初步：第三版. 高等教育出版社, 2009.