实分析 I

钱振烨

Nash and I proved the same theorem, or, rather, two theorems very close to each other. From the theorem of Nash one can deduce more or less immediately my theorem, following a quite different line of proof. Thus, from my experiences, the discovery of a theorem can be made by different people, as if it were there waiting for someone to uncover it, and the statement of the theorem is always the same. However, the invented proof can vary greatly according to the mathematician who finds it.

——De Giorgi, 1957

图 1. De Giorgi

目录

第一版前言

2024 年秋冬学期我在本科学校修读了谢老师教授的实变函数课程，课程范围大致是 Lebesgue 测度、可测函数与积分论. 而真正的实变函数论应该至少再包含微分学和可积函数空间才能弥补旧数学分析中微积分与函数整体性态的讨论缺陷，同年我又旁听了浙江大学贾老师和王老师的部分实变函数课程以及中国科大殷浩老师于 2022 年的实分析课程录像. 这份笔记整理自以上四位老师的课程内容和我的读书笔记，在此向他们表示感谢.

我将这份笔记分为三**部分**:

PART 1 第一部分包含第1章. 我希望在其中简明地定义欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 上的 **Lebesgue 测度**结构,并依此逐步建立函数的 **Lebesgue 积分**[1]，最后，基于 Newton-Leibinz 公式适合条件的讨论建立更广的**微分**理论. 首先我们会阐明对任一欧式子集建立“朴素体积”概念是奢侈的，可见 Banach 与 Tarski 在 1924 年的工作，即定理1.1，因此转而希望建立欧式空间部分子集的体积理论，这些子集被称为 Lebesgue 可测集. 这套理论的开端通过建立欧式空间全体子集上的 **Lebesgue 外测度** m^* 实现，特别地依赖上确界 sup 定义外测度使得这套语言可以在分析学中刻画. 我希望初学者能够熟练地使用确界的 $\epsilon-\delta$ 语言，这对于描述与验证外测度都具有技巧上的优势，特别是

“想证明 $\mathrm{m}^*(A) \leq \mathrm{m}^*(B)$，好用的办法是用 $\epsilon-\delta$ 语言刻画 B 的外侧度，最后令 $\epsilon \to 0$.”

诸多性质的验证中我们发现无论如何外测度的**可列可加性**，即

设 (E_n) 为两两不交集列，则 $\mathrm{m}^*\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathrm{m}^*(E_n)$

的诉求无法实现. 妥协的办法是将上述性质弱化为可证明的**次可加性**，即将上述等号 $=$ 改成不等号 $\leq$，或者将不交的条件加强为有**正距离**. 二者在第3章中都被抽象成定义的一部分，前者用来定义抽象的外侧度，后者用来定义度量外测度. 我们断言可列可加性是一个测度最本质的刻画，仔细分

[1]这一套理论建立的初衷可以见第1章前言.

析可以发现测度相关的必要条件甚至后续的积分理论大多被可加性蕴含，这条性质甚至直接作为第3中抽象测度的定义. 因此，如何妥善地定义出 Lebesgue 可测的概念进而将外测度限制在其上成为测度是测度论初期亟待解决的问题. 1914 年 Carathéodory 提出一个基于集合“分离性”的条件用于划定何种集合是可测集，即 Carathéodory 条件，见定义1.3. 这个条件在大部分实变函数的书 (参见 [**21, 14, 13**]) 中最终刻画为“集合类似开集”的性质，即可测集 E 满足：存在开集 $(E\subset)O\subset\mathbb{R}^d$，使得

$$\mathrm{m}^*(O-E)\le\epsilon$$

而二者最终是等价的，见定理1.2. 由于开集的处理方式相对容易，因此我们选择采用 [**9**] 中关于可测集的定义方式，即从类似开集的集合出发刻画 Lebesgue 测度. 其二，我们利用测度论建立**可测函数**的概念，作为早期连续函数理论的推广，同时也可以发现 19 世纪中旬建立的 Riemann 积分理论针对“大部分点”连续的函数不满足现代分析的要求，参见 [**14, 9**]. 注意到这一类函数囊括的范围极广，并且可以证明所谓的**简单函数**能够对这类函数作逼近，惊喜的是，实变函数论建立的 **Egorov** 定理实现逐点的逼近“基本上”是**一致逼近**：即以损失一点点体积的代价换取更强的结果. 操作的 Sketch 大致是这样的：

$$\text{BOSS HP }100\%=\text{EXCELLENT TOOL }99.99\%+\text{BAD TOOL }0.01\%$$

为此只需要花心思选择 EXCELLENT TOOL 即可. 这里我们多说一嘴，倘若不依赖测度去完成一致的逼近，泛函分析中有另一套技术是考虑可逼近的**子列**，即 **Ascoli-Arzelà 定理**，这个技术在有的时候局限性很强，特别地要求空间本身的拓扑足够好，另外要求逼近序列有**等度性**，参见 [**21, 2, 5, 20**]. 所幸从概率论中抽象过来的**依测度收敛**在实变函数论中一定程度上代替 Ascoli-Arzelà 定理的用途，我们知道两件事情：

- 依测度收敛诱导的“拓扑”有完备性；

- Riesz 定理表明依测度收敛的函数列存在逐点收敛的子列 (再次应用 Egorov 定理得到一致收敛).

第一件事情告诉我们可以 “不妨” 取依测度 Cauchy 列，第二件事情说这样的 Cauchy 列有逐点收敛的子列，这几乎完成了想要的逼近，我们将通过这个技术证明 $\mathcal{L}^p$ 空间的完备性. 如上，我们在建立测度理论的中途得到一系列有利的工具.

此后，通过以下四步骤建立 Lebesgue 积分，即

$$\boxed{\text{简单函数}} \Longrightarrow \boxed{\text{有界有限支函数}} \Longrightarrow \boxed{\text{非负可测函数}} \Longrightarrow \boxed{\text{一般可测函数}}$$

然而我们感兴趣的东西是建立积分体系的过程中可以回答数学分析中极限与积分算子的换序问题，即

$$\lim \int = \int \lim$$

参见 [**7**]. 数学分析中曾给出的一致收敛的条件过强，见例0.3，我们将基于例2.1的观察给出一个本质的结果，即 Fatou **引理**，是说

$$\lim \int \geq \int \lim$$

利用它可以得到后续函数逼近论中重要的两个工具，即 **Levi 单调收敛定理** (MCT) 和**控制收敛定理** (DCT). 在完成积分的定义后我们可以将全体可积函数视为一个空间，甚至一般的 p **方可积**函数，即 $\mathcal{L}^p$ **空间**. 基于积分为这个空间赋予 (拟) 范数

$$||f|| := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$$

从而将函数论中的不等式放缩、Cauchy 收敛原理、函数逼近论等结果视为 $\mathcal{L}^p$ 空间的范数控制(为此我们证明有限测度集上的 “高模控低模” [2])、完备性、可分性(紧支集光滑函数空间

[2]在泛函分析中范数的控制叙述为范数强弱的比较，本质上是诱导拓扑的精细程度：弱范数对应精细拓扑. 拓扑越精细，序列在其中的收敛越容易，然而视为更粗糙拓扑下的序列时可能导致不收敛. 我们在**连续函数空间**中能够做到的论断是

箱拓扑 $\supset$ 逐点收敛拓扑 $\supset$ 紧一致收敛拓扑 $\supset$ 一致收敛拓扑 (乘积拓扑)

在实分析中对于有限测度集合 E 上的函数集有

C_c^∞ 的稠密性在后续的工作中极其常用). $\mathcal{L}^p$ 空间理论成为早期泛函分析建立空间理论 (Banach 空间、Hilbert 空间和局部凸空间) 的动机，其上有两件事情值得在实分析中单独讨论:

- $\mathcal{L}^p$ 空间**对偶**理论;
- $\mathcal{L}^2$ 空间的内积结构与**完备正交系**.

通过 Hölder 不等式的观察我们对共轭指标

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

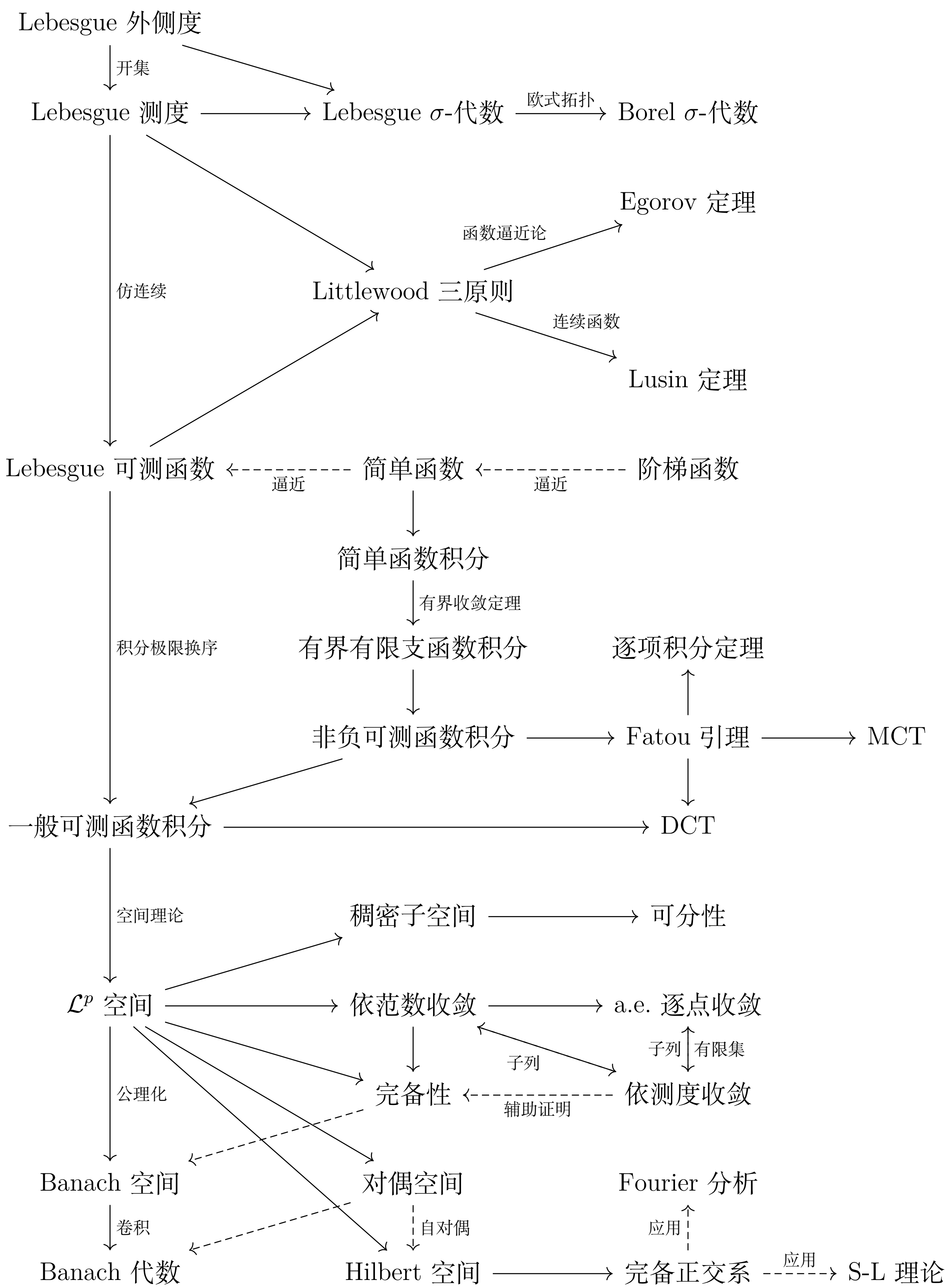
感兴趣，无独有偶这个观察可以导致 $\mathcal{L}^p$ 空间对偶空间的论断. 我们能够基于实分析的工具证明映射

$$\mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^q, \quad 其中\ p, q\ 为共轭指标$$

是良性的单射 (特别注意 $\mathcal{L}^\infty$ 的对偶空间不是 $\mathcal{L}^1$)，满射的验证需要留给泛函分析，参见 [**20, 21, 11**]. 第二件事情在 [**10, 9**] 中有论述，注意到三角函数系构成 $\mathcal{L}^2([-\pi,\pi])$ 的完备正交系，这成为 **Foureir 分析**的基础，此外一个有趣的问题出现在微分方程理论中，即 **Sturm-Liouville 理论**，感兴趣的读者可以参见 [**15**]. 最后，通过引入**卷积**，我们将 $\mathcal{L}^1$ 空间构造成 Banach 代数，为后续进一步的函数逼近理论做准备. 如上叙述是我们建立测度与积分理论的基本思路，在下图中可见一斑.

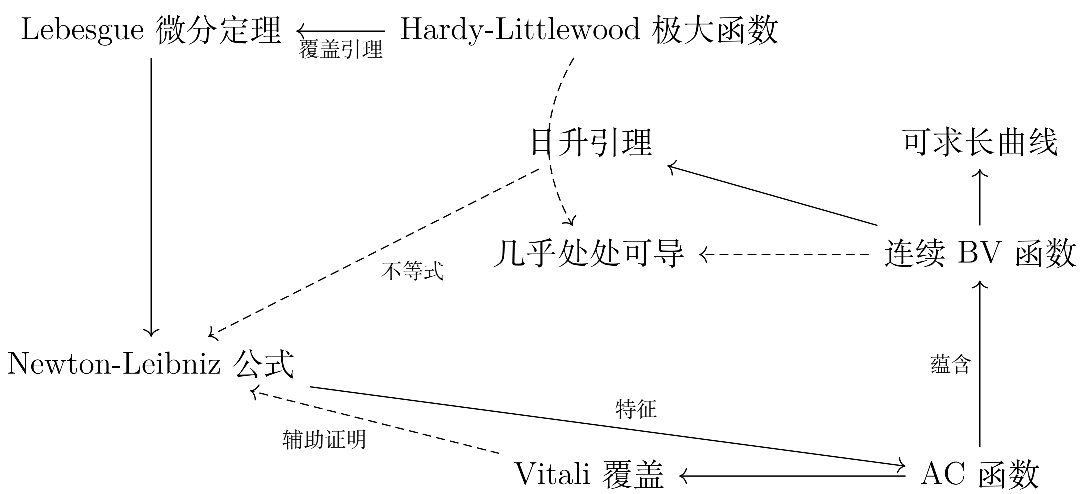
$\mathcal{L}^1 \supset \mathcal{L}^p,\ (p>1) \supset \mathcal{L}^\infty =$ 一致收敛拓扑 $\supset$ 逐点收敛拓扑 $\supset$ 依测度收敛拓扑

但对一般集合并无上述包含关系.


Lebesgue 外侧度
开集
Lebesgue 测度
Lebesgue σ-代数
欧式拓扑
Borel σ-代数
Egorov 定理
函数逼近论
仿连续
Littlewood 三原则
连续函数
Lusin 定理
Lebesgue 可测函数
逼近
简单函数
逼近
阶梯函数
简单函数积分
有界收敛定理
积分极限换序
有界有限支函数积分
逐项积分定理
非负可测函数积分
Fatou 引理
MCT
一般可测函数积分
DCT
空间理论
稠密子空间
可分性
$\mathcal{L}^p$ 空间
依范数收敛
a.e. 逐点收敛
子列
有限集
子列
公理化
完备性
辅助证明
依测度收敛
Banach 空间
对偶空间
Fourier 分析
卷积
自对偶
应用
Banach 代数
Hilbert 空间
完备正交系
应用
S-L 理论

第1章的第二部分我们着手建立更广义的**微分学**. 理论的出发点是数学分析中 Newton-Leibniz 公式条件过强. 首先我们会利用概率论中的 **Hardy-Littlewood 极大函数**证明 **Lebesgue 微分定理**, 给出几乎处处可导的一个必要条件. 这个定理的证明历程是有意思的: 首先对于可积函数有基本的观察, 即 **Tchebychev 不等式**, 见练习2.1, 它表明可积函数“过高部分”的密度被控制, 而 H-L 极大函数仅具备“弱”的控制, 即弱 $\mathcal{L}^1$ 的半连续函数, 这个论断的得到基于我们对这类函数“局部 Tchebychev”的观察, 利用一个组合学味道浓厚的**覆盖引理**给出整体的估计.

为了进一步靠近 Newton-Leibniz 公式, 我们定义**有界变差函数** (简称 BV 函数), 从而得到几乎处处可导的另一个必要条件, 即“连续的 BV 函数几乎处处可导.” 这个结论一方面证明了“半个” Newton-Leibniz 公式 (注意到反例 **Cantor-Lebesgue 函数**), 另一方面在几何学上多有好处: 例如微分几何学中何谓**可求长曲线**, 曲线不可导点如何处理; 黎曼几何中处理带**割迹**情形的距离函数, 利用这个定理可以直接忽略割迹的影响, 参见 [**18**]. 最后, 我们用**绝对连续函数** (简称 AC 函数) 直接特征了 Newton-Leibniz 公式, 至此, 微分论收官.



PART 2 第二部分包含第2、3、4章. 我希望基于欧式空间上实变函数的讨论结果进一步谈实分析，现代分析视角上的改变是统筹了太多东西，不限于函数论，加入了不少基于偏微分方程需要的处理技术、拓扑与代数结构、几何与流形等等，这些理论直至今日应当属于分析的范畴，因此将实分析作为工具应用在方程、代数与拓扑、几何上适合考虑选题.

因此我们在第2章中基于 Lebesgue 微分定理和 $\mathcal{L}^p$ 空间理论整合了分析中常用的**恒等元逼近**技术，具体的操作思路是：对于性质不太好的函数，我们将其卷积上一族函数最后收敛到自身，并且卷积以后具有好的分析学性态. 枚举三例来表明这套技术的适用性. 我们利用其证明调和函数平均值性质的一个重要特征以及著名的 Weyl 引理，这里使用的恒等元逼近是**光滑化子**. 此外，我收集了 Poisson 在古典偏微分方程中基于核函数给出三大方程解的显示表达，参见 [**15**]，这些核称为 **Poisson 核**，无一例外都是好核，通过逼近不难发现方程解的合理性. 简单介绍恒等元逼近技术在泛函分析与偏微分方程中证明的两个关于 **Fourier 变换**算子的性质，即引理2.1和定理2.4，蕴含 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{L}^2$ 空间的自同构. 最后，回到 [**10**] 中关于 Dirichlet 核不是好核的论断，借用泛函分析中的 Banach-Steinhaus 定理说明 Fourier 变换展开对应的泛函是无界泛函，这件事情直接导致部分连续函数存在 Fourier 级数不收敛的点.

第3章意图将欧式空间上的测度理论推广到一般集合上，建立**抽象测度**与**抽象积分**，为此我们只能截取 Lebesgue 测度中本质的部分作为定义. 抽象测度的好处是拓宽了我们对体积与积分概念的理解，例如现代偏微分方程中的 **Dirac 分布**可以依靠测度构造；计数测度加深我们对积分与**求和**关系的理解；抽象测度中提炼的性质在几何学中有深刻的应用：例如泛函分析中的 **Gromov-Hausdorff 收敛**怎么用在黎曼几何中，我们可以利用黎曼流形上一个自然的测度，即通过体积

形式诱导的测度

$$\mu(E) := \int_E \mathrm{vol}$$

其中 (M, g) 为黎曼流形，g 为其上黎曼度量，E 为任一紧子集，vol 为体积形式，建立对**容度**的控制 (这个控制依赖于测度 μ 是一个 **Doupling 测度**, 但著名的 **Gromov-Bishop 体积比较定理**会为 Ricci 曲率有下界的流形提供这个结果)，从而引发 Gromov 预紧性定理，使得一列黎曼流形 (M_n, g_n) 收敛的结果仍然是度量空间，进而通过更多的要求使得这个度量空间是有某些性态的黎曼流形. 此外，针对不同邻域的问题，结合测度论可以作一些分析，例如

- 几何函数论：Hausdorff 测度
- 泛函分析：谱测度
- 李群理论：Haar 测度
- 概率论：Wiener 测度

第4章中我们简单介绍 **Hausdorff 测度**与**分形几何**的维数，它们在几何分析与几何测度论中有重要的地位. 作为例子，利用 Cantor-Lebesgue 函数的 Lipschitz 性质证明 Cantor 三分集的 Hausdorff 维数为 $\log_3 2$.

PART 3 第三部分包含第5章. 我们在这一章中回忆基本的集合论、映射与欧式空间的拓扑，供有需要的读者查阅.

以上是这份笔记内容的介绍.

近一年来，通过听、讲讨论班，听课，参加暑期学校，我对数学这个行当的品位从“囿在几何与拓扑的圈子里只学纯几何的技巧”到“学习不同的工具，尝试用不同的工具解释甚至解决几何问题”. 特别地，在上泛函分析这门课时，我把大部分抽象理论放在实分析中叙述，它们中的大多数可以用 $\mathcal{L}^p$ 空间代替抽象的 Banach 空间、Hilbert 空间，用连续函数空间、紧支集光滑函数空间和 Schwartz 空间代替局部凸空间；用 Fourier 分析与函数论中的理论解释 Baire 纲集及其推论的适用性；此外，用 Fourier 变换算子的延拓解释 Hahn-Banach 理论，而紧空间上的 Laplace 算子的谱分解可以给泛函分析中的谱理论一个实际的应用，具体的体现是有界区域上波动方程的问题以及分离变量

法依赖的 Sturm-Liouville 理论. 这些观察使我从泛函分析本身“高屋建瓴”的刻画中落实到具体的实分析的测度空间，具体的偏微分方程问题上. 有时候 SPECIAL CASES 不比 GENERAL CASE 差！另外的一个启发来自于偏微分方程与微分几何的对应. 我在去年的暑期参加了 BICMR 的微分几何暑期学校，其中有一门椭圆型偏微分方程的课程的诸多内容让我对方程有浓厚的兴趣. 一直以来我对“用分析的工具解决几何问题”这个观念很是喜欢. 例如 Hamilton 先生[3]在 80 年代发展的 Ricci flow, 并用其解决正曲率三维流形的一个拓扑结果，而 Ricci flow 本质上是来自分析与方程的工具；Perelman 在 02 到 03 年应用 Ricci flow 的工具证明了 Poincaré 猜想；Brendle 等人同样运用 Ricci flow 最终解决 1/4 球定理. 此外，另一些几何流，例如子流形中的 mean curvature、复几何中的 Kähler-Ricci flow 都依赖分析与方程上的技术，我有幸在北京大学和中国科大的暑期班中初步涉猎了这些思想. 因此，一门熟练的分析技术在几何学的研究中尤其重要了.

去年 7 月上旬在去北京之前，讨论班的助教学长分享给我一些椭圆型 PDE 的笔记和资料，它们中大多基于 Evans、Gilbarg 和韩青、林芳华先生的书. 在 10 天左右的“预习”时间里，诸如 Sobolev 空间、Höder 空间、嵌入定理、迹定理等等概念让我应接不暇，到处捉襟见肘. 我在北京两个礼拜的课程里面占用大部分课间的时间只能整理出三门课其二的笔记，但偏微分方程的学习我想已经做到了力所能及，也是在这段时间，我对泛函分析的喜好转向实分析与偏微分方程. 大约三个月后，我在浙江大学王老师的偏微分方程课上再次学了一遍分布与 Sobolev 空间理论，至此，泛函分析中诸多抽象的理论我可以在既往的分析学与方程课程中找到“落地”的对应. 此外，课程内容中两个有趣的结果也让我感兴趣，一个是椭圆 PDE 估计中两个不等式的几何对应，另一个是 **De Giorgi 迭代**. 两者都可以在实分析的课程中作为拓展的内容叙述：

不等式 第一个不等式是 **Sobolev 不等式**，从泛函分析的观点看，是 $\mathcal{L}^p$ 空间可以紧连续嵌入 Sobolev 空间，由如下范数的控制实现：

$$||u||_{\mathcal{L}^q} \lessapprox ||\nabla u||_{\mathcal{L}^p}$$

[3]先生在去年 9 月份仙逝，在此表示敬意.

其中 $1/q = 1/p - 1/d$，d 为空间维数，∇ 为梯度算子. 特别地，取 $p = 2$，$q > 2$，而 $||\nabla u||_{\mathcal{L}^2}$ 可以视为几何中超曲面的**面积元素**，而 $||u||_{\mathcal{L}^p}$ 近似超曲面的**体积元素**，因此上述不等式刻画了几何学中的**等周不等式**. 第二个不等式是**能量不等式**，它是一致椭圆方程

$$\partial_i(a_{ij}\partial_j u) = 0$$

独有的，即

$$||\nabla(\varphi u)||_{\mathcal{L}^2} \leq \sup|\nabla\varphi|^2 \cdot ||u||_{\mathcal{L}^2}$$

不难发现，二者综合起来可以得到 $\mathcal{L}^2$ 到自身的控制，此时若控制的系数有几何级数级别的增量那么将触发递降. 这个观察成为 De Giorgi 的第一步.

De Giorgi 迭代 De Giorgi 先生在 57 年构造了一种迭代，思想综述为

$$\mathcal{L}^2 \Longrightarrow \mathcal{L}^\infty \Longrightarrow C^{0,\alpha}$$

其中 $C^{0,\alpha}$ 为 Höder 空间. 最后，通过 **boothstraping** 结合 Schauder 在 30 年代的工作证明散度型椭圆方程解的正则性. 感兴趣的读者可以参考 Caffarelli 的文章 Caffarelli, Luis, and Alexis Vasseur. "The De Giorgi method for regularity of solutions of elliptic equations and its applications to fluid dynamics." Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 3.3 (2010): 409-427..

本科低年级的实变函数论有一门后续课程称为“实分析” (有的学校称为“高等实分析”)，意图将欧式空间中的测度与积分推广到一般的集合上，讨论一般测度空间上的分析与应用，读者可以在 [**2, 6**] 等书中见到. 我们在第3章中简要引入了这类抽象测度的构造，并在第4章中介绍了一类偏几何的测度及其应用. 未来，我希望在 (高等) 实分析的课程中整理出一份课程笔记，作为这份笔记的后续. 受我兴趣的影响，值得考虑的“应用”有

分析与方程
- 广义函数与分布理论
- Schwarz 空间与 Fourier 变换
- Sobolev 空间：弱解、嵌入定理与迹定理

- 连续函数空间上的拓扑、Ascoli-Arzelà 定理与 Stone-Weierstrass 定理
- Baire 纲集理论及其应用

几何与拓扑
- Gromov-Hausdorff 收敛在有下界 Ricci 曲率流形上的应用
- 流形上的 Segment 不等式与 Poincaré-Sobolev 不等式

我们大部分学生对待数学这门学问的态度是：如果期末考纲里不要求，或者所谓教材上打星号 $*$ 的内容，我就不看. 这个氛围甚至在荣誉班和荣誉班的课程中也有. 我校本科生的实变函数教材是 [**19**]，其中“基数的 Cantor-Bernstein 定理”“不可测集的构造”等内容被打星号 $*$，考试不考，所以学生就并无兴趣，更不用说教材中没重点叙述的 $\mathcal{L}^p$ 空间理论以及“考纲”内没有标上的微分学 (见第1章第3节) 等内容. 但恰恰是 Cantor-Bernstein 定理构造双射的想法 (见定理1.3)、不可测集的构造思路甚至非 Borel 集的构造想法 (见小段落1.1和小段落1.1)，在解决类似问题和构造反例时有启发. 我在这份笔记中介绍了这些选题，并在一些注记中解释了想法，有兴趣的读者可以进一步阅读 Stein 的书和 Tao 的书，他们旁注了许多精彩的想法！因此，这份讲义中的绝大部分内容对贵校学生准备期末考试毫无帮助，甚至徒增“记忆容量”. 我劝没有念分析的这份道心的学生对着“考纲”复习习题即可，喜闻乐见的结果是在考试拿到高分，并且在大约 2 月份时忘记定理2.5.

最后，援引丘先生的一句话作为前言的结语：

> “作为数学家，我们追求的不是敌国的财富，也不是千年的霸业，这些东西终究不免化为尘土. 我们追求的乃是理论和方程，它们带领着我们在寻求永恒真理的道路上迈进. 这些想法比金子来得珍贵，比诗歌来得炫目，两者在简朴的真理面前黯然失色. 数学是诸多应用科学的基础，它维持其现状、规划其未来，达到国家的长治久安.”

致谢. 感谢谢老师、周老师解答我诸多疑问，浙江大学李博士提供的习题课资料，李福汉同学参与审稿工作并指出一些错误.

作者：钱振烨

2025 年元旦

- 这份笔记中的索引项可以点击跳转，不适合纸质阅读.
- 笔记难免有错误，定期会进行更新，如需获取最新版的笔记，可以到我的主页下载:

  https://zhenye-math.github.io/

Part 1

实分析：基础架构

CHAPTER 1

欧式空间中的测度、积分与微分

实变函数的简单评注

¶ 旨趣. 我希望在实分析的第一章中引入欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 上的测度与积分理论，它们最早来自于 Lebesgue 在 1902 年发表的博士论文.

¶ 历史观点. 从历史上看，Lebesgue 理论是 19 世纪 Riemann 积分理论的变革，我们先简单回忆积分理论的发展，参考自 [**14, 9**].

- Cauchy 最早通过分割区间求和的方式来定义函数的积分，不过对象限定为连续函数或有限不连续点的分段连续函数.
- Fourier 提出通过三角级数来研究函数，就是我们现在看到的 Fourier 级数，参见 [**10**].
- Dirichlet 对一般的 Fourier 级数理论作了补充并提出了“可积性”的概念.
- Riemann 在 1854 年的博士论文“关于一个函数展开成三角级数的可能性”中给出了**积分**的定义以及函数可积的充要条件，就是我们在经典数学分析中研究的 Riemann 积分，参见 [**14, 7**].
- Darboux 提出利用上下和来刻画可积性.

我们说以上对积分理论的推进是**古典分析**的范畴，也就是经典数学分析的内容，关于数学分析优秀的教材有但不限于 [**7**]，我们基于这本教材的内容引入实变函数的主题. 而 Lebesgue 理论的出现将分析推进到了**现代分析**的范畴，其中 (实变) 函数论部分将基于 [**21, 14, 13**] 介绍，更抽象的分析理论将参考 [**2, 6**] 展开，而本章核心选题，即测度与积分将参考 [**9**].

¶ 古典分析的缺陷.

† Riemann 积分的本质. 下面我们简述 Riemann 积分的思想，同时也作为实分析理论的引入之一. 取闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f. 对区间

$[a,b]$ 分划，即

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

令 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，取任意 $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$，作

$$S(P, x_i^*) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

再令 $||P|| := \max\Delta x_i$. 我们定义 **Riemann 积分**为

$$\int_a^b f\mathrm{d}x := \lim_{||P||\to 0} S(P, x_i^*)$$

如果上式对 P, x_i^* 的选取无关.

我们又知道 Darboux 给出了一个利用振幅的刻画，即函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，当且仅当

$$\sum_{||P||\to 0} \mathrm{osc}_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f)\Delta x_i = 0$$

其中 osc 指振幅，即

$$\mathrm{osc}_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f) := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f\} - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f\}$$

我们分析这个性质满足需要的充分条件，它们在数分分析中大致分成两类：

(1) 若 $\mathrm{osc} \sim o(1)$，即无穷小量，这蕴含 f 连续；

(2) 若有些 osc 不充分小，即超过给定的“小数”ϵ_0，则需要

$$\sum_{\mathrm{osc}_i \geq \epsilon_0} \Delta x_i \sim o(1), \quad \text{其中 } \mathrm{osc}_i \text{ 表示某一段 } [x_{i-1}, x_i] \text{ 的振幅}$$

注意到 (2) 刻画了函数 f 一种**整体**、**弱**的连续性[1]. 直观上看，不连续点不能“太多”，那什么叫做太多？需要严格的数学语言来刻画，这就是实分析的第一个基本的研究对象，即**测度论**.

我们举个例子说明 Riemann 积分并不适用于所有函数，参见 [**7**].

[1]参见本章的小段落2.1.

例 0.1 (Dirichlet 函数).

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] - [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases} \tag{1}$$

† 函数项级数与积分. 数学分析中，我们知道函数项级数的 Riemann 积分对极限“不友好”，事实上一般我们不一定有以下算子的换序：

$$\int \lim = \lim \int$$

例 0.2. 记 $[0,1] \cap \mathbb{Q} := \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$，规定

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\} \\ 0, & x \in [0,1] - \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\} \end{cases}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

然而 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = D(x)$，见例0.1，这是不可积函数.

† 一致收敛条件的减弱. 事实上我们知道，当 f_n **一致收敛**时，积分与极限算子可以换序，但这个条件过强，而且不好用.

例 0.3. 考虑函数列 $f_n(x) = x^n$ 定义在 $[0,1]$ 上，我们有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \in [0,1) \end{cases}$$

于是 $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$，又有 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$. 然而级数 f_n 并非一致收敛的，因为极限函数不连续.

一个自然的问题是：一致收敛条件应该如何减弱？这在本章小节2.1建立 Lebesgue 积分的过程中被一系列“控制型”的收敛定理代替.

¶ 现代分析的引入. 下面我们介绍 Lebesgue 的原始思想 (见练习2.2). 事实上 Riemann 积分出问题的直观在于求 “面积” 时同一个底上的高变化 “太大”, 即连续性不好. 那么我们不妨避开这个依赖连续性的假设, 直接分割函数图像的高. 这个问题用 “数钱” 来解释比较形象, 参见 [**14**].

假设我们手上有一沓钱, 纸面左右放置. 那么 Riemann 积分的思想是: 从左往右一张一张数过去. 这时问题就出现了, 我们不可避免地一会儿数到 100 元, 一会儿数到 20 元, 每次读取的面额可能差距过大, 体现在函数中就是连续性不好. 而 Lebesgue 积分的思想是: 先从这沓钱中挑出所有的 100 元, 接着是 50 元, 以此类推. 这样相邻两次读取的面额差距不会过大, 也就不存在连续性差导致不可积的问题了.

回到函数的语言, 设定与前文一样, 不妨设 $f(x) \in [m, M]$. 对值域区间作分划:

$$P : \{m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M\}$$

取任一点 $y_i^* \in (y_{i-1}, y_i]$. 因此, 积分可以定义为

$$\sum_{||P||\to 0} y_i^* \cdot \text{measure}(f^{-1}((y_{i-1}, y_i]))$$

这里的 measure 称为**测度**, 一维情形就是集合$f^{-1}((y_{i-1}, y_i])$ 的 “长度” . 因此, 在 Lebesgue 积分意义下, 我们面临的问题有:

(1) 原像 $f^{-1}((y_{i-1}, y_i])$ 可能很糟糕, 我们如何研究? 这牵扯到**可测函数**的问题.

(2) 什么叫区间的长度? 这涉及到**测度论**的内容.

例 0.4. 回忆例0.1, 我们用 Lebesgue 理论来计算它的积分. 取 $A = D^{-1}([0, 1/2]) = [0, 1] - [0, 1] \cap \mathbb{Q}, B = D^{-1}((1/2, 1]) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. 于是求和式为

$$S = 0 \cdot \text{measure}(A) + 1 \cdot \text{measure}(B) = \text{measure}(B)$$

因此, 只要我们合理地界定 $[0, 1]$ 区间内全体**有理数**构成的集合的 “大小”, 我们就计算了 Dirichlet 函数的积分.

至此，我们已经拎出了本章讨论的主线：

集合与映射[2] $\Longrightarrow$ 测度论 $\Longrightarrow$ 可测函数 $\Longrightarrow$ Lebesgue 积分

1. Lebesgue 测度与可测函数

Lebesgue 外测度. 本节中我们将为建立**测度**概念（直观来讲叫“体积”）做必要的前置.

† 朴素体积概念与悖论. 在欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 中谈一般集合的体积，其实是定义在 $\mathbb{R}^d$ 的幂集 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 上的广义集合函数，即

$$\text{measure} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

从几何上它应该满足如下三条公理：

A1 (可加性) 设 $(E_n)_{n\geq 1}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中至多可数个互不相交的子集，则

$$\text{measure}\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{measure}(E_n)$$

A2 (平移不变性) 设 $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为平移，则对任一 $E \subset \mathbb{R}^d$，有

$$\text{measure}(T(E)) = \text{measure}(E)$$

A3 (单位元) 设 Q 为 $\mathbb{R}^d$ 中单位立方体，即 $Q := \{x \in \mathbb{R}^d | 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1, \cdots, d\}$，则

$$\text{measure}(Q) = 1$$

遗憾的是上述朴素的体积观念并不总是如愿，Banach 与 Tarski 于 1924 年给出过一个定理，有兴趣的读者可以参见 Banach, Stefan, and Alfred Tarski. ”Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.” Fundamenta Mathematicae 6.1 (1924): 244-277.

定理 1.1 (Banach-Tarski，1924). 设 U, V 为 $\mathbb{R}^d, (d \geq 3)$ 的任意开子集，存在有限个子集 $\{E_1, \cdots, E_n\}$，$\{F_1, \cdots, F_n\}$，使得

(1) $U = \bigsqcup_{i=1}^n E_i$，$V = \bigsqcup_{i=1}^n F_i$；

(2) 每个 E_i 与 F_i 全等.

[2]见附录第1节.

因此，对所有集合赋予体积的概念是奢侈的，我们只能向 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 的某个子集妥协，这样的子集将被称为**可测集族**.

¶ 欧式空间中的基本事实. 我们在附录的第1节的1.5小节中介绍了实变函数必要的欧式拓扑前置，因此在正文中不再重复叙述，只对必要的概念做解释. 我们把欧式空间中的**矩体**记为 R，即

$$R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d], \quad a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, d$$

特别地，若每个 $b_i - a_i = 1$，则称**方体**，记为 Q. 根据上文的叙述，有

$$\text{measure}(R) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$$

称两个集合 E, F **几乎不交**，如果 $\text{Int}(E) \cap \text{Int}(F) = \emptyset$.

此外，为了书写方便，矩体的记号 measure 将换成 $|-|$. 最后，我们呈现两个基本的事实，证明是初等的，有兴趣的读者可以参见 [**9**].

引理 1.1 (初等有限可加性). 若矩体 R 可表示为有限个几乎不交的矩体的并，即 $R = \bigcup_{i=1}^N R_i$，则

$$|R| = \sum_{i=1}^N |R_i|$$

引理 1.2 (初等次有限可加性). 若矩体 $R, R_1, \cdots, R_N$ 满足 $R \subset \bigcup_{i=1}^N R_i$，则

$$|R| \leq \sum_{i=1}^N |R_i|$$

另外两个事实在1.5小节中已经证明过了，称它们为欧式空间开集的结构定理，即定理1.5和定理1.6. 我们再次呈现它们.

定理 1.2. 设 E 为 $\mathbb{R}$ 中非空开集，则 E 一定可写成**至多可列**个**两两不交**的开区间的并集，即存在一列开区间 (I_n)，使得

$$E = \bigcup_n I_n$$

定理 1.3. $\mathbb{R}^n$ 中任一开集 E 是**至多可列**个**两两不交**半开方体的并，即存在一列半开方体 (Q_n)，使得

$$E = \bigcup_n Q_n$$

注 1.1. 若将第二个定理中的条件“两两不交”改为“几乎不交”，则结论“半开方体”可以改为“闭方体”，参见 [**9**].

¶ Lebesgue 外测度. 下面我们从“外”[3]测度的角度建立测度的概念，意在将上文中体积的概念严格化.

定义 1.1. 设 E 为 $\mathbb{R}^d$ 的任意子集，定义 E 的 Lebesgue **外测度**为

$$\mathrm{m}^*(E) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|Q_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right\}$$

注 1.2. (1) 显然上述定义是良性的.
(2) 注意到上述定义中的覆盖方体列是可数个，被称为 **Lebesgue 覆盖**，它不能被减弱为有限个，后者称为 **Jordan 容度**[4]. 事实上若取 $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$，仅用有限个区间 I_n 覆盖，必然有 $\sum_{n=1}^{N}|I_n| \geq 1$. 然而一个简单的技巧 (见例1.1) 可以说明 $\mathrm{m}^*(E) = 0$.
(3) 将定义中的覆盖方体改为一般的矩体或球体，定义是等价的，我们将在3.1小节中给出证明，见小段落3.1.

例 1.1. $\mathbb{R}^d$ 中的至多可数点集 $E := \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ 的外测度为 0，即 $\mathrm{m}^*(E) = 0$. 进而 $\mathbb{R}^d$ 中的离散集 $\mathbb{Q}^d$ 和 $\mathbb{Z}^d$ 的外测度为 0.

证明. 注意到 E 总可以被 $(x_n - 2^{-k_n}\epsilon, x_n + 2^{-k_n}\epsilon)_{n\geq 1}$(其中 k_n 为序列 $(k)_{k\geq 1}$ 的某个子列) 覆盖，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x_n - 2^{-k_n}, x_n + 2^{-k_n})| \leq \epsilon$$

□

例 1.2. $\mathbb{R}^d$ 中的**闭**方体 Q 的外测度等于 $|Q|$，即 $\mathrm{m}^*(Q) = |Q|$.

证明. 首先，显然有 $\mathrm{m}^*(Q) \leq |Q|$. 再证反向不等式. 由定义1.1，对任意 $\epsilon > 0$，存在一个 Lebesgue 覆盖 (Q_n)，只要证$|Q| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|Q_n|$.

[3]也可以从“内”测度的角度引入，参见 [**14, 21**]

[4]参见 [**9**].

为此，取更大的开方体 $\tilde{Q}_n$，使得

$$|Q_n| \leq |\tilde{Q}_n| \leq |Q_n| + \frac{\epsilon}{2^n}$$

由 Q 的紧性可知存在有限的覆盖，不妨记为 $\tilde{Q}_1, \cdots, \tilde{Q}_N$. 由引理1.2，我们有

$$|Q| \leq \sum_{n=1}^{N} |\tilde{Q}_n| \leq \sum_{n=1}^{N} |Q_n| + \epsilon$$

令 $\epsilon \to 0$ 即可. □

注 1.3. 上述证明中的论断 "$|Q| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n|$" 并非显然的，我们无法使用引理1.2由于论断中有可列个方体. 但证明中三个技术在后续的讨论中极其常用：

- 外测度定义中上确界 sup 的 $\epsilon - \delta$ 语言；
- 取更大 (小)一点点的方体列；
- 紧性归结为有限求和.

例 1.3. $\mathbb{R}^d$ 中的**开**方体 Q 的外测度等于 $|Q|$，即 $\mathrm{m}^*(Q) = |Q|$.

证明. 显然 $\mathrm{m}^*(Q) \leq \mathrm{m}^*(\overline{Q}) = |Q|$. 再证反向不等式. 与上一例的证明类似，对任意 $\epsilon > 0$，存在紧方体 $K \subset Q$，使得

$$|K| \geq |Q| - \epsilon$$

此时 Q 的任意 Lebesgue 覆盖 (Q_n) 仍然覆盖 K，结合紧性与引理1.2，与上一例类似，不妨

$$|K| \leq \sum_{n=1}^{N} |Q_n|$$

于是

$$|Q| - \epsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n|$$

令 $\epsilon \to 0$ 可知 $|Q| \leq \mathrm{m}^*(Q)$. □

例 1.4. $\mathbb{R}^d$ 中矩体 R 的外测度等于 $|R|$，即 $\mathrm{m}^*(R) = |R|$.

例 1.5. $\mathrm{m}^*(\mathbb{R}^d) = \infty$.

¶ Lebesgue 外测度的性质. 下面我们研究 Lebesgue 外测度的性质，读者会发现相比朴素体积，外测度在可加性上“不尽人意”．第一个性质是显然的.

命题 1.1 (单调性). 若 $E \subset F$，则 $\mathrm{m}^*(E) \leq \mathrm{m}^*(F)$.

命题 1.2 (次可加性). 若 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，则 $\mathrm{m}^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_n)$.

证明. 不妨 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_n) < \infty$，否则用可列个半径为 n 的球分划 E[5]. 由 $\mathrm{m}^*(E_n)$ 的定义，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $(Q_{nk})_{k\geq 1}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_{nk}| \leq \mathrm{m}^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$$

由于 $E \subset \bigcup_{n,k} Q_{nk}$，于是

$$\mathrm{m}^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{nk}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^*(E_n) + \epsilon$$

最后令 $\epsilon \to 0$ 即可. □

命题 1.3 (外正则性).

$$\mathrm{m}^*(E) = \inf\{\mathrm{m}^*(O) : E \subset O,\ O \text{ 为 } \mathbb{R}^d \text{ 中开集}\}$$

证明. 不妨 $\mathrm{m}^*(E) < \infty$. 首先，显然 $\mathrm{m}^*(E) \leq \inf\{\mathrm{m}^*(O) : E \subset O,\ O \text{ 为 } \mathbb{R}^d \text{ 中开集}\}$. 再证反向不等式.

对任意 $\epsilon > 0$，存在 E 的覆盖 (Q_n)，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Q_n| \leq \mathrm{m}^*(E) + \frac{\epsilon}{2}$$

现在取更大的开方体列 $(\tilde{Q}_n)$，使得

$$|Q_n| \leq |\tilde{Q}_n| \leq |Q_n| + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

取 $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}_n$，则有

$$\inf\{\mathrm{m}^*(O) : E \subset O,\ O \text{ 为 } \mathbb{R}^d \text{ 中开集}\} \leq \mathrm{m}^*(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{Q}_n| \leq \mathrm{m}^*(E) + \epsilon$$

最后，令 $\epsilon \to 0$ 即可. □

[5]往后的证明中我们不再解释此处“不妨”的原因.

命题 1.4 (弱可加性 1). 若 $E=E_1\cup E_2$，且 $d(E_1,E_2)>0$，则

$$\mathrm{m}^*(E)=\mathrm{m}^*(E_1)+\mathrm{m}^*(E_2)$$

证明. 不妨 $\mathrm{m}^*(E_1)+\mathrm{m}^*(E_2)<\infty$. 显然有 $\mathrm{m}^*(E)\leq\mathrm{m}^*(E_1)+\mathrm{m}^*(E_2)$. 下证反向不等式.

对任意 $\epsilon>0$，存在 E 的覆盖 (Q_n)，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|Q_n|\leq\mathrm{m}^*(E)+\epsilon$$

不妨通过分解方体，使得 $\mathrm{diam}(Q_n)\leq\frac{1}{10}d(E_1,E_2)$[6]，于是同一方体不可能同时与 E_1,E_2 相交. 于是

$$\mathrm{m}^*(E_1)+\mathrm{m}^*(E_2)\leq\sum_{\text{与 }E_1\text{ 相交}}|Q_n|+\sum_{\text{与 }E_2\text{ 相交}}|Q_n|\leq\mathrm{m}^*(E)+\epsilon$$

最后，令 $\epsilon\to0$ 即可. □

命题 1.5 (弱可加性 2). 若 $E=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}Q_n$，其中 (Q_n) 为 $\mathbb{R}^d$ 中几乎不交的矩体列，则

$$\mathrm{m}^*(E)=\sum_{n=1}^{\infty}|Q_n|$$

证明. 不妨 $\sum_{n=1}^{\infty}|Q_n|<\infty$. 显然 $\mathrm{m}^*(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}|Q_n|$，再证反向不等式. 对任意 $\epsilon>0$，存在 E 的覆盖 (Q_n)，使得

$$\mathrm{m}^*(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}|Q_n|+\epsilon$$

取更小的闭方体列 (K_n)，使得

$$|K_n|\geq|Q_n|-\frac{\epsilon}{2^n}$$

---

[6]其中 $\mathrm{diam}(E)$ 表示集合 E 的直径，即

$$\mathrm{diam}(E):=\sup_{x,y\in Q}\{d(x,y)\}$$

此时 (K_n) 两两之间有正距离. 注意到 (不妨)$\mathrm{m}^*\left(\bigcup_{n=1}^N K_n\right) \leq \mathrm{m}^*(E)$, 由上一命题归纳可知 $\sum_{n=1}^N |K_n| \leq \mathrm{m}^*(E)$，进而

$$\mathrm{m}^*(E) \geq \sum_{n=1}^{N} |Q_n| + \frac{\epsilon}{2^n}$$

最后，令 $N \to \infty$, $\epsilon \to 0$ 即可. □

† Cantor 三分集. 我们在1.5小节中介绍了基本的 Cantor 三分集 $\mathcal{C}$ 以及集合论中的性质，见例1.14. 下面从外测度的角度研究 $\mathcal{C}$ 的容度性质. 通过归纳法，容易证明

(1) $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$;

(2) $\mathcal{C}_n$ 由 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间构成. 进而有

$$\mathrm{m}^*(\mathcal{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

因此 $\mathrm{m}^*(\mathcal{C}) = 0$.

此外，回忆命题1.13的 (4) 的证明，我们实际上构造了一个函数 $F : \mathcal{C} \to [0,1]$. 这里再现函数 F 的构造. 回忆 $\mathcal{C}$ 中的元素都可以视为每位取 $0,2$ 的三进制规范表达的小数，即

$$x \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 3^{-n}, \quad a_n \in \{0,2\}$$

而函数 F 刻画为

$$F : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 3^{-n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 3^{-n}$$

其中 $b_n = a_n/2$. 容易验证 F 是连续于 $\mathcal{C}$ 的双射，我们称 F 为 **Cantor-Lebesgue 函数**.

1.1. Lebesgue 测度与可测集. 本节我们将正式定义 Lebesgue 测度以及介绍可测集的概念.

回忆定理1.5和定理1.6，开集在欧式空间子集的结构中相对容易研究，因此我们采用从开集的角度引入可测的概念，参见 [**9**].

¶ Lebesgue 测度与可测集的定义.

定义 1.2. 设 E 为 $\mathbb{R}^d$ 中子集，称 E 是 Lebesgue **可测**的，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\mathbb{R}^d$ 的开集 O 满足 $E \subset O$，使得

$$\mathrm{m}^*(O - E) \leq \epsilon$$

进而定义 E 的 **Lebesgue 测度**为

$$\mathrm{m}(E) := \mathrm{m}^*(E)$$

直观来说，可测集在“体积”意义上是类似开集的集合. 我们有如下一系列性质.

命题 1.6. (1) $\mathbb{R}^d$ 中任一开集可测.

(2) 若 $\mathrm{m}^*(E) = 0$，那么 E 可测，称 E 为**零测集**[7]；进一步，E 的任一子集可测.[8]

(3) 可数个可测集的并可测.

(4) $\mathbb{R}^d$ 中任一闭集可测.

(5) 可测集的补集可测.

(6) 可数个可测集的交可测.

证明. (1) 是显然的. (2) 是命题1.3的直接推论. (3) 通过例1.1中类似的方法容易证明.

对于 (4)，由 (3)，不妨取紧集 F，事实上可以通过可数个半径为 n 的球体将无界闭集作分划. 对任意 $\epsilon > 0$，由命题1.3，存在开集 O 覆盖 F，使得

$$\mathrm{m}^*(O) \leq \mathrm{m}^*(F) + \epsilon$$

[7]在实分析中，大部分在零测集上“坏”的性质我们是不关心的. 称命题 P 在可测集 E 上**几乎处处**成立，如果 P 至多在 E 的某个零测子集上不成立，记为“P 成立 a.e.”.

[8]这个性质告诉我们：当 $E \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$，若 E 零测，则 E 的子集一定属于 $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$. 然而当 $E \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ 且零测，则其子集未必属于 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$，见小段落1.1. 我们把满足该性质的测度称为**完备测度**，$\mathrm{m}|_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}}$ 是 $\mathrm{m}|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}}$ 的完备化.

此时 $O-F$ 为开集，再由定理1.6，可知存在可列个几乎不交的方体 (Q_n)，使得

$$O-F=\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$$

固定 $N\geq 1$，$K:=\bigcup_{n=1}^{N} Q_n$ 为紧集，并且 $d(F,K)>0$[9]，又由命题1.4，

$$\mathrm{m}^*(O)\geq \mathrm{m}^*(F)+\mathrm{m}^*(K)=\mathrm{m}^*(F)+\sum_{n=1}^{N}|Q_n|$$

进而

$$\sum_{n=1}^{N}|Q_n|\leq \epsilon$$

最后，令 $N\to\infty$，有

$$\mathrm{m}^*(O-F)\leq \sum_{n=1}^{\infty}|Q_n|\leq \epsilon$$

对于 (5)，设 E 可测，对任意 $n\geq 1$，存在开集 O_n，满足 $O\supset E$，使得

$$\mathrm{m}^*(O_n-E)<\frac{1}{n}$$

注意到闭集 $F_n:=O_n^c\subset E^c$，令 $F:=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，由 (3)(4) 可知 F 可测. 由于

$$E^c-F\subset O_n-E$$

于是 $\mathrm{m}^*(E^c-F)<\frac{1}{n}$，进而 E^c-F 零测. 因此 $E^c=(E^c-F)\cup F$ 可测.

最后，由 (3) 和 (5)，(6) 是显然的. □

¶ Lebesgue 测度与可测集的性质. 下面一个定理说明可测集的测度概念是符合体积的朴素认识的.

定理 1.4 (可加性). 设 (E_n) 为一列互不相交的可测集，记 $E:=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，则

$$\mathrm{m}(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{m}(E_n)$$

---

[9] 参见 [**16**].

证明. 不妨 $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) < \infty$. 显然 $\mathrm{m}(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n)$. 下证反向不等式.

对任意 $\epsilon > 0$，由于 E_n^c 可测，存在开集 O_n，满足 $E_n^c \subset O_n$，使得

$$\mathrm{m}^*(O_n - E_n^c) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

令 $F_n = O_n^c$ 为紧集，同样有 $\mathrm{m}^*(E_n - F_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$ 并且 F_n 两两不交，于是有正距离. 固定 $N \ge 1$，由命题1.4可知

$$\mathrm{m}^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{m}^*(F_n) \ge \sum_{n=1}^{N} \mathrm{m}^*(E_n) - \epsilon$$

另一方面 $\mathrm{m}^*(E) \ge \mathrm{m}^*\left(\bigcup_{n=1}^{N} F_n\right)$，于是

$$\mathrm{m}^*(E) \ge \sum_{n=1}^{N} \mathrm{m}^*(E_n) - \epsilon$$

最后，令 $N \to \infty$，$\epsilon \to 0$ 即可. □

推论 1.1. 设 (E_n) 为 $\mathbb{R}^d$ 中一列可测集.

(1) (上连续性) 若 $E_n \nearrow E$，则 $\mathrm{m}(E) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)$
(2) (下连续性) 若 $E_n \searrow E$，且存在 $k \ge 1$ 使得 $\mathrm{m}(E_k) < \infty$，那么

$$\mathrm{m}(E) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)$$

证明. 我们只证 (1),(2) 是类似的,证明留给读者. 不妨 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E) < \infty$. 由练习1.3，不妨将 (E_n) 写成两两不交的 (F_n)[10]，又由定理1.4，我

[10]由单调性写作 $F_n = E_n - E_{n-1}$，$n \ge 2$，$F_1 = E_1$.

们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}(E) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(F_n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{m}(E_n - E_{n-1}) + \mathrm{m}^*(E_1) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=2}^{N} \mathrm{m}(E_n - E_{n-1}) + \mathrm{m}^*(E_1) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}(E_n)
\end{aligned}$$

□

注 1.4. 上述定理的 (2) 中条件“存在 $k \geq 1$ 使得 $\mathrm{E_k} < \infty$”不可去，例如

$$E_k = (k, \infty)$$

† σ-代数与 Borel 集. 回忆命题1.6，可以看出集合 {可测集} 关于可数的并、交、补封闭. 我们把上述性质抽象出来.

定义 1.3. 称 $\mathbb{R}^d$ 的子集族 $\mathcal{A}$ 是一个 **σ-代数**，如果它关于可数的并、交、补封闭.

例 1.6. {可测集} 是一个 σ-代数，称为 Lebesgue σ-代数，记为 $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$. 至此，我们可以将 Lebesgue 测度 m 视为 $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$ 上的广义集合函数，即

$$\mathrm{m} : \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d} \to [0, \infty]$$

定义 1.4. 设 $\mathcal{X}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 的子集族，称 σ-代数 $\mathcal{S}$ 是**由 $\mathcal{X}$ 生成的 σ-代数**，如果

$$\mathcal{S} = \bigcap_{\mathcal{X}\subset\mathcal{A},\ \mathcal{A}\text{ 为 }\sigma\text{-代数}} \mathcal{A}^{11}$$

记为 $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$. 特别地，由 $\mathbb{R}^d$ 所有开集生成的 σ-代数称为 **Borel σ-代数**，记为 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$，其中元素称为 **Borel 集**.

[11]容易验证是一个 σ-代数.

注 1.5. 显然，开集、闭集都是 Borel 集，开集的可数交和闭集的可数并也是 Borel 集. 由命题1.6，Borel 集是可测集.

注 1.6. 事实上，我们有如下真包含关系：

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$$

例子将在小段落1.1和小段落1.1中构造.

定义 1.5. 称 $\mathbb{R}^d$ 的子集 E 称为 G_δ **集**，如果 E 可写作开集的可数交；称为 F_σ **集**，如果 E 可写作闭集的可数并.

例 1.7. 例1.14中的 Cantor 三分集是一个 F_σ 集，事实上 $\mathcal{C} = \bigcup_n \mathcal{C}_n$；并且 $\mathcal{C}$ 是 G_δ 的补集，事实上 $\mathcal{C} = [0,1] - \bigcup_n G_n$.

¶ 可测集的本质.

定理 1.5 (可测集的刻画). E 为 $\mathbb{R}^d$ 中子集，对任意 $\epsilon > 0$，下述命题互相等价：

(1) (外正则性) 存在开集 O，满足 $E \subset O$，使得 $\mathrm{m}(O - E) \leq \epsilon$；
(2) (内正则性) 存在闭集 F，满足 $E \subset F$，使得 $\mathrm{m}(F - E) \leq \epsilon$；
(3) 存在 G_δ 集 G，使得 $\mathrm{m}(E \Delta G) = 0$；
(4) 存在 F_σ 集 F，使得 $\mathrm{m}(E \Delta F) = 0$.

证明. 注意到 (1) 与 (2) 等价，(3) 与 (4) 等价. 下证 (1) 与 (3) 等价.

(1) $\Longrightarrow$ (2)，对任意 $n \geq 1$，存在开集 O_n，满足 $E \subset O_n$，使得 $\mathrm{m}(O_n - E) < 1/n$，令 $G = \bigcap_n O_n$ 即可.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 设 G 为满足条件的 G_δ 集，注意到 $E = G - (G - E)$ 是可测的，由定义1.2可知存在满足条件的开集 O. □

利用上述定理，我们不难得到如下可测集的逼近方法.

推论 1.2 (可测集逼近定理). E 为 $\mathbb{R}^d$ 中可测集，若 $\mathrm{m}(E)$ 有限，对任意 $\epsilon > 0$，

(1) 存在紧集 K，满足 $K \subset E$，使得 $\mathrm{m}(E - K) \leq \epsilon$；
(2) 存在闭方体的有限并 $F := \bigcup_{n=1}^N Q_n$，使得

$$\mathrm{m}(E \Delta F) \leq \epsilon$$

† 不可测集的构造. 首先我们完善朴素体积观点的第二条公理，即**平移不变性**. 但事实上，我们有以下性质，参见 [**9**]，对任意 $E \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$，

(1) **平移不变性**：设 $T:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为平移变换，有

$$\mathrm{m}(T(E)) = \mathrm{m}(E)$$

(2) **旋转不变性**[12]：设 $A \in \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$

$$\mathrm{m}(A(E)) = \mathrm{m}(E)$$

其中 $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ 表示 $d \times d$ 的旋转群.

(3) **(各向异性) 伸缩**[13]：

$$\mathrm{m}(S(E)) = v_1 \cdots v_d \mathrm{m}(E)$$

(4) **线性变换**[14]：设 $L:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为线性变换，有

$$\mathrm{m}(L(E)) = \det(L)\mathrm{m}(E)$$

其中 det 表示线性变换的行列式函数.

下面我们构造不可测集. 取闭区间 $[0,1] \subset \mathbb{R}$. 规定 $[0,1]$ 上的等价关系：

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

令 $I = [0,1]/\sim$，由定理2.1，其中每个等价类可以选出代表元，将所有这样的代表元构成的集合记为 $\mathcal{N}$. 断言 $\mathcal{N}$ 是**不可测**的. 为此，记 $[-1,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_n\}_{n\geq 1}$，$\mathcal{N}_n = \mathcal{N} + r_n$. 不难验证

(1) $[0,1] \subset \bigcup_n \mathcal{N}_n \subset [-1,2]$；

(2) $\mathcal{N}_m \cap \mathcal{N}_n = \emptyset$，$m \neq n$.

因此

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(\mathcal{N}_n) = \mathrm{m}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n\right) \leq 3$$

这是不可能的，因此 $\mathcal{N}$ 不可测.

问题 1. 每个正测集必有不可测子集.

[12] 作为小段落3.1叙述的直接推论.

[13] 设 E 中的点表示为 $(x_1, \cdots, x_d)$，伸缩 S 指的是 $S(E) := \{(v_1x_1, \cdots, v_dx_d)\}$.

[14] 由下文，容易说明 L 是可测的.

† 非 Borel 集的可测集的构造. 下面我们构造可测的非 Borel 集. 为此，需要一个引理.

引理 1.3. 设 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为严增的连续函数，g 将 Borel 集映为 Borel 集.

证明. 规定集合

$$\mathcal{B}^* := \{B : B\text{和}g(B)\text{都是 Borel 集}\}$$

只要证 $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 注意到 $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 是显然的，下面证明反向不等式. 为此只要证 $\mathcal{B}^*$ 是包含所有开区间的 σ-代数.

首先，对任意 $B \in \mathcal{B}^*$，则 $B, B^c \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. 由 g 严增，$g(B^c) = g(\mathbb{R}) - g(B)$，进而 $B^c \in \mathcal{B}^*$. 此外，对集合列 $(B_n) \in \mathcal{B}^*$，由 g 严增，$g\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n g(B_n)$，又 $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，因此 $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}^*$. 因此 $\mathcal{B}^*$ 是 σ-代数. 最后，由于 g 严增且连续，$\mathcal{B}^*$ 包含全体开区间. □

回忆 Cantor-Lebesgue 函数 $F : [0,1] \to [0,1]$. 令

$$g(x) := F(x) + x$$

于是 $g : [0,1] \to [0,2]$ 为严增的连续函数. 注意到 $\mathrm{m}(g([0,1] - \mathcal{C})) = 1$，故 $\mathrm{m}(g(\mathcal{C})) = 1$，由思考题1，设 $\mathcal{N}$ 为 $g(\mathcal{C})$ 的不可测子集. 我们断言 $g^{-1}(\mathcal{N})$ 不是 Borel 集，若不然，由引理1.3，$\mathcal{N}$ 可测，矛盾！最后，由于 $\mathcal{C}$ 零测，且 $g^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{C}$，故其可测. 因此 $g^{-1}(\mathcal{N})$ 为非 Borel 集的零测集.

1.2. 可测函数. 本节中我们将为定义积分做准备，并且预见性地指明哪些函数是可以被定义积分的，这样的函数将被称为**可测函数**.

¶ 简单函数与可测函数. 首先，我们从最简单的函数形式出发，构造复杂的函数. 回忆例1.6，当集合取成矩体时，可以定义**阶梯函数**，即

$$f := \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{R_i}$$

一般地，

定义 1.6. 称 f 是一个**简单函数**，如果

$$f := \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$$

其中 E_i 为 $\mathbb{R}^d$ 中有限可测集.

定义 1.7. 设 E 为 $\mathbb{R}^d$ 中可测集，$f : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 称为**可测函数**，如果对任意 $\alpha > 0$，

$$\{f < \alpha\} := f^{-1}([-\infty, a))$$

是可测集.

利用定义，不难验证以下性质.

命题 1.7. 设 f 为可测函数，则对任意 $\alpha, \beta > 0$，有

(1) $\{f > \alpha\}$ 可测，反之亦然.
(2) $\{f \geq \alpha\}$ 可测，反之亦然.
(3) $\{f \leq \alpha\}$ 可测，反之亦然.
(4) $\{f = \alpha\}, \{f = +\infty\}, \{f = -\infty\}$ 可测.
(5) $\{f < (\leq) + \infty\}, \{f > (\geq) + \infty\}$ 可测.
(6) 特别地，当 f 是有限函数. 则 $\{\alpha \leq f \leq \beta\}$ 可测，反之亦然.
(7) 特别地，当 f 是有限函数. 设 $G(F)$ 为 $\mathbb{R}$ 中开 (闭) 集，则 $f^{-1}(G)(f^{-1}(F))$ 是可测的，反之亦然.
(8) 任意 $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，都有 $f^{-1}(B)$ 可测.

练习 1.1. 证明上述命题中的 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) 和 (6).

练习 1.2. 证明上述命题中的 (7) 和 (8).

提示. 回忆欧式空间中开集的结构. □

命题 1.8. 设 (f_n) 为一列可测函数，则以下函数均可测：

$$\sup_n\{f_n\}, \quad \inf_n\{f_n\}, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

进而若

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

则 f 可测.

证明. 由例1.2可知

$$\{\sup_n f_n > \alpha\} = \bigcup_n \{f_n > \alpha\}$$

显然 $\sup_n\{f_n\}$ 可测，同理 $\inf_n\{f_n\}$ 可测. 注意到 $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_n\{\sup_{k\geq n} f_k\}$，于是 $\limsup_{n\to\infty} f_n$ 可测，同理 $\liminf_{n\to\infty} f_n$ 可测. □

命题 1.9. 设 f, g 为 $\mathbb{R}^d$ 上有限可测函数，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$，则

$$\lambda f + \mu g, \quad fg$$

可测.

证明. 由定义1.7，显然 $\lambda f, \mu g$ 可测. 对于 $f+g$，注意到

$$\{f+g<\alpha\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{f<\alpha-r\} \cap \{g<r\})$$

即可. 另外，由 $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$，只要说明 f^2 可测即可. 又注意当 $\alpha \geq 0$ 时，有

$$\{f^2 > \alpha\} = \{f < -\sqrt{\alpha}\} \cup \{f > \sqrt{\alpha}\}$$

因此 f^2 可测. □

命题 1.10. 设 f 为可测函数，若 $f = g$ a.e.，则 g 可测.

证明. 注意到

$$\mathrm{m}\left(\{f>\alpha\}\Delta\{g>\alpha\}\right) = 0$$

因此 $\{g>\alpha\}$ 可测. □

事实上，可测函数是很广的概念，利用定义和上述性质去验证某些函数的可测性是很好的练习.

练习 1.3. 证明：简单函数是可测的.

练习 1.4. 设 f 为可测函数，证明：$f_+ := \max\{f, 0\}$，$f_- := \max\{-f, 0\}$ 可测.

练习 1.5. 证明：连续函数是可测的.

练习 1.6. 证明：$\mathbb{R}$ 上的单调函数是可测的.

¶ 简单函数逼近. 后续为了建立可测函数的积分,我们利用一些"砖块"(即简单函数甚至阶梯函数)对可测函数做逼近.

定理 1.6 (简单函数逼近). (1) 设 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 为非负可测函数,则存在一列单调非减的简单函数 (φ_n),使得逐点收敛于 f,即 $\varphi_n\nearrow f$.

(2) 一般地,若 f 仅可测. 则一列简单函数 (φ_n),使得

(a) $(|\varphi_n|)$单调非减;

(b) $\varphi_n\to f$.

特别地,若 f(几乎处处) 有限,则上述收敛是 (几乎处处)一致的[15].

证明. (1) 的证明是构造性的, (2) 由练习1.4, 只要注意到 $f=f_+-f_-$ 即可. 对任意 $N\geq 1$,记 $B_N:\{x\in\mathbb{R}^d:|x|\leq N\}$,令

$$F_N(x):=\begin{cases} f(x), & f(x)\leq N,\ x\in B_N\\ N, & f(x)>N,\ x\in B_N\\ 0, & x\notin B_N\end{cases}$$

对任意 $0\leq k\leq N\cdot 2^N+1$,规定

$$E_{N,k}:=\{x\in\mathbb{R}^d:\frac{k}{2^N}\leq F_N(x)<\frac{k+1}{2^N}\}$$

易知 $(E_{N,k})_{0\leq k\leq N\cdot 2^N+1}$ 是互相不交的可测集列. 构造

$$\varphi_N(x):=\sum_{k=0}^{N\cdot 2^N+1}\frac{k}{2^N}\chi_{E_{N,k}}$$

不难验证

(1) $0\leq F_N-\varphi_N\leq\frac{1}{2^N}$;

(2) $(\varphi_N)\nearrow f$.

因此 (φ_n) 是要求的简单函数列. □

注 1.7. 我们断言上述证明的选取"二进"的方式分划集合 $\mathrm{supp}F_N$ 是必要的,否则 (φ_N) 未必单增.

---

[15]参见 [**14**].

事实上，我们用更简单的“砖块”做逼近，但逼近的程度会略差一些，参见 [**9**].

定理 1.7 (阶梯函数逼近). 设 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 为可测函数，则存在一列阶梯函数 (ψ_n)几乎处处逐点收敛于 f，即 $\psi_n\to f$ a.e..

注 1.8. (1) 上述定理的结论不可加强为完全逐点收敛[16].
(2) 函数列 (ψ_n) 不一定单调.

¶ Littlewood 三原则.

L1 每个 (有限可测) 集合“几乎”是矩体的有限并.
L2 每个 (可测) 函数“几乎”是连续的.
L3 每个 (逐点) 收敛“几乎”是一致的.

其中原则 L1 被推论1.2的 (2) 概述. 而原则 L2 和 L3 分别对应定理1.9和定理1.8.

定理 1.8 (Egorov，1911). 设 (f_n) 为可测集 E 上的一列可测函数，满足

(1) $\mathrm{m}(E)<\infty$；
(2) (f_n) 几乎处处逐点收敛于函数 f，即 $f_n\to f$ a.e..

那么对任意 $\epsilon>0$，存在可测集 $E_\epsilon\subset E$，满足 $\mathrm{m}(E-E_\epsilon)<\epsilon$，使得 (f_n) 在 E_ϵ 上一致收敛于 f，即 $f_n\rightrightarrows f$，$x\in E_\epsilon$.[17]

注 1.9. (1) 进一步，存在闭集A_ϵ，满足 $\mathrm{m}(E-A_\epsilon)<\epsilon$，使得 (f_n) 在 A_ϵ 上一致收敛，参见 [**9**].
(2) 条件 $\mathrm{m}(E)<\infty$ 是必要的，事实上有 $\mathbb{R}$ 上的逐点收敛 $f_n\to f(x)=1$，其中 $f_n=\chi_{[-n,n]}$ 不可能找到“基本上”的一致收敛.
(3) 条件中的 a.e. 不是本质的.

证明. 证明不困难，回忆练习1.6，我们分以下三步证明.

[16]但在实分析中并不重要.

[17]这段描述有时被称为“基本上”一致收敛.

Step 1 令集合

$$E_k^n := \{x \in \mathbb{R}^d : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n},\ \forall j \geq k\}$$

注意到 $E_k^n \nearrow E$, w.r.t k. 可以选出 $(k)_{k\geq 1}$ 的子列 $(k_n)_{n\geq 1}$，使得对任意 $n \geq 1$，有

$$\mathrm{m}(E - E_{k_n}^n) < 2^{-n}$$

Step 2 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N = N(\epsilon)$，使得 $\sum_{n\geq N} 2^{-n} < \epsilon$. 令 $E_\epsilon = \bigcap_{n\geq N} E_{k_n}^n$. 我们断言 E_ϵ 就是所要求的集合.

Step 3 最后，验证 E_ϵ 满足要求.

“基本上” 注意到

$$\begin{aligned}\mathrm{m}(E - E_\epsilon) &= \mathrm{m}\left(E \cap \bigcup_{n\geq N} (E_{k_n}^n)^c\right) \\ &\leq \sum_{n\geq N} \mathrm{m}(E - E_{k_n}^n) \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

即可.

一致收敛 对任意 $\delta > 0$, 选取 $n \geq N$, 使得 $n > 1/\delta$. 注意到 $x \in E_\epsilon$ 蕴含 $x \in E_{k_n}^n$. 当 $j \geq k_n$ 时，有

$$|f_j(x) - f(x)| < \delta$$

这说明在 E_ϵ 中的一致收敛.

□

定理 1.9 (Lusin). 设 f 为可测集 E 上的有限可测函数，其中 $\mathrm{m}(E) < \infty$，则对任意 $\epsilon > 0$，存在可测集 E_ϵ，满足 $\mathrm{m}(E - E_\epsilon) < \epsilon$，使得 $f|_{E_\epsilon}$ 连续.[18]

注 1.10. (1) [**14**] 中将条件中的 $\mathrm{m}(E) < \infty$ 去除，仍然成立. 但此时不能仅通过定理1.8证明，参见美国数学月刊 (1988).

---

[18]与定理1.8类似，E_ϵ 可换成闭集 A_ϵ，参见 [**9**].

(2) 结论不能写作"f 的连续点集为 E_ϵ"，我们有反例 Dirichlet 函数. 这里的连续指的是 E_ϵ 作为 E 子空间拓扑上的连续，即称在 x_0 处连续，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $x \in E_\epsilon \cap B_\delta(x_0)$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

证明. 为证明这个定理，我们回忆数学分析中一个事实，即若连续函数列 (f_n) 一致收敛于 f，那么 f 也连续，参见 [**7**]. 分以下三步证明.

Step 1 任意 $\epsilon > 0$，由定理1.7，存在一列阶梯函数 (f_n) 几乎处处收敛于 f. 由定理1.8，存在集合 S，满足

$$\mathrm{m}(E - S) < \epsilon/2$$

使得 (f_n) 在 S 上一致收敛.

Step 2 由阶梯函数的性质，对每个 f_n，存在 S_n，满足

$$\mathrm{m}(S_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$

使得 $f_n|_{S-S_n}$ 连续. 记 $E_\epsilon := \bigcap_{n\geq 1}(S - S_n)$. 我们断言 E_ϵ 就是所要求的集合.

Step 3 与定理1.8的证明类似，不难验证 $\mathrm{m}(E - E_\epsilon) < \epsilon$. 由于 (f_n) 在 E_ϵ 上连续且一致收敛于 f，因此 f 在 E_ϵ 上连续.

□

¶ 依测度收敛. 目前为止，分析中函数列的收敛通常指 (几乎处处) 逐点收敛和一致收敛. 但这两种收敛不能刻画所有的"逼近"，下面我们定义依测度收敛，[**14**] 的 115-116 页的评述中指明这种收敛不关心具体哪一点的收敛，这是其与前两种收敛的本质差别.

定义 1.8. 设 (f_n) 是一列可测函数，称 (f_n) **依测度收敛**于 f，如果对任意 $\epsilon > 0$，都有

$$\mathrm{m}\left(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right) \to 0, \quad n \to \infty$$

注 1.11. (1) 注意到上述定义中的 $\mathrm{m}\left(\{x \in \mathbb{R}^d : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}\right)$ 可以视为 (实数) 序列，不妨记为 $\mathrm{m}_n(f;\epsilon)$，因此函数列 (f_n)

依测度收敛等价于“测度序列”满足 $\mathrm{m}_n(f;\epsilon) \to 0$, $\forall \epsilon$. 于是，可以为这个序列赋予 Cauchy 意义下的收敛，反映到函数列 (f_n) 的收敛，即依测度 Cauchy 列. 称 (f_n) 是一个**依测度 Cauchy 列**，如果对任意 $\delta > 0$，存在 $N \geq 1$，使得任意 $m, n \geq N$，都有

$$\mathrm{m}\left(\{x \in \mathbb{R}^d : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}\right) < \delta, \quad \forall \epsilon > 0$$

[**14**] 中证明定理1.11蕴含依测度收敛 (诱导拓扑) 的某种“完备性”.

(2) 事实上，我们值得提问，依测度意义下的收敛，极限是否唯一[19]? 反设存在两个极限 f, g，即存在 $\epsilon_0 > 0$，使得

$$\mathrm{m}\left(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon_0\}\right) > 0$$

由定义1.8，有 $\mathrm{m}_n(f;\epsilon_0/2), \mathrm{m}_n(g;\epsilon_0/2) \to 0$. 又由于

$$\mathrm{m}\left(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon_0\}\right) \leq \mathrm{m}_n(f;\epsilon/2) + \mathrm{m}_n(g;\epsilon_0/2)$$

令 $n \to \infty$，与假设矛盾.

我们援引 [**14**] 中的一个例子，它说明依测度收敛不蕴含逐点收敛.

例 1.8. 令函数列

$$f_n := \chi_{[j\cdot 2^{-k},(j+1)\cdot 2^{-k}]}, \quad n = 2^k + j,\ j = 0, 1, \cdots, 2^k - 1$$

显然 (f_n) 在 $[0, 1]$ 上依测度收敛于 0，但每点都不收敛于 0.

可以看出，上述函数列 (f_n) 存在逐点收敛的子列，一般地，它由定理2保证. 事实上，我们将在2.1小节中构造例2.1，其中：(1)、(3) 的函数列逐点收敛且依测度收敛；(2) 逐点收敛但不依测度收敛[20].

我们有如下系列定理说明二者的关系.

定理 1.10. 设 (f_n) 为可测集 E 上一列可测函数.

---

[19] 几乎处处的意义下.

[20] 不依测度收敛的原因是定义域无界，同时说明定理1中的条件 $\mathrm{m}(E) < \infty$ 是必要的.

(1) (Legesgue) 设$m(E) < \infty$，若 $f_n \to f$ a.e.，则 (f_n) 依测度收敛.

(2) (Riesz) 若 (f_n) 依测度收敛于 f，则存在子列(f_{n_k}) 几乎处处收敛于 f.

证明. (1) 对任意 $\delta > 0$, 由定理1.8, 存在集合 A_δ, 满足 $m(E - A_\delta) < \delta$，使得 (f_n) 在 A_δ 上一致收敛. 因此对任意 $\epsilon > 0$，存在 N，当 $n \geq N$ 时，有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in A_\delta$$

进而

$$m_n(f; \epsilon) \leq m(E - A_\delta) < \delta$$

说明 (f_n) 依测度收敛.

(2) 证明分两步.

Step 1 给定 $k \geq 1$，由定义1.8，存在 n_k，使得当 $n \geq n_k$ 时，有

$$m_n(f; 2^{-k}) < 2^{-k}$$

不妨取关于 k 递增的 n_k. 我们断言 (f_{n_k}) 就是所要求的子列.

Step 2 令 $S_k := \{|f_{n_k} - f| \geq 2^{-k}\}$，于是 $m(S_k) < 2^{-k}$. 再令 $S = \limsup_{n=1}^\infty S_n = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k \geq n} S_k$，由推论1.1，不难验证 $m(S) = 0$. 对 $x \notin S$，即存在 $N \geq 1$，对任意 $k \geq N$，有

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < 2^{-k}$$

这说明 $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$. 因此 $f_{n_k} \to f$ a.e..

□

定理 1.11. 设 (f_n) 为依测度 Cauchy 列，则存在可测函数 f，使得 (f_n) 依测度收敛于 f.

证明. 证明分成以下四步.

Step 1 给定 $k \geq 1$，由定义1.8，存在 $n_k \geq 1$，当 $m, n \geq n_k$ 时，有

$$m\left(\{|f_m - f_n| \geq 2^{-k}\}\right) < 2^{-k}$$

不妨取关于 k 递增的 n_k，断言 (f_{n_k}) 几乎处处收敛.

Step 2 与定理1.10中 (2) 的证明类似，定义 $S_k := \{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq 2^{-k}\}$，于是 $S := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} S_k$ 零测. 对 $x \notin S$，存在 N，对 $k \geq N$，有

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < 2^{-k}$$

进而如下关于 l 的级数

$$f_{n_l}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{l-1}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)), \quad l \geq 2$$

绝对收敛，不妨记极限为 $f(x)$. 因此 (f_{n_k}) 几乎处处收敛于 f.

Step 3 下证 (f_{n_k}) 依测度收敛于 f. 对任意 $\epsilon > 0$，取充分大的 N，使得 $A_\epsilon := \bigcup_{k\geq N} S_k$ 满足 $\mathrm{m}(A_\epsilon) < \epsilon$. 注意到 (f_{n_k}) 除 A_ϵ 以外一致收敛于 f，进而 (f_{n_k}) 依测度收敛于 f.

Step 4 最后证明依测度 Cauchy 列 (f_n) 收敛. 取充分大的 n，存在 $n_k \leq n < n_{k+1}$，注意到

$$|f_n - f| = |f_n - f_{n_k}| + |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| + |f_{n_{k+1}} - f|$$

我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}\left(\{|f_n - f| \geq 3\cdot 2^{-(k+1)}\}\right) &\leq \mathrm{m}\left(\{|f_n - f_{n_k}| \geq 2^{-k}\}\right) \\
&\quad + \mathrm{m}\left(\{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| \geq 2^{-k}\}\right) \\
&\quad + \mathrm{m}\left(\{|f_{n_{k+1}} - f| \geq 2^{-(k+1)}\}\right) \\
&< 2^{-k} + 0 + 2^{-(k+1)}
\end{aligned}$$

因此 (f_n) 依测度收敛于 f.

□

注 1.12. 上述证明中我们证明了依测度 Cauchy 列的另一项基本性质，即若有依测度收敛的子列，则 Cauchy 列收敛.

第一节习题

¶ Lebesgue 测度的不变性. 回忆小段落1.1.

问题 2. (1) 利用小段落3.1的结果证明 Lebesgue 测度的旋转不变性.

(2) 证明 Lebesgue 测度的平移不变性.

(3) (a) 证明 Lebesgue 测度的伸缩不变性；
  (b) 证明 Lebesgue 测度的线性变换不变性；
  (c) 证明 Lebesgue 测度的微分同胚不变性.

¶ 等测包. 本段落习题依据于小段落1.

问题 3. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 中，O_n 为如下开集：

$$O_n := \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, E) < \frac{1}{n}\}$$

回答以下问题：

(1) 若 E 紧，验证 $G := \bigcup_n O_n$ 是 E 的**等测包**，进一步 $\mathrm{m}(E) = \mathrm{m}(G)$.

(2) 说明当 E 为无界闭集或有界开集时上述结果都不成立.

(3) 本习题意图研究 G_δ-集和 F_σ-集.
  (a) 说明 $\mathbb{R}^d$ 中闭集是 G_δ-集，开集是 F_σ-集. [提示：考虑上述集列 (O_n).]
  (b) 问题系列1.2中说明 $\mathbb{Q}$ 是 F_σ 集，但不是 G_δ 集；给出一个 Borel 集的例子说明其既不是 F_σ 集，也不是 G_δ 集

¶ 类 Cantor 集与 Cantor-Lebesgue 函数. 继小段落1的讨论.

问题 4. (1) (Cantor-Lebesgue 函数的构造 1)
  (a) 验证 F 的良性，进一步验证 F 是单增函数.
  (b) 证明 F 是在 $\mathcal{C}$ 上连续的双射.
  (c) 将 F 用折线的方式连续延拓到 $[0, 1]$ 上.

(2) (Cantor-Lebesgue 函数的构造 2)
  (a) 对每个 n 定义 $\mathcal{C}_n$ 上折线函数 F_n，使得 F_n 逐点收敛于 F，参见 [**9**].

(b) 证明上述收敛速度被估计为

$$|F_n - F| < \frac{1}{2^n}$$

问题 5 (类 Cantor 集). 本题希望构造**类 Cantor 集**:

(1) (含参 Cantor 集)

(a) 回忆 Cantor 集对 $[0,1]$ 区间依次作 3 等分, 每次去掉“中间”的开区间. 现考虑构造 Cantor“五分”集, 即对区间 $[0,1]$ 作 5 等分, 每次去掉“中间”的开区间, 尝试给出构造并验证命题1.13、小段落1中的结果. 证明第4中此时 Cantor“五分”集的 Hausdorff 维数为 $\log_5 4$.

(b) 推广以上构造, 首先在区间 $[0,1]$ 中去除“中间”长度为 $\xi < 1$ 的开区间, 再在剩下两个闭区间中去除相对长度为 ξ 的开区间, 以此类推得到的集合称为**含参 Cantor 集**. 验证 (a) 中所有问题.

(2) (类 Cantor 集) 推广 (1) 中的构造, 将 (b) 中第 n 次挖去的开区间的相对长度记为 l_n, 例如第一次在 $[0,1]$ 中挖去 ξ 长度的开区间, 即 $l_1 = \xi$. 因此最终得到集合 $\tilde{\mathcal{C}}$ 的“长度”为

$$2^0 l_1 + 2^1 l_2 + \cdots + 2^{n-1} l_n + \cdots \tag{2}$$

回答以下问题:

(a) 构造 $\tilde{\mathcal{C}}$, 并证明 $\tilde{\mathcal{C}}$ 是 F_σ-集;

(b) 验证命题1.13;

(c) 验证小段落1中的结果. 注意公式2, 此时通过调节序列 (l_n) 的衰减速度使得 $\mathrm{m}(\tilde{\mathcal{C}}) > 0$.

(3) 证明: 设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上有限可测, 且 g 连续, 则 $g \circ f$ 可测. 反过来, $f \circ g$ 不一定可测, 尝试给出反例. 进而以此构造非 Borel 集的 Lebesgue 可测集.

¶ Baire 纲集理论. 在欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 中定义 **Baire 第一纲集**, 我们称 $E \subset \mathbb{R}^d$ 是**第一纲**的, 如果 E 可写作至多可数个疏朗集的并, 此时称 E^c 为**泛集**; 否则称**第二纲**的.

问题 6. (1) (a) 参考 [**14, 13**], 证明定理1.7.

(b) 证明 $\mathbb{Q}$ 是 F_σ 集，但不是 G_δ 集.

(2) (a) 利用“纲集”的语言重新叙述定理1.7.

(b) 将上述“纲集”的语言推广到一般拓扑空间，特别地，当空间是完备的度量空间时，证明定理1.7；参考 [**8**]，当空间是局部紧的 Hausdorff 空间时，证明定理1.7.

(3) 这个小问意图说明纲集理论是拓扑学的语言，与测度论关系不大：证明问题2中的类 Cantor 集是第一纲集，并以此推出第一纲集可以有正测度.

¶ Borel-Cantelli 引理及其应用.

问题 7. (1) (Borel-Cantelli) 设 $(E_n)_{n\geq 1}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中可测集列，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}(E_n) < \infty$$

证明 $\mathrm{m}(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$.

(2) 设 (f_n) 为 $[0,1]$ 上一列几乎处处有限的可测函数. 证明存在正序列 c_n 使得

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \to 0 \text{ a.e.} x$$

[提示：选取 c_n 使得

$$\mathrm{m}\left(\{x : |f(x)/c_n| > 1/n\} < 2^{-n}\right)$$

并应用 (1) 的结果.]

¶ 可卷集与 Brunn-Minkowski 不等式.

问题 8. 本习题意图研究集合“加法”. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^d$，定义

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

(1) (a) 证明：当 A 或 B 为开集时，$A + B$ 为开集；

(b) 证明：当 A, B 为闭集时，$A + B$ 可测；[提示，证明 $A + B$ 为 F_σ-集.]

(c) 说明 (b) 中的 $A + B$ 不一定为闭集.

(d) 称闭集 A, B 是**可卷**的，如果对任意 R，存在 R'，使得

$$|x+y| \le R \Longrightarrow |x| \le R',\ |y| \le R'$$

证明：若 A, B 可卷，则 $A+B$ 为闭集.

(2) (a) 设 $E \subset \mathbb{R}$，且 $\mathrm{m}^*(E) > 0$. 证明：对任意 $0 < \alpha < 1$，存在开区间 I，使得

$$\mathrm{m}^*(E \cap I) \ge \alpha \mathrm{m}^*(I)$$

本习题说明可测集包含几乎整个区间.

(b) 在 (a) 的设定下，证明 E 的**差集**

$$\{z \in \mathbb{R} : z = x - y,\ x, y \in E\}$$

包含以原点 O 为中心的开区间.

(c) 利用 (b)，证明：当 $\mathrm{m}(E), \mathrm{m}(F) > 0$ 时，$E + F$ 包含开区间.

问题 9. 本习题意图说明当 $\mathrm{m}(A) = \mathrm{m}(B) = 0$ 时，$\mathrm{m}(A+B) > 0$.

(1) 在 $\mathbb{R}$ 中，令 $A = \mathcal{C}$(Cantor 集)，$B = \mathcal{C}/2$，证明 $A+B \supset [0,1]$.

(2) 在 $\mathbb{R}^2$ 中，令 $A = I \times \{0\}, B = \{0\} \times I$，其中 $I = [0,1]$. 证明 $A + B = I \times I$.

问题 10 (Brunn-Minkowski 不等式). 设 A, B 为 $\mathbb{R}^d$ 中闭集，证明

$$\mathrm{m}(A+B)^{1/d} \le \mathrm{m}(A)^{1/d} + \mathrm{m}(B)^{1/d}$$

提示. 参见 [**9**]. □

¶ 测度函数的连续性.

问题 11. (1) 设可测集 $E \subset \mathbb{R}$，证明函数

$$\mathrm{m}(E \cap (\infty, x])$$

关于 x 是 Lipschitz 连续的，且 Lipschitz 系数为 1[21].

[21]称函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是 **Lipschitz 连续**的，如果存在常数 $M > 0$，使得

$$|f(x) - f(y)| \le M \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

(2) 设 $E_1 \subset E_2$，满足

$$\alpha = \mathrm{m}(E_1) < \mathrm{m}(E_2) = \beta$$

证明：对任意 $\alpha < \gamma < \beta$，都存在可测集 $E_1 \subset F \subset E_2$，使得 $\mathrm{m}(F) = \gamma$.

(3) 设 f 为 $[a, b]$ 上几乎处处有限的可测函数，证明

$$\mathrm{m}\left(\{f > \alpha\}\right), \quad \mathrm{m}\left(\{f \leq \alpha\}\right)$$

分别关于 α 为右连续和左连续函数.

并且称

$$\inf\{M\}$$

为 **Lipschitz 系数**.

2. 积分论

2.1. Lebesgue 积分的构造. Riemann 在 1854 年建立的函数可积概念本质上刻画的是函数整体的某种“弱连续性”（见小段落2.1中的评述），直观上一般的 Riemann 可积函数是介于“肉眼可见的不连续”到“几乎连续”之间的函数，这个观察逐渐不适用于 20 世纪上旬人们希望建立的依赖纲集理论[22]和测度理论[23]研究函数的愿望，在这个浪潮下，基于测度论的积分理念，即 Lebesgue 积分被构造出来. 我们以如下四步骤通过逼近建立 Lebesgue 积分理论.

(1) 简单函数
(2) 有界有限支函数
(3) 非负可测函数
(4) 一般可测函数

在整个 Lebesgue 积分的建立过程中，我们发展起来的逼近思想从技术层面上最早来自于定理1.8对一致收敛使用条件的优化. 在建立逐步逼近的过程中，顺带解决了不同情景下积分与极限算子的换序问题，第一个本质的刻画是定理2.1；而进一步对性质的刻画，最本质的是引理2.2；基于我们对引理2.2的理解，以及例2.1带来的启发，可以通过施加一个控制的必要性条件得到定理2.5. 经验总结下，使用中比较方便的是定理2.

¶ 简单函数的积分. 简单函数 $f = \sum_i a_i \chi_{E_i}$ 的积分最自然的定义是 $\int f = \sum_i a_i \mathrm{m}(E_i)$. 不可避免的问题是上述定义的良性性，事实上我们有**标准形式** $f := \sum_i a_i E_i$，其中

(1) $a_i \neq a_j, \quad i \neq j$;
(2) $E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j$.

并且不难看出任一简单函数的标准形式存在且唯一，因此可以定义标准形式的积分，即

$$\int f = \sum_i a_i \mathrm{m}(E_i)$$

[22]参见 Baire 在 20 世纪前后的工作.

[23]参见 Lebesgue 在 20 世纪初的工作

为了推广到一般的简单函数,我们断言:所有简单函数都可以通过如下步骤成为标准形式,并且不改变积分值. 事实上,令 $f=\sum_{i=1}^{N} b_i\chi_{F_i}$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, 其中 $\alpha_i\in\{0,1\}$, 以及

$$G_\alpha:=\{x\in\mathbb{R}^d|\alpha_i=1,x\in F_i;\ \alpha_i=0,x\notin F_i\}$$

于是

$$f=\sum_i b_i\chi_{F_i}=\sum_i\sum_\alpha b_i\chi_{F_i\cap G_\alpha}$$

进而 $f=\sum_\alpha\left(\sum_{i,\ \text{若}\alpha_i=1} b_i\right)\chi_{G_\alpha}$. 最后, 合并函数值相同的 G_α 即可. 因此我们保证如下定义的良性.

定义 2.1. 设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上简单函数, 定义 Lebesgue 积分为

$$\int f:=\sum_i a_i\mathrm{m}(E_i) \tag{3}$$

其中 $f=\sum_i a_i\chi_{E_i}$. 进一步, 若可测集 $E\subset\mathbb{R}^d$, 则定义

$$\int_E f:=\int f\cdot\chi_E$$

由上述讨论, 等式3左侧的值不依赖简单函数形式的选取, 因此总可以选取标准形式参与计算, 容易验证以下性质.

命题 2.1. 设 f,g 为简单函数, $E,F\subset\mathbb{R}^d$ 为可测集, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

(1) **线性性**:

$$\int \lambda f+\mu g=\lambda\int f+\mu\int g$$

(2) **积分区域可加性**:

$$\int_{E\cup F} f=\int_E f+\int_F f$$

其中 $E\cap F=\emptyset$.

(3) **单调性**: 若 $f\le g$, 则

$$\int f\le\int g$$

取等号当且仅当 $f=g$ a.e..

(4) **三角不等式**:

$$\left|\int f\right|\le\int|f|$$

¶ 有界有限支函数的积分.

定义 2.2. 称可测函数 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 为**有界有限支函数**，如果存在 $M>0$，使得 $|f|\le M$ 且 $\mathrm{m}(\mathrm{supp}f)<\infty$.

通过建立简单函数的积分，我们希望通过逼近的方法定义有界有限支函数的积分. 定义的实现与良性分别由以下引理的 (1) 和 (2) 保证.

引理 2.1. 设 f 为有界有限支函数，则存在一列一致有界的简单函数 (φ_n)，并且$\mathrm{supp}\varphi_n\subset\subset\mathrm{supp}f$，使得 $\varphi_n\to f$ a.e.. 于是

(1) 存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n$$

(2) 若 $f=0$ a.e.，则 (1) 中的极限为 0.

证明. 先证 (1). 利用 Cauchy 收敛原理. 对任意 $\epsilon>0$，由定理1.8，存在 A_ϵ 满足 $\mathrm{m}(\mathrm{supp}f-A_\epsilon)<\epsilon$，使得 (φ_n) 在 A_ϵ 上一致收敛. 于是对充分大的 m,n，有

$$\begin{aligned}\left|\int\varphi_m-\int\varphi_n\right| &\le\int_{\mathrm{supp}f}|\varphi_m-\varphi_n|\\ &=\int_{A_\epsilon}|\varphi_m-\varphi_n|+\int_{\mathrm{supp}f-A_\epsilon}|\varphi_m-\varphi_n|\\ &\le\mathrm{m}(A_\epsilon)\cdot\epsilon+2M\cdot\mathrm{m}(\mathrm{supp}f-A_\epsilon)\\ &\le(\mathrm{m}(\mathrm{supp}f)+2M)\cdot\epsilon\end{aligned}$$

其中 M 为 (φ_n) 的一个上界. 因此极限 $\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n$ 存在.

对于 (2). 类似地，有

$$\left|\int\varphi_n\right|\le\int_{A_\epsilon}|\varphi_n|+\int_{\mathrm{supp}f-A_\epsilon}|\varphi_n|\le(\mathrm{m}(\mathrm{supp}f)+M)\cdot\epsilon$$

□

定义 2.3. 设 f 是有界有限支函数函数，定义 f 的 Lebesgue 积分为

$$\int f:=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n$$

其中 φ_n 取自引理2.1. 进一步，若可测集 $E\subset\mathbb{R}^d$，则定义

$$\int_E f := \int f\cdot\chi_E$$

注 2.1. 不难验证，上述定义兼容定义2.1. 此外，有界有限支函数函数的积分显然可再现命题2.1的结果.

定理 2.1 (有界收敛定理). 设 (f_n) 为一列可测函数，一致有界并且存在有限可测集 $E\subset\mathbb{R}^d$，使得$\mathrm{supp} f_n \subset\subset E$. 若 $f_n\to f$ a.e.，则 f 也可测，并且

(1) 有界 a.e.;

(2) $\mathrm{supp} f\subset E$ a.e.

进一步

$$\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|=0$$

特别地，$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int f$.

证明. 显然 f 是有界有限支函数 a.e.，且 $\mathrm{supp} f\subset E$ a.e.. 故只要证 $\lim_{n\to\infty}\int|f_n-f|=0$. 应用引理2.1证明中的估计，注意到

$$\int|f_n-f|\le\int_{\mathrm{supp} f-A_\epsilon}|f_n-f|+\int_{A_\epsilon}|f_n-f|\le(\mathrm{m}(\mathrm{supp} f)+2M)\cdot\epsilon$$

即可. □

定理2.1是定理2.5的特殊形式，它一定程度上回答了积分与极限算子的换序问题，即

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\int\lim_{n\to\infty}f_n$$

在目前的框架下，这个换序对于一致有界有限支函数[24]成立.

† Lebesgue 积分与 Riemann 积分比较. 至此，我们将新的积分理论与旧的积分概念作比较，以下定理说明 Riemann 积分是 Lebesgue 积分的特殊形式. 在实变函数的框架下，我们倾向于将 Riemann 可积函数视为某种整体的“弱连续”函数，事实上，回忆函数 f 是 Riemann 可积的：

$$\mathrm{m}(\{x|\mathrm{osc} f(x)>0\})=0$$

[24]见定理2.1中 (φ_n) 的条件.

即不连续点集是零测的，参见 [7]. 粗糙地看，在可测函数的范畴下，我们有如下认识

$$\text{Lebesgue积分}|_{\{\text{“弱连续” 函数}\}} = \text{Riemann积分}$$

定理 2.2. 设 f 为 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数，则

(1) f 可测；

(2) f 有界有限支，并且

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f$$

证明的是容易的，只要注意到 Darboux 关于 Riemann 可积的刻画，即 **Darboux 上（下）和**等于函数 **Riemann 和**的极限[25].

证明. 我们对区间 $[a,b]$ 作分划 $P_n : a = x_0 < \cdots < x_n = b$，进而 Darboux 上 (下) 和为

$$\overline{I}(P_n) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad \underline{I}(P_n) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

其中 $M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f, m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f$. 观察到 $\overline{I}(P_n)$ 可以视为简单函数 $\psi_n := \sum_{i=1}^n M_i\chi_{[x_i,x_{i-1}]}$[26]的积分，$\underline{I}(P_n)$ 同样对应有 φ_n. 根据 Darboux 上 (下) 和关于分划加细的单调不增 (减) 性，我们有如下不等式链：

$$\varphi_1 \leq \cdots \leq \varphi_n \leq \cdots \leq \Phi \leq f \leq \Psi \leq \cdots \leq \psi_n \leq \cdots \leq \psi_1$$

其中 Φ, Ψ 分别为 $(\varphi_n), (\psi_n)$ 的逐点极限. 由 Riemann 可积的充要条件，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \underline{I}(P_n) = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \overline{I}(P_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_n$$

由定理2.1可知

$$\int_{[a,b]} \Phi = \int_{[a,b]} \Psi$$

---

[25]参见 [7].

[26]前 $n-1$ 个区间应取左闭右开，最后一个区间取闭，为了记号方便，我们简记为该式.

结合命题2.1中 (3) 的取等条件，可知 $\Phi = f = \Psi$ a.e.，并且 f 是可测的有界有限支函数. 又由定义2.3可得

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f$$

$\square$

¶ 非负可测函数的积分. 进一步施以逼近的思想，对非负可测函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，定义集合

$$\mathcal{A}_f := \{g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} | 0 \leq g \leq f,\ g \text{ 为有界有限支函数}\}$$

定义 2.4. 设 f 为非负可测函数，定义 f 的 Lebesgue 积分为

$$\int f := \sup_{g \in \mathcal{A}_f} \int g$$

称 f **可积**，如果 $\int f < \infty$. 进一步，若可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$，则定义

$$\int_E f := \int f \cdot \chi_E$$

我们再现类似命题2.1的系列性质，但线性性的证明有区别.

命题 2.2. 设 f, g 为非负可测函数，$\lambda, \mu > 0$.

(1) **线性性**：

$$\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$$

(2) **积分区域可加性**：

$$\int_{E \cup F} f = \int_E f + \int_F f$$

其中 $E \cap F = \emptyset$.

(3) **单调性**：若 $f \leq g$ 且 g 可积，那么 f 也可积，并且

$$\int f \leq \int g$$

取等号当且仅当 $f = g$ a.e..

(4) **三角不等式**：

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

(5) 若 f 可积，则 $f < \infty$ a.e..

(6) 若 $\int f = 0$，则 $f = 0$ a.e..

证明. 先证 (1). 取 $\tilde{f} \in \mathcal{A}_f, \tilde{g} \in \mathcal{A}_g$，于是 $\lambda\tilde{f} + \mu\tilde{g} \in \mathcal{A}_{\lambda f+\mu g}$. 自然有

$$\int \lambda\tilde{f} + \mu\tilde{g} = \lambda \int \tilde{f} + \mu \int \tilde{g}$$

对上式两边关于 $\tilde{f}, \tilde{g}$ 取 sup，可得

$$\int \lambda f + \mu g \geq \lambda \int f + \mu \int g$$

另一方面，取 $\eta \in \mathcal{A}_{\lambda f+\mu g}$. 记 $\eta_1 = \min\{af, \eta\}$，自然有 $0 \leq \eta \leq af$. 于是

$$\eta_2 := \eta - \eta_1 \leq af + bg - \eta_1 \leq bg$$

令 $\tilde{f} = \eta_1/\lambda \in \mathcal{A}_f, \tilde{g} = \eta_2/\mu \in \mathcal{A}_g$，进而

$$\int \eta = \lambda \int \tilde{f} + \mu \int \tilde{g} \leq \lambda \int f + \mu \int g$$

对上式两边关于 η 取 sup 即可.

(2)(3) 是 (1) 的自然推论，其中 (3) 的取等条件的必要性被 (6) 蕴含. (4) 是显然的. 下证 (5)(6) 对 (5)，若 $\mathrm{m}(\{x|f(x) = \infty\}) > 0$，由定义2.4，对任意 $M > 0$，有

$$\int f \geq \mathrm{m}(\mathrm{supp} f) \cdot M$$

与可积矛盾. 对于 (6)，若 $\mathrm{m}(\mathrm{supp} f) > 0$，可取出一列 (f_n) 满足定理2.1中的条件，并且 $\int f_n > 0$，这与条件 $\int f = 0$ 矛盾. □

至此，我们在非负的情形下回看积分与极限算子的换序问题，一个自然的问题是：一列非负可测函数 (f_n)，满足 $f_n \to f$ a.e.，是否有

$$\int f_n \to \int f$$

答案是否定的.

例 2.1. (1) $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$ 逐点收敛到 0，但 $\int f_n \to 1$.
(2) $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ 逐点收敛到 0，但 $\int f_n \to 1$.
(3) $f_n = 1/n\chi_{[0,n]}$ 逐点收敛到 0，但 $\int f_n \to 1$.

注意到上述例子中的 (1) 无一致上界；而 (2) 和 (3) 无一致支集. 这说明定理2.1中的两个条件分别被减弱过多. 此外，不难看出极限函数的积分相对函数列不增[27]，归纳出以下定理.

引理 2.2 (Fatou，1906). 设 (f_n) 为一列非负可测函数，且 $f_n \to f$ a.e.，则

$$\liminf_{n\to\infty}\int f_n \geq \int f$$

注 2.2. 上述引理中的积分可以取 ∞.

证明. 对任意 $g \in \mathcal{A}_f$，自然有 $0 \leq g \leq f$，只要证

$$\int g \leq \liminf_{n\to\infty} f_n$$

注意到 $(g_n := \min\{g, f_n\})$ 为满足定理2.1条件的函数列. 由于 min 的连续性，可知

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty}\min\{g, f_n\} = \min\{g, \lim_{n\to\infty} f\} = g$$

由定理2.1，我们有

$$\int g = \lim_{n\to\infty}\int g_n$$

而 $g_n \leq f_n$，因此

$$\int g \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n$$

□

事实上，可以结合下极限的性质，通过修改 (f_n) 的趋向方式得到“妥协”的算子交换.

推论 2.1. 在引理2.2的设定下，有

(1) 若 $f_n \leq f$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$$

(2) (Levi 单调收敛定理) 设 $(f_n) \nearrow f$ a.e.，则

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$$

---

[27]从物理学上看是直观的，例2.1中的 f_n 可以视为某种概率分布的密度，整体概率测度 $\int f_n$ 不增.

(3) (逐项积分定理)设 (a_n) 为一列非负可测函数，则

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n$$

证明. (2)(3) 都是 (1) 的推论，我们只证明 (1). 只要注意到单调收敛的结果

$$\int f \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n$$

结合引理2.2即证. □

注 2.3. 回忆定理1.6，结合推论2可以简化定义2.4. 即用一列单调不减的简单函数积分的极限来定义非负可测函数的积分，

$$\int f := \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

其中 (f_n) 为一列单调不减的简单函数列，因此定义2.4兼容定义2.3.

回忆定理2.2，结合推论2，容易证明如下定理：

定理 2.3. (1) 设 f 为 $[a,\infty)$ 上非负，任意 $b>a$，f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 f 在 $[a,\infty)$ 上可测，且

$$\int_{[a,\infty]} f = \int_a^{\infty} f$$

(2) 设 f 在 $(a,b]$ 上非负，a 为瑕点[28]，任意 $A>a$，f 在 $[A,b]$ 上 Riemann 可积，则 f 在 $[a,b]$ 上可测，且

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f$$

¶ 一般可测函数的积分. 最后我们建立一般可测函数的积分. 注意到一般可测函数 f 可以唯一分解为“正”“负”部的组合. 即

$$f = f_+ - f_- \tag{4}$$

其中 $f_+ := \max\{f, 0\}$，$f_- := \max\{-f, 0\}$.

[28]参见 [**7**].

定义 2.5. 设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上可测函数，定义 f 的 **Lebesgue 积分**为

$$\int f := \int f_+ - \int f_-$$

称 f **可积**，如果 $|f|$ 可积 (见定义2.4). 进一步，若可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$，则定义

$$\int_E f := \int f \cdot \chi_E$$

注 2.4. (1) 不难看出，一般可测函数 f 可积等价于 f_+, f_- 都可积[29].

(2) 等式4在 f_+, f_- 均不可积时无意义，但根据定义，此时 f 必然不可积，故不在 Lebesgue 积分的框架内考虑.

(3) 在 f可积的情况下，等式4右侧的分解方式不影响积分的值[30]，事实上若有两种分解，即 $f_1 - f_2 = f = g_1 - g_2$，其中每个函数都非负. 调整得到 $f_1 + g_2 = g_1 + f_2$，由定义2.4对两边取积分，则有

$$\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2$$

注意到上述等式中的项都是有限的，通过移项和线性性，我们有

$$\int f_1 - \int f_2 = \int f_1 - f_2 = \int f = \int g_1 - g_2 = \int g_1 - \int g_2$$

因此定义2.5中的积分号 $\int$ 可以被视为从 $\mathbb{R}^d$ 上可积函数空间上的一个 (积分) 泛函，即

$$\int : \{可积函数空间\} \to \mathbb{R}$$

定理 2.4. 设 f, g 为 $\mathbb{R}^d$ 上可积函数，$E, F \subset \mathbb{R}^d$ 为可测集，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(1) **线性性**：

$$\int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g$$

[29] 注意这里的“可积”指的是定义2.4中的可积.

[30] 这蕴含定义2.5兼容定义2.4.

(2) **积分区域可加性**：

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f$$

其中 $E \cap F = \emptyset$.

(3) **单调性**：若 $f \le g$，则

$$\int f \le \int g$$

取等号当且仅当 $f = g$ a.e..

(4) **三角不等式**：

$$\left|\int f\right| \le \int |f|$$

(5) 若 f 可积，则 $f < \infty$ a.e..

(6) 若 $\int f = 0$，则 $f = 0$ a.e..

证明. 注意到 (1) 中的保数乘性是自然的，(2)(3)(4)(5)(6) 都是命题2.1的直接推论，我们只证明 (1) 中的保加法性. 事实上

$$f + g = (f+g)_+ - (f+g)_- = (f_+ + g_+) - (f_- + g_-)$$

而等式右侧两项都是非负可测函数，施以积分，结合利用命题2.1中的线性性得证. □

下面我们介绍积分论中几乎最著名又有用的定理，即**控制收敛定理**. 先引入一个引理.

引理 2.3. 设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上可积函数，对任意 $\epsilon > 0$，

(1) 存在可测集 (不妨取开球)B，使得

$$\int_{B^c} |f| < \epsilon$$

(2) 存在 $M > 0$，使得

$$\int_{\{|f| \ge M\}} |f| < \epsilon$$

(3) (积分的绝对连续性) 存在 $\delta > 0$，使得

$$\int_E |f| < \epsilon, \quad \forall E \subset \mathbb{R}^d,\ \mathrm{m}(E) < \delta$$

证明. 以下证明均不妨令 f 非负可积.

(1) 记 $(f_n := f\cdot\chi_{B_n})$，其中 B_n 为半径为 n 的球. 于是 $f_n \nearrow f$，由推论2，可取充分大的 n，使得

$$\int_{B_n^c} |f| = \int_{B_n^c} |f_n - f| < \epsilon$$

再令 $B = B_n$ 即可.

(2) 记

$$(f_n) := \begin{cases} (f)_{n\geq 1} & f < n \\ (0)_{n\geq 1} & f \geq n \end{cases}$$

于是 $f_n \nearrow f$，由定理2，可取充分大的 n，使得

$$\int_{\{|f|\geq n\}} |f| = \int_{\{|f|\geq n\}} |f_n - f| < \epsilon$$

再令 $M = n$ 即可.

(3) 由 (2)，可取 M，使得 $\int_{\{|f|\geq M\}} |f| < \epsilon/2$. 再令 $\delta = \epsilon/(2M)$，对任意可测集 A，当 $\mathrm{m}(A) < \delta$ 时，有

$$\int_A |f| = \int_{\{|f|\geq M\}\cap A} |f| + \int_{\{|f|<M\}\cap A} |f| < \epsilon$$

□

若读者将数学分析中的广义积分和瑕积分[31]的收敛性与上述引理中的 (1) 和 (2) 比较，可以发现，对于一般可测函数[32]在 Lebesgue 意义下“可积”是一个很直观的概念. 当我们视函数为某种 (概率) 密度时，

(1) 大范围的绝对密度需要被控制；

(2) “爆破”密度的区域需要被控制.

定理 2.5 (控制收敛定理). 设 (f_n) 为一列可测函数，使得 $f_n \to f$ a.e.. 若存在可积函数 g[33]，使得 $|f| \leq g$，那么

$$\int f = \int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

[31]参见 [**7**].

[32]这里主要关心无穷测度的支集或函数取无穷值.

[33]称函数 g 为 f 的**控制函数**.

事实上，有

$$\int |f_n - f| \to 0, \quad m \to \infty$$

以下我们给出两种证明.

证明. 利用有界收敛定理. 对任意 $\epsilon > 0$，令 $E_N := \{x | g(x) \leq N,\ x \in B_N\}$，$g_N = g \cdot \chi_{E_N}$. 由引理2.3，存在 $N = N(\epsilon, g)$，使得

$$\int_{E_N^c} g < \epsilon$$

固定 N，在 E_N 上对 (f_n) 应用定理2.1，有

$$\int_{E_N} |f_n - f| \to 0, \quad n \to \infty$$

因此

$$\int |f_n - f| \leq \int_{E_N} |f_n - f| + \int_{E_N^c} |f_n - f| < \epsilon + 2\int_{E_N^c} g < 3\epsilon$$

□

证明. 利用 Fatou 引理. 注意到 $g - f_n \geq 0$，并且

$$g \pm f_n \to g \pm f \text{ a.e.}$$

由引理2.2可知

$$\int g + f \leq \liminf_{n\to\infty} \int g + f_n$$

$$\int g - f \leq \liminf_{n\to\infty} \int g - f_n$$

最后由线性性以及注意到 $\liminf = -\limsup$ 得证. □

注 2.5. 结合小段落2.1处的评述，回忆数学分析中的广义积分，事实上我们不能说

$$\text{Lebesgue积分} \supset \text{广义Riemann积分}$$

注意到

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

在数学分析中是条件收敛但不绝对收敛的积分，参见 [**7**]，但在 Lebesgue 积分的框架下被定义成不可积.

† 复值函数的积分. 最后，我们将一般可测实值函数的积分推广到复值函数 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. 注意到

$$f = \mathrm{Re}f + i\mathrm{Im}f$$

其中 Re, Im 分别表示复数的实部和虚部. **复值函数** f 的 Lebesgue 积分定义为

$$\int f := \int \mathrm{Re}f + i\int \mathrm{Im}f$$

并且称 f **可积**如果复值的模 $|f| = (\mathrm{Re}f^2 + \mathrm{Im}f^2)^{1/2}$ 可积. 此时，可以将积分论中的所有性质推广到复值可积函数，往后若不加说明，默认函数都是复值的.

2.2. 可积函数空间. 下面我们希望把 $\mathbb{R}^d$ 上可积函数全体视为一个集合，并为其赋予合适的代数和拓扑结构，以便在将来统一地讨论它们并且与类似的结构比较. 这其实是 20 世纪发展的**泛函分析**早期希望做到的事情，为了更一般地刻画可积函数空间，我们先给出泛函分析中一些基本概念.

¶ 泛函分析中的基本概念.

定义 2.6. 设 $E(\neq \emptyset)$ 为一集合，称映射 $d : E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为 E 上的一个**度量**，如果满足以下三条性质：

(1) **正定性**：$d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in E$，同时 $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；
(2) **对称性**：$d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in E$；
(3) **三角不等式**：$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in E$.

称带有度量的集合 E 为一个**度量空间**，记为 (E, d).

根据基础拓扑学[34], 度量空间自动成为 Hausdorff 空间, 保证其上序列的极限唯一，因此谈论收敛是有意义的.

定义 2.7. 称度量空间 (E, d) 中的序列 (x_n)(依度量 d) **收敛于** $x_0 \in E$，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在 N，有

$$d(x_n, x) < \epsilon, \quad \forall n \geq N$$

[34]参见 [**16**].

记为 $x_n \to x_0$ 或 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

定义 2.8. 设 E 为度量空间，称 E 是**完备的**，如果任一 Cauchy 列收敛.

定义 2.9. 设 E 为域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，称 E 上的映射 $p : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个**半范数**，如果

(1) **齐次性** $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$;

(2) **三角不等式** $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E$.

称 p 是一个**范数**，如果还满足 $p(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$. 称 (E, p) 为**赋范空间**，此时 p 记为 $||-||$.

由定义可知赋范空间 $(E, ||-||)$ 在如下度量

$$d(x, y) := ||x - y||$$

下成为度量空间，因此赋范空间中的收敛，称为**依范数** $||-||$ **收敛**，记为

$$||x_n - x|| \to 0$$

同时我们称完备的赋范空间为 **Banach 空间**.

¶ 可积函数空间的构造.

定义 2.10. 称 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} | f\text{可积}\}$ 为**可积函数空间**.

为了囊括更多的函数，我们称 $\mathbb{R}^d$ 上的函数**局部可积**，记为 $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$，如果对 $\mathbb{R}^d$ 上任一紧子集 K，都有

$$\int_K |f| < \infty$$

容易看出 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ 是一个无穷维向量空间，下面为其赋予范数. 规定

$$||f||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)} := \int |f|$$

不难验证 $||-||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)}$ 是一个半范数. 但根据上文中积分的讨论，

$$||f||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)} = ||g||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)} \Longleftrightarrow f = g \text{ a.e.}$$

因此 $||-||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)}$ 仅在 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ 中不是一个范数. 我们有两种方式解决这个问题：

- 直接将“几乎处处”相等视为相等.
- 在 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ 中规定等价关系：

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \text{ a.e.}$$

作商空间 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)/\sim$[35]，同时 $||-||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)}$ 作用与 $[f]$ 规定为

$$||[f]||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)} := ||f||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)}$$

易见上述规定是良性的，并且 $||-||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)}$ 是一个范数. 因此往后总是不区分商空间 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)/\sim$ 和空间 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$，不区分等价类 $[f]$ 和函数 f，并且记号上使用都使用后者.

至此，我们构造了无穷维赋范线性空间 $(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d), ||-||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)})$，往后若不加说明，简记范数为 $||-||_{\mathcal{L}^1}$，并无歧义的情况下，直接记可积函数空间为 $\mathcal{L}^1$. 在这套语言下，积分论中的若干定理可以刻画称依范数 $||-||_{\mathcal{L}^1}$ 收敛的形式：

定理2.1 (有界收敛定理) 设 (f_n) 为一列可测函数，一致有界并且存在有限可测集 $E \subset \mathbb{R}^d$，使得$\text{supp} f_n \subset\subset E$. 若 $f_n \to f$ a.e.，则

$$||f_n - f||_{\mathcal{L}^1} \to 0$$

推论2 (Levi 单调收敛定理) 设 (f_n) 为一列非负可测函数，且 $f_n \nearrow f$ a.e.，则

$$||f_n - f||_{\mathcal{L}^1} \to 0$$

推论3 (逐项积分定理) 设 (a_n) 为一列非负可测函数，且作为函数项级数时，**部分和**

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n$$

逐点收敛于 f a.e.，则依范数 $||-||_{\mathcal{L}^1}$ 收敛，即

$$||S_n - f||_{\mathcal{L}^1} \to 0$$

---

[35]容易验证 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)/\sim$ 仍然是向量空间.

定理2.5 (控制收敛定理) 设 (f_n) 为一列可测函数，使得 $f_n \to f$ a.e.. 若存在可积函数 g[36]，使得 $|f| \le g$，则

$$||f_n - f||_{\mathcal{L}^1} \to 0$$

因此，依范数 $||-||_{\mathcal{L}^1}$ 收敛同其蕴含的度量一样，诱导 $\mathcal{L}^1$ 空间上的 (范数) 拓扑，该拓扑以 $||-||_{\mathcal{L}^1}$ 为尺度衡量度量球[37]. 因此，可以将原来分析学的若干事实，例如

- 收敛关系
- 完备性
- 稠密性

从拓扑的视角重新叙述或证明，下面我们简单回忆这些事实.

¶ 可积函数空间的若干性质.

† 收敛关系. 至此，在分析中我们已经知晓函数的至少四种收敛，即

一致收敛、a.e. 逐点收敛、依测度 m 收敛、依范数 $||-||_{\mathcal{L}^1}$ 收敛

它们的关系是：

$$\begin{tikzcd}
\text{一致收敛} \arrow[d] & \\
\text{a.e. 逐点收敛} \arrow[u, dashed, bend left, "\text{“基本上”}"] \arrow[d, "\text{有限集}"] \arrow[dr, dashed, bend left, "\text{Fatou,MCT,DCT}"] & \\
\text{依测度 m 收敛} \arrow[u, dashed, bend left, "\text{子列}"] & \text{依范数 } ||-||_{\mathcal{L}^1} \text{ 收敛} \arrow[l] \arrow[ul, dashed, "\text{子列}"]
\end{tikzcd}$$

注 2.6. 上图中依范数 $||-||_{\mathcal{L}^1}$ 收敛则存在子列逐点收敛的结论在定理2.6的证明中可见一斑. 而蕴含依测度 m 收敛可以在定理2.11中见到.

† 完备性. 下面我们证明可积函数空间的一个重要性质，即**完备性**.

定理 2.6 (Riesz-Fischer). 可积函数空间 $\mathcal{L}^1$ 是**完备**的.

---

[36]称函数 g 为 f 的**控制函数**.

[37]参见 [**16**].

证明. 取 Cauchy 列 (f_n). 由 Cauchy 列的定义，对任意 $k \geq 1$，存在子列 (f_{n_k})，使得

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_{\mathcal{L}^1} < 2^{-k}$$

令 $g = |f_{n_1}| + \sum_{j=2}^{\infty} |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| \geq 0$，显然可测. 由推论3，有

$$\int g = \int |f_{n_1}| + \sum_{j=2}^{\infty} \int |f_{n_j} - f_{n_{j-1}}| \leq \int |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

因此 g 几乎处处有限，即函数列 $\Big(f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=2}^{k}(f_{n_j} - f_{n_{j-1}})\Big)_{k\geq 1}$ 几乎处处收敛. 记 $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ a.e.. 又注意到 $|f| \leq |g|$，又 $g \in \mathcal{L}^1$，由定理2.5可知

$$||f_{n_k} - f||_{\mathcal{L}^1} \to 0 \text{ a.e.}$$

并且 $f \in \mathcal{L}^1$. 最后，由于 (f_n) 是 Cauchy 列，存在子列依范数 $||-||_{\mathcal{L}^1}$ 收敛于 f,，最后利用定理1.11证明中 Step 4 同样的方法[38]，可得 (f_n) 收敛于 f. □

† 稠密性. 此时 $\mathcal{L}^1$ 已成为范数 $||-||_{\mathcal{L}^1}$ 拓扑下的空间，称子集 F 是**稠密的**，如果 $\overline{F} = \mathcal{L}^1$，其中 $\overline{F}$ 指在 $||-||_{\mathcal{L}^1}$ 拓扑下的闭包. 翻译成分析的语言，即若 $f \in \mathcal{L}^1$，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $g \in F$，使得

$$||f - g||_{\mathcal{L}^1} < \epsilon$$

这恰为分析学中的**逼近**.

定理 2.7 ($\mathcal{L}^1$ 空间逼近定理). 下列空间在 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ 中稠密：

(1) 简单函数空间 $\text{simple}(\mathbb{R}^d)$.
(2) 阶梯函数空间 $\text{step}(\mathbb{R}^d)$.
(3) 紧支连续函数空间 $C_c(\mathbb{R}^d)$.
(4) 紧支光滑函数空间 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
(5) 若 $E(\subset \mathbb{R}^d)$ 有有限测度，则多项式函数空间 $\mathcal{P}(E)$ 在 $\mathcal{L}^1(E)$ 中稠密.

[38]读者可以模仿定理2.11证明的 Step 3 的方法.

证明，SKETCH. (1) 由定理2保证. (2) 的证明我们用阶梯函数逼近简单函数. 对于简单函数 $f = \chi_E$. 由推论1.2的 (2)，存在有限个几乎不交的闭方体 (Q_n)，使得

$$\mathrm{m}(E\Delta\bigcup_n Q_n) < \frac{\epsilon}{2}$$

现取缩小的 $(\tilde{Q}_n)$，满足 $\mathrm{m}(E\Delta\bigcup_n \tilde{Q}_n) < \epsilon/2$，那么 $g := \sum_n \chi_{\tilde{Q}_n}$ 为所要求的阶梯函数. 对于 (3)，利用连续函数逼近阶梯函数即可，参见 [**7**]. (4) 只要注意到 C_c^∞ 在 C_c 中稠密即可，证明留给读者. (5) 留作习题. □

$$\begin{tikzcd}
\text{simple}(\mathbb{R}^d) \arrow[r, "\text{逼近}"] & \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) & & \\
\text{step}(\mathbb{R}^d) \arrow[u, "\text{逼近}"] \arrow[r, "\text{逼近}"] & C_c(\mathbb{R}^d) \arrow[u, dashed] \arrow[r, "\text{逼近}"] & C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \arrow[ul, dashed] \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{P}(E) \arrow[ull, dashed]
\end{tikzcd}$$

注 2.7. 对于 $\mathbb{R}^d$ 中可测集 E，可以定义 $\mathcal{L}^1(E)$，定理2.6和定理2.7的 (1)、(3) 和 (4) 可以自然推广.

练习 2.1 (Tchebychev). 函数 $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$，那么

$$m(\{|f(x)| > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha}||f||_{\mathcal{L}^1}$$

2.3. Fubini 定理.

定理 2.8 (Fubini). 设 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 可积，则

(1) 对几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$，函数 $x \mapsto f^y(x)$ 在 $\mathbb{R}^{d_1}$ 上可积；

(2) $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\mathrm{d}x$ 在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上几乎处处有定义，且在 $\mathbb{R}^{d_2}$ 上可积；

(3)

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

其中 $f^y(x) := f(x,y)$, $x \in \mathbb{R}^{d_1}, y \in \mathbb{R}^{d_2}$； $d = d_1 + d_2$.

证明 (SKETCH). 设满足定理中三条性质的可积函数全体为 $\mathcal{F}$，只要证 $\mathcal{F} = \mathcal{L}^1$ 即可. 为此，我们做两个准备:

Pre 1 设 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}$，则 $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}$.

Pre 2 若 $f_n \nearrow f$ 或 $f_n \searrow f$，则 $f \in \mathcal{F}$.

下面只要证明一般可积函数 $f \in \mathcal{F}$ 即可. 为此，注意到 $f = f_+ - f_-$，由 Pre 1，只要验证非负可积函数即可；又由定理2，结合 Pre 2，只要验证简单函数即可；最后，根据 Pre 1，只要验证任意有限可测集上的特征函数即可. 因此，定理的证明归结为对可测集的讨论，我们采用以下的方式逼近一般的有限可测集.

$$\text{矩体} \Longrightarrow \text{开集} \Longrightarrow \text{一般可测集}$$

Step 1 显然，对任一矩体 Q，$\chi_Q \in \mathcal{F}$.

Step 2 对任一开集 O，$\chi_O \in \mathcal{F}$. 为此需要 Step 1 和如下两步：

substep 1 设可测集 $E \subset \partial Q$，则 $\chi_E \in \mathcal{F}$；

substep 2 设 E 是有限个几乎不交的矩体的并，则 $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Step 3 对任一有限可测集 E，$\chi_E \in \mathcal{F}$. 回忆定理1.5，只要证明零测集的特征函数与 G_δ-集的特征函数属于 $\mathcal{F}$ 即可. 而后者应用 step 2 和 Pre 2 即可.

□

利用上述定理，读者可以完成以下练习，它指明了本章开头对 Lebesgue 积分思想的评述.

练习 2.2. 设函数 f 非负可积，记 $E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d | f(x) > \alpha\}$，则

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \int_0^\infty \mathrm{m}(E_\alpha) \mathrm{d}\alpha$$

2.4. $\mathcal{L}^p$ 空间.

¶ $\mathcal{L}^p$ 空间的定义. 我们在2.2小节中介绍了可积函数空间，即 $\mathcal{L}^1$，意图从空间的角度研究一般的可积函数，下面将这个想法应用于更多重要的函数.

定义 2.11. 对 $p \geq 1$，称全体使得

$$\int |f|^p < \infty$$

的函数 (称为 p **方可积**的) 构成的集合为 $\mathcal{L}^p$ **空间**，记为 $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$，若取某一可测集 E，相应定义 $\mathcal{L}^p(E)$.

首先，$\mathcal{L}^p$ 是一个无穷维向量空间，其中对加法运算封闭由如下估计保证：

$$|f+g|^p \le 2^p\left(|f|^p + |g|^p\right)$$

下面规定 $\mathcal{L}^p$ 上的范数，简称 p 模，即

$$||f||_{\mathcal{L}^p} := \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$$

通过2.2小节中同样的方式说明 $||-||_{\mathcal{L}^p}$ 是正定的，此外，容易验证 $||-||_{\mathcal{L}^p}$ 是齐次的. 下面我们将通过证明一系列重要不等式来验证三角不等式.

定义 2.12. 称函数 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上**本性有界**，记为 ess.sup，如果至多存在零测集 E_0，使得 f 在 $\mathbb{R}^d - E_0$ 上有界. 我们用 $\mathcal{L}^\infty$ 表示全体本性有界函数构成的集合.

可以定义 $\mathcal{L}^\infty$ 中的范数为

$$||f||_{\mathcal{L}^\infty} := \inf\{M : \text{在 } \mathbb{R}^d \text{ 上几乎处处有 } |f(x)| \le M\}$$

我们也将证明这个范数的三角不等式.

¶ Minkowski 不等式. 首先，回忆数学分析中的 **Young 不等式**，参见 [**7**].

引理 2.4 (Young). 对任意 $a, b > 0$，$p, q > 0$，使得 $1/p + 1/q = 1$，有

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

这里的 p, q 称为一对**共轭指标**，特别地，$p = 1$ 时，$q = \infty$.

定理 2.9 (Hölder). 设 p, q 为共轭指标，以及 $f \in \mathcal{L}^p$，$g \in \mathcal{L}^q$，则

$$||fg||_{\mathcal{L}^1} \le ||f||_{\mathcal{L}^p} \cdot ||g||_{\mathcal{L}^q}$$

证明. 注意到要证的不等式是齐次的，只要证 $||f||_{\mathcal{L}^p} = ||g||_{\mathcal{L}^q} = 1$ 的情形，进而只要证

$$\int |fg| \le 1$$

由引理2.4，有

$$\int |fg| \leq \int \frac{|f|^p}{p} + \int \frac{|g|^q}{q} \leq \frac{||f||_{\mathcal{L}^p}}{p} + \frac{||g||_{\mathcal{L}^q}}{q} = 1$$

□

注 2.8. 显然，当 $p = 1, q = \infty$，上述不等式仍成立.

Hölder 不等式最直接的应用是用来控制有限区域 E 上函数的 $\mathcal{L}^1$ 范数. 即若 $f \in \mathcal{L}^p$，有

$$\int_E |f| \leq \mathrm{m}(E)^{1/q} ||f||_{\mathcal{L}^p}, \quad p > 1 \tag{5}$$

回忆积分的绝对连续性，即引理3，其中的测度的控制 δ 是视具体函数 f 而定的，即 $\delta = \delta(f)$. 若令 $\mathrm{m}(E) < \delta := \epsilon^q / ||f||^q_{\mathcal{L}^p}$，同样有

$$\int_E |f| \leq \epsilon$$

不过此时的 δ 依赖于整体的函数 p 模，而非具体的函数.

第二个应用在偏微分方程中非常基本，参见 [**22, 15, 3, 1**]. 例如，假设 $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q(E)$ 并且$1 \leq p < q$，其中$\mathrm{m}(E) < \infty$. 我们有如下估计：

$$\begin{aligned} ||f||^p_{\mathcal{L}^p} = \int_E |f|^p &\leq \left(\int (|f|^p)^{\tilde{p}} \right)^{1/\tilde{p}} \cdot \mathrm{m}(E)^{1/\tilde{q}} \\ &= \mathrm{m}(E)^{\frac{q-p}{q}} \cdot ||f||^p_{\mathcal{L}^q} \end{aligned}$$

一般我们不关心常数 $\mathrm{m}(E)^{\frac{q-p}{q}}$，或记为 $C(E, p, q)$. 简单写作

$$||f||_{\mathcal{L}^p} \lessapprox ||f||_{\mathcal{L}^q}$$

其中 $\tilde{p}, \tilde{q}$ 为共轭指标. 这说明$\mathcal{L}^q(E) \subset \mathcal{L}^p(E)$[39]. 这就是常说的“高模控制低模”. 特别指出，这里的“高模”可以取“∞”，在此之前，我们有义务说明定义2.12记号中的“∞”不是偶然的，事实上

$$|| - ||_{\mathcal{L}^\infty} = \lim_{p \to \infty} || - ||_{\mathcal{L}^p} \tag{6}$$

[39] 注意这里积分区域 E 是有限测度的.

不妨设 $0 < M = ||f||_{\mathcal{L}^\infty} < \infty$. 进而

$$\int_E |f|^p \le M\mathrm{m}(E)^{1/p}$$

于是 $\limsup_{p\to\infty} ||f||_{\mathcal{L}^p} \le M$ 反过来，对任意充分小的 $\epsilon > 0$，令 $A = \{f > M\epsilon\}$，则 $\mathrm{m}(A) > 0$，且有

$$\int_E |f|^p \ge \int_A |f|^p \ge (M-\epsilon)^p \mathrm{m}(A)$$

令 $p \to \infty$, $\epsilon \to 0$，有 $\liminf_{p\to\infty} ||f||_{\mathcal{L}^p} \ge M$. 因此 $\lim_{p\to\infty} ||f||_{\mathcal{L}^p} = ||f||_{\mathcal{L}^\infty}$.

注 2.9. 等式6对于无限区域同样成立，为此只要对无限区域作圆环划分即可.

第三个应用是**插值不等式**，简单来讲就是若 $f \in \mathcal{L}^r(E) \cap \mathcal{L}^s(E)$，那么对所有 $r \le p \le s$，$f \in \mathcal{L}^p(E)$.

练习 2.3 (插值不等式). 设 $\mathrm{m}(E) < \infty$，$f \in \mathcal{L}^r(E) \cap \mathcal{L}^s(E)$，且 $0 < \lambda < 1$，并设 $1/p = \frac{\lambda}{r} + \frac{1-\lambda}{s}$，于是

$$||f||_{\mathcal{L}^p} \le ||f||^{\lambda}_{\mathcal{L}^r} ||f||^{1-\lambda}_{\mathcal{L}^s}$$

定理 2.10 (Minkowski). 设 $1 \le p \le \infty$，若 $f, g \in \mathcal{L}^p$，则

$$||f+g||_{\mathcal{L}^p} \le ||f||_{\mathcal{L}^p} + ||g||_{\mathcal{L}^p}$$

这个定理直接说明 $\mathcal{L}^p$ 是赋范的.

证明. 不妨 $1 < p < \infty$，注意到

$$|f+g|^p \le |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1}$$

再两边积分，并对右边应用定理2.9，于是

$$\int |f+g|^p \le ||f||_{\mathcal{L}^p} \cdot ||f+g||^{p-1}_{\mathcal{L}^p} + ||g||_{\mathcal{L}^p} \cdot ||f+g||^{p-1}_{\mathcal{L}^p}$$

注意到

$$\int |f+g|^p = ||f+g||^p_{\mathcal{L}^p}$$

即可. □

特别地，当 $p<1$ 时，上述不等式是反向的，即此时 $\mathcal{L}^p$ 中的 $||-||)\mathcal{L}^p$ 不是一个范数[40]. 事实上，定理2.10与下述单位球的凸性[41]是等价的：

$$B := \{f \in \mathcal{L}^p : ||f||_{\mathcal{L}^p} \leq 1\}$$

注意到，若 $f, g \in B$，则对任意 $0<\lambda<1$，由定理2.10可知

$$||\lambda f + (1-\lambda)g||_{\mathcal{L}^p} \leq \lambda ||f||_{\mathcal{L}^p} + (1-\lambda)||g||_{\mathcal{L}^p} \leq 1$$

于是 B 是凸集. 反过来，若 B 是凸集，对 $f, g \in \mathcal{L}^p$，令

$$\tilde{f} = \frac{f}{||f||_{\mathcal{L}^p}},\ \tilde{g} = \frac{f}{||g||_{\mathcal{L}^p}}$$

于是 $\tilde{f}, \tilde{g} \in B$，再令 $\lambda = \frac{||f||_{\mathcal{L}^p}}{||f||_{\mathcal{L}^p}+||g||_{\mathcal{L}^p}}$，由凸性可知 $\lambda\tilde{f}+(1-\lambda)\tilde{g} \in B$，于是

$$\left|\left|\frac{f+g}{||f||_{\mathcal{L}^p}+||g||_{\mathcal{L}^p}}\right|\right|_{\mathcal{L}^p} \leq 1$$

这蕴含定理2.10.

¶ $\mathcal{L}^p$ 空间的性质. 回忆2.2小节中关于可积函数空间的三条性质，我们将其推广到一般的 $\mathcal{L}^p$ 空间. 事实上，我们有如下系列性质：

- 完备性
- 稠密性、可分性与平移连续性

† 完备性.

定理 2.11 (Riesz-Fischer). 设 $1 \leq p \leq \infty$，$\mathcal{L}^p$ 是完备的.

证明. 首先考虑 $p<\infty$，证明分以下三步.

---

[40]事实上，在调和分析中会考虑 $p<1$ 的情形，这时的 $||-||_{\mathcal{L}^p}$ 是一个**拟范数**，即

$$||f+g||_{\mathcal{L}^p} \leq 2^{1-p}(||f||_{\mathcal{L}^p}+||g||_{\mathcal{L}^p})$$

[41]注意到有限维欧式空间中 $\{x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d : \left(\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p} \leq 1\}$，其中 $p<1$，不是凸集.

Step 1 设 (f_n) 为依 $\mathcal{L}^p$ 范数收敛的 Cauchy 列，断言 (f_n) 依测度收敛. 事实上，给定 $\epsilon > 0$，对任意 $\delta > 0$，存在 $N \geq 1$，使得任意 $m, n \geq N$，有

$$||f_m - f_n||_{\mathcal{L}^p} < \delta$$

注意到

$$\delta^p > \int |f_m - f_n|^p \geq \int_{\{|f_m - f_n| \geq \epsilon\}} \epsilon^p = \epsilon^p \mathrm{m}\left(\{|f_m - f_n| \geq \epsilon\}\right)$$

因此

$$\mathrm{m}\left(\{|f_m - f_n| \geq \epsilon\}\right) < \frac{\delta^p}{\epsilon^p}$$

因此 (f_n) 为依测度 Cauchy 列，由定理2可知存在子列 (f_{n_k}) 几乎处处收敛，不妨记极限为 f.

Step 2 由引理2.2，

$$\int |f|^p \leq \liminf_{k \to \infty} \int |f_{n_k}|^p < \infty$$

可得 $f \in \mathcal{L}^p$，故上述子列收敛.

Step 3 最后说明 (f_n) 几乎处处收敛于 f. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N \geq 1$, 对任意 $m, n \geq N$，有

$$\int |f_m - f_n|^p < \epsilon$$

固定 n，取 $m = n_k$，有 $|f_n - f_{n_k}| \to |f_n - f|$ a.e.. 又由引理2.2，可知

$$\int |f_n - f| \leq \liminf_{k \to \infty} \int |f_n - f_{n_k}|^p < \epsilon$$

对于 $p = \infty$，由于 (f_n) 为 Cauchy 列，模仿以上步骤，可知 $f \in \mathcal{L}^\infty$. 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq 1$，对任意 $m, n \geq N$，有

$$||f_m - f_n||_{\mathcal{L}^\infty} < \epsilon, \quad x \notin A_{m,n}$$

其中 $A_{m,n}$ 为零测集. 令 $A_n := \bigcup_m A_{m,n}$，令 $m = n_k$，对任意的 k，都有

$$||f_n - f_{n_k}||_{\mathcal{L}^\infty} < \epsilon, \quad x \notin A_n$$

最后，令 $n \to \infty$ 即可. □

练习 2.4. 回忆定理2.6，模仿其中的技术证明 $p < \infty$ 时的定理2.11.

至此，关于不同收敛关系的刻画可以更进一步，为更鲜明地表示它们，我们在有限测度集上操作.

$$\begin{tikzcd}
\text{一致收敛} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \text{依范数 } \|-\|_{\mathcal{L}^\infty} \text{ 收敛} \arrow[d] \\
\text{a.e. 逐点收敛} \arrow[u, dashed, bend left] \arrow[dr, dashed] \arrow[d] & \text{依范数 } \|-\|_{\mathcal{L}^p} \text{ 收敛} \arrow[d] \\
\text{依测度 m 收敛} \arrow[u, dashed, bend left] & \text{依范数 } \|-\|_{\mathcal{L}^1} \text{ 收敛} \arrow[l] \arrow[ul, dashed, bend right]
\end{tikzcd}$$

† 稠密性、可分性与平均连续性.

定理 2.12. C_c 在 $\mathcal{L}^p$ 中稠密，其中 $1 \leq p < \infty$；进一步 C_c^∞ 也稠密.

证明. 不妨设 $f \in \mathcal{L}^p$ 是非负有界有限支函数，否则通过推论2和定理2.5做逼近. 此时 $f \in \mathcal{L}^1$. 由定理2.7，C_c 在 $\|-\|_{\mathcal{L}^1}$ 范数下稠密，最后注意到不等式

$$|a^p - b^p| \leq C(M,p)|a-b| \tag{7}$$

其中 $0 < a, b \leq M$. 于是 C_c 在 $\|-\|_{\mathcal{L}^p}$ 范数下也稠密. □

作为上述定理的应用，我们介绍 $\mathcal{L}^p$ 空间的**可分性**[42]和积分的平均连续性.

定理 2.13. 设 $1 \leq p < \infty$，则 $\mathcal{L}^p$ 是可分的.

证明，SKETCH. 这个定理的证明是容易的，只要注意到在定义域 E 上取全体有理点为端点的方体 Q 全体，它们是可数的，由定理2.7的证明，在 $\|-\|_{\mathcal{L}^1}$ 范数意义下，这样方体的特征函数可以逼近开集的特征函数；开集的特征函数可以逼近一般可测函数；而一般可测函数可以被紧支连续函数逼近；由定理2.12的证明逼近 $\mathcal{L}^p$ 函数. 最后，利用不等式7提升为 $\|-\|_{\mathcal{L}^p}$ 的逼近. □

[42]称拓扑空间 X **可分**，如果存在可数的稠密子集.

注 2.10. $\mathcal{L}^\infty$ 空间不是可分的，本质上不满足定理2.12.

命题 2.3 (积分的平均连续性). 设 $1 \le p < \infty$，$f \in \mathcal{L}^p$，则

$$\lim_{h\to 0} ||f(x+h) - f(x)||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} = 0$$

证明. 若 $f \in C_c$，则 f 一致连续. 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |h| < \delta$ 时，有

$$|f(x+h) - f(x)| < \epsilon$$

不妨 $\operatorname{supp} f \subset B(0,2) : \{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 2\} =: K$，$|h| < 1$，则

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x &= \int_K |f(x+h) - f(x)|^p \mathrm{d}x \\ &\le \mathrm{m}(K) \sup_{x\in K} |f(x+h) - f(x)|^p \\ &= \mathrm{m}(K)\cdot \epsilon^p\end{aligned}$$

即 $||f(x+h) - f(x)||_{\mathcal{L}^p} \to 0$. 由定理2.12可知 C_c 在 $\mathcal{L}^p$ 中稠密，即对任意 $f \in \mathcal{L}^p$，存在 $g \in C_c$，使得

$$||g(x) - f(x)||_{\mathcal{L}^p}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

于是

$$\begin{aligned}||f(x+h) - f(x)||_{\mathcal{L}^p} &\le ||f(x+h) - g(x+h)||_{\mathcal{L}^p} \\ &\quad + ||g(x+h) - g(x)||_{\mathcal{L}^p} + ||g(x) - f(x)||_{\mathcal{L}^p} \\ &< 2\epsilon + \mathrm{m}(K)\cdot\epsilon^p\end{aligned}$$

□

¶ 对偶空间. $\mathcal{L}^p$ 空间理论中最耀眼的结论之一当属**对偶**. 为此我们定义 $\mathcal{L}^p$ 空间上的**有界线性算子**，称线性算子 $L : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ 是**有界**的，如果

$$\frac{|L[f]|}{||f||_{\mathcal{L}^p}} < \infty, \quad \forall f \in \mathcal{L}^p$$

进而定义有界线性算子 L 的**范数**为

$$||L|| := \sup_{0\neq f\in\mathcal{L}^p} \frac{|L[f]|}{||f||_{\mathcal{L}^p}}$$

并将全体 $\mathcal{L}^p$ 上有界线性算子构成的集合记为 $\mathcal{L}^{p*}$. 不难验证 $\mathcal{L}^{p*}$ 是一个 Banach 空间，称为 $\mathcal{L}^p$ 的**对偶空间**. 我们有如下定理，它刻画了不同指标 p 之间的内在联系，是泛函分析中赋范空间对偶理论的开端. 遗憾的是，以目前的知识还难以完整证明这个定理.

定理 2.14. 设 $1 < p < \infty$，$\mathcal{L}^q$ 为 $\mathcal{L}^p$ 的对偶空间，其中 q 为 p 的共轭指标.

注 2.11. 注意 $\mathcal{L}^\infty$ 的对偶空间不是 $\mathcal{L}^1$.

证明，PART. 我们证明存在 $\mathcal{L}^{p*} \to \mathcal{L}^q$ 的单射. 为此，任取 $g \in \mathcal{L}^q$，定义算子 $L_g\ \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ 为

$$L_g[f] := \int fg, \quad \forall g \in \mathcal{L}^p$$

先验证 L_g 是有界线性算子. 为此对任意 $f \in \mathcal{L}^p$，由定理2.9，我们有

$$|L_g[f]| = ||f||_{\mathcal{L}^p} \cdot ||g||_{\mathcal{L}^q}$$

这说明

$$||L_g||_{\mathcal{L}^q} \leq ||g||_{\mathcal{L}^q}$$

为说明 L_g 是单射，只要说明上述不等式是取等的. 为此只要找到合适的 $f \in \mathcal{L}^p$ 即可. 令

$$f := \left(\frac{|g|}{||g||_{\mathcal{L}^q}}\right)^{q-1} \cdot \mathrm{sgn}(g)$$

其中 $\mathrm{sqn}(g)$ 是 g 的符号函数，即

$$\mathrm{sqn}(g) : \begin{cases} 1, & g(x) > 0 \\ 0, & g(x) = 0 \\ -1, & g(x) < 0 \end{cases}$$

不难验证 $||f||_{\mathcal{L}^p} = 1$，并且

$$|L_g[f]| = ||g||_{\mathcal{L}^q}$$

$\square$

¶ $\mathcal{L}^2$ 空间. 对偶空间理论中 $\mathcal{L}^2$ 空间是最特殊的存在，注意到它是**自对偶**的，同时其上的范数 $||-||_{\mathcal{L}^2}$ 可以被**内积**诱导.

定义 2.13. 设 E 为一个非空集合，称 (共轭) 对称双半线性函数[43]

$$<-,->: E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

是一个**内积**. 进一步称 E 为**内积空间**.

通过内积显然可以诱导度量，事实上是范数，注意到

$$||x|| :=< x, x >$$

因此范数 $||-||_{\mathcal{L}^2}$ 可以被如下内积诱导:

$$< f, g >_{\mathcal{L}^2}:= \int f \cdot \overline{g}$$

称 E 是一个 **Hilbert 空间**，如果其诱导的度量完备. 定理2.11蕴含 $\mathcal{L}^2$ 空间是 Hilbert 空间.

内积空间的另一个优势是可以定义**正交**，称 f 与 g 正交，如果 $< f, g >= 0$.

定义 2.14. 设 E 为内积空间，称序列 (x_n) 是一族**正交系**，如果

$$< x_i, x_j >= \delta_{ij}$$

其中 $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. 称 (x_n) 是**完备**的，如果任意 $x \in E$，都有如下“正交表示”:

$$x = \sum_i < x, x_i > x_i$$

---

[43]**(共轭) 对称双半线性函数**指，任意 $x, y, z \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(1) $< \lambda x + \mu y, z >= \lambda < x, z > +\mu < y, z >$;

(2) $< x, \lambda y + \mu z >= \overline{\lambda} < x, y > +\overline{\mu} < x, z >$;

(3) $< x, y >=< y, x >$.

† $\mathcal{L}^2$ 空间的完备正交系. [**10, 9, 11**] 中证明了以下函数族

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x, \cdots,\ \sin nx,\ \cos nx, \cdots$$

为 $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ 空间的完备正交系，成为 Fourier 分析技术的依据，并且 Foureir 变换算子 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{L}^2$ 空间的**自同构**，见第2章段落2中的评述.

关于 $\mathcal{L}^2$ 空间的完备正交系，另一个著名的结果是 **Sturm-Liouville 理论**，它被叙述如下：

定理 2.15. 对常微分方程齐次边值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0,l) \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, & \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 & \end{cases} \tag{8}$$

其中 $\alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0,\ \alpha_i + \beta_i > 0,\ i = 1, 2.$ 这里的 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成为**特征值**，对应的解 X 称为**特征向量**. 我们有如下结论：

(1) 上述问题的所有特征值都是非负实数. 特别地，当 $\beta_1 + \beta_2 > 0$ 时，特征值都是正数.

(2) 不同特征值对应的特征函数彼此正交，即对不同特征值 λ, μ 对应的特征函数 X_λ, X_μ，满足

$$< X_\lambda, X_\mu >_{\mathcal{L}^2((0,l))} = 0$$

(3) 所有特征值组成一个单调递增以无穷远点 ∞ 为极限的序列：

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

(4) 任意函数 $f \in \mathcal{L}^2((0,l))$ 可以按特征函数系展开为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$$

其中

$$C_n = \frac{< f, X_n >_{\mathcal{L}^2}}{||X_n||_{\mathcal{L}^2}}$$

这里的无穷级数收敛指的是依 $||-||_{\mathcal{L}^2}$ 范数收敛：

$$||f-\sum_{n=1}^{N} C_n X_n||_{\mathcal{L}^2} \to 0, \quad N \to \infty$$

¶ 卷积与 Banach 代数的构造. 我们已经知道 $\mathcal{L}^p$ 构成 Banach 空间，特别地，是一个向量空间. 下面希望为 $\mathcal{L}^p$ 赋予乘法，使之成为一个代数[44]，进一步成为 Banach 代数.

定义 2.15. 称 Banach 空间 E 是一个 **Banach 代数**，如果 E 上存在乘法 $\cdot$ 使之成为代数.

一般而言，普通的函数乘法无法在可积函数空间内封闭. 在分析学中，我们引入一种性质更好的乘法运算，即卷积，有兴趣的读者可以进一步参考 [**14, 10**].

定义 2.16. 对可测函数 f, g，若 $f(x-y)\cdot g(y)$ 关于 y 可积，定义**卷积** $*$ 为

$$f * g := \int f(x-y)\cdot g(y)\mathrm{d}y$$

可以证明，卷积 $*$ 运算在 $\mathcal{L}^1$ 空间中封闭，它由如下著名的 Young 不等式保证.

定理 2.16 (Young). 设 $f, g \in \mathcal{L}^1$，于是

$$||f*g||_{\mathcal{L}^1} \leq ||f||_{\mathcal{L}^1}\cdot||g||_{\mathcal{L}^1}$$

利用2.3小节的结果，证明是容易的，读者自行补充. 此外，[**10**] 中证明了运算 $*$ 适合交换、结合律，即

$$f*g = g*f,\ (f*g)*h = f*(g*h)$$

并且与函数加法满足分配律，即

$$f*(g+h) = f*g + f*h$$

因此 $\mathcal{L}^1$ 在卷积 $*$ 运算下构成一个 Banach 代数.

[44] 称向量空间 E 是一个**代数**，如果其上存在乘法 $\cdot$，使之成为环.

第二节习题

¶ 依测度收敛的刻画及其应用. 本段落意图让读者熟悉依测度收敛的语言，并给出若干应用. 重要的应用可以在定理2.11的中见到.

问题 12. 设在可测集 E 上，对每个固定的 $n \geq 1$，都有可测函数列 $(f_{n,k})_{k\geq 1}$ 依测度收敛于 f_n，并且 (f_n) 依测度收敛于 f. 证明 $(f_{n,k})$ 存在子列收敛于 f.

问题 13. 本习题希望进一步阐明逐点收敛、依测度收敛与依范数收敛的区别与联系. 对有限测度集 E 上的可测函数 f 引入变换

$$\mathcal{B}[f] = \frac{|f|}{1+|f|}$$

显然 $\mathcal{B}[f] \leq 1$. 验证变换 $\mathcal{B}$ 不改变函数 f 的可测性.

(1) 设 (f_n) 为 E 上一列可测函数，证明：

若 $\mathcal{B}[f_n] \to 0$ a.e.，则 (f_n) 依测度收敛于 0.

举例说明反之不成立.

(2) 在 (1) 的设定下，若 (f_n) 几乎处处有限，证明：

$\mathcal{B}[f]$ 依范数 $\|-\|_{\mathcal{L}^1}$ 收敛于 0 等价于 (f_n) 依测度收敛于 0.

¶ $\mathcal{L}^2$ 空间的 Fourier 分析与 Riemann-Lebesgue 引理. 本段落希望利用 $\mathcal{L}^p$ 的稠密子集继段落2的讨论.

问题 14. (1) 完善定理2.7的细节.

(2) 将定理2.7的结果推广到 $\mathcal{L}^p$ 空间，其中 $1 \leq p < \infty$.

问题 15. 由上一问的结果，注意到 C_c^∞ 在 $\mathcal{L}^2$ 中稠密，并利用这个事实，结合定理2.4，将 Fourier 变换算子 $\mathcal{F}$ 延拓到 $\mathcal{L}^2$ 空间. 此时对算子

$$\mathcal{F} : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$$

称左侧 $\mathcal{L}^2$ 空间为**物理空间**，右侧 $\mathcal{L}^2$ 空间为**频率空间**.

下面我们希望将古典 Fourier 分析的若干事实 (参见 [**11**]) 推广到实分析中. 关于 Fourier 变换有两个好处：

- 算子 $\mathcal{F}$ 将物理空间 $\mathcal{L}^2$ 的求导运算与卷积运算转化为频率空间的代数运算.
- 函数 f 的**正则性** (光滑性) 被 Fourier 级数的**衰减性**刻画.

以下习题将推广第二个好处，第一条性质在泛函分析与偏微分方程中有更广义的解释，需要用到 Schwartz 空间与拟微分算子的概念，有兴趣的读者可以参考 [**22**].

问题 16 (Riemann-Lebesgue 引理). 首先回忆古典 Fourier 分析中的正则性结果. 对任一多项式 $p(x)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}p(x)\sin nx\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}p(x)\cos nx\mathrm{d}x=0$$

这个性质对任一 Riemann 可积函数都成立,被称为 **Riemann-Lebesgue 引理**.

(1) 利用定理2.7, 将上述论断推广到 $\mathcal{L}^1$ 空间, 即设 $f\in\mathcal{L}^1([a,b])$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0$$

(2) 设 $f\in\mathcal{L}^1([a,b])$，利用阶梯函数的稠密性证明

$$\int_{[a,b]}f(x)|\cos nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{[a,b]}f$$

3. 微分论

† Newton-Leibniz 公式的简单评述. 古典分析中积分与微分是一对矛盾，它们之间的的联系由著名的 **Newton-Leibniz 公式**指出. [**7**] 中说明，若函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 Riemann 可积的，且存在原函数 (不定积分)$F(x)$，那么

$$\int_a^b f = F(a) - F(b) \tag{9}$$

关于等式9, 我们有正反两个疑问, 它们作为接下来一节的主要目标:

Conj 1 若函数 f 仅 Lebesgue 可积，变上限函数

$$F(x) = \int_{[a,x]} f, \quad x\in(a,b]$$

可导性如何？进而是否有 $F'=f$?

Conj 2 $[a,b]$ 上的函数 F 添加什么样的条件保证导函数 F'(几乎处处) 存在？进而 F' 可积？进而成立等式9?

3.1. Lebesgue 微分定理.

¶ Hardy-Littlewood 极大函数. 评述中的第一个问题考察函数 F 的可导性，实际上是考察如下极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)\mathrm{d}s$$

我们把上式推广至 Lebesgue 意义下的高维，即

$$\lim_{\mathrm{m}(B),\ x\in B}\frac{1}{\mathrm{m}(B)}\int_B f(y)\mathrm{d}y$$

其中 B 为 $\mathbb{R}^d$ 中任一开球.

定义 3.1. 设 f 为 $\mathbb{R}^d$ 上的局部可积函数, f^* 称为 **Hardy-Littlewood 极大函数** (H-L 函数)，如果

$$f^*(x) := \sup_{x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|\mathrm{d}y, \quad x\in\mathbb{R}^d$$

关于 H-L 函数，我们有如下性质.

命题 3.1. 设 $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$，则

(1) f^* 在 $\mathbb{R}^d$ 上可测；

(2) 对任意 $\alpha > 0$，有

$$m(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha}||f||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)} \tag{10}$$

其中 $A = 3^d$ 为常数；

(3) $f^* < \infty$，a.e. $x \in \mathbb{R}^d$.

为证明命题中的 (2)，我们需要想办法覆盖集合 $\{f^* \geq \alpha\}$. 对于其中任一元素 x，存在与其相关的球 B，由定义可知

$$\frac{1}{\mathrm{m}(B)}\int_B |f| > \alpha$$

这等价于

$$\mathrm{m}(B) < \frac{1}{\alpha}||f||_{\mathcal{L}^1}$$

我们几乎找到了不等式10的右侧，为此只需要一个覆盖引理.

引理 3.1 (Vitali). 设 $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_N\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中开球族，则存在互不相交的子族 $\mathcal{B}' = \{B_{i_1}, \cdots, B_{i_k}\}$，使得

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) \leq 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j})$$

证明. 在 $\mathcal{B}$ 中取最大的开球记为 B_{i_1},以及与其有交的开球族 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. 将其半径扩大 3 倍，记为 $\tilde{B}_{i_1}$，不妨 $B_\alpha \in \tilde{B}_{i_1}$，$\forall\alpha \in \Gamma$. 再在 $\mathcal{B} - \{B_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 中取最大的开球记为 B_{i_2}，重复上述操作，有限步后可得子族 $\mathcal{B}' = \{B_{i_1}, \cdots, B_{i_k}\}$. 并且有

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^k B_{i_j}\right) = 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_j})$$

□

命题3.1的证明. (1) 只要证对任意 $\alpha > 0$，$E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ 为开集. 事实上，对任意 $x_0 \in E_\alpha$，存在包含 x_0 的开球 B，使得

$$\frac{1}{m(B)}\int_B |f| > \alpha$$

于是存在 $y \in B - \{x\}$，取 $B_0 := (x_0, \mathrm{d}(x, y))$，有 $B_0 \subset E_\alpha$.

(2) 首先,对任意 $x \in E_\alpha$,存在包含 x 的开球 B_x,使得 $\frac{1}{m(B)}\int_B |f| > \alpha$. 即对任意的开球 B_x, $x \in E_\alpha$, 有

$$m(B_x) < \frac{1}{\alpha}||f||_{\mathcal{L}^1(B_x)}$$

对 E_α 内任一紧子集 K, 存在有限个上述开球的覆盖, 使得 $K \subset \bigcup_{x\in E_\alpha} B_x$. 由引理3.1可知存在不交的子族 $\{B_j\}_{j=1}^k$ 使得

$$m(K) \le m\left(\bigcup_{x\in E_\alpha} B_x\right) \le 3^d \sum_{j=1}^k m(B_j) \le \frac{3^d}{\alpha}\sum_{j=1}^k ||f||_{\mathcal{L}^1(B_j)} \le \frac{A}{\alpha}||f||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)}$$

其中 $A = 3^d$.

(3) 注意到 $E_\infty \subset E_\alpha$, 由 (2) 可知 $m(E_\infty) = 0$.

□

由 H-L 函数的定义, 显然有 $f^* \ge f$, 而命题3.1的 (2) 表明 f^* 不能"大太多", 准确而言, 导致 f^* 过大的区间会被区间本身的测度和原函数 f 控制. 回忆练习2.1, 即函数 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积, 那么

$$m(\{|f(x)| > \alpha\}) \le \frac{1}{\alpha}||f||_{\mathcal{L}^1}$$

从 f^* 的定义和命题3.1的 (2) 的证明中不难发现, f^* 在局部上满足 Tchebychev 不等式,因此 H-L 函数在局部上有类似可积函数的特性.[45]
† 覆盖引理的应用: Lebesgue 外测度的等价刻画. 我们利用引理3.1验证定义 Lebesgue 外侧度时的一个注记. 即用方体诱导的外侧度等价于用球体诱导的外侧度. 为此, 只需要说明任一方体可以被可数个球体逼近即可, 即

对任一方体 Q 以及任意 $\epsilon > 0$, 存在可列个球体 (B_n), 使得

$$\sum_n |B_n| \le |Q| + \epsilon$$

其中 $|B_n|$ 是欧式空间中球体的体积, 参见 [**7**].

[45]在后续的课程中,我们将称满足练习2.1中不等式形式的函数为**弱可积函数**,一般地, 可定义弱 $\mathcal{L}^p$ 函数.

引理 3.2. 设 O 为有界开集，可以在 O 中找到有限个不交的闭球 $\{B_i\}_{i=1}^N$，使得

$$\mathrm{m}(O-\bigcup_i^N B_i) \le \frac{3}{4}\mathrm{m}(O)$$

证明. 取 O 的紧子集 K，使得 $\mathrm{m}(K) \ge \mathrm{m}(O)$，对任意 $x \in K$，存在开球 B_x 使得 $x \in B_x \subset O$. 由紧性，存在有限覆盖，即

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{x_i}$$

由引理3.1，不妨取前 N 个球，使得

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}(O) \le \mathrm{m}(K) \le 3^d \sum_{i=1}^N \mathrm{m}(B_{x_i})$$

令 B_i 为略小于 B_{x_i} 的闭球，总能使得

$$\sum_{i=1}^N \mathrm{m}(B_i) \ge \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^d}\mathrm{m}(O)$$

命题得证. □

注意到上述引理中 $\mathrm{m}(O-\bigcup_i^N B_i)$ 仍为开集，再次应用引理，以此往复，我们有如下定理.

定理 3.1. 对任意开集 O，存在两两不交的闭球列 (B_n)，使得

$$\mathrm{m}(O-\bigcup_{n=1}^\infty B_n) = 0$$

并且对任一零测集 N，总存在一列闭球 (B'_n) 覆盖其，满足

$$\sum_{n=1}^\infty \mathrm{m}(B'_n) < \epsilon$$

结合上述定理，我们能够对任一方体 (事实上可以对任一开集做逼近) 做逼近.

¶ Lebesgue 微分定理.

定理 3.2 (Lebesgue 微分定理). [46] 若 $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$，则

$$\lim_{m(B)\to 0,\ x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\mathrm{d}y = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^d$$

证明. 只要证明以下集合零测即可，

$$E_{2\alpha} := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{m(B)\to 0,\ x\in B} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\mathrm{d}y - f(x) \right| > 2\alpha \right\}$$

事实上，这蕴含 $E := E_{1/n}$ 零测. 由于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ 中稠密 (参见 [**?**]). 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $g \in C_c^\infty$，有

$$||f - g||_{\mathcal{L}^1} < \epsilon$$

而 g 的连续性保证 $\frac{1}{m(B)} \int_B g = g(x)$，于是

$$\limsup_{m(B)\to 0,\ x\in B} \left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\mathrm{d}y - f(x) \right| \le (f-g)^*(x) + |g(x) - f(x)|$$

我们令 $F_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : (f-g)^*(x) > \alpha\}$，$G_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : |g(x) - f(x)| > \alpha\}$，不难发现 $E_{2\alpha} \subset F_\alpha \cup G_\alpha$. 由命题3.1的 (2)，有

$$m(F_\alpha) \le \frac{A}{\alpha} ||f - g||_{\mathcal{L}^1}(\mathbb{R}^d)$$

以及练习2.1，有

$$m(G_\alpha) \le \frac{1}{\alpha} ||f - g||_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)}$$

因此

$$m(E_{2\alpha}) \le m(F_\alpha) + m(G_\alpha) \le \left(\frac{A}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) \epsilon$$

□

我们简单介绍定理3.2关于测度论的一个直接应用，有兴趣的读者可以进一步参见 [**9**]. 对 $\mathbb{R}^d$ 上可测集 E 的特征函数 χ_E 应用定理定理3.2，不难发现

$$\lim_{m(B)\to 0,\ x\in E} \frac{m(E \cap B)}{m(B)} = 1$$

---

[46] 关于这个定理一个“哲学”的看法是：$\mathcal{L}^1$ 函数不具有“逐点”意义，但 Lebesgue 微分定理赋予了可积函数逐点的意义.

注 3.1. 事实上，若对 χ_E 直接作用 Tchebychev 不等式，可以得到：对任意充分靠近 1 的常数 α，有

$$m(E\cap B)\geq \alpha m(B)$$

这对可测集的刻画几乎是本质的，参见 [**21**].

定义 3.2. 设 $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$，则，称 x_0 为 f 的 **Lebesgue 点**，如果

$$\lim_{m(B)\to 0,\ x_0\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x_0)|\mathrm{d}y=0$$

f 全体 Lebesgue 点构成的集合称为 **Lebesgue 集**，记为 L_f.

推论 3.1. 设 $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$,则,则 $\mathbb{R}^d$ 上几乎所有的点都是 Lebesgue 点.

证明. 对任意有理数 r，对函数 $|f(x)-r|$ 施以定理3.2的证明，记 $E^r:E$，于是 $\mathbb{E}:=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}E^r$ 是零测的，并且我们有

$$\lim_{m(B)\to 0,\ x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-r|\mathrm{d}y=|f(x)-r|,\quad x\notin E^r$$

现固定任意 $x\notin\mathbb{E}$，使得 $f(x)$ 有限. 对任意 $\epsilon>0$，存在有理数 r，使得 $|f(x)-r|<\epsilon$. 由于

$$\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\mathrm{d}y=\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-r|\mathrm{d}y+|f(x)-r|<2\epsilon$$

因此只有 $\mathbb{E}$ 中的点不是 Lebesgue 点. □

至此，评述中的问题一被解决，即函数 F 几乎处处可导.

3.2. 有界变差函数. 关于问题二，在上一小节的基础上我们进一步追问：什么样的函数是几乎处处可导的?

¶ 有界变差函数的定义与性质.

定义 3.3. 设闭区间 $[a,b]$ 上的函数 f，考虑 $[a,b]$ 的一个划分 $P: a=t_0,\cdots,t_N=b$. 称

$$T_f(P)([a,b]):=\sum_{i=1}^N |f(t_i)-f(t_{i-1})|$$

为函数 f 关于划分 P 的**全变差**，记

$$T_f([a,b]) = \sup_P T_f(P)([a,b])$$

为函数 f 的**全变差**. 若 $T_f([a,b]) < \infty$，则称 f 为**有界变差**函数，简记 BV.

容易证明：$T_f([a,c]) = T_f([a,b]) + T_f([b,c])$，其中 $a < b < c$. 上述定义适合一般向量值函数

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$$

记为 $f(x) = (y_1(x), \cdots, y_n(x))$，称 f 是有界变差的，如果每个分量函数 y_i 有界变差. 特别地，若 f 表示曲线，则称曲线**可求长**，并将曲线**长度** $L[f]$ 定义为全变差；若 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 为复值函数，称该复值函数有界变差，如果实部与虚部都有界变差.

例 3.1. (1) 单调有界函数是有界变差函数.
(2) 可导且导函数有界函数是有界变差函数.

验证是直接的，留给读者完成.

练习 3.1. (1) 证明：有界变差函数的有限线性组合是有界变差的.
(2) 设 f 为有界变差函数，则 $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$ 也是有界变差函数.

下面我们将证明 BV 函数一个重要的刻画，即每个 BV 函数都可以写作两个单增函数之差.

定义 3.4. 沿用定义3.3中的设定，记

$$P_f([a,b]) := \sup_P \sum_{i=1,\ f(t_i)>f(t_{i-1})}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

为 f 的**正变差**；同样

$$N_f([a,b]) := \sup_P \sum_{i=1,\ f(t_i)<f(t_{i-1})}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

记为 f 的**负变差**.

同样，容易验证 $P_f([a,c]) = P_f([a,b]) + P_f([b,c])$，其中 $a < b < c$，负变差 N_f 亦然，证明留给读者.

定理 3.3. 函数 f 是有界变差的当且仅当存在单增函数 g, h，使得

$$f = g - h$$

这个定理是以下观察的直接推论.

引理 3.3. 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数，对任意 $x \in [a,b]$，

(1) f 在 $[a,x]$ 上 BV；
(2) $f(x) - f(a) = P_f([a,x]) - N_f([a,x])$；
(3) $T_f([a,x]) = P_f([a,x]) + N_f([a,x])$.

证明，SKETCH. (1) 和 (3) 是显然的，而关于 (2)，只要注意到

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \sum_{i=1}^{N} f(t_i) - f(t_{i-1}) \\ &= \sum_{f(t_i) > f(t_{i-1})} |f(t_i) - f(t_{i-1})| - \sum_{f(t_i) < f(t_{i-1})} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \end{aligned}$$

即可 □

最后，注意到 $P_f([a,x])$ 关于 x 是单增函数，N_f 亦然，在上述定理中取 $g = P_f, h = N_f$ 即可.

命题 3.2. 若 f 为 $[a,b]$ 上的连续 BV 函数，则 $T_f([a,x])$ 关于 x 连续，进而 P_f, N_f 也连续.

证明. 不失一般性，只要证 $\lim_{h\to 0^+} T_f([0,h]) = 0$. 我们用反证法. 若存在 $\xi > 0$，使得

$$\lim_{h \to 0^+} T_f([0,h]) = \xi$$

由单调性，存在 $y_0 > 0$，使得

$$\xi \le T_f([0, y_0]) \le \frac{9}{8}\xi$$

由 f 连续，存在 $\delta > 0$，对任意 $|z| < \delta$，有 $|f(x) - f(0)| < \xi/8$. 取 $[0, y_0]$ 的划分：$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = y_0$，不妨 $t_1 < \delta$，使得

$$\sum_{i=1}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \geq \frac{\xi}{2}$$

因此 $\sum_{i=2}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})| > 3\xi/8$. 又由于

$$T_f([0, y_0]) = T_f([0, t_1]) + T_f([t_1, y_0])$$

故 $T_f([0, t_1]) \leq 3\xi/4$，与假设矛盾！ □

¶ 几乎处处可导函数的刻画. 我们叙述本小节的主要定理.

定理 3.4. 设 f 为 $[a, b]$ 上的连续 BV 函数，则 f 几乎处处可导.

注 3.2. 由练习17，上述定理反之不对.

这个定理的证明依赖一些有趣的技术，我们将逐一叙述它们.

PART 1 首先, 由定理3.3, 上述定理转化为连续单增函数的可导性, 为此我们引入 **Dini 导数**的概念.

$$D^+ f(x) := \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad D_+ f(x) := \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D^- f(x) := \limsup_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad D_- f(x) := \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

显然,

$$D^{\pm} f \geq D_{\pm} f$$

练习 3.2. 设 f 连续, 则上述四个函数可测, 进而 $\limsup_{h \to 0^+}$ 可视为可列极限.

通过左右导数的简单讨论，我们断言，要证明定理3.4，只要证明对连续的单增函数，成立

$$D_- f \geq D^+ f \text{ a.e.}$$

而上述问题又可以转化为证明集合 $\{D_- f < D^+ f\}$ 零测. 为此，只要说明对任意有理数 $r < R$，集合

$$E_{r,R} := \{x \in (a, b) : D^+ f(x) > R > r > D_- f(x)\}$$

零测!

PART 2 为估计上述集合的测度，我们引入一个形象而有用的引理.

引理 3.4 (日升引理). 设函数 G 在 $[a,b]$ 上连续，令

$$E : \{x \in (a,b) : \ \exists h > 0, \ x + h \in (a,b), \ G(x+h) > G(x)\}$$

若 E 非空，则 $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$，且 $G(a_k) \leq G(b_k)$.

证明. 显然 E 为开集,由定理1.5,存在不交开区间列 $((a_k,b_k))$，使得 $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$. 对于 $G(a_k) \leq G(b_k)$，我们用反证法. 若存在 k 使得 $G(a_k) > G(b_k)$. 由 G 的连续性，存在 $\epsilon_0 > 0$，使得

$$G(a_k + \epsilon_0) > G(b_k), \quad a_k + \epsilon_0 < b_k$$

令 $W := \{y \in (a_k, b_k) : G(y) > G(a_k + \epsilon_0)\}$，以及 $c = \sup W$，显然 $c \neq b_k$. 若 $c > b_k$，这说明 $b_k \in E$；又若 $c < b_k$，说明 $c \in E$. 以上情况均与 E 是开集矛盾! □

这个引理有一个形象的解释：设函数的图像为

$$G_f := \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$$

假设 x 轴正方向有平行射向 y 轴的“太阳光”，集合 E 即为全体“影子”的区间.

PART 3 为了证明定理3.4，结合之前的讨论，只需要刻画清楚集合

$$E_{r,R} := \{x \in (a,b) : D^+ f(x) > R > r > D_- f(x)\}$$

我们用引理3.4来估计上述集合的测度. 为此，首先设连续单增函数 G，注意到若在某点 x 处右侧 Dini 导数 $D^+G(x) > 0$，由定义，即存在 $h > 0$，使得

$$G(x+h) > G(x)$$

利用引理3.4,集合 $\{D^+G > 0\}$ 有一个覆盖,不妨记为 $\bigcup_k (a_k, b_k)$. 特别地，令 $G(x) = f(x) - Rx$，于是

$$\{x \in (a,b) : D^+ f(x) > R\} \subset \bigcup_k (a_k, b_k)$$

进而对每个 k，引理3.4蕴含

$$b_k - a_k \le \frac{1}{R}(f(b_k) - f(a_k))$$

进一步，若函数 f 单增，则有

$$\sum_k (b_k - a_k) \le \frac{1}{R}(f(b) - f(a)) \tag{11}$$

于是我们得到区间的上界估计[47].

推论 3.2. 设函数 f 为严格单增的有界连续函数，则 $D^+f < \infty$ a.e..

另一方面，若考虑 x 轴负方向的"太阳光"，我们由另一日升引理，即

$$\{x \in (a,b) : D_-G(x) < 0\} \subset \bigcup_k (a_k, b_k)$$

同理，有下界估计

$$(b_k - a_k) \ge \frac{1}{r}(f(b_k) - f(a_k)) \tag{12}$$

至此，我们得到证明定理3.4的所有估计.

PART 4 最后，我们开始证明定理3.4.

定理3.4的证明. 要证 $\mathrm{m}(E_{r,R}) = 0$，用反证法. 若存在有理数相应的 r, R，使得 $\mathrm{m}(E_{r,R}) > 0$. 由外侧度的定义，存在开覆盖 $((a_n, b_n))$，使得

$$\sum_n (b_n - a_n) < \frac{R}{r}\mathrm{m}(E_{r,R}) \tag{13}$$

固定 n，由反向的日升引理，存在区间列 $((a_{n_k}, b_{n_k}))$，使得

$$E_{r,R} \cap (a_n, b_n) \subset (a_n, b_n) \cap \{D_-f < r\} \subset \bigcup_k (a_{n_k}, b_{n_k}) \subset (a_n, b_n)$$

由不等式12，有

$$\sum_k (b_{n_k} - a_{n_k}) \ge \frac{1}{r}(f(b_{n_k}) - f(a_{n_k}))$$

[47]直观地看，不等式11刻画："增加区间"被"总增量/增速"控制.

上式关于 n 求和，结合不等式13，我们有

(14)
$$\frac{1}{r}\sum_{n,k}(f(b_{n_k})-f(a_{n_k}))\le\sum_{n,k}(b_{n_k}-a_{n_k})\le\sum_{n}(b_n-a_n)<\frac{R}{r}\mathrm{m}(E_{r,R})$$

再固定 n,k，对 $E_{r,R}\cap(a_{n_k},b_{n_k})$ 应用引理3.4，结合不等式11，有

$$R\sum_{l}(b_{n_{k_l}}-a_{n_{k_l}})\le\sum_{l}(f(b_{n_{k_l}})-f(a_{n_{k_l}}))\le f(b_{n_k})-f(a_{n_k})$$

代入14可得

$$\sum_{n,k,l}(b_{n_{k_l}}-a_{n_{k_l}})<\mathrm{m}(E_{r,R})$$

这与 $((b_{n_{k_l}},a_{n_{k_l}}))$ 是一族覆盖矛盾！ $\square$

作为推论，我们得到“半个”Newton-Leibniz 公式.

推论 3.3. 设 F 为 $[a,b]$ 上连续单增函数，则导函数 F' 几乎处处存在，并且 F' 非负可积，进一步

$$\int_a^b F'\le F(b)-F(a)$$

证明. 由定理3.4，F' 几乎处处存在. 令

$$G_n(x):=\frac{F(x+1/n)-F(x)}{1/n}>0$$

于是 $G_n\to F'$ a.e.$x\in[a,b]$. 进而 F' 非负可测. 由引理2.2，我们有

$$\int_a^b F'\le\liminf_{n\to\infty}\int_a^b G_n$$

对上式右侧，注意到

$$\begin{aligned}\int_a^b G_n&=\frac{1}{n}\int_a^b F(x+1/n)-\frac{1}{n}\int_a^b F(x)\\&=\frac{1}{n}\int_b^{b+1/n}F-\frac{1}{n}\int_a^{a+1/n}F\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 即证. $\square$

3.3. Newton-Lebniz 定理. 我们在推论3.3中得到了半个 Newton-Leibniz 公式. 也就是说，对于连续的 BV 函数，只能解决问题二的前两个小问，对于最终的等式9只差临门一脚. 我们希望在这一小节中得到一个比连续 BV 更强的刻画，使得成立 Newton-Leibniz 公式.[48]

¶ 绝对连续函数. 回忆引理3，即函数积分的绝对连续性. 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对任意 $\mathrm{m}(E) < \delta$，都有

$$\int_E |f| < \epsilon$$

定义 3.5 (绝对连续函数). 设 f 为 $[a, b]$ 上的函数，称 f 是**绝对连续**的，简记 AC，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对任意有限个不交区间$((a_k, b_k))_{k=1}^N$ 满足 $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$，使得

$$\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

以下性质是基本的，我们将证明留给读者.

命题 3.3. 设 f 为 $[a, b]$ 上的 AC 函数，则

(1) f 是 (一致) 连续的；

(2) f 是 BV 的.

注 3.3. 值得指出，AC 是比 BV 强的条件，并且连续的 BV 函数不一定是 AC 的.

事实上，我们有“最终”的定理.

定理 3.5 (Newton-Leibniz 公式). 设 F 为 $[a, b]$ 上的 AC 函数，则导函数 F' 几乎处处存在且可积，进一步有

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

练习 3.3. 若 $[a, b]$ 上的函数 F 适合 Newton-Leibniz 公式，即

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a)$$

则 F 是 AC 函数.

[48]更野心的，我们希望这个刻画直接特征 Newton-Leibniz 公式. 幸运的是，本小节中的定义如我们所愿.

在证明上述定理之前，至此，我们已经得到微分论中两个问题的结果，它们都借助对函数的整体性态的改进. 回忆数学分析中，参见 [**7**]，我们对导函数概念的理解，它其实是局部的 (逐点的). 但在实分析中，从微分论上看我们不再满足于逐点的可导性，在几乎处处的意义下“可导”的概念被函数的某些“泛函”性态所“代替”. 这些“泛函”性态最初被刻画成连续 BV，直观来讲是函数可求长，而这个“泛函”就是函数的长度, 因此<u>几乎处处可导被有限“长度”的连续函数蕴含</u>. 更进一步，想刻画 Newton-Leibniz 公式，需要在长度泛函有界 (连续 BV) 的基础上追加一个绝对连续性.

$$
\begin{tikzcd}
\text{几乎处处可导} & \text{N-L 公式} \arrow[l] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\text{单调连续} \arrow[u] \arrow[r, leftrightarrow] & \text{连续 BV} & \text{AC} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

¶ Newton-Leibniz 公式的证明. 下面我们为证明定理3.5作准备. 首先若 F 是 AC 的，显然 F' 几乎处处存在且可积. 为此，令

$$G(x) := \int_a^x F'(s)\mathrm{d}s$$

注意到 G 显然满足 Newton-Leibniz 公式. 由定理3.2，$G' = F'$ a.e.. 要证 F 适合 Newton-Leibniz 公式，即证

$$\text{当 } (F-G)' = 0 \text{ a.e.，} F-G \text{ 几乎处处为常数.}$$

我们将其总结成一个定理，即

定理 3.6. 设 F 为 $[a, b]$ 上的 AC 函数，且 $F' = 0$ a.e.，则

$$F = c \text{ a.e.}$$

其中 c 为常数.

我们需要一个覆盖引理. 首先回忆引理3.1，即从区域 A 的有限覆盖族中找到两两不交的子族，使得区域 A 的测度有控制.

定义 3.6. 设 E 为 $\mathbb{R}^d$ 中开区域，并且被开球族 $\mathcal{A}$ 覆盖. 称覆盖 $\mathcal{A}$ 是 **Vitali 覆盖**，如果对每个 $x \in E$，任意 $\eta > 0$，存在开球 $B \in \mathcal{A}$，使得 $x \in B$ 且 $\mathrm{m}(B) < \eta$.

引理 3.5. 设 $\mathrm{m}(E)<\infty$，$\mathcal{A}$ 为 E 的一个 Vitali 覆盖. 则对任意 $\delta>0$，存在有限个两两不交的开球 $\{B_1,\cdots,B_N\}\subset\mathcal{A}$，使得

$$\mathrm{m}(E-\bigcup_{i=1}^{N}B_i)<\delta$$

首先，利用测度的性质可以证明如下结果蕴含上述引理的结果，验证留给读者.

$$\sum_{i=1}^{N}\mathrm{m}(B_i)\geq\mathrm{m}(E)-\delta/2$$

因此，只要证明引理的条件蕴含上述结论即可.

证明，SKETCH. 给定 $\delta/2>0$, 不妨 $\mathrm{m}(E)>\delta/2$. 可以找到 E 的紧子集 K 满足 $\mathrm{m}(K)>\delta/4$. 由紧性蕴含的有限开覆盖 $\{B_1,\cdots,B_N\}(\subset\mathcal{A})$ 中施以引理3.1，不妨取前 k 个子覆盖，使得

$$\delta/4<\mathrm{m}(K)\leq 3^d\sum_{i=1}^{k}\mathrm{m}(B_i)$$

进而

$$\sum_{i=1}^{k}\mathrm{m}(B_i)\geq\frac{\delta}{4\cdot 3^d}$$

若此时 $\{B_i\}$ 满足要求，则证毕，否则在 $E-\bigcup_i^k B_i$ 中再取紧子集，重复上述操作，由于 $\mathcal{A}$ 是一个 Vitali 覆盖，上述操作是合法的. 以此类推，直到覆盖满足要求. □

定理3.5的证明. 只要证 $F(a)=F(b)$ 即可. 我们用反证法. 若不然，则存在 $\epsilon_0>0$，使得

$$|F(b)-F(a)|=\epsilon_0|b-a|$$

对 a.e. $x\in(a,b)$，由 $f(x)=0$ 可知

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=0$$

因此，对任意 $\eta>0$，存在 $a_{x,\eta}<x<b_{x,\eta}$，使得

$$|F(b_{x,\eta})-F(a_{x,\eta})|<\frac{\epsilon_0}{2}|b_{x,\eta}-a_{x,\eta}| \tag{15}$$

注意到 $\{(a_{x,\eta}, b_{x,\eta})\}_x$ 为 $E := \{F' = 0\}$ 的 Vitali 覆盖. 由于 F 为 AC 函数，对上述 ϵ_0，存在 $\delta > 0$，使得任意有限不交开区间 $((c_l, d_l))_{l=1}^M$，有

$$\sum_{l=1}^{M} |F(d_l) - F(c_l)| < \frac{\epsilon_0}{4} \cdot (b - a) \tag{16}$$

由引理3.5，令 $\mathcal{A}$ 有限个不交的子族的端点构成 (a, b) 的一个划分：$a = a_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \cdots < b_N < b_0 = b$，使得

$$\sum_k (b_k - a_k) > \mathrm{m}(E) - \delta$$

结合不等式15和16，我们有

$$|F(b) - F(a)| \le \sum_k |F(b_k) - F(a_k)| = \frac{3\epsilon_0}{4}(b - a)$$

矛盾! $\square$

第三节习题

¶ 正则性与 BV 关系的补注.

问题 17. 设函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$，满足

$$f:=\begin{cases}x^a\sin\frac{1}{x^b} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

证明:

(1) 函数 f 连续当且仅当 $a>0$.

(2) 函数 f 可导 (事实上光滑) 当且仅当 $a>1$.

(3) 函数 f 有界变差当且仅当 $a>b$.

上述练习说明函数的 BV 性质与光滑性关系不大.

Part 2

实分析的进一步讨论

CHAPTER 2

恒等元逼近

我们在本章介绍调和分析中基本技术——**恒等元逼近**，即对于本身性质不太好的函数，通过卷积上一族满足某种特征的函数收敛至自身，而卷积后的函数具有某些好的分析学特性. 读者在 [**10, 9, 14**] 中可以见到好核与恒等元的定义，我们将证明恒等元的 $\mathcal{L}^1$ 逼近，即定理1.1，以及稍加改进，证明一般的 $\mathcal{L}^p$ 逼近，即定理1.3，并用它们解决若干收敛性与光滑性问题；而事实上逼近技术在偏微分方程的正则性理论中有重要的应用 (参见 [**15, 1, 3, 22**])，其中包括著名的 Weyl 引理，即定理2.2，它在几何上更广的用途可以参考 [**12, 17**]；最后我们将介绍利用逼近的技术将 Fourier 变换算子延拓到 $\mathcal{L}^2$ 空间 (参见 [**10, 9**]) 并解释 Fourier 分析中 Dirichlet 核作收敛的困难性，以及相应的改进 (参见 [**10, 11**]).

1. 好核

¶ 好核.

定义 1.1. 称函数族 $\{K_\delta(x)\}_{\delta>0}$ 为**好核**，如果

(1) $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(d)\mathrm{d}x = 1$；

(2) 存在常数 $A>0$，使得 $\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|\mathrm{d}x \le A$；

(3) 对任意 $\eta>0$，有

$$\int_{|x|\ge\eta} |K_\delta(x)|\mathrm{d}x \to 0, \quad \delta\to 0$$

为了便于操作 $\mathcal{L}^1$ 的函数，我们将上述好核的条件加强为如下形式.

定义 1.2. 称函数族 $\{K_\delta(x)\}_{\delta>0}$ 为**恒等元逼近**，如果

(1) $\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(d)\mathrm{d}x = 1$；

(2) 存在常数 $A>0$，使得 $|K_\delta| \le A\delta^{-1}$, $\forall\delta>0$；

(3) 存在常数 $A>0$，使得 $|K_\delta(x)|\le A\delta/|x|^{d+1}$，$\forall\delta>0, x\in\mathbb{R}^d$.

我们在分析中遇到一些本身性质不好的函数，可以借助满足某种特性的好核卷积之，并使得卷积后的函数族收敛于原函数，从而研究卷积以后的函数，这是恒等元逼近的基本思路. 事实上，上述收敛可以视为一族泛函 $\{\mathcal{F}_\delta\}_{\delta>0}$，而恒等元逼近指的是这族泛函向恒等泛函 id 逼近. 其中 id 对应的核“函数”实际上是 **Dirac delta 分布**[1] $\delta(x)$，见例1.3，即

$$\int_{\mathbb{R}^d}\delta(x)\mathrm{d}x=1 \text{ 且 } \delta(x)=0,\ x\neq 0$$

如以下“交换图”所示：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\delta:\ f & \xrightarrow{\text{a.e.}} & K_\delta * f \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \epsilon\to 0} & & \\ \mathrm{id}:\ f & \xrightarrow{\text{a.e.}} & \delta * f = f \end{array}$$

¶ 恒等元 $\mathcal{L}^1$ 逼近.

引理 1.1. 设 $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$，$x\in L_f$，令

$$\mathcal{A}(r):=\frac{1}{r^d}\int_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y,\quad r>0$$

则 $\mathcal{A}(r)$ 连续有界，且 $\mathcal{A}(r)\to 0$，$r\to 0$.

证明. 注意到 f 绝对可积，由 $\mathcal{A}(r)$ 的定义可知其连续. 由 $x\in L_f$ 可知 $\mathcal{A}(r)\to 0$，$r\to 0$. 进而 $\mathcal{A}$ 在 $(0,1]$ 上有界. 对于 $r>1$，注意到

$$\mathcal{A}(r)\le\frac{1}{r^d}\int_{|y|\le r}|f(x-y)|\mathrm{d}y+\frac{1}{r^d}\int_{|y\le r}|f(x)|\mathrm{d}y\le\frac{||f||_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)}}{r^d}+\alpha(d)|f(x)|<\infty$$

其中 $\alpha(d)$ 表示单位球体积. 因此 $\mathcal{A}$ 有界. □

定理 1.1. 设 $\{K_\delta(x)\}_{\delta>0}$ 为一个恒等元逼近，且 $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$，那么

$$K_\delta * f(x)\to f(x),\quad \text{a.e. } x\in L_f$$

进一步，$||K_\delta * f-f||_{\mathcal{L}^1}\to 0$，$\delta\to 0$.

[1]参见 [**22, 11**].

证明. 注意到

$$(K_\delta * f)(x) - f(x) \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| \cdot |K_\delta(y)| \mathrm{d}y$$

下面将 $\mathbb{R}^d$ 分割成圆环来估计，考察

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| \cdot |K_\delta(y)| \mathrm{d}y = \int_{|y|\le\delta} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\delta<|y|\le 2^{k+1}\delta}$$

由引理1.1可知

$$\int_{|y|\le\delta} \le \frac{C_1}{\delta^d} \int_{|y|\le\delta} |f(x-y) - f(y)| \mathrm{d}y \le C_1 \mathcal{A}(\delta)$$

并且

$$\begin{aligned}\int_{2^k\delta<|y|\le 2^{k+1}\delta} &\le \frac{C_2\delta}{(2^k\delta)^{d+1}} \int_{|y|\le 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)| \mathrm{d}y \\ &\le \frac{C_3}{2^k \cdot (2^{k+1}\delta)^d} \int_{|y|\le 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)| \mathrm{d}y \\ &\le C_3 \cdot 2^{-k} \mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3 为不依赖于 ϵ, δ 的常数. 因此可令 $\delta \to 0$，于是

$$|K_\delta * (x) - f(x)| \le C_1 \mathcal{A}(\delta) + C_3 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \mathcal{A}(2^{k+1}\delta) < \delta$$

□

¶ 恒等元 $\mathcal{L}^p$ 逼近. 下面我们将 $K_\delta * f \to f$ 做成 $\mathcal{L}^p$ 意义下的收敛.

引理 1.2. 设 $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，使得 $1/p + 1/q = 1, \quad 1 \le p < \infty$，$g$ 为 $E(\subset \mathbb{R}^d)$ 上的可测函数. 若存在 $M > 0$，对任意 E 上可积的简单函数 φ，有

$$\left| \int_E g\varphi \right| \le M ||\varphi||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

则 $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$ 且 $||g||_{\mathcal{L}^q} \le M$.

证明. 先设 $p > 1$，存在非负简单且有紧支集的函数列 (φ_n)，使得

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = |g(x)|^q, \quad x \in E$$

当 $|g(x)|=0$ 时，有 $\varphi_n(x)=0$. 令 $\psi_n(x)=\operatorname{sgn}(g(x))\cdot\varphi(x)^{1/p}$，则 ψ_n 是 E 上简单函数，且 $||\psi_n||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}=\left(\int_E|\varphi|\right)^{1/p}$. 注意到

$$0\leq\varphi_n(x)=(\varphi_n(x))^{1/p}\cdot\varphi_n(x)^{1/q}\leq\varphi_n(x)^{1/p}|g(x)|=\psi_n(x)g(x)$$

因此

$$\int_E\varphi_n(x)\mathrm{d}x\leq\int_E\psi_n(x)g(x)\mathrm{d}x\leq M\cdot||\psi_n||_{\mathcal{L}^p}=M\cdot(|\varphi_n(x)|)^{1/p}$$

即 $\int_E\varphi_n\leq M^q$. 令 $k\to\infty$，有 $||g(x)||_{\mathcal{L}^p}\leq M$.

再设 $p=1$. 若结论不成立，即存在 E 中的可测集 A，$\mathrm{m}(A)>0$，使得 $|g(x)|>M$，$x\in A$. 由于 $A=A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}B(0,k)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B(0,K))$. 存在 k，使得

$$\frac{1}{||\varphi||_{\mathcal{L}^1}}\left|\int_E\varphi(x)g(x)\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{||\varphi||_{\mathcal{L}^1}}\int_A|g(x)|\mathrm{d}x>\frac{M\cdot\mathrm{m}(A_n)}{\mathrm{m}(A_n)}=M$$

矛盾！故 $||g||_{\mathcal{L}^\infty}\leq M$. □

定理 1.2 (广义 Minkowski 不等式). 设 f 为 $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上可测函数，若 $f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$，$y\in\mathbb{R}^d$，且 $\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y$. 那么

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}f(x,y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leq\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y$$

即

$$\left|\left|\int_{\mathbb{R}^d}f(x,y)\mathrm{d}y\right|\right|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}\leq\int_{\mathbb{R}^d}||f(x,y)||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}\mathrm{d}y$$

证明. $p=1$ 显然成立. 当 $p>1$ 时，设 $1/p+1/q=1$，令 $F(x)=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x,y)|\mathrm{d}y$，$M:=\int_{\mathbb{R}^d}||f(x,y)||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)}\mathrm{d}y$，则对任意简单函数 $\varphi(x)$，有

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d}F(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\right|&\leq\int_{\mathbb{R}^d}|F(x)\varphi(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x,y)|\cdot|\varphi(x)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&\leq\int_{\mathbb{R}^d}||f||_{\mathcal{L}^p}||\varphi||_{\mathcal{L}^q}\mathrm{d}y\\&=M\cdot||\varphi||_{\mathcal{L}^q}\end{aligned}$$

其中倒数第一个不等号来自于 Hölder 不等式. 因此 $||F||_{\mathcal{L}^p} \leq M$，即

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mathrm{d}y\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}y$$

□

定理 1.3. 设 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 是一个恒等元逼近，对任意 $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$，有

$$\lim_{\delta\to 0}||K_\delta * f - f||_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)} = 0$$

证明. 注意到

$$||K_\delta * f - f||_{\mathcal{L}^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}(f(x-y)-f(x))\cdot K_\delta(y)\mathrm{d}y\right|^p\mathrm{d}x$$

由定理1.2以及引理**??**，我们有

$$\begin{aligned}
||K_\delta * f - f||_{\mathcal{L}^p}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d}(|f(x-y)-f(x)|^p\cdot|K_\delta(y)|^p)^{1/p}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}||f(x-y)-f(x)||_{\mathcal{L}^p}\cdot|K_\delta(y)|\mathrm{d}y \\
&= \int_{|y|\leq\delta}||f(x-y)-f(x)||_{\mathcal{L}^p}\cdot|K_\delta(y)|\mathrm{d}y \\
&+ \int_{|y|>\delta}||f(x-y)-f(x)||_{\mathcal{L}^p}\cdot|K_\delta(y)|\mathrm{d}y \\
&< C\epsilon + 2||f||_{\mathcal{L}^p}\int_{|y|>\delta}\frac{C'\delta}{|y|^{d+1}}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

其中 C, C' 为不依赖 ϵ, δ 的常数. 令 $\delta \to 0$ 即可. □

2. 恒等元逼近的若干应用举例

¶ 光滑化子. 在分析中，我们经常遇到某个本身光滑性并不好的函数 (例如只有连续性) 去得到一些正则的结果，这时需要利用卷积上一列**光滑化子**使得卷积后的函数列光滑，利用这个光滑的函数列得到某些结果，最后再收敛到原函数.

定义 2.1. 称径向对称函数 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 是一个**光滑化子**，如果

$$\int \eta = 1$$

这样的函数总是存在的，事实上，可以取

$$\eta(x)=\begin{cases}Ce^{1-|x|^2} & x\in B(0,1)\\ 0 & x\notin B(0,1)\end{cases}$$

其中 C 为调节系数，用于稳定积分值. 作变量替换 $\eta_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^d}\eta(\frac{x}{\epsilon})$ 得到一族光滑化子，显然满足定义1.2中的条件，故上述光滑化子是一个恒等元逼近.

下面我们从恒等元逼近的角度解决两个调和分析中命题. 第一个命题的二维形式最早来自于全纯函数的 Cauchy 积分定理的研究[2]，此后人们意识到类似的提升正则性的性质本质上来自于 Laplace 方程，即 $\Delta u=0$，它的解称为**调和函数**. 但更本质的是，调和函数等价于满足定理2.1中的平均值性质，通过磨光的技术手段可以得到隐含的光滑性，参见 [**15, 22, 1, 3**].

定理 2.1 (调和函数的正则性). 若 $u\in C(\Omega)$ 且满足平均值性质，则 $u\in C^\infty(\Omega)$. 其中 $\Omega(\subset\mathbb{R}^d)$ 为一区域，平均值性质指的是

$$u(x)=\frac{1}{\mathrm{m}(\partial B(x,r))}\int_{\partial B(x,r)}u(y)\mathrm{d}Sy=\frac{1}{\mathrm{m}(B(x,r))}\int_{B(x,r)}u(y)\mathrm{d}y,\quad \forall B(x,r)\subset\Omega$$

证明. 记 $u_\epsilon=u*\eta_\epsilon$，结合平均值性质，直接计算[3]可得 $u_\epsilon=u$, $\forall\epsilon>0$，因此 $u=u_\epsilon\in C^\infty$. □

注 2.1. 事实上，定理2.1中的条件可以被减弱为 u 可积甚至仅满足 Laplace 方程的弱解性，参见 [**1, 3, 22**]，我们在定理2.2中介绍一种情况. 此外，解的光滑性对于一般的椭圆型方程也成立，从 C^2 光滑性跳板到 C^∞ 需要用到 Schauder 在 30 年代的工作，而散度情况下从弱解条件中得到 C^2 的光滑性最早被 De Giorgi 于 1957 年利用迭代的方法解决；而非散度的情形被 Krylov 和 Safonov 在 1979 年解决，有兴趣的读者可以参见 [**22, 1, 3**] 和相关的文章.

第二个命题不光在偏微分方程理论中占据重要地位，而且在证明流形上的 Hodge 分解定理时很有用，参见 [**17, 12**].

---

[2]有兴趣的读者可以参考 [**4**].

[3]参见 [**15**].

定理 2.2 (Weyl 引理). 设 $u \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$，其中 $\Omega(\subset \mathbb{R}^d)$ 为一区域. 若 u 弱调和，即

$$\int u\Delta\varphi = 0, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

则 u 为调和函数.

证明. 利用平均值性质不难证明如下事实：

若有调和函数列 (u_n) 在 $\mathcal{L}^1$ 意义下收敛于 u，则 u 也是调和函数.

下面只要构造一列调和函数 (u_n)，使得 $||u_n - u||_{\mathcal{L}^1} \to 0$ 即可. 记 $\Omega_n := \{x \in \Omega | d(x, \partial\Omega) < \frac{1}{n}\}$. 取 Ω 内的光滑化子 η，并且取

$$\eta_n(x) = n^d \eta(nx), \quad n \geq 1$$

容易看出 $\Delta u_n := \Delta u * \eta_n = 0$，故 (u_n) 为调和函数列. 由定理1.1可知 $||u_n - u||_{\mathcal{L}^1} \to 0$. □

¶ Poisson 核. Poisson 在早期偏微分方程中的工作主要体现在对三大方程 (Laplace 方程、热方程和波动方程)Dirichlet 问题[4]解的显式表示，这三类方程的解往往可以写作一个核函数 (往往被称为 **Poisson 核**) 卷积的形式 (往往被称为 **Poisson 公式**)，参见 [**15, 10**]. 例如

(1) 半空间 $\mathbb{R}^d_{\geq 0}$ 的 Laplace 方程初边值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -\Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^d_{\geq 0} \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\mathbb{R}^d_{\geq 0} \end{cases} \tag{17}$$

的解可以表示为

$$u(x) = K * g(x) = \frac{2x_d}{d\mathrm{m}(B(0,1))} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{g(y)}{|y-x|^d} \mathrm{d}y$$

称为 Poisson 公式，其中

$$K(x) := \frac{2x_d}{d\mathrm{m}(B(0,1))|x|^d}$$

[4]参见 [**15**].

称为半空间的 Poisson 核. 此外，单位球体 $B(0,1)$ 上的初边值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -\Delta u = 0, & x \in B(0,1) \\ u(x) = g(x), & x \in \partial B(0,1) \end{cases} \tag{18}$$

的解为

$$u(x) = K * g = \frac{1-|x|^2}{d\mathrm{m}(B(0,1))} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^d} \mathrm{d}Sy$$

称为 Poisson 公式，其中

$$K(x) := \frac{1-|x|^2}{d\mathrm{m}(B(0,1))|x-y|^d}$$

称为球体的 Poisson 核.

(2) 一维热方程初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \partial_t u - a^2 \Delta u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ u(x,0) = \varphi & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{19}$$

的解表示为

$$u(x,t) = K_t * \varphi = \int_{\mathbb{R}} K_t(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

称为 Poisson 公式，其中

$$K_t(x) := \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \tag{20}$$

称为 Poisson 核.

(3) 三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \partial_t^2 u - a^2 \Delta u = f(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

解的表达为

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t^2}\int_{\partial B(x,at)}[\varphi(y) + D\varphi(y)\cdot(y-x) + t\psi(y)]\mathrm{d}Sy$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int_{B(x,at)}\frac{f(y,t-|y-x|/a)}{|y-x|}\mathrm{d}y$$

当 $f\equiv 0$ 时，上述表达式称为 Kirchhoff 公式. 而对于二维齐次情形，我们有解的表达为

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi at}\int_{B(x,at)}\frac{\varphi(y) + D\varphi(y)\cdot(y-x) + t\psi(y)}{\sqrt{(at)^2 - |y-x|^2}}\mathrm{d}y$$

它被称为 Poisson 公式.

参见 [**15**] 第 50 页处的评述，一般来说 Poisson 公式只给出了初边值问题的形式解，但在公式在边界 (例如初边值问题 (17) 和 (18)) 处尚未定义，因此解 $u(x)$ 取边值 $g(x)$ 是在极限的意义下成立的. 为此，我们需要用 Poisson 核作边值逼近. 不难验证以上的所有 Poisson 核都是恒等元逼近，由定理1.1立即得到边值的逼近. 此外，函数 (20) 又称**热核** (参见 [**9**])，可以用来证明著名的 Weierstrass 定理，参见 [**15**]，我们叙述如下：

定理 2.3 (Weierstrass). $[0,1]$ 区间上的任一连续函数 f 可被多项式 $\mathcal{P}$ 逼近.

¶ Fourier 变换.

定义 2.2. 定义 $\mathcal{L}^1\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上的 **Fourier 变换** (算子)$\mathcal{F}$ 为

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi x} f(x)\mathrm{d}x$$

[**1, 15, 10**] 中证明 Fourier 变换的“代数”性质，即

引理 2.1. 设 $u,v\in\mathcal{L}^1\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$，则

$$u \mathbin{\hat{*}} v = (2\pi)^{n/2}\hat{u}\cdot\hat{v}$$

以热核20为恒等元逼近，[**1**] 中证明了如下定理.

定理 2.4. 若 $u\in\mathcal{L}^1\cap\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$，则 $\mathcal{F}[u]\in\mathcal{L}^2$，且

$$||u||_{\mathcal{L}^2} = ||\hat{u}||_{\mathcal{L}^2}$$

这个定理解释了定义 Fourier 逆变换的合理性，参见 [**15, 22, 9**]. 进一步地，Foureir 变换作为 $\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 空间上的算子，可以延拓为 $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上的算子，即如下交换图所示.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "延拓"] & \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \\
\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \arrow[ur, "\mathcal{F}"] &
\end{tikzcd}$$

注 2.2. 而 [**10**] 对 Fourier 变换的定义在 Schwarz 空间中进行, 但在 [**9**] 中最终证明了上述性质.

针对不同区域上的 Laplace 算子有不同的谱，特别地，紧区域上的谱是离散的，参见 [**22**]. 对于离散形式的 Fourier 变换，我们仍然用一列核函数与既定函数作卷积. 这样的一列核函数称为 **Dirichlet 核**. 可以定义函数 f 的 Fourier 展开为

$$f(x) \sim \lim_{N\to\infty} D_N * f(x)$$

其中

$$D_N := \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\sin[(N+1/2)x]}{\sin(x/2)}$$

为 Dirichlet 核. 注意到 (参见 [**10, 11**])

$$|D_N| \sim O(\log N), \quad N \to \infty$$

因此 Dirichlet 核不是好核,进而不是恒等元逼近,这个事实导致 Fourier 分析中一些连续函数存在无法被 Fourier 展开级数收敛的点. 更本质的，通过 Dirichlet 核 D_N 定义的线性泛函

$$l_N[f](x) := D_N * f(x), \quad 固定\ x$$

有算子范数 $||l_N|| = ||D_N||_{\mathcal{L}^1}$, 由 Banach-Steinhaus 定理[5]可知上述“存在无法收敛点”的现象是“奇点聚集的”, [**11**] 中证明了如下定理.

定理 2.5. $C[-\pi,\pi]$ 中某点处 Fourier 级数发散的函数构成的集合是剩余集[6].

[5]参见 [**11**].

[6]参见 [**11**].

对于上述收敛性差的现象，[**10**] 中提出的改进方法有两个，

(1) Cesàro 求和：规定 Fejér 核为

$$F_N(x) := \frac{D_0(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N}$$

计算可得 $F_N = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$，并且可以验证它是一个恒等元逼近.

(2) Abel 求和：规定 Poisson 核为

$$P_r(N) = \sum_{n=-N}^{N} r^n \cdot D_n, \quad 0 \le r < 1$$

令 $N \to \infty$，记为 P_r. 可以验证 P_r 是一个恒等元逼近.

在上述两种核函数的意义下，通过卷积 $F_N * f$ 或 $P_r * f$ 均可以实现收敛. 因此退而求其次，[**10**] 中证明了如下 Weierstrass 第二逼近定理.

定理 2.6 (Weierstrass). 设 f 为以 2π 为周期的连续函数，则存在三角多项式 $\mathcal{T}$ 逼近.

CHAPTER 3

抽象测度初步

我们在本章中将第1章中的第1节和第2节的测度与积分推广到一般的空间. 我们将简单介绍抽象测度与积分，但在不同研究方向下会有不用的测度：

(1) 几何函数论：Hausdorff 测度

(2) 泛函分析：谱测度

(3) 李群理论：Haar 测度

(4) 概率论：Wiener 测度

1. 抽象测度空间

¶ 抽象测度空间的定义与例子. 下面将第1节中 Lebesgue 测度的性质抽象出来，定义一般集合上一般的测度. 注意到测度的定义与运算依赖于集合上本身的 σ-代数结合, 因此定义测度前需要一个有该结构的集合. 此外，在第1节中，测度最为重要的性质是定理1.4，即**可加性**，我们将其脱离出来单独作为一般测度的定义.

定义 1.1. 设 X 为非空集合，$\mathcal{M}$ 为 X 上的 σ-代数. 定义 $\mathcal{M}$ 上的函数

$$\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

称为 (抽象) **测度**，如果满足

(1) $\mu(\emptyset) = 0$；

(2) 设 $(E_n)_{n\geq 1}$ 为两两不交的集列，则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

进而称 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为**抽象测度空间**.

上述定义中的性质 (1) 为了保证 (2) 中可以进行有限求和. 进一步，称 μ 是**有限**的，如果 $\mu(X) < \infty$，特别地；称 μ 为**概率测度**，如果 $\mu(X) = 1$. 称 μ 是 σ-**有限**的，如果 X 可视为可数个有限测度子集的并.

练习 1.1. (1) 验证上述定义中的 μ 适合**单调性**，即

若 $E_1 \subset E_2$，则 $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

(2) 验证上述定义中的 μ 适合**次可加性**，即

对一般的集列 (E_n)，成立 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

例 1.1 (加权 Lebesgue 测度). 设 $X = \mathbb{R}^d$，$\mathcal{M} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$. 对于给定的非负 Lebesgue 可测函数 f，定义

$$\mu(E) := \int_E f, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

称 μ 为**加权 Lebesuge 测度**，特别地，当 $f \equiv 1$，μ 为 Lebesgue 测度.

例 1.2 (计数测度). 设 X 为非负序列集 $(x_n)_{n\geq 1}$，$\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. 定义

$$\mu(E) := \sum_{x_n \in E} \mu(x_n), \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

其中 $\mu_n := \mu(x_n) \geq 0$. 称 μ 为**计数测度**. 我们将会看到，这个测度实现积分与求和的转换.

例 1.3 (Dirac 测度). 设 X 为任一非空集合，$\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. 对于给定的 $p \in X$，定义

$$\mu(E) := \begin{cases} 1 & p \in E \\ 0 & p \notin E \end{cases}, \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

称 μ 为 **Dirac 测度**. 广义函数与分布理论中这个测度被视为**分布**，参见 [**22, 1, 11**].

练习 1.2. (1) 验证例1.1中的 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间. 并且验证 μ 是一个 σ-有限测度.

(2) 验证例1.2中的 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个测度空间.

(3) 验证例1.3中的 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 是一个测度空间. 进一步 μ 是有限测度.

¶ 外测度与测度的构造. 一个自然的问题是：如何构造一个抽象测度？我们回忆 Lebesgue 测度的构造历程. 事实上，先建立了针对欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 所有子集的函数，称为 Lebesgue 外测度 m^*，再给这个外测度提要求并且限制到部分子集上，这些子集自然成为一个 σ-代数，称为 Lebesgue σ-代数 $\mathcal{L}_{\mathbb{R}^d}$，同时 m^* 限制在其上成为 Lebesgue 测度. 下面我们将模仿上述过程，推广一般的集合上.

定义 1.2. 设 X 为非空集合，定义 X 上的一个集合函数

$$\mu^*:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$$

称 μ^* 为一个**外测度**，如果满足

(1) $\mu^*(\emptyset)=0$;

(2) 若 $E_1\subset E_2$，则 $\mu^*(E_1)\le\mu^*(E_2)$;

(3) 对一般的集列 (E_n)，成立 $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right)\le\sum_{n=1}^\infty\mu^*(E_n)$.

此时称 $(X,\mathcal{P}(X),\mu^*)$ 为**外测度空间**.

另一个问题是：抽象的外测度 μ^* 何时被称为一个测度？换言之，X 的哪些子集是可测集？1914 年 Carathéodory 提出一个基于集合“分离性”的条件[1].

定义 1.3. 在定义1.2的设定下，称子集 $E\subset X$ 是 μ **可测**的，如果对任一集合 $A(\subset X)$[2]，满足

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$$

由次可加性，上述条件只有 $\mu^*(A)\ge\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$ 是非平凡的. 以下定理的证明具体给出了从外测度到测度的构造.

定理 1.1. 设 μ^* 为 X 上的一个外测度，则所有 μ^* 可测的子集构成的集合 (记为 $\mathcal{M}$) 是一个 σ-代数，且 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是一个测度，记为 μ，称为由外测度 μ^* 诱导的测度.

[1]我们将证明其与 Lebesgue 可测性的等价.

[2]称为**测试集**.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "限制"'] & {[0,\infty]} \\
\mathcal{M} \arrow[ru, "\mu"] &
\end{tikzcd}
$$

证明. 首先证明 $\mathcal{M}$ 是一个 σ-代数. 显然 $\emptyset, X \in \mathcal{M}$，并且补运算在 $\mathcal{M}$ 中封闭. 下证可列并在 $\mathcal{M}$ 中封闭. 为此分成以下两步证明，不妨考虑的集合都是外测度有限的：

Step 1 先证对有限并封闭. 为此由归纳法，只要证明

$$若\ E_1, E_2 \in \mathcal{M}，则\ E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}.$$

对任意 $A \subset X$，由 $E_1 \in \mathcal{M}$，于是

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(E_1 \cap A) + \mu^*(E_1 \cap A)$$

又由于 $E_2 \in \mathcal{M}$，进而

$$
\begin{aligned}
\mu^*(A) &\geq \mu^*(E_1 \cap A) + \mu^*(E_1 \cap A) \\
&\geq \mu^*(E_1 \cap E_2 \cap A) + \mu^*(E_1 \cap E_2^c \cap A) + \mu^*(E_1^c \cap E_2 \cap A) + +\mu^*(E_1^c \cap E_2^c \cap A) \\
&\geq \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap A) + \mu^*((E_1 \cup E_2)^c \cap A)
\end{aligned}
$$

因此 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$.

Step 2 再证明对可列并封闭. 设集列 $(E_n)_{n\geq 1}$，令

$$G_N = \bigcup_{n=1}^{N} E_n$$

于是 (G_N) 单增. 由练习1.3，可以构造不交的集列 (F_N) 如下：

$$F_N = G_N - G_{N-1}, \quad N \geq 2$$

其中 $F_1 = G_1 = E_1$，以及 $G = \bigcup_{N=1}^{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 即证对任意 $A \subset X$，都有

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(G \cap A) + \mu^*(G^c \cap A)$$

为此，固定 N. 由 Step 1，我们有

$$
\begin{aligned}
\mu^*(A) &\geq \mu^*(G_N \cap A) + \mu^*(C_N^c \cap A) \\
&= \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) \cap A\right) + \mu^*(G_N^c \cap A) \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(F_n \cap A) + \mu^*(G^c \cap A)
\end{aligned}
$$

对上式两边令 $N \to \infty$ 则有

$$
\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(F_n \cap A) + \mu^*(G^c \cap A)
$$

最后，由次可加性 (见定义1.2)，我们有

$$
\mu^*(A) \geq \mu^*(G \cap A) + \mu^*(G^c \cap A)
$$

最后，要证 μ 是一个测度，只要验证可列可加性即可. 为此，由 Step 1，有

$$
\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_n\right) \geq \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n)
$$

对上式两边令 $N \to \infty$ 即可. □

注 1.1. 不难看出，满足定义1.3的集族在外测度 μ^* 下适合可列可加性，进而是 μ^* 限制其上是一个测度，并且由外测度诱导的测度一定**完备**.

† Lebesgue 可测与 Carathéodory 条件等价性的补注. 我们断言第1中建立的 Lebesgue 可测的含义与抽象积分中的 Carathéodory 条件限制在欧式空间上是一致的.

定理 1.2. 对外测度空间 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \mathrm{m}^*)$，定义1.2与定义1.3等价.

证明上述定理前我们介绍一个讨论测度不等式的技巧——**等测包**. 外测度空间 $(X, \mathcal{P}(X), \mu^*)$ 中任取子集 E. 取一列子集 $(O_n)_{n\geq 1}$，使得

$$
E \subset O_n, \quad \mathrm{m}^*(O_n) \leq \mathrm{m}^*(E) + \frac{1}{n}
$$

记 $G := \bigcup_n O_n$，不难验证

$$\mathrm{m}^*(E) = \mathrm{m}^*(G)$$

事实上对以上不等式中令 $n \to \infty$ 即可. 我们称 G 为 E 的**等测包**. 在具体的问题中我们会选取开集列 (O_n)，进而 G 为一个 G_δ-集，大多数情况下 G_δ-集是 σ-代数的成员，再利用 $\mathrm{m}^*(G - E) = 0$ 在忽略零测集的意义下验证 E 的结果.

定理1.2的证明. 设满足定义1.2的集合全体为 $\mathcal{M}_1$，满足定义1.3的集合全体为 $\mathcal{M}_2$.

先证 $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$. 为此，任取 $E \in \mathcal{M}_1$. 对任意 $A \in \mathbb{R}^d$，用开集列 (O_n) 构造 A 的等测包 $G := \bigcap_n O_n$，进而 $\mathrm{m}^*(G) = \mathrm{m}^*(A)$. 于是

$$\mathrm{m}^*(E \cap A) + \mathrm{m}^*(E^c \cap A) \leq \mathrm{m}^*(E \cap G) + \mathrm{m}^*(E^c \cap G)$$

注意到 G 是一个 G_δ-集，进而满足定义1.2，又 $E \in \mathcal{M}_1$，于是

$$\mathrm{m}^*(E \cap G) + \mathrm{m}^*(E^c \cap G) = \mathrm{m}(E \cap G) + \mathrm{m}(E^c \cap G) = \mathrm{m}^*(G) = \mathrm{m}^*(A)$$

这说明

$$\mathrm{m}^*(E \cap A) + \mathrm{m}^*(E^c \cap A) \leq \mathrm{m}^*(A)$$

因此 $E \in \mathcal{M}_2$.

反过来，任取 $E \in \mathcal{M}_2$，同理作 E 的等测包 G. 于是

$$\mathrm{m}^*(G) = \mathrm{m}^*(E \cap G) + \mathrm{m}^*(E^c \cap G)$$

由于 $\mathrm{m}^*(E) = \mathrm{m}^*(G)$ 且 $E \subset G$，进而 $\mathrm{m}(E^c \cap G) = 0$. 因此 $E^c \cap G \in \mathcal{M}_1$. 又由于 G 是一个 G_δ-集，于是 $E \in \mathcal{M}_1$. □

¶ 度量测度空间. 上述在一般集合上定义的测度有时不好处理，很多研究问题会考虑同一集合上不用结构的相互作用. 例如集合上的拓扑结构与测度兼容，这时可以定义 Borel 测度；集合上的群结构与拓扑结构诱导拓扑群，这时若进一步与测度兼容，此时的测度是 Haar 测度等等. 这一小节中我们将视角限制在更具体的空间，即度量空间中.

定义 1.4. 设 (X,d) 为一个度量空间[3]，d 为其上的度量. 外测度

$$\mu^*:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$$

称为 X 的一个**度量外测度**，如果对任意子集 E,F 满足 $d(E,F)>0$，都有 $\mu^*(E\cup F)=\mu^*(E)+\mu^*(F)$. 进而称 (X,d,μ^*) 为**度量外测度空间**.

在一般度量空间 X 中，开集为球形邻域，例如

$$B_\delta(x_0):=\{x\in X|d(x,x_0)<\delta\}$$

因此可以建立相应的 Borel 代数和 Borel 集. 回忆我们在 Lebesgue 测度中证明所有 Borel 集都是可测的.

定理 1.3. 设 (X,d,μ^*) 为度量外测度空间，则所有 Borel 集都是 μ 可测的.

证明. 只要证明闭集可测. 为此, 任取闭集 $F\subset X$. 对任意 $A\subset X$，令

$$A_n:=\{x\in A:d(x,F)>\frac{1}{n}\}$$

则 $d(A_n,F\cap A)\geq 1/n$，于是

$$\mu^*(A)\geq\mu(A_n)+\mu^*(F\cap A)$$

注意到 $A_n\nearrow F^c\cap A$，又由于 F 为闭集，因此

$$\lim_{n\to\infty}\mu^*(A_n)=\mu^*(F^c\cap A)$$

因此 $\mu^*(A)\geq\mu(F^c\cap A)+\mu^*(F\cap A)$. □

定义 1.5. 在定理1.3的设定下，记 X 上的 Borel 代数为 $\mathcal{B}_X$，并且 $\mu^*|_{\mathcal{B}_X}$ 称为 **Borel 测度**.

---

[3]见定义2.6.

† Borel 测度与 Radon 测度. 我们上述建立的 Borel 测度是度量空间的，读者不难看出 Borel 集的构造仅依赖度量诱导的拓扑. 因此 Borel 测度是可以在一般拓扑空间上实现的，我们叙述之.

定义 1.6. 设 (X,τ) 为拓扑空间，τ 为其上的拓扑. 定义

$$\mathcal{B}_X := \bigcap_{\mathcal{O}\in\mathcal{M},\ 若\mathcal{O}\in\tau} \mathcal{M}$$

为 X 上的 **Borel σ-代数**

直观上，拓扑空间 X 的 Borel σ-代数就是包含全体开集的最小 σ-代数.

进而在 X 上规定外测度 μ^*，当 X 是局部紧的 Hausdorff 空间[4]时适合定理1.3，我们将 $\mu^*|_{\mathcal{B}_X}$ 称为 **Borel 测度**. 此外，将定理1.5的 (1) 和推论1.2的 (1) 称为 Lebesgue 测度的**外（内）正则性**. 推广到一般的 Borel 测度空间 $(X,\mathcal{B}_X,\mu^*|_{\mathcal{B}_X})$，满足以上两条性质 (内外正则性) 的 Borel 测度称为**正则 Borel 测度**. 进一步，若如果 μ 在 Borel 集上外正则，在开集上内正则，而且所有紧 Borel 集的测度有限，那么 μ 称为 **Radon 测度**.

更进一步，称 G 为**拓扑群**，如果拓扑空间 G 在运算 $\cdot$[5]下构成群，且映射

$$G\times G\to G,\ (x,y)\to x\cdot y,\qquad G\to G,\ x\to x^{-1}$$

关于 G 上的拓扑是连续的. 由上述讨论,不妨设 G 是局部紧的 Hausdorff 空间，可以在 G 上定义一个 Borel 测度 μ，称 μ 是一个 **Haar** 测度，如果

$$\mu(g\cdot B)=\mu(B),\quad \forall g\in G$$

其中 B 为 G 上的 Borel 子集. 一个事实是：当 G 是局部紧群时，其上的 Haar 测度在相差一个常数倍意义下是唯一的.

不难看出 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d},\mu|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}})$ 是一个 Radon 测度空间，若将 $\mathbb{R}^d$ 视为实向量加法下的 Abel 群，则上述空间还是 Haar 测度空间.

[4] 参见 [**16**].

[5] $x\cdot y\in G,\quad \forall x,y\in G$

2. 可测函数与抽象积分

¶ 可测函数与逼近论. 最后, 我们将视角限制在 σ-有限的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上建立积分，其中大部分结果与欧式空间一致.

定义 2.1. 称 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的函数

$$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

是**可测**的，如果对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$，有 $f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{M}$.

练习 2.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的几乎处处有限函数全体对 $+, -, \times$ 封闭.

练习 2.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的几乎处处有限函数全体对可列极限

$$\limsup,\ \liminf,\ \sup,\ \inf$$

封闭.

定义 2.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的**简单函数**定义为

$$f := \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{E_n}$$

其中 $E_n \in \mathcal{M}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

练习 2.3. 验证 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的简单函数逼近定理.

注 2.1. 一般集合上没有矩体的概念，因此不再考虑阶梯函数.

并且 Littlewood 三原则其二仍然适用，即

L2 每个 (可测) 函数“几乎”是连续的.

L3 每个 (逐点) 收敛“几乎”是一致的.

练习 2.4. (1) 验证 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的 Egorov 定理.

(2) 验证 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的 Lusin 定理.

此外，可以定义抽象测度空间上的**依测度收敛**，方式与定义1.8一致，即可测函数列 $(f_n)_{n\geq 1}$，对任意 $\epsilon > 0$，都有

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}\right) \to 0, \quad n \to \infty$$

当 μ 为概率测度时称为依概率收敛.

练习 2.5. (1) 验证 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 上的 Lebesgue 定理，即定理1.
(2) 验证 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 上的 Riesz 定理，即定理2.

¶ 抽象积分. 我们建立积分的步骤与第2节是一致的，即

$$\boxed{\text{简单函数}}\Longrightarrow\boxed{\text{有界有限支函数}}\Longrightarrow\boxed{\text{非负可测函数}}\Longrightarrow\boxed{\text{一般可测函数}}$$

为此，我们定义简单函数 f 的积分:

$$\int_X f\mathrm{d}\mu := \sum_{n=1}^{N} a_n\mu(E_n)$$

[6] 同样利用标准形式的讨论我们容易证明上述定义是良性的，并且时候命题2.1，请读者自行补充. 进一步可以定义有界有限支函数以及其上的积分，为此读者容易证明引理2.1和定理2.1；进而同样的方式定义非负可测函数的积分以及相应的性质，见命题2.2. 在这个基础上，可以证明 **Fatou 引理**，见引理2.2，即设 (f_n) 为一列非负可测函数，且 $f_n \to f$ a.e.，则

$$\liminf_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu \geq \int f\mathrm{d}\mu$$

此外，可以证明引理2.2的若干推论，即 **Levi 单调收敛定理**和逐项积分定理，见定理2和定理3. 最后，通过观察

$$f = f_+ - f_-$$

建立一般可测函数的积分

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_X f\cdot\chi_E\mathrm{d}\mu,\quad E\in\mathcal{M} \tag{21}$$

以及若干性质，见定理2.4，可以验证积分的绝对连续性，即引理3，进一步证明**控制收敛定理**，即定理2.5. 此外，可以建立复值函数 f 的抽象积分，请读者自行补充.

例 2.1. 回忆例1.2，建立其上的积分

$$\int_E f\mathrm{d}\mu := \sum_{x_n\in E}\mu_n f(x_n)$$

[6]记号 $\mathrm{d}\mu$ 的问题我们将在小段落2中澄清.

特别地，当 $f \equiv 1$ 时

$$\int_E \mathrm{d}\mu := \sum_{x_n \in E} \mu_n$$

我们实现积分与求和的转换.

¶ 抽象 $\mathcal{L}^p$ 空间. 至此, 我们可以建立 σ-有限的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上的 $\mathcal{L}^p$ 空间.

定义 2.3. 设 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 为 σ-有限的测度空间，称函数

$$f : X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

是 p **方可积**的，其中 $0 < p \leq \infty$[7]，如果

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty$$

若 X 为局部紧空间，称 f **局部** p **方可积**，如果对 X 的任一紧子集 K，有

$$\int_K |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty$$

我们将全体 p 方可积的函数构成的集合称为 $\mathcal{L}^p$ **空间**，记为 $\mathcal{L}^p(X)$，无歧义时简记 $\mathcal{L}^p$，特别地，称 $\mathcal{L}^1$ 为可积函数空间. 局部 p 方可积函数构成的集合简记为 $\mathcal{L}^p_{\mathrm{loc}}$.

例 2.2. 特别地，取计数测度空间，见例1.2和例2.1，称此时的 $\mathcal{L}^p$ 空间为 l^p **空间**，一般取 $X = \mathbb{N}$.

当 $p \geq 1$ 时规定 $\mathcal{L}^p$ 上的范数为

$$||f||_{\mathcal{L}^p} := \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}$$

为满足正定性的调整方式与欧式空间的版本一致，请读者自行补充. 我们同样有 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式. 此外，$\mathcal{L}^p$ 空间的完备性、稠密子集、可分性与平移连续性与欧式空间的版本也一致，我们略去叙述.

[7] 当 $p = \infty$ 讨论本性有界函数即可，往后不再单独叙述.

† 测度与微分形式的补注. 最后，我们简要解释等式21中的记号 $\mathrm{d}\mu$ 的含义. 回忆第1章中定义的 Lebesgue 积分，我们不加说明地 “滥用” 算符 $\mathrm{d}x$. 事实上，在数学分析中这个符号连同积分号 $\int$ 一直作为 Riemann 积分的算符，有时我们直接记积分算子为 $\int$ 无歧义时也是合法的. 倘若对一般的测度空间 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 作积分，这时的积分就要指明对何种测度作积分，因此使用记号

$$\int_X \mathrm{d}\mu$$

在几何学中，对 d 维流形 M 作积分，这时依赖其余切丛张量积的某个截面的选取，这个选取的结果称为一个**微分形式**，即

$$\omega \in \Gamma(\otimes_k T^* M), \quad 1 \leq k \leq d$$

其中 $\otimes_k$ 表示 k 次张量积，T^*M 表示 M 的余切丛，Γ 表示截面，上述 ω 就是一个 k 阶微分形式. 它在分析学中的含义是：利用流形局部到欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 的同胚映照 φ “拉回” $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度 (也可以选择其他测度)，即

$$\omega := \mathrm{d}\varphi^*(\mathrm{d}x)$$

其中 $\mathrm{d}x$ 指 $\mathbb{R}^d$ 上 k 维 Lebesgue 测度对应的积分算符，拉回映照 $\mathrm{d}\varphi^*$ 是切映照 $\mathrm{d}\varphi$ 的对偶. 由于 φ 本身是一个微分同胚，进而 ω 继承 $\mathrm{d}x$ 良好的性质，大多情况下 ω 是一个 Radon 测度，这为讨论黎曼流形上的分析提供方便. 有时为了便捷，我们直接称 ω 为流形上的测度，于是妥善地定义流形上的积分

$$\int_M \omega$$

CHAPTER 4

Hausdorff 维数与分形几何

1. Hausdorff 测度与 Hausdorff 维数

¶ Hausdorff 外测度. 我们先在欧克空间 $\mathbb{R}^d$ 上建立 Hausdorff 外测度.

定义 1.1. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$，定义

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(E) := \inf\left\{\sum_k \operatorname{diam}(F_k)^\alpha : E \subset \bigcup_k F_k,\ \operatorname{diam} F_k \le \delta\right\}$$

不难发现 $\mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$ 关于 δ 单减，进而定义

$$\mathrm{m}_\alpha^*(E) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(E)$$

称为 E 的 α **维 Hausdorff 外测度**.

练习 1.1. 证明单调性：若 $E_1 \subset E_2$，则 $\mathrm{m}_\alpha^*(E_1) \le \mathrm{m}_\alpha^*(E_2)$.

命题 1.1 (次可加性 1).

$$\mathrm{m}_\alpha^*\left(\bigcup_k E_k\right) \le \sum_k \mathrm{m}_\alpha^*(E_k)$$

证明. 对任意 $\epsilon > 0$，对每个 E_k 存在覆盖

$$E_k \subset \bigcup_j F_{k,j}, \quad \operatorname{diam}(F_{k,j}) < \delta$$

满足

$$\sum_j \operatorname{diam}(F_{k,j})^\alpha \le \mathrm{m}_\alpha^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$$

于是

$$\mathrm{m}_\alpha^*\left(\bigcup_k E_k\right) \le \sum_{k,j} \operatorname{diam}(F_{k,j})^\alpha \le \sum_k \mathrm{m}_\alpha^*(E_k) + \epsilon$$

令 $\epsilon \to 0$ 即可. □

命题 1.2 (次可加性 2). 设 $d(E_1,E_2)>0$，证明：$\mathrm{m}_\alpha^*(E_1\cup E_2)=\mathrm{m}_\alpha^*(E_1)+\mathrm{m}_\alpha^*(E_2)$.

证明. 只要证 $\mathrm{m}_\alpha^*(E_1\cup E_2)\geq \mathrm{m}_\alpha^*(E_1)+\mathrm{m}_\alpha^*(E_2)$. 记 $\eta:=d(E_1,E_2)>0$，对任意 $\epsilon>0$，存在 $E_1\cup E_2$ 的覆盖 $\bigcup_k F_k$，不妨对其加细使得 $\mathrm{diam}(F_{k,j})\leq \eta/10$，于是

$$\mathrm{m}_\alpha^*(E_1)+\mathrm{m}_\alpha^*(E_2)\leq \sum_{E_1\text{的覆盖}}+\sum_{E_2\text{的覆盖}}\leq \mathrm{m}_\alpha^*(E_1\cup E_2)+\epsilon$$

令 $\epsilon\to 0$ 即可. □

注 1.1. (1) 回忆定义**??**，上述性质表明 m_α^* 确实是一个外测度;

(2) 进一步，可以看出 m_α^* 是一个度量外测度.

定义 1.2. 在定义1.1的设定下，规定

$$\mathrm{m}_\alpha:=\mathrm{m}_\alpha^*|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}}$$

称 m_α 为 α **维 Hausdorff 测度**.

我们回忆定理1.3, 结合定义1.3, 不难证明如下**可加性**, 即设 (E_n) 为两两不交集列，则有

$$\mathrm{m}_\alpha\left(\bigcup_n E_n\right)=\sum_n \mathrm{m}_\alpha(E_n)$$

因此，这里的 m_α^* 限制在 $\mathbb{R}^d$ 的 Borel 子集上生成一个测度. 进而称 $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d},\mathrm{m}_\alpha)$ 为一个 α **维 Hausdorff 测度空间**.

注 1.2. (1) 当 $\alpha=0$ 时，m_0 为计数测度.

(2) 当 $\alpha=1$ 且 $d=1$ 时，m_1 为 Lebesgue 测度.

然而当 $d>1$，$\alpha=d$ 时的 m_d 与 Lebesgue 测度不再一致，基于对定义1.1的观察，不难得到以下估计：

$$\alpha(d)\mathrm{m}_d(E)\leq \mathrm{m}(E)\leq 2^d\mathrm{m}_d(E)$$

其中 $\alpha(d)$ 为 d 维单位球的体积，参见 [**9, 2**].

练习 1.2. 证明 Hausdorff 测度的平移不变性、旋转不变性和数乘不变性.

¶ Hausdorff 维数与分形. 事实上，结合定义1.1，对于 $E \subset \mathbb{R}^d$，存在唯一的维数 α，使得

$$\mathrm{m}_\beta(E) = \begin{cases} \infty & \beta < \alpha \\ 0 & \beta > \alpha \end{cases}$$

我们把上述 α 定义为集合 E 的 **Hausdorff 维数**，记为 $\dim(E)$. [**19**] 中介绍过一个判别**分形集合** E 的 Hausdorff 维数的方法，即

> 将分形集合 E 分成 N 个相等的部分，每一部分在线性尺度上都是原来集合的 $1/m$，那么这个集合的 Hausdorff 维数就是 $\log_m N$.

从这个观点出发，[**19**] 中枚举了一些分形几何的例子：

- Cantor 三分集 $\mathcal{C}$，$\dim(\mathcal{C}) = \log_3 2 \approx 0.63$；
- Koch 雪花 $\mathcal{K}$，$\dim(\mathcal{K}) = \log_3 4 \approx 1.26$ ；
- Sierpinski 地毯 $\mathcal{S}$，$\dim(\mathcal{S}) = \log_3 8 \approx 1.89$.

可以看出，$\mathcal{S}$ 的对角线即为 $\mathcal{C}$.

2. 再谈 Cantor 集

最后我们利用 Cantor 三分集 $\mathcal{C}$ 的构造证明其 Haurdorff 维数.

定理 2.1. $\dim(\mathcal{C}) = \log_3 2$

我们希望找到 α，使得

$$\mathrm{m}_\alpha(\mathcal{C}) \le 1$$

注意到 F_k 由 2^k 条两两不交的长度为 3^{-k} 的闭区间构成，于是

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(\mathcal{C}) \le 2^k \left(3^{-k}\right)^\alpha$$

其中适当取 k 使得 $3^{-k} < \delta$. 由上述讨论，$\alpha = \log_3 2$. 为证明上述定理，还要证 $\dim(\mathcal{C}) \ge \log_3 2$，即证

$$\mathrm{m}_{\log_3 2}(\mathcal{C}) > 0$$

回忆 Cantor-Lebesgue 函数，我们先介绍一个引理.

引理 2.1. 设 f 为紧集 E 上的 γ-Lipschitz 函数，则

(1) $\mathrm{m}_\beta(f(E)) \le M^\beta \mathrm{m}_\alpha(E)$，其中 $\beta = \alpha/\gamma$；

(2) $\dim(f(E)) \leq 1/\gamma \dim(E)$.

证明. (2) 是 (1) 的自然推论，下面只证明 (1). 对 E 作覆盖 $\bigcup_k F_k$，于是

$$f(E) \subset \bigcup_k f(E \cap F_k)$$

注意到

$$\operatorname{diam}(f(E \cap F_k)) \leq M \cdot (\operatorname{diam}(F_k))^\gamma$$

其中 M 为常数. 因此，我们有

$$\mathrm{m}_\beta(f(E)) = \sum_k \operatorname{diam}(f(E \cap F_k))^\beta \leq M^{1/\gamma} \mathrm{m}_\alpha(E)$$

其中 $\beta = \alpha/\gamma$. □

回忆问题2，存在一列折现函数 (F_n) 逼近 Cantor-Lebesgue 函数 F，其中

$$|F_n(x) - F_n(y)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y|, \quad x, y \in \mathcal{C}$$

于是

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |F_n(x) - F_n(y)| + |F(x) - F_n(x)| + |F(y) - F_n(y)| \\ &\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| + \frac{2}{2^n} \end{aligned}$$

不难看出 F 的 Lipschitz 系数为 $\gamma = \log_3 2$，应用引理2.1，即证明定理2.1. 进一步可以证明 $\mathrm{m}_\alpha(\mathcal{C}) = 1$.

Part 3

附录

CHAPTER 5

基本概念

1. 基础集合论

1.1. 集合与运算.

¶ 基本设定. 设 X 是一个**集合**，x 为 X 中的一**元素**，记为 $x \in X$，称 x **属于** X，反之记为 $x \notin X$，称为 x 不属于 X. 常见的集合有 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ 等，分别表示实数集、有理数集、整数集与自然数集；$\Omega, \emptyset$ 分别记为全集与空集. 集合之间的关系主要有**包含**关系，称 A 为 B 的**子集**或 B 包含 A，如果对任意 $x \in A$，都有 $x \in B$，记为 $A \subset B$. 进一步，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，那么 $A = B$，称两个集合**相等**。

定义 1.1. X 中的一些子集组成的集合，称为 X 的一个 (子) **集族**，记为 $\mathcal{X}$.

例 1.1. $\mathcal{P}(X) := \{A | A \subset X\}$ 称为 X 的**幂集**；$\{\emptyset, X\}$ 是最简单的集族。

一般地，若 X 是一个集合，我们取

$$\mathcal{A} := \{A_\alpha \subset X | \alpha \in \Gamma\}$$

其中 Γ 为指标集. 这里 $\mathcal{A}$ 是一个 X 的一个集族. 我们称 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ 为集合的**并**，即

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha := \{x | \exists \alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha\}$$

同样地，称 $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ 为集合的**并**，即

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha := \{x | \forall \alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha\}$$

特别地，取 $\Gamma = \mathbb{N}^+$，有 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$；取 $\Gamma = \{1, 2, \cdots, N\}$，有 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$. 对集合的交是类似的.

注 1.1. 请读者注意上述定义的红色字符，存在 $\exists$ 与任意 $\forall$ 是基本的对偶语言，我们将在下一节介绍集列极限时多次使用这类语言的对偶.

¶ 基本性质. 关于集合的运算，我们有如下定理：

定理 1.1. 设 $A, B, C \in X$，则

(1) $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$;

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(4) (De Morgan 公式)：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

其中 $A^c := \Omega - A$ 称为**补**运算. 一般地，有

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$$

证明. 我们仅证明 (4) 的第一式. 注意到

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{LHS} &\Longleftrightarrow x \in \Omega \text{且} x \notin \cup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \\ &\Longleftrightarrow x \in \Omega \text{且} \forall \alpha \in \Gamma, x \in A_\alpha^c \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c, \text{即} x \in \mathrm{RHS} \end{aligned}$$

因此 LHS = RHS. □

练习 1.1. 证明上述定理中的 (3) 和 (4) 的第二式.

例 1.2. 取 $\mathbb{R}$ 上的函数列 $\{f_n(x)\}$，对任意 $t \in \mathbb{R}$，有

(1) $\{x | \sup_n f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x | f_n(x) > \alpha\}$;

(2) $\{x | \sup_n f_n(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^\infty \{x | f_n(x) \leq \alpha\}$.

证明. 注意到 (2) 由 (1) 结合 De Morgan 公式可得，为此只证明 (1). 对 (1) 的 LHS 中任意固定的 x，由上确界的定义可知存在 $n \geq 1$ 使得 $f_n(x) > \alpha$，因此 $x \in \mathrm{RHS}$，反正亦然. □

练习 1.2. 证明：

$$\bigcup_{n=1}^\infty A_n - \bigcup_{n=1}^\infty B_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty (A_n - B_n)$$

设 A, B 为两个集合，定义 A, B 的**对称差**为 $A\Delta B$，即

$$A\Delta B := (A - B) \cap (B - A)$$

显然有

(1) $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$;

(2) $A\Delta B = B\Delta A$.

再定义 A 与 B 的**直积** $A \times B$，即

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

类似地，我们令 $(X_k)_{k=1}^n$ 为 n 个集合构成的族，**直积**记为

$$\prod_{k=1}^n X_k := \{(x_1, \cdots, x_n) | x_k \in X_k, k = 1, \cdots, n\}$$

最后，定义**集合序列** $(X_k)_{k=1}^\infty$ 的**直积**为

$$\prod_{k=1}^\infty X_k := \{(x_1, \cdots, x_k, \cdots) | x_k \in X_k, k = 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

1.2. 集合序列的极限.

¶ 极限集的引入. 最容易提炼出极限概念的是有**包含**关系的集列，事实上这种集列做成的集合有自然的全序结构并且是**单链**,即 $(\{X_n\}, \subset)$. 对集合列 $(X_n)_{n=1}^\infty$，称其是**单增的**，记为 $(X_n) \nearrow$，如果

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots X_n \subset \cdots$$

反过来，称其是**单减的**，记为 $(X_n) \searrow$，如果

$$X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$$

对前者，我们记

$$\lim_{n\to\infty} X_n := \bigcup_{n=1}^\infty X_n (\subset \Omega)$$

后者为

$$\lim_{n\to\infty} X_n := \bigcap_{n=1}^\infty X_n (\subset \Omega)$$

分别称为集合序列的**极限集**.

例 1.3. 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) 定义 $A_n := \{x : |f(x)| \le n\}$，显然是单增的，那么

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$$

对于每个 A_n，其上的局部定义的函数 f 都是有界的.

(2) 定义 $B_n := \{x : |f(x)| \le 1/n\}$，显然是单减的，那么

$$\lim_{k\to\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x|f(x) = 0\}$$

注意到这是函数 f 的零点集.

¶ 上下极限集. 一般情况下集列 (X_n) 不单调，但我们仍需要定义极限，注意到 $(\{\bigcup_{n=1}^{N} X_n\}_{N=1}^{\infty}, \subset)$ 必然构成单链.

定义 1.2. 设 $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ 为任一集合序列，记

$$B_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n, \quad C_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

显然有 $(B_k) \searrow, (C_k) \nearrow$. 我们称 (B_k) 的交为 (A_k) 的**上极限 (集)**，记为 $\limsup_{n\to\infty} A_n$，即

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

同理 (C_k) 的并称为 (A_k) 的**下极限 (集)**，记为记为 $\liminf_{n\to\infty} A_n$，即

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

若 $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$，称这时 (A_n) **有极限**，记

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$$

以下定理刻画了上下极限集：

定理 1.2. 设 $\{A_n\}$ 为一集列，有

(1) $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n \iff \forall N, \exists n \ge N,$ 使得$x \in A_n$，即 $\{A_n\}$ 中存在**无限项**包含 x；

(2) $x \in \liminf_{n\to\infty} A_n \iff \exists N = N(x), \forall n \ge N,$ 都有$x \in A_n$，即 $\{A_n\}$ 中不含 x 的仅有**有限项**.

证明. 注意到

$$
\begin{aligned}
x \in \limsup_{n\to\infty} A_n &\iff x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&\iff \forall n, x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\
&\iff \forall n, \exists k \geq n, x \in A_k
\end{aligned}
$$

即可. 2. 是同理的，留作习题. □

事实上，利用这个等价刻画我们容易观察到如下不等式:

推论 1.1.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

以及

推论 1.2.

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$$

这个推论说明上下极限是**对偶的**概念. 一个自然的问题是，我们利用上下极限定义的集列极限与单调情形是否是一致的? 事实上，我们能够证明:

命题 1.1. 当集列 $\{A_n\}$ 单增或单减时，必有极限，同时

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, & 当(A_n)\searrow \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, & 当(A_n)\nearrow \end{cases}$$

证明. 设 $(A_n)\searrow$，易知 $\forall n \geq 1$，有 $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$，且 $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$. 从而

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

且

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

另一情况是同理的，留给读者. □

例 1.4. 考虑集列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$，其中 $A_{2n-1}=E, A_{2n}=F$，那么

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = E\cup F, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = E\cap F$$

例 1.5. 考虑集列 $(A_n := \{\frac{m}{n} | m\in\mathbb{Z}\})_{n=1}^{\infty}$，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \mathbb{Q}, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \mathbb{Z}$$

证明. 显然有

$$\mathbb{Z}\subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \mathbb{Q}$$

因此只要证明反向的包含即可. 对左边, 取任意 $x\in\liminf_{n\to\infty} A_n$, 即 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, 这表明 $\exists n$ 使得 $x\in A_n\cap A_{n+1}$. 因此有 $m_n, m_{n+1}\in\mathbb{Z}$，使得 $x=\frac{m_n}{n}=\frac{m_{n+1}}{n+1}$. 于是 $x=m_{n+1}-m_n\in\mathbb{Z}$. 故 $x\in\mathbb{Z}$. 对右边，取任意 $\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}$，其中 $p\in\mathbb{N}^+$. 对 $\forall n\geq 1$，有 $\frac{q}{p}=\frac{nq}{np}\in\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$，因此 $\frac{q}{p}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k=\limsup_{n\to\infty} A_n$. □

希望读者去尝试一些基本的集合互相包含的证明，以下练习提供集合分割的基本工具, 我们建议初学者能通过画图给一个直观的感受, 再利用严格的语言叙述证明.

练习 1.3. 设 $\{A_n\}$ 为一集列，令

$$B_1=A_1, \quad B_n=A_n-\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, n\geq 2$$

证明：$\{B_n\}$ **两两不交**且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

1.3. 映射与原像.

¶ 基本概念与性质. 设 $f: X\to Y$ 为一映射，对任意 $A\subset X, B\subset Y$，我们称

(1) $f(A) := \{f(x)\in Y | x\in A\}$ 为 A 的**像集**;

(2) $f^{-1}(B) := \{x\in X | f(x)\in B\}$ 为 B 的**原像集**.

以下我们罗列集合与映射基本的性质，其中大部分是显然的，注意到 (2) 中的红色包含号是映射定义导致的缺陷，读者容易给出反例. 而 (3) 说明**原像集**与集合运算有更好的兼容性.

命题 1.2. 在上述设定下，我们有

(1) 若 $A_1 \subset A_2 \subset X$，则 $f(A_1) \subset f(A_2)$；若 $B_1 \subset B_2 \subset Y$，则 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
(2) $f\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} f(A_\alpha)$；$f\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Gamma} f(A_\alpha)$.
(3) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(B_\alpha)$;$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} f^{-1}(B_\alpha)$.
(4) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$

证明. 对于 (2)，注意到

$$\begin{aligned}\forall y \in f\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_\alpha A_\alpha \text{使得} f(x) = y \\ &\Longleftrightarrow \exists \alpha, \text{使得} y = f(x) \in f(A_\alpha) \\ &\Longleftrightarrow y \in \bigcup_\alpha f(A_\alpha)\end{aligned}$$

对于 (3)，注意到

$$\begin{aligned}\forall x \in f^{-1}\left(\bigcap_\alpha B_\alpha\right) &\Longleftrightarrow y = f(x) \in \bigcap_\alpha B_\alpha \\ &\Longleftrightarrow \forall \alpha, \text{都有} x = f^{-1}(B_\alpha) \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha)\end{aligned}$$

□

练习 1.4. 验证上述命题中的 (1) 和 (4).

一个重要的例子是**特征函数**.

例 1.6. 对 $A \subset X$，我们定义映射 $\chi_A : X \to \{0,1\}$ 为

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

练习 1.5. 设 $\{A_n\}$ 为一集列，证明：

$$\chi_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(x) = \limsup_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x)$$

对下极限同样适用，请读者自行叙述.

提示. 回忆序列**上极限**的定义. 即对序列 $(x_n)_{n\geq 1}$，定义其上极限为

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{x_n\}$$

□

练习 1.6. 设 $f(x)$ 和 $f_n(x)$ $(n\geq 1)$ 都是 $\mathbb{R}$ 上的实函数，证明：

$$\{x|\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{j\geq n}\left\{x:|f_j(x)-f(x)|<\frac{1}{n}\right\}$$

1.4. 集合的对等、基数与集合范畴的划分.

¶ 朴素观点. 我们前三节集合与映射语言的铺垫是为了引出实变函数论中一个基本话题, 即什么叫做集合的对等? 从范畴论的视角看, 所谓集合的对等，应该是集合范畴中的“同构”[1].

定义 1.3. 我们称集合 A 与 B 是**对等的**，记为 $A\sim B$，如果存在双射 $f:A\to B$.

从定义中立马可见，双射 f 的存在性被集合中的元素的“个数”(即使无限)完全决定. 这使得我们可以通过定义集合元素的“个数”来刻画集合的对等. “个数”这件事情在有限集中是显然的，但在一般的无限集例如 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 中我们难以用直觉来描述. 因此，我们采取的方法是比较：注意到对等的集合间存在双射，倘若两个集合对等，认为它们元素“个数”一样；若双射减弱为满射，认为映射定义域的集合更“大”一些，反之亦然.

定义 1.4. 在定义1.3的设定中，我们称集合 A 与 B 有相同的**基数**或**势**，记为 $|A|=|B|$.

注 1.2. 由定义可知，若集合 X 为**有限集**，基数就是其中元素的个数. 事实上存在双射 $X\to\{1,2,\cdots,n\}$，其中 n 为 X 中元素的个数；倘若不存在这样的 n，称为**无限集**.

我们不难发现一些常见无限集的对等关系，因此它们元素的“个数”也一样.

[1]当然集合作为最底层的结构，想定义其中的同构只需要映射足矣.

例 1.7. (1) $[0,1]\sim[a,b]$, 其中 $a<b$, 注意到 $f(x)=a+(b-a)x:[0,1]\to[a,b]$ 是双射.

(2) $\mathbb{N}\sim 2\mathbb{N}\sim 2\mathbb{N}+1$，其中 $2\mathbb{N}:=\{2n:n\in\mathbb{N}\}$ 表示全体偶数，同理第三者表示全体奇数.

(3) $(-\pi/2,\pi/2)\sim\mathbb{R}$，注意到 $\tan x:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$ 是双射.

关于基数，我们利用**比较**的思想将上述观点做严格的刻画：

- $|A|\le|B| \iff A\sim B_1(\subset B)$;
- $|A|<|B| \iff |A|\le|B|$但$A\nsim B$.

一个常用的判别法是：

命题 1.3. 给定映射 $f:A\to B$，那么

(1) 若 f 是单射，则 $|A|\le|B|$;

(2) 若 f 是满射，则 $|A|\ge|B|$.

证明. 我们仅证明 (1). 注意到 f 是单射，可取 B 中子集 B_1 使得 $f:A\to B_1$ 为双射，由定义可知 $|A|\le|B|$. 关于 (2)，读者可以考虑选取 A 的一个子集 A_1 使得 $f^{-1}:B\to A_1$ 是双射，注意到这里记号 f^{-1} 是形式的，并不表示 f 的逆映射. □

命题 1.4. 对等关系是等价关系.

证明是显然的，留给读者. 这个命题暗示我们，集合范畴中最简单的分类依据就是对等或根据基数.

¶ 判别对等的方法. 前面的讨论中我们已经知道刻画集合的对等或比较“大小”可以利用**基数**或**映射**. 然而这两种方法[2]并不能彻底区分集合，注意到上述判别法中都不是严格不等号. 我们将在这里提供更多严格区分集合的方法.

一个基本的思想是将“大”的集合“打散”.

引理 1.1 (分割). 设 $\{A_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 是两两不交的集族, 若对 $\forall\alpha\in\Gamma$, 有 $A_\alpha\sim B_\alpha$，那么

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\sim\bigcup_{\alpha\in\Gamma}B_\alpha$$

[2]事实上是同一种方法.

证明. 注意到对任意 α，存在双射 $f_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$. 由于 $\{A_\alpha\}$ 和 $\{B_\alpha\}$ 两两不交，结合定理2.1，容易验证如下规定的映射 f 是双射.

$$f : \bigcup_\alpha A_\alpha \to \bigcup_\alpha B_\alpha$$

其中 $x \to f(x) = f_\alpha(x)$，如果$x \in A_\alpha$. □

回忆数学分析中极限的“三明治”定理，在无限集的比较中有同样的结果.

定理 1.3 (Cantor – Bernstein). 若 $A \sim B_1(\subset B)$ 且 $B \sim A_1(\subset A)$，那么 $A \sim B$.

注 1.3. 利用基数的语言表示为：若 $|A| \leq |B|$ 且 $|B| \leq |A|$，那么 $|A| = |B|$.

证明. 记 $A_0 = A, B_0 = B$，只要证 $A_0 \sim A_1$ 即可. 证明分成两步.

Step 1 由条件可知，存在双射 $f : A \to B_1$ 以及 $g : B \to A_1$. 我们记 $A_2 = g(B_1), B_2 = f(A_1)$，以此类推，记 $A_n = g(B_{n-1}), B_n = f(A_{n-1})$. 注意到 $A_n \sim B_{n+1}, B_n \sim A_{n+1}$，于是有

$$A_0 \sim A_2 \sim A_4 \sim \cdots \sim A_{2n} \sim \cdots$$

以及

$$A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \cdots \sim A_{2n+1} \sim \cdots$$

Step 2 下面考虑使用引理1.1. 先分割集合 A_0, A_1，注意到

$$A_0 = (A_0 - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_{n+1}) \cup \cdots \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

以及

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n+1}) \cup (A_{n+1} - A_{n+2}) \cup \cdots \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

由先前的讨论，我们知道

$$(A_0 - A_1) \sim (A_2 - A_3) \sim \cdots \sim (A_n - A_{n+1}) \sim \cdots$$

又 $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 由引理1.1可知，$A_0 \sim A_1$.

□

推论 1.3. 若 $A \subset B \subset C$，且 $A \sim C$，那么 $A \sim B \sim C$.

利用这个工具，我们容易证明 $(0,1) \sim [0,1]$，事实上有 $(0,1) \sim [0,1] \sim \mathbb{R}$.

问题 18. (1) 具体给出从 $[0,1)$ 到 $[0,1]$ 双射的构造.
(2) 证明从 $[0,1)$ 到 $[0,1]$ 不存在连续双射.

提示. 对于 (1)，回忆 Hilbert 旅馆；对于 (2)，回忆基础拓扑学中的事实，参见 [**16**]，注意到连续的双射 f 的逆映射是开 (闭) 映射. □

¶ 集合范畴的分类问题. 我们已经讨论了集合范畴中的 “同构”，即集合的对等，以及判别集合大小的工具. 下面来尝试以对等为依据来对集合范畴做分类. 事实上有限集的分类问题是显然的，因而只要考虑无限集的情形. 首先，一个自然的问题是：无限集的分类有没有 “尽头”？换言之，有没有 “最大” 的集合？答案是否定的. 我们总是有 $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$，事实上可以取严格不等号，我们证明不平凡的无限集情形.

定理 1.4. 若 A 是无限集，那么 $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

证明. 假设 $|A| = |\mathcal{P}(A)|$，即存在双射 $f : A \to \mathcal{P}(A)$. 此时对任意 $x \in A$，都有 $f(x) \subset A$. 我们令

$$A^* := \{x \in A | x \notin f(x)\} (\subset A)$$

由于 f 为满射，故存在 $x^* \in A$ 使得 $f(x^*) = A^*$，这与 A^* 的定义矛盾！ □

这个定理告诉我们，取幂集 $\mathcal{P}$ 的操作总是得到一个更 “大” 的集合. 然而一个不平凡的观察是：

(1) 若 A 是有限集，那么 $\mathcal{P}$ 仍为有限集；
(2) 若 A 是无限集，那么 $\mathcal{P}(A)$ 不仅为无限集，而且严格 “大” 于 A.

也就是说，在无限集中，取幂集的操作会导致“阶级”的跨越. 一个重要的问题是如何良好地刻画“阶级”这件事情. 事实上幂集 $\mathcal{P}$ 提供我们一种抬升集合大小的方式，从归纳的意义下看，我们需要规定一种“最小”的无限集.

定义 1.5. 称无限集 A 是**可列集**[3]，如果 $A \sim \mathbb{N}$，并且记 $|A| = \aleph_0$；否则称**不可列集**. 称有限集与可列集为**至多可列集**.

以下命题保证可列集是“最小”的无限集，我们回答了第一个问题.

命题 1.5. 任一无限集 A，存在可列子集.

证明. 注意到 A 为无限集，任取其中元素记为 a_1，再从 $A - \{a_1\}$ 中取 a_2，以此类推，从 $A_{\{}a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 中取 a_{n+1}，无限取下去. 我们得到

$$A_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}(\subset A)$$

为可列集. □

例 1.8. 常见的可列集有：$\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、{全体偶数}、{全体奇数}

除此以外我们还可以证明可列集的更多性质.

命题 1.6. (1) 可列集 A 的任一无限子集 A_1 是可列的；

(2) 至多可列个可列集的并为可列集，即若 $\{A_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 可列且指标集 Γ 可列，那么 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha$ 可列.

(3) 设 A 为无限集，B 为至多可列集，则 $A \sim A \cup B$.

直观上看，三个结论都在刻画可列集在无限集中的**极小性**；形象而言，至多可列个至多可列集并入任一无限集，犹如水滴汇入大海. 利用命题1.6的 (3)，我们对无限集再做一个非平凡的刻画，作为注1.2的补充.

下面我们来证明这三个结论.

[3]或称可数集.

证明. (1) 注意到 A_1 是无限集，由命题1.5可知存在可列子集 A_2 使得

$$A_2 \subset A_1 \subset A$$

可知 $A_1(\sim A)$ 为可列集.

(2) 利用练习1.3，不妨将 A_α 写作两两不交的形式，再排列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$. 由于每个 A_n 为可列集,记 $A_n = \{a_n^1, a_n^2, \cdots, a_n^m, \cdots\}$. 做如下无限阶矩阵:

$$\begin{array}{cccccc} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^m & \cdots \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^m & \cdots \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \cdots & a_3^m & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

取副对角线集:$B_1 = \{a_1^1\}, B_2 = \{a_1^2, a_2^2\}, \cdots, B_m = \{a_1^m, a_2^{m-1}, \cdots, a_m^1\}, \cdots$. 我们已经完成了排列，这称为**对角线排列法**.

(3) 不妨 $A \cap B = \emptyset$. 取 A 的可列子集 A_1，由 (2) 知 $A_1 \cup B$ 可列，故

$$A - A_1 \sim A - A_1, \quad A_1 \sim A_1 \cup B$$

注意到 $(A - A_1) \cap A_1 = \emptyset, (A - A_1) \cap (A_1 \cup B) = \emptyset$，由引理1.1知 $A \sim B$.

□

利用上述命题，我们容易证明 $\mathbb{Q}$ 是可列的.

练习 1.7. A 为无限集当且仅当存在 A 的某个子集 A_1 与 A 对等.

下一个例子在将来是常用的工具.

例 1.9. $\mathbb{R}$ 中两两不交的**开**区间族 $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 中的元素至多可列个，即 Γ 为至多可列指标集.

证明. 注意到 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中的稠密性，参见 [**7**]. 对任一开区间 I_α，由定理2.1可取其中有理数 r_α. 又由于开区间两两不交，因此 $\alpha \neq \beta$ 蕴含 $r_\alpha \neq r_\beta$. 因为 $\mathbb{Q}$ 是可列的，因此 Γ 至多可列. □

我们已经知道 $\mathbb{Q}$ 是可列集，那么 $\mathbb{R}$ 是否是可列集？或者说集基数意义下，$\mathbb{Q}$ 距离 $\mathbb{R}$ 多少？由于 $\mathbb{R} \sim [0,1]$，而在经典数学分析中，我们知道 $[0,1]$ 是不可列的，参见 [**7**]，因此 $\mathbb{R}$ 是不可列集.

例 1.10. $[0,1]$ 是不可列集，并记 $|[0,1]| = \aleph_1$，称**连续基数**.

证明. 我们利用数学分析中的**闭区间套定理**. 假设有

$$[0,1] = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

取闭区间 $I_1 \subset [0,1]$，使得 $a_1 \notin I_1$，再取闭区间 $I_2 \subset I_1$，使得 $a_2 \notin I_2$，以此类推，取闭区间 $I_n \subset I_{n-1}$，使得 $a_n \notin I_n$，无限取下去，可得闭区间套 $\{I_n\}$. 于是存在 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset [0,1]$ 使得 $\xi \neq a_n, \forall n$. 与可列性矛盾！ □

¶ 不可列集与 p 进制小数. 下面我们来刻画**不可列集**. 我们在经典数学分析中已经知道利用十进制的无限小数来描述任意一个实数，现在将进制推广为 p 进制. 首先引入 $p(p \geq 2)$ 元数列

$$(a_k | 0 \leq a_k \leq p-1, a_k \in \mathbb{Z})_{k=1}^{\infty}$$

对于任一小数 $x \in [0,1]$，都有

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_k}{p^k} + \cdots$$

上式右侧显然为收敛的级数. 此外，规定小数表示用取更大的 a_k 的为**规范表示**，往后总承认规范表示为小数的表示，例如十进制下的 1 的规范表示为

$$1 = 0.999\cdots$$

因此定义是良性的. 这里我们定义**有限小数**为：存在 K，使得任意 $k \geq K$，都有 $a_k = 0$，否则称**无限小数**. 显然，所有 p 元数列构成的集合与 $[0,1]$ 有一一对应，于是，上述 x 的表示形式称为 x 的 p **进制小数表示**.

命题 1.7. 所有 2 元数列的集合 A，有 $|A| = \aleph_1$.

利用 p 元小数，我们能够精细化定理1.4，即幂集 $\mathcal{P}$ 运算“跨越”多少阶.

命题 1.8. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph_1$.

证明. 记 A 为所有 2 元数列的集合，规定一个映射

$$f : A \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

其中 $f((a_n)) := (n)_{a_n=1}$. 容易验证这是一个双射. □

† 直积 (和) 运算对 (不) 可列集基数的影响. 此外，我们希望可以处理更多抽象的集合. 为此，我们叙述直积 (和) 运算对 (不) 可列集基数的影响. 它们或少在命题1.6等中被叙述并证明. 为了方便表示，我们用 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{R}$ 分别表示可列集与不可列集.

(1) **可列集**

(弱) 直积 $\prod^N \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^N \sim \mathbb{N}$，即 $(\aleph_0)^N = \aleph_0$.

(强) 余积 $\bigcup_{\text{可数}} \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$，即 $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

(2) **不可列集**

(强) 直积 $\prod_{\text{可数}} \mathbb{R} =: \mathbb{R}^\infty \sim \mathbb{R}$，即 $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$.

(强) 余积 $\bigcup_{\text{可数}} \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$，即 $\aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$.

细节可以参见 [**13**]，我们略去. 此外，关于 “越阶”，我们用 $2^{\square}$ 表示幂集，则 $2^{\aleph_k} = \aleph_{k+1}$. 当 $k = 0$ 时，涉及到著名的**连续统假设**，参见第3节.

推论 1.4. $|\mathbb{Q}^\infty| = \aleph_1$.

事实上，我们还有弱直积，即

$$\mathbb{Q}^\omega = \{(x_1, \cdots, x_N, 0 \cdots) | N\text{为自然数}\}$$

于是 $|\mathbb{Q}^\omega| = |\bigcup_{N \geq 1} \mathbb{Q}^N| = \aleph_0$.

推论 1.5. 注意到 $\mathbb{R}^\infty = \{\text{实数列}\}$，$|\mathbb{R}^\infty| = \aleph_1$.

基于这个事实，我们有：

例 1.11. 记 $C[a,b] : \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | f\text{连续}\}$，$|C[a,b]| = \aleph_1$.

证明. 显然有 $|C[a,b]| \geq \aleph_1$. 下证 $|C[a,b]| \leq \aleph_1$. 建立映射

$$\varphi : C[a,b] \to \mathbb{R}^\infty$$

其中 $\varphi(f) := (f(r_1), f(r_2), \cdots, f(r_n), \cdots)$. 这里 $\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\} = [a, b] \cap \mathbb{Q}$. 再验证 φ 是单射. 若 $\varphi(f) = \varphi(g)$，即

$$(f(r_1), \cdots, f(r_n), \cdots) = (g(r_1), \cdots, g(r_n), \cdots)$$

由于 f, g 连续，因此 $f = g$. □

最后，我们来回答一个“平凡的”问题：为什么要集合分类？事实上，有限集时，基于大小的分类毫无意义[4]；一旦涉及到无限集，基于“大小”去分类集合是有意义的. 注意到在集合范畴内，我们认为存在双射 (基数相同) 的两个集合是“一样的”，这意味着抽象意义下可以用更具体的无限集来代表抽象的无限集，例如我们知道闭区间上的连续函数全体与全体实数是一一对应的，即例1.11，甚至可以将 $\mathbb{R}$ 限制在 $[a, b]$ 上，即连续函数的给定定义域，因此我们从大小上用定义域控制全体连续函数.

1.5. 欧式拓扑. 这一节中我们介绍基本的 $\mathbb{R}^d$ 中的**欧式拓扑**结构.

¶ 基本设定. 回忆 $\mathbb{R}^d := \{(x_1, \cdots, x_d) | x_1, \cdots, x_d \in \mathbb{R})\}$. 注意到 $\mathbb{R}^d$ 有自然的线性运算，使得称为 d 维向量空间，同时赋予内积

$$< x, y > := \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

使得称为欧式空间. 再利用内积诱导度量结构，即距离函数 d:

$$d(x, y) = \sqrt{< x, y >}$$

随即定义向量 x 的模长 $||x||_2 := d(x, x)$. 注意到这确实是一个度量，参见 [**16**].

注 1.4. 模长 $|| - ||_2$ 中的 2 不是偶然的，在泛函分析中我们将讨论一般的模长，即 $||x||_p := (\sum_{k=1}^{n} (x_k)^p)^{1/p}$. 特别地，当

(1) $p = 1$ 时，$||x||_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_I|$;

(2) $p = \infty$ 时，$||x||_\infty := \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}$

[4]更有意义的工作应该转向带有更多结构的集合，例如代数关系或拓扑关系，但都不是这门课研究的对象.

此外，我们简单介绍欧式空间中点列的**极限**. 设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中点列，称 $\{x_K\}$ **收敛于** $x_0 \in \mathbb{R}^d$，记为 $x_k \to x_0, (k \to \infty)$ 或 $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在 K，对任意 $k > K$，都有 $|x_k - x_0| < \epsilon$.

为了引入 $\mathbb{R}^d$ 中与度量相关的拓扑，参考 [**16**]，我们介绍**邻域**的概念. 在 $\mathbb{R}^d$ 中我们一般取以 x_0 为中心的 **ϵ-球形邻域**，定义为

$$B(x_0, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R}^d | d(x, x_0) < \epsilon\}$$

也可以规定其他形状的邻域. 同时，$\mathbb{R}^d$ 中拓扑最简单的观察是邻域的"无限可剖"性，参见 [**7**].

练习 1.8. 证明:

(1) 给定 $B(x_0, \epsilon)$，对任意 $x \in B(x_0, \epsilon)$，存在 $\epsilon_1 > 0$，使得 $B(x, \epsilon_1) \subset B(x_0, \epsilon)$;
(2) 对任意 $x \neq y$，存在 $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$，使得 $B(x, \epsilon_1) \cap B(y, \epsilon_2) = \emptyset$.

注 1.5. 上述练习中,结论 (1) 是开集的性质;结论 (2) 是 Hausdorff 性质，因此 $\mathbb{R}^d$ 是 Hausdorff 空间.

¶ 开集与闭集. 在介绍开集闭集概念之前我们先回顾欧式空间点的分类.

定义 1.6. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$. 有**分类 1**:

(1) **内点**: 称 p 为 E 的内点，如果存在 $r > 0$，使得 $B(p, r) \subset E$，E 所有内点的集合称为 E 的**内部**，记 $\mathrm{Int}(E)$.
(2) **外点**: 称 p 为 E 的外点，如果存在 $r > 0$，使得 $B(p, r) \subset E^c$.
(3) **边界点**: 称 p 为 E 的边界点，如果对任意的 $r > 0$，都有

$$B(p, r) \cap E \neq \emptyset, \quad B(p, r) \cap E^c \neq \emptyset$$

分类 2:

(1) **聚点**: 称 p 为 E 的聚点，如果对任意的 $r > 0$，使得

$$B(p, r) \cap (E - \{p\}) = \emptyset$$

所有聚点的集合称为 E 的**导集**，记为 E'，$\overline{E} := E \cup E'$ 称为 E 的**闭包**.

(2) **孤立点**：称 p 为 E 的孤立点，如果存在 $r>0$，使得

$$p \in E \text{ 且} B(p,r) \cap (E-\{p\}) \neq \emptyset$$

(3) **外点**：定义见上.

例 1.12. 设 $E := [-1,0) \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^+\}$，于是

- 内部 $\mathrm{Int}(E) = (-1,0)$；
- 边界 $\partial E = \{-1\} \cup \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^+\}$；
- 导集 $E' = [-1,0]$；
- 孤立点集 $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^+\}$.

以下命题刻画了导集.

命题 1.9. $p \in E'$ 当且仅当存在 $E-\{x\}$ 中互异的点列 $\{p_n\}$ 满足 $p_n \to p$.

证明. 充分性是显然的，下证必要性. 由于 $x \in E'$，只要取 $r = 1/k, k \in \mathbb{N}^+$. 每次在 $B(p,r)$ 中取不同的 p_k，例如

(1) $k=1$，取 $p_1 \in B(p,r_1)$，其中 $r_1 = 1$.

(2) $k=2$，取 $p_2 \in B(p,r_2)$，其中 $r_2 = \min\{1/2, d(p,p_1)\}$

当 $k=n$ 时，取 $p_n \in B(p,r_n)$，其中 $r_n = \min\{1/n, d(p,p_{k-1})\}$. □

练习 1.9. $\partial E = \overline{E} - \mathrm{Int}(E)$，$\overline{E} = \mathrm{Int}(E) \cup \partial E$.

练习 1.10 (单调性). 若 $A \subset B \subset \mathbb{R}^d$，则

$$\mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}(B), \quad A' \subset B', \quad \overline{A} \subset \overline{B}$$

练习 1.11. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^d$，则

(1) $(A \cup B)' = A' \cup B'$；$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$；$\mathrm{Int}(A \cup B) \supset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$.

(2) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$；$\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$；$\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$.

我们给出 $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ 与 $\mathrm{Int}(A \cap B) \supset \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$ 的证明.

证明. (1) 如果 $x \in (A \cup B)'$ 而 $x \notin A' \cup B'$，即 $x \notin A'$ 或 $x \notin B'$. 那么存在 $B_1(x), B_2(x)$，使得 $B_1(x) \cap (A - \{x\}) = \emptyset$ 且 $B_2(x) \cap (A - \{x\}) = \emptyset$，这等价于

$$(B_1(x) - \{x\}) \cap A = (B_2(x) - \{x\}) \cap A = \emptyset$$

可以找到 $B_3(x) \subset B_1(x)$，使得 $B_3(x) \cap A = B_3(x) \cap B = \emptyset$. 这与 $x \in (A \cup B)'$ 矛盾!

(2) 设 $x \in \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$，即 $x \in \mathrm{Int}(A)$ 且 $x \in \mathrm{Int}(B)$. 找到 $B_1(x) \subset A$ 和 $B_2(x) \subset B$，不难发现存在 $B_3(x) \subset B_1, B_2$ 在 $A \cap B$ 中.

□

关于 $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$，我们提供一个特殊的反例.

例 1.13. $A = \mathbb{Q} \cap [0,1], B = \mathbb{Q}^c \cap [0,1]$，易知 $A \cap B = \emptyset$，那么 $(A \cap B)' = \emptyset$. 而 $A' = [0,1], B' = [0,1]$，故 $A' \cap B' = [0,1]$.

定义 1.7. 称 $E(\subset \mathbb{R}^d)$ 为**开集**，如果对任意 $x \in E$，都有 $x \in \mathrm{Int}(E)$；规定 $\emptyset$ 为开集. 称 E 为**闭集**，如果 $E \subset E$. 特别地，如果 $E' = E$，称 E 为**完备集**或完全集.

命题 1.10. $\mathrm{Int}(E)$ 为开集，E' 为闭集，进一步 $\overline{E}$ 为闭集.

证明. 我们依次证明以上三点.

(1) 若 $\mathrm{Int}(E) = \emptyset$，显然成立. 若 $\mathrm{Int}(E) =\neq \emptyset$. 对任意的 $x \in \mathrm{Int}(E)$，存在 $r > 0$，使得 $B(x,r) \subset E$. 以及对任意的 $y \in B(x,r)$，存在 r_1，使得

$$B(y,r_1) \subset B(x,r) \subset E$$

故 $y \in \mathrm{Int}(E)$. 这说明 $B(x,r) \subset \mathrm{Int}(E)$，故 $\mathrm{Int}(E)$ 为开集.

(2) 要证 E' 的所有聚点在 E' 中，即证 $E'' \subset E'$. 不妨 $E'' \neq \emptyset$，对任意的 $x \in E''$，以及任意的 $r > 0$，有 $B(x,r) \cap (E' - \{x\}) \neq \emptyset$，这等价于 $(B(x,r) - \{x\}) \cap E' \neq \emptyset$. 对任意的 $y \in (B(x,r) - \{x\}) \cap E'$，那么

(a) $y \in (B(x,r) - \{x\})$，那么 $B(y) \subset B(x)$ 且 $x \notin B(y)$；

(b) $y \in E'$，那么 $A := (B(y) - \{y\}) \cap E \neq \emptyset$.

对任意的 $z \in A$，即 $z \in (B(y)-\{y\})\cap E \subset (B(x,r)-\{x\})\cap E$，这说明 z 为聚点，于是 $x \in E'$.

(3) 只要证 $\left(\overline{E}\right)' \subset \overline{E}$，注意到 $(E \cup E')' = E \cup E'$.

□

推论 1.6. (1) A 为开集当且仅当 $\mathrm{Int}(A) = A$;

(2) B 为闭集当且仅当 $\overline{B} = B$.

命题 1.11. 若 U 为开集，则 U^c 为闭集，反之亦然.

证明. 我们只证明前半个命题，后半个命题是类似的，留给读者. 设 U 为开集，即 $U = \mathrm{Int}(U)$. 要证 U^c 为闭集，即证 $\overline{U^c} = U^c$. 注意到 $\overline{U^c} = (\mathrm{Int}(U))^c = U^c$. 事实上

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Int}(U))^c &= (U - \partial U)^c \\
&= (U \cap (\partial U)^c) \\
&= U^c \cap \partial U \\
&= U^c \cap \partial(U^c) \\
&= \overline{U^c}
\end{aligned}$$

□

命题 1.12. (1) 若 U_α 为开集，则 $\bigcup_{\alpha\in\Gamma} U_\alpha$ 为开集，其中 Γ 为指标集.

(2) 若 U_1, U_2 为开集，那么 $U_1 \cap U_2$ 为开集.

闭集是类似的，请读者自行叙述并证明.

注 1.6. 设 F_k 为闭集，称 $F := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ 为 F_σ 集.

定义 1.8. (1) 称 E 为**孤立集**，如果 E 中每个点都是孤立点. 这蕴含 E 为至多可数集.

(2) 称 E 为**离散集**，如果 E' 为空集 (无聚点).

(3) 称 E 为 $\mathbb{R}$ **稠密集**，如果 $\overline{E} = \mathbb{R}$.

(4) 称 E 为**疏朗集**，如果 $\mathrm{Int}(\overline{E}) = \emptyset$.

容易发现：离散集一定是孤立集，而孤立集不一定是离散集，例如 $\{\frac{1}{n}\}$；稠密集的例子有 {有理数} 和 {无理数} 等等；疏朗集的例子有 $\mathbb{Z}$.

¶ $\mathbb{R}$ 中开集的结构. 实变函数论中主要关心实数轴 $\mathbb{R}$ 上的函数，因此最后我们介绍 $\mathbb{R}$ 中开集的结构，读者注意其中违反直觉的现象.

首先，容易发现 $(a,b), a<b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中开集.

定理 1.5. 设 E 为 $\mathbb{R}$ 中非空开集，则 E 一定可写成**至多可列**个**两两不交**的开区间的并集.

证明. 设 E 为开集. 对任意的 $x\in E$，存在 $\delta>0$，使得 $(x-\delta,x+\delta)\subset E$. 令

$$\alpha:=\inf\{y\in\mathbb{R}|(y,x)\subset E\},\quad \beta:=\sup\{y\in\mathbb{R}|(x,y)\subset E\}$$

有 $x\in I_x=(\alpha,\beta)\subset(\infty,\infty)$. 我们称 I_x 为 E 的一个**生成区间**. 事实上，有

(1) $I_x\subset E$；

(2) $\alpha_x,\beta_x\notin E$；

(3) $\forall x\neq y\in E$，则 $I_x\cap I_y=\emptyset$ 或 $I_x=I_y$. 由例1.9，可知 $\{I_x\}$ 为至多可数集.

□

推论 1.7. F 是闭集当且仅当在 $\mathbb{R}$ 中去掉至多可列个两两不交的开集；F 是完备集当且仅当生成它的开集无公共端点.

以下一个例子在实变函数论中有重要的地位.

例 1.14 (Cantor 三分集). 取闭区间 $\mathcal{C}_0:=[0,1]$，做如下操作：

(1) 记 $\mathcal{C}_1:=[0,1]-I_{1,1}=[0,1/3]\cup[2/3,1]$, 其中$I_{1,1}=(1/3,2/3)$；

(2) 记 $\mathcal{C}_2:=\mathcal{C}_1-I_{2,1}\cup I_{2,2}=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$, 其中$I_{2,1}=(1/9,2/9), I_{2,2}=(7/9,8/9)$；

以此类推，可得

$$\mathcal{C}_n:=\mathcal{C}_{n-1}-\cup_{k=1}^{2^{n-1}}I_{n,k},\quad 1\leq k\leq 2^{n-1}$$

容易发现每次挖去 2^{n-1} 个“长度”为 $1/3^n$ 的开区间, $\mathcal{C}_n$ 为 2^n 个“长度”为 $1/3^n$ 的闭区间的并. 我们记挖去的开区间之并为 G，即

$$G := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$$

剩下的闭区间记为 $\mathcal{C}$，即

$$\mathcal{C} : [0,1] - G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

容易发现 $\mathcal{C}$ 为闭集，称为 **Cantor 三分集**.

下面我们分析 Cantor 三分集 $\mathcal{C}$ 的性质.

命题 1.13. (1) $\mathcal{C}$ 是非空有界闭集；
(2) $\mathcal{C}$ 是完备集；
(3) $\mathcal{C}$ 是疏朗集，即无内点；
(4) $\mathcal{C}$ 有连续基数，即 $|\mathcal{C}| = \aleph_1$

证明. 读者容易发现一些点必定不被挖去，于是 (1) 成立；由推论1.7可知 (2) 成立. 下证 (3). 假设 $\mathcal{C}$ 有内点，那么存在 $\delta > 0$，使得 $(x-\delta, x+\delta) \subset \mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$. 这说明对任意 k, 都有 $(x-\delta, x+\delta) \subset \mathcal{C}_k$. 这说明 $2\delta < 1/3^k$，取合适的 k 立即得到矛盾.

下证 (4). 我们关心 $(0,1)$ 中的 $\mathcal{C}$，利用三进制小数来说明. 注意到任意 $x \in \mathcal{C}$ 都可以表示为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad 0 \le a_n < 3 \in \mathbb{Z}$$

回忆 $\mathcal{C}$ 的构造不难发现 $a_n \neq 1$，对所有的 n. 因此只有 $a_n \in \{0,2\}$，这相当于二进制小数，易知与 $\mathbb{R}$ 对等. $\square$

¶ $\mathbb{R}^d$ 中开集的结构. 下面将一维的情形推广. 我们规定 $\mathbb{R}^d$ 中的矩体为:

(1) **开矩体**: $\prod_{k=1}^{n}(a_k, b_k)$;
(2) **半开矩体**: $\prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k)$;
(3) **闭矩体**: $\prod_{k=1}^{n}[a_k, b_k]$.

定理 1.6. $\mathbb{R}^d$ 中任一开集是**至多可列**个**两两不交**半开方体的并.

证明. 首先记 $\Gamma_0 := \{\prod_{i=1}^{n}(k_i, k_{i+1}]|k_i \in \mathbb{Z}\}$, $\Gamma_1 := \{\Gamma$中每个方体边长二等分$\}$, $\cdots$, $\Gamma_k := \{\Gamma_{k-1}$中每个方体边长二等分$\}$.

对任意的 $G \subset \mathbb{R}^d$ 为开集，令

(1) $H_0 := \{Q \in \Gamma_0 | Q \subset G\}$;

(2) $H_1 := \{Q \in \Gamma_1 | Q \subset (G - \bigcup_{Q \in H_0} Q)\}$

以此类推, $H_k := \{Q \in \Gamma_k | Q \subset (G - \bigcup_{Q \in H_0, \cdots, H_{k-1}} Q)\}$. 显然有 $A \subset G$. 并且对任意的 $x \in G$, 存在 $r > 0$，使得 $B(x, r) \subset G$. 这说明存在 k_0，使得 $x \in H_{k_0} \subset B(x, r) \subset G$. 因此 $x \in A$. □

最后，我们叙述一个基于 Baire 早期在纲集理论上的工作，它的证明本质上依赖于 $\mathbb{R}^d$ 的完备性，读者可以参考 [**13**].

定理 1.7 (Baire，1889). 设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 为至多可列闭集 (F_n) 的并，即

$$E = \bigcup_n F_n$$

若每个 F_n 无内点，则 E 也无内点.

¶ 集合上的连续函数. 最后，我们刻画欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 子集上的连续函数. 回忆数学分析中我们称 $\mathbb{R}$ 上的函数 f 在 x_0 处连续，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对任意 $|x| < \delta$，都有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

若函数 f 定义在一般子集 E 上，集合 E 的边界可能会破坏 x_0 的邻域，我们采用“交”的方式. 设 f 为 E 上的函数，称 f **在** $x_0 \in E$ **处连续**，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对任意 $x \in B_\delta(x_0) \cap E$，都有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

其中 $B_\delta(x_0)$ 为以 x_0 为球心，δ 为半径的球.

利用这套语言需要一个重要的概念，即**相对开集**，称 $G(\subset E)$ 为相对 E 的开集，如果存在开集 A，使得 $G = A \cap E$，读者不难补充相对闭集的概念. 我们对连续函数的刻画为:

定理 1.8. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$，f 为 E 上的函数，则以下说法互相等价:

(1) f 在 E 上连续.

(2) 对任意 α，$f^{-1}((\alpha,\infty)), f^{-1}((-\infty,a))$ 为 E 的相对开集.

(3) 对任意 α，$f^{-1}([\alpha,\infty)), f^{-1}((-\infty,\alpha])$ 为 E 的相对闭集.

证明不困难，留作练习.

第一节习题

¶ 可列集与不可列集.

问题 19. 设 $E \subset \mathbb{R}^3$，且 E 中任何两点的距离是有理数，证明：E 至多可列.

提示. 回忆例1.9，平面上两个圆，要么重合，要么至多相交于两点. □

问题 20. 若 $\mathbb{R}$ 中的集 A 不可列，证明：必有 $x \in A$，使对任意 $\delta > 0$，$(x-\delta, x)$ 和 $(x, x+\delta)$ 中都有 A 中的点，而且这种 x 全体也是不可列的.

问题 21. (1) 回忆例2，证明函数 f 的非零点集为

$$\{x : f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x : |f(x)| > \frac{1}{n}\}$$

(2) 利用 (1) 的结果，证明：若有 $M > 0$，使对任何有限个两两不交的实数 $x_1, \cdots, x_N$，都有

$$|\sum_{i=1}^{N} f(x_i)| < M$$

那么 f 的非零点集 $\{x : f(x) \neq 0\}$ 至多可数.

问题 22. 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，证明其跳跃间断点全体是至多可列集，进而说明单调函数的不连续点集是至多可数的.

问题 23. 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的极值全体是至多可列集.

2. Zorn 引理与选择公理

定理 2.1 (选择公理). 设 E 是一个非空集合，$\{E_i\}_{i\in I}$ 为 E 的一族非空子集，其中 I 为指标集. 则存在**选择函数** $f: I \to E$，对任意 $x \in I$，都有 $f(x) \in E_i$.

3. 连续统假设

1931 年 Gödel 提出**不完备性定理**，即不可被证实或证伪的命题的存在性. 定理2.1就属于这一类. 我们已经知道若集合 A 的基数大于等于 $\aleph_1$，那么 A 属于不可列集，但其逆命题属于不完备性命题，即

若集合 A 不可列，是否一定有 $|A| \geq \aleph_1$?

我们承认这个命题，它被称为**实数连续统假设**，换言之，不存在介于 $\aleph_0$ 与 $\aleph_1$ 之间的基数.

参考文献

[1] Lawrence C Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2022.

[2] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 1999.

[3] Qing Han. *Nonlinear elliptic equations of the second order*. American Mathematical Soc., 2016.

[4] D Martin and LV Ahlfors. *Complex analysis*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[5] Munkres. *Introduction to Topology*. MIT Course Number, 2005.

[6] Halsey Royden and Patrick Michael Fitzpatrick. *Real analysis*. China Machine Press, 2010.

[7] Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-hill New York, 1964.

[8] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Science/Engineerin, 1991.

[9] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton University Press, 2009.

[10] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*. Princeton University Press, 2011.

[11] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Functional analysis: introduction to further topics in analysis*. Princeton University Press, 2011.

[12] 陈维桓伍鸿熙. *黎曼几何选讲*. 高等教育出版社, 1993.

[13] 周性伟. *实变函数*. 科学出版社, 1998.

[14] 周民强. *实变函数论*. 北京大学出版社, 2001.

[15] 周蜀林. *偏微分方程*. 北京大学出版社, 2005.

[16] 尤承业. *基础拓扑学讲义*. 北京大学出版社, 1997.

[17] 李忠. *复分析导引*. 复分析导引, 2004.

[18] 白正国. *黎曼几何初步*. 高等教育出版社, 1992.

[19] 程其襄. *实变函数与泛函分析基础*. 高等教育出版社, 2019.

[20] 尹智许全华, 马涛. *泛函分析讲义*. 高等教育出版社, 2017.

[21] 郑维行. *实变函数与泛函分析概要*. 高等教育出版社, 1980.

[22] 陈恕行. *现代偏微分方程导论*. 科学出版社, 2018.