黎曼几何

钱振烨

2024 年 7 月 1 日

目录

第一章　预备知识

1.1　黎曼度量

1.1.1　黎曼度量的由来与定义

回忆曲面论中我们利用第一基本形式来计算曲面上曲线的长度、曲面片的面积. 而第一基本形式本质上为曲面切平面上光滑指定的**内积**. 现在讲这个观点推广到一般的微分流形[1]M 上. 但二者又有不同，必须指出的是，曲面论的基本想法是给定一张曲面 S，再求出其上的第一基本形式，最后计算度量信息；而黎曼几何的基本思想是：给定流形 M，在其上指定一个 "第一基本形式" (原本并没有)，最后计算度量信息. 同时我们又希望指定的度量与流形本身的微分结构是兼容的，于是这个指定应该光滑依赖于点的选取.

定义 1.1.1. 流形 M 上一个**黎曼度量** g 是一个 "光滑指定"：对 M 的每个切空间 T_pM，指定一个内积

$$g_p(-,-) =< -,- >_p$$

且其光滑依赖于 p.

注记 1.1.1. *光滑依赖指：设 X,Y 为 M 的一个坐标卡 U 上的光滑向量场，则 $f(p) =< -,- >_p= g_p(-,-)$ 为 U 上的光滑函数.*

我们记

$$g_{ij}(p) :=< \partial_i, \partial_j >_p= g(\partial_i, \partial_j)(p)$$

于是对 U 上任意光滑向量场 $X = X^i\partial_i, Y = Y^j\partial_j$，有

$$< X_p, Y_p >_p= g_{ij}(p)X^i(p)Y^j(p)$$

容易发现这里的 g 是一个 $(0,2)$ 型张量，并且在 U 上有局部表示

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$$

因此黎曼度量的定义可以用张量语言叙述，参见 [2] 的 P92.

定义 1.1.2. 给定 g 为流形 M 的一个黎曼度量，称 (M,g) 为一个**黎曼流形**.

[1]本小册中如不加说明，默认微分流形为光滑流形，有时简称流形.

1.1.2 黎曼流形的例子

欧式内积 最简单的黎曼流形是欧式空间 $\mathbb{R}^n$.

例子 1.1.1. 对 $\mathbb{R}^n$ 上每点的切空间有自然的标准内积，将其规定为黎曼度量，即

$$g^0(X,Y) := \sum_i X^i Y^i = X^T Y$$

或者，当 $\mathbb{R}^n$ 被唯一坐标卡 $\{x^1,\cdots,x^n\}$ 覆盖，此时 $g^0_{ij} = \delta_{ij}$，那么张量表示为

$$g^0_{ij} = dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n$$

一般地，可以令 $\{g_{ij}\} = A = \{a_{ij}\}$ 为正定对称阵，则

$$g_{ij} = a_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

且

$$g(X,Y) = X^T A Y$$

注记 1.1.2. *这是线性代数中二次型理论的简单应用，上述矩阵 A 就是 $Gram$ 矩阵.*

诱导度量 子流形几何中一个重要的技术是**诱导度量**. 设 $f: M^m \to N^{m+k}$ 为浸入，可以定义 M 上的拉回度量 $f^* g_N$ 如下

$$(f^* g_N)_p(X_p, Y_p) := (g_N)_{f(p)}(df_p(X_p), df_p(Y_p))$$

不难验证 $f^* g_N$ 为 M 上的一个黎曼度量[2]. 我们称 $f^* g_N$ 为 M 上的一个关于 f 的**诱导度量**. 一个特别的情形是:(N, g_N) 为黎曼流形，M 为其浸入子流形，即含入映射 $i: M \subset N$ 是一个浸入. 此时 M 上有自然的关于 i 的诱导度量 $i^* g_N$，其为 g_N 在 $TM(\subset TN)$ 上的限制.

注记 1.1.3. *事实上，古典微分几何中研究的曲线、曲面所计算的 (原本就有的)“黎曼度量”都是诱导度量，即视为欧式空间的浸入子流形.*

例子 1.1.2. 令 $M = S^1$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周，选择一个坐标卡：用 θ 参数化 S^1，即

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

其中 $0 < \theta < 2\pi$. 那么我们有 $dx = -\sin\theta, dy = \cos\theta$. 从而 S^1 上关于 $i: S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 的诱导度量为

$$g_{S^1} = (dx \otimes dx + dy \otimes dy)|_{S^1} = d\theta \otimes d\theta$$

[2]其中 $f^* g_N(X,X) = 0$ 依赖于 df 在每点是一个单射，即浸入.

例子 1.1.3. 令 $M=S^2$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的单位球面，选择一个坐标卡：用 θ,z 参数化 S^2，即

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-z^2}\cos\theta \\ y=\sqrt{1-z^2}\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

其中 $0<\theta<2\pi,-1<z<1$. 那么我们有诱导度量

$$g_{S^2}=\frac{1}{1-z^2}dz\otimes dz+(1-z^2)d\theta\otimes d\theta$$

注记 1.1.4. 事实上，对任一 n 维球面 S^n 上有 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准度量 g^0 的诱导度量.

乘积度量　设 $(M,g_M),(N,g_N)$ 为黎曼流形，定义乘积流形 $M\times N$ 上的黎曼度量 $g_{M\times N}$ 如下：

对任意 $(p,q)\in M\times N$ 以及 $X,Y\in T_{(p,q)}(M\times N)$，规定

$$g_{(p,q)}(X,Y):=(g_M)_p(d\pi_1X,d\pi_1Y)+(g_N)_q(d\pi_2X,d\pi_2Y)$$

其中 π_1,π_2 为典范投影.

例子 1.1.4. 环面 $T^n=S^1\times\cdots\times S^1$，取 $S^1\subset\mathbb{R}^2$ 上的诱导度量 g_{S^1}，如上构造乘积度量 g_{T^n}. 我们称 (T,g_{T^n}) 为**平坦环面**.

例子 1.1.5. 设 $B^n:=\{x\in\mathbb{R}^n:||x||<1\}$ 为单位实心开球，其上可定义黎曼度量

$$g=\frac{4}{[1-\sum_{i=1}^n(x^i)^2]^2}\sum_{i=1}^n dx^i\otimes dx^i$$

称为单位球的 *Poincare* **度量**或**双曲度量**，参见 [3].

1.1.3　等距变换

回忆曲面论中的等距，意为保持第一基本形式不变的变换. 当我们给定流形的度量，就可以定义流形之间的等距变换.

定义 1.1.3. 设 $(M,g_M),(N,g_N)$ 为黎曼流形，称微分同胚[3] $f:M\to N$ 为**等距变换**，如果

$$f^*g_N=g_M$$

即 $(g_M)_p(X,Y)=(g_N)_{f(p)}(df_p(X),df_p(Y))$.

[3]本小册中如不加说明，默认微分同胚是光滑同胚.

注记 1.1.5. 注意到曲面论中是局部的概念，可以退而求其次在流形层面规定局部的等距. 即对任意 $p \in M$，存在 p 的一个邻域 U 使得

$$f : U \to f(U)$$

是一个微分同胚且 $f^* g_N = g_M$.

黎曼几何是一门**内蕴**几何学，因此在黎曼几何范畴中我们默许等距的黎曼流形是“等价的”.

1.1.4　黎曼度量的存在性

黎曼度量是可以被任一微分流形 ($Hausdorff$ 且 C_2 可数) 整体定义的，为此要用到单位分解的技术，我们有如下定理:

定理 1.1.1 (黎曼度量的存在性)**.** 微分流形 M 上总存在一个黎曼度量.

证明参见 [2] 的 P92-93. 事实上也可以通过取诱导度量的方式来证明之. 这需要用到 Whitney 于 1936 年得到的结果，即 $Whitney$ 嵌入定理，它表述为：任一 m 维微分流形 M 可嵌入 $2m+1$ 维的欧式空间作为其子流形. 于是可以规定诱导度量为 $g = f^* g^0$, 其中 $f : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$. 但一般给定黎曼流形 (M, g_M), 度量 g_M 与 $f^* g^0$ 不同，为此 J.Nash 有更强嵌入定理，即 $Nash$ 嵌入定理，它表述为：任一黎曼流形 (M, g_M) 可以等距地嵌入充分大维数的欧氏空间 $\mathbb{R}^N$，即 $g_M = f^* g^0$.

注记 1.1.6. 当 M 紧致时, 可取 $N = \frac{m(3m+11)}{2}$; 当 M 非紧时, 可取 $g_M = \frac{m(m+1)(3m+11)}{2}$.

容易发现，一个流形的黎曼度量不唯一. 事实上，若 g_1, g_2 都为 M 的黎曼度量，那么 $ag_1 + bg_2 (a, b > 0)$ 为 M 的黎曼度量.

必须指出的是，我们规定的 g 目前还不能称为严格意义上的“度量”，度量的含义是一个 M 上的距离函数 d，满足

1. 正定性：$d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in M, \quad d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2. 对称性：$d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in M$;
3. 三角不等式：$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in M$

因此我们需要在流形 (M, g) 上规定一个满足以上性质的距离函数 d, 并且其直接来自于黎曼度量 g. 为此先定义流形上正则曲线 $\gamma : [0, 1] \to M$ 的**长度**，即

$$s(t) = \int_0^t < \gamma'(t), \gamma'(t) >_{\gamma(t)}^{1/2} dt, \quad 0 \leq t \leq 1$$

利用一阶微分形式不变性不难看出 $s(t)$ 与参数的选取无关，与古典微分几何类似，可以定义弧长参数 s，并且其满足切向量为单位向量，再记 $L = s(1)$ 表示曲线弧长.

注记 1.1.7. 上述讨论可以自然推广到分段正则曲线上.

于是我们定义距离函数 d 为

$$d(p,q) := \inf\{L(\gamma)|\gamma \in \Omega_{p,q}\}$$

其中 $\Omega_{p,q} := \{\gamma : [0,1] \to M|\gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$. 我们断言上述定义的 d 是一个度量，只有 $d(p,q) = 0 \to p = q$ 是非平凡的，证明参见 [2] 的 P94-96. 得到以下定理:

定理 1.1.2. 距离函数 d 使 (M,d) 成为一个度量空间.

从拓扑学上看，我们不希望几何中研究的对象呈现两种拓扑，在一致的拓扑下讨论问题总是尽如人意. 一个"惊喜"的观察是:

定理 1.1.3. 黎曼流形 (M,g) 的度量函数 d 诱导的拓扑 (度量拓扑) 与流形本身的拓扑是一致的.

证明同样参见 [2] 的 P94-96.

注记 1.1.8. 这个事实告诉我们: 从拓扑结果上看，装备了度量结构的黎曼流形 M 相比流形 M 本身并无差异.

1.2　黎曼测度与体积元素

1.2.1　黎曼测度

回忆可定向的微分流形上可以定义积分，随即有测度的概念. 而这里黎曼流形可以利用黎曼度量给出一种测度，我们来叙述之. 给定黎曼流形 (M^m, g) 以及切空间上一组单位正交基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$，定义其为正向，并且张成平行六面体的体积为

$$vol(e_1, \cdots, e_m) = 1$$

又注意到对自然基 $\{\partial_1, \cdots, \partial_m\}$ 有基变换 $\partial_i = a_i^j e_j$，于是

$$g_{ij} =< \partial_i, \partial_j >= \sum_k a_i^k a_j^k = A^T A, \quad A = \{a_{ij}\}$$

记 $G = \{g_{ij}\}$[4]，我们有

$$vol(\partial_1, \cdots, \partial_m) = det(A^T A) vol(e_1, \cdots, e_m) = \sqrt{detG}$$

将讨论限制在一个坐标卡 (U, φ) 内，取 U 的紧子集 K，定义 K 的**体积**为

$$vol(K) := \int_{\varphi(K)} \sqrt{detG \circ \varphi^{-1}} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^m = \int_K \sqrt{detG} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$$

[4]往后若不加说明，默认 G 为黎曼度量的 $Gram$ 矩阵.

注记 1.2.1. 往后默认积分都是流形上的，因此采用上式第二个等号的表达. 其中 $\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^m$ 表示欧氏空间中的测度，$\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m$ 表示拉回以后的测度.

利用积分的变量替换可以验证上述体积的定义与坐标卡的选取无关，参见 [2]. 接下来将这个紧集 K 的体积推广到整体，为此需要选择流形局部有限的坐标卡覆盖 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，并且 $\{f_\alpha\}$ 是从属于其的单位分解，于是

$$vol(K):=\sum_\alpha\int_{K\cap U_\alpha}f_\alpha\sqrt{detG}\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^m$$

可以验证上述定义不依赖于单位分解的选取，参见 [2].

1.2.2　黎曼体积元

现设 $C_0(M)$ 为 M 上具有紧支集的连续函数环，对 $f\in C_0(M)$ 可定义

$$\int_M f=\sum_\alpha\int_{U_\alpha}f_\alpha\sqrt{detG}\mathrm{d}x_\alpha^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_\alpha^m$$

由上述讨论可知，这个定义是良性的. 且 $\varphi\geq 0$ 蕴含

$$f\geq 0\Longrightarrow\int_M f\geq 0$$

于是我们得到一个正的线性泛函 $\Gamma:C_0(M)\to\mathbb{R}$，满足

$$\Gamma(f)\equiv\int_M f$$

由 *Riesz* 表示定理可知, 在 M 上存在唯一的 *Borel* 测度 $\mathrm{d}vol$ 使得对任意 $f\in C_0(M)$, 有

$$\int_M f=\int_M f\mathrm{d}vol$$

其中这里的 $\mathrm{d}vol$ 就是**黎曼体积元**或者称为体积密度.

注记 1.2.2. 在每个坐标卡内可以将上述积分视为对 $n-$ 形式 $\mathrm{d}\Omega=\sqrt{detG}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m$ 的积分，当流形**可定向**时可以定义整体非零的 $n-$ 形式使得

$$\int_M f\mathrm{d}vol=\int_M f\mathrm{d}\Omega$$

若选取上述幺正标架 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 的对偶场 $\{\omega^1,\cdots,\omega^m\}$，那么体积元表示为

$$\mathrm{d}vol=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^m$$

进而可以定义 $f \in C_0(M)$ 的 L^p 范数

$$||f||_{L^p} := \left(\int_M |f|^p\right)^{1/p}$$

可以取 $L^p(C^\infty(M))$ 的完备化得到 $L^p(M)$，特别地，当 $p=2$，可以定义如下内积

$$< f, g >_{L^2} := \int_M fg$$

使得 $L^2(M)$ 成为 $Hilbert$ 空间. 至此，我们在黎曼流形上构造了一种函数空间，这为分析应用于几何的研究提供了条件。将来我们会看到，考察流形上的函数能一定程度上反映流形的几何.

1.3　散度定理

1.3.1　散度

我们已经知道如何在流形 M 上构造函数空间，下面考察一个特别的光滑函数. 设 X 为 M 的一个光滑向量场，定义一个 C^∞ 函数 $divX$，称为 X 的**散度**.

定义 1.3.1. 向量场 X 的**散度** $divX : M \to \mathbb{R}$ 是 M 的函数，满足

$$(divX)\Omega = d(i(X)\Omega)$$

这里 $i(X)$ 为 Ω 的内乘积，即 $[i(X)\Omega](X_1, \cdots, X_{m-1}) = \Omega(X, X_1, \cdots, X_{m-1})$

这里 X 有表示 $X = X^i\partial_i$，易知

$$i(X)\Omega = \sum_i X^i\sqrt{G}(-1)^{i-1}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\hat{x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$$

进一步计算得到

$$d(i(X)) = \sum_i \partial_i(\sqrt{G}X^i)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^m$$

回忆定义，我们有

$$divX = \frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i(X^i\sqrt{G})$$

注记 1.3.1. 从上式可知，散度不依赖于流形的定向，不可定向流形也能定义向量场的散度. 特别地，当 $M = \mathbb{R}^m$ 时，$g_{ij} = \delta_{ij}$，我们有

$$divX = \sum_i \partial_i$$

这就是经典的向量场散度.

利用 *Cartan magic* 公式，我们有

$$\mathcal{L}_X(\Omega) = i(X)d\Omega + d(i(X)\Omega) = divX(\Omega)$$

这说明向量场的散度是体积元沿向量场的无穷小变化速率.

回忆微分流形中的 *Stokes* 公式，我们可得如下定理:

定理 1.3.1 (散度定理)**.** *设 X 为流形 M 具有紧支集的光滑向量场，则*

$$\int_M divX \mathrm{d}vol = \int_{\partial M} < X, \mathbf{n} > \mathrm{d}area$$

其中 $\mathbf{n}$ 为边界 ∂M 的外法向，$\mathrm{d}area$ 是面积元.

特别地，若 $\partial M = \emptyset$，那么 $\int_M divX \mathrm{d}vol = 0$.

1.3.2 梯度

注意到一个特别的向量场，即一个函数的**梯度** $gradf$. 回忆，对任意向量场 X，有

$$Xf =< X, gradf >$$

于是在局部表示 $gradf = F^i\partial_i, X = X^j\partial_j$ 下，可得

$$g_{ij}F^iX^j =< X, gradf >= Xf = \partial_j f X^j$$

对比 X^j 前系数可知 $g_{ij}F^i = \partial_j f$，用 g^{jk} 拉上指标，我们有 $F^k = g^{jk}\partial_j f$，于是梯度被局部表示为

$$gradf = (g^{ji}\partial_j f)\partial_i$$

注记 1.3.2. *当 $M = \mathbb{R}^m$ 时*

$$gradf = (\partial_1, \cdots, \partial_m)$$

就是经典的函数梯度.

事实上，黎曼流形上的函数梯度保留了欧氏空间的部分几何性质，例如梯度场与函数水平集 $f^{-1}(c)$(正交回忆 $0 = Xf =< X, grad, f >$)，其中 c 为 f 的一个正则值. 同时，可以知道 $gradf$ 是 df 的对偶，这是因为 $< X, gradf >= Xf = df(X)$ 可以视为

$$g(X, gradf) = g^*(df, X)$$

1.3.3　黎曼流形上的 *Laplace* 算子

最后将函数梯度作为向量场取散度，我们得到一个重要的算子.

定义 1.3.2. 对任意 M 上的光滑函数 f，定义 *Laplace* **算子**为

$$\triangle f := div(gradf)$$

在局部坐标表示下，我们有

$$\triangle f = \frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i(\sqrt{G}g^{ij}\partial_j f)$$

抽象出来，称

$$\triangle := \frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i(\sqrt{G}g^{ij}\partial_j)$$

为 $Laplace - Beltrami$ **算子**.

注记 1.3.3. 当 $M = \mathbb{R}^m$ 时，有

$$\triangle f = \sum_i \partial_{ii} f$$

这是经典的 *Laplace* 算子.

带入散度定理，我们有

推论 1.3.1. 若 $\partial M = \emptyset$ 且 f 为 M 上具有紧支集的光滑函数，则

$$\int_M \triangle f = 0$$

并且容易验证

$$div(fX) = fdivX + < gradf, X >$$

若令其中 $X = gradg$，于是

$$div(fgradg) = f \triangle g + < gradf, gradg >$$

对 $\partial M = \emptyset$ 的情形应用散度定理，我们有

定理 1.3.2 (第一 *Green* 公式)**.**

$$\int_M f \triangle g \mathrm{d}vol = \int_M g \triangle f \mathrm{d}vol = -\int_M < gradf, gradg > \mathrm{d}vol$$

不难发现欧氏空间的版本是其特殊形式，参见 [1].

参考文献

[1] Jurgen Jost. *Partial differential equations*, volume 214. Springer Science & Business Media, 2012.

[2] 白正国, 沈一兵, 水乃翔, and 郭孝英. 黎曼几何初步, 1992.

[3] 龚F. 简明复分析. 中国科学技术大学出版社, 2009.