

# 微分几何笔记

钱振烨

2024 年 6 月 20 日

# 第一版前言

几何学始于 Euclid 的著作 *Element*，即《几何原本》。中文中“几何”一词来源于“Geometry”<sup>1</sup>，最早由李善兰翻译。最初人们对几何学的认识是图形的变换与关系，而由 Euclid 创造性地建立的五条公理建立的**公理化**几何体系奠定了此后 2000 多年的几何发展，即在公理的基础上谈几何，我们所有的结论本质来自于五条公理。之后古典几何学的研究大多集中在平面欧式几何上，从简单的公设或条件中推出优美的定理成为大多数几何学家的研究标准，期间涌现了一大批“惊为天人”的证明技术，这是**欧式几何**的范畴。几何学的第二次发展始于 Decartes 建立的坐标系，人们首次实现了将几何对象解析化，我们开始使用函数的工具来刻画几何，这是**解析几何**的范畴。其中非常著名的工作是关于代数曲线与二次曲面的研究，前者直至今日仍是**代数几何**中困难的问题。为解析方法进一步注入动力的技术是**微积分**。利用微分的工具我们可以讨论曲线、曲面的弯曲，它们本质上是函数的二阶导数所致；而积分的工具使得我们可以丈量曲线与曲面的一些度量结构，例如弧长、角度与面积。

而以上这些严格来说不能作为**古典微分几何**的范畴，事实上微分几何真正成为研究的热潮始于 Gauss 于 1827 年发表的论文——《关于曲面的一般研究》。Gauss 在论文中总结了前人的研究成果，尤其是 Euler 于 1776 年的结果，即（无脐点）曲面上曲线曲率最大与最小值相互垂直，并且创造性地提出了 *Gauss* 映射的概念。古典微分几何的局部理论研究方法大体上可以分成两类，即**内蕴几何**与**外蕴几何**。前者由曲面的**第一基本形式**诱导，它表示曲面不依赖于其嵌入何种空间，而是将曲面本身作为一个空间来研究其上的度量结构，一个震撼的结果就是：*Gauss* 曲率是内蕴的，即 *Gauss* 绝妙定理。后者将曲面视为三维欧式空间的嵌入子流形或子集，意图从高维的视角下“俯视”曲面的弯曲情况，由此导出的**第二基本形式**是一个外蕴量，这是我们第一、二、三章主要讨论的对象。

然而以上的讨论只限于对**局部**的曲面。陈省身先生曾说：微分几何每个局部的结论必须有一个**整体**的结果。换言之，我们在第一、二、三章中只讨论这套理论的“入门”，全然没有进入微分几何的殿堂。一般而言，**整体微分几何**的研究是局部理论加上合适的拓扑结果，例如连通性和紧致性最终推出一个整体的结果。迫于时间压力，我在第一版中只整理了整体理论的整体平面曲线、曲面的整体 *Gauss – Bonnet* 定理。

---

<sup>1</sup>源自希腊语 “geometria”，意为测量地球或土地。

后续我会另起一章将其他有趣的整体问题整理上去，可以考虑的选题有：

1. 凸闭曲线
2. 空间曲线的某些整体性质
3. *Poincare – Hopf* 指标定理与 *Jacobi* 曲线定理
4. 球面的刚性:*Liemann* 定理
5. 凸曲面与积分公式
6. *Minkowski* 问题和 *Cristoff* 问题的唯一性
7. 全平均曲率与 *Willmore* 能量
8. *Hilbert* 定理
9. 极小曲面的 *Bernstein* 定理

笔者于 2023-2024 春夏学期在浙江大学旁听了盛为民老师的微分几何课程，整理出了一份听课笔记；同年在本科学学校杭州师范大学组织了微分几何的讨论班，参考了中国科学技术大学刘世平老师的备课讲义，同时每次汇报的同学会手写一份报告讲义。这份小册主要整理自这两份笔记和报告讲义。此外，笔者同年在本科学学校旁听了许智源老师的微分流形课程以及参加了李彦霖老师的奇点理论讨论班，各汇报了两次。由于古典微分几何是后续几何学的基础，因此我希望将一些高观点的东西提前在古典部分叙述，例如微分流形的观点与黎曼几何中内蕴几何的观点。于是在讨论适当的地方我将一些高观点的叙述顺便带入了进去，以便将来在学习前沿的几何学时有“蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”之感。

从学习者的角度来看，本科时整个微分几何与黎曼几何的学习往往大部分时间是在接受一套几何学的语言。语言被基本接受了，结果一个学期的课时也所剩无几，这是比较尴尬的地方。事实上，学习微分几何或黎曼几何基本的语言只是认识这个领域的第一步，我们的目的是利用这套语言去**解决问题**，19 世纪与 20 世纪在曲面理论上有很多优秀的工作，都是以微分几何基本的语言为框架，施以合适的工作最终解决一个问题。但是大部分时候我们的学习总是拘泥于“输入”而不尝试“输出”，因此，在真正学习的过程中，我们希望利用基本的工具去**计算**一些经典的例子，将一些“习题”视为 projects 独立解决（或许可以考虑推广它）。

为求叙述的精简，我只呈现了证明中多数非平凡或者关键的观察，部分细节留给读者自行补充。因此，这份小册绝不适合初学古典微分几何的学生，但是适合已经学过一轮微分几何的学生作为复习资料或者粗略了解微分几何历程的读者。关于微分几何的初学者，我推荐 [15, 11, 3, 6] 这几本书作为参考教材，其中第一、二本是我初学

微分几何时使用的教材，第一本叙述上及其详尽，还有配套的习题册；第二本在么正标架法上的叙述是经典的，其中整体部分也有选讲，对几何学真正感兴趣的学生不要错过。第三本我没有系统读过，但是不少老师推荐过这本教材；第四本严格来讲不是纯古典理论的教材，利用很少的篇幅涵盖了内蕴几何、二维黎曼几何等内容，很多问题上做到了一般化，初学者阅读还是很困难的。在初步学习了古典微分几何的学生可以尝试阅读 [12] 的第零、一、二、三章。微分几何的后续课程是**黎曼几何**，但是现代黎曼几何的叙述都在黎曼流形上，因此我们建议此后以**微分流形**作为二者之间的“前置”课程，这里我推荐 [2, 16, 14, 7, 8]。其中第一、二本是我初学的教材，第一本的叙述及其入门且不厌其详，读者若对微积分与基础拓扑的基础有自信可以跳过其中一些章节的叙述；第二本在内容上是非常冗杂的，读者若仅掌握微分流形基本的语言，可以选择性地略读一些章节。第三本书是陈省身先生的著作，但叙述语言与章法略显晦涩，不适合初学者阅读，但是可以作为参考资料查阅。最后两本都是 John.Lee 的著作，分别是**拓扑流形**与微分流形。最后，黎曼几何的教材可以参考 [10, 13, 4]。

我整理这份小册受到了不少老师的支持。感谢盛为民老师在课程中为我解答了不少疑问，同时为我整理的听课笔记给予了鼓励；许智源老师担任了我们微分流形与黎曼几何讨论班的指导老师，为我汇报中提出的疑问提供了解答，同时指出了报告中的错误；李彦霖老师为我整理这份小册提供了 LaTeX 上的技术支持，并且审核了部分稿件，提出了一些逻辑上的错误。许多同学为我撰写这份小册提供了帮助，这里感谢方一洲、李婧 (研究生)、卢贤衍等同学。由于我对微分几何的认识粗浅，笔记当然不能与经典的微分几何的教材媲美，希望读者对其中的不妥之处提出意见，万分感激！

作者：钱振烨

2024 年 6 月 20 日

**注** 本小册会根据读者的反馈和笔者的回顾不定期更新，如需获取最新版本，可以到我的主页下载：

*<https://zhenye-math.github.io/>*

# 目录

<b>第一章 局部曲线理论</b>	<b>1</b>
1.1 $\mathbf{E}^3$ 中的曲线	2
1.1.1 回顾	2
1.1.2 弧长与弧长参数	3
1.1.3 曲率与挠率	4
1.1.4 <i>Frenet</i> 公式	7
1.2 平面曲线与高维曲线	8
1.3 曲线论基本定理与应用	9
1.4 第一章习题	11
<b>第二章 局部曲面理论</b>	<b>12</b>
2.1 $\mathbf{E}^3$ 中的曲面	13
2.1.1 回顾	13
2.1.2 切空间与法向量场	14
2.2 第一基本形式与度量	16
2.2.1 第一基本形式的讨论	16
2.2.2 曲面上的度量结构	19
2.3 第二基本形式与弯曲	27
2.3.1 高度函数水平集	27
2.3.2 曲线与线素	28
2.4 <i>Weingarten</i> 算子	30
2.4.1 <i>Weingarten</i> 变换	30
2.4.2 两个重要曲率	33
2.4.3 利用曲率线网研究曲面	35
2.5 <i>Gauss</i> 映射与第三基本形式	38
2.5.1 <i>Gauss</i> 映射与第三基本形式	38
2.5.2 <i>Gauss</i> 曲率的另一种解释 ( <i>Gauss</i> 的原始思想)	39
2.6 面积变分与极小曲面	41

2.7	曲面的内蕴几何学 . . . . .	44
2.7.1	曲面的自然方程 . . . . .	44
2.7.2	测地曲率与测地线 . . . . .	45
2.7.3	$exp$ 映射、法坐标系与测地极坐标系 . . . . .	47
<b>第三章</b>	<b><math>E.Cartan</math> 活动标架法</b>	<b>53</b>
3.1	预备知识 . . . . .	53
3.2	双参数下的外微分与外乘法 . . . . .	56
3.3	外微分形式引入 . . . . .	61
3.3.1	$Grassman$ 代数 . . . . .	61
3.3.2	外微分形式 . . . . .	64
3.4	可积系统 . . . . .	70
3.4.1	$\mathbb{R}^3$ 中的结构方程 . . . . .	70
3.4.2	$Frobenius$ 定理 . . . . .	71
3.5	曲线和曲面的基本理论 . . . . .	75
3.5.1	曲线论基本定理 . . . . .	75
3.5.2	利用活动么正标架研究曲面 . . . . .	76
3.5.3	测地曲率的 $Liouville$ 公式 . . . . .	78
3.5.4	自然标架与么正标架下方程的对比 . . . . .	80
3.5.5	曲面论基本定理 . . . . .	82
3.5.6	自然标架与么正标架下的方程对比 (续) . . . . .	82
<b>第四章</b>	<b>整体微分几何序章</b>	<b>83</b>
4.1	整体曲线 . . . . .	83
4.2	平面曲线的某些整体性质 . . . . .	83
4.2.1	等周不等式 . . . . .	83
4.2.2	曲线的旋转指标 . . . . .	83
4.2.3	旋转指标定理 . . . . .	83
4.3	整体曲面 . . . . .	83
4.4	整体 $Gauss - Bonnet$ 定理 . . . . .	83

# 第一章 局部曲线理论

**引言** 古典微分几何学的开篇永远是 (局部) 曲线论。在现代几何观点下, 所谓 (局部) 曲线是指同胚于 interval 的一段“弧”, 或者说 1 维的流形。它被认为是“最简单的”几何对象, 因而许久以前的数学家就热衷于研究它:

1. 从 Apollonius 的《圆锥曲线》伊始, 人们研究的是简单的二次、三次曲线, 并且使用 Decartes 的坐标系建立的基本的函数工具可以刻画这些曲线, 这是最早**解析几何**的范畴, 读者在中学就初步认识了它们并且在本科一年级利用线性代数的工具可以完成进一步的刻画, 而我们的微分几何局部理论的基本工具是离不开解析几何的。
2. 一直到微积分的建立, 人们开始利用微分的工具研究曲线, 这是我们的视角不再局限于代数曲线而转向一般的曲线, 所使用的刻画方式是多样的, 例如函数、隐式方程和参数法。局部理论中主要使用参数法来刻画曲线, 我们将知道所谓曲线就是 interval 被同胚映射到某个空间, 而参数就是用来示踪这样的映射。几何中非常关心一类在“更换示踪变量 (参数) 和参考系 (空间标架)”下**不变**的量, 我们称几何量。在曲线理论部分最重要的几何量便是**弧长与曲率**, 其中后者利用微分的工具可以得到完美的刻画。
3. 随着微分学对曲线研究的深入, 积累的成果更多, 人们希望建立研究曲线独特的工具, 而且这类工具最好是研究几何“本身”的, 不依赖于外界空间, 因此,**标架法**应运而生。在空间曲线中, 一个极重要的观察是: 当我们选取**弧长参数**时, 将曲线对其微分后得到的切向量是单位的, 再微分得到的向量与切向量垂直, 再施以叉乘得到一组么正标架。这使得我们具备了曲线本身的“内蕴坐标系”, 并且曲线的曲率与挠率可以被这组标架及其微分唯一刻画, 换言之: 可以将 (局部) 空间曲线视为“曲线  $\times SO_3$ ”的标架丛, 并且丛关于曲率挠率的微分方程局部唯一地确定了一条空间曲线<sup>1</sup>。这是**曲线论基本定理**。

---

<sup>1</sup>利用常微分方程的理论, 只要曲率与挠率函数连续可微就可以做到。而在曲面论中, 我们就不那么幸运了, 需要对应的微分方程满足“可积性条件”。

## 1.1 $\mathbf{E}^3$ 中的曲线

### 1.1.1 回顾

取  $\mathbf{E}^3$  中的么正标架  $\{O; \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ , 对任一向量  $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^3$ , 有线性表示<sup>2</sup>

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{E}_i \quad (1.1)$$

倘若  $\mathbf{x}$  为关于单参数  $t$  的向量值函数, 则公式1.1表示为  $\mathbf{x}(t) = x^i(t) \mathbf{E}_i$ , 其中  $x^i(t)$  称为  $\mathbf{x}(t)$  的第  $i$  个分量函数。向量值函数  $\mathbf{x}$  的可微性由每个分量函数特征, 即

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left( \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right) \quad (1.2)$$

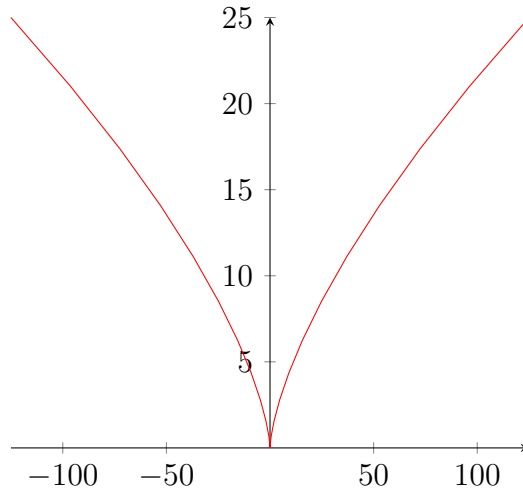
称  $\mathbf{x}'$  为  $\mathbf{x}$  在  $t$  处的**切向量**。同时, 定义模长为

$$|\mathbf{x}'| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**定义 1.1.1.** 称可微同胚  $\mathbf{x}: I(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{E}^3$  为 **(局部) 正则曲线** (一般记为  $C$ ), 如果切向量  $\mathbf{x}'$  非零。

切向量非零点称**正则点**, 否则称**奇点**。事实上“正则点”的定义可视为一般(微分)流形间可微映射的特殊情况, 本质上表示可微映射的切映射非退化<sup>3</sup>, 会在流形理论中详细展开, 有兴趣的读者可以自行翻阅。

**例子 1.1.1.** 显然曲线  $\mathbf{x} = (t^3, t^2, 0)$  在  $(0, 0, 0)$  处奇异, 俗称尖点, 如下图。



<sup>2</sup>这里  $x^i \mathbf{E}_i := \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{E}_i$ , 称为 *Einstein* 求和约定。

<sup>3</sup>即“大范围”的**浸入**或“小范围”的**嵌入**, 更多涉及流形的说法我们留给后续的课程。



### 1.1.2 弧长与弧长参数

设正则曲线  $C$  的参数化  $\mathbf{x} : I = [0, 1] \rightarrow \mathbf{E}^3$ , 区间  $I$  的分割  $T$  为  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ 。令  $\|T\| = \max_i \{t_i - t_{i-1}\}$ , 考察 *Riemann* 和

$$L(\mathbf{x}, T) := \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| \quad (1.3)$$

等式1.3两边对  $\|T\|$  取极限, 称曲线  $C$  可求长, 如果存在极限

$$s := \lim_{\|T\| \rightarrow 0} L(\mathbf{x}, T) = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_i \frac{|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1})$$

其中  $s$  称  $C$  的**弧长**, 写成变上限积分为

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt \quad (1.4)$$

两边对  $t$  求导, 可得

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \quad (1.5)$$

**注记 1.1.1.** 物理上看, 等式1.5表示瞬时速率在数值上等于瞬时速度。

考虑另一参数  $\tau$ 。方面起见, 取微分同胚  $t = t(\tau)$ , 考察公式1.4

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = \int_0^\tau \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} \right| \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_0^\tau \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right| d\tau$$

若以弧长  $s$  为参数, 由等式1.5可知

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = \frac{ds}{ds} = 1$$

因此切向量是单位向量; 反之, 取单位切向量, 我们有

$$s(t) = \int_0^t dt = t$$

总结以下命题。

**命题 1.1.1.** 弧长参数  $s$  特征了单位切向量。

考虑另一组么正标架  $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , 显然过渡矩阵正交, 记为  $\mathbf{T} = (t_i^j)$ , 使得

$$y^j = t_i^j x^i$$

其中  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{E}_i = y^j \mathbf{e}_j$ 。考察弧长

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| &= \int_0^t \left( \sum_{j=1}^3 \left( \frac{dy^j}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^t \left( \sum_{j=1}^3 \left( t_i^j \frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^t \left( \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dx^i}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= s(t) \end{aligned}$$

第三个等号利用  $\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I}$  可得。因此弧长  $s(t)$  与参数和标架<sup>4</sup>的选取无关，是一个几何量<sup>5</sup>。

### 1.1.3 曲率与挠率

为作区分，往后对弧长参数求导，默认使用 *Newton* 记号，即  $\dot{\mathbf{x}} := \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ ，切向量用  $T$  表示。选取弧长作为参数，切向量被单位化，于是“变化”仅体现在方向上，随之可以定义“弯曲”。

**定义 1.1.2.** 称曲线  $C$  切向量  $T$  在  $s$  处的“变化率”  $\kappa := |\dot{T}| (= |\ddot{x}| > 0)$  为**曲率**。

注意到  $T \cdot T = 1$ ，两边对  $s$  求导，可知  $T \cdot \dot{T} = 0$ ，即  $T \perp \dot{T}$ 。

**定义 1.1.3.** 若  $\kappa \neq 0$ ，在  $\dot{T}$  的方向上取单位向量  $N$ ，称为主法向量，取  $B = T \times N$  为从法向量，于是在  $s$  处给定么正标架  $\{O; T, N, B\}$ ，称为 *Frenet* 标架。

由定义可知  $\dot{T} = \kappa N$ ，一般称为曲率向量。光滑与正则性良好时，*Frenet* 标架可微地依赖于  $s$ 。当  $\kappa \neq 0$  时， $N, B$  被唯一确定，我们有

1. 注意到  $T \cdot B = 0$ ，两边对  $s$  求导可得  $T \cdot \dot{B} = -(\kappa N) \cdot B = 0$ ，即  $\dot{B} \perp T$ 。

2. 又注意到  $B \cdot B = 1$ ，两边对  $s$  求导可得  $\dot{B} \cdot B = 0$ ，即  $\dot{B} \perp B$ 。

因此  $\dot{B} \perp \text{span}\{T, B\}$ ，故  $\dot{B} \parallel N$ <sup>6</sup>，我们引出如下定义。

**定义 1.1.4.** 若  $\kappa \neq 0$  令  $\dot{B} = -\tau N$ ，称  $\tau$  为曲线的**挠率**<sup>7</sup>。

<sup>4</sup>以后我们验证几何量都不再关心标架的选取，一般都是无关的，这一点在微分流形课程中会有更严格的叙述。

<sup>5</sup>与标架和参数选取无关的量，称为**几何量**。

<sup>6</sup>这个关系直接通过几何作图就可以观察出来，只要注意到  $B$  本身与  $T$  垂直以及其导向量与自己垂直，这里只使用内积严格说明。

<sup>7</sup>挠率具有直观的几何含义，表示曲线在空间中的“挠动”程度，即离开密切平面的速度，参见节1.3。

下面考察弧长参数下曲率与挠率的计算。由定义易知

$$\kappa = |\ddot{\mathbf{x}}|$$

对  $\dot{B} = -\tau N$ ，两边内积  $N$ ，可得

$$\tau = -(T, \dot{N}, N) \quad (1.6)$$

又  $N = \frac{1}{\kappa} \dot{T}$ ，两边对  $s$  求导可得

$$\dot{N} = \left( \frac{1}{\kappa} \right) \dot{T} + \frac{1}{\kappa} \ddot{T} \quad (1.7)$$

将等式1.7代入公式1.6有

$$\tau = \frac{1}{\kappa^2} (T, \dot{T}, \ddot{T})$$

即

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})}{|\ddot{\mathbf{x}}|^2} \quad (1.8)$$

**例子 1.1.2.** 考察圆周  $S^1$ ，弧长参数表示为  $\mathbf{x} = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0)$ ，计算曲率

$$\kappa = |\ddot{\mathbf{x}}| \equiv \frac{1}{r}$$

可见圆周的半径越大，曲率越小，符合我们对曲率几何直观的设想，并且引入以下定义。

**定义 1.1.5.** 称  $\rho = \frac{1}{\kappa}$  为曲率半径， $\mathbf{x} + \rho N$  为曲率中心。

下面说明曲率和挠率为几何量。取两个么正标架  $\{O, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$  和  $\{O', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 。曲线  $C$  的表示分别为  $\mathbf{x}_1 = x^i \mathbf{E}_i$  和  $\mathbf{x}_2 = y^i \mathbf{e}_i$ ，存在刚体变换使得

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{A} \mathbf{x}_1 + \mathbf{b}, \quad \text{其中 } \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I} \text{ 且 } \mathbf{b} \text{ 为常数向量}$$

于是计算

$$\kappa_2^2 = |\ddot{\mathbf{x}}_2|^2 = (\mathbf{A} \ddot{\mathbf{x}}_2)^T (\mathbf{A} \ddot{\mathbf{x}}_2) = |\ddot{\mathbf{x}}_1|^2 = \kappa_1^2$$

和

$$\tau_2 = \frac{(\dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2)}{|\ddot{\mathbf{x}}_2|^2} = \det(\mathbf{A}) \frac{(\dot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2, \ddot{\mathbf{x}}_2)}{|\ddot{\mathbf{x}}_1|^2} = \tau_1$$

故与么正标架的选取无关。取一般参数  $t$ ，我们有结论：

## 一般参数下的曲率与挠率

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}{|\mathbf{x}'|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''')}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2} \quad (1.9)$$

证明. 注意到  $\kappa(t) = |\ddot{\mathbf{x}}| = \left| \frac{dT}{ds} \right|$ , 变形得到

$$\kappa(t) = \left| \frac{dT/dt}{ds/dt} \right| = \left| \frac{dT/dt}{|dx/dt|} \right| \triangleq \frac{|T'|}{|\mathbf{x}'|}$$

计算  $T'$

$$T' = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}'|} \right) \quad (1.10)$$

**注记 1.1.2.** 等式 1.10 第三个等号  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  可以直接来自于对“速度向量”  $\mathbf{x}'$  的单位化, 也可以源于链式法则。

进一步推导等式 1.10

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}'|} \right) = \frac{\mathbf{x}''|\mathbf{x}'| - \mathbf{x}'|\mathbf{x}'|'}{|\mathbf{x}'|^2}$$

注意到  $|\mathbf{x}'| = (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}')^{\frac{1}{2}}$ , 于是

$$|\mathbf{x}'|' = \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}'|}$$

带入等式 1.10, 可得

$$T' = \frac{(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}'' - (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'') \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3}$$

由双重外积公式, 得到  $T' = \frac{(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \times \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|^3}$ , 带回原式易得。又注意到  $\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = |\mathbf{x}'| \dot{\mathbf{x}}$ , 同理得到  $\mathbf{x}''$  和  $\mathbf{x}'''$ , 易知挠率。□

弧长参数下, 直线由微分方程  $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = 0$  特征, 其等价于  $\kappa \equiv 0$ , 我们得到如下命题。

**命题 1.1.2.**  $\kappa \equiv 0$  特征了直线。

此外, 若  $\kappa \neq 0$ , 考虑  $Im(\mathbf{x}) \subset span\{T, N\}$ , 取单位法向量  $\mathbf{n}_0 \perp span\{T, N\}$ , 恒等式  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n}_0 \equiv 0$  两边对  $s$  求导可得

$$T \cdot \mathbf{n}_0 \equiv 0$$

再求导得到

$$N \cdot \mathbf{n}_0 \equiv 0$$

因此  $B = \epsilon \mathbf{n}_0$ ,  $\epsilon = \pm 1$ , 故  $\dot{B} \equiv 0$ , 即  $\tau \equiv 0$ 。反之, 若  $\tau \equiv 0$ , 以上过程可逆,  $\mathbf{x} - \mathbf{x}(0) \equiv 0$  特征了平面曲线。故我们得到以下命题。

**命题 1.1.3.**  $\tau \equiv 0$  特征了平面曲线。

1.1.4 *Frenet* 公式

我们对向量组 (矩阵)

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

作用一个微分算子  $d$ , 由前面的讨论, 得到一个常微分方程组

$$\begin{pmatrix} dT \\ dN \\ dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tds \\ Nds \\ Bds \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

其中  $a, b$  为关于  $s$  的函数。对  $\dot{N}$  两边内积分别  $T, B$  得到

$$T \cdot \dot{N} = a, \quad B \cdot \dot{N} = b$$

注意到  $T \cdot N = B \cdot N = 0$ , 对  $s$  求导得到  $T \cdot \dot{N} = -\kappa|N|^2$  和  $B\dot{N} = \tau|N|^2$ , 故

$$a = -\kappa, \quad b = \tau$$

于是

$$\begin{pmatrix} dT \\ dN \\ dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Tds \\ Nds \\ Bds \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

**定义 1.1.6.** 我们称方程组1.12为 *Frenet* 公式。

**注记 1.1.3.** 1. 上述矩阵是一个反对称矩阵, 事实上微分算子  $d$  在单位正交基上的作用有如此形式<sup>8</sup>。

2. 根据常微分方程理论, 的方程组1.12局部存在唯一解。

---

<sup>8</sup>见公式1.14, 节3.2中真正给出了这种反对称性的刻画。

## 1.2 平面曲线与高维曲线

下面我们讨论一般的平面曲线, 即  $\tau \equiv 0$ 。事实上, 从历史观点看, 最先研究的是平面上的曲线, 其中不乏精深的工作; 其次, 纵然  $\mathbf{E}^2$  上曲线亦可以视为  $\mathbf{E}^3$  中的曲线, 但在法向量的选取上有所不同。

**定义 1.2.1.** 对于平面曲线  $\mathbf{x}$ , 定义切向量  $T := \dot{\mathbf{x}}$ , 选取  $N_r$  为  $T$  逆时针旋转  $\frac{\pi}{2}$  角, 称为曲线的**相对法向量**。

**注记 1.2.1.** 此时  $\{\mathbf{x}; T, N_r\}$  成为右手系, 相应的 *Frenet* 公式表达为

$$\begin{pmatrix} dT \\ dN_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_r \\ -\kappa_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T ds \\ N_r ds \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

其中  $\kappa_r$  称为**相对曲率**。

从  $\mathbf{E}^3$  中看, 有  $dN = -\kappa T ds (\kappa \geq 0)$ , 此时有

$$N_r = \epsilon N, \quad \epsilon = \pm 1$$

对比公式1.13发现  $\kappa N = (\epsilon \kappa)(\epsilon N) = (\epsilon \kappa) N_r$ , 因此

$$\kappa_r = \epsilon \kappa$$

于是  $\kappa = |\kappa_r|$ 。事实上, 我们有以下性质: [6] 的 P11-15 讨论了高维空间中的曲线。一般地, 对于  $\mathbf{E}^n$  中的曲线, 有 *Frenet* 公式:

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ \vdots \\ de_{n-1} \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\omega_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 ds \\ e_2 ds \\ \vdots \\ e_{n-1} ds \\ e_n ds \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

其中  $\omega_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-2$ , 而  $\omega_{n-1}$  符号不定, 本质上源于  $e_n$  由 *Gram-Schmidt* 正交化得到, 此时  $e_1, e_2, \dots, e_n$  自成右手系。

以下定理本质地刻画了曲线, 为微分方程与几何的研究提供了典范, 后续我们将见到这个定理的曲面版本。

**定理 1.2.1** (曲线论基本定理). 区间  $I \subset \mathbb{R}$  上连续可微函数  $\bar{\kappa}(s) > 0$  和连续函数  $\bar{\tau}(s)$ , 在平移和正交变换下唯一特征了以  $s$  为弧长参数的正则曲线  $\mathbf{x}$ , 其曲率和挠率分别为  $\bar{\kappa}(s)$  和  $\bar{\tau}(s)$ 。

证明. 证明留给 *Frobenius* 定理的应用。 □

## 1.3 曲线论基本定理与应用

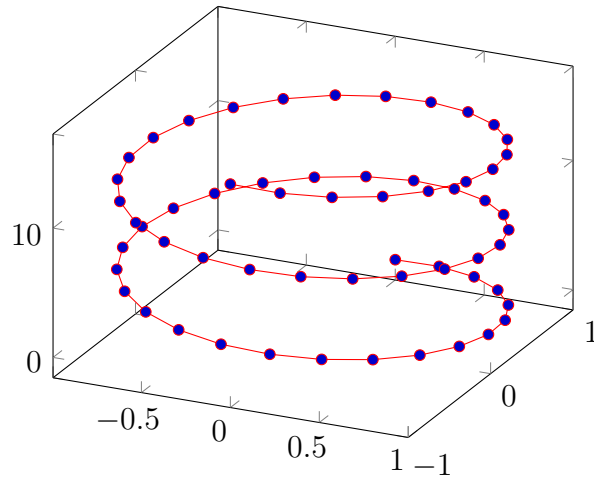
曲线论基本定理，即定理1.2.1有如下应用：

**例子 1.3.1.** 设弧长参数  $s$  下的圆柱螺线为

$$\mathbf{x} = (r \cos \sigma s, r \sin \sigma s, a \sigma s)$$

其中  $r, a, \sigma = 1/\sqrt{r^2 + a^2}$  为常数。易知  $\kappa \equiv \sigma^2 r$  和  $\tau \equiv \sigma^2 a$ 。可以得到一个简单的事实：恒定的曲率挠率特征了圆柱螺线。

**注记 1.3.1.** 注意到曲率与螺线的旋绕程度相关，挠率与螺线的爬升速度相关。



把这个问题一般化。

**例子 1.3.2.** 称切向量与固定方向成定角的非直曲线为**一般螺线**， $\tau/\kappa \equiv C$  特征了一般螺线。

证明. 先考虑充分性。给定非直正则曲线  $\mathbf{x}$  和固定单位常向量  $\mathbf{a}$  使得  $T\mathbf{a} \equiv \cos \theta$ ，其中  $\theta$  为常角。对  $s$  求导得  $N \cdot \mathbf{a} \equiv 0$ ，因此  $\mathbf{a} \in \text{span}\{T, B\}$ 。不妨  $\mathbf{a} = \cos \theta T + \sin \theta B$ ，两边对  $s$  求导得到  $\tau/\kappa \equiv \cot \theta$ 。必要性只要定义方向向量为  $\mathbf{a} = \cos \theta T + \sin \theta B$ ，即可，剩余细节为充分性的逆。  $\square$

下面我们研究的曲线默认都是光滑的，对  $s = 0$  处作 *Taylor* 展开：

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}(0) = s\dot{\mathbf{x}}(0) + \frac{1}{2}s^2\ddot{\mathbf{x}}(0) + \frac{1}{6}s^3\dddot{\mathbf{x}}(0) + o(s^3) \quad (1.15)$$

注意到

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\kappa^2 T + \dot{\kappa} N + \kappa \tau B$$

于是

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}(0) = (s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3)T + (\frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\dot{\kappa}s^3)N + (\frac{1}{6}\kappa\tau s^3)B + o(s^3) \quad (1.16)$$

令  $y^1 = s - \frac{1}{6}\kappa^2 s^3$ ,  $y^2 = \frac{1}{2}\kappa s^2 + \frac{1}{6}\dot{\kappa}s^3$ ,  $y^3 = \frac{1}{6}\kappa\tau s^3$ , 得到曲线  $\mathbf{y} := \mathbf{x}(0) + y^1 T + y^2 N + y^3 B$ , 与原曲线有三阶切触。

**定义 1.3.1.** 定义曲线在一点处的**法平面**为  $\text{span}\{N, B\}$ , **从切平面**为  $\text{span}\{T, B\}$ , **密切平面**为  $\text{span}\{T, N\}$ 。

从切触曲线上不难发现: 挠率的正 (负) 刻画了曲线自下 (上) 而上 (下) 地穿过密切平面。



## 1.4 第一章习题

**练习 1.** 设  $\mathbf{x} = (x(s), y(s))$  是平面弧长参数曲线,  $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}_r(s)\}$  是它们的 *Frenet* 标架, 证明:

$$1. \mathbf{N}_r(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s)), \quad \ddot{\mathbf{x}} = \kappa_r(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s));$$

$$2. \kappa_r(s) = \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \ddot{x}(s)\dot{y}(s);$$

3. 取一般参数  $t$  时

$$\kappa_r(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{2/3}}$$

。

**练习 2.** 设两曲线可建立 1-1 对应, 使它们在对对应点有相同的主法线, 则称它们为 *Bertrand* 曲线, 其中一条称为另一条的 **侣线**。证明: 它们在对对应点的距离为常数, 切线作成定角。

**练习 3.** 设曲线  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  的曲率  $\kappa(s)$  和挠率  $\tau(s)$  都不为零,  $s$  为弧长参数。如果该曲线落在一个球面上, 则它的曲率和挠率必满足关系式

$$\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2 + \left(\frac{1}{\tau(s)} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2\right)^2 = \text{const}$$

**练习 4.** 设  $P_0$  为曲线  $C$  上一点,  $P$  为曲线上  $P_0$  的邻近点,  $l$  为  $P_0$  处的切线, 点  $Q$  为点  $P$  向切线  $l$  所引的垂线足。记

$$d = d(P, P_0), \quad h = d(P, Q), \quad \rho = d(P_0, Q)$$

证明: (1)  $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{h}{d} = 0$ ; (2)  $\kappa = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2h}{\rho^2}$ 。

## 第二章 局部曲面理论

**题记** “微分几何的最终目的是整体的结果。但是，局部的微分几何不能缩减到最低限度，因为每个整体的结果必须有一个局部的基础。”——陈省身

**引言** 我们将用整个第二章初步地介绍局部曲面理论，并且将其作为后续整体曲面理论与微分流形乃至黎曼几何课程的前置。我们断言：局部曲面论的学习是几何学后续课程的基础，这里我们将会使用基本的微分工具来刻画曲面的几何量，并且给出大量的曲面的例子。前者是认识现代几何学的敲门砖，而后者是进一步研究几何需要留存的低维直观。

这一章中我们会从“内蕴”与“外蕴”两个角度来研究曲面，它们分别对应曲面的**第一基本形式**与**第二基本形式**。其中前者视为对曲面本身度量结构的研究，例如曲面上曲线的弧长、切向量夹角、曲面片的面积(小范围)等等，然而这些信息都离不开第一基本形式，即黎曼几何学中的**黎曼度量**的概念，其在整个**内蕴几何学**中是主要的研究对象；后者则将曲面视为三维欧氏空间的嵌入子流形(局部)或子集来研究，我们将知道曲线上一条曲线从空间中看是如何“弯曲”的，即**法曲率**的概念，并且由此导出曲面在三维欧氏空间中是如何“弯曲”的，即**主曲率**的概念，这是 Euler 于 1776 年的工作。

从历史上看，整个第二章(乃至第三章的大部分)的内容都源自于 Gauss 于 1827 年发表的论文《关于曲面的一般研究》<sup>1</sup>。文章发表后最引起轰动的点是 Gauss 构造了一个曲面到单位球面的映射，即 *Gauss* 映射，这个映射直接导致了 *Gauss* 曲率的提出。更为震撼的是，这个曲率仅与曲面的第一基本形式有关，即是一个内蕴量。换言之，一张叶片上的蚂蚁(视为二维生物)可以在不晓得三维欧氏空间的基础上发现叶片的弯曲！<sup>2</sup>此后，关于古典曲面论的研究变成了当时的热门方向：Weingarten 在 Gauss 工作的基础上提出了 *Weingarten* 变换，用线性代数的语言解释，可以发现这个变换的谱直接刻画了曲面的主曲率，并且 *Gauss* 曲率就是这个变换的行列式，即主曲率之积！Bonnet 对内蕴几何学做了进一步的研究，提出了测地曲率的概念，并且

---

<sup>1</sup>后来的学者对其本人“晦涩”的语言做了注释，感兴趣的读者可以参见 Gauss, C. F. (1902). General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Princeton university library.。

<sup>2</sup>后来的事情我们已经知晓，Riemann 在其 1854 年在 Göttingen 大学发表的就职研究将这种内蕴的几何思想推广的高维，即后来的 *Riemann* 几何(其实是 *Finsler*)。

得到了曲面理论一个重要的结果——*Gauss – Bonnet* 定理，这个定理在整体理论中直接对应了闭曲面的拓扑量。

对初学者而言，整个曲面论的学习可能会在繁杂的计算中度过，这无疑消磨了学生耐心和兴趣。但是对于微分几何的学习基本的算力需要保证，并且为了积累足够的例子，在初学阶段计算大量典型曲面的几何信息无可厚非。事实上，随着我们计算的不断重复，很多“技巧性”的东西会变得熟练而形成直觉。在几何的计算中，我们非常希望看到的一点就是“且算且观察”，往往通过某个正交关系或者微分方程的解（的结构）就可以观察处重要的几何信息，这是几何与其他数学分支的联系的地方，同时也是几何有趣的地方。

## 2.1 $\mathbf{E}^3$ 中的曲面

### 2.1.1 回顾

**定义 2.1.1.** 设  $D$  为  $\mathbf{E}^2$  中一连通区域，其上坐标为  $(u^1, u^2)$ ，称同胚  $\mathbf{x}: D \rightarrow \mathbf{E}^3$ ，参数表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2) := (x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2))$$

为 (局部) 正则曲面，如果

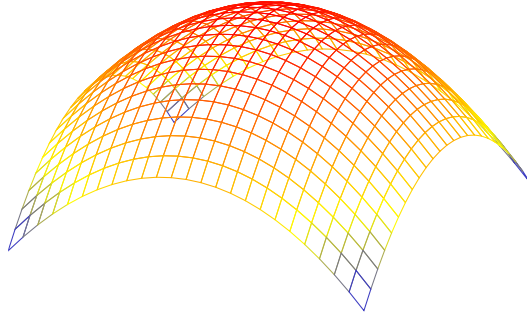
1. 每个坐标函数  $x^i$  具有  $k(k \geq 2)$  阶连续偏导数，
2. 切向量  $\mathbf{x}_\alpha := \partial \mathbf{x} / \partial u^\alpha (\alpha = 1, 2)$  线性无关。

**注记 2.1.1.** 条件 1. 保证曲面具有一定的光滑性；条件 2. 保证曲面切空间非退化，代数上等价于同胚  $\mathbf{x}$  的 *Jacobian* 矩阵

$$D(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \partial x^1 / \partial u^1 & \partial x^1 / \partial u^2 & \partial x^1 / \partial u^3 \\ \partial x^2 / \partial u^1 & \partial x^2 / \partial u^2 & \partial x^2 / \partial u^3 \end{pmatrix}$$

秩为 2。正则性限定了局部微分几何主流讨论的对象，某些非正则点被排除，例如锥面的尖点。

固定  $u_0^\beta$ ，改变  $u^\alpha (\alpha \neq \beta)$ ，在曲面上生成的轨迹称为参数  $u^\alpha$ —线；离散改变固定值，得到参数网。



### 2.1.2 切空间与法向量场

固定一点, 记  $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(u_0^1, u_0^2)^3$ 。

**定义 2.1.2.** 称  $T_{\mathbf{x}_0}M = \text{span}\{\mathbf{x}_1|_{\mathbf{x}_0}, \mathbf{x}_2|_{\mathbf{x}_0}\}$  为曲面  $M$  在  $\mathbf{x}_0$  处的**切空间** (或称切平面), 其中元素称切向量。

**定义 2.1.3.** 称可微映射  $\mathbf{n} := \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 / |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|$  为曲面  $M$  上的 (单位) **法向量场**。

**注记 2.1.2.** 曲面的光滑性保证  $\mathbf{n}$  可微地依赖于  $u^1, u^2$ 。

下面验证切空间与法向量场不依赖于参数的选取。考虑另一连通区域  $\bar{D}$  连同坐标  $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ , 有微分同胚:

$$\begin{cases} \bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2) \\ \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

即

$$\left( \frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)} \right)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \partial\bar{u}^1/\partial u^1 & \partial\bar{u}^1/\partial u^2 \\ \partial\bar{u}^2/\partial u^1 & \partial\bar{u}^2/\partial u^2 \end{pmatrix}$$

满秩。

考察切向量

$$\mathbf{x}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_\alpha} = \left( \partial \mathbf{x} / \partial \bar{u}^1 \quad \partial \mathbf{x} / \partial \bar{u}^2 \right) \begin{pmatrix} \partial \bar{u}^1 / \partial u^\alpha \\ \partial \bar{u}^2 / \partial u^\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2$$

注意到

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \mathbf{x} / \partial u^1 & \partial \mathbf{x} / \partial u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \bar{u}^1 / \partial u^1 & \partial \bar{u}^1 / \partial u^2 \\ \partial \bar{u}^2 / \partial u^1 & \partial \bar{u}^2 / \partial u^2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

<sup>3</sup>记号  $\text{span}$  是形式上的, 事实上我们关心切向量的起点。

因此  $T_{\mathbf{x}}M = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = \text{span}\{\mathbf{x}_{\bar{1}}, \mathbf{x}_{\bar{2}}\}$ , 其中  $\mathbf{x}_{\bar{\alpha}} = \partial \mathbf{x} / \partial \bar{u}^{\alpha}$ ,  $(\alpha = 1, 2)$ 。

此外, 考察  $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ , 注意到

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial x^1 / \partial u^1 & \partial x^1 / \partial u^2 & \partial x^1 / \partial u^3 \\ \partial x^2 / \partial u^1 & \partial x^2 / \partial u^2 & \partial x^2 / \partial u^3 \end{pmatrix}$$

由公式2.1可得

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{\bar{1}} \times \mathbf{x}_{\bar{2}} \cdot \frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)} \quad (2.2)$$

当行列式大于 0 时 (称**保向**的微分同胚), 法向量场不变; 反之, 法向量场反向。得到以下命题:

**命题 2.1.1.** 正则曲面  $M$  的切空间与法向量场为保向<sup>4</sup>微分同胚下的不变量。

---

<sup>4</sup>切空间的“不变”与保向与否无关。

## 2.2 第一基本形式与度量

### 2.2.1 第一基本形式的讨论

断言: 作微积分的基础是赋予研究对象恰当的度量结构。为了研究曲面上的度量结构, 我们需要澄清一个概念: 曲面上的正则曲线  $C$  指同胚  $\gamma: I(= (a, b)) \rightarrow M$ , 满足适当的光滑性和正则性。

由于曲面 (映射)  $\mathbf{x}$  与  $\gamma$  皆同胚, 于是存在同胚  $c: I \rightarrow D(= \mathbf{x}^{-1}(M))$  使得  $\gamma = \mathbf{x} \circ c$ 。事实上,  $\gamma = \mathbf{x}|_{c(I)}$ , 故曲线的表达为

$$\gamma(t) := \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$$

考察  $C$  的弧长  $s$ , 由公式1.5可得

$$ds = |d\mathbf{x}| \quad (2.3)$$

称等式左侧为曲面  $M$  的**线索**。此外, 注意到

$$ds^2 = |d\mathbf{x}|^2 = \left( \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} \right)^2 \triangleq g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (2.4)$$

其中  $g_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta$ 。

**定义 2.2.1.** 称公式2.4中的二次型  $g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ <sup>5</sup>为曲面  $M$  的**第一基本形式**。

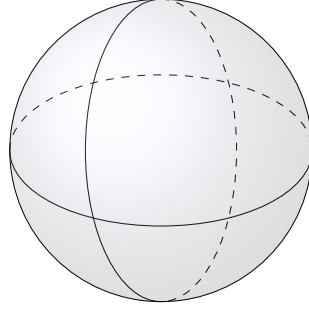
**例子 2.2.1.** 球面  $S^2$  在不同参数下的第一基本形式矩阵  $(g_{\alpha\beta})$  不同, 但二次型的形式不变。我们先考察球坐标系下的表示:

$$\begin{cases} x^1 = r \cos u^1 \cos u^2 \\ x^2 = r \cos u^1 \sin u^2 \\ x^3 = r \sin u^1 \end{cases} \quad (2.5)$$

为保证同胚, 选取开区间  $\{-\frac{\pi}{2} < u^1 < \frac{\pi}{2}, 0 < u^2 < 2\pi\}$ , 事实上并没有整体覆盖球面的“坐标卡”<sup>6</sup>, 如下图所示。

<sup>5</sup>一些教材中会记  $g_{11} = E, g_{12} = g_{21} = F, g_{22} = G$ , 例如 [15]。

<sup>6</sup>这说明仅利用局部性质是无法整体研究曲面的, 这需要一个“大范围的“坐标系统, 即微分流形的概念。



易知第一基本形式为

$$I = r^2(du^1 du^1 + \cos^2 u^1 du^2 du^2) \quad (2.6)$$

其次考察球极投影，有同胚

$$\begin{cases} x^1 = \frac{2r^2 \bar{u}^1}{r^2 + |\bar{u}|^2} \\ x^2 = \frac{2r^2 \bar{u}^2}{r^2 + |\bar{u}|^2} \\ x^3 = \frac{|\bar{u}|^2 - r^2}{r^2 + |\bar{u}|^2} \end{cases} \quad (2.7)$$

其中  $\bar{u} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ，可得第一基本形式为

$$\bar{I}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \frac{4}{\left(1 + \frac{|\bar{u}|^2}{r^2}\right)^2} (d\bar{u}^1 d\bar{u}^1 + d\bar{u}^2 d\bar{u}^2) \quad (2.8)$$

**命题 2.2.1.** 曲面  $M$  的第一基本形式与参数的选取无关。

证明. 选取如上参数，考察

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \mathbf{x}_{\bar{\alpha}} \cdot \mathbf{x}_{\bar{\beta}} = \mathbf{x}_{\gamma}(\partial u^{\gamma}/\partial \bar{u}^{\alpha}) \cdot \mathbf{x}_{\delta}(\partial u^{\delta}/\partial \bar{u}^{\beta}) = g_{\alpha\beta}(\partial u^{\gamma}/\partial \bar{u}^{\alpha})(\partial u^{\delta}/\partial \bar{u}^{\beta}) \quad (2.9)$$

**注记 2.2.1.** 等式 2.9 给出不同参数选取下第一基本形式量的转移关系<sup>7</sup>。

计算第一基本形式

$$I(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} d\bar{u}^{\alpha} d\bar{u}^{\beta} = g_{\gamma\delta} \left( \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \cdot \frac{\partial u^{\delta}}{\partial \bar{u}^{\beta}} \right) d\bar{u}^{\alpha} d\bar{u}^{\beta}$$

由一阶微分形式不变

$$\left( \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\alpha}} \cdot \frac{\partial u^{\delta}}{\partial \bar{u}^{\beta}} \right) d\bar{u}^{\alpha} d\bar{u}^{\beta} = du^{\gamma} du^{\delta}$$

可知

$$I(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = g_{\gamma\delta} du^{\gamma} du^{\delta} = I(u^1, u^2)$$

□

<sup>7</sup>事实上，这验证了第一基本形式是一个张量。在黎曼几何中我们同样可以得到改变坐标参数以后黎曼度量的转移关系，在表达式上与此是类似的。

**注记 2.2.2.** “不变”仅体现在形式上，第一基本形式为合同变换下的不变量，事实上进一步是等距变换下的不变量。

**命题 2.2.2.** 曲面  $M$  的第一基本形式诱导切空间  $T_x M$  上的内积，使之成为欧式空间。

证明. 只要验证  $(g_{\alpha\beta})$  的正定性即可， $g_{11}, g_{22} > 0$  是显然的，对于  $\det(g_{\alpha\beta})$ ，即

$$\det(g_{\alpha\beta}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2$$

由 Lagrange 恒等式

$$\det(g_{\alpha\beta}) = |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| > 0$$

□

**注记 2.2.3.** 因此，熟悉微分流形的读者可以将这里的曲面视为“二维 Riemann 流形”，其中第一基本形式给出了一种 Riemann 度量，参见 [6]。

**定义 2.2.2.** 在既定参数  $u^1, u^2$  下的  $\{\mathbf{x}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}\}$  为  $M$  上的自然标架。

直观地看，曲面与标架之选取无关；而一个便捷的标架在计算与分析上大有裨益。为自然标架施以 Gram – schmidt 正交化

$$\mathbf{x}_1 \mapsto e_1 := \frac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|}$$

$$\mathbf{x}_2 \mapsto e_2 := \frac{\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 \cdot e_1)e_1}{|\mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 \cdot e_1)e_1|}$$

反过来表达有

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \sqrt{g_{11}}e_1 \\ \mathbf{x}_2 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}e_1 + \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}{\sqrt{g_{11}}}e_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

**定义 2.2.3.** 称  $\{\mathbf{x}; e_1, e_2, \mathbf{n}\}$  为  $M$  上的么正标架。

式2.9的结果不重要，我们有意地忽略它<sup>8</sup>，于是“待定系数”，记  $\mathbf{x}_1 = a_1^\alpha e_\alpha$ ,  $\mathbf{x}_2 = a_2^\beta e_\beta$ 。其实我们有

$$\begin{cases} a_1^1 = \sqrt{g_{11}} \\ a_1^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2^1 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} \\ a_2^2 = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}{\sqrt{g_{11}}} \end{cases}$$

---

<sup>8</sup>在第三章中我们将看到么正标架在计算抽象曲面几何信息时的方便之处，同时它背后的代数结构支撑了一套有力的研究几何的工具，即外微分形式。



这里  $a_\alpha^\beta$  本质上为关于  $u^1, u^2$  的可微函数, 且  $(a_\alpha^\beta)_{2 \times 2}$  非退化。

计算  $M$  上的“有向”线素,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha du^\alpha = (a_\alpha^\beta e_\beta) du^\alpha = (a_\alpha^\beta du^\alpha) e_\beta$$

记  $\omega^\beta = a_\alpha^\beta du^\alpha, \beta = 1, 2$  (作为余切向量  $du^1, du^2$  的线性组合)。

**注记 2.2.4.**  $\omega^\beta$  本质上为 1 阶微分形式。

此时,

$$I = |d\mathbf{x}|^2 = (\omega^\alpha \omega^\beta) \delta_{\alpha\beta} = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$$

旋转么正标架  $\{e_1, e_2, n\}$ , 即

$$(\overline{e_1 e_2}) = (e_1, e_2) R$$

其中

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

此时

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e_1} \\ \overline{e_2} \end{pmatrix}$$

那么

$$I = |d\mathbf{x}|^2 = \overline{\omega}^\alpha \overline{\omega}^\beta \sigma_{\alpha\beta} = (\overline{\omega}^1)^2 + (\overline{\omega}^2)^2$$

其中  $\overline{\omega}^1 = \cos\theta \omega^1 - \sin\theta \omega^2$ ,  $\overline{\omega}^2 = \sin\theta \omega^1 + \cos\theta \omega^2$ 。故第一基本形式与么正标架的选取无关。

## 2.2.2 曲面上的度量结构

下面我们利用第一基本形式计算曲面上的度量关系。不妨以曲线  $C$  为  $\gamma(t) = \mathbf{x} \circ c(s) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t)), t \in [0, 1]$ , 则弧长表达为

$$L = \int_0^{s(1)} ds = \int_0^{s(1)} |d\gamma| = \int_0^1 \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| dt = \int_0^1 \left| \mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{dt} \right| dt$$

由式2.4可得

$$^9L = \int_0^1 (g_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt})^{\frac{1}{2}} dt \quad (2.11)$$

我们曾在命题2.2.2中赋予了切空间  $T_{x_0}M$  一个内积, 下面利用这个内积诱导其上的度量结构。对任一向量  $v \in T_x M$  有线性表示

$$v = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha$$

---

<sup>9</sup>黎曼几何中关于流形上曲线弧长的表达与其是一致的, 不过届时的弧长是“大范围”定义的。读者会在整体微分几何部分见到同样的表达, 我们会以此建立(整体)曲面的度量拓扑。

规定**欧式范数**为

$$||v||_E := (v \cdot v)^{\frac{1}{2}} = (v^\alpha \mathbf{x}_\alpha) \cdot (v^\beta \mathbf{x}_\beta)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

无歧义时, 记  $|v| \triangleq ||v||_E$ , 称**模长**。

**注记 2.2.5.** 事实上, 若令  $\bar{v} = v^\alpha \mathbf{E}_\alpha$ , 其中  $\mathbf{E}_\alpha$  为欧式平面  $E^2$  的自然基, 显然有  $|\bar{v}| = (\delta_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta)^{\frac{1}{2}}$ , 因此, “ $g_{\alpha\beta}$ ” 可视为曲面 “的 “弯曲”, 这是内蕴几何学发展的开端。

再规定向量夹角, 对另一向量  $w = w^\beta \mathbf{x}_\beta \in T_{\mathbf{x}}M$ 。记  $\theta = \angle(v, w)$ , 于是

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{|v||w|} = \frac{g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta}{(g_{\gamma\delta} v^\gamma v^\delta)^{\frac{1}{2}} (g_{\sigma\tau} w^\sigma w^\tau)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.13)$$

若  $g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta = 0$ , 称  $v$  与  $w$  **正交**。特别地, 若  $u^1$ -线与  $u^2$ -线的切向量处处正交, 称这是一组**正交参数**, 其中  $I = g_{11} du^1 du^1 + g_{22} du^2 du^2$ 。

一个自然的问题是: 若参数曲线不正交, 那么夹角如何表示? 事实上

$$-1 < \cos\theta = \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1| \cdot |\mathbf{x}_2|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} < 1 \quad (2.14)$$

**例子 2.2.2.** 曲面上参数曲线的角平分线满足以下微分方程,

$$\sqrt{g_{11}} du^1 = \epsilon \sqrt{g_{22}} du^2, \epsilon = \pm 1 \quad (2.15)$$

证明. 不妨设  $C$  为曲面上平分参数曲线夹角的曲线, 则弧长参数表达为

$$\gamma(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$$

有

$$\frac{\dot{\gamma} \cdot \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|} = \epsilon \frac{\dot{\gamma} \cdot \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|}, \epsilon = \pm 1$$

于是

$$\frac{(\mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{ds}) \cdot \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|} = \epsilon \frac{(\mathbf{x}_\beta \frac{du^\beta}{ds}) \cdot \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_2|}$$

因此,

$$\frac{g_{11} du^1 + g_{12} du^2}{\sqrt{g_{11}}} = \epsilon \frac{g_{12} du^1 + g_{22} du^2}{\sqrt{g_{22}}}$$

整理可得,

$$\sqrt{g_{11}}(1 - \frac{\epsilon g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}) du^1 = \sqrt{g_{22}}(1 - \frac{\epsilon g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}) du^2$$

由不等式2.14,  $1 - \frac{\epsilon g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \neq 0$ , 因此原命题成立。  $\square$

沿  $u^\alpha$ -线方向取 1-形式  $\mathbf{x}_\alpha du^\alpha, \alpha = 1, 2$  (非求和), 考察 2-形式的绝对值, 记为  $dA$ , 有

$$dA = |\mathbf{x}_1 du^1 \wedge \mathbf{x}_2 du^2| = |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2$$

由命题 2.2.2 的证明, 可得

$$dA = (\det(g_{\alpha\beta}))^{\frac{1}{2}} du^1 \wedge du^2 \quad (2.16)$$

**注记 2.2.6.** 公式 2.16 还适用于高维。

于是我们可以定义局部曲面片  $\mathbf{x}: D \rightarrow \bar{D}$  的面积为

$$A = \int_D dA = \int_D (\det(g_{\alpha\beta}))^{\frac{1}{2}} du^1 \wedge du^2 \quad (2.17)$$

容易验证, 局部曲面片的面积与么正标架的选取无关。下面考虑不同参数下的曲面片:

$$\bar{A} = \int_{\bar{D}} |\mathbf{x}_{\bar{1}} \times \mathbf{x}_{\bar{2}}| d\bar{u}^1 \wedge d\bar{u}^2$$

由公式 2.2 可得

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \int_{\bar{D}} |\mathbf{x}_{\bar{1}} \times \mathbf{x}_{\bar{2}}| \frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)} d\bar{u}^1 \wedge d\bar{u}^2 \\ &= \int_D |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2 \\ &= A \end{aligned}$$

因此, 面积为几何量。

**例子 2.2.3.** 圆环面  $\mathbf{x} = (\cos u^1(R + r \cos u^2), \sin u^1(R + r \cos u^2), r \sin u^2)$ , 其中参数域为  $D = \{u^\alpha \in (0, 2\pi), \alpha = 1, 2\}$

计算可得

$$g_{11} = (R + r \cos(u^2))^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = r^2$$

由公式 2.17 可得

$$A(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{2\pi} du^1 \int_{\epsilon}^{2\pi} r(R + r \cos u^2) du^2$$

令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 可知

$$S = 4\pi^2 ab$$

**注记 2.2.7.** 由上述的讨论可知, 第一基本形式不依赖于曲面在欧氏空间中的浸入形式, 并且赋予切空间一个度量。于是我们将只由第一基本形式诱导的量称为**内蕴几何量**, 如上述的弧长、角度和面积, 还有将来我们会证明的 *Gauss* 曲率。

有时我们会关注“非欧式”的几何对象, 也就是**抽象曲面**的概念, 这里先行使用“微分流形”的概念来叙述, 有兴趣的读者可以参考 [2, 14, 16, 6, 8], 其中 [9] 中介绍的仍然是欧式空间的子集。

## 微分流形的观点

事实上,“曲面”完全可以抽象的,只不过在古典的欧氏空间子集下讨论一切变得显而易见,有兴趣可以直接参考 [9] 的第一章。

现给定两张曲面  $M, \overline{M}$ , 由曲面的定义, 有同胚  $\mathbf{x}: D \rightarrow \mathbf{x}(D)$  和  $\overline{\mathbf{x}}: \overline{D} \rightarrow \overline{\mathbf{x}}(\overline{D})$ 。称  $\mathbf{x}$  为  $D$  到曲面 (流形)  $M$  的拉回 (或者参数化); 逆映射  $\mathbf{x}^{-1}$  称为流形上的推出 (或坐标化)。有时, 又把  $D$  称为**参数域**, 连同同胚的二元组  $(D, \mathbf{x})$  称为**坐标邻域**。另一张曲面  $M$  上的术语同理。

**注记 2.2.8.** 这里我们只限制到一个坐标领域, 事实上可以有一组坐标领域开覆盖, 这是标准的微分流形的定义, 我们后续会以此定义整体曲面。

若参数域之间有一个同胚  $\sigma: D \rightarrow \overline{D}$ , 由传递性易知

$$\overline{\mathbf{x}}^{-1} \circ \sigma \circ \mathbf{x}: M \rightarrow \overline{M}$$

为曲面 (片) 之间的同胚。

**注记 2.2.9.** 习惯上直接将  $\overline{\mathbf{x}}^{-1} \circ \sigma \circ \mathbf{x}$  记为  $\sigma$ , 称为曲面之间的 (同胚) 映射, 性质由前者的  $\sigma$  特征。

**定义 2.2.4.** 若存在映射  $\varphi$  使得  $M, \overline{M}$  的第一基本形式  $I$  和  $\overline{I}$  之间有如下关系:

$$\overline{I} = \varphi^2 I \quad (2.18)$$

称  $M, \overline{M}$  是**共形对应的**, 若  $\varphi \equiv 1$ , 称**等距对应**。

**注记 2.2.10.** 公式2.18的  $I$  和  $\overline{I}$  的参数皆为  $(u^1, u^2)$ , 只有相同参数下的几何量才值得比较。

## 函子的观点

形式上视  $T_{\mathbf{p}}$  为函子:  $M, \overline{M}$  为两张曲面,  $\sigma$  为二者之间的可微映射,  $T_{\mathbf{p}}$  诱导了切空间  $T_{\mathbf{p}}M$  与  $T_{\sigma(\mathbf{p})}\overline{M}$  之间的**线性算子**。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{T_{\mathbf{p}}} & T_{\mathbf{p}}M \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma_* \\ \overline{M} & \xrightarrow{T_{\sigma(\mathbf{p})}} & T_{\sigma(\mathbf{p})}\overline{M} \end{array} \quad (2.19)$$

注意到函子  $T_{\mathbf{p}}$  是协变的, 本质上为“拉回”函子的对偶, 在流形理论中有进一步的讨论。

对  $T_p M$  中任一向量  $v^{10}$ , 有线性表示  $v = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha$ 。设  $\gamma$  为  $M$  上过  $p$  点的正则曲线, 其中  $\gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , 满足

$$\frac{d\gamma}{dt}\bigg|_{t=0} = \mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{dt}\bigg|_{t=0} \quad (2.20)$$

只要令  $v^\alpha = \frac{du^\alpha}{dt}\big|_{t=0}$

**注记 2.2.11.** 可知  $v^\alpha dt = du^\alpha$ , 等式右侧为平面线素。

现在  $\sigma$  将  $M$  映到  $\overline{M}$ , 记  $\bar{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ 。考察

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dt}\bigg|_{t=0} = \bar{\mathbf{x}}_\alpha \frac{d\bar{u}^\alpha}{dt}\bigg|_{t=0} = \bar{\mathbf{x}}_\beta \left( \frac{\partial^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} \bar{u}^\alpha \right)\bigg|_{t=0} = \bar{\mathbf{x}}_\alpha \frac{du^\alpha}{dt} = \bar{\mathbf{x}}_\alpha v^\alpha \quad (2.21)$$

记  $\sigma_*(v) = \frac{d(\sigma \circ \gamma)}{dt}\big|_{t=0}$ , 由等式 2.21  $\sigma_*$  仅与  $\sigma$  和  $v$  有关, 与曲线的选取无关, 因此是良性的; 此外可见线性, 因此是线性算子。

**定义 2.2.5.** 称上述线性算子  $\sigma_*$  为  $\sigma$  诱导的切映射。

**命题 2.2.3.** 共形对应保持曲面切向量夹角不变, 又称保角变换; 等距变换保持曲面切空间的度量。<sup>11</sup>

证明. 对任意  $v_i \in T_p M (i = 1, 2)$ , 令  $\bar{v}_i = \sigma_*(v_i) \in T_{\sigma(p)} M (i = 1, 2)$ , 记

$$v_i = v_i^\alpha \mathbf{x}_\alpha (i = 1, 2)$$

那么

$$\bar{v}_i = v_i^\alpha \bar{\mathbf{x}}_\alpha (i = 1, 2)$$

考察夹角余弦

$$\begin{aligned} \cos \angle(v_1, v_2) &= \frac{g_{\alpha\beta} v_1^\alpha v_2^\beta}{(g_{\alpha\beta} v_1^\alpha v_2^\beta)^{\frac{1}{2}} (g_{\gamma\delta} v_1^\gamma v_2^\delta)^{\frac{1}{2}}} \\ \cos \angle(\bar{v}_1, \bar{v}_2) &= \frac{\bar{g}_{\alpha\beta} v_1^\alpha v_2^\beta}{(\bar{g}_{\alpha\beta} v_1^\alpha v_2^\beta)^{\frac{1}{2}} (\bar{g}_{\gamma\delta} v_1^\gamma v_2^\delta)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

由  $\bar{I} = \phi^2 I$ 。故

$$\cos \angle(v_1, v_2) = \cos \angle(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$$

第二句话是显然的。 □

<sup>10</sup>注意到  $\sigma: M \rightarrow \overline{M}$ , 因此考虑以  $v$  为切向量的曲线。

<sup>11</sup>在内蕴几何学中, 我们视等距的曲面为同一张曲面。而事实上, 等距的曲面在“外蕴形状”上可以差距甚远。我们将知道第二基本形式, 即外蕴量在等距变换下是会改变的。

**例子 2.2.4.** 我们曾计算了不同坐标卡下的球面第一基本形式。

1. 球坐标系

$$I = r^2(du^1 du^1 + \cos^2 u^1 du^2 du^2)$$

2. 球极投影

$$\bar{I}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \frac{4}{\left(1 + \frac{|\bar{u}|^2}{r^2}\right)^2} (d\bar{u}^1 d\bar{u}^1 + d\bar{u}^2 d\bar{u}^2)$$

注意到后者与平面是共形的。

一个惊人的事实是：任意曲面上每一点都有一个邻域，它可以和欧式平面的一个区域间建立保角变换。这个结论的证明要用到偏微分方程与单复变函数的工具，有兴趣的读者可以参考 Chern S S. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1955, 6(5): 771-782.。

**注记 2.2.12.** 等距变换保持第一基本形式，蕴含曲线弧长、切向量、模长、夹角和曲面片面积不变。如下一例说明等距的曲面形状上迥异：

**例子 2.2.5.** 考察旋转曲面，设  $C$  为  $x^2 0 x^3$  平面上的正则曲线，有参数方程

$$\begin{cases} x^2 = f(u^2) \\ x^3 = g(u^2) \end{cases}$$

绕  $x^3$  轴旋转生成曲面

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (f(u^2) \cos u^1, f(u^2) \sin u^1, g(u^2))$$

可得第一基本形式

$$I = f^2 du^1 du^1 + ((f')^2 + (g')^2) du^2 du^2$$

特别地，令  $f = ach \frac{u^2}{a}$ ,  $g = u^2$ ，称其为**悬链面**。易得第一基本形式为

$$I = ch^2 \frac{u^2}{a} (a^2 du^1 du^1 + du^2 du^2) \quad (2.22)$$

**例子 2.2.6.** 螺旋面方程为  $\mathbf{x}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = (f(\bar{u}^2) \cos \bar{u}^1, f(\bar{u}^2) \sin \bar{u}^1, g(\bar{u}^2) + a \bar{u}^1)$  计算第一基本形式为

$$I = (f^2 + a^2) d\bar{u}^1 d\bar{u}^1 + 2ag' d\bar{u}^1 d\bar{u}^2 + ((f')^2 + (g')^2) d\bar{u}^2 d\bar{u}^2$$

取  $f = u^2$ ,  $g = 0$ 。此时称**正螺旋面**。有

$$I = ((\bar{u}^2)^2 + a^2) d\bar{u}^1 d\bar{u}^1 + d\bar{u}^2 d\bar{u}^2$$

若取  $u^2 = ash \frac{\bar{u}^2}{a}$ ,  $u^1 = \bar{u}^1$ ，有

$$I = ch^2 \frac{u^2}{a} (a^2 du^1 du^1 + du^2 du^2) \quad (2.23)$$

因此悬链面与正螺旋面可建立等距对应!

**定义 2.2.6.** 称曲面为**直纹面**, 如果具有形式  $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$ , 其中  $|b| \equiv 1$ ,  $a$  称为**准线**,  $b$  称为**方向向量**。

计算易知

$$\mathbf{x}_1 = a' + u^2 b', \quad \mathbf{x}_2 = b$$

由  $|b| \equiv 1$ , 可化简第一基本形式为

$$I = (a' + u^2 b')^2 du^1 du^1 + 2a' b du^1 du^2 + du^2 du^2$$

**定义 2.2.7.** 称直纹面为**可展曲面**, 如果每条直母线各点的切空间重合。

**定理 2.2.1.** 直纹面  $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$  是可展曲面当且仅当  $(a', b, b') \equiv 0$

证明. 固定位置  $u_0^1$ , 给出直母线方向上的一个变差  $\Delta u^2$ , 即

$$\mathbf{x}(u_0^1, u^2) = a(u_0^1) + u^2 b(u_0^1)$$

$$\mathbf{x}(u_0^1, u^2 + \Delta u^2) = a(u_0^1) + (u^2 + \Delta u^2) b(u_0^1)$$

计算切向量

$$\mathbf{x}_1(u_0^1, u^2) = a'(u_0^1) + u^2 b'(u_0^1)$$

$$\mathbf{x}_2(u_0^1, u^2) = b(u_0^1)$$

法向量

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = (a'(u_0^1) + u^2 b'(u_0^1)) \times b'(u_0^1) \triangleq A$$

记  $a'(u_0^1) = a'_0$ ,  $b''(u_0^1) = b'_0$ ,  $b^1(u_0^1) = b_0$ , 同理

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2(u_0^1, u^2 + \Delta u^2) = (a'_0 + (u^2 + \Delta u^2) b'_0) \times b_0 \triangleq B$$

考察

$$\begin{aligned} A \times B &= (a'_0 + u^2 b'_0) \times b_0 \times (a'_0 + (u^2 + \Delta u^2) b'_0) \times b_0 \\ &= \Delta u^2 (a'_0 \times b_0) \times (b'_0 \times b_0) \\ &= -\Delta u^2 \cdot (a'_0, b_0, b'_0) \cdot b_0 \end{aligned}$$

因此  $A, B$  平行当且仅当  $(a'_0, b_0, b'_0) = 0$ , 命题得证。 □

**定理 2.2.2.** 可展曲面局部必为柱面、锥面和切线面其一。

证明. 容易验证柱面  $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b$ , 锥面  $\mathbf{x} = a + u^2 b(u^1)$ , 切线面  $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 a'(u^1)$ , 满足定理2.2.1条件。下证必要性。

已知可展曲面  $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$ , 由微分方程

$$(a', b, b') \equiv 0$$

特征。由  $|b| = 1$  可知  $b \cdot \dot{b} = 0$ 。

- 1) 若  $b \times \dot{b} = 0$ , 则  $\dot{b} = 0$ , 蕴含  $b$  为常向量。此时为柱面。
- 2) 若  $b \times \dot{b} \neq 0$ , 则  $b$  非常向量。对  $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$ , 考察

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{a}(u^1) + u^2 b(u^1) \quad \bar{a}'(u^1) // b, \quad \text{即 } \bar{a}'(u^1) \perp b' \quad (2.24)$$

<sup>12</sup> 不妨设  $\bar{a}(u^1) = a(u^1) + f(u^1)b(u^1)$ 。而  $\bar{a}' \cdot b = 0$ , 又  $\bar{a}'(u^1) = a'(u^1) + f'(u^1)b(u^1) + f(u^1)b'(u^1)$ , 故

$$a'b + f|b|^2 = 0. \quad (2.25)$$

取  $f = -\frac{a'b}{|b|^2}$ , 此时

$$\mathbf{x} = \bar{a}(u^1) + (u^2 - f)b(u^1) \quad (2.26)$$

注意到

$$(a', b, b') = ((\bar{a} - fb)', b, b') = (\bar{a}' - f'b + f', b, b') = (\bar{a}', b, b')$$

因此  $\bar{a}', b, b'$  共面, 又2.24的强行构造  $\bar{a}' \perp b'$ , 且  $b \perp b'$  (欧式公理), 故 1)  $\bar{a}' = 0$  蕴含  $\bar{a}$  为常向量,  $\mathbf{x}$  为锥面。2)  $\bar{a}' \neq 0$  蕴含  $\bar{a}'//b$  为常向量,  $\mathbf{x}$  为切线面。□

---

<sup>12</sup>注意到这里  $\bar{x}$  的构造不是偶然的, 事实上我们可以通过定理所给的条件观察出  $b$  与  $a$  的关系。



## 2.3 第二基本形式与弯曲

下面从欧式空间  $\mathbf{E}^3$  的角度下考察曲面的“外蕴”弯曲程度。

### 2.3.1 高度函数水平集

设  $M$  为一张曲面, 其在  $p$  点  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  处有切空间  $T_p M$ , 邻近  $p$  点处有  $q$  点  $\mathbf{x}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2)$ 。

记高度函数  $H(p, q)$  为

$$H(p, q) := |[\mathbf{x}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) - \mathbf{x}(u^1, u^2)] \cdot \mathbf{n}| \quad (2.27)$$

对式2.27取极限  $(\Delta u^1, \Delta u^2) \rightarrow 0$ , 由 Taylor 定理, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{(\Delta u^1, \Delta u^2) \rightarrow 0} H(p, q) &= \lim_{(\Delta u^1, \Delta u^2) \rightarrow 0} |\{\mathbf{x}_1(u^1, u^2)\Delta u^1 + \mathbf{x}_2(u^1, u^2)\Delta u^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}[\mathbf{x}_{11}(u^1, u^2)\Delta(u^1)^2 + 2\mathbf{x}_{12}(u^1, u^2)\Delta u^1 \Delta u^2 \\ &\quad + \mathbf{x}_{22}(u^1, u^2)\Delta(u^2)^2] + o(|(u^1, u^2)|^2)\} \cdot \mathbf{n}| \\ &= \frac{1}{2} \lim_{(\Delta u^1, \Delta u^2) \rightarrow 0} |[\mathbf{x}_{\alpha\beta}(u^1, u^2)\Delta u^\alpha \Delta u^\beta] \cdot \mathbf{n} + o(|(u^1, u^2)|^2)| \\ &= \frac{1}{2} \{(\mathbf{x}_{\alpha\beta}) du^\alpha du^\beta\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

记  $h_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta = -\mathbf{x}_\beta \cdot \mathbf{n}_\alpha$ 。(由于  $\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$ )。

**定义 2.3.1.** 称二次型  $II = h_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ <sup>13</sup> 为曲面的第二基本形式。

**注记 2.3.1.** 由式2.28, 可知

$$2dH = (\mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}) du^\alpha du^\beta = -(\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta) du^\alpha du^\beta = -(\mathbf{x}_\alpha du^\alpha) \cdot (\mathbf{n}_\beta du^\beta) = -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{n} \quad (2.29)$$

因此高度函数  $H$  刻画曲面的弯曲程度, 本质上由微分形式  $d\mathbf{x}$  和  $d\mathbf{n}$  共同决定。

此外, 由  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|}$ , 可知

$$h_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_{\alpha\beta})}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} \quad (2.30)$$

**例子 2.3.1.** 计算旋转面  $\mathbf{x} = (f(u^2)\cos u^1, f(u^1)\sin u^1, g(u^2))$  的第二基本形式。易知

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{11} = (-f\cos u^1, -f\sin u^1, 0) \\ \mathbf{x}_{12} = (-f\sin u^1, f\cos u^1, 0) \\ \mathbf{x}_{22} = (f''\cos u^1, f''\sin u^1, g'') \end{cases}$$

<sup>13</sup>一些教材记  $h_{11} = L, h_{12} = h_{21} = M, h_{22} = N$ , 例如 [15]。

从而

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = (fg' \cos u^1, fg' \sin u^1, -ff')$$

故

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}(g' \cos u^1, g' \sin u^1, -f')$$

可得第二基本形式为  $II = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}(-fg' du^1 du^1 + \begin{vmatrix} f'' & g'' \\ f' & g' \end{vmatrix} du^2 du^2)$ 。令  $f = r \cos u^2$ ,  $g = r \sin u^2$ , 易知球面的第二基本形式为

$$II = -r(\cos^2 u^2 du^1 du^1 + du^2 du^2)$$

对比公式2.6<sup>14</sup>可知

$$^{15}II = \frac{1}{r}I \quad (2.31)$$

若再令  $f = R + r \cos u^2$ ,  $g = r \sin u^2$ , 可得圆环面的第二基本形式

$$II = (R + r \cos u^2) \cos u^2 du^1 du^1 + r du^2 du^2 \quad (2.32)$$

**例子 2.3.2.** 计算直纹面  $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$  的第二基本形式, 易知

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{11} = a'' + u^2 b'' \\ \mathbf{x}_{12} = b' \\ \mathbf{x}_{22} = 0 \end{cases}$$

从而,

$$\mathbf{n} = \frac{(a' + u^2 b') \times b}{|(a' + u^2 b') \times b|}$$

故第二基本形式为

$$II = \frac{1}{|(a' + u^2 b') \times b|}((a'' + u^2 b''), (a' + u^2 b'), b) du^1 du^1$$

### 2.3.2 曲线与线素

设  $C$  为  $M$  上一曲线, 参数化为  $\gamma(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ , 其中  $s$  为弧长参数。考察

$$\begin{aligned} \kappa N &= \dot{T} = \ddot{\mathbf{x}} \\ &= \frac{d}{ds} \left( \mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{ds} \right) \\ &= \mathbf{x}_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} + \mathbf{x}_\alpha \frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

<sup>14</sup>读者请注意, 我们这里的参数  $u^1, u^2$  相比公式2.6被调换了。

<sup>15</sup>这不是偶然的, 我们将知道球面上任一大圆弧的曲率恒为  $\frac{1}{r}$ , 即这里固定方向  $du^1/du^2$  处的法曲率。

记  $k_n(T) = \dot{T} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}) \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} = h_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds}$ , 进一步有

$$k_n |ds|^2 = h_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

即

$$k_n = \frac{II(du^\alpha, du^\beta)}{I(du^\alpha, du^\beta)} \quad (2.34)$$

对任一单位切向量  $\bar{v} = \frac{du^\alpha}{ds} \mathbf{x}_\alpha \in T_p M$ , 易知

$$k_n(\bar{v}) = II(du^\alpha, du^\beta) \quad (2.35)$$

对非单位的情形,  $v = \frac{du^\alpha}{dt} \mathbf{x}_\alpha \in T_p M$ , 则  $\frac{v}{|v|} = \frac{du^\alpha}{dt} \mathbf{x}_\alpha / (I(du^\alpha, du^\beta))^{\frac{1}{2}}$ , 故

$$k_n\left(\frac{v}{|v|}\right) = \frac{II(du^\alpha, du^\beta)}{I(du^\alpha, du^\beta)} \quad (2.36)$$

因此  $k_n$  仅与线素  $ds$  方向有关, 与同向曲线选取无关, 我们得到如下定理:

**定理 2.3.1** (*Meusnier* 定理). 曲面上任何相切曲线, 在切点处曲率相等。

**注记 2.3.2.** 对式 2.34, 事实上有<sup>16</sup>

$$k_n(T) = \frac{II(T, T)}{I(T, T)} = II\left(\frac{T}{|T|}, \frac{T}{|T|}\right)$$

此外, 若有微分同胚  $\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^1, u^2), \alpha = 1, 2$ , 那么

$$\begin{aligned} h_{\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta} &= (\mathbf{x}_{\bar{u}^\alpha \bar{u}^\beta} \cdot \mathbf{n}) d\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta \\ &= [(\mathbf{x}_\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha})'_{\bar{\beta}} \cdot \mathbf{n}] d\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta \\ &= (\mathbf{x}_{\gamma\sigma} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\beta} + \mathbf{x} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \cdot n) d\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta \\ &= (\mathbf{x}_{\gamma\sigma} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\beta}) \cdot n d\bar{u}^\alpha d\bar{u}^\beta \\ &= \mathbf{x}_{\gamma\sigma} du^\gamma du^\sigma \end{aligned}$$

故第二基本形式为一个几何量, 进而  $k_n$  为几何量。

**定义 2.3.2.** 称  $k_n(v)$  为曲面在切方向  $v$  上的**法曲率**。

---

<sup>16</sup>这里的  $T$  不一定是单位切向量。

## 2.4 Weingarten 算子

### 2.4.1 Weingarten 变换

下面考察曲面切空间  $T_p M$  上的线性算子  $W$ ，考虑其在基向量  $\mathbf{x}_\alpha, \alpha = 1, 2$  上的作用

$$W(\mathbf{x}_\alpha) = h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta \quad (2.37)$$

其中

$$h_\alpha^\beta = h_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} \quad (2.38)$$

这里  $(g^{\gamma\beta}) := (g_{\alpha\beta})^{-1}$ ，使得  $g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$ 。称等式2.38右侧为：把第二基本形式量  $h_{\alpha\beta}$  的指标用  $g^{\gamma\beta}$  拉上去。再线性扩充到整个切空间，对任一切向量  $v \in T_p M$ ，

$$W : T_p M \rightarrow T_p M$$

满足

$$v^\alpha \mathbf{x}_\alpha = v \mapsto W(v) = v^\alpha h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta$$

**定义 2.4.1** (Weingarten 算子). 称上述算子  $W$  为 Weingarten 算子。

考察内积

$$\begin{aligned} W(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{x}_\beta &= h_\alpha^\gamma \mathbf{x}_\gamma \cdot \mathbf{x}_\beta \\ &= (h_{\alpha\delta} g^{\delta\gamma}) g_{\gamma\beta} \\ &= h_{\alpha\beta} \\ &= h_{\beta\alpha} \\ &= W(\mathbf{x}_\beta) \cdot \mathbf{x}_\alpha \\ &= \mathbf{x}_\alpha \cdot W(\mathbf{x}_\beta) \end{aligned}$$

称上述递等式的第二个等号为把指标拉下来。可见  $W$  为自共轭算子或自对偶算子，即  $W = W^*$ 。

考察算子  $W$  的 (计重) 的谱  $\text{Spec} W = \{k_1, k_2\}$ 。由自共轭性易知

$$W(\mathbf{e}_\alpha) = k_\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.39)$$

这里  $\mathbf{e}_\alpha$  为算子的特征向量，且  $k_\alpha$  一定是实数。此外

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.40)$$

**定义 2.4.2.** 称上述实特征值  $k_\alpha$  为主曲率，特征向量表示的方向为主方向。

考察 1- 形式  $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha du^\alpha$  在  $W$  下的变换:

$$W(d\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}_\alpha) du^\alpha = h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta du^\alpha$$

通过  $g_{\beta\gamma}$  拉下指标, 有

$$W(d\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = II(du^\alpha, du^\gamma) \quad (2.41)$$

**注记 2.4.1.** 公式 2.41 给出第二基本形式的另一表达。并且可知  $W(dx) = -dn$ , 说明  $W$ -算子的像总是落在单位球面上。<sup>17</sup>

进一步, 对任一切向量  $v = \mathbf{x}_\alpha \frac{du^\alpha}{ds} \in T_p M$ , 易知

$$W(v) \cdot v = II\left(\frac{du^\alpha}{ds}, \frac{du^\beta}{ds}\right) \quad (2.42)$$

随即得到法曲率的表达:

$$k_n(v) = \frac{W(v) \cdot v}{|v|^2}$$

取单位切向量  $\bar{v}$ , 设其与  $\mathbf{e}_1$  的夹角为  $\theta$ , ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ), 有线性表示

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

于是

$$W(\bar{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \cos \theta \\ k_2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

故

$$k_n(\bar{v}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \quad (2.43)$$

称公式 2.43 为 *Euler 公式*。可见  $k_n(\bar{v})$  仅与  $\theta$  有关, 不妨记为  $k_n(\theta)$ 。对上式关于  $\theta$  求导, 有

$$\frac{dk_n}{d\theta} = -(k_1 - k_2) \sin 2\theta \quad (2.44)$$

作如下讨论<sup>18</sup>:

1.  $k_1 \neq k_2$ ,  $\frac{dk_n}{d\theta} = 0$  蕴含  $\theta = 0$  或  $\frac{\pi}{2}$ 。易知  $k_n$  在  $\mathbf{e}_1$  或  $\mathbf{e}_2$  处取极值  $k_1$  或  $k_2$ 。
2.  $k_1 = k_2$  蕴含  $k_n$  为常值。

**定义 2.4.3.** 称  $k_1 = k_2$  的点为**脐点**, 特别的,  $k_1 = k_2 = 0$  的为**平点**, 此外为**圆点**。

<sup>17</sup>利用这个观察我们将知道  $W$ -算子是 *Gauss* 映射的切映射。

<sup>18</sup>这便是 Euler 在 1776 年的工作, 有兴趣的读者可以参见 Euler, L. (1776). *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum*. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 189-207.。

在脐点  $\mathbf{p}$  意义下, 对任一  $v = v^\alpha \mathbf{x}_\alpha \in R_{\mathbf{p}}M$ , 有

$$k_n(v) \equiv \lambda \quad (2.45)$$

其中  $\lambda$  为常数。

**命题 2.4.1.** 全平点曲面当且仅当平面。

证明. 充分性是显然的, 下证必要性. 取等式2.45中的  $\lambda = 0$ , 于是

$$0 = h_{\alpha\beta} = -\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

又  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ , 对  $u^\beta$  求导, 有

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\beta = 0$$

因此  $\mathbf{n}_\beta = 0$ , 故  $\mathbf{n}$  为常向量。考察

$$((\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n})'_\beta = \mathbf{x}_\beta \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n}_\beta = 0$$

又由初值条件  $(\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n} = 0$ , 故

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n} = 0$$

□

**注记 2.4.2.** 由等式2.31可知球面上任一点为圆点, 以后我们将知道这个命题是充分的。

记  $\mathbf{A} = (h_{\alpha\beta}^\beta)$ , 考察算子  $W$  的特征多项式。

$$\chi_W(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbf{A}) = \lambda^2 - 2H\lambda + K \quad (2.46)$$

其中

$$H = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2\det(g_{\alpha\beta})} = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (2.47)$$

以及

$$K = \frac{\det(h_{\alpha\beta})}{\det(g_{\alpha\beta})} = k_1 k_2 \quad (2.48)$$

**注记 2.4.3.** 以上整理使用指标的拉上拉下。

### 2.4.2 两个重要曲率

**定义 2.4.4.** 称上述的  $H$  为**平均曲率**或中曲率;  $K$  为 *Gauss* **曲率**或总曲率。

称  $H \equiv 0$  的曲面为**极小曲面**<sup>19</sup>。

**例子 2.4.1.** 容易计算, 球面的平均曲率  $H = -\frac{1}{r}$ , *Gauss* 曲率  $K = \frac{1}{r^2}$ 。

**例子 2.4.2.** 由例2.2.5, 可以计算旋转曲面的两个曲率。

$$H = \frac{f \begin{vmatrix} f'' & g'' \\ f' & g' \end{vmatrix} - g'((f')^2 + (g')^2)}{2f^2((f')^2 + (g')^2)^2} \quad (2.49)$$

$$K = \frac{-g' \begin{vmatrix} f'' & g'' \\ f' & g' \end{vmatrix}}{f((f')^2 + (g')^2)^2} \quad (2.50)$$

令  $f = \cosh \frac{u^2}{a}, g = u^2$ , 易知  $h \equiv 0$ , 故悬链面为极小曲面。同时可知, 圆环面的平面曲率为

$$H = \frac{R + 2r \cos u^2}{2r(R + r \cos u^2)}$$

显然其一定不是极小曲面。<sup>20</sup>

**定义 2.4.5.** 曲面  $M$  上的曲线  $C$ ,  $\gamma = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$  是**曲率线**, 如果切向量  $\dot{\gamma}$  是  $M$  的主方向, 即 *Weingarten* 算子的特征向量。

**定理 2.4.1** (*Rodriguer* 定理). 曲线  $C$  是曲面  $M$  上曲率线的充要条件为

$$dn(s) = -\lambda(s)d\mathbf{x}(s) \quad (2.51)$$

这里的  $\lambda(s)$  为  $\mathbf{x}(s)$  方向的主曲率。

**证明.** 设曲线  $\mathbf{x}(s)$ , 由曲率线定义可知

$$\mathbf{x}(s) \text{ 为曲率线} \Leftrightarrow \omega(d\mathbf{x}) = \lambda(s)d\mathbf{x}, \text{ 其中 } \lambda(s) \text{ 为主曲率}$$

而  $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha du^\alpha$ , 则

$$\omega(d\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}_\alpha)du^\alpha = h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta du^\alpha \quad (2.52)$$

<sup>19</sup>我们将在节2.6中看到这类曲面的几何意义。

<sup>20</sup>事实上该曲面的平均曲率本身并没有太大的参考价值, 但倘若选取该几何量的平方, 即  $H^2$ , 我们将在整体微分几何中看到: 如此几何量在整个环面上积分后可得一个与拓扑相关的几何量, 即全平均曲率, 著名的 *Willmore* 猜想就与此相关。

由  $|n| = 1$ , 可得  $n_\alpha \cdot n = 0$ , 故  $n_\alpha \in \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ 。令  $n_\alpha = b_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta$  可得

$$-h_\alpha^\delta = b_\alpha^\delta \quad (2.53)$$

于是  $n_\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta$ , 考察

$$dn = n_\alpha du^\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta du^\alpha \stackrel{(2.52)}{=} -\lambda(s) d\mathbf{x}$$

即可。  $\square$

**定义 2.4.6.** 公式2.53蕴含

$$n_\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta \quad (2.54)$$

称为 *Weingarten 公式*。

断言, 在不含脐点的曲面上存在一组由曲率线构成的参数  $u_\alpha$ -线形成参数网, 称为**曲率线网**。此时  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  正交, 有第一基本形式为

$$I = g_{11} du^1 du^1 + g_{22} du^2 du^2 \quad (2.55)$$

而  $W(\mathbf{x}_\alpha) = k_\alpha \mathbf{x}_\alpha$ , 故

$$h_{\alpha\beta} = \omega(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{x}_\beta = k_\alpha g_{\alpha\beta}$$

因此<sup>21</sup>

$$II = k_1 g_{11} du^1 du^1 + k_2 g_{22} du^2 du^2 \quad (2.56)$$

取  $e_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{g_{11}}}$ ,  $e_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\sqrt{g_{22}}}$  为么正基。

$$I = (\mathbf{x}_\alpha du^\alpha)^2 = (e_1 \sqrt{g_{11}} du^1 + e_2 \sqrt{g_{22}} du^2)^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 \quad (2.57)$$

其中,  $\omega^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} du^\alpha$ , 并且

$$II = k_1 (\omega^1)^2 + k_2 (\omega^2)^2 \quad (2.58)$$

下面通过 *Rodrigues* 定理计算曲率线。注意到

$$\omega(d\mathbf{x}) = \lambda d\mathbf{x} = -dn$$

即

$$\lambda \mathbf{x}_\alpha du^\alpha = -n_\alpha du^\alpha$$

两边内积  $\mathbf{x}_\beta$ , 得

$$\lambda g_{\alpha\beta} du^\alpha = h_{\alpha\beta} du^\alpha$$

---

<sup>21</sup>可以发现, 选取曲率线网以后, 第一第二基本形式不含交叉项, 计算总是简单的。



整理有线性方程组

$$\begin{cases} \{h_{11}du^1 + h_{21}du^2\} \cdot (-1) + \{g_{11}du^1 + g_{21}du^2\} \cdot \lambda = 0 \\ \{h_{12}du^1 + h_{22}du^2\} \cdot (-1) + \{g_{12}du^1 + g_{22}du^2\} \cdot \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

方程组2.79存在非零解等价于如下行列式不为0,

$$\begin{vmatrix} h_{11}du^1 + h_{21}du^2 & g_{11}du^1 + g_{21}du^2 \\ h_{12}du^1 + h_{22}du^2 & g_{12}du^1 + g_{22}du^2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.60)$$

整理可得

$$\{g_{22}h_{12} + g_{12}h_{22}\}(du^2)^2 + \{g_{22}h_{11} + g_{11}h_{12}\}du^1du^2 + \{g_{12}h_{11} + g_{11}h_{12}\}(du^1)^2 = 0$$

即

$$-\begin{vmatrix} g_{22} & g_{12} \\ h_{22} & h_{12} \end{vmatrix} (du^2)^2 + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{22} \\ h_{11} & h_{22} \end{vmatrix} du^1du^2 - \begin{vmatrix} g_{12} & g_{11} \\ h_{12} & h_{11} \end{vmatrix} (du^1)^2 = 0 \quad (2.61)$$

写成行列式的形式为

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.62)$$

常微分方程2.62解的存在性保证非脐点曲面曲率线网的存在性, 因此只要断定了正则曲面不含脐点, 我们便可以“不妨”地选取曲率线作为参数曲线。

### 2.4.3 利用曲率线网研究曲面

令  $p, p' \in M$ , 其中,  $p = \mathbf{x}(u^1, u^2), p' = \mathbf{x}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2)$ 。由 Taylor 定理

$$\mathbf{x}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) = \mathbf{x}(u^1, u^2) + \mathbf{x}_\alpha(u^1, u^2)\Delta u^\alpha + \frac{1}{2}\mathbf{x}_{\alpha\beta}(u^1, u^2)\Delta u^\alpha\Delta u^\beta + \dots$$

观察上式, 一个自然的想法是利用标架  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}\}$  线性表示  $\mathbf{x}_{\alpha\beta}$ 。不妨记为

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} := \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{x}_\gamma + B\mathbf{n} \quad (2.63)$$

对等式2.63两边分别内积  $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{n}$ , 其实可知  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  与  $B$ 。其中  $B = h_{\alpha\beta}$ 。称  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  **第二类 Christoffel 符号**或克氏符号。

令  $e_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\sqrt{g_{11}}}, e_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\sqrt{g_{22}}}, \delta = \sqrt{(\Delta u^1)^2 + (\Delta u^2)^2}$ , 那么

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u^1 + \Delta u^1, u^2 + \Delta u^2) &= \mathbf{x}(u^1, u^2) + \{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\Delta u^\alpha + o(\delta)\}e_\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}\{h_{\alpha\beta}\Delta u^\alpha\Delta u^\beta + o(\delta^2)\}n \end{aligned}$$

再令  $(\Delta u^1, \Delta u^2) \rightarrow 0$ , 则有

$$d\mathbf{x} = \{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}du^\alpha\}e_\alpha + \{\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta\}n \quad (2.64)$$

取  $y^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}du^\alpha, \alpha = 1, 2$ ;  $y^3 = \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ , 观察得到

$$y^3 = k_1(y^1)^2 + k_2(y^2)^2 \quad (2.65)$$

标架  $O - y^1 y^2 y^3$  近似了曲面, 进一步我们定义:

1.  $K = k_1 k_2 > 0$  称**椭圆点**。
2.  $K = k_1 k_2 < 0$  称**双曲点**。
3.  $K = k_1 k_2 = 0$  且  $y^1 \neq 0$  称**抛物点**。

容易混淆的另一个概念是渐近线。

**定义 2.4.7.** 若曲面某点的一个切方向  $du^1/du^2$  的第二基本形式为 0, 即法曲率为 0, 则称该方向为**渐进方向**。

即

$$II(du^1/du^2) = h_{11} \left( \frac{du^1}{du^2} \right)^2 + 2h_{12} \left( \frac{du^1}{du^2} \right) + h_{22} \quad (2.66)$$

可知

$$\Delta = -4\det(h_{\alpha\beta}) \quad (2.67)$$

于是

1.  $\Delta > 0 \Leftrightarrow$  双曲点, 至多 2 个渐进方向。
2.  $\Delta = 0 \Leftrightarrow$  抛物点, 至多 1 个渐进方向。
3.  $\Delta < 0 \Leftrightarrow$  椭圆点, 一定没有渐进方向。

渐进方向的积分曲线称为**渐近线**。注意, 不是每张曲面都有渐近方向。若一张曲面有两个渐近方向, 即在局部有两族渐近线 (作为参数曲线), 这样的参数线网称为**渐近线网**。下面考察渐近线网的第二基本形式。

对  $u^1$ -线 ( $u^2 \equiv 0, du^2 = 0$ ), 有

$$II(du^1, du^2) = 0 \Leftrightarrow h_{11}(du^1)^2 \Leftrightarrow h_{11} = 0$$

同理

$$h_{22} = 0$$

故

$$II(du^1, du^2) = 2h_{12}du^1 du^2 \quad (2.68)$$

**命题 2.4.2.** 全圆点曲面当且仅当球面。

证明. 仅证明必要性。设  $\mathbf{p}$  为圆点。则  $h_{\alpha\beta} = \lambda(\mathbf{p})g_{\alpha\beta}$ ,  $\lambda(\mathbf{p}) \neq 0$ 。

注意到  $h_{\alpha\beta} = \lambda(\mathbf{p})g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow h_{\alpha}^{\beta} = \lambda(\mathbf{p})\delta_{\alpha}^{\beta}$ 。由 *Weingarten* 公式, 可得

$$n_{\alpha} = -h_{\alpha}^{\beta}\mathbf{x}_{\beta} = -\lambda(\mathbf{p})\delta_{\alpha}^{\beta}\mathbf{x}_{\beta} = -\lambda(\mathbf{p})\mathbf{x}_{\alpha}$$

考察

$$n_1 = -\lambda(\mathbf{p})\mathbf{x}_1$$

对上式两边关于  $u^2$  方向求导, 可得

$$n_{12} + \lambda(\mathbf{p})\mathbf{x}_2 = \lambda_2(\mathbf{p})\mathbf{x}_1$$

又  $n_{12} = n_{21}$ ,  $\mathbf{x}_{12} = \mathbf{x}_{21}$ , 因此

$$\lambda_1\mathbf{x}_2 + \lambda_2\mathbf{x}_1 = 0$$

蕴含  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , 因此  $\lambda$  为常值。

注意到

$$d\mathbf{n} = \mathbf{n}_{\alpha}du^{\alpha} = -h_{\alpha}^{\beta}\mathbf{x}_{\beta}du^{\alpha} = -\lambda\mathbf{x}_{\alpha}du^{\alpha} = -\lambda d\mathbf{x} \quad (2.69)$$

即

$$d(\mathbf{n} + \lambda\mathbf{x}) = 0$$

这表明

$$\mathbf{n} + \lambda\mathbf{x} \equiv \mathbf{c}$$

其中  $\mathbf{c}$  为常向量, 变形得到

$$\left| \mathbf{x} - \frac{\mathbf{c}}{\lambda} \right| = \left| \frac{\mathbf{n}}{\lambda} \right| = \frac{1}{\lambda}$$

故为球面。 □

**注记 2.4.4.** 根据定理 2.4.1, 等式 2.23 说明脐点处每个方向都是主方向。

**例子 2.4.3.** 设  $M$  为无脐点曲面,  $K < 0$ 。则  $M$  上一条渐近线的正交轨线的法曲率  $k_n$  等于同一点处平均曲率的两倍。

证明. 设  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$  为渐近线, 方向为  $\mathbf{T}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s)$ 。选取曲率线网为参数网。令  $\angle(\mathbf{T}, \mathbf{e}_1) = \theta$ , 由 *Euler* 公式可知

$$0 = k_n(\theta) = k_n(T) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

而正交轨线方向的法曲率为

$$k_n(\theta + \frac{\pi}{2}) = k_1 \cos \theta + \frac{\pi}{2} + k_2 \sin^2 \theta + \frac{\pi}{2}$$

则

$$k_n(\theta + \frac{\pi}{2}) = k_n(\theta + \frac{\pi}{2}) + 0 = k_n(\theta + \frac{\pi}{2}) + k_n(\theta) = 2H$$

□

## 2.5 Gauss 映射与第三基本形式

### 2.5.1 Gauss 映射与第三基本形式

下面我们介绍 Gauss 本人研究曲面的方式——Gauss 映射。设曲面  $M : \mathbf{x}(u^1, u^2)$  的局部参数域为  $D$ ，记  $\mathcal{D} = \mathbf{x}(D)$ 。取  $M$  的法向量场  $\mathbf{n}(u^1, u^2)$ ，构造映射  $g : \mathcal{D} \rightarrow S^2(1)$ ， $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{n}_{\mathbf{p}}$ ，记  $\mathcal{D}' = g(\mathcal{D})$ 。写成交换图，如下：

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\mathbf{x}} & \mathcal{D} \\ & \searrow \mathbf{n} & \downarrow g \\ & & \mathcal{D}' \end{array}$$

**定义 2.5.1.** 称  $g : M \rightarrow S^2(1)$ ，其中  $g : \mathbf{x}(u^1, u^2) \mapsto \mathbf{n}(u^1, u^2)$  为 Gauss 映射， $S^2(1)$  为 Gauss 球面。

此时，若视  $S^2(1)$  的参数域为  $D$ ，则局部表示为  $\mathbf{n}(D)$ 。那么  $S^2(1)$  关于  $\mathbf{n}$  的第一基本形式称为  $M$  的**第三基本形式**，即

$$III = |d\mathbf{n}|^2 = |(\mathbf{n}_\alpha du^\alpha)(\mathbf{n}_\beta du^\beta)| = |(\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta) du^\alpha du^\beta|$$

记  $f_{\alpha\beta} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta$ 。

曲面的第一、二、三基本形式不是独立的，它们由如下定理保证。

**定理 2.5.1.** 曲面的三个基本形式满足以下方程：

$$III - 2HII + KI = 0 \quad (2.70)$$

证明. 对非脐点的一个邻域，选取曲率线网为参数网。由 Weingarten 公式可得

$$\mathbf{n}_\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta$$

由

$$h_\alpha^\beta = h_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$$

可知

$$h_1^1 = k_1, \quad h_2^2 = k_2$$

且

$$h_2^1 = h_1^2 = 0$$

**注记 2.5.1.** 上述讨论来自于  $(g_{\alpha\beta})$  与  $(h_{\alpha\beta})$  为对角矩阵，蕴含  $(h_\beta^\alpha)$  为对角矩阵。事实上，自共轭算子  $W$  在曲率线网 (即恰当的单位正交基) 下的矩阵是对角的，且对角元为主曲率，即

$$(W)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{参数网为曲率线网}$$

那么

$$\begin{aligned}
 III &= |d\mathbf{n}|^2 \\
 &= f_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \\
 &= (h_\alpha^\gamma \mathbf{x}_\gamma) \cdot (h_\beta^\delta \mathbf{x}_\delta) du^\alpha du^\beta \\
 &= (k_1 \mathbf{x}_1 du^1 + k_2 \mathbf{x}_2 du^2) \cdot (k_1 \mathbf{x}_1 du^1 + k_2 \mathbf{x}_2 du^2) \\
 &= k_1^2 g_{11} du^1 du^1 + k_2^2 g_{22} du^2 du^2
 \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 2HIII &= (k_1 + k_2) \{k_1 g_{11} du^1 du^1 + k_2 g_{22} du^2 du^2\} \\
 &= \{k_1^2 g_{11} du^1 du^1 + k_2^2 g_{22} du^2 du^2\} + (k_1 k_2)(g_{11} du^1 du^1 + g_{22} du^2 du^2) \\
 &= III + KI
 \end{aligned}$$

故

$$III - 2HIII + KI = 0$$

对脐点的领域是显然的。  $\square$

### 2.5.2 Gauss 曲率的另一种解释 (Gauss 的原始思想)

下面考察 Gauss 曲率的另一种表示, 即  $\mathcal{D}'$  与  $\mathcal{D}$  的面积比。注意到 2- 形式的绝对值为面积元

$$\begin{aligned}
 dA &= |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2 \\
 dA' &= |\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2| du^1 \wedge du^2
 \end{aligned}$$

由 Weingarten 公式

$$|\mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_\beta| = |(h_1^1 \mathbf{x}_1 + h_1^2 \mathbf{x}_2) \times (h_2^1 \mathbf{x}_1 + h_2^2 \mathbf{x}_2)| = \det(h_\beta^\alpha) |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| = K |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|$$

因此, 在微分意义下, 有

$$K = \frac{dA'}{dA} \quad (2.71)$$

局部上, 有

$$A' = \iint_{\mathcal{D}'} dA' = \iint_{\mathcal{D}} K |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2$$

而

$$A' = \iint_{\mathcal{D}} |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| du^1 \wedge du^2$$

由积分中值定理, 可得

$$K(\mathbf{x}_0) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{A'}{A} = \lim_{\mathbf{x}^* \rightarrow \mathbf{x}_0} K(\mathbf{x}^*) \quad (2.72)$$

因此, Gauss 曲率的几何意义为 Gauss 球面的面积元与曲面本身的面积元之比。

**注记 2.5.2.** 通过公式2.71或公式2.72也可以定义 *Gauss* 曲率, 蕴含  $K = k_1 k_2$ 。事实上, 前者在几何上更为直观, 也是 *Gauss* 本人的原始思想。

**例子 2.5.1.** 易知直纹面  $\mathbf{x} = a(u^1) + u^2 b(u^1)$ ,  $|b| \equiv 1$ , 则其第一、二基本形式量分别为

$$g_{11} = (a' + u^2 b')^2, \quad g_{12} = g_{21} = a' \cdot b, \quad g_{22} = 1$$

$$h_{11} = \frac{(a' + u^2 b', b, a'' + u^2 b'')}{|(a' + u^2 b) \times b|}, \quad h_{12} = h_{21} = \frac{(a', b, b')}{|(a' + u^2 b) \times b|}, \quad h_{22} = 0$$

直接计算得

$$K = -\frac{(a', b, b')}{\det(g_{\alpha\beta})|(a' + u^2 b) \times b|^2} \quad (2.73)$$

由定理2.2.1, 公式2.73蕴含: 直纹面可展当且仅当  $K \equiv 0$ 。

**注记 2.5.3.** 我们将在??中给出进一步的刻画。

以下例子是定理2.5.1的简单应用。

**例子 2.5.2.** 曲面  $M$  上一条曲率不为 0 的渐近线的挠率  $\tau = \sqrt{-K}$ 。

证明. 设  $C$  为渐近线, 有表示  $\mathbf{x}(s) = (u^1(s), u^2(s))$ ,  $T = \dot{\mathbf{x}}$ , 于是

$$\dot{T} = \kappa N$$

两边内积  $\mathbf{n}$

$$0 = k_n = \dot{T} \cdot \mathbf{n} = \kappa N \cdot \mathbf{n}$$

而  $\kappa \neq 0$ , 则  $N \cdot \mathbf{n} = 0$ , 又  $T \perp \mathbf{n}$ , 则

$$\mathbf{n} = \epsilon B, \epsilon = \pm 1$$

而  $\dot{B} = -\tau N$ , 故  $\dot{\mathbf{n}} = -\epsilon \tau N$ , 即

$$d\mathbf{n} = -\epsilon \tau N ds$$

注意到

$$2HIII - KI = III = |d\mathbf{n}|^2 = \tau^2$$

因此  $0 - K = \tau^2$ , 即

$$\tau = \sqrt{-K} \quad (2.74)$$

□

## 2.6 面积变分与极小曲面

下面利用变分法推出极小曲面 ( $H = 0$ ) 的几何意义。选取  $\mathbb{R}^2$  中联通区域  $D$ , 参数为  $(u^1, u^2)$ , 引入  $D$  上的光滑函数, 即曲面族  $M^t$

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{x}(u^1, u^2) + t\varphi(u^1, u^2)n(u^1, u^2)$$

其中  $-\epsilon < t < \epsilon$ ,  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$ , 称为**曲面泛函**<sup>22</sup>。

考察  $M^t$  的面积元

$$dA(t) = \sqrt{g_{11}^t g_{22}^t - (g_{12}^t)^2} du^1 \wedge du^2 \quad (2.75)$$

注意到

$$\begin{aligned} g_{11}^t &= \mathbf{x}_1^t \cdot \mathbf{x}_1^t = (\mathbf{x}_1 + t\varphi_1 n + t\varphi n_1) \cdot (\mathbf{x}_1 + t\varphi_1 n + t\varphi n_1) \\ &= g_{11} + 2\varphi \mathbf{x}_1 \cdot n_1 t + o(t) \\ &= g_{11} - 2\varphi h_{11} t + o(t) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} g_{12}^t &= \mathbf{x}_1^t \cdot \mathbf{x}_2^t = (\mathbf{x}_1 + t\varphi_1 n + t\varphi n_1) \cdot (\mathbf{x}_2 + t\varphi_2 n + t\varphi n_2) \\ &= g_{12} - 2\varphi h_{12} t + o(t) \end{aligned}$$

同理

$$g_{21}^t = g_{12}^t, \quad g_{22}^t = g_{22} - 2\varphi h_{22} t + o(t)$$

考察

$$\begin{aligned} \det(g_{\alpha\beta}^t) &= g_{11}^t g_{22}^t - (g_{12}^t)^2 \\ &= (g_{11} - 2\varphi h_{11} t + o(t))(g_{22} - 2\varphi h_{22} t + o(t)) \\ &\quad - (g_{12} - 2\varphi h_{12} t + o(t))^2 \\ &= \det(g_{\alpha\beta}) - 4\varphi\{h_{22}g_{11} - 2h_{12}g_{12} + h_{11}g_{22}\}t + o(t) \end{aligned}$$

于是  $M^t$  的面积泛函为

$$\begin{aligned} A(t) &= \iint_D \sqrt{\det(g_{\alpha\beta}^t)} du^1 \wedge du^2 \\ &= \iint_D \sqrt{\det(g_{\alpha\beta}) - 4\varphi\{h_{22}g_{11} - 2h_{12}g_{12} + h_{11}g_{22}\}t + o(t)} du^1 \wedge du^2 \\ &= \iint_D \left( \sqrt{1 - \frac{4\varphi\{h_{22}g_{11} - 2h_{12}g_{12} + h_{11}g_{22}\}}{\det(g_{\alpha\beta})} t + o(t)} \right) \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} du^1 \wedge du^2 \\ &= \int_D \sqrt{1 - 4\varphi H t + o(t)} \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} du^1 \wedge du^2 \end{aligned} \quad (2.76)$$

<sup>22</sup>我们将在整体微分几何中再次见到这样的泛函表达, 届时会给出这个表达的一般形式。

对泛函  $A(t)$  关于  $t$  求导, 在  $t = 0$  处的导数为

$$\frac{dA(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \iint_D (-2\varphi H) \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} du^1 \wedge du^2 \quad (2.77)$$

总结以下定理。

**定理 2.6.1.** 上述区域  $D$  上取极小曲面 ( $H = 0$ ) 当且仅当  $D$  上的曲面面积达到临界值。

证明. 必要性. 由  $H = 0$ , 即得  $\frac{dA(t)}{dt}\big|_{t=0} = 0$ , 故达到临界值。

充分性. 由  $\varphi$  的任意性, 若有一点  $p$  满足  $H(p) > 0$ , 则存在  $p$  的一个领域  $U$ , 使得  $H(U) > 0$ , 只要选择  $\varphi|_U > 0$ , 其余值为 0, 那么

$$\frac{dA(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \iint_D -2\varphi H \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} du^1 \wedge du^2 < 0.$$

与临界值矛盾.  $H(p) < 0$  同理. □

**注记 2.6.1.** 若  $x(D)$  落在欧氏空间, 则面积极小。

至此, 我们断言: 旋转面中悬链面以及与之等距的正螺面是极小曲面。一个自然的问题是: 除了悬链面, 旋转面中是否有其他极小曲面?

我们已经计算了旋转面的第一、二基本形式, 现在考察平均曲率  $H$ 。由

$$H = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{\det(g_{\alpha\beta})} = 0.$$

考虑

$$h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11} = 0.$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}} \{f^2 f'' - f(1+(f')^2)\} = 0.$$

注意到  $\sqrt{1+(f')^2} \neq 0$ ,  $f \neq 0$ , 故

$$1 + (f')^2 = f f'' \quad (2.78)$$

**注记 2.6.2.** 等式 (2.78) 是一个 ODE, 故上述问题转化为 ODE 解的唯一性。

其实我们可以求解这个 ODE, 变形等式 (2.78) 为

$$\frac{f' f''}{1 + (f')^2} = \frac{f'}{f}.$$

即

$$\frac{d(1 + (f')^2)}{2(1 + (f')^2)} = \frac{df}{f}.$$



解得

$$f = C\sqrt{1 + (f')^2}$$

变形得

$$f' = \pm \sqrt{\left(\frac{f}{C}\right)^2 - 1}.$$

即

$$\frac{1}{C}du^2 = \pm \frac{d(\frac{f}{C})}{\sqrt{(\frac{f}{C})^2 - 1}}$$

两边积分可得

$$\vec{b} + \frac{u^2}{C} = \pm ch^{-1}\left(\frac{f}{C}\right), \quad \text{其中 } \vec{b} \text{ 为常向量}$$

故

$$f = \pm Cch\left(\frac{u^2}{C} + \vec{b}\right)$$

因此悬链面为旋转面中**唯一的**极小曲面。

## 2.7 曲面的内蕴几何学

### 2.7.1 曲面的自然方程

回忆曲线论中的 *Frenet* 公式, 本质上是一个 ODE。设曲线  $C$  为  $\mathbf{x}(s)$ , 在  $s = 0$  处有标架  $\{\mathbf{x}(0); T, N, B\}$ , 满足

$$\begin{cases} \dot{T} = kN \\ \dot{N} = -kT + \tau B \\ \dot{B} = -\tau N \end{cases} \quad (2.79)$$

我们希望曲面论的讨论中也能得到一个类似的 “*Frenet*” 公式, 不过是一个 PDE。设  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$  为一张曲面, 在  $(0, 0)$  处有标架  $\{\mathbf{x}(0); \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, n\}$ 。由公式 (2.63) 及前的讨论, 我们已经知道

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbf{x}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} n \quad (2.80)$$

其次有 *Weingarten* 公式

$$n_{\alpha} = -h_{\alpha}^{\beta} \mathbf{x}_{\beta}$$

组合来看, 有

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbf{x}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} n \\ n_{\alpha} = -h_{\alpha}^{\beta} \mathbf{x}_{\beta} \end{cases}$$

下面来求这个克氏符。注意到

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}. \quad (2.81)$$

对式 (2.80) 两边内积  $\mathbf{x}_{\delta}$ , 得

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{x}_{\delta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\delta} \quad (2.82)$$

注意到

$$\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}} = (\mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{x}_{\delta})_{\beta} = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{x}_{\delta} + \mathbf{x}_{\delta\beta} \cdot \mathbf{x}_{\alpha}.$$

对式 (2.82) 交换指标  $\alpha, \delta$ , 得

$$\mathbf{x}_{\delta\beta} \cdot \mathbf{x}_{\alpha} = \Gamma_{\delta\beta}^{\gamma} g_{\gamma\alpha}.$$

因此

$$\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\delta} + \Gamma_{\delta\beta}^{\gamma} g_{\gamma\alpha} \quad (2.83)$$

对式 (2.83) 分别交换指标  $\alpha, \beta$  和  $\beta, \delta$ , 有

$$\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^{\alpha}} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} g_{\gamma\delta} + \Gamma_{\delta\alpha}^{\gamma} g_{\gamma\beta} \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} = \Gamma_{\alpha\delta}^\gamma g_{\gamma\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma g_{\gamma\delta} \quad (2.85)$$

(2.83) + (2.84) - (2.85) 得

$$2\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\delta} = \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}. \quad (2.86)$$

**注记 2.7.1.** 将等式 (2.86) 左侧的指标拉下来, 记  $\Gamma_{\alpha\beta\delta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\delta}$ , 称为**第一类 Christoff 符号**。

利用  $g_\delta^\sigma$  把指标拉上去得

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \delta_\gamma^\sigma = \frac{1}{2} g^{\delta\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right\}$$

故

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\delta\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right\} \quad (2.87)$$

称等式 (2.87) 为 **Gauss 公式**。至此, 我们已经能完整地刻画一开始的方程组, 即

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{x}_\gamma + h_{\alpha\beta} n \\ n_\alpha = -h_\alpha^\beta \mathbf{x}_\beta \end{cases} \quad (2.88)$$

其中

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\delta\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right\}$$

称方程为曲面的**自然方程**<sup>23</sup>。

**注记 2.7.2.** 注意到, 由式 (2.87) 可知克氏符仅与第一基本形式量有关, 是一个内蕴量。

## 2.7.2 测地曲率与测地线

下面我们利用方程组 (2.7.1) 来研究曲面上一个重要的内蕴量——测地曲率。已经知道, 曲面上一条曲线  $C: \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ , 沿曲线方向  $T = \dot{\mathbf{x}}$  的法曲率定义为曲率向量  $\dot{T} = kN$  在法向量场上的投影, 它是一个外蕴量, 即

$$k_n(T) = \dot{T} \cdot n = kN \cdot n$$

一个自然的问题是: 曲率向量在切空间上的投影如何表达?

<sup>23</sup>19 世纪到 20 世纪初大部分古典曲面论的工作都以这个方程为出发点, 但是我们会发现这套方程在很多繁杂的计算上不尽人意, 却有比较直观的几何含义; 而于 20 世纪上旬 *E.Cartan* 发明么正标架法以后, 陈省身先生得其精髓将这套方法发扬光大, 使得 20 世纪中下旬利用么正标架代替自然方程计算变成潮流。

我们考察以下内积

$$\begin{aligned}\dot{T} \cdot \mathbf{x}_\alpha &= \frac{d}{ds}(\mathbf{x}_\beta \frac{du^\beta}{ds}) \cdot \mathbf{x}_\alpha \\ &= \Gamma_{\beta\gamma}^\delta g_{\delta\alpha} \frac{du^\gamma}{ds} \frac{du^\beta}{ds} + g_{\alpha\beta} \frac{d^2 u^\beta}{ds^2}\end{aligned}$$

假设

$$\dot{T} = f^\tau \mathbf{x}_\tau + k_n \mathbf{n}$$

两边内积  $\mathbf{x}_\alpha$ , 有

$$\dot{T} \cdot \mathbf{x}_\alpha = f^\tau g_{\tau\alpha}$$

用  $g^{\alpha\sigma}$  拉上指标, 可得

$$g^{\alpha\sigma} \dot{T} \cdot \mathbf{x}_\alpha = f^\sigma \quad (2.89)$$

于是

$$g^{\alpha\sigma} \left\{ \Gamma_{\beta\gamma}^\delta g_{\delta\alpha} \frac{du^\gamma}{ds} \frac{du^\beta}{ds} + g_{\alpha\beta} \frac{d^2 u^\beta}{ds^2} \right\} = f^\sigma$$

因此我们有

$$\dot{T} = \left\{ \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} + \frac{d^2 u^\sigma}{ds^2} \right\} \mathbf{x}_\sigma + k_n \mathbf{n} \quad (2.90)$$

设

$$\left\{ \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} + \frac{d^2 u^\sigma}{ds^2} \right\} \mathbf{x}_\sigma = Q$$

其中  $Q$  为单位切向量, 称  $kg$  为曲面  $C$  在曲面上的**测地曲率**。

**注记 2.7.3.** 对等式2.90两边内积  $T$ , 可知  $Q \perp T$ , 又  $Q \perp \mathbf{n}$ 。于是只要令  $Q := \mathbf{n} \times T$  即可。

容易知道

$$\kappa^2 = kg^2 + k_n^2 \quad (2.91)$$

并且

$$kg - \dot{T} \cdot Q = (\dot{T}, \mathbf{n}, T) \quad (2.92)$$

**定义 2.7.1.** 称测地曲率  $kg = 0$  的曲线为**测地线**。

立即得到测地线的等价刻画

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} + \frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} = 0, \quad \gamma = 1, 2 \quad (2.93)$$

称常微分方程组2.93为**测地线方程**, 这是一个内蕴的方程。根据常微分方程理论, 只要给定初值

$$\begin{cases} u^\alpha(0) = u_0^\alpha \\ \frac{du^\alpha}{ds}(0) = v_0^\alpha \end{cases} \quad (2.94)$$

即初始位置与初始速度, 那么存在唯一的解, 即测地线。

下面从几何的角度考察测地线。

1. 曲线上的直线一定是测地线, 即

$$0 = \kappa = \kappa^2 = kg^2 + k_n^2$$

蕴含

$$kg = 0$$

2. 曲面上的非直线是测地线, 这句话等价于

$$\kappa N = \dot{T} = 0 \cdot Q + k_n$$

即  $N$  与  $\mathbf{n}$  共线。

**例子 2.7.1.** 球面上的大圆弧是测地线。

**例子 2.7.2.** 平面上的直线是测地线; 等距变换下, 圆柱面上的圆柱螺线也是测地线。

### 2.7.3 $\exp$ 映射、法坐标系与测地极坐标系

最后, 我们引入一个工具来简化测地线以及以测地线为参数曲线时的计算。考察曲面  $M$  的切空间  $T_p M$ , 去么正标架  $\{p, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 。对一充分短的切向量  $v = y^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ ,  $|v| = \epsilon \rightarrow 0$ 。定义从  $p$  点出发, 以  $v$  为初始方向的测地线 (存在且唯一), 在测地线上取一点  $q$ , 使得沿着测地线从  $p$  点到  $q$  点的曲线弧长为  $\epsilon$ 。构造**指数映射**  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  满足

$$\exp_p : v \mapsto q \quad (2.95)$$

可以证明,  $\exp_p$  在小邻域内时一个微分同胚。

设  $\{y^1, y^2\}$  为  $q$  点对应的坐标, 称为**法坐标**, 即映射

$$\text{坐标表示} : q \mapsto \{y^1, y^2\}$$

**定义 2.7.2.** 在切空间  $T_p M$  中, 取  $p$  为原点的么正标架  $\{p = O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ , 称为**法坐标系**。

**注记 2.7.4.** 坐标系本质上是点与有序数组的一一对应, 即坐标卡表示、流形上的推出。

记  $v_0 = \frac{v}{\epsilon} = y_0^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ , 则  $\exp_p(tv_0), (t > 0)$  小范围内为测地线, 并且有表示

$$(tv_0) = (ty^1, ty^2), \quad q_t \mapsto tv_0 \quad (2.96)$$

于是线性方程

$$\begin{cases} y^1 = ty_0^1 \\ y^2 = ty_0^2 \end{cases} \quad (2.97)$$

为测地线的参数方程。

**定理 2.7.1.** 在法坐标系下, 有

$$g_{11}(p) = g_{22}(p) = 1, \quad g_{12}(p) = g_{21}(p) = 0 \quad (2.98)$$

且

$$\frac{g_{\alpha\beta}}{u^\gamma}(p) = 0 \quad (\iff \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(p) = 0) \quad (2.99)$$

证明. 设  $y^\alpha$ -线为从  $p$  点出发, 以  $\mathbf{e}_\alpha$  为初始方向的测地线, 且  $y^\alpha$  为弧长参数。则

$$\mathbf{x}_\alpha(p) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^\alpha}(p) = \mathbf{e}_\alpha$$

故

$$g_{\alpha\beta}(p) = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

可得式2.98. 再将公式2.97代入方程2.93, 可得

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dy^\alpha}{ds} \frac{dy^\beta}{ds} + \frac{d^2 u^\gamma}{ds^2} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

最后根据公式2.83-公式2.85可得

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$$

□

下面考察  $p$  的小邻域内的另一种坐标表示——**测地极坐标系**。

$$\begin{array}{ccc} \{\text{么正标架}\} & \xrightarrow{\text{defeo}} & \{\text{测地极标架}\} \\ \downarrow \text{exp}_p & & \downarrow \text{exp}_p \\ q = \{y^1, y^2\} & \longrightarrow & q = \{\rho, \theta\} \end{array}$$

其中 *defeo* 指的是以  $q$  为唯一奇点的微分同胚, 即  $y^1 = \rho \cos \theta, y^2 = \rho \sin \theta$ 。我们做如下断言:

1.  $\theta$  为常数时,  $\rho$  在切空间  $T_p M$  上为以  $p$  为起点的射线;  $\text{exp}_p(\rho)$  为以  $p$  为起点  $\theta$  角方向的测地线。
2.  $\rho$  为常数时,  $\theta$  为以  $p$  为圆心的同心圆;  $\text{exp}_p(\theta)$  为以  $\rho$  为半径的测地圆。

记  $u^\alpha = y^\alpha; \bar{u}^1 = \rho, \bar{u}^2 = \theta$ , 记邻域  $B_\epsilon(p) - \{p\}$  为测地极坐标邻域, 有如下定理:

**定理 2.7.2.** 在以  $p$  点为中心的测地极坐标系  $\{p; \bar{u}^1, \bar{u}^2\}$  下, 在  $B_\epsilon(p) - \{p\}$  内有

1.

$$g_{\bar{1}\bar{1}} = 1 \quad (2.100)$$

2.

$$g_{\bar{1}\bar{2}} = g_{\bar{2}\bar{1}} = 0 \quad (2.101)$$

3.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} g_{\bar{2}\bar{2}} = 0 \quad (2.102)$$

4.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{g_{\bar{2}\bar{2}}} = 1 \quad (2.103)$$

**注记 2.7.5.** 定理 2.7.1 和定理 2.7.2 说明在选取测地线作为参数曲线的第一基本形式具有如下简单的形式:

1.

$$I(p) = du^1 du^1 + du^2 du^2 \quad (2.104)$$

2.

$$I(p) = d\bar{u}^1 d\bar{u}^1 \quad (2.105)$$

3.

$$I(\bar{u}^1, \bar{u}^1) = d\bar{u}^1 d\bar{u}^1 + d\bar{u}^2 d\bar{u}^2 \quad (2.106)$$

其次, 公式 2.104 只对单点  $p$  成立; 公式 3.88 时退化的, 本质上为  $\rho = 0$  的奇性, 而曲面当然是正则的。

最后, 公式 2.101 说明在  $B_\epsilon(p) - \{p\}$  内测地线与测地圆正交, 这是著名的 *Gauss* 引理。

证明. 我们分别证明四个公式。

1. 注意到  $\rho$  为弧长, 易知  $g_{\bar{1}\bar{1}} = 1$ 。

2. 由测地线方程

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{d\bar{u}^\alpha}{ds} \frac{d\bar{u}^\beta}{ds} + \frac{d^2 \bar{u}^\gamma}{ds^2} = 0, \quad \gamma = 1, 2$$

取  $\alpha = \beta = 1, \gamma = 2$ , 有

$$\Gamma_{\bar{1}\bar{1}}^{\bar{2}} = 1$$

又

$$\Gamma_{\bar{1}\bar{1}}^{\bar{2}} = \frac{1}{2} g^{\bar{2}\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\bar{1}\alpha}}{\partial u^{\bar{1}}} + \frac{\partial g_{\alpha\bar{1}}}{\partial u^{\bar{1}}} - \frac{\partial g_{\bar{1}\bar{1}}}{\partial u^\alpha} \right\}$$

分别讨论  $\alpha = 1, 2$  可知  $\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = 0$ , 故  $g_{\rho\theta}$  与  $\rho$  无关。又

$$g_{\rho\theta} = \frac{1}{2}\rho\{\sin 2\theta(g_{22} - g_{11}) + 2\cos 2\theta g_{12}\}$$

故

$$g_{12} = \lim_{\rho \rightarrow 0} g_{\rho\theta}(\theta) = 0$$

3. 由 1.2. 可知

$$\sqrt{g_{22}} = \rho \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} \quad (2.107)$$

对上式两边令  $\rho \rightarrow 0$ , 则有

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{g_{22}} = 0$$

4. 对式 2.107 两边关于  $\rho$  求导, 得

$$\sqrt{g_{22}}_{\rho} = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} + \frac{\rho}{2\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}} \left\{ \frac{\partial(\det(g_{\alpha\beta}))}{\partial u^1} \cos \theta + \frac{\partial(\det(g_{\alpha\beta}))}{\partial u^2} \sin \theta \right\}$$

令  $\rho \rightarrow 0$ , 可得

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{g_{22}}) = 1$$

□

**例子 2.7.3.** 计算 *Gauss* 曲率  $K \equiv -\frac{1}{a^2}$  的旋转曲面。

证明. 设  $\mathbf{x} = (v \cos u, v \sin u, f(v))$  为旋转曲面, 其 *Gauss* 曲率为

$$\frac{f' f''}{v(1 + (f')^2)^2} \equiv -\frac{1}{a^2}$$

变形得

$$\frac{d(1 + (f')^2)}{(1 + (f')^2)^2} = \left(-\frac{1}{a^2}\right) d(v^2)$$

两边积分得

$$\frac{1}{1 + (f')^2} = \frac{1}{a^2} v^2 + c_1$$

不妨  $c_1 = 0$ , 于是

$$f' = \pm \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{v}$$

令  $v = a \cos \theta$ , 可得

$$df = \pm \frac{a \sin^2 \theta}{\cos \theta} d\theta$$

故

$$f = a \ln(\sec \theta + \tan \theta - \sin \theta) + c_2$$



不妨  $c_2 = 0$ , 得到

$$\begin{cases} v = a \cos \theta \\ f = a \ln(\sec \theta + \tan \theta - \sin \theta) \end{cases} \quad (2.108)$$

这是**曳物线**方程, 旋转曲面为**伪球面**.  $\square$

最后, 我们对测地线做进一步的讨论, 称测地线的挠率为**测地挠率**, 记为  $\tau_g$ . 设  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$  为曲面  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  上一条非直测地线. 由

$$\tau = -\dot{B} \cdot N = B \cdot \dot{N} = (T, N, \dot{N}) \quad (2.109)$$

又

$$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2 = k_n^2$$

以及

$$\kappa N = k_g Q + k_n \mathbf{n} = k_n \mathbf{n}$$

故  $n = \pm N$ . 不妨  $\mathbf{n} = N$ , 因此

$$\tau = -(\dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{n}) = -(\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{x}_\beta, \mathbf{n}) \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds}$$

具体而言, 即

$$\tau ds = -\{(\mathbf{n}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{n}) du^1 du^1 + [(\mathbf{n}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}) + (\mathbf{n}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{n})] du^1 du^2 + (\mathbf{n}_2, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}) du^2 du^2\}$$

计算

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{n}) = \frac{(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} = \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|}$$

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}) = \frac{(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} = \frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|}$$

$$(\mathbf{n}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{n}) = \frac{(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} = \frac{(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|}$$

$$(\mathbf{n}_2, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}) = \frac{(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} = \frac{(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|}$$

故

$$\begin{aligned} \tau ds &= \frac{-1}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} \{[(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1)] du^1 du^1 \\ &= +\{[(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)] + [(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1)]\} du^1 du^2 \\ &= +[(\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2) - (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)] du^2 du^2 \} \end{aligned}$$

整理可得

$$\tau ds = \frac{1}{\det(g_{\alpha\beta})} \begin{vmatrix} (du^1)^2 & -du^1 du^2 & (du^2)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} \quad (2.110)$$

对比公式2.62, 可得以下定理:

**定理 2.7.3.** 设  $C$  为非直测地线, 则  $C$  的测地挠率  $\tau_g = 0$  当且仅当  $C$  为曲率线。

## 第三章 $E.Cartan$ 活动标架法

**题记** “千古寸心事，欧高黎嘉陈。”——杨振宁

**引言** “活动标架法是由法国大数学家  $E.Cartan$  发扬光大的，现已成为研究为几何与几何分析的有力工具。”

### 3.1 预备知识

我们在古典曲线、曲面理论中使用的工具是自然标架，即研究曲线、曲面本身。自然标架  $\{\mathbf{x}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{n}\}$  的特点是复杂而形象，前者限制了我们从更高的观点研究几何；我们曾简单讨论过么正标架，其特点是简单而抽象，前者赋予我们更简洁的记号和更高的观点，但抽象性是需要适应的。事实上，公式2.10表示了自然标架到么正标架的转移关系，系啊没将重新揭示这一点，并且以么正标架为主进行讨论。

**注记 3.1.1.** 为现代微分几何和高维流形记号上叙述方便，并且为与古典记号有个区分，往后大标架  $\{O; \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ 、么正标架  $\{\mathbf{x}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  和大部分的向量 (值函数)  $\mathbf{x}$  (视为仿射空间  $\mathbf{E}^3$  中的点)，统一不再用粗体。

**定义 3.1.1.** 称上述  $\{\mathbf{x}; e_1, e_2, e_3\}$  为  $\mathbf{E}^3$  中一个 (以  $x$  为“原点”的一个) **活动么正标架**。 $\mathbf{E}^3$  中全体活动么正标架构成的集合称为  $\mathbf{E}^3$  的一个**标架空间**。

首先， $x \in \mathbf{E}^3$  有表示  $x = x^i E_i$ ，即  $x$  的坐标为  $(x^1, x^2, x^3)$ ，简记为  $x = (x^1, x^2, x^3)$ 。这说明  $x$  依赖于 3 个参数 (或 3 个自由度)。其次，向量  $e_i$  可视为  $O$  为起点，于是有表示

$$e_i = a_i^j E_j \quad (3.1)$$

其中  $A = \{a_i^j\}_3$  为保向正交矩阵，即  $\det A = 1$ ，记  $B = \{b_i^j\}_{3 \times 3}$  为  $A$  的逆矩阵，有  $a_i^j b_j^k = \delta_i^k$ 。

注意到  $A$  的算子正定正交，作用对应了 3 个 *Euler* 角，即对 3 个标架向量的旋

转, 故  $A$  依赖于 3 个参变量 (或 3 个自由度)。事实上, 由于  $A$  满足

$$\begin{cases} (a_1^1)^2 + (a_2^1)^2 + (a_3^1)^2 = 1 \\ (a_1^2)^2 + (a_2^2)^2 + (a_3^2)^2 = 1 \\ (a_1^3)^2 + (a_2^3)^2 + (a_3^3)^2 = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

且

$$\begin{cases} a_1^1 a_1^2 + a_2^1 a_2^2 + a_3^1 a_3^2 = 0 \\ a_1^1 a_1^3 + a_2^1 a_2^3 + a_3^1 a_3^3 = 0 \\ a_2^1 a_1^3 + a_2^2 a_2^3 + a_3^2 a_3^3 = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

也说明  $A$  仅 3 个自由度, 详见 [15] 的 P10-16。

故标架空间是一个 6 维数的空间, 即  $x$  的位置坐标和标架的旋转各自提供 3 个自由度。我们称  $\mathbf{E}^3$  中的一个**运动**为点的平移或旋转, 显然运动不改变空间中两点的距离和两向量的夹角, 且构成一个群, 称为保向的等距变换群, 记为  $M_3^+$ , 或简称  $G$ , 称  $\mathbf{E}^3$  的**运动群**。

**注记 3.1.2.** 事实上, 代数中有  $M_3^+ / (\mathbb{R}V^3, +) \cong SO(3)$ , 参见 [1] 的 P158。

给定一个活动么正标架, 运动群  $G$  的作用遍历整个标架空间, 因此  $\mathbf{E}^3$  的运动群与标架空间是一一对应的, 我们把活动么正标架看成运动群  $G$  的几何表示, 从而使标架空间与  $G$  等同。现设  $\mathbf{E}^3$  中连续可微的么正标架依赖于  $m(m \leq 6)$  个参变量  $u^1, \dots, u^m$ , 即

$$\{x(u^1, \dots, u^m); e_i(u^1, \dots, u^m)\}_{i=1,2,3} \quad (3.4)$$

这样的活动么正标架全体称为  $m$  参数的活动标架场, 其成为标架空间  $G$  的一个  $m$  维子空间。

“E.Cartan 的活动标架法的主要思想是, 通过活动标架这座桥梁, 把所研究的几何图形 (子空间) 看成  $G$  的子空间, 然后把  $G$  的性质自然地诱导到这个子空间上, 从而得到  $G$  变换下不变的几何性质。这正式 *Lie* 群在微分几何上的应用。” ——《整体微分几何初步》(沈一兵)

**例子 3.1.1.** 设  $\mathbf{E}^3$  中一条正则曲线  $C: x = x(s)$ , 为  $C$  上每点配置一个 *Frenet* 标架。

$$\{x, T, N, B\}$$

记  $e_1 = T, e_2 = N, e_3 = B$ , 则  $\{x; e_1, e_2, e_3\}$  构成单参数么正标架场。因此, 正则曲线  $C$  确定一个单参数标架场; 反过来, 一个单参数标架场的“原点”刻画出一条曲线。因此, 空间曲线可以视为运动群  $G$  的一维子空间。

**例子 3.1.2.** 设  $\mathbf{E}^3$  中一张正则曲面  $M: x = x(u^1, U^2)$ , 在其上配置一个么正标架:

$$\begin{cases} x = x(u^1, u^2) \\ e_1 = \frac{x_1}{|x_1|} \\ e_2 = \frac{x_2 - (x_2 \cdot e_1)e_1}{|x_2 - (x_2 \cdot e_1)e_1|} \\ e_3 = e_1 \times e_2 (= \mathbf{n}) \end{cases} \quad (3.5)$$

即  $\{x; e_1, e_2, e_3\}$  构成一个双参数么正标架场。反过来, 一个双参数么正标架场刻画了一张空间曲面, 于是曲面可以视为运动群  $G$  的一个二维子空间。

### 3.2 双参数下的外微分与外乘法

设  $u^1, u^2$  为两个参变量,  $du^1, du^2$  为它们的微分, 称为坐标微分。

**定义 3.2.1.** 微分  $du^1, du^2$  的  $C^\infty(u^1, u^2)$ -模线性组合

$$\omega = f_1 du^1 + f_2 du^2, \quad f_1, f_2 \in C^\infty(u^1, u^2) \quad (3.6)$$

称为一个**一次外微分形式**或 **1-形式**。

**注记 3.2.1.** 这里的  $C^\infty(u^1, u^2) : \{f(u^1, u^2) | f \in C^\infty\}$  构成一个交换环, 允许适当降低光滑性

在坐标微分之间引入**外乘法**, 记为  $\wedge$ , 使得

$$du^\alpha \wedge du^\beta = -du^\beta \wedge du^\alpha \quad (3.7)$$

蕴含

$$du^\alpha \wedge du^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

且

$$du^\alpha \wedge du^\beta \wedge du^\gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2$$

**定义 3.2.2.** 称形式

$$f du^\alpha \wedge du^\beta$$

为**二次外微分形式**或 **2-形式**。随即  $f$  称零次外微分形式。

下面考察将外乘法  $\wedge$  线性扩张到外微分空间, 令

$$\begin{cases} \omega^1 = a_1^1 du^1 + a_2^1 du^2 \\ \omega^2 = a_1^2 du^1 + a_2^2 du^2 \end{cases} \quad (3.8)$$

记  $A = \{a_i^j\}_{2 \times 2}$ , 于是有

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \det A du^1 \wedge du^2 \quad (3.9)$$

因此  $\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$  当且仅当  $\det A = 0$ , 即  $\omega^1$  与  $\omega^2$  相差一个因子, 称此时  $\omega^1$  与  $\omega^2$  线性相关。

**定义 3.2.3.** 称  $d$  为一个**外微分算子**, 满足:

1.  $df = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha$ , 即为  $f$  的全微分;
2.  $d\omega = d(a_\alpha du^\alpha) := (da_\alpha) \wedge du^\alpha = \frac{\partial a_\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta \wedge du^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(u^1, u^2)$

以下定理在外微分理论中相当重要, 与经典代数拓扑也有联系, 参见 [5], 我们先介绍它的一个简单版本。

**定理 3.2.1** (*Poincare* 引理).

$$d^2 = 0$$

证明. 只验证  $d^2 f = 0$ , 考察

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta + \sum_{\alpha > \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta - \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} du^\alpha du^\beta \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right) du^\alpha du^\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

此外, 对任一微分形式  $\omega$  与其组合  $f\omega$ , 考察外微分算子  $d$  的作用:

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega \quad (3.10)$$

同时

$$d(\omega f) = f d\omega + \omega \wedge df = -df \wedge \omega + f d\omega \quad (3.11)$$

下面将外微分作用域么正标架  $\{x(u); e_i(u)\}_{i=1,2,3}$ ,  $u = (u^1, \dots, u^m), (m \leq 6)$ , 其关于固定标架  $\{O; E_1, E_2, E_3\}$  的表示为

$$\begin{cases} x = x^i E_i \\ e_i = \alpha_i^j E_j \end{cases} \quad (3.12)$$

对方程组3.12作用外微分算子  $d$ , 可得

$$\begin{cases} dx = dx^i E_i \\ e_i = d\alpha_i^j E_j \end{cases} \quad (3.13)$$

从几何上看, 点  $x(u)$  发生运动成为  $x(u + \Delta u)$ , 即

$$\begin{cases} x(u) \mapsto x(u + \Delta u) \\ e_i(u) \mapsto e_i(u + \Delta u), \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

令  $\Delta u \rightarrow 0$ , 可得

$$\begin{cases} x(u) \mapsto x(u) + dx \\ e_i(u) \mapsto e_i(u) + de_i, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.14)$$

即  $d$  的作用为“微小运动”。

现在又  $E_i = b_i^j e_j$ , 带入方程组3.13, 可得

$$\begin{cases} dx = dx^i b_i^j e_j \\ de_i = da_i^j b_j^k e_k \end{cases} \quad (3.15)$$

记  $\omega^j = dx^i b_i^j$ ,  $\omega_i^k = da_i^j b_j^k$ 。

考察

$$\omega^j = dx^i b_i^j = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} b_i^j du^\alpha := \Gamma_\alpha^j(u) du^\alpha$$

以及

$$\omega_i^k = da_i^j b_j^k = \frac{\partial a_i^j}{\partial u^\alpha} b_j^k du^\alpha := \Gamma_{i\alpha}^k(u) du^\alpha$$

故  $\omega_i$  和  $\omega_i^k$  为 1- 形式。

**定义 3.2.4.** 称

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i \\ de_i = \omega_i^j e_j, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.16)$$

为么正标架的**运动方程**,  $\omega_i$  和  $\omega_i^k$  称为**无穷小运动分量**。

其二, 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

回忆注记1.1.3处的断言以及公式1.14, 这个矩阵是反对称的, 即只有 3 个有效分量。事实上,  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ , 对其作用微分算子  $d$  后可得

$$de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = 0$$

带入无穷小运动分量有

$$\omega_i^k (e_k \cdot e_j) + e_i \cdot (\omega_j^k e_k) = 0$$

注意到  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ , 于是

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (3.17)$$



即

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ -\omega_1^2 & 0 & \omega_2^3 \\ -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

连同方程组3.16, 共 6 个有效分量, 再次验证了标架空间的维数!

因此, 运动方程的完整写法为

$$\boxed{\begin{cases} dx = \omega^i e_i \\ de_i = \omega_i^j e_j, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}} \quad (3.19)$$

其中  $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ 。

此时, 第一基本形式表达为

$$ds^2 = |dx|^2 = (\omega^\alpha e_\alpha)^2 = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + (\omega_3)^2 \quad (3.20)$$

一个自然的问题是, 方程组3.19是否决定一个几何对象, 其次, 这个几何对象是否唯一? 这是一个微分方程的问题, 前者归结为 *Frobenius* 定理, 后者目前可以解决。

**注记 3.2.2.** 由于此前将几何对象域标架场等同, 因而问题转化为标架场  $\{x, e_i\}_{i=1,2,3}$  的存在唯一性。

**定理 3.2.2.** 给定两个  $m(m \leq 6)$  参数的活动么正标架场

$$\{x; e_i\}_{i=1,2,3}, \quad \{\bar{x}; \bar{e}_i\}_{i=1,2,3}$$

相应的无穷小运动分量为  $\{\omega^i, \omega_i^j\}$  和  $\{\bar{\omega}^i, \bar{\omega}_i^j\}$  满足  $\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \bar{\omega}_i^j + \bar{\omega}_j^i = 0$ 。若

$$\omega^i = \bar{\omega}^i, \quad \omega_i^j = \bar{\omega}_i^j$$

成立, 那么两个标架场至多相差一个运动。

证明. 取定  $u_0 = (u_0^1, \dots, u_0^m)$ , 对应  $x(u_0) \in \mathbf{E}^3$ 。让  $\bar{x}(u_0)$  平移至  $x(u_0)$  且  $\bar{e}_i(u_0)$  通过旋转与  $e_i(u_0)$  重合, 记为

$$\begin{cases} x(u_0) = \bar{x}(u_0) \\ e_i(u_0) = \bar{e}_i(u_0) \end{cases} \quad (3.21)$$

在大标架  $\{O, E_1, E_2, E_3\}$  下, 以上两组活动标架分别由表示

$$\begin{cases} x(u) = x^i(u) E_i \\ e_i(u) = a_i^j(u) E_j \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{x}(u) = \bar{x}^i(u) E_i \\ \bar{e}_i(u) = \bar{a}_i^j(u) E_j \end{cases} \quad (3.22)$$

由公式3.21知它们在  $u_0$  处相等, 即

$$\begin{cases} x_i(u) = \bar{x}^i(u)E_i \\ a_i^j(u) = \bar{a}_i^j(u)E_j \end{cases} \quad (3.23)$$

下证对任意的  $u$  都成立。注意到  $de_i(u) = d(a_i^j(u))E_j$ , 而

$$de_i(u) = \omega_i^j e_j = \omega_i^j a_j^k E_k$$

故

$$da_i^k(u) = \omega_i^j a_j^k(u)$$

同理

$$d\bar{a}_i^k(u) = \omega_i^j \bar{a}_j^k(u)$$

而  $a_i^k a_i^l = \delta^{kl}$ , 考察

$$d(a_i^k \bar{a}_i^l) = (da_i^k) \bar{a}_i^l + a_i^k (d\bar{a}_i^l) = \omega_i^j a_j^k \bar{a}_i^l + a_i^k \omega_i^j \bar{a}_j^l = 0$$

因此  $a_i^k \bar{a}_i^l$  与  $u$  无关, 故  $a_i^k \bar{a}_i^l(u) = a_i^k \bar{a}_i^l(u_0), \forall u$ 。又

$$(a_k - \bar{a}_i^k) \bar{a}_i^l = a_i^k \bar{a}_i^l - \bar{a}_i^k \bar{a}_i^l = \delta^{kl}(u_0) - \delta^{kl}(u_0) = 0$$

由于  $\{\bar{a}_i^k\}$  可你, 上式蕴含  $a_i^k(u) = \bar{a}_i^k(u), \forall u$ 。进而  $e_i = \bar{e}_i$ , 考察

$$d(x - \bar{x}) = \omega^i e_i - \omega^i \bar{e}_i = 0$$

故  $x - \bar{x}$  与  $u$  无关, 即  $x(u) - \bar{x}(u) = x(u_0) - \bar{x}(u_0)$ 。

□

### 3.3 外微分形式引入

#### 3.3.1 *Grassman* 代数

在曾经曲线论部分的讨论中, 我们曾遇到过微分算子  $d$  作用在合适的单位正交基下有标准的反对称矩阵, 见方程1.14。此外, 在运动方程的讨论中, 也出现了反对称的结构, 如方程3.17. 这些现象启发我们构造一个 (事实上本来就有) 代数结构去叙述它们。

设  $V$  为  $\mathbb{R}$  上的  $m$  维向量空间, 对  $k \in \mathbb{N}$  个  $V$  作张量积, 记为  $T^k(V)$ , 即

$$T^k(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k \uparrow} \quad (3.24)$$

显然  $T^k(V)$  构成  $\mathbb{R}$  上的  $m^k$  维向量空间。若取  $V$  的一组基  $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_m\}$ , 于是对任意  $\xi \in V$ , 都有表示

$$\xi = \xi^\alpha \sigma_\alpha \quad (3.25)$$

进而  $T^k(V)$  的基为  $\{\sigma_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \sigma_{\alpha_k} | \alpha_1, \cdots, \alpha_k = 1, \cdots, m\}$ 。于是对任意  $T \in T^k(V)$ , 都有表示

$$T^{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \sigma_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \sigma_{\alpha_k} \quad (3.26)$$

记  $k$  重置换群为  $S_k$ , 其中任一置换记为  $\sigma$ , 符号为  $\text{sgn}\sigma$ , 满足

$$\text{sgn}\sigma = \begin{cases} +1 & \sigma \text{ 为偶置换} \\ -1 & \sigma \text{ 为奇置换} \end{cases}$$

定义  $T^k(V)$  上的关心  $\sim$  满足

$$T_1 \otimes \cdots \otimes T_k \sim T_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes T_{\sigma(k)} \iff T_1 \otimes \cdots \otimes T_k + T_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes T_{\sigma(k)} = 0 \quad \text{其中 } \text{sgn}\sigma = -1$$

构造商空间  $\wedge^k(V) := T^k(V)/\sim$ , 记  $T_1 \otimes \cdots \otimes T_k$ , 记等价类为

$$T_1 \wedge \cdots \wedge T_k \quad (3.27)$$

其上被诱导一个自然的运算  $\wedge$ , 成为外乘法或外积。以上是纯代数层面的构造, 详见陈志杰. (2001). 代数基础 · 代数基础: 模, 范畴, 同调代数与层. 华东师范大学出版社. 的 P66-73. 为了显化外乘法在实际操作中的作用, 我们通过以下一个构造与线性扩张的方式来引入。

直接对  $V$  的基  $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_m\}$  定义一种乘法  $\wedge$ , 使得

1. 形式上有

$$\sigma_\alpha, \quad \alpha = 1, \cdots, m$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq m \\
& \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta \wedge \sigma_\gamma \quad 1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq m \\
& \dots \quad \dots \\
& \sigma_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \dots \wedge \sigma_{\alpha_k} \quad 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq m \\
& \dots \quad \dots \\
& \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_m
\end{aligned}$$

2. 满足反对称性, 即对任意  $k(\geq 2)$  个基向量, 有

$$\sigma_\alpha \wedge \dots \wedge \sigma_{\alpha_p} \wedge \dots \wedge \sigma_{\alpha_q} \wedge \dots \wedge \sigma_{\alpha_k} = -\sigma_\alpha \wedge \dots \wedge \sigma_{\alpha_q} \wedge \dots \wedge \sigma_{\alpha_p} \wedge \dots \wedge \sigma_{\alpha_k} \quad (3.28)$$

其中  $\alpha_1 \dots \alpha_k = 1, \dots, m$ ,  $1 \leq p < q \leq k$ ,  $2 \leq k \leq m$ 。

3. 利用线性扩张, 把上述乘法推广到整个  $V$  上, 容易验证:

(a) 对任意  $\xi = \xi^\alpha \sigma_\alpha, \eta = \eta^\alpha \sigma_\alpha$ , 有

$$\xi \wedge \eta = \sum_{\alpha < \beta} \begin{vmatrix} \xi^\alpha & \xi^\beta \\ \eta^\alpha & \eta^\beta \end{vmatrix} \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta \quad (3.29)$$

(b) 对任意  $\xi = \xi^\alpha \sigma_\alpha, \eta = \eta^\alpha \sigma_\alpha, \zeta = \zeta^\alpha \sigma_\alpha$ , 有

$$\xi \wedge \eta \wedge \zeta = \sum_{\alpha < \beta < \gamma} \begin{vmatrix} \xi^\alpha & \xi^\beta & \xi^\gamma \\ \eta^\alpha & \eta^\beta & \eta^\gamma \\ \zeta^\alpha & \zeta^\beta & \zeta^\gamma \end{vmatrix} \sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta \wedge \sigma_\gamma \quad (3.30)$$

**定义 3.3.1.** 称返祖上述条件的乘法  $\wedge$  为**外乘法**或**外积**。 $V$  中任意  $k(0 \leq k \leq m)$  个元素的外积称为一个  $k$  **重元素**, 其必形如

$$a^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \sigma_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \sigma_{\alpha_k} \quad (1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq m), \quad a^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \in \mathbb{R} \quad (3.31)$$

显然, 所有  $k$  重元素都落在以  $\{\sigma_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \sigma_{\alpha_k} | 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leq m\}$  为基的  $C_m^k$  维向量空间中, 事实上, 使用纯代数的记号, 有

$$\wedge^0(V) = \mathbb{R}$$

$$\wedge^1(V) = V$$

$$\wedge^2(V) = \text{span}\{\sigma_\alpha \wedge \sigma_\beta | 1 \leq \alpha < \beta \leq m\}$$

$$\dots \quad \dots$$

$$\begin{aligned}\wedge^k(V) &= \text{span}\{\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} | 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq m\} \\ &\quad \dots \quad \dots\end{aligned}$$

$$\wedge^m(V) = \text{span}\{\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_m\}$$

且

$$\dim \wedge^k(V) = C_m^k \quad (3.32)$$

容易发现, 外积  $\wedge$  可以被线性扩张到所有  $\wedge^k(V) (0 \leq k \leq m)$  之间, 即

$$(\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p}) \wedge (\sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q}) = \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p} \wedge \sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q} \quad (3.33)$$

同时,  $\wedge$  满足结合律与分配律, 对任意  $\varphi, \psi, \theta$  为  $p, q, r$  重元素, 以及  $a, b \in \mathbb{R}$  有

1.  $(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta = \varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$
2.  $(a\varphi + b\psi) \wedge \theta = a\varphi \wedge \theta + b\psi \wedge \theta$
3.  $\varphi \wedge (a\psi + b\theta) = a\varphi \wedge \psi + b\varphi \wedge \theta$

于是直和形式  $\bigoplus_{k=1}^m \wedge^k(V)$  构成  $\mathbb{R}$  上的一个结合的分次代数, 记为  $G(V)$ 。

**定义 3.3.2.** 称上述代数  $G(V)$  为  $\mathbb{R}$  上一个关于  $V$  的 *Grassman 代数* 或外代数。

**注记 3.3.1.**  $\dim G(V^m) = 2^m$

**命题 3.3.1.**  $G(V)$  上的外积  $\wedge$  具有以下性质:

1. 设  $\varphi \in \wedge^p(V), \psi \in \wedge^q(V)$ , 则

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi \quad (3.34)$$

2. 设  $\varphi_r = a_r^\alpha \sigma_\alpha \in \wedge^1(V), \quad 1 \leq r \leq k, 1 \leq \alpha \leq m$ , 则

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k = \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} \begin{vmatrix} a_1^{\alpha_1} & \cdots & a_1^{\alpha_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_k^{\alpha_k} & \cdots & a_k^{\alpha_k} \end{vmatrix} \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} \quad (3.35)$$

**证明.** 1. 只要验证基上的作用即可。当  $p+q > m$  时自然成立, 下证  $p+q \leq m$  的情形。令

$$\varphi = \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p}, \quad \psi = \sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q}$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi \wedge \psi &= (\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p}) \wedge (\sigma_{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q}) \\ &= (-1)^p \sigma_{\beta_1} \wedge (\sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_p}) \wedge (\sigma_{\beta_2} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\beta_q}) \\ &\quad \dots \\ &= (-1)^{pq} \psi \wedge \varphi\end{aligned}$$

2. 由

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_k &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k=1}^m a_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{\alpha_k} \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} \\
 &= \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq m} \left\{ \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} (-1)^{\sigma_k\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}} a_1^{\alpha_1} \cdots a_k^{\alpha_k} \right\} \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k} \\
 &= \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} \begin{vmatrix} a_1^{\alpha_1} & \cdots & a_1^{\alpha_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_k^{\alpha_1} & \cdots & a_k^{\alpha_k} \end{vmatrix} \sigma_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma_{\alpha_k}
 \end{aligned}$$

□

### 3.3.2 外微分形式

现在将上述事实特殊化到微分形式上。考察  $\mathbb{R}^m := \{(u^1, \dots, u^m) | u^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha = 1, \dots, m\}$ , 对每点  $u = (u^1, \dots, u^m)$  有  $m$  个独立的微分  $du^1, \dots, du^m$ , 以它们为基向量张成一个  $\mathbb{R}$  上的  $m$  维向量空间, 记为  $Lu$ , 即上述的  $V$ 。直接构造其上的 *Grassman* 代数

$$\wedge(Lu) := \bigoplus_{k=0}^m \wedge^k(Lu) \quad (3.36)$$

对任一子空间  $\wedge^k(Lu)$  的  $k$  重元素  $\varphi$ , 有

$$\varphi = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} du^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge du^{\alpha_k} \quad (3.37)$$

设  $U \subset \mathbb{R}^m$  为一开区域。

**定义 3.3.3.** 定义  $U$  上的  $k$  次外微分形式或  $k$ -形式, 对每点  $u \in U$ , 确定  $\wedge^k(Lu)$  中的一个  $k$  重元素, 且它在  $U$  上连续可微地变化。

**注记 3.3.2.** 即  $\varphi$  中的系数 (函数)  $a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \in C^1(U)$ 。

因此  $U$  上任意一个  $k$ -形式  $\omega$  可以表示为

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq m} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(u) du^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge du^{\alpha_k}, \quad u \in U \quad (3.38)$$

事实上, 式3.38的表达可以简化为如下形式:

$$\omega = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_m \leq m} \tilde{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(u) du^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge du^{\alpha_m}, \quad u \in U \quad (3.39)$$

其中  $\tilde{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(u)$  关于指标  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  是反对称的。事实上只要做如下变换:

$$a_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}}{2} + \frac{a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}}{2}$$

记  $x_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta} - a_{\beta\alpha}}{2}$ ,  $y_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}}{2}$ , 于是

$$\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq m} a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq m} y_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

后者是反对称的。

对于  $U$  中固定一点  $u$ , 式3.39中的  $\omega$  表示  $\wedge^k(Lu)$  的一个  $k$  重元素; 于是一个  $k$ -形式就是区域  $U$  上的  $k$  重元素场或  $k$  形式场, 其中 1-形式又称 *Pfaff 形式场*。

**定义 3.3.4.** 设  $\{\omega^r\}_{r=1}^p$  为区域  $U$  上  $p$  个 1-形式, 有

$$\omega^r = a_\alpha^r du^\alpha, \quad r = 1, 2, \dots, p \quad (3.40)$$

称这  $p$  个 1-形式**线性独立**或**线性无关**, 如果  $p \times m$  的矩阵  $\{a_\alpha^r\}$  的秩在  $U$  上处处为  $p$ 。

**命题 3.3.2.** 式3.40表达的  $p$  个 1-形式线性独立的充要条件是

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p \neq 0 \quad (3.41)$$

证明. 由公式3.40的表达, 有

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq m} \begin{vmatrix} a_1^{\alpha_1} & \dots & a_1^{\alpha_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_p^{\alpha_1} & \dots & a_p^{\alpha_p} \end{vmatrix} du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_p} \quad (3.42)$$

那么

$$\{\omega^r\}_{r=1}^p \text{ 线性无关} \Leftrightarrow \text{至少一个 } p \text{ 阶子式不为零} \Leftrightarrow \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^p \neq 0$$

□

**引理 3.3.1** (*Cartan 引理*). 设  $\{\omega^r, \varphi^r\}_{r=1}^p$  ( $p \leq m$ ) 为  $U$  上  $2p$  个 1-形式, 其中  $\{\omega^r\}_{r=1}^p$  线性独立, 则下述等式

$$\sum_{r=1}^p \varphi^r \wedge \omega^r = 0 \quad (3.43)$$

成立的充要条件为  $\varphi^r$  可被  $\{\omega^r\}_{r=1}^p$  **对称地**线性表出, 即

$$\varphi^r = C_s^r \omega^s \quad (3.44)$$

其中  $C_s^r = C_r^s$ ,  $r, s = 1, 2, \dots, p$ 。

证明. 充分性是显然的, 下证必要性. 先将  $\{\omega^r\}_{r=1}^p$  扩充为  $\wedge^1(Lu)(\forall u \in U)$  的一组“基”, 不妨记为  $\{\omega^s, \omega^t\}_{s=1, t=p+1}^p, m$ , 那么每个  $\varphi^r$  被它们线性表示, 即

$$\varphi^r = \sum_{s=1}^p C_s^r \omega^s + \sum_{t=p+1}^m C_t^r \omega^t$$

带入等式3.43有

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{r=1}^p \varphi^r \wedge \omega^r \\ &= \sum_{r=1}^p \left\{ \sum_{s=1}^p C_s^r \omega^s + \sum_{t=p+1}^m C_t^r \omega^t \right\} \wedge \omega^r \\ &= \left\{ \sum_{r < s} C_s^r \omega^s \wedge \omega^r + \sum_{r > s} C_s^r \omega^s \wedge \omega^r \right\} + \sum_{r=1}^p \sum_{t=p+1}^m C_t^r \omega^t \wedge \omega^r \\ &= \sum_{r < s} (C_s^r - C_r^s) \omega^s \wedge \omega^r + \sum_{r=1}^p \sum_{t=p+1}^m C_t^r \omega^t \wedge \omega^r \end{aligned}$$

注意上式中的  $\{\omega^s \wedge \omega^r, \omega^t \wedge \omega^r\}$  线性独立, 因此有

$$C_s^r = C_r^s \quad \text{且} \quad C_t^r = 0$$

□

**注记 3.3.3.** 上述证明中的  $\sum_{r,s=1}^p C_s^r \omega^s \wedge \omega^r$  的变形

$$\sum_{r < s} (C_s^r - C_r^s) \omega^s \wedge \omega^r$$

是经典的技巧, 我们曾在定理3.2.1使用过, 在证明一般形式的 *Poincare* 引理时还会用到。

**推论 3.3.1.** 设  $\omega$  为非零 1- 形式, 则 1- 形式  $\varphi$  满足  $\varphi \wedge \omega = 0$  的充要条件为  $\varphi = c\omega$ 。

**引理 3.3.2.** 设  $\{\omega^r\}_{r=1}^p$  为  $p$  个线性独立的 1- 形式,  $\Omega$  为 2- 形式, 那么

$$\Omega \equiv 0 \pmod{(\omega^1, \dots, \omega^p)} \quad (3.45)$$

的充要条件为存在  $p$  个 1- 形式  $\{\varphi^r\}_{r=1}^p$  使得

$$\Omega = \sum_{r=1}^p \omega^r \wedge \varphi^r \quad (3.46)$$

**注记 3.3.4.** 式3.45表示:  $\Omega$  为  $\{\omega^r\}_{r=1}^p$  的代数推论, 即  $\omega_1 = \dots = \omega^p = 0$  蕴含  $\Omega = 0$ 。



证明. 充分性是显然的, 下证必要性. 先将  $\{\omega^r\}_{r=1}^p$  扩充为一组基,  $\{\omega^r\}_{r=1}^m$ , 那么  $\wedge^2(Lu)$  的一组基为

$$\omega^s \wedge \omega^t \quad 1 \leq s, t \leq p; \quad \omega^s \wedge \omega^\lambda \quad 1 \leq s \leq p, p+1 \leq \lambda \leq m; \quad \omega^\lambda \wedge \omega^\mu \quad p+1 \leq \lambda, \mu \leq m \quad (3.47)$$

于是  $\Omega$  可由其线性表出, 即

$$\Omega = \sum_{1 \leq s \leq p} C_{st} \omega^s \wedge \omega^t + \sum_{s=1}^p \sum_{\lambda=p+1}^m C_{\lambda\mu} C_{\lambda\mu} \omega^\lambda \wedge \omega^\mu$$

由于  $\Omega \equiv 0 \pmod{(\omega^1, \dots, \omega^p)}$ , 可得  $C_{\lambda\mu} = 0$ ,  $p+1 \leq \lambda < \mu \leq m$ , 即

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{1 \leq s < t \leq p} C_{st} \omega^s \wedge \omega^t + \sum_{s=1}^p \sum_{\lambda=p+1}^m C_{s\lambda} \omega^s \wedge \omega^\lambda \\ &= \sum_{1 \leq s < t \leq p} \left( \frac{1}{2} C_{st} \right) (2\omega^s \wedge \omega^t) + \sum_{s=1}^p \sum_{\lambda=p+1}^m C_{s\lambda} \omega^s \wedge \omega^\lambda \\ &= \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \frac{1}{2} C_{st} \omega^s \wedge \omega^t + \sum_{s=1}^p \sum_{\lambda=p+1}^m C_{s\lambda} \omega^s \wedge \omega^\lambda \\ &= \sum_{s=1}^p \omega^s \wedge \left\{ \sum_{t=1}^p \frac{1}{2} C_{st} \omega^s \wedge \omega^t + \sum_{\lambda=p+1}^m C_{s\lambda} \omega^s \wedge \omega^\lambda \right\} \end{aligned}$$

取  $\varphi = \left\{ \sum_{t=1}^p \frac{1}{2} C_{st} \omega^s \wedge \omega^t + \sum_{\lambda=p+1}^m C_{s\lambda} \omega^s \wedge \omega^\lambda \right\}$  即可。  $\square$

下面我们将双参数的外微分算子推广到一般参数。用  $\wedge^k(U)$  表示  $\mathbb{R}^>$  中区域  $U$  上的  $k$ -形式, 并记

$$\wedge(U) := \bigoplus_{k=0}^m \wedge^k(U) \quad (3.48)$$

其中元素, 即  $k$ -形式记为

$$\omega = a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(u) du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k} \quad (3.49)$$

**定义 3.3.5.** 称  $\wedge(U)$  上的外微分算子  $d$  为映射

$$d: \wedge^k(U) \rightarrow \wedge^{k+1}(U) \quad (3.50)$$

对公式3.49中的  $k$ -形式  $\omega$  作用  $d$ , 有

$$d\omega = da_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \wedge du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k} = \frac{\partial a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial u^\beta} du^\beta \wedge du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k} \in \wedge^{k+1}(U) \quad (3.51)$$

**注记 3.3.5.** 若  $f \in \wedge^0(U) = C^\infty(U)$ , 则  $df = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} du^\alpha$ 。若  $\varphi \in \wedge^m(U)$ , 则  $d\varphi = 0$ 。

**命题 3.3.3.** 外微分算子  $d$  具有如下性质:

1. **ℝ-线性性**: 设  $\phi, \psi$  为任意两个微分形式, 则

$$d(\phi \pm \psi) = d\phi \pm d\psi \quad (3.52)$$

2. 若  $\omega \in \wedge^k(U)$ ,  $\varphi$  为任一微分形式, 则

$$d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi \quad (3.53)$$

证明. 第一条是显然的, 下证第二条。设

$$\omega = a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k}$$

$$\varphi = b_{\beta_1 \dots \beta_l} du^{\beta_1} \wedge \dots \wedge du^{\beta_l}$$

于是

$$\omega \wedge \varphi = a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} b_{\beta_1 \dots \beta_l} (du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k}) \wedge (du^{\beta_1} \wedge \dots \wedge du^{\beta_l})$$

因此

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \varphi) &= \frac{\partial}{\partial u^\gamma} \{a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} b_{\beta_1 \dots \beta_l}\} (du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k}) \wedge (du^{\beta_1} \wedge \dots \wedge du^{\beta_l}) \\ &= \left\{ \frac{\partial a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial u^\gamma} du^\gamma b_{\beta_1 \dots \beta_l} + \frac{\partial a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial u^\gamma} b_{\beta_1 \dots \beta_l} du^\gamma \right\} (du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k}) \wedge (du^{\beta_1} \wedge \dots \wedge du^{\beta_l}) \\ &= d\omega \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge d\varphi \end{aligned}$$

□

**定理 3.3.1** (*Poincare* 引理).

$$d^2 = 0$$

证明. 直接验证

$$\begin{aligned} d^2 \omega &= d(d\omega) \\ &= \frac{\partial^2 a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} du^\gamma \wedge du^\beta \wedge du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k} \\ &= \left\{ \sum_{\gamma \leq \beta} \left( \frac{\partial^2 a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial u^\beta \partial u^\gamma} - \frac{\partial^2 a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial u^\gamma \partial u^\beta} \right) du^\gamma du^\beta \right\} du^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge du^{\alpha_k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

对一个外微分形式  $\omega$ , 若  $d\omega = 0$ , 则称  $\omega$  为**闭形式**, 这样的  $\omega$  的集合记为  $Z^k(U)$ 。  
若存在  $\beta \in \wedge^{k-1}$  使得  $d\beta = \omega$ , 则称  $\omega$  为**恰当形式**, 这样的  $\omega$  的集合记为  $B^k(U)$ 。

**注记 3.3.6.** 注意到恰当形式一定是闭形式, 因为  $d^2 = \omega$ , 故恰当形式又称“恰当闭形式”, 从而

$$B^k(U) \subset Z^k(U) \quad (3.54)$$

一个自然的问题是: 闭形式一定是恰当形式吗? 答案是否定的, 事实上我们有:

**例子 3.3.1.** 在区域  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  上定义一个 1- 形式

$$\omega = \frac{-v}{u^2 + v^2} du + \frac{u}{u^2 + v^2} dv \quad (3.55)$$

易知  $\omega$  为闭形式。但不恰当, 事实上, 存在  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  的函数

$$f = \arctan \frac{v}{u}, \quad g = -\operatorname{arccot} \frac{u}{v}$$

使得  $df = dg = \omega$ , 但它们都不是连续函数。

**注记 3.3.7.** 事实上我们可以证明, 闭形式在局部 (星型区域) 一定是恰当的; 再通过 *de Rham* 上同调群的同伦不变性可知在单连通区域上一定是恰当的, 为此我们回忆数学分析 (或微分流形) 中的概念。

下面考察微分形式的积分。首先在平面单区域  $\Omega$  上的 *Green* 公式为

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \quad (3.56)$$

此时区域  $\Omega$  诱导了边界曲线  $\partial\Omega$  的定向, 我们把  $dxdy$  定向取为  $dx \wedge dy$ , 则 *Green* 公式改写为

$$\int_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad (3.57)$$

其中  $dx \wedge dy$  为带定向的面积元。用微分形式叙述, 记  $\omega = Pdx + Qdy$  为  $\Omega$  上的 1- 形式, 则

$$d\omega = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \quad (3.58)$$

从而 *Green* 公式改写为

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega \quad (3.59)$$

**注记 3.3.8.** 公式 3.59 本质上为 *Stokes* 公式, 可以向高维 (可定向) 流形推广, 同时支持一般的微分形式。我们叙述一个一般的版本, 证明需要引入微分流形的工具才能彻底解决, 有兴趣的读者可以参考 [2, 14, 16, 8]。

**定理 3.3.2** (*Stokes* 定理). 设  $M$  为  $\mathbf{E}^n$  中一个  $p$  ( $1 \leq p \leq m$ ) 维可定向区域,  $\partial M$  为其边界,  $\dim \partial M = p - 1$ , 其定向由  $M$  的定向诱导。若  $\omega$  为  $M$  上的  $(p - 1)$ - 形式, 则有

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega \quad (3.60)$$

### 3.4 可积系统

#### 3.4.1 $\mathbb{E}^3$ 中的结构方程

我们先前介绍了  $\mathbb{E}^3$  中关于活动标架  $\{x; e_i\}_{i=1}^3$  的运动方程

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i \\ de_i = \omega_i^j e_j, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

使得  $\omega^i, \omega_i^j$  为 1-形式, 其中  $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ 。(最后一个条件等价于  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ )

反过来的问题是: 给定方程组 3.4.1 和关系  $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$ , 是否存在唯一的活动标架  $\{x; e_i\}_{i=1}^3$ ? 定理 3.2.2 解决了唯一性的问题, 接下来我们引入一个重要的工具, 解决存在性的问题。在此之前, 我们进一步翻译条件。由 *Poincare* 引理, 对方程组 3.4.1 作用外微分算子  $d$ 。

1.

$$\begin{aligned} 0 = d^2 x &= d(dx) = d(\omega^i e_i) \\ &= d\omega^i e_i - \omega^i \wedge de_i \\ &= d\omega^i e_i - \omega^i \wedge \omega_i^j e_j \\ &= (d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i) e_i \end{aligned}$$

可得

$$d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j \quad (3.61)$$

2.

$$\begin{aligned} 0 = d^2 e_i &= d(de_i) = d(\omega_i^j e_j) \\ &= d\omega_i^j e_j - \omega_i^j \wedge de_j \\ &= d\omega_i^j e_j - \omega_i^j \wedge (\omega_j^k e_k) \\ &= (d\omega_i^j - \omega_j^k \wedge \omega_k^i) e_k \end{aligned}$$

可得

$$d\omega_i^k = -\omega_j^k \wedge \omega_i^j \quad (3.62)$$

记

$$\boxed{\begin{cases} d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j \\ d\omega_i^k = -\omega_j^k \wedge \omega_i^j \end{cases}} \quad (3.63)$$

**定义 3.4.1.** 称方程组3.63为  $\mathbb{E}^3$  中的**结构方程**。

**注记 3.4.1.** 3.63 为 3.4.1成立的必要条件, 后面我们将说明3.63是充分条件的一部分。

我们先抛出本节的“终极问题”: 若 6 个 1-形式  $\omega^i, \omega_i^j$ , 使得

$$1) \quad d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j$$

2)

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j \\ d\omega_i^k = -\omega_j^k \wedge \omega_i^j \end{cases}$$

是否存在活动标架场  $\{x; e_i\}_{i=1}^3$ , 使得上述  $\omega^i, \omega_i^j$  为无穷小运动分量。

### 3.4.2 *Frobenius* 定理

设  $U \subset \mathbb{R}^N$  为一单连通区域, 给定其上  $p(p < N)$  个独立的 1-形式

$$\varphi^r = a_\alpha^r(u) du^\alpha, \quad r = 1, \dots, p \quad (3.64)$$

其中,  $u = (u^1, \dots, u^N) \in U$ , 作方程组

$$\varphi^r = 0, \quad r = 1, \dots, p \quad (3.65)$$

称为  $U$  上的一个 Pfaff 方程组。

注意到3.64式中  $p$  个 1-形式线性无关。不妨假设矩阵  $\{a_\alpha^r\}_{p \times N}$  中的前一个  $p$  阶子式  $\{a_s^r\}_{p \times p}$  满秩。有表示

$$\varphi^r = \sum_{s=1}^p a_s^r du^s + \sum_{\lambda=p+1}^N a_\lambda^r du^\lambda, \quad r = 1, \dots, p \quad (3.66)$$

**定义 3.4.2.** 若  $\mathbb{E}^N$  中一张  $(N-p)$  维的曲面  $M$ :

$$u^r = u^r(u^{p+1}, \dots, u^N), \quad r = 1, \dots, p \quad (3.67)$$

使得上述函数  $u^r = u^r(u^{p+1}, \dots, u^N)$  代入3.66式的  $\varphi^r$ , 并代入3.65的 Pfaff 方程组, 有

$$\begin{aligned} \varphi^r &= \sum_{s=1}^p a_s^r(u) du^s + \sum_{\lambda=p+1}^N a_\lambda^r(u) du^\lambda \\ &= a_s^r(u^{p+1}, \dots, u^N) \frac{\partial u^s}{\partial u^\lambda} du^\lambda + \sum_{\lambda=p+1}^N a_\lambda^r(u^{p+1}, \dots, u^N) du^\lambda \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

则称  $M$  为 Pfaff 方程组3.65的积分曲面,  $M$  的方程3.67为偏微分方程组3.65的解。

**定理 3.4.1.** (*Frobenius* 定理) Pfaff 方程组3.66完全可积的充要条件为

$$d\varphi^r \equiv 0 \pmod{(\varphi^1, \dots, \varphi^p)} \quad (3.69)$$

**注记 3.4.2.** 由引理 3.3.2, 3.69 等价于  $d\varphi^r = \sum_{s=1}^p \varphi_s^r \wedge \varphi^s$ 。

证明. 按上述的讨论, 将  $\varphi^r$  表示为

$$\varphi^r = \sum_{s=1}^p a_s^r du^s + \sum_{\lambda=p+1}^N a_\lambda^r du^\lambda \quad (3.70)$$

其中  $\{a_s^r\}_{n \times n}$  可逆, 记  $\{b_s^r\}$  为其逆矩阵. 式 3.70 两边同乘  $b_r^t$ , 并对  $r$  求和, 有

$$\begin{aligned} b_r^t \varphi^r &= b_r^t a_s^r du^s + b_r^t a_\lambda^r du^\lambda \\ \omega^t &\triangleq \delta_s^t du^s + C_\lambda^t du^\lambda = du^t + C_\lambda^t du^\lambda, \quad t = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.71)$$

其中  $\omega^t = b_r^t \varphi^r$ ,  $C_\lambda^t = b_r^t a_\lambda^r$ ,  $t = 1, \dots, p$ ,  $\lambda = p+1, \dots, N$ . 则

$$(Pfaff)\varphi^r \equiv 0 \Leftrightarrow \omega^r \equiv 0, \quad r = 1, \dots, p \quad (3.72)$$

而

$$\begin{aligned} \omega^r \equiv 0 &\Leftrightarrow du^r \equiv -C_\lambda^r du^\lambda = -C_\lambda^r \frac{\partial u^\lambda}{\partial u^r} du^r \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial u^r}{\partial u^\lambda} \equiv -C_\lambda^r(u) \end{aligned} \quad (3.73)$$

这里方程 3.73 为一阶偏微分方程组, 即

$$\frac{\partial u^r}{\partial u^\lambda} \equiv -C_\lambda^r(u), \quad r = 1, \dots, p, \quad \lambda = p+1, \dots, N \quad (3.74)$$

其可积的充要条件为

$$\frac{\partial^2 u^r}{\partial u^\mu \partial u^\lambda} = \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^\lambda \partial u^\mu}, \quad r = 1, \dots, p, \quad \lambda = p+1, \dots, N \quad (3.75)$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^\mu \partial u^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial u^\mu} \left( \frac{\partial u^r}{\partial u^\lambda} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\mu} (-C_\lambda^r(u)) \\ &= -\frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^t} \frac{\partial u^t}{\partial u^\mu} - \frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^\mu} \\ &\stackrel{(3.74)}{=} -\frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^t} C_\mu^t - \frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^\mu} \\ \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^\lambda \partial u^\mu} &= \frac{\partial}{\partial u^\lambda} \left( \frac{\partial u^r}{\partial u^\mu} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\lambda} (-C_\mu^r(u)) \\ &= -\frac{\partial C_\mu^r}{\partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial C_\mu^r}{\partial u^\lambda} \\ &\stackrel{(3.74)}{=} -\frac{\partial C_\mu^r}{\partial u^s} C_\lambda^s - \frac{\partial C_\mu^r}{\partial u^\lambda} \end{aligned}$$

其中,  $r, s, t = 1, \dots, p$ ,  $\lambda, \mu = p+1, \dots, N$ , 故

$$\frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^t} C_\mu^t - \frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^\mu} = \frac{\partial C_\mu^r}{\partial u^s} C_\lambda^s - \frac{\partial C_\mu^r}{\partial u^\lambda} \quad (3.76)$$

我们来验证这一点。

对等式3.72两边作用外微分算子  $d$

$$\begin{aligned} d\omega^r &\stackrel{(3.71)}{=} d(b_t^r \varphi^t) \\ &= db_t^r \wedge \varphi^t + b_t^r d\varphi^t \end{aligned} \quad (3.77)$$

由引理3.3.2, 条件3.69等价于

$$d\varphi^t = \sum_s \varphi_s^t \wedge \varphi^s \quad (3.78)$$

进而

$$\begin{aligned} d\omega^r &= db_t^r \wedge \varphi^t + b_t^r \sum_s \varphi_s^t \wedge \varphi^s \\ &= (db_t^r + b_s^r \varphi_t^s) \wedge \varphi^t \\ &= (db_t^r + b_s^r \varphi_t^s) \wedge a_h^t \omega^h \\ &= \{a_h^t db_t^r + a_h^t db_s^r \varphi_t^s\} \wedge^h \\ &= 0 \mod(\omega^1, \dots, \omega^p) \end{aligned} \quad (3.79)$$

而

$$\begin{aligned} d\omega^r &\stackrel{(3.71)}{=} d(du^r) + dC_\lambda^r \wedge du^\lambda \\ &= 0 + dC_\lambda^r \wedge du^\lambda + 0 \\ &= \frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^t} du^t \wedge du^\lambda + \frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^\mu} du^\mu \wedge du^\lambda \\ &\stackrel{(3.71)}{=} \frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^t} \{\omega^t - C_\mu^t du^\mu\} \wedge du^\lambda + \frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^\mu} du^\mu \wedge du^\lambda \\ &= -\frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^t} du^\lambda \wedge \omega^t + \{-\frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^t} C_\mu^t + \frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^\mu}\} du^\mu \wedge du^\lambda \\ &= -\frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^t} du^\lambda \wedge \omega^t + \sum_{p+1 \leq \lambda < \mu \leq N} \{[-\frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^t} C_\mu^t + \frac{\partial C_\lambda^r}{\partial u^\mu}] + [\frac{\partial C_\mu^r}{\partial u^t} C_\lambda^t - \frac{\partial C_\mu^r}{\partial u^\lambda}]\} du^\mu \wedge du^\lambda \\ &\stackrel{(3.76)}{=} 0 \end{aligned}$$

故  $d\omega^r \equiv 0 \mod(\omega^1, \dots, \omega^p)$  与式3.76是充要的。

最后我们证明方程3.4.1的存在性

证明. 首先将 3.4.1 写成向量形式的一次微分方程

$$\begin{cases} \varphi := dx - \omega^i e_i = 0 \\ \psi_i := de_i - \omega_i^j e_j = 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

□

只要说明

$$\begin{cases} d\varphi \equiv 0 \mod(\varphi, \psi_i) \\ d\psi_i \equiv 0 \mod(\varphi, \psi_i) \end{cases} \quad (3.81)$$

由 Frobenius 定理中证。

直接验证

$$\begin{aligned} d\varphi &= -d(\omega^i e_i) \\ &= -d\omega^i e_i + \omega^i de_i \\ &\stackrel{(3.80)}{=} -d\omega^i e_i + \omega^i \wedge (\psi_i + \omega_i^j e_j) \\ &= \omega^i \wedge \psi_i + (-d\omega^i + \omega^i \wedge \omega_i^j) e_j \\ &\stackrel{(3.63)}{=} \omega^i \wedge \psi_i \end{aligned} \quad (3.82)$$

及

$$\begin{aligned} d\psi_i &= -d(\omega_i^j e_j) \\ &= -d\omega_i^j e_j + \omega_i^j \wedge de_j \\ &\stackrel{(3.80)}{=} -d\omega_i^j e_j + \omega_i^j \wedge (\psi_j + \omega_j^k e_k) \\ &= \omega_i^j \wedge \psi_j + (-d\omega_i^j + \omega_i^j \wedge \omega_j^k) e_k \\ &\stackrel{(3.63)}{=} \omega_i^j \wedge \psi_j \end{aligned} \quad (3.83)$$

得证。 □

因此，我们总结出以下定理：

**定理 3.4.2.** 任给一个初始条件

$$x(u_0) = x_0, e_i(u_0) = (r_i)_0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.84)$$

满足结构方程 3.63，举办存在一  $m(m \leq 6)$  参数活动么证标架场

$$\{\mathbf{x}(u); e_i(u)\}_{i=1}^3, \quad (3.85)$$

使得当  $u = u_0$  时，满足初始条件。其无穷小运动分量为给定的  $\omega^i, \omega_i^j$ ，且场 3.85 在  $\mathbb{E}^3$  中运动意义下唯一。



### 3.5 曲线和曲面的基本理论

#### 3.5.1 曲线论基本定理

现在我们为定理1.2.1写一个简单的证明。

证明. 在  $\mathbb{R}$  中考虑如下 Pfaff 方程组

$$\begin{cases} dx = ds e_1 \\ de_1 = \bar{k} ds e_2 \\ de_2 = -\bar{k} ds e_1 + \bar{\tau} ds e_3 \\ de_3 = -\bar{\tau} ds e_2 \end{cases} \quad (3.86)$$

其中  $\bar{k}(>0), \bar{\tau}$  是关于  $s$  的连续函数。 $x; e_1, e_2, e_3$  为关于  $x$  的位置函数。(事实上, 由 ODE 理论, 方程组存在解, 给定初值以后有唯一解) 下面利用 Frobenius 定理。

考察以下的方程组

$$\begin{cases} \varphi = dx - ds e_1 \\ \psi_1 = de_1 - \bar{k} ds e_2 \\ \psi_2 = de_2 + \bar{k} ds e_1 - \bar{\tau} ds e_3 \\ \psi_3 = de_3 + \bar{\tau} ds e_2 \end{cases} \quad (3.87)$$

考虑

$$\begin{aligned} d\varphi &= d(dx - ds e_1) \\ &= 0 - (0 - ds \wedge de_1) \\ &= ds \wedge (\psi_1 + \bar{k} ds e_2) \\ &= ds \wedge \psi_1 \equiv 0 \quad \text{mod}(\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\psi_1 &= d(de_1 - \bar{k} ds e_2) \\ &= 0 - \left\{ \frac{d\bar{k}}{ds} ds \wedge ds e_2 - \bar{k} ds \wedge de_2 \right\} \\ &= \bar{k} ds \wedge (\psi_2 + \bar{k} ds e_1 + \bar{\tau} ds e_3) \\ &= \bar{k} ds \wedge \psi_3 \equiv 0 \quad \text{mod}(\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\psi_2 &= d(de_2 + \bar{k} ds e_1 - \bar{\tau} ds e_3) \\ &= 0 - \left\{ \frac{d\bar{k}}{ds} ds \wedge ds e_2 - \bar{k} ds \wedge de_2 \right\} \\ &= \bar{k} ds \wedge (\psi_2 + \bar{k} ds e_1 + \bar{\tau} ds e_3) \\ &= \bar{k} ds \wedge \psi_3 \equiv 0 \quad \text{mod}(\varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \end{aligned}$$

□

### 3.5.2 利用活动么正标架研究曲面

现在将公式3.4中的  $m$  特殊化为 2, 即在双参数意义下的活动标架  $\{x; e_1, e_2, e_3\}$ 。有参数网  $(u^1, u^2)$ 。确定一张抽象曲面  $M$ 。

首先考察

$$dx = \omega^i e_i = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3$$

而  $dx \in \text{span}\{e_1, e_2\}$ 。故

$$\omega^3 = 0 \quad (3.88)$$

从而

$$dx = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \quad (3.89)$$

于是  $M$  的第一基本形式为

$$I = |dx|^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 \quad (3.90)$$

若选取正交参数网  $(u^1, u^2)$ , 则有

$$dx = x_\alpha du^\alpha = x_1 du^1 + x_2 du^2$$

那么这里

$$e_1 = \frac{x_1}{|x_1| = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}}}, \quad e_2 = \frac{x_2}{|x_2| = \frac{x_2}{\sqrt{g_2}}}$$

故

$$dx = \sqrt{g_{11}} du^1 e_1 + \sqrt{g_{22}} du^2 e_2 \quad (3.91)$$

此时

$$\omega^1 = \sqrt{g_{11}} du^1, \quad \omega^2 = \sqrt{g_{22}} du^2$$

**注记 3.5.1.**  $\omega^1, \omega^2$  是抽象的、一般意义下的表示, 选取不用的参数网,  $\omega^1, \omega^2$  会有不同的具体表示。我们选择一般参数  $(u^1, u^2)$ , 只要取

$$e_1 = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$e_2 = \frac{x_2 - (x_1 \cdot e_1)e_1}{|x_2 - (x_1 \cdot e_1)e_1|}$$

这与公式2.10的讨论如出一辙, 这里就不再赘述了, 并且可见  $\omega^1, \omega^2$  为内蕴量。

在正交参数网下, 我们有

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} du^\alpha du^\beta \quad (3.92)$$

这里  $\omega^1 \wedge \omega^2$  为  $M$  的有向面积元。

**注记 3.5.2.** 公式3.92对一般参数也成立。

此外, 考察

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i \\ de_i = \omega_i^j e_j, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

其完全可积当且仅当  $\omega^i, \omega_i^j$  满足结构方程

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j \\ d\omega_i^j = -\omega_k^j \wedge \omega_i^k \end{cases}$$

进而

$$d\omega^1 = -\omega_2^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = -\omega_1^2 \wedge \omega^1 \quad (3.93)$$

由  $\omega_1^2 = -\omega_2^1$  可以证明  $\omega_1^2$  被  $\omega^1, \omega^2$  线性表示, 事实上, 可以记  $\omega_1^2 = p\omega^1 + q\omega^2$ , 带入等式3.93可得

$$p = \frac{d\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2}, \quad q = \frac{d\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}$$

故

$$\omega_1^2 = \frac{d\omega^1}{\omega^1 \wedge \omega^2} \omega^1 + \frac{d\omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} \omega^2 \quad (3.94)$$

因此  $\omega_1^2$  是一个内蕴量, 称为**联络 1- 形式**<sup>1</sup>。再将公式3.92带入上式, 可得

$$\omega_1^2 = -\frac{(\sqrt{g_{11}})_2}{\sqrt{g_{22}}} du^1 + \frac{(\sqrt{g_{22}})_1}{\sqrt{g_{11}}} du^2 \quad (3.95)$$

用古典记号可以表示为

$$\omega_1^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv$$

**注记 3.5.3.** 关于联络 1- 形式的线性表达在往后的计算中有重要的作用。

分析公式3.88可知

$$0 = d\omega^3 = \omega_j^3 \wedge \omega^j = -\sum_{\alpha=1}^2 \omega_\alpha^3 \wedge \omega^\alpha$$

由 *Cartan* 引理, 不妨记

$$\omega_\alpha^3 = b_{\alpha\beta} \omega^\beta \quad \text{且} \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$$

---

<sup>1</sup>这是黎曼几何的观点, 事实上结构方程在高维几何中有一般的版本, 称为 *Cartan* 结构方程。这里其实我们取的是联络是黎曼联络, 并且曲面被认为是 2 维黎曼流形, 因此结构方程在表达上是没有“常数”项的, 同时只有唯一的一个联络 1- 形式。

即

$$\begin{cases} \omega_1^3 = b_{11}\omega^1 + = b_{12}\omega^1 \\ \omega_2^3 = b_{21}\omega^1 + = b_{22}\omega^1 \end{cases} \quad b_{12} = b_{21} \quad (3.96)$$

利用第二基本形式的表达

$$\begin{aligned} II &= -dx \cdot de_3 \\ &= (\omega^\alpha e_\alpha) \cdot (\omega_3^\beta e_\beta) \\ &= -\omega_\alpha \omega_3^\beta \delta_{\alpha\beta} \\ &= \omega_\alpha^3 \omega^\alpha \\ &= b_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta \end{aligned}$$

而

$$II = h_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

而在正交参数网下

$$\omega^1 = \sqrt{g_{11}} du^1, \quad \omega^2 = \sqrt{g_{22}} du^2$$

故

$$b_{11} = \frac{h_{11}}{g_{11}}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{h_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad b_{22} = \frac{h_{22}}{g_{22}} \quad (3.97)$$

可见第二基本形式与么正标架的选取也无关。

事实上在曲率线网下我们有更简单的表达，此时有

$$II = k_1 du^1 + k_2 ku^2$$

于是

$$b_{11} = k_1, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = k_2$$

我们将在小节3.5.6中进一步讨论它。

### 3.5.3 测地曲率的 *Liouville* 公式

下面我们导出测地曲率的计算公式——*Liouville* 公式。设  $C: u^\alpha = u^\alpha(s)$  为曲面  $M$  上的曲线，其中  $s$  为其弧长参数。设  $C$  的单位切向量  $T(s)$  与  $e_1$  的夹角为  $\theta$ 。在第二章的讨论中我们已经知道

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N = k_g Q + k_n \mathbf{n} = \left\{ \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} + \frac{d^2 u^\sigma}{ds^2} \right\} \mathbf{x}_\sigma + k_n \mathbf{n}$$

因此

$$k_g = 0 \iff \left\{ \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} + \frac{d^2 u^\sigma}{ds^2} \right\} \mathbf{x}_\sigma = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

这是测地线方程，但对具体计算测地曲率  $k_g$  并不方便。

我们又知道  $Q = e_3 \times T$ ，此时  $\{x; T, Q, e_3\}$  构成右手系，故

$$\begin{cases} T = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \\ Q = -\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \end{cases} \quad (3.98)$$

而  $T = \frac{dx}{ds} = \frac{\omega^\alpha e_\alpha}{ds}$ ，故

$$\omega^1 = \cos \theta ds, \quad \omega^2 = \sin \theta ds \quad (3.99)$$

考察  $k_g = T \cdot Q$ ，利用运动方程带入整理可得

$$dT = (\omega_1^2 + d\theta)Q + (\cos \theta \omega_1^3 + \sin \theta \omega_2^3)e_3 \quad (3.100)$$

故

$$k_g = \frac{\omega_1^2 + d\theta}{ds} \quad (3.101)$$

再将公式3.95带入上式，我们有

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{(\sqrt{g_{11}})_2}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{du^1}{ds} + \frac{(\sqrt{g_{22}})_1}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{du^2}{ds}$$

注意到

$$\frac{du^1}{ds} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{g_{11}}}, \quad \frac{du^2}{ds} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{g_{22}}}$$

带入上式可得

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{(\ln g_{11})_2}{2\sqrt{g_{22}}} \cos \theta + \frac{(\ln g_{22})_1}{2\sqrt{g_{11}}} \sin \theta \quad (3.102)$$

用古典记号表达为

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{(\ln E)_2}{2\sqrt{G}} \cos \theta + \frac{(\ln G)_1}{2\sqrt{E}} \sin \theta$$

称3.102为测地曲率的 *Liouville 公式*。

又注意到

$$\frac{du^2}{du^1} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \tan \theta$$

于是测地线方程在正交参数网下可以表达为

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{du^1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} (\ln g_{11})_2 - \frac{1}{2} (\ln g_{22})_1 \tan \theta \\ \frac{du^1}{du^2} = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \tan \theta \end{cases} \quad (3.103)$$

### 3.5.4 自然标架与么正标架下方程的对比

回忆公式3.96, 利用  $\omega^3 = 0$  和结构方程我们已经刻画出

$$\omega_\alpha^3 = b_{\alpha\beta} \quad \text{且} \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$$

其中  $b_{\alpha\beta}$  是亟待刻画的几何量。并且我们已经叙述了等式

$$dT = (\omega_1^2 + d\theta)Q + (\cos\theta\omega_1^3 + \sin\theta\omega_2^3)e_3$$

注意到  $Q$  向量本质上刻画了测地曲率  $k_g$  的方向, 它是一个内蕴量, 称为测地曲率向量。这里我们转而刻画  $e_3$  的系数, 它实质上为法曲率  $k_n$ 。利用  $\omega^1 = \cos\theta ds, \omega^2 = \sin\theta ds$ , 考察

$$\begin{aligned} k_n &= (\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3)/ds^2 \\ &= (b_{11}(\omega^1)^2 + 2b_{12}\omega^1\omega^2 + b_{22}\omega^2)/ds^2 \\ &= b_{11}\cos^2\theta + 2b_{12}\cos\theta\sin\theta + b_{22}\sin^2\theta \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) & \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 \cos^2(\theta + \alpha) + \lambda_2 \sin^2(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

**注记 3.5.4.** 以上推导实质上为对矩阵  $\{b_{\alpha\beta}\}$  的对角化, 原因是我们观察到了  $\{b_{\alpha\beta}\}$  的实对称性。

故  $\{b_{\alpha\beta}\}$  的谱为

$$\{\lambda_1, \lambda_2\}$$

不难发现  $k_1 = \lambda_1, k_2 = \lambda_2$ , 这里  $k_1, k_2$  即为“曲面”的主曲率。进而其特征多项式为

$$\chi = \det(\lambda I - \{b_{\alpha\beta}\}) = \lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) \quad (3.104)$$

于是

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\text{tr}(\{b_{\alpha\beta}\}) = \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}) \quad (3.105)$$

$$K = k_1 k_2 = \det(\{b_{\alpha\beta}\}) = (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) \quad (3.106)$$

我们在么正标架下再次推导了这两个几何量。

**定理 3.5.1** (*Gauss Egregium*). *Gauss* 曲率  $K$  是一个内蕴量。

证明. 由结构方程可知

$$\begin{aligned} d\omega_1^2 &= -\omega_3^2 \wedge \omega_1^3 \\ &= (b_{21}\omega^1 + b_{22}\omega^2) \wedge (b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2) \\ &= -K\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

因此

$$K = -\frac{d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} \quad (3.107)$$

□

我们欣赏这个公式

$$\boxed{d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2} \quad (3.108)$$

它刻画了联络 1- 形式的微分可以用  $\omega^1 \wedge \omega^2$  线性表示, 其中系数正好是 *Gauss* 曲率的负值。我们将这个方程称为 *Gauss* 方程。

下面我们系统地刻画自然标架与么正标架下的同一几何量。回顾无穷小分量的运动方程, 它满足结构方程

$$\begin{cases} d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j \\ d\omega_i^k = -\omega_j^k \wedge \omega_i^j \end{cases} \quad (3.109)$$

注意到其为运动方程

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i \\ de_i = \omega_i^j e_j, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (3.110)$$

完全可积的充要条件。以下视为它们在  $m = 2$  个参数下的情形。公式3.108等价于结构方程3.109第二式中的  $i = 1, j = 2$  的情形, 即

$$d\omega_1^2 = -\omega_3^2 \wedge \omega_1^3 \iff d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2$$

再分析余下两项, 即

$$\boxed{\begin{cases} d\omega_1^3 = -\omega_2^3 \wedge \omega_1^2 \\ d\omega_2^3 = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^1 \end{cases}}$$

我们将其称为 *Codazzi* 方程。

对于结构方程3.109的第一式

$$\boxed{\begin{cases} d\omega^1 = -\omega_1^2 \wedge \omega^2 \\ d\omega^2 = -\omega_1^2 \wedge \omega^1 \end{cases}}$$

称为 *Gauss* 公式。对曲面而言,  $\omega^3 = 0$ , 其蕴含

$$\boxed{d\omega^3 = 0}$$

称为 *Weingarten* 公式。

**注记 3.5.5.** 以上用结构方程导出的 4 个方程在自然标架下皆有对应, 我们将证明它们殊途同归。

最后我们利用结构方程来解决问题。

**例子 3.5.1.** 设  $M$  为无脐点的曲面, 则  $K = 0$  蕴含  $M$  可展。

**注记 3.5.6.** 这个例子真正刻画了 (无脐点) 曲面的可展性, 并且使用唯一的内蕴量 *Gauss* 曲率来描述的。

证明. 利用公式 2.73 的结果, 只要证明此时  $M$  为直纹面即可。设  $M$  为无脐点的曲面, 其中  $K = k_1 k_2$ 。不妨  $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ 。选取曲率线网为参数网,  $u^1, u^2$ -线正交, 对应的主方向为  $e_1, e_2$ , 相应的曲率为  $k_1, k_2$ 。

下证  $u^2$ -线为直线。由于

$$\{b_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故

$$\omega_1^3 = b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2 = k_1\omega^1, \quad \omega_2^3 = b_{21}\omega^1 + b_{22}\omega^2 = 0$$

进而

$$0 = -k_1\omega^1 \wedge \omega_2^1$$

故  $\omega^1, \omega_2^1$  线性相关, 不妨

$$\omega_2^1 = a\omega^1$$

考察如下 *Pfaff* 方程组

$$\omega^1 = 0$$

其定义一族曲线  $C: x = x(s)$ , 使得

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\omega^\alpha e_\alpha}{dt} = \frac{\omega^2 e_2}{dt}$$

说明  $e_2$  为  $C$  的单位切向量, 进而

$$\frac{de_2}{dt} = \frac{\omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3}{dt} = 0$$

故  $e_3 = \text{const}$ , 因此  $u^2$ -线为直线。 □

### 3.5.5 曲面论基本定理

### 3.5.6 自然标架与么正标架下的方程对比 (续)



## 第四章 整体微分几何序章

### 4.1 整体曲线

### 4.2 平面曲线的某些整体性质

#### 4.2.1 等周不等式

#### 4.2.2 曲线的旋转指标

#### 4.2.3 旋转指标定理

### 4.3 整体曲面

### 4.4 整体 *Gauss – Bonnet* 定理

## 参考文献

- [1] Michael Artin. *Algebra*. Algebra, 1993.
- [2] William M. Boothby. An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry. *ACADEMIC PR., INC*, 1975.
- [3] Manfredo P Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*. Courier Dover Publications, 2016.
- [4] Manfredo Perdigao Do Carmo and J Flaherty Francis. *Riemannian geometry*, volume 6. Springer, 1992.
- [5] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. 清华大学出版社有限公司, 2005.
- [6] Wilhelm Klingenberg. *A course in differential geometry*, volume 51. Springer Science & Business Media, 2013.
- [7] John Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202. Springer Science & Business Media, 2010.
- [8] John M Lee and John M Lee. *Smooth manifolds*. Springer, 2012.
- [9] John Willard Milnor and David W Weaver. *Topology from the differentiable viewpoint*, volume 21. Princeton university press, 1997.
- [10] Peter Petersen. *Riemannian Geometry*. Riemannian Geometry, 1997.
- [11] 彭家贵. 微分几何. 高等教育出版社, 2021.
- [12] 沈一兵. 整体微分几何初步: 第三版. 高等教育出版社, 2009.
- [13] 白正国. 黎曼几何初步. 黎曼几何初步, 1992.
- [14] 陈维桓陈省身. 微分几何讲义. 北京大学出版社, 1983.
- [15] 陈维桓. 微分几何初步. 微分几何初步, 1990.
- [16] 陈维桓. 微分流形初步第 2 版. 微分流形初步第 2 版, 2001.