

# Summer Schedule

Zhenye Qian

2024 年 7 月 1 日

## 1 Geometry and Topology

### 1.1 Riemannian Geometry

形式 : 讨论班汇报

参考教材 :

1. 白正国. 黎曼几何初步
2. Petersen P. Riemannian geometry

其他参考资料 :

1. Do Carmo M P, Flaherty Francis J. Riemannian geometry
2. 刘世平. 黎曼几何 (讲义)
3. 于品. Riemann Geometry (讲义)
4. Lee J M. Introduction to Riemannian manifolds
5. Jost J, Jost J. Riemannian geometry and geometric analysis

课程大纲 :

1. 仿射联络与黎曼联络、曲率与挠率、共变微分
2. 曲率张量、三种曲率: 截面曲率、*Ricce* 曲率、数量曲率
3. 共形变换 (与调和形式简介)
4. 测地线、指数映射与法坐标系

5. 测地线完备性, *Hopf – Rinow* 定理
6. 弧长的第一、第二变分, *Jacobi* 场
7. 共轭点与距离极小测地线
8. 基本指标引理、*Myers* 定理、*Synge* 定理
9. *Cartan – Hadamard* 定理、割点

## 要求：

1. 要求每次非报告人学习时间大于 **5 小时**，并准备 2-3 个**问题**向报告人提问（例如：为什么这么定义？如此证明的技术细节是什么？可以做什么改进或推广？）
2. 报告人每次要求**手写讲义**（讲义上定义的叙述和定理的证明细节上都要写清楚！）主要参考教材中的大部分内容应该出现在讲义中，补充教材中跳过的细节；欢迎补充内容。这里建议自学（**5-10 小时**）完独立书写讲义，翻译成自己的话！这可能要花不少时间，但是很有收获。
3. 讲义要求：标题 + 时间 + 报告人；定义定理公式需附上索引，允许与教材一致；报告的 2-3 天之前扫描并发到群里，给成员审核的时间；非报告人需要审核讲义有无逻辑错误、有无叙述不清楚的地方、有无可以补充的地方并提问。
4. 报告完若发现讲义有错误，报告人需要及时修正讲义重新发上来；每次结束可以把讲义用 latex 打出来。
5. 我们强烈建议每个人在自学完成后独立完成一些**教材习题**；报告人可以找一些教材习题放在讨论班上讲。

## 1.2 Complex Geometry

### 课程 (2022PKU 几何暑校)

1. 1
2. 2 上
3. 2 下
4. 3
5. 4

- 6. 5
- 7. 6
- 8. 7
- 9. 8
- 10. 9
- 11. 10

### 1.3 Global Differential Geometry (Review)

形式 : 看书、讲义自学

参考教材 :

1. 沈一兵. 整体微分几何初步

其他参考资料 :

1. 刘世平. 整体微分几何讲义

内容 :

1. *Poincare – Hopf* 定理与 *Jacobi* 曲线定理
2. 凸闭曲线与空间曲线的某些整体性质
3. *Liebmann* 定理
4. 凸曲面和积分公式
5. *Minkowski* 问题和 *Christoffel* 问题的唯一性
6. 全平均曲率与 *Willmore* 猜想
7. 常负曲率曲面与 *Backlund* 变换
8. *Hilbert* 定理
9. *Hartman – Nirenberg* 定理
10. 极小曲面的 *Bernstein* 定理
11. 常平均曲率曲面

## 课程 (中科大微分几何 H)

1. 光滑切向量场的 Poincare-Hopf 定理; Jacobi 曲线定理
2. 球面的刚性: Liebmann 定理
3. 卵形面的 Hadamard 定理; 积分公式及其对球面刚性的应用
4. 卵形面的刚性: Cohn-Vossen 定理
5. Minkowski 问题; (度量) 完备曲面; Hilbert 定理 (I)
6. Hilbert 定理 (II); Willmore 猜想

### 要求 :

1. 非暑校期间 1-2 天一个内容 (有视频资料的优先掌握)。
2. 重要的定理和技术的应用需要**独立证明!**
3. 收集整体微分几何中使用的技术, 初步形成解决问题的 steps 并整理。

## 1.4 Algebraic Topology with some Homological Algebra

### Basic Topology(特别注意这一块的基础! )

形式 : 讨论班 + 自行回顾 (不多于 4 次)

### 参考资料 :

1. 尤承业, 基础拓扑学讲义, 北京大学出版社
2. M. A. Armstrong, Basic Topology, 北京大学出版社
3. J. R. Munkres, Topology, 科学出版社
4. 包志强, 点集拓扑与代数拓扑引论, 北京大学出版社

### 内容

#### 1. Topological Space and Continuous mapping

- (a) topology and topological space; metric topology, subspace topology
- (b) Continuous mapping (definition, criterion, construct?) and Homeomorphism

- (c) Product space and topological Basis
- (d) Quotient space, *Möbius* band, Projective Space (definition, construct?)

## 2. Topological Property

- (a) Separability (Hausdorff) and Countability (C2)
- (b) Metrization (*Tietze* extension theorem, *Urysohn* metrization theorem)
- (c) Compactness (some properties; Product & Quotient spaces)
- (d) bcompact space (in Metric space:  $\text{bcompact} \iff \text{compact}$ )
- (e) Connectedness (property), connected component
- (f) Path connected and Path components
- (g) 用拓扑性质判断空间的不同胚

## 3. topological Surface

- (a) Closed surface, Compact surface, Orientable or Nonorientable surface
- (b) Connected Sum and Euler Character Number  $\chi$
- (c) the Classification theorem

## Algebraic Topology

### 参考教材：

1. Hatcher. Algebraic Topology
2. 王向军. 代数拓扑 (讲义)

### 其他参考资料：

1. 周建伟. 代数拓扑讲义
2. 姜伯驹. 同调论
3. GTM82
4. Edwin H. Spanier. Algebraic Topology
5. Rotman. An Introduction to Homological Algebra

**拾遗** :

1. Homotopy and the homotopy type; CW Complex; Fundamental Group
2. Fundamental Group(How to compute it?); Covering space; Van Kampen's Theorem

**同调论** :

1. 奇异链复形与奇异同调群; 同调群的同伦不变性;  $\pi_1$  与  $H_1$  的关系
2. 相对同调群与正合序列; 切除定理
3. 切除定理; Mayer-Vietoris 定理; 同调群的应用

**同调代数 (技术)** :

1. 链复形及其同调群; 一般系数同调群
2.  $Tor$  与  $Ext$
3. 万有系数定理; Kunneth 公式
4. 奇异上同调群 (模)

**上同调理论** :

1. 上同调群的万有系数定理
2. 对偶定理: 流形的定向; Poincare 对偶定理

## **2 Analysis and Differential Equations**

### **2.1 Complex Function Theory (Review)**

**形式** : 自行回顾 (1-2 周内挑空余时间)

**参考资料** :

1. 龚昇. 简明复分析
2. 史济怀. 复变函数 (重点习题)
3. Stein. Complex Analysis (部分章节) (注意习题)

## 内容：

1. *Cauchy* 积分理论
2. *Weierstrass* 级数理论
3. *Riemann* 映射理论
4. 简单了解单复变技术在微分几何上的应用 + 多复变函数简介

## 课程 (中科大复分析 H)：

1. 1.1 复数的定义及其运算;1.2 复数的几何表示;1.3 扩充复平面与复数的球面表示;1.4 复数列的极限
2. 1.5 开集、闭集和紧集;1.6 曲线和域;1.7 复变函数的极限和连续性
3. 2.1 复变函数的导数;2.2Cauchy-Riemann 方程;
4. 2.3 导数的几何意义;2.4 初等全纯函数 (多值函数放在第 6 次课积分公式以后)
5. 3.1 复变函数的积分;3.2Cauchy 积分定理
6. 3.3 全纯函数的原函数;3.4Cauchy 积分公式;3.5Cauchy 积分公式的一些重要推论
7. 3.6 非齐次 Cauchy 积分公式;3.7 一维  $\bar{\partial}$  问题的解;4.1Weierstrass 定理
8. 4.1Weierstrass 定理;4.2 幂级数
9. Runge 逼近定理;4.3 全纯函数的 Taylor 展开
10. 4.4 辐角原理和 Rouché 定理
11. 4.4 辐角原理和 Rouché 定理 (与应用)
12. 4.5 最大模原理和 Schwarz 引理
13. 2.5 分式线性变换
14. 2.5 分式线性变换;5.1 全纯函数的 Laurent 展开
15. 5.1 全纯函数的 Laurent 展开;5.2 孤立奇点
16. 5.3 整函数与亚纯函数
17. 5.4 留数定理;5.5 利用留数定理计算定积分

18. 5.5 利用留数定理计算定积分
19. 5.6 一般域上的 Mittag-Leffler 定理、Weierstrass 因子分解定理和插值定理
20. 5.7 一般域上的 Mittag-Leffler 定理、Weierstrass 因子分解定理和 Blaschke 乘积
21. 整函数的 Jensen 公式; 有限阶整函数; 无穷乘积
22. 无穷乘积; Weierstrass 无穷乘积; Hadamard 因子分解定理
23. Hadamard 因子分解定理
24. 6.1 Schwarz 对称原理
25. 6.2 幂级数的解析延拓; 多值全纯函数与单值化定理
26. 7.1 正规族; 7.2 Riemann 映射定理
27. 7.3 边界对应定理
28. 7.4 Schwarz-Cristoffel 公式
29. 7.4 Schwarz-Cristoffel 公式
30. 期末复习

## 2.2 Partial Differential Equations

### 课程

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 10



## 2.3 Real Analysis

形式 : 自学

参考教材 :

1. 周性伟. 实变函数
2. 殷浩. 实分析讲义
3. Stein. Real Analysis

## 2.4 Functional Analysis

形式 : 讨论班先修课程 + 自学

参考教材 :

1. 许全华. 泛函分析讲义
2. John Conway. GTM 96: A Course in Functional Analysis

内容 :

1. 完备度量空间
2. 赋范线性空间和连续线性映射
3. *Hilbert* 空间
4. *Baire* 定理及其应用