

# 整体微分几何选讲

钱振烨

2024 年 7 月 3 日

## 目录

<b>1 球面的刚性：Liebmann 定理</b>	<b>2</b>
1.1 极值原理 . . . . .	2
1.2 Liebmann 定理 . . . . .	2
1.2.1 第一引理 . . . . .	3
1.2.2 第二引理：Hilbert 引理 . . . . .	4
1.3 Liebmann 定理的证明 . . . . .	5
1.4 推广 . . . . .	5
<b>2 凸曲面的 Hadamard 定理与积分公式</b>	<b>7</b>
2.1 凸曲面的刻画 . . . . .	7
2.2 Hadamard 定理的证明 . . . . .	7
2.3 积分公式 . . . . .	9
2.3.1 Minkowski 积分公式 . . . . .	9
2.3.2 积分公式在凸曲面上的应用 . . . . .	9

# 1 球面的刚性: Liebmann 定理

**旨趣** 我们先介绍一个整体几何基本的工具, 即**极值原理**. 操作机理为: 紧致闭曲面上的连续函数必有极值, 再通过极值性刻画几何. 利用极值原理可以证明球面的 Liebmann 定理, 其刻画了球面的刚性. 从证明中可以发现, Hilbert 引理是本质的, 我们选取了**主曲率函数**作为讨论极值的函数. 最后发现主曲率函数之间的单调关系是导致极值可操作的底层逻辑, 刻画了一般的 Weingarten 曲面, 并做推广.

## 1.1 极值原理

**操作原理** 一些朴素的理念在解决问题时有奇效, 数学分析中我们知道紧集上的连续函数必存在极值. 现在将这个观点推广到微分几何, 即  $\mathbf{E}^3$  中紧致曲面上的连续函数必存在极值. 将这个简单的事实称为**极值原理**, 并且我们断言: (紧致) 曲面上的特殊连续函数是否取极值刻画了曲面的几何. 这个预见性的推断将几何与分析联系起来, 而“极值性”担任了二者之间简单却深刻的桥梁. 我们先从抽象层面解释极值原理的操作思路.

设  $M$  为  $\mathbf{E}^3$  中一紧致曲面,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  为光滑映射. 由极值原理, 不妨设  $f$  在  $p \in M$  处取极大 (小) 值. 于是有

$$df = 0, \quad d^2f \text{ 的 Hesse 矩阵半负 (正) 定}$$

前者断言算子  $df$  是零化算子, 往往能推出硬性的几何信息, 例如正交; 后者给出范围性的条件, 往往能推出某个几何量小 (大) 于等于零.

更细致的刻画需要归结为一元函数. 不妨在极值点附近**任取**光滑曲线  $\gamma$ , 这是  $f \circ \gamma$  为单变量函数, 于是极值性改写为

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} f(\gamma(s)) = 0, \quad \frac{d^2}{ds^2}|_{s=0} f(\gamma(s)) \leq (\geq) 0$$

**反证** 有时极值原理可以反其道而行说明曲面**不紧致**. 只要在曲面上构造出不存在极值的连续函数.

**例 1.1.** 证明  $\text{Int}(D^2) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$  为  $\mathbf{E}^3$  中非紧致曲面.

证明. 取  $\text{Int}(D^2)$  上连续函数  $f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$  即可. □

## 1.2 Liebmann 定理

**定理 1.1** (Liebmann, 1899). 设  $M$  为  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通闭曲面, 且 Gauss 曲率  $K$  为常数, 则  $M$  必为标准球面.

这是整体微分几何范畴具有代表性的工作. 一般整体微分几何往往由局部的几何信息加上**弱的**整体信息 (例如拓扑条件: 紧致性、连通性等等) 推出一个**强的**整体结果. 必须指出: 拓扑条件中, 只有紧致性与闭曲面是本质的, 连通性只为了保证不出现多个球面. 若读者熟悉黎曼几何, 从内蕴的角度看可以发现, 条件中 “ $\mathbf{E}^3$  中的曲面” 是不可缺少的, 它表示曲面  $M$  是  $\mathbf{E}^3$  的光滑嵌入子流形. 事实上我们有反例, 即**平坦环面**  $T^2$ , 它的 Gauss 曲率恒为零. 从这一点也可以看出, 不存在光滑嵌入到  $\mathbf{E}^3$  中的平坦环面.<sup>1</sup>

### 1.2.1 第一引理

从定理的结果可以看出, 拓扑条件下, 常 Gauss 曲率蕴含 Gauss 曲率大于零. 因此, 最初的想法是要确定:  $\mathbf{E}^3$  中紧致闭曲面至少**存在** Gauss 曲率大于零的点, 即椭圆点.

**引理 1.1.** 设  $M$  为  $\mathbf{E}^3$  中紧致闭曲面, 则必存在至少一个椭圆点.

**注记 1.1.** 事实上, 即使不为解决以上定理, 我们会自然猜想:  $\mathbf{E}^3$  中紧致闭曲面上一定存在椭圆点. 直观上这很容易理解, 条件保证曲面作为  $\mathbf{E}^3$  的子集是有界闭集, 考虑以原点为球心的大球面包住该曲面再逐渐缩小, 直至与该曲面产生第一个交 (切) 点, 这个点处曲面的弯曲必然大于球面的弯曲, 则曲面该点必为椭圆点.

我们将这个直观严格刻画出来.

**证明.** 虽然上述说法提供了很强的几何观念, 但是我们还是利用构造函数及其极值原理的方法来说明证明, 事实上函数的极值点就是上述的交 (切) 点, 读者很容易发现这个几何关系.

取曲面  $M$  的位置向量  $x(p), p \in M$ , 构造**距离平方函数**

$$d^2(p) = x(p) \cdot x(p)$$

显然函数光滑, 由紧致性可知在  $M$  上存在极大值点, 不妨记为  $p_0$ . 我们有

$$d|_{p_0} d^2 = 0, \quad d^2|_{p_0} d^2 \leq 0$$

取过  $p$  点  $M$  上任一光滑曲线  $\gamma$  使得  $\gamma(0) = p_0$ , 不妨  $x = x \circ \gamma(s)$ . 第一式得到  $x(0) \cdot \dot{x}(0) = 0$ , 蕴含  $x(0) \perp \dot{x}(0)$ . 令  $n$  为  $M$  的法向量场, 于是  $x(p_0) = \lambda n(p_0)$ , 其中  $\lambda \neq 0$ .<sup>2</sup>第二式得到

$$x(0) \cdot \ddot{x}(0) + \dot{x}(0) \cdot \dot{x}(0) \leq 1$$

<sup>1</sup>实际上, 不存在  $C^2$  的嵌入, 但存在  $C^1$  的嵌入, 即 *Nash – Kuiper* 定理, 参见 [5]. 但直到 2012 年才找到这样  $C^1$  嵌入的构造, 参见 [1].

<sup>2</sup>直观上可以发现,  $p_0$  点必为与球面的交 (切) 点, 但不一定是第一个交点.

注意到  $\gamma(\dot{0})$  方向的法曲率  $k_n(\gamma(\dot{0})) = \ddot{x}(0) \cdot n(p_0)$  于是

$$k_n(\gamma(\dot{0})) \leq -\frac{1}{\lambda}$$

由曲线  $\gamma$  的任意性可知主曲率满足

$$k_1, k_2 \leq -\frac{1}{\lambda}$$

因此  $K = k_1 k_2 \geq \frac{1}{\lambda^2} > 0$ .<sup>3</sup> □

**注记 1.2.** 从思想方法上看, 这里的距离平方函数反映了曲面的 (外蕴) 几何, 这是分析在几何上的一次简单应用.

回到引理前的断言, 我们说明了  $\mathbf{E}^3$  中紧致闭曲面若具有常 Gauss 曲率, 则必有正的常 Gauss 曲率. 随即有以下推论:

**推论 1.1.**  $\mathbf{E}^3$  中不存在常零 Gauss 曲率或常负 Gauss 曲率的紧致闭曲面.

### 1.2.2 第二引理: Hilbert 引理

再次回到定理条件, 从 Gauss 曲率为常数我们知道

$$k_1 k_2 \equiv \text{const}$$

若将  $k_1, k_2 (k_1 \geq k_2)$  分别视为曲面的两个主曲率函数, 它们显然是连续的, 若无脐点则具有光滑性. 在常 Gauss 曲率下注意到: 当  $k_1$  取局部极大值时  $k_2$  必取极小值. 在这个极值点处, 我们有以下非平凡观察:

**定理 1.2** (Hilbert, 1909). 上述主曲率函数  $k_1, k_2$  若满足:

1.  $k_1$  在  $p_0$  点处达局部极大值;
2.  $k_2$  在  $p_0$  点处达局部极小值;
3.  $k_1 \neq k_2$ , 即  $p_0$  非脐点.

则  $K \leq 0$ .

**证明.** 我们利用 *E.Cartan* 么正标架法给一个简洁的证明, 主要思路是用主曲率函数以及两个微分形式  $\omega^1, \omega^2$  表示联络 1-形式  $\omega_1^2$ , 再通过 Gauss 方程得到“外蕴表达的”<sup>4</sup>Gauss 曲率.

---

<sup>3</sup>不难看出, 这里的  $\lambda$  就是大球面的半径.

<sup>4</sup>所谓外蕴表达指的是在表示过程中用到了 Weingarten 公式与 Codazzi 方程. 事实上, 回忆古典微分几何, 联络 1-形式  $\omega_1^2$  可以仅用 Gauss 公式推出, 再结合 Gauss 方程得到一个内蕴的表达.

由 3. 可知  $P_0$  不是脐点, 于是在局部主曲率函数光滑, 不妨选择曲率线网. 于是有 Weingarten 公式:

$$\begin{cases} \omega_1^3 = k_1 \omega^1 \\ \omega_2^3 = k_2 \omega^2 \end{cases}$$

结合 Codazzi 方程整理得到

$$\begin{cases} 0 = \left[ -\frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}} \omega^1 + (k_1 - k_2) \omega_1^2 \right] \wedge \omega^2 \\ 0 = \left[ -\frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} \omega^2 + (k_1 - k_2) \omega_1^2 \right] \wedge \omega^1 \end{cases}$$

从上式中观察得到

$$(k_1 - k_2) \omega_1^2 = \frac{(k_1)_v}{\sqrt{G}} \omega^1 + \frac{(k_2)_u}{\sqrt{E}} \omega^2$$

对上式两边取外微分, 结合极值原理和 Gauss 方程可得

$$K = -\frac{1}{(k_1 - k_2)} \left[ \frac{(k_1)_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{(k_2)_{uu}}{\sqrt{E}} \right]$$

由于  $k_1 > k_2$ , 又  $k_1, k_2$  分别取极大极小值, 故  $(k_1)_{vv} \leq 0, (k_2)_{uu} \geq 0$ , 因此

$$K \leq 0$$

□

### 1.3 Liebmann 定理的证明

我们援引陈省身先生基于 Hilbert 的工作给出的证明, 参见 [2].

证明. 由推论1.1可知曲面  $M$  上每点都是椭圆点, 由紧致性可知条件  $k_1 k_2 = K \equiv \text{const} > 0$  蕴含某点处  $k_1, k_2$  分别取极大极小值 (由于  $K$  是一致的常数, 故取最大最小值), 不妨记为  $p_0$ . 由定理1.2可知  $p_0$  必为脐点. 以下不等式说明对每一点  $p \in M$ , 都是脐点

$$k_1(p_0) \geq k_1(p) \geq k_2(p) \geq k_2(p_0) = k_1(p_0)$$

故  $M$  是球面 (的一部分). 紧致性蕴含  $M$  为闭子集, 光滑性 (微分流形) 蕴含  $M$  为开子集, 再由连通性可知  $M$  为标准球面. □

### 1.4 推广

我们观察以上证明, 条件  $K \equiv \text{const}$  只是用来说明 “当  $k_1$  取极大值时  $k_2$  取极小值”, 而本质上  $k_2$  是关于  $k_1$  的递减函数, 即存在递减函数  $k_2 = f(k_1)$ . 在 [7] 中给出更一般的刻画, 称为 Weingarten 曲面. 上述递减的情形称为**椭圆型** Weingarten 曲面.

在这个观点下将 Liebmann 定理的条件改写为“设  $M$  为  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通闭曲面, 存在递减函数  $f$  使得主曲率函数  $k_1, k_2$  满足关系  $k_2 = f(k_1)$ ”. 于是可以模仿上述证明给出椭圆型 Weingarten 曲面的结果 (这是更本质的).

**定理 1.3.** 设  $M$  为  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通闭曲面, 且是具有正 Gauss 曲率的椭圆型 Weingarten 曲面, 则  $M$  必为标准球面.

注意到  $k_2 = f(k_1)$  其中  $f$  是递减函数的情况可以很多, 例如常 (正) 平均曲率曲面, 即  $k_1 + k_2 = H \equiv \text{const.}$  我们有如下推论:

**推论 1.2.** 设  $M$  为  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通闭曲面, 且是具有正 Gauss 曲率常平均曲率曲面, 则  $M$  必为标准球面.

注意到上述推论 1.2 中, 条件  $K > 0$  实际上为曲面加了拓扑限制, 即同胚于球面 (或者说单连通). 而事实上条件  $K > 0$  可以弱化为“曲面同胚于球面”, 这就是著名的 Hopf 定理.

## 2 凸曲面的 Hadamard 定理与积分公式

**旨趣** 我们首先利用**支持函数**的值分布直观上刻画凸曲面,以此为基础证明 Hadamard 定理. 注意到可以通过选择整体分布的  $1-$  形式利用 Stokes **公式**对紧致闭曲面有一个几何的刻画, 于是得到两个 Minkowski **积分公式**. 最后用积分公式反过来刻画凸曲面的整体几何.

### 2.1 凸曲面的刻画

我们现在观察一类曲面.

**定义 2.1.** 称  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通闭曲面  $M$  为**凸曲面**, 如果其为与每点切平面的同一侧. 即对任意  $p_0 \in M$ , 函数  $f(p) = (x(p) - x(p_0)) \cdot \mathbf{n}(p_0)$  在  $M$  上不变号.

对于这类曲面, [6] 中摘录了 Hadamard 在 1897 年的工作.

**定理 2.1** (Hadamard, 1897).  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通闭曲面  $M$  若 Gauss 曲率处处为正, 那么  $M$  必为凸曲面.

我们利用反证法给出证明, 事实上若存在一点  $p_0$  使得其切平面的两侧均有曲面的点, 直观上  $K(p_0) < 0$ . 一个非平凡的观察是:  $p_0$  点的切平面应夹于另外两个与之**平行**的切平面之间, 故有 3 个共线的法向量, 必有其二相同, 这说明 Gauss 映射  $g$  不是单射! 我们断言这件事情是不可能的, 即 Gauss 曲率处处为正的曲面出发的 Gauss 映射一定是  $1-1$  的. 事实上当时 Hadamard 给出的证明就是利用如下引理:

**引理 2.1.**  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通且 Gauss 曲率处处为正的闭曲面出发的 Gauss 映射一定是  $1-1$  的.

**注记 2.1.** 有些教材中也将这个引理称为 Hadamard 定理, 例如 [7], 因为它是本质的.

### 2.2 Hadamard 定理的证明

我们先证明引理.

**证明.** 先证明  $g$  为满射. 对任意  $e \in S^2$ , 要证存在  $\mathbf{n}(p_0) = e$ . 考察函数  $f(p) = \mathbf{n}(p) \cdot e \leq 1$ . 由极值原理可知, 存在极大值点  $p_0$  使得

$$0 = df(p_0) = (\mathbf{n}_u \cdot e)du + (\mathbf{n}_v \cdot e)dv$$

于是<sup>5</sup>

$$\begin{cases} \mathbf{n}_u \cdot e = 0 \\ \mathbf{n}_v \cdot e = 0 \end{cases}$$

---

<sup>5</sup>从该方程组中我们隐约可以观察到几何信息, 即  $e$  是与切平面正交的, 为此需要使用切向量来说明.

不妨取正交参数网，有如下表示

$$\begin{cases} \mathbf{n}_u = -\frac{L}{E}\mathbf{x}_u - \frac{M}{G}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{n}_v = -\frac{M}{E}\mathbf{x}_u - \frac{N}{G}\mathbf{x}_v \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} -\frac{L}{E}(\mathbf{x}_u \cdot e) - \frac{M}{G}(\mathbf{x}_v \cdot e) = 0 \\ -\frac{M}{E}(\mathbf{x}_u \cdot e) - \frac{N}{G}(\mathbf{x}_v \cdot e) = 0 \end{cases}$$

注意到上述方程组的系数行列式为  $K > 0$ ，故只有零解，因此  $e = \pm \mathbf{n}(p_0)$ 。再利用极大性，可知

$$0 \geq f_{uu} = \left[ -\frac{L}{E}\mathbf{x}_{uu} - \frac{M}{G}\mathbf{x}_{uv} \right] \cdot e$$

将  $e = -\mathbf{n}(p_0)$  带入上式，我们有

$$0 \geq \frac{L^2}{E} + \frac{M^2}{G}$$

矛盾！

再证  $g$  为单射。假设存在两个点  $p, q$  使得  $g(p) = g(q) = e \in S^2$ 。注意到  $K = (\mathbf{n}_u \times \mathbf{n}_v) / (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)$  为  $g$  的 Jacobi 行列式，利用  $K > 0$  结合逆映射定理可知，存在  $p, q$  的邻域  $U_p, U_q$ ，其内  $g$  是微分同胚。不妨  $U_p \cap U_q = \emptyset$  以及  $g(U_p) \subset g(U_q)$ 。由于  $g$  是满射可知

$$\int_{M-U_p} K dA \geq \int_{S^2} d\tilde{A} = 4\pi$$

而

$$4\pi = \int_M K dA \geq \int_{M-U_p} K dA + \int_{U_p} K dA > 4\pi$$

矛盾！

□

**注记 2.2.** 我们在证明单射性质时用到了  $K$  是  $g$  的 Jacobi 行列式这一事实。实际上，对任何局部  $K \neq 0$  的曲面，都有  $g$  的局部微分同胚性，我们把满足这样的  $M$  上的点称为**正则点**，像中的点称为**正则值**，参见 [4]。立即可以发现  $S^2$  中某个正则值  $e$  的原像  $g^{-1}(e)$  的局部是曲面  $M$  中的“山丘”或“盆地”，并且原像个数  $\#g^{-1}(e)$  可以体现曲面的凹凸性或粗糙程度。

最后我们来证明 Hadamard 定理。

**证明.** 假设存在点  $p_0$  使得其切平面两侧存在曲面的点。因此，对于函数  $f(p)$  在  $M$  上变号，即  $\{p \in M | f(p) > 0\}$  和  $\{p \in M | f(p) < 0\}$  非空。不妨设  $q_1, q_2$  分别为二者的最大最小值，对  $f$  求一次微分可知  $\mathbf{n}(q_1), \mathbf{n}(q_2)$  都与  $\mathbf{n}(p_0)$  平行，故  $g$  不是单射，矛盾！

□



**定义 2.2.** 称  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通闭曲面  $M$  为**卵形面**，如果 Gauss 曲率处处为正.

**注记 2.3.** 事实上，Hadamard 定理的条件可以弱化为  $K \geq 0$ ，但证明困难得多，参见 [3].

## 2.3 积分公式

回忆 Gauss – Bonnet 定理的证明，实际上我们应用了整体微分几何一个重要的工具——Stokes 公式，即利用一个整体定义的 1- 形式在积分上联系曲面与其边界. 特别地，当选择一些特殊的 1- 形式并且  $\partial M = \emptyset$  时，会有深刻的几何信息.

### 2.3.1 Minkowski 积分公式

我们在  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通闭曲面  $M$  上给定两个整体定义的 1- 形式  $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, d\mathbf{n})$  和  $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, d\mathbf{x})$ ，分别作用外微分，有

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}) &= (d\mathbf{x}, \mathbf{n}, d\mathbf{n}) + (\mathbf{x}, d\mathbf{n}, d\mathbf{n}) \\ &= (\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, e_3, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2) + (\mathbf{x}, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2) \\ &= \omega^2 \wedge \omega_3^1 - \omega^1 \wedge \omega_3^2 + (2\omega_3^2 \wedge \omega_3^1)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \\ &= [2H + 2K(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})]\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

同理

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{n}, d\mathbf{x}) = [2H(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) + 2]\omega^1 \wedge \omega^2$$

构造**支持函数**  $\varphi = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ . 由 Stokes 公式，我们有

$$\int_M H dA + \int_M K \varphi dA = 0$$

和

$$\int_M H \varphi dA + \int_M dA = 0$$

我们称以上二式为 Minkowski **积分公式**.

### 2.3.2 积分公式在凸曲面上的应用

凸曲面的一个好处是：在其包围的区域内任一点都在其同一侧，于是可以选取原点在内部使得支持函数  $\varphi$  不变号.

**Liebmann 定理的另一证明** 假设  $M$  为  $\mathbf{E}^3$  内紧致连通闭曲面, 且具有常正 Gauss 曲率 (必有椭圆点), 即是一个卵形面, 由 Hadamard 定理, 即定理 2.1 可知该曲面一定是凸曲面. 于是可以选取其围成区域内部一点为原点, 选择合适的法向量使得支持函数  $\varphi < 0$ , 第一 Minkowski 积分公式蕴含此时  $H > 0$ . 我们需要联系  $H$  和  $K$ , 为此做如下观察:

$$H^2 - K = \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 \geq 0$$

取等号当且仅当  $k_1 = k_2$ , 即脐点. 要证 Liebmann 定理即证恒有  $H^2 = K$ .

证明. 利用第一 Minkowski 积分公式, 我们有

$$\int_M K\varphi = - \int_M H \leq - \int_M \sqrt{K} = -\sqrt{K} \int_M$$

再利用第二 Minkowski 积分公式, 进而

$$-\sqrt{K} \int_M = \sqrt{K} \int_M H\varphi \leq K \int_M \varphi \leq \int_M K\varphi$$

综上只能  $H^2 = K$ . □

### 在常平均曲率的凸曲面上的应用

**定理 2.2.** 设  $M$  为  $\mathbf{E}^3$  中紧致连通凸闭曲面, 且具有常平均曲率, 则  $M$  必为标准球面.

**注记 2.4.** 这个定理实为推论 1.2 的推广. 我们把正 Gauss 曲率的条件换成凸曲面 (由 Hadamard 定理).

证明. 利用 Minkowski 积分公式, 我们有

$$\int_M K\varphi = - \int_M H = H^2 \int_M \varphi = \int_M H^2\varphi$$

说明  $\int_M (H^2 - K)\varphi = 0$ . 而  $(H^2 - K)\varphi \geq 0$ , 故

$$H^2 = K$$

□

## 参考文献

- [1] Vincent Borrelli, Saïd Jabrane, Francis Lazarus, and Boris Thibert. Flat tori in three-dimensional space and convex integration. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 109(19):7218–7223, 2012.
- [2] Shiing-shen Chern. Some new characterizations of the euclidean sphere. 1945.
- [3] Shiing-shen Chern and Richard K Lashof. On the total curvature of immersed manifolds. *American journal of mathematics*, 79(2):306–318, 1957.
- [4] John Willard Milnor and David W Weaver. *Topology from the differentiable view-point*, volume 21. Princeton university press, 1997.
- [5] John Nash.  $C^1$  isometric imbeddings. *Annals of mathematics*, 60(3):383–396, 1954.
- [6] 彭家贵. 微分几何. 高等教育出版社, 2021.
- [7] 沈一兵. 整体微分几何初步: 第三版. 高等教育出版社, 2009.