Projet MOGPL : optimisation équitable

Zhenyue FU 28620112
Charles LIN 3812676

1) Linéarisation de f

1.1)

$$\min \sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i$$
$$\text{s.c. } \sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k$$
$$a_{ik} \in \{0,1\}, i = 1, \dots, n$$

$L_k(z) = \sum_{i=1}^{k} z_{(i)}$ représentent les k plus petites composantes de z
Lors de la minimisation de $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} z_i$ nous mettons les a_{ik} des plus petit z_i à 1
Or $sum_{i=1}^{n} a_{ik} = k$ donc on met k a_{ik} à 1
Donc nous récupérons les k z_i les plus petits, et donc $L_k(z)$
1.2)

$$\max k r_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik}$$
$$\text{s.c. } r_k - b_{ik} \leq z_i(x), i = 1, \dots, n$$
$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0, i = 1, \dots, n$$

En résolvant 6 programmation linéaires($k = 1, \dots, 6$), on obtient:

$$L = (1, 3, 6, 10, 17, 26)$$

1.3)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(z(x)) &= \sum_{k=1}^{n-1} (w_k - w_{k+1}) L_k + w_n L_n \\
&= w_1 L_1 + \sum_{k=2}^{n} w_k (L_k - L_{k-1}) \\
&= w_1 z_1 + \sum_{k=2}^{n} w_k (z_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i z_{(i)}(x)
\end{aligned}$$

1.4)

$$\max w'_1(1\times r_1 - b_{11} - b_{21}) + w'_2(2\times r_2 - b_{12} - b_{22})$$
$$\text{s.c.}\ \begin{cases} r_1 - b_{11} \le 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 \\ r_1 - b_{21} \le 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 5x_5 \\ r_2 - b_{12} \le 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 8x_4 + x_5 \\ r_2 - b_{22} \le 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 5x_5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$
$$x_i \in \{0,1\}, i = 1,\ldots,5, \qquad \text{avec } w'_1 = 1, w'_2 = 1$$

Solution:

$$z_1 = 18, z_2 = 16$$
$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0$$

2) Application au partage équitable de biens indivisibles

2.1)

$$\max \sum_{k=1}^{n} w'_k \left(k r_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right)$$
$$\text{s.c.}\ \begin{cases} r_k - b_{ik} \le \sum_{j=1}^{p} u_{ij} x_{ij} & i = 1,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} <= 1 & j = 1,\ldots,p \end{cases}$$
$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \ge 0, x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i = 1,\ldots,n$$

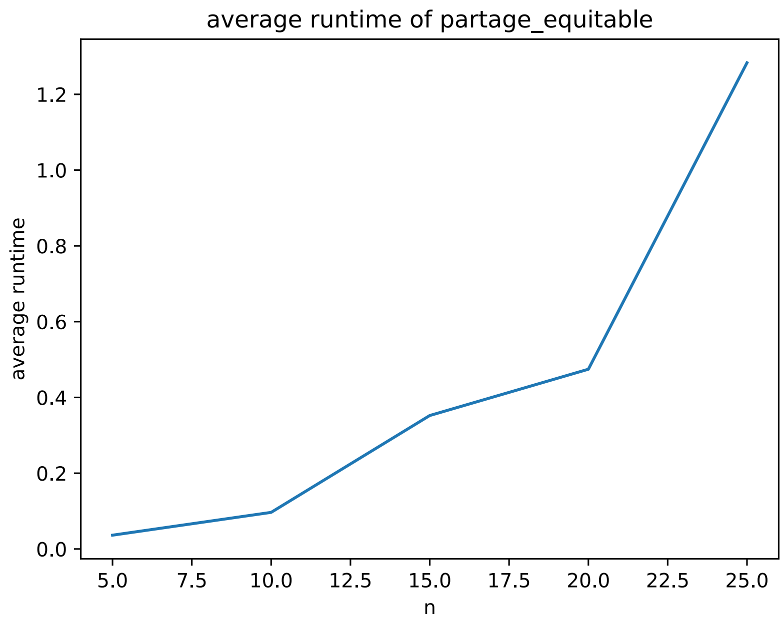
Avec $w = (3,2,1)$ et $w = (10,3,1)$, on obtient la même solution:

$$z_1 = 325, z_2 = 335, z_3 = 340$$
$$x_{11} = 1$$
$$x_{23} = 1, x_{25} = 1, x_{26} = 1$$
$$x_{32} = 1, x_{34} = 1$$

En maximisant la satisfaction moyenne:

$$z_1 = 0, z_2 = 760, z_3 = 240$$
$$x_{21} = 1 x_{22} = 1 x_{23} = 1$$
$$x_{34} = 1 x_{35} = 1 x_{36} = 1$$

2.2)



On observe que le temps de résolution à une allure de fonction exponentielle par rapport à n

3) Application à la selection multicritère de projets

3.1)

$$\max \sum_{k=1}^{n} w'_k \left(kr_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right)$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} r_k - b_{ik} \leq= \sum_{j=1}^{p} u_{ij} x_j, i = 1, \ldots, n \\ x_i <= 1, i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{p} x_i c_i \leq budget \end{cases}$$

$$b_{ik} \geq 0, i = 1, \ldots, n$$

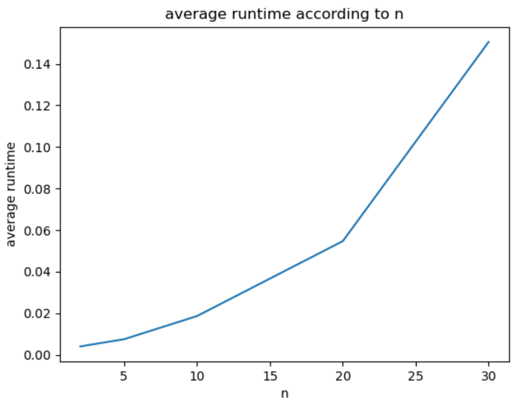
Avec $w = (2, 1)$ et $w = (10, 1)$, on obtient la même solution:

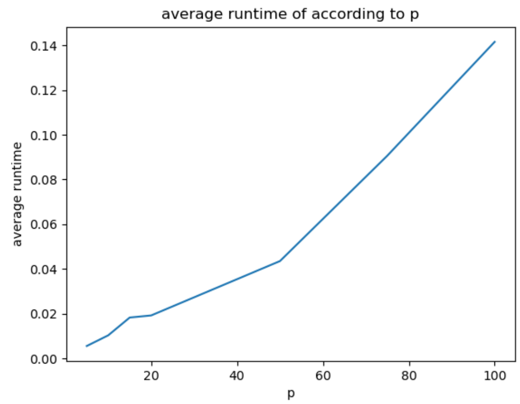
$$z_1 = 21.0, z_2 = 20.0$$
$$x_1 = 1.0, x_2 = 0.0, x_3 = 0.0, x_4 = 1.0$$

En maximisant la satisfaction moyenne:

$$z_1 = 36.0, z_2 = 6.0$$
$$x_1 = 1.0, x_2 = 0.0, x_3 = 1.0, x_4 = 0.0$$

3.2)





On observe que le temps de résolution du programme est beaucoup plus impacter par n que par p, elle a une allure exponentielle par rapport à n, et une allure affine par rapport à p.

4) Application à la recherche d'un chemin robuste dans un graphe

4.1)

for $G = (V, E)$

$$\min \sum_{i,j \in V} t_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.c.} \sum_{vj \in E} x_{vj} - \sum_{jv \in E} x_{jv} = c_v, \forall v \in V$$

$$x_{ij} \in 0, 1, \forall i, j \in E$$

$$\text{où } c_v = \begin{cases} 1 & \text{if } v = a \\ -1 & \text{if } v = g \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

On a résolu le Programmation Linaire avec les résultats suivants dans Figure 1:

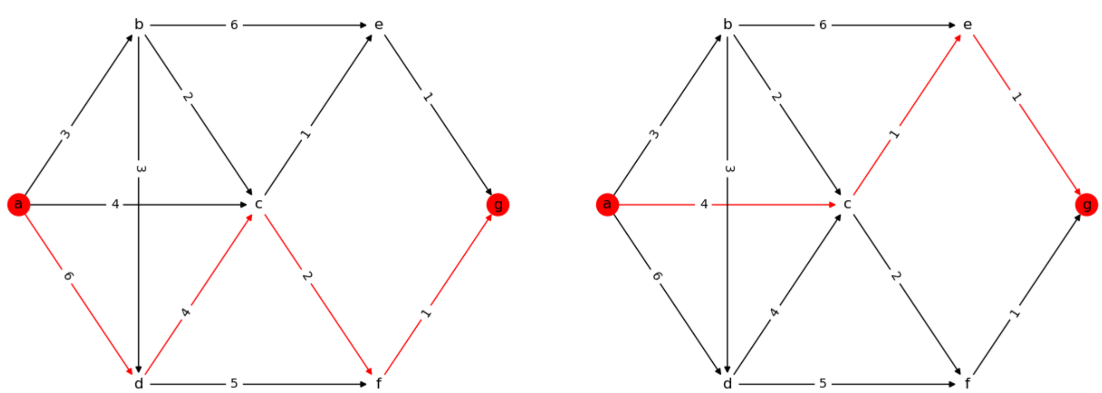


Figure 1: Shortest path with s1 and s2

4.2)

$$\max \sum_{k=1}^{n} w'_k \left(kr_k - \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right)$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} r_k - b_{ik} + \sum_{u,v \in V} t^i_{uv} x_{uv} \leq 0 \qquad i = 1, \dots, n \\ \sum_{vj \in E} x_{vj} - \sum_{jv \in E} x_{jv} = c_v, \forall v \in V \end{cases}$$

$$r_k \in \mathbb{R}, b_{ik} \geq 0, i = 1, \dots, n, \qquad x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j \in E$$

$$\text{où } c_v = \begin{cases} 1 & \text{if } v = a \\ -1 & \text{if } v = g \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

On a résolu le Programmation Linaire avec les résultats suivants dans Figure 2.

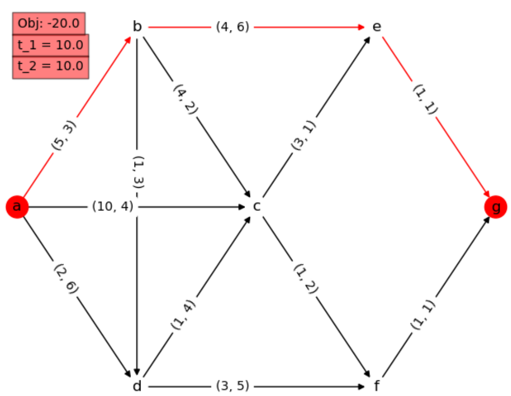


Figure 2: Path 4.2

4.3) Pour chaque alpha, nous obtenons exactement le même chemin, w n'a donc pas d'incidence sur la solution. Tous les chemins pour chaque itération et chaque alpha sont stockés dans le fichier 4_3.