|2_Malkiel债券定价原理

债券的持有期限、利息、本金和市场利率决定了债券的内在价值。

假设市场上存在一种普通债券,当前价格为P,当前<mark>市场利率</mark>为y,期限T年,每年付息C,最后一年归还面值F。由于货币存在时间价值,因此有式一:

$$P = \sum_{i=1}^{T} rac{ ext{C}}{(1+y)^i} + rac{F}{(1+y)^T}$$

此时对第一项进行等比级数求和得:

$$P = rac{ ext{C}}{y} \left[1 - rac{1}{(1+y)^T}
ight] + rac{F}{(1+y)^T}$$

|定理一:债券价格和债券收益率反向变动

P 对收益率 y 求偏导:

$$rac{\partial P}{\partial y} = rac{C\left(rac{1}{(y+1)^T}-1
ight)}{y^2} - rac{F\,T}{\left(y+1
ight)^{T+1}} + rac{C\,T}{y\left(y+1
ight)^{T+1}} = rac{C}{y^2} igg[rac{1}{\left(1+y
ight)^T} - 1igg] + igg(rac{C}{y} - Figg)rac{T}{\left(1+y
ight)^{T+1}}$$

|定理二:若利率不变,债券的到期时间与债券价格波动幅度呈正相关关系

P 对期限 T 求偏导得:

$$rac{\partial P}{\partial T} = rac{C\,\ln\left(y+1
ight)}{y\left(y+1
ight)^T} - rac{F\,\ln\left(y+1
ight)}{\left(y+1
ight)^T}$$

又 $C = F \cdot y^*$ (每期付息等于面值乘息票率, y^* 为<mark>票面的息票率</mark>), 可整理为:

$$rac{\partial P}{\partial T} = (rac{Fy^*}{y} - F)(1+y)^{-T}\ln(1+y) = \left\lceil rac{F\left(y^* - y
ight)}{y}
ight
ceil (1+y)^{-T}\ln\left(1+y
ight)$$

所以:

- $y > y^*$ 时,债券<mark>折价</mark>发行,同时上式小于零,因此时期越长,价格越低
- $y < y^*$ 时,债券<mark>溢价</mark>发行,同时上式大于零,因此时期越长,价格越高

|定理三:延长到期时间对债券价格波动的影响是递减的

价格P对时间 T 求二阶偏导:

$$rac{\partial^{2}P}{\partial T^{2}}=rac{F\ln\left(y+1
ight)^{2}}{\left(y+1
ight)^{T}}-rac{C\ln\left(y+1
ight)^{2}}{y\left(y+1
ight)^{T}}$$

整理得:

$$rac{\partial^2 P}{\partial T^2} = -\left[rac{F\left(y^*-y
ight)}{y}
ight](1+y)^{-T}(\ln\left(1+y
ight))^2$$

所以:

- $y > y^*$ 时,债券<mark>折价</mark>发行,同时上式大于零,因此时期越长,价格越低,而价格降低的速度减慢
- $y < y^*$ 时,债券<mark>溢价</mark>发行,同时上式小于零,因此时期越长,价格越高,而价格升高的速度减慢

| 定理四: 债券价格对收益率下降的反应比对同等幅度的收益率上 升更敏感

P 对收益率 y 求二阶偏导:

$$rac{{{\partial }^2}P}{{\partial {y^2}}} = rac{{F\,T\,\left({T + 1}
ight)}}{{{\left({y + 1}
ight)}^{T + 2}}} - rac{{2\,C\,T}}{{{y^2}\,{{\left({y + 1}
ight)}^{T + 1}}}} - rac{{2\,C\,\left({rac{1}{{\left({y + 1}
ight)}^T}} - 1
ight)}}{{{y^3}}} - rac{{C\,T\,\left({T + 1}
ight)}}{{y\left({y + 1}
ight)^{T + 2}}} > 0$$

(不求和, 更简单的形式)

$$rac{\partial^2 P}{\partial y^2} = rac{1}{(1+y)^2} \sum_{i=1}^T t rac{(t+1)C(t)}{(1+y)^i} > 0$$

因为一阶导小于零, 二阶导大于零, 函数凸向原点, 因此收益率上升所带来的损失要小于收益率下降所带来的收益。

| 定理五:对于给定的收益率变动幅度,债券的息票率与债券价格的波动幅度成反向变动关系

债券的波动率对 C 求导:

$$\partial rac{\left(rac{\partial P}{\partial y}rac{y}{p}
ight)}{\partial ext{C}} = rac{Fy}{(1+y)\Big(ext{C}(1+y)^T- ext{C}+Fy\Big)^2}\Big(1+y+(1+y)^T\left(Ty-1-y
ight)\Big)$$

记括号内式子为S(T),T=1时,即对一年期债券来说,上式为0,而T趋于无穷时,上式取极限值为0,即对无穷期债券来说,也为0。仅当T>1时有: $S(T+1) - S(T) = Ty^2(1+y)^T > 0$

因为债券波动为负,因此当T>1时,波动随着息票率的增大而减小,对一年期和无穷期债券不适合。