8_CAPM

CAPM 由两个部分构成：资本市场线（CML）和证券市场线（SML），SML是资本资产定价模型（CAPM）的图形表示。

CML 推导

- **选择一个有效前沿上的投资组合（市场组合）：** 假设存在一个特殊的投资组合（市场组合），它在与无风险资产组合时能够通过一条直线与有效前沿相切。这条直线就是资本市场线。

- **确定切点（市场组合）：** 通过优化，找到使得从无风险资产点 $(0, R_f)$ 到有效前沿上的某点（市场组合）之间的斜率最大化的投资组合。这个切点对应的投资组合就是市场组合，具有最佳的夏普比率。

- **绘制CML：** 资本市场线是从无风险资产点 $(0, R_f)$ 开始，经过市场组合点，并延伸到更高风险和收益水平的直线。

假设：

- R_f ：无风险资产的回报率。
- R_m ：市场组合的预期回报率。
- σ_m ：市场组合的标准差（风险）。
- σ_p：任意在CML上的投资组合的标准差。
- R_p：任意在CML上的投资组合的预期回报率。

投资组合 P 由无风险资产和市场组合组成，设 w 为投资于市场组合的比例，则：

$$R_p = wR_m + (1 - w)R_f$$

由于无风险资产的标准差为零，投资组合 P 的标准差仅由市场组合的风险部分决定：
$\sigma_P = w\sigma_m$，即

$$w = \frac{\sigma_p}{\sigma_m}$$

将 w 代入预期回报率公式：

$$R_p = \frac{\sigma_p}{\sigma_m} R_m + \left(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_m}\right) R_f$$

化简得：

$$R_p = R_f + \left(\frac{R_m - R_f}{\sigma_m}\right) \sigma_p$$

SML 推导

持有资产 i 的权重为 w，持有市场组合m的权重为$1-w$。那么有：

$$R_p = wR_i + (1-w)R_m$$

$$\sigma_p^2 = D\left(wi + (1-w)m\right) = w^2\sigma_i^2 + (1-w)^2\sigma_m^2 + 2w\left(1-w\right)\sigma_{im}$$

其中$\mathrm{Cov}(i,m) = \sigma_{im}$。两式对 w 求偏导：

$$\frac{\partial R_p}{\partial w} = R_i - R_m$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial w} = \frac{w\sigma_i^2 + (w-1)\sigma_m^2 + (1-2w)\sigma_{im}}{\sigma_p}$$

$w=0$时，$\sigma_p = \sigma_m$，SML 是可行集的切线，与 CML 重合

$$\left.\frac{\partial \sigma_p}{\partial w}\right|_{w=0} = \frac{\sigma_{im} - \sigma_m^2}{\sigma_m}$$

此时斜率为

$$\left.\frac{\partial R_p}{\partial \sigma_p}\right|_{w=0} = \left.\left(\frac{\partial R_p}{\partial w} \div \frac{\partial \sigma_p}{\partial w}\right)\right|_{w=0} = \frac{(R_i - R_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2}$$

CML 切线为：

$$\frac{R_m - R_f}{\sigma_m}$$

联立得到 R_i

$$\frac{(R_i - R_m)\sigma_m}{\sigma_{im} - \sigma_m^2} = \frac{R_m - R_f}{\sigma_m} \Longrightarrow R_i = R_f + \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}(R_m - R_f) = R_f + \beta_i\left(R_m - R_f\right)$$

其中：

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(i,m)}{\sigma_m^2}$$

CAPM 的应用

某项目**未来期望收益**为100万美元，β=0.8。若当时短期国债的平均收益为10%，市场组合的期望收益为20%，则该项目最大可接受的投资成本是多少？

未来期望收益即 未来售价Q - 成本P（求解目标） = 100

那么简单收益率为 $R = \frac{Q-P}{P} = \frac{100}{P}$，该值与对应的CAPM收益相等，即：

$$\frac{100}{P} = R_f + \beta_i(R_m - R_f) = 10\% + 0.8 \times (20\% - 10\%) = 18\%$$

解得 $P = \frac{100}{18\%} \approx 555.56$