2_Malkiel债券定价原理

债券的持有期限、利息、本金和市场利率决定了债券的内在价值。

假设市场上存在一种普通债券，当前价格为P，当前市场利率为y，期限T年，每年付息C，最后一年归还面值F。由于货币存在时间价值，因此有式一：

$$P=\sum_{i=1}^{T}\frac{\mathrm{C}}{(1+y)^{i}}+\frac{F}{(1+y)^{T}}$$

此时对第一项进行等比级数求和得：

$$P=\frac{\mathrm{C}}{y}\left[1-\frac{1}{(1+y)^{T}}\right]+\frac{F}{(1+y)^{T}}$$

定理一：债券价格和债券收益率反向变动

P 对收益率 y 求偏导：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{C\left(\frac{1}{(y+1)^{T}}-1\right)}{y^{2}}-\frac{FT}{(y+1)^{T+1}}+\frac{CT}{y\,(y+1)^{T+1}}=\frac{C}{y^{2}}\left[\frac{1}{(1+y)^{T}}-1\right]+\left(\frac{C}{y}-F\right)\frac{T}{(1+y)^{T+1}}$$

定理二：若利率不变，债券的到期时间与债券价格波动幅度呈正相关关系

P 对期限 T 求偏导得：

$$\frac{\partial P}{\partial T}=\frac{C\,\ln{(y+1)}}{y\,(y+1)^{T}}-\frac{F\,\ln{(y+1)}}{(y+1)^{T}}$$

又$C=F\cdot y^{*}$ （每期付息等于面值乘息票率，y^{*} 为票面的息票率），可整理为：

$$\frac{\partial P}{\partial T}=(\frac{Fy^{*}}{y}-F)(1+y)^{-T}\ln(1+y)=\left[\frac{F\,(y^{*}-y)}{y}\right](1+y)^{-T}\ln{(1+y)}$$

所以：

- $y>y^{*}$时，债券折价发行，同时上式小于零，因此时期越长，价格越低
- $y<y^{*}$ 时，债券溢价发行，同时上式大于零，因此时期越长，价格越高

定理三：延长到期时间对债券价格波动的影响是递减的

> 原论文（Malkiel, 1962）证法为求二阶偏导

价格P对时间 T 求二阶偏导：

$$\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}=\frac{F\ln(y+1)^2}{(y+1)^T}-\frac{C\ln(y+1)^2}{y(y+1)^T}$$

整理得：

$$\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}=-\left[\frac{F(y^*-y)}{y}\right](1+y)^{-T}(\ln(1+y))^2$$

所以：

- $y>y^*$时，债券**折价**发行，同时上式大于零，因此时期越长，价格越低，而价格降低的速度减慢
- $y<y^*$ 时，债券**溢价**发行，同时上式小于零，因此时期越长，价格越高，而价格升高的速度减慢

定理四：债券价格对收益率下降的反应比对同等幅度的收益率上升更敏感

P 对收益率 y 求二阶偏导：

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=\frac{FT(T+1)}{(y+1)^{T+2}}-\frac{2CT}{y^2(y+1)^{T+1}}-\frac{2C\left(\frac{1}{(y+1)^T}-1\right)}{y^3}-\frac{CT(T+1)}{y(y+1)^{T+2}}>0$$

（不求和，更简单的形式）

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=\frac{1}{(1+y)^2}\times\left[\frac{T(T+1)F}{(1+y)^T}+\sum_{i=1}^{T}\frac{i(1+i)C}{(1+y)^i}\right]>0$$

因为一阶导小于零，二阶导大于零，函数凸向原点，因此收益率上升所带来的损失要小于收益率下降所带来的收益。

定理五：息票率越低的债券受市场利率影响越大

债券的波动率对 C 求导：

$$\partial\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{y}{p}\right)}{\partial \mathrm{C}}=\frac{Fy}{(1+y)\left(\mathrm{C}(1+y)^T-\mathrm{C}+Fy\right)^2}\left(1+y+(1+y)^T(Ty-1-y)\right)$$

记括号内式子为S(T)，T=1时，即对一年期债券来说，上式为0，而T趋于无穷时，上式取极限值为0，即对无穷期债券来说，也为0。仅当T>1时有：$\mathrm{S}(T+1)-\mathrm{S}(T)=Ty^2(1+y)^T>0$

因为债券波动为负，因此当T>1时，波动随着息票率的增大而减小，对一年期和无穷期债券不适合。