9_APT

因子模型

因子模型是一种假设，资产的收益可以分解为一组因子的线性组合，这些因子可能代表宏观经济变量、行业特征或其他系统性风险因素，以及资产本身的特定噪声项。

单因子模型

把经济系统中所有相关因素作为一个总的宏观经济指数。

对时间 t 的任何证券 i 有时间序列

$$r_{it} = a_i + b_i f_t + e_{it}$$

- r_{it} ： t 时期回报
- a_i：零因子，资产的超额收益
- f_t：在 t 时期公共因子的预测值
- b_i：证券i对公共因子f的敏感度（因子载荷）
- e_{it}：非系统性风险

单因子模型的假设：

- 因子与随机扰动向相互独立
- 无异质性

多因子模型

两因子模型

$$r_i = a_i + b_{i1} f_1 + b_{i2} f_2 + e_i$$

其中

$$E(e_i) = 0 \quad \mathrm{Cov}(e_i, e_j) = 0 \quad \mathrm{Cov}(e_i, f_1) = 0 \quad \mathrm{Cov}(e_i, f_2) = 0$$

在两因子模型下，对于证券 i，其回报率均值：

$$\bar{r_i} = a_i + b_{i1} \bar{f_1} + b_{i2} \bar{f_2}$$

方差：

$$\sigma_i = b_{i1}^2 \sigma_{f_1}^2 + b_{i2}^2 \sigma_{f_2}^2 + 2 b_{i1} b_{i2} \mathrm{Cov}\left(f_1, f_2\right) + \sigma_{ei}^2$$

协方差：

$$\sigma_{ij} = b_{i1} b_{j1} \sigma_{f1}^2 + b_{i2} b_{j2} \sigma_{f2}^2 + (b_{i1} b_{j2} + b_{i2} b_{j1}) \mathrm{Cov}(f_1, f_2)$$

APT

套利方法

- 当前时刻净支出为0，将来收益为正
- 当前收益为正，将来净支出为0

假设投资者构造这样的资产组合： 无风险利率借入1元钱；1元钱投资在两种资产，这样构造一个自融资组合。

套利组合

- 无需追加投资：$\sum w_i = 0$
- 不会增加风险：$\sum w_i b_i = 0$
- 预期收益为正：$\sum w_i r_i > 0$
  注意：w可正可负

无套利状态下的资产收益率（也可以理解为套利的最终状态）：
对于任何资产组合(w_1, w_2, w_3)在均衡状态下满足：

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 0 \\ b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 = 0 \\ w_1 \bar{r_1} + w_2 \bar{r_2} + w_3 \bar{r_3} = 0 \end{cases}$$

则必然存在常数λ_0, λ_1，使得：

$$\bar{r_i} = \lambda_0 + \lambda_1 b_i, \quad i = 1, 2, 3$$

假设 n 种资产收益率由 m 个因子决定，那么套利即是一个最优化问题：

$$\max_w \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r_i} \quad s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i b_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots m \end{cases}$$

使用 Lagrange 乘子法可得出，当收益率最大时：

$$\bar{r_i} = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \lambda_j$$

此时可以看到，若$b_{ij} = 0$，则该资产为无风险资产，$\lambda_0 = r_f$。

此时若调整为单因子模型的条件 $\bar{r_i} = \lambda_0 + \lambda_1 b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$
则对所有风险资产有：

$$\lambda_1 = \frac{\bar{r_1} - r_f}{b_1} = \frac{\bar{r_2} - r_f}{b_2} = \cdots = \frac{\bar{r_m} - r_f}{b_n}$$

无套利状态下收益的风险线性关系推导

现有两资产i和资产j，设无风险利率为λ_0，现以该利率借入 1 单位，并用于投资i, j。(满足无追加投资)

假设两个资产的收益都仅取决于公共因子 f，则可描绘 i,j 的收益（忽略残差）:
$R_i=\bar{r_i}+b_if \quad R_j=\bar{r_j}+b_jf$

在因子模型的假定下，套利组合的收益为

$$r_p=wR_i+(1-w)R_j-\lambda_0$$

代入单因子模型表达式得:

$$r_p=[w(\bar{r_i}+b_if)]+[(1-w)(\bar{r_j}+b_jf)]-\lambda_0$$

展开并合并:

$$r_p=[w(\bar{r}_i-\bar{r}_j)+\bar{r}_j-\lambda_0]+[w(b_i-b_j)+b_j]f$$

此时形成了一个新的单因子模型结构，风险因子敏感性为 $w(b_i-b_j)+b_j$。**因为套利组合无风险，因此风险因子敏感性为 0**，此时:

$$w^*=-\frac{b_j}{b_i-b_j}$$

此时若不存在套利，即套利组合收益为 0 ，即:

$$r_p=-\frac{b_j}{b_i-b_j}(\bar{r}_i-\bar{r}_j)+\bar{r}_j-\lambda_0=0$$

整理得到等式:

$$b_i\left(\bar{r_j}-\lambda_0\right)=b_j\left(\bar{r_i}-\lambda_0\right)$$
$$\frac{\bar{r_i}-\lambda_0}{b_i}=\frac{\bar{r_j}-\lambda_0}{b_j}$$

令等号两边的值为λ_1:

$$\frac{\bar{r_i}-\lambda_0}{b_i}=\frac{\bar{r_j}-\lambda_0}{b_j}=\lambda_1$$

可得无套利状态下收益的风险线性关系:

$$\bar{r_n}=\lambda_0+b_n\lambda_1 \quad n=i,j$$

APT 的另一种表达

在单因子模型下，如果由一贯资产组合p，使 $b_p=1$即:

$$\bar{r_p}=r_f+\lambda_1$$

则有$\lambda_1=\bar{r_p}-r_f$，该组合称为纯因子组合

> **Note**
>
> 可以把纯因子组合看作是专注于某一因子的“测试组合”，它完全跟踪该因子的表现，而与其他特质风险无关。这在多因子模型或风险分析中非常有用，因为它能将因子收益的来

源与其他风险分离开来。

例题

【例题一】 假定市场可以用下面的三种系统风险及相应的风险溢价进行描述

要素	风险溢价
工业生产（I）	6%
利率（R）	2%
消费者信心（C）	4%

特定股票的收益率可以用下面的方程来确定
$r=15\%+1.0I+0.5R+0.75C+e$

若无风险利率为6%，使用套利定价理论确定该股票的均衡收益率。

$$\begin{aligned}\bar{r}&=r_f+1.0\lambda_I+0.5\lambda_R+0.75\lambda_c\\&=6\%+1\times6\%+0.5\times2\%+0.75\times4\%\\&=16\%\end{aligned}$$

该股票价格是低估还是高估了？解释原因。

当其他系统风险要素影响因子均为 0 的时候，得到的预期收益率（无风险）为 15%，而均衡收益率（有风险状态）为 16%，有风险收益率高于无风险，说明该股票定价过高，市场存在套利，无套利收益率为 16%。

【例题二】 假设影响投资收益率的只有一个因素，A、B、C三个组合都是充分分散的投资组合，预期收益率分别为24%、8%、14%，因素敏感度分别等于1.2、0.0和0.6。某投资者现持有A、B、C三个组合的市值均为500万，其投资组合总价值为1500万。请问该投资者有无套利机会？如果有，应如何套利（请给出一个具体的套利组合及套利收益）？

判断无套利条件下的一致性

易知 B 为无风险资产，故$R_f=R_B=8\%$
此时计算 A 与 C 在无套利情况下的定价：
$\bar{R_A}=8\%+1.2\times(24\%-8\%)=27.2\%$
$\bar{R_C}=8\%+0.6\times(14\%-8\%)=11.6\%$
A的均衡收益率高于预期收益率，C 的均衡收益率低于预期收益率，所以 A 被低估，C 被高估，存在套利机会。

构造套利组合

由上可知，套利操作应为卖出 C 并买入 A。

现在$w_A=1/3$，假设其不变。
根据 $1.2\times w_A+0\times w_B+0.6\times w_C=0$，求得$w_C=-2w_A=-2/3$，此时又根据$w_A+w_B+w_C=0$得出$w_B=1/3$

所以组合为：卖空 C 1000 万，买入 A 和 B 各 500 万。

A期末期望值：500万 × (1+24%) = 620万
B期末期望值：500万 × (1+8%) = 540万
C需回补空头：-1000万（卖空时获得5百万现金），C上涨14%，需以1000万×(1+14%)=1140万买回。

最终收益：620+540-1140=20万