## |2\_Malkiel债券定价原理

债券的持有期限、利息、本金和市场利率决定了债券的内在价值。

假设市场上存在一种普通债券,当前价格为P,当前<mark>市场利率</mark>为y,期限T年,每年付息C,最后一年归还面值F。由于货币存在时间价值,因此有式一:

$$P = \sum_{i=1}^{T} rac{\mathrm{C}}{(1+y)^i} + rac{F}{(1+y)^T}$$

此时对第一项进行等比级数求和得:

$$P = rac{ ext{C}}{y} \left[ 1 - rac{1}{(1+y)^T} 
ight] + rac{F}{(1+y)^T}$$

#### |定理一: 债券价格和债券收益率反向变动

P 对收益率 y 求偏导:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{C\left(\frac{1}{(y+1)^T} - 1\right)}{y^2} - \frac{FT}{(y+1)^{T+1}} + \frac{CT}{y(y+1)^{T+1}} = \frac{C}{y^2} \left[\frac{1}{(1+y)^T} - 1\right] + \left(\frac{C}{y} - F\right) \frac{T}{(1+y)^{T+1}}$$

# l 定理二:若利率不变,债券的到期时间与债券价格波动幅度呈正相关关系

P 对期限 T 求偏导得:

$$rac{\partial P}{\partial T} = rac{C\,\ln\left(y+1
ight)}{y\left(y+1
ight)^T} - rac{F\,\ln\left(y+1
ight)}{\left(y+1
ight)^T}$$

又 $C = F \cdot y^*$  (每期付息等于面值乘息票率,  $y^*$  为<mark>票面的息票率</mark>), 可整理为:

$$rac{\partial P}{\partial T} = (rac{Fy^*}{y} - F)(1+y)^{-T}\ln(1+y) = \left\lceil rac{F\left(y^* - y
ight)}{y} 
ight
ceil (1+y)^{-T}\ln\left(1+y
ight)$$

所以:

- $y>y^*$ 时,债券<mark>折价</mark>发行,同时上式小于零,因此时期越长,价格越低
- $y < y^*$  时,债券<mark>溢价</mark>发行,同时上式大于零,因此时期越长,价格越高

#### |定理三:延长到期时间对债券价格波动的影响是递减的

■ 原论文(Malkiel, 1962)证法为求二阶偏导

价格P对时间 T 求二阶偏导:

$$rac{\partial^2 P}{\partial T^2} = rac{F \ln \left(y+1
ight)^2}{\left(y+1
ight)^T} - rac{C \ln \left(y+1
ight)^2}{y \left(y+1
ight)^T}$$

整理得:

$$rac{\partial^2 P}{\partial T^2} = -\left[rac{F\left(y^*-y
ight)}{y}
ight](1+y)^{-T}(\ln\left(1+y
ight))^2$$

所以:

- $y > y^*$ 时,债券<mark>折价</mark>发行,同时上式大于零,因此时期越长,价格越低,而价格降低的速度减慢
- $y < y^*$  时,债券<mark>溢价</mark>发行,同时上式小于零,因此时期越长,价格越高,而价格升高的速度减慢

### |定理四:债券价格对收益率下降的反应比对同等幅度的收益率上 升更敏感

P 对收益率 v 求二阶偏导:

$$rac{\partial^{2}P}{\partial y^{2}} = rac{F\,T\,\left(T+1
ight)}{\left(y+1
ight)^{T+2}} - rac{2\,C\,T}{y^{2}\,\left(y+1
ight)^{T+1}} - rac{2\,C\,\left(rac{1}{\left(y+1
ight)^{T}}-1
ight)}{y^{3}} - rac{C\,T\,\left(T+1
ight)}{y\left(y+1
ight)^{T+2}} > 0$$

(不求和, 更简单的形式)

$$rac{\partial^2 P}{\partial y^2} = rac{1}{\left(1+y
ight)^2} imes \left[rac{T\left(T+1
ight)F}{\left(1+y
ight)^T} + \sum_{i=1}^T rac{i\left(1+i
ight)C}{\left(1+y
ight)^i}
ight] > 0.$$

因为一阶导小于零,二阶导大于零,函数凸向原点,因此收益率上升所带来的损失要小于收益 率下降所带来的收益。

#### | 定理五: 息票率越低的债券受市场利率影响越大

债券的波动率对 C 求导:

$$\partial rac{\left(rac{\partial P}{\partial y}rac{y}{p}
ight)}{\partial ext{C}} = rac{Fy}{\left(1+y
ight)\!\left( ext{C}\!\left(1+y
ight)\!^T - ext{C} + Fy
ight)^2}\!\left(1+y+\left(1+y
ight)^T \left(Ty-1-y
ight)
ight)}$$

记括号内式子为S(T),T=1时,即对一年期债券来说,上式为0,而T趋于无穷时,上式取极限值为0,即对无穷期债券来说,也为0。仅当T>1时有: $S(T+1) - S(T) = Ty^2(1+y)^T > 0$ 

因为债券波动为负,因此当T>1时,波动随着息票率的增大而减小,对一年期和无穷期债券不适合。