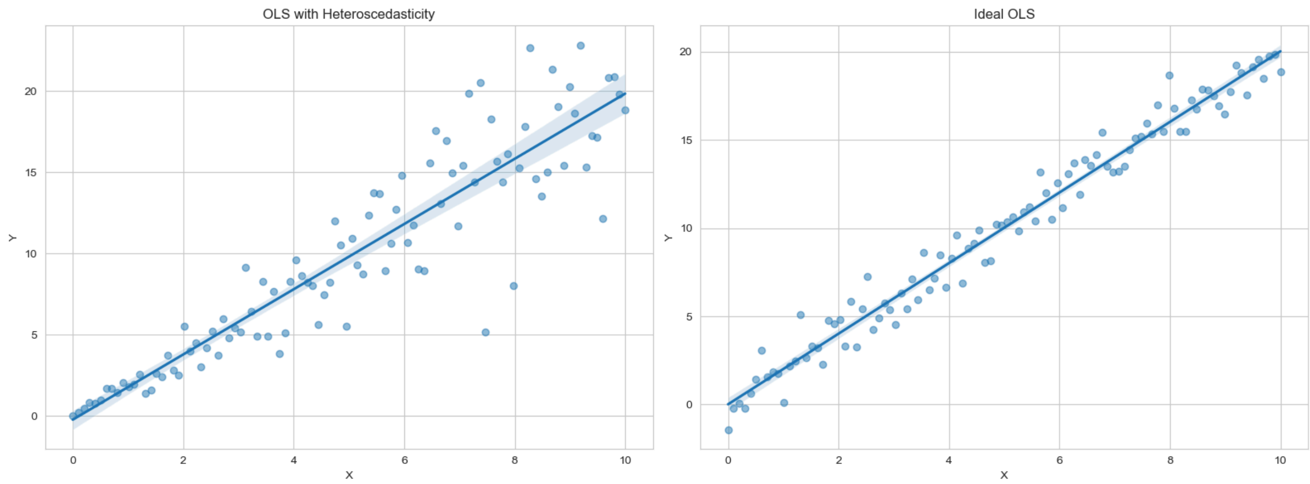
异方差

本章部分内容参考自：https://zhuanlan.zhihu.com/p/242140022

扰动项ϵ的方差$\mathrm{Var}(\epsilon_i|X)$不是常数，而是依赖于i。



计量回归模型 $\mathbf{y}=\beta\mathbf{X}+\mathbf{u}$ 中应出现的方差形式：

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{u}\mid\boldsymbol{X})=\sigma^2\boldsymbol{I}_N=\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2\end{pmatrix}$$

异方差情况下的方差形式（暂时不考虑[自相关]）：

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{u}\mid\boldsymbol{X})=\sigma^2\boldsymbol{I}_N=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2\end{pmatrix}$$

异方差的后果

1. OLS 估计量依然无偏、一致且正态
2. t 检验、F 检验失效
3. 高斯-马尔可夫定理不再成立，OLS 不再是最佳线性无偏估计量。

异方差检验

> 到后面 Stata 代码实现就知道了解这些具体步骤没大必要。

BP 检验

在回归模型

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_K x_{iK} + \varepsilon_i$$

检验原假设$H_0 : E(\epsilon_i^2 | x_2, \cdots, x_K) = \sigma^2$

1. BP 检验假设此条件方差的函数为线性函数：$\varepsilon_i^2 = \delta_1 + \delta_2 x_{i2} + \cdots + \delta_K x_{iK} + u_i$
2. 原假设$H_0 : E(\epsilon_i^2 | x_2, \cdots, x_K) = \sigma^2$简化为$H_0 : \delta_2 = \cdots = \delta_K = 0$，即原假设为不存在异方差
3. 扰动项不可观测，于是使用残差平方向替代解释变量进行辅助回归。
   $e_i^2 = \delta_1 + \delta_2 x_{i2} + \cdots + \delta_K x_{iK} + error_i$
4. 计算 K-1 下的 F 统计量：$\frac{R^2/(K-1)}{(1-R^2)/(n-K)} \sim F(K-1, n-K)$，其中 R^2为辅助回归的拟合优度R^2。
5. 从而得到LM统计量：$LM = nR^2 \xrightarrow{d} \chi^2(K-1)$
6. 根据卡方值确认是否落在拒绝域内

怀特检验

1. BP检验假设条件方差函数为线性函数，可能忽略高次项
2. 于是在BP检验的辅助回归中加入二次项（平方项和交叉项）

优点：理论上可以检验任何形式的异方差，因为根据泰勒展开式，二次函数可以很好地逼近任意光滑函数

缺点：如果解释变量多，则二次项将非常非常多，在辅助回归中将损失较多样本容量，自由度会降低

异方差处理

实操中一般不用GLS，而用OLS+稳健标准误，采用White（1980）提出的异方差稳健调整公式。如果被解释变量取值为正，可以尝试通过**取对数**来缓解异方差的问题。

加权最小二乘法（WLS）

假定只存在异方差，不存在自相关，此时V是对角矩阵：

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & 0 \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\omega_1} & & & 0 \\ & 1/\sqrt{\omega_2} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1/\sqrt{\omega_n} \end{pmatrix}$$

代入 $\hat{\beta}_{GLS}$表达式：$(X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y$

可行广义最小二乘法（FGLS）

使用 BP 检验的辅助回归：$e_i^2=\delta_1+\delta_2x_{i2}+\cdots+\delta_Kx_{iK}+error_i$

得到σ_i^2的估计值，然后以 $1/\hat{\sigma_i}^2$ 为权重进行 WLS 估计。

实际操作时，为了保证$\hat{\sigma}_i^2$始终为正，可以假设辅助回归是指数函数的形式：

$$e_i^2=\sigma^2\exp(\delta_1+\delta_2x_{i2}+\cdots+\delta_Kx_{iK})v_i$$

取对数后做回归，可得$\ln e_i^2$的预测值，记为$\ln\hat{\sigma}_i^2$,以$1/\hat{\sigma}_i^2$为权重对原方程进行WLS估计，这个估计量就是$\hat{\beta}_{FWLS}$

Stata 实现

残差图

```
reg lntc lnq lnpl lnpk lnpf // 先得到回归结果
rvfplot // 绘图
rvfplot lnq // 绘制残差和解释变量的散点图
```

异方差检验

怀特检验

```
estat imtest, white
```

estat 指估计后统计量（post-estimated statistics），imtest 指 information matrix test。所有假设检验依赖前置 reg 命令。

BP 检验

```
estat hettest, iid // 使用默认拟合值 y
estat hettest, rhs iid
```

- estat hettest 是异方差检验的命令
- iid （可选）是指假定独立同分布，不同于前面介绍的ε_i服从正态分布，实践中常用
- rhs (right-hand side) 表示使用自变量的高次项进行检验

WLS

先计算残差平方

```
quietly reg lntc lnq lnpl lnpk lnpf
predict e1, res // 计算残差并存储到变量 e1，详见第五章
g e2 = e1^2 //g 是 generate 的缩写，这是 Stata 中用来创建新「变量」（数据列）的命令，e2 会添加到右边变量窗口。
g lne2 = log(e2)
```

进行辅助回归

```
reg lne2 lnq, noc
predict lne2f
g e2f = exp(lne2f)
```

最后进行 WLS 回归

```
reg lntc lnq lnpl lnpk lnpf [aw=1/e2f]
```

在普通 OLS 里面加入权重，其中权重为 `1/e2f`。