

## 4 机器人铣削系统颤振稳定性分析与实验探究

### 4.1 引言

相比于传统数控机床,工业机器人串联开环的结构具有较低的刚度,将机器人应用于金属铣削加工时,较大的切削负载容易使机器人产生颤振现象,颤振问题严重影响机器人铣削加工尺寸精度和表面质量,甚至损坏刀具、主轴及机器人。为了将颤振问题对加工质量的影响尽可能降到最小,在机器人铣削过程中,应该选择稳定的加工参数,避免不稳定切削状态的产生。

针对机器人铣削加工系统颤振稳定域求解问题,本章首先建立考虑模态耦合作用的机器人铣削系统动力学模型,并推导出再生作用下系统动力学微分方程;接着,基于非对称频响函数模型构建模态空间动力学模型,并对机器人铣削加工系统进行锤击实验,计算获得系统频响函数曲线;然后基于粒子群算法对频响函数曲线进行拟合计算,辨识出模态参数;最后,基于半离散法求解出机器人铣削稳定域,并通过端铣实验验证稳定域结果的准确性。

### 4.2 铣削机器人系统动力学建模

不同于传统机床加工系统,机器人是加工系统中的弱刚度结构,相比于具有较大刚度的待加工零件,机器人加工系统可被认定为柔性的结构体。为了研究机器人加工系统的动力学特性,本章将柔性机器人融入到传统柔性刀具系统中,组成刀具-主轴-机器人柔性工艺系统,并利用运动微分方程描述该柔性系统如下:

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F(t) \quad (4-1)$$

其中,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示该系统的质量矩阵,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示阻尼矩阵,  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示刚度矩阵。  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  表示笛卡尔空间内的振动位移向量,  $F(t) \in \mathbb{R}^n$  表示切削力向量,  $n$  表示该系统自由度的个数。

本章以安装平头铣刀的机器人加工系统为研究对象,针对机器人平面逆铣过程,搭建了如图 4-1 所示的两自由度的铣削动力学模型,平面加工过程中刀尖点仅受到两个方向的作用力,此时,可设  $X(t) = [x(t) \ y(t)]^T$ ,  $F(t) = [F_x(t) \ F_y(t)]^T$ , 则公式 (4-1) 调整为:

$$\begin{bmatrix} m_x & m_{yx} \\ m_{xy} & m_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x & c_{yx} \\ c_{xy} & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & k_{yx} \\ k_{xy} & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{bmatrix} \tag{4-2}$$

其中，矩阵的非对角项分别表示交叉模态质量、交叉模态阻尼和交叉模态刚度，交叉项的引入可以反映出不同方向上的模态耦合作用。 $F_x(t)$ ， $F_y(t)$ 表示切削过程中刀尖受到的两个方向的切削力，切削力的详细计算过程如下：

铣削过程中，考虑再生颤振引起的切削厚度的变化，真实的切削厚度包含静态切削厚度和动态切削厚度两部分，其中静态切削厚度由刀具进给运动时产生，动态切削厚度由当前刀齿切削前一个刀齿加工后的表面产生，假设平头铣刀的刀齿数为 $N$ ，每齿进给量为 $f_z$ ， $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别为当前刀齿切削时刀具中心点笛卡尔坐标， $x(t-\tau)$ 和 $y(t-\tau)$ 表示前一个刀齿切削时的刀具中心点坐标，设主轴转速为 $\Omega$ ，则相邻刀齿时间间隔 $\tau$ 计算公式如下：

$$\tau = 60 / (N\Omega) \tag{4-3}$$

当考虑刀具螺旋角 $\beta$ 时， $t$ 时刻刀具上第 $j$ 个刀齿的角位置 $\phi_j(t)$ 计算如下：

$$\phi_j(t,z) = \frac{2\pi\Omega}{60}t + j\frac{2\pi}{N} - \frac{z \tan \beta}{R} \tag{4-4}$$

其中， $R$ 表示铣刀半径， $z$ 表示沿刀具轴向的坐标。

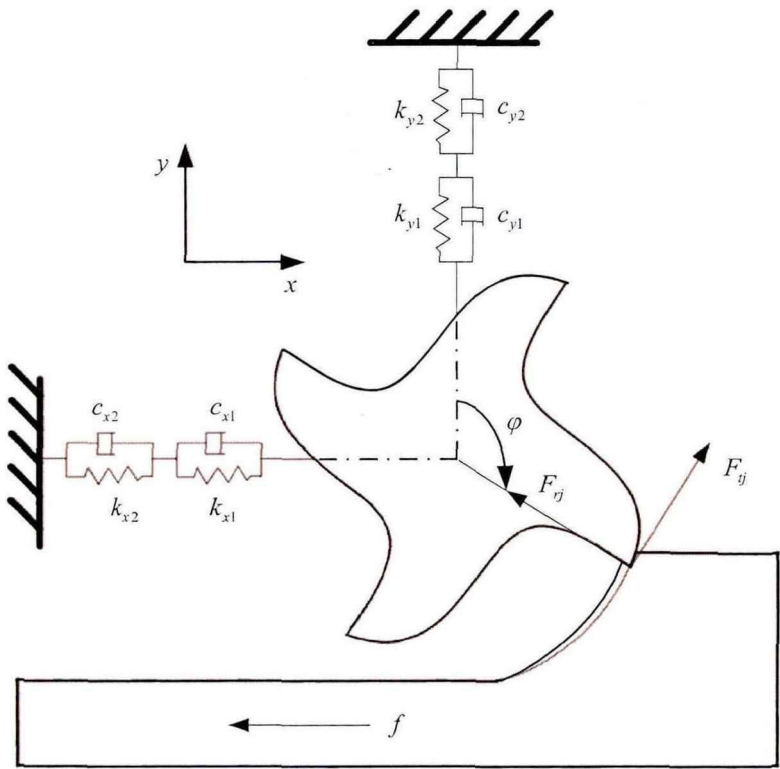


图 4-1 两自由度铣削振动系统示意图

Fig. 4-1 Two-degree-of-freedom milling vibration model

因此, 总的瞬时切削厚度  $h_j(t, z)$  可表示如下:

$$h_j(t, z) = f_z \sin(\phi_j(t, z)) + \left[ \sin(\phi_j(t, z)) \cos(\phi_j(t, z)) \right] \begin{bmatrix} x(t) - x(t - \tau) \\ y(t) - y(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

尽管静态切削厚度也随着铣刀的旋转而变化, 但是静态切削厚度与再生颤振的产生无关, 因此在分析再生作用下系统颤振稳定性时, 静态切削厚度可以被忽略, 因此, 瞬时切削厚度调整为:

$$h_j(t, z) = \left[ \sin(\phi_j(t, z)) \cos(\phi_j(t, z)) \right] \begin{bmatrix} x(t) - x(t - \tau) \\ y(t) - y(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

则切向和径向微分切削力单元可计算如下:

$$\begin{cases} dF_{jt}(t, z) = g(\phi_j(t, z)) [K_{tc}(h_j(t, z)) dz + K_{te} dz] \\ dF_{jr}(t, z) = g(\phi_j(t, z)) [K_{rc}(h_j(t, z)) dz + K_{re} dz] \end{cases} \quad (4-7)$$

其中,  $K_{tc}$ ,  $K_{rc}$  分别代表切向和径向切削力系数;  $K_{te}$ ,  $K_{re}$  分别代表切向和径向的刃口力系数。由于切削过程中计算的刃口力与动态切削厚度  $h_j(t, z)$  无关, 此处可省略刃口力的影响, 省略后的方程如下:

$$\begin{cases} dF_{jt}(t, z) = g(\phi_j(t, z)) [K_{tc}(h_j(t, z)) dz] \\ dF_{jr}(t, z) = g(\phi_j(t, z)) [K_{rc}(h_j(t, z)) dz] \end{cases} \quad (4-8)$$

$g(\phi(t, z))$  表示是否参与切削的窗函数, 计算如下:

$$g(\phi(t, z)) = \begin{cases} 1 & \phi_{st} \leq \phi(t, z) \leq \phi_{ex} \\ 0 & \phi(t, z) < \phi_{st} \text{ or } \phi(t, z) > \phi_{ex} \end{cases} \quad (4-9)$$

$\phi_{st}$  和  $\phi_{ex}$  分别表示切入和切出角。

然后, 对刀具所有刀齿上所受切削力进行累加运算, 获得刀具所受总切削力为:

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^{a_p} dF_{jt}(t, z) = \sum_{j=1}^N \int_0^{a_p} g(\phi(t, z)) h_j(t, z) (K_{tc} \cos(\phi(t, z)) + K_{rc} \sin(\phi(t, z))) dz \\ F_y(t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^{a_p} dF_{jr}(t, z) = \sum_{j=1}^N \int_0^{a_p} g(\phi(t, z)) h_j(t, z) (-K_{tc} \sin(\phi(t, z)) + K_{rc} \cos(\phi(t, z))) dz \end{aligned} \quad (4-10)$$

其中,  $a_p$  表示刀具轴向切深。

然后, 将切削力方程 (4-10) 代入公式 (4-1), 得系统运动微分方程

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = \kappa(t) [X(t) - X(t - \tau)] \quad (4-11)$$

其中  $\kappa_c(t)$  可表示为:

$$\kappa(t) = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{xx}(t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^{a_p} \left[ -g_j \sin(\phi_j) (K_{tc} \cos(\phi_j) + K_{rc} \sin(\phi_j)) \right] dz \\ \kappa_{xy}(t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^{a_p} \left[ -g_j \cos(\phi_j) (K_{tc} \cos(\phi_j) + K_{rc} \sin(\phi_j)) \right] dz \\ \kappa_{yx}(t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^{a_p} \left[ g_j \sin(\phi_j) (K_{tc} \sin(\phi_j) - K_{rc} \cos(\phi_j)) \right] dz \\ \kappa_{yy}(t) &= \sum_{j=1}^N \int_0^{a_p} \left[ g_j \cos(\phi_j) (K_{tc} \sin(\phi_j) - K_{rc} \cos(\phi_j)) \right] dz \end{aligned} \quad (4-13)$$

值得一提的是，此处的运动微分方程省略了静态切削力的影响，仅用于考虑再生作用的系统颤振稳定性分析。

### 4.3 机器人铣削系统模态模型及参数整体辨识方法

为了对铣削刀具系统的动态特性进行分析，需要将物理空间内的动力学模型转变到模态空间，针对结构模态模型，现有文献构建模态模型的形式主要有三种：比例阻尼模态模型，对称非比例阻尼模态模型和非对称非比例阻尼模态模型。由于机器人的弱刚度特性，机器人铣削加工刀具系统存在多个方向模态的耦合作用，此时刀具系统的模态质量矩阵，模态阻尼矩阵和模态刚度矩阵均包含交叉模态，矩阵形式体现为非对称矩阵，对称模型不能反映刀具系统的模态耦合作用，不适合用于描述机器人加工系统的动力学特性。非对称非比例阻尼模型是系统的一般性模型假设，而且非对称的模型结构能够有效体现机器人刀具系统的模态耦合作用，因此，本章选择非对称非比例阻尼模型对机器人刀具系统进行动力学特性建模。

#### 4.3.1 非对称频响函数模型

首先，根据非比例阻尼模型假设，公式(4-1)描述的刀具系统物理模型可变换到状态空间如下：

$$\hat{A}\dot{v}(t) + \hat{B}v(t) = \tilde{\kappa}(t)(v(t) - v(t - \tau)) \quad (4-14)$$

其中，状态空间向量  $v(t) = [X(t) \dot{X}(t)]^T$

状态方程的系数矩阵可表示如下：

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, \quad \tilde{\kappa}(t) = \begin{bmatrix} \kappa(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

然后,根据非对称模型假设,状态方程的系数矩阵呈现非对称性,即  $\hat{A} \neq \hat{A}^T$ ,  $\hat{B} \neq \hat{B}^T$ , 公式(4-14)描述的齐次方程可以通过特征值和特征向量描述如下:

$$\begin{cases} (\hat{A}\lambda + \hat{B})U_R = 0 \\ (\hat{A}^T\lambda + \hat{B}^T)U_L = 0 \end{cases} \quad (4-16)$$

其中,  $U_L$  和  $U_R$  分别代表非归一化的左右特征向量。

基于模态质量归一原则,左右特征向量可转变为:

$$\psi_R = \frac{U_R}{\sqrt{U_L^T \hat{A} U_R}}, \quad \psi_L = \frac{U_L}{\sqrt{U_R^T \hat{A}^T U_L}} \quad (4-17)$$

此时,模态质量归一化之后的特征向量满足一下特征:

$$\psi_L^T \hat{A} \psi_R = I, \quad \psi_L^T \hat{B} \psi_R = -\Lambda \quad (4-18)$$

基于  $v(t) = \psi_R q(t)$ , 将状态空间模型变换到  $2n$  维模态空间模型如下:

$$\dot{q}(t) - \Lambda q(t) = \psi_L^T \tilde{\kappa}(t) \psi^R (q(t) - q(t-\tau)) \quad (4-19)$$

其中,  $q(t) \in \mathbb{C}^{2n}$  表示模态坐标向量,  $\psi_L \in \mathbb{C}^{2n}$  代表左振型矩阵, 且存在右振型矩阵  $\psi_R \in \mathbb{C}^{2n}$ ,  $\Lambda$  的计算公式如下:

$$\Lambda = -\psi_L^T \hat{B} \psi_R = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_k & 0 & \\ & 0 & \bar{\lambda}_k & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

其中,  $\lambda_k = -\xi_k \omega_k \pm i \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}$ ,  $\omega_k$  表示第  $k$  阶固有角频率,  $\xi_k$  代表第  $k$  阶阻尼比, 然后位移频响应函数矩阵  $H_{ij}(\omega)$  可计算得:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{R_i(\omega)}{F_j(\omega)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\psi_{ik}^R \psi_{jk}^L}{\omega i - \lambda_k} + \frac{\bar{\psi}_{ik}^R \bar{\psi}_{jk}^L}{\omega i - \bar{\lambda}_k} \right) \quad (4-21)$$

由公式(4-21)可得  $H_{ij}(\omega) \neq H_{ji}(\omega)$ , 表明该方程可以有效反映出非对称频响应函数中交叉模态项, 适合用于非对称交叉频响应函数的拟合过程。

#### 4.3.2 基于粒子群算法的模态参数辨识方法

实验模态分析方法通常以刀尖点锤击实验的形式, 同时采集力信号和加速度信号, 获得反映激励和响应关系的频响应函数, 然后基于构建的模态模型对频响应函数进行拟合计算, 进而辨识出系统模态参数。

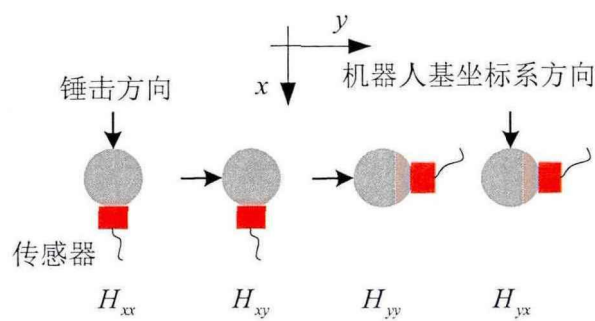


图 4-2 模态试验示意图

Fig. 4-2 Schematic diagram of modal test

针对机器人加工刀具系统多模态耦合的特点，按照图 4-2 所示由  $x$  和  $y$  两个方向依次进行锤击实验，每次实验同时采集  $x$  和  $y$  两个方向上的加速度响应，再通过积分计算便能够获得直接频响函数  $\hat{H}_{xx}$ ， $\hat{H}_{yy}$  以及交叉频响函数  $\hat{H}_{xy}$ ， $\hat{H}_{yx}$ 。模态参数辨识的过程就是对频响函数曲线的拟合过程，为了量化建立的频响函数模型与实测频响函数之间的误差，构建误差矩阵如下：

$$r(\omega_f) = \begin{bmatrix} H_{xx}(\omega_f, \mathbf{p}) - \hat{H}_{xx}(\omega_f) \\ H_{xy}(\omega_f, \mathbf{p}) - \hat{H}_{xy}(\omega_f) \\ H_{yx}(\omega_f, \mathbf{p}) - \hat{H}_{yx}(\omega_f) \\ H_{yy}(\omega_f, \mathbf{p}) - \hat{H}_{yy}(\omega_f) \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

其中， $\omega_f (f=1,2,\dots,N_f)$  表示采样频率， $\mathbf{p}$  表示待辨识的模态参数。

为了缩小模态参数辨识结果造成的频响函数误差，现有文献一般通过最小二乘迭代拟合的方法对模态参数进行辨识，取得了较好的拟合精度<sup>[88]</sup>，但最小二乘拟合方法的优化结果受到变量初值的影响，容易陷入局部最优，无法获得全局最优的参数辨识精度。为了提高模态参数辨识精度，本节基于粒子群算法对频响函数进行拟合计算。

粒子群算法 (Particle swarm optimization, PSO) 的基本思想是通过粒子间的相互影响，不断搜索找到种群中最优粒子。假设  $D$  维空间中，一个种群由  $m$  个粒子组成，第  $i$  个粒子在空间中的位置为  $X_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^D)$ ，速度为  $v_i = (v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^D)$ ，种群中个体最优例子为  $p_i = (p_i^1, p_i^2, \dots, p_i^D)$ ，全局最优例子为  $p_g = (p_g^1, p_g^2, \dots, p_g^D)$ 。粒子的搜索过程会受到个体最优粒子和全局最优粒子的共同影响，用以下计算方程对粒子进行操作：

$$v_i^d(k+1) = \omega * v_i^d(k) + c_1 r_1 (p_i^d - x_i^d(k)) + c_2 r_2 (p_g^d - x_i^d(k)) \quad (4-23)$$

$$x_i^d(k+1) = x_i^d(k) + v_i^d(k+1) \quad (4-24)$$

其中， $i=1,2,\dots,m$ ； $d=1,2,\dots,D$ ； $r_1$  和  $r_2$  是区间  $(0,1)$  内的随机数， $c_1$  和  $c_2$  是非负常数的加速因子，分别表示个体最优粒子和全局最优粒子对当前粒子的影响程度。 $\omega$  是惯

性权重因子，表示上一次迭代搜索速度对下一次迭代搜索速度的影响程度，较大的  $\omega$  有利于避开局部最优，而较小的  $\omega$  有利于进行区域搜索。为了加快收敛速度， $\omega$  的取值随着算法迭代的进行而自动减小， $\omega$  的计算方法如下：

$$\omega = \omega_{\min} + (N_{\max} - N) * \frac{(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{N_{\max}} \quad (4-25)$$

其中， $\omega_{\max}$  和  $\omega_{\min}$  分别表示惯性权重因子的最大值和最小值，惯性权重的取值范围 0.4~0.9， $N$  表示当前迭代次数， $N_{\max}$  表示总的迭代次数。

本节设计的基于 PSO 粒子群算法辨识模态参数的步骤如下：

Step 1: 确定待辨识模态参数，基于非对称模型假设，针对本章描述的刀具系统动力学模型，第  $k$  阶模态包含的待辨识的参数有：固有角频率  $\omega_k$ ，阻尼比  $\xi_k$ ， $x$  方向右振型的实部  $real(\psi_{xk}^R)$ ， $x$  方向右振型的虚部  $imag(\psi_{xk}^R)$ ， $x$  方向左振型的实部  $real(\psi_{xk}^L)$ ， $x$  方向左振型的虚部  $imag(\psi_{xk}^L)$ ， $y$  方向右振型的实部  $real(\psi_{yk}^R)$ ， $y$  方向右振型的虚部  $imag(\psi_{yk}^R)$ ， $y$  方向左振型的实部  $real(\psi_{yk}^L)$ ， $y$  方向左振型的虚部  $imag(\psi_{yk}^L)$ 。

Step 2: 设定模态参数取值范围。

针对  $\omega_k$ ，通过绘制的位移频响函数幅值谱，确定起主导作用的各阶模态，提取各阶固有频率  $\omega_k^m$ ，设置波动范围  $\Delta\omega$ ，则取值范围可设定为  $\omega_k \in [\omega_k^m - \Delta\omega, \omega_k^m + \Delta\omega]$ ；

针对  $\xi_k$ ，考虑到模态分析软件通过频域选择确定的阻尼比参数具有不确定性，此处根据定义设置取值范围： $\xi_k \in [0, 1]$ ；

针对振型参数的实部和虚部，设置取值范围： $[-1, 1]$ 。

Step 3: 确定粒子群算法参数，种群规模  $m$ ，最大进化代数  $N_{\max}$ ，最大、最小权重因子  $\omega_{\max}$  和  $\omega_{\min}$ ，以及学习因子  $c_1$  和  $c_2$ 。

Step 4: 随机初始化粒子群算法的初始种群。

Step 5: 计算当前粒子群各粒子的适应度。首先获取当前粒子包含的模态参数，然后计算特征值，求取位移频响函数估计值，并与实测频响函数各元素作差获得误差矩阵，并计算误差矩阵中元素的平均相对误差作为当前粒子的适应度值。

Step 6: 根据各个粒子适应度值的大小，更新个体最优粒子  $p_i$  和全局最优粒子  $p_g$ 。

Step 7: 根据公式 (4-23) 和公式 (4-24) 进行迭代计算，更新粒子的位置、速度。

Step 8: 判断是否到达最大迭代次数，或者是否满足收敛条件，若达到最大迭代次数或者满足收敛条件则停止迭代，否则返回到 Step 4。

PSO 辨识模态参数的流程如图 4-3 所示。

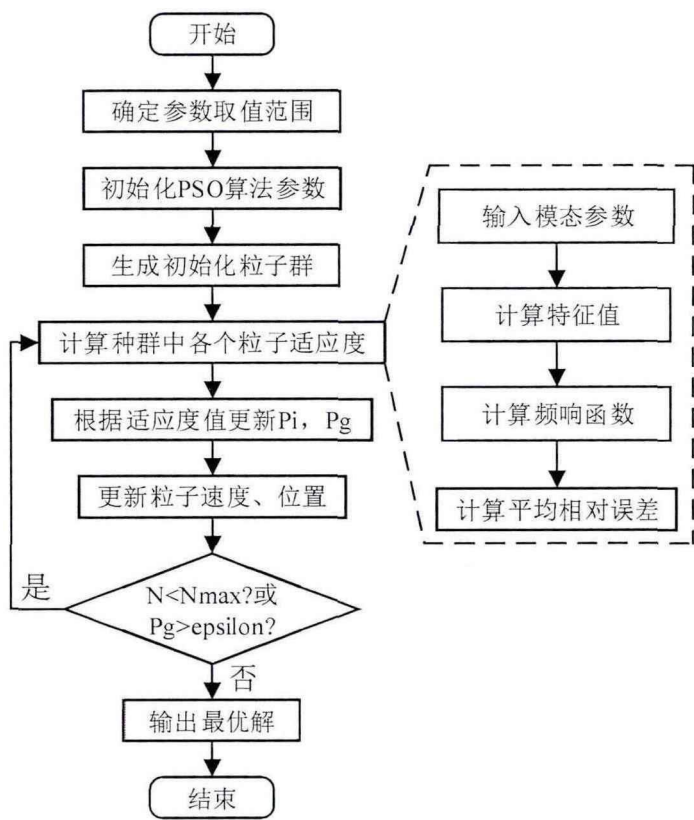


图 4-3 基于 PSO 辨识模态参数流程图

Fig. 4-3 Identification process of modal parameter based on PSO

4.4 颤振稳定性分析

根据上文提出的方法可以完成机器人加工刀具系统模态模型的建立及参数辨识过程，然后基于非对称模态模型可对刀具系统进行颤振稳定域分析及预测。现有文献中对加工稳定性预测的方法主要分为两类：频域预测方法和时域预测方法。其中，零阶频域法（ZOA）是时域预测方法的主要代表，该预测方法能够同时考虑多阶模态和频响交叉项，在稳定性预测场景中应用极为广泛，但是该方法不适用于小的径向切深场景。时域预测方法中应用较为广泛的是半离散方法，以及效率更高的全离散法。鉴于机器人刚度较弱，很难胜任大切深的工况，本章采用半离散法对机器人铣削系统进行稳定性预测。

$$\dot{q}(t) = A(t)q(t) + B(t)q(t - \tau) \tag{4-26}$$

其中， $A(t) = \Lambda + \psi_L^T \tilde{\kappa}(t) \psi_R$ ， $B(t) = -\psi_L^T \tilde{\kappa}(t) \psi_R$  且两者均具有周期性。

首先将周期  $T$  离散为  $k$  分段  $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ ，每个分段长度为  $\Delta t$ ，即  $T = k\Delta t$ ， $k$  为整数，表示时间周期的离散参数，设  $m = \text{int}\left(\frac{\tau + 1/2\Delta t}{\Delta t}\right)$ ，表示时滞项估计参数。



假设周期内的任意时刻 $t$ 处于第 $i$ 分段中, 满足条件:  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , 则在该时间分段内, 周期系数矩阵的数值可以由平均值常数近似代替, 即:

$$A(t) \approx A_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(t) dt \quad (4-27)$$

$$B(t) \approx B_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(t) dt \quad (4-28)$$

则公式(4-26)可以调整为:

$$\dot{q}(t) = A_i q(t) + B_i q_\tau \quad (4-29)$$

然后基于时间分段原则对时滞项 $q(t-\tau)$ 进行离散, 用当前时刻所属离散区间的中间值近似处理可得

$$q(t-\tau) \approx q(t_i + \Delta t / 2 - \tau) \approx \omega_b q_{i-m} + \omega_a q_{i-m+1} = q_\tau \quad (4-30)$$

其中,  $q_{i-m}$  和  $q_{i-m+1}$  分别表示当前区间时滞项的端点值, 权重系数计算方法如下:

$$\omega_b = \frac{-m\Delta t + \Delta t / 2 + \tau}{\Delta t}, \quad \omega_a = \frac{m\Delta t + \Delta t / 2 - \tau}{\Delta t} \quad (4-31)$$

设第 $i$ 分段的方程初始条件为  $q(t_i) = q_i$

则方程的解为以下形式:

$$q(t) = \exp(A_i(t-t_i))(q_i + A_i^{-1}B_i q_\tau) - A_i^{-1}B_i q_\tau \quad (4-32)$$

将公式(4-30)引入后, 可计算区间右端点处, 设  $q(t_{i+1}) = q_{i+1}$ , 可得

$$q_{i+1} = P_i q_i + \omega_b R_i q_{i-m} + \omega_a R_i q_{i-m+1} \quad (4-33)$$

其中,  $P_i = \exp(A_i \Delta t)$ ,  $R_i = (\exp(A_i \Delta t) - I) A_i^{-1} B_i$

根据公式(4-33), 离散后的区间端点值存在以下迭代关系:

$$Q_{i+1} = D_i Q_i \quad (4-34)$$

其中,  $Q_i = [q_i^T, q_{i-1}^T, \dots, q_{i-m}^T]$

$$D_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 & \dots & 0 & \omega_a R_i & \omega_b R_i \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

因此, 在周期内, 离散区间的迭代关系可表示如下:

$$Q_{m+1} = D_m D_{m-1} \dots D_1 Q_1 \quad (4-36)$$

$\Omega = D_m D_{m-1} \dots D_1$  被称为状态转移矩阵。

然后, 可以通过计算状态转移矩阵的特征值判断机器人铣削刀具系统是否稳定, 根

据 Floquet 理论，稳定系统的判定准则为：当特征值模均小于 1 时，表示系统处于稳定状态；如果存在模大于 1 的特征值，代表系统不稳定；如果矩阵所有的特征值的模均为 1 时，系统处于临界稳定状态。根据以上准则，可以通过分析矩阵的特征值分布情况，计算出临界稳定状态时系统的轴向切深与主轴转速，进而完成稳定性瓣图的绘制。

4.5 实验验证

4.5.1 实验配置

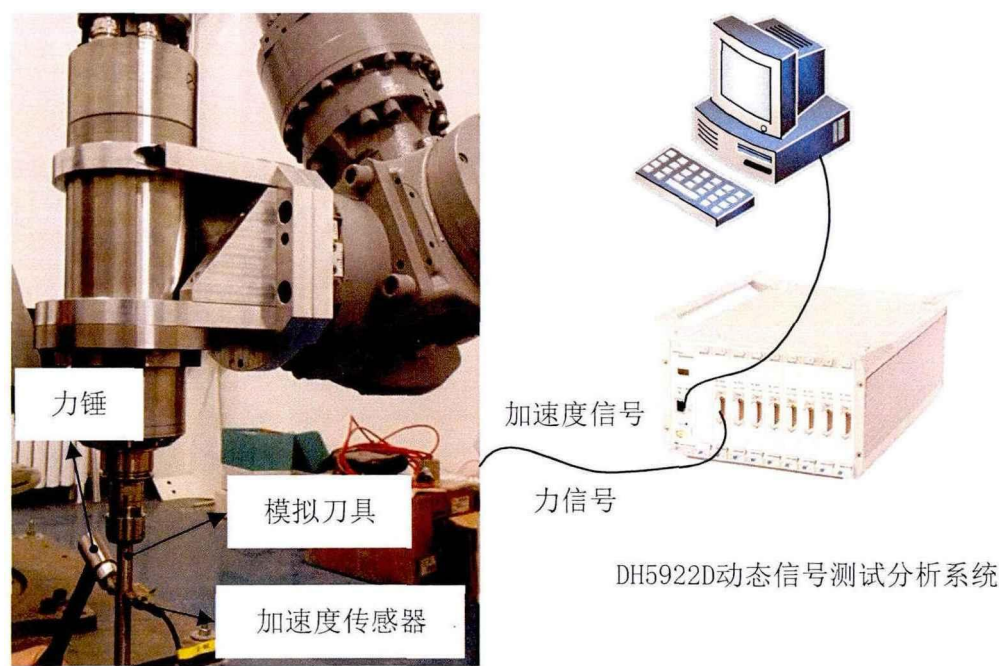


图 4-4 锤击实验设备

Fig. 4-4 Hammer test equipment

为了获得机器人铣削刀具刀尖点频响函数，本章采用东华测试生产的冲击力锤与加速度传感器进行了多次刀尖点锤击模态试验，力锤和加速度传感器的参数如表 4-1 所示。模态试验采用单点激振，多点拾振的方式，采集瞬态激励下两个不同方向上的加速度响应，然后通过 DH5922D 型动态信号测试仪将采集信号传输到 PC 端，借助 DHDAS 动态信号分析系统计算获得加速度频响函数曲线，实验设备如图 4-4 所示。通过对加速度频响函数进行两次积分运算，便可以获得机器人刀具系统的刀尖位移频响函数<sup>[144]</sup>。另一方面，为了辨识出机器人铣削加工铝合金的切削力系数，使用 Kistler 公司生产的 9257B 型测力计对切削过程中铣削力进行了测量，最终通过切削力拟合方法<sup>[145]</sup>获得切削力系数为： $K_{tc}=712\text{ N/mm}^2$ ， $K_{rc}=287\text{ N/mm}^2$ 。

表 4-1 锤击实验设备参数

Tab. 4-1 Equipment used in hammer test

设备名称	型号	灵敏度	量程	冲击或测量位置
冲击力锤	LC02	2.26 mv/N	5000 N	X/Y 方向
加速度传感器	1A102E	1.03 mv/m/s <sup>2</sup>	5000 m/s <sup>2</sup>	X/Y 方向

4.5.2 模态参数辨识结果

本文选择多组机器人位置和姿态分别进行了锤击模态试验，作为代表，此处呈现其中一组姿态的分析结果，该组姿态的详细参数罗列在表 4-2 中。

表 4-2 机器人模态试验姿态参数

Tab. 4-2 Robot posture in modal test

J1	J2	J3	J4	J5	J6	X	Y	Z	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
10°	77.6°	-51.8°	-80.66°	-93.62°	68.87°	1270mm	0	776mm	0	0	90°

为了降低实验过程中的随机误差，每一组锤击实验进行 5 次，然后取平均值。当前机器人位姿的刀尖频响函数曲线如图 4-5 所示。从图中可以明显看出，正交频响函数（ $H_{xx}$  和  $H_{yy}$ ）的幅值总体上要大于交叉频响函数（ $H_{xy}$  和  $H_{yx}$ ）的幅值，表明冲击锤的激励主要导致了正交方向上的响应。 $H_{xy}$  和  $H_{yx}$  的响应存在差异，说明机器人-刀具系统的结构呈现非对称性。由于 1000Hz 以上的模态幅值远小于 1000Hz 以内的模态，本文仅选择 1000Hz 以内的主要模态进行分析，并根据 4.3.2 节提出的频响函数拟合方法对实测频响曲线进行拟合计算，鉴于模态锤击实验采用单点激振，多点拾振的方式进行，即通过锤击  $x$  方向，采集  $x$  和  $y$  方向加速度响应的方式获得频响函数曲线  $H_{xx}$  和  $H_{yx}$ ，通过锤击  $y$  方向，采集  $x$  和  $y$  方向加速度响应的方式获得频响函数曲线  $H_{yy}$  和  $H_{xy}$ 。为了保证辨识精度和可靠性，本文从不同方向分别进行模态参数辨识计算，即基于  $H_{xx}$  和  $H_{yx}$  频响函数曲线辨识  $x$  方向激励时模态参数，基于  $H_{yy}$  和  $H_{xy}$  辨识  $y$  方向激励时的模态参数。

表 4-3 基于粒子群算法拟合频响曲线的关键参数

Tab. 4-3 Key Parameters used by PSO to fit frequency response curve

最大迭代次数	种群规模	最小权重因子	最大权重因子	学习因子
8000	400	0.4	0.9	2

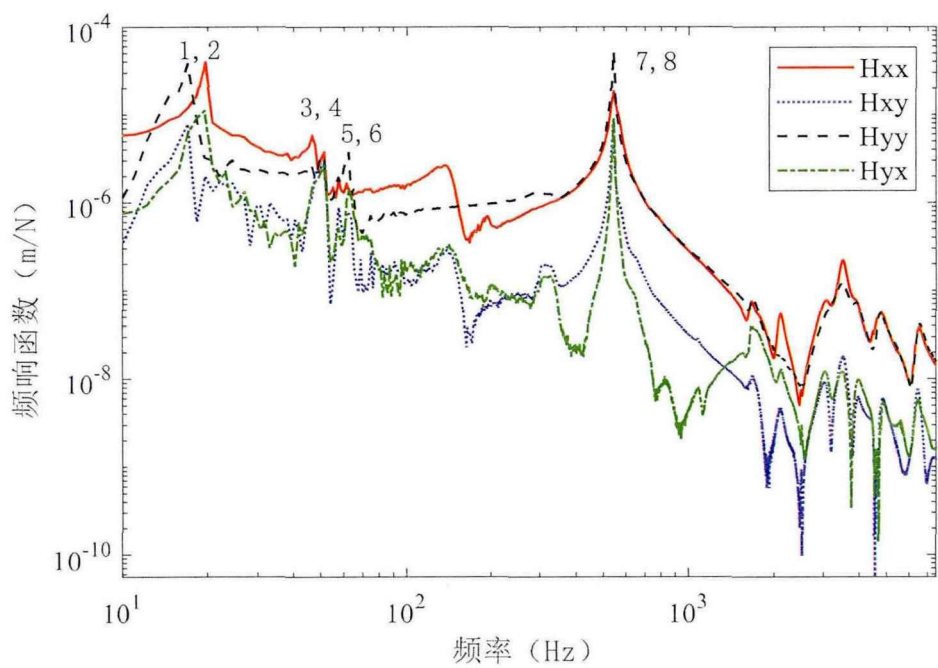


图 4-5 机器人-刀具系统结构的位移频响函数

Fig. 4-5 Displacement frequency response function of robot-tool system

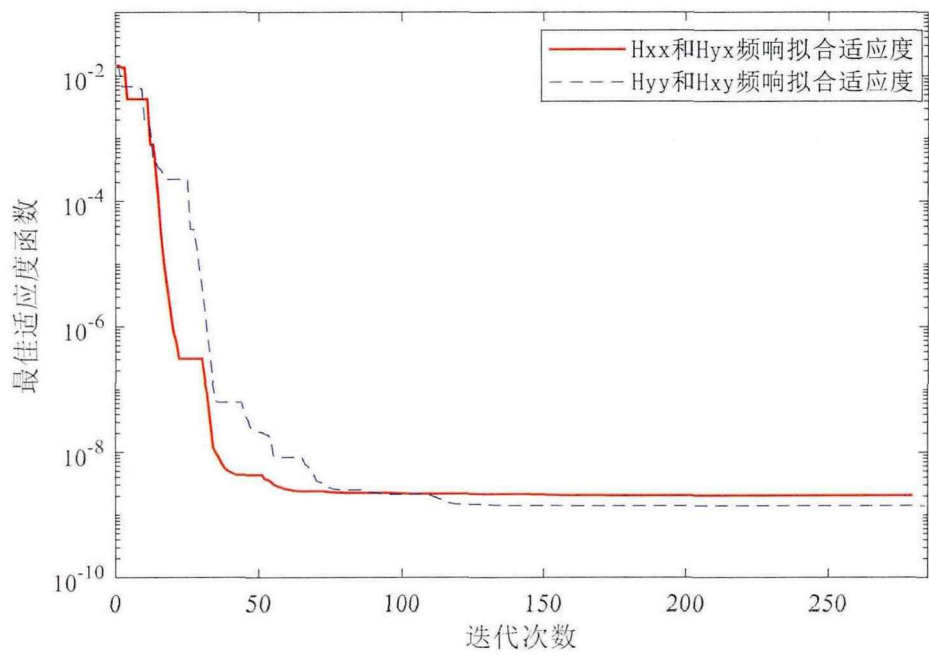


图 4-6 基于粒子群方法拟合频响曲线的最佳适应度迭代过程

Fig. 4-6 Iterative process of Optimal fitness of fitting frequency response curve by PSO

根据上述辨识原则，基于 4.3.2 节提出的模态参数辨识方法，分别针对  $x$  方向激励频响和  $y$  方向激励频响进行频响曲线拟合。辨识过程中粒子群算法用到的关键参数如表 4-3 所示。图 4-6 展示了 PSO 拟合频响的适应度曲线，两个方向的适应度函数值均随着迭代

次数的增加而减小，且分别迭代了 281 次和 284 次便满足终止条件，获得了误差最小的拟合结果，各个方向的频响函数拟合结果如图 4-7，图 4-8，图 4-9 和图 4-10 所示。

图 4-7 和图 4-9 分别表示正交频响函数曲线（ $H_{xx}$  和  $H_{yy}$ ）的拟合结果，从图中可以看出，本章提出的频响函数拟合方法可以保证拟合曲线贴近实测结果，处于 500Hz~600Hz 区间内的模态的拟合效果要优于 0~80Hz 区间内的模态拟合结果。图 4-8 和图 4-10 分别表示交叉频响函数曲线（ $H_{xy}$  和  $H_{yx}$ ）的拟合结果，交叉频响函数曲线的拟合结果也能够贴合实测曲线，但拟合精度低于正交频响函数的拟合结果。

然后，根据曲线拟合结果便能够分别获得  $x$  方向激励及  $y$  方向激励的模态参数，辨识获得的模态参数如表 4-4 所示，相关模态的位置也被标注在图 4-5 中。

表 4-4 辨识出的刀尖点模态参数

Tab. 4-4 Identified modal parameters

模态序号	频率(Hz)	阻尼比(%)	左振型 $\psi_L(\sqrt{s/kg}\cdot10^{-4})$	右振型 $\psi_R(\sqrt{s/kg}\cdot10^{-4})$
1	17.40	1.27	-0.52+0.88i	-1.13-18.25i
			-92.57+23.71i	-8.9+93.36i
2	19.57	2.23	-41.87+24.01i	-118.74+168.83i
			-0.025-0.49i	35.74-40.36i
3	49.86	10	51.08+147.75i	-149.35+15.18i
			-0.47+0.45i	12.66-25.99i
4	53.51	10	0.66-0.09i	-34.35-57.71i
			-94.27-136.68i	14.96-155.42i
5	57.77	10	-0.3-0.77i	15.67-53.87i
			-27.26+163.60i	-58.20-145.84i
6	67.26	10	-105.83-82.49i	-93.87+88.52i
			0.51+0.49i	12.15-16.74i
7	540.08	0.68	-0.81+0.61i	19.27-26.45i
			-317.91-148.16i	173.44+303.95i
8	543.67	2.1	-246.87+215.31i	-269.37+275.61i
			0.24-0.32i	36.20+7.45i

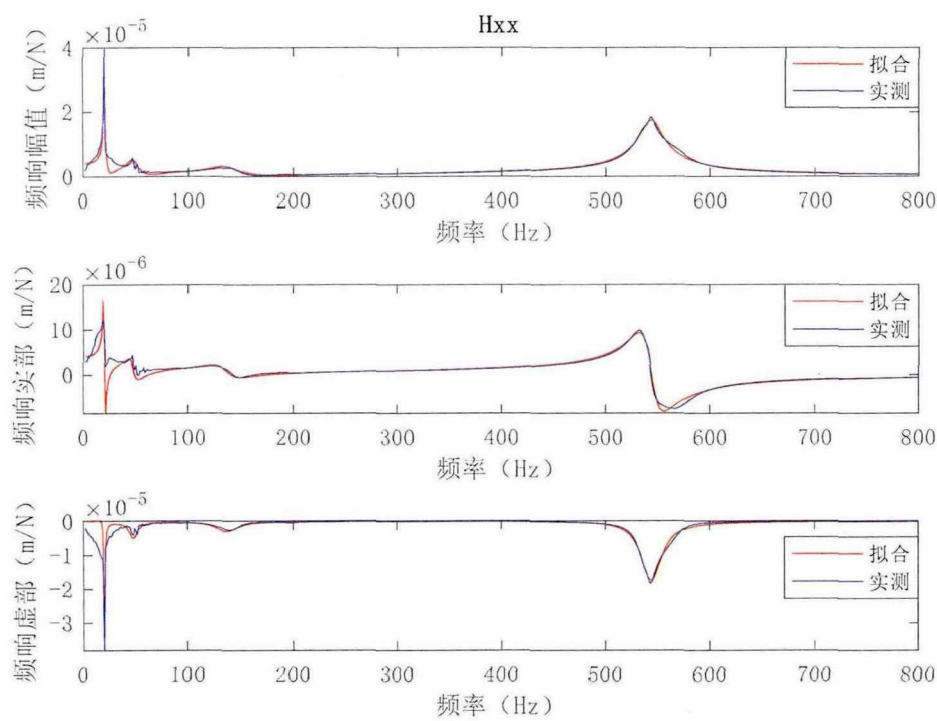


图 4-7 Hxx 频响函数拟合结果

Fig. 4-7 Frequency response function fitting results of Hxx

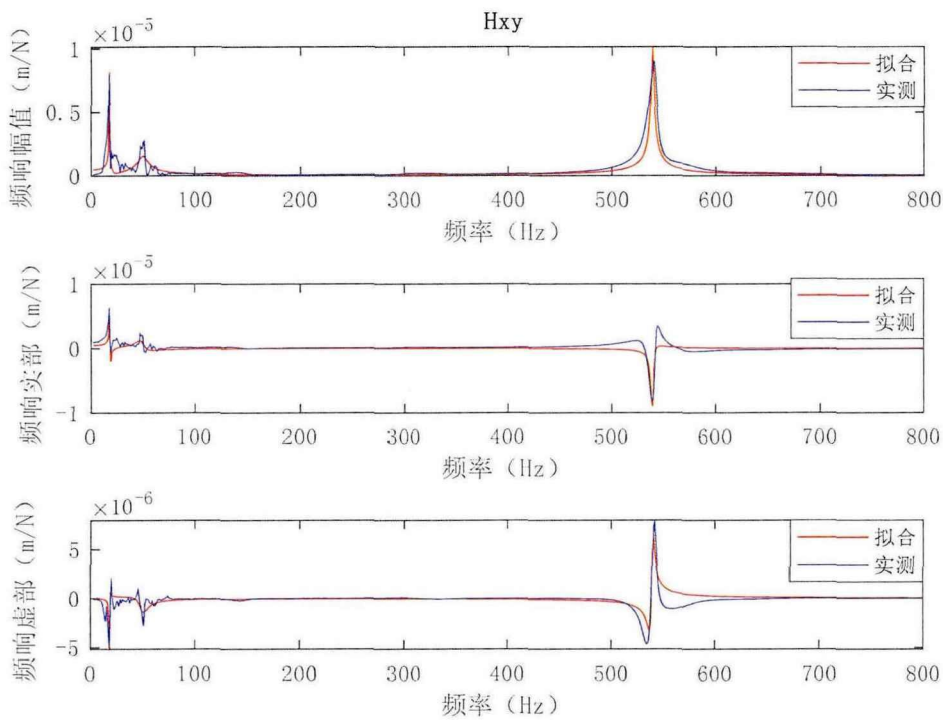


图 4-8 Hxy 频响函数拟合结果

Fig. 4-8 Frequency response function fitting results of Hxy

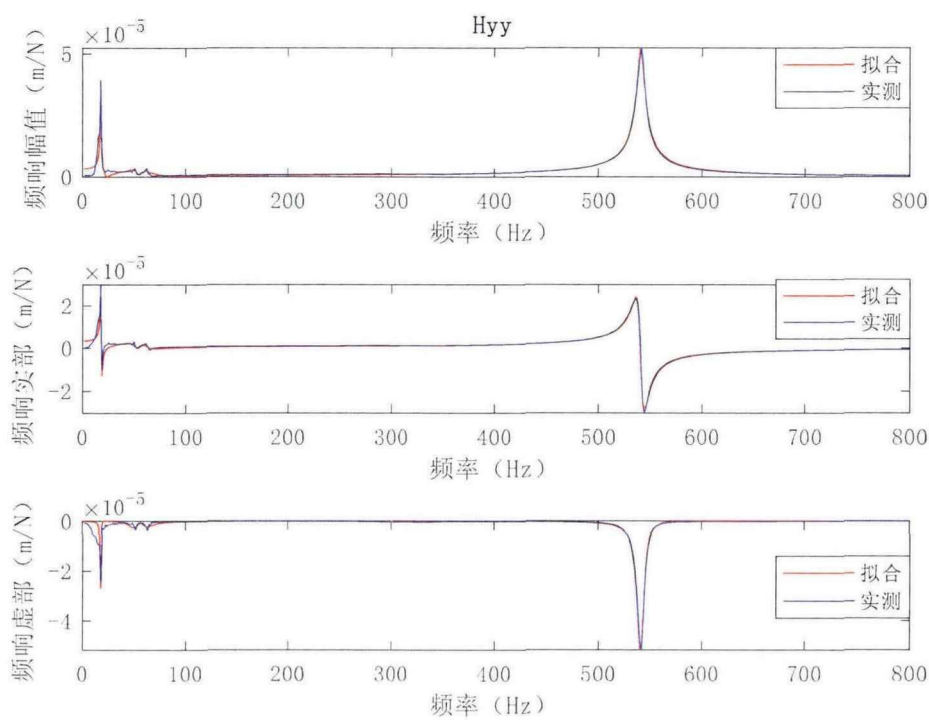


图 4-9  $H_{yy}$  频响函数拟合结果

Fig. 4-9 Frequency response function fitting results of  $H_{yy}$

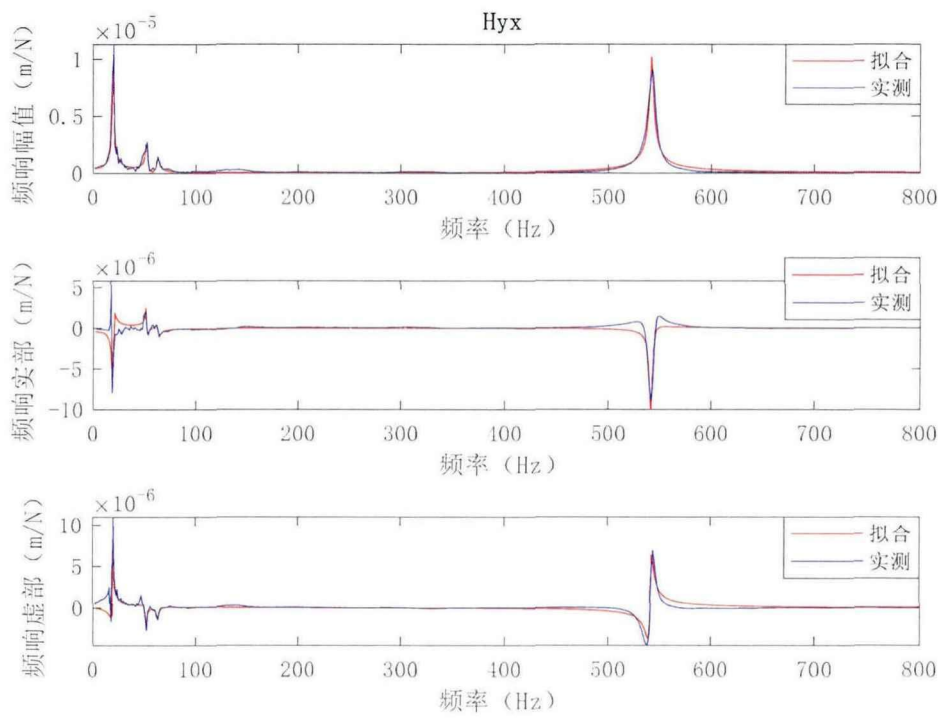


图 4-10  $H_{yx}$  频响函数拟合结果

Fig. 4-10 Frequency response function fitting results of  $H_{yx}$



4.5.3 铣削机器人系统颤振稳定性分析结果

基于辨识出的各阶模态参数，本节使用半离散法预测机器人铣削加工稳定域，计算过程中，假定采用逆铣加工，径向切深与刀具直径比例设置为 15%，将主轴转速和轴向切深组成的参数域均分成  $200 \times 200$  网格，离散数为 40，绘制的各阶模态的稳定性瓣图如图 4-11 所示。结果表明，第 3-4 阶模态和第 5-6 阶模态对颤振稳定域的影响比较小，同时，图 4-5 所示的频响函数幅值显示第 3-4 阶模态和第 5-6 阶模态的幅值较小，表明第 3-4 阶模态和第 5-6 阶模态不是颤振稳定域分析的关键模态，铣削稳定域主要受到幅值较大的第 1-2 阶模态和第 7-8 阶模态的影响，特别是第 7-8 阶模态。

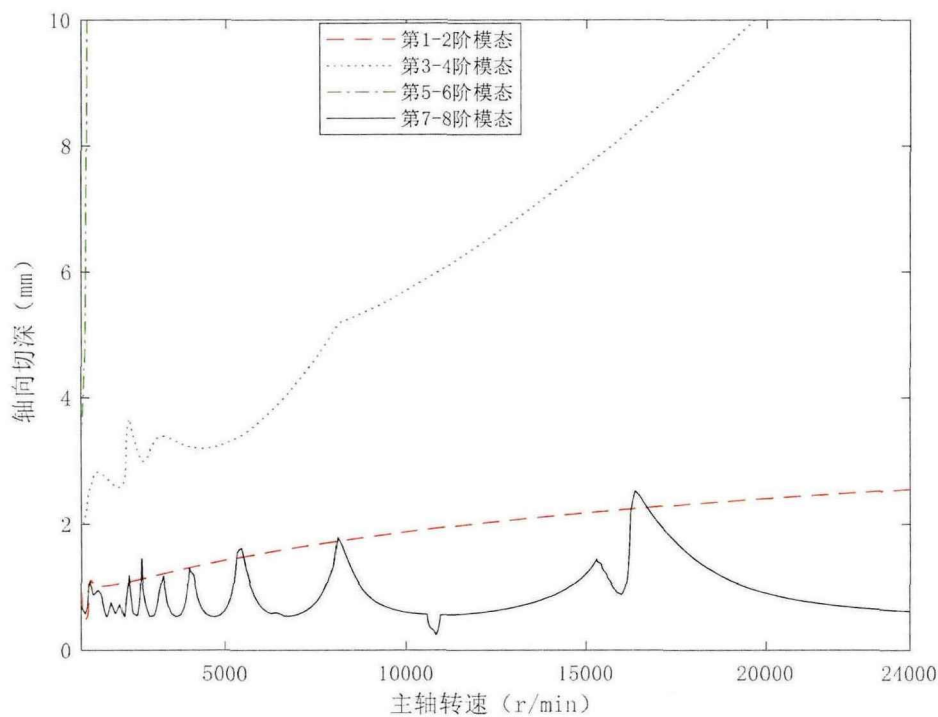


图 4-11 预测的稳定性瓣图

Fig. 4-11 Predicted stability lobe diagram

为了验证辨识及预测方法的准确性，本章开展了一系列机器人铣削实验，铣削过程中沿着机器人基坐标系的  $x$  方向进行直线端铣，设置姿态角度如表 4-2 所示，并保持不变，实验中用到的铣削参数如表 4-5 所示。为了辨识实验过程是否稳定，采用加速度传感器测量实验过程中刀具端的振动数据，然后将实际加工稳定情况与预测结果进行对比，结果如图 4-12 所示，稳定性预测结果和实际情况基本吻合。

为了说明稳定性分析的依据，下面以部分实验采集的  $x$  方向加速度信号为例进行结果分析。图 4-13 (a) 表示取 A 参数 (6500rpm, 0.6mm) 时的加速度信号和频谱，由频谱图可以看出，信号中存在颤振频率 667.483Hz, 1967.45Hz, 2075.95Hz, 且颤振频率之间的差值均为转动基频 (108.33Hz) 的整数倍。图 4-13 (b) 表示 B 参数 (6500rpm, 0.8mm)



时的加速度信号和频谱，频谱图上存在颤振频率 324.99Hz，666.983Hz，991.975Hz 和 1966.95Hz，当转速不变，增大切削深度时，颤振情况更加剧烈了。对于 A 参数和 B 参数的时域信号，可以看出两者参数的加速度信号周期性较差，可以说明 A 参数点和 B 参数点处是不稳定的切削状态，其中 B 参数点存在更明显的颤振频率，实验结果与预测结果是吻合的，A 参数点颤振频率幅值不高，可以认为处于临界状态，这与预测结果是一致的。

表 4-5 铣削实验工艺参数

Tab. 4-5 Process parameters in milling experiment

序号	轴向切深 (mm)	主轴转速 (rpm)	每齿进给 (mm/z)	径向切深 (mm)	采样频率 (Hz)	旋转基频 (Hz)
1	0.5	5000	0.01	1.8	20k	83.33
2	0.7	5000	0.01	1.8	20k	83.33
3	0.9	5000	0.01	1.8	20k	83.33
4	1	5000	0.01	1.8	20k	83.33
5	0.8	5500	0.01	1.8	20k	91.67
6	1	5500	0.01	1.8	20k	91.67
7	1.2	5500	0.01	1.8	20k	91.67
8	1.4	5500	0.01	1.8	20k	91.67
9	0.4	6500	0.01	1.8	20k	108.33
10	0.6	6500	0.01	1.8	20k	108.33
11	0.8	6500	0.01	1.8	20k	108.33
12	1	6500	0.01	1.8	20k	108.33
13	0.8	8000	0.01	1.8	20k	133.33
14	1	8000	0.01	1.8	20k	133.33
15	1.2	8000	0.01	1.8	20k	133.33
16	1.5	8000	0.01	1.8	20k	133.33
17	0.5	9500	0.01	1.8	20k	158.33
18	0.7	9500	0.01	1.8	20k	158.33
19	0.9	9500	0.01	1.8	20k	158.33
20	1	9500	0.01	1.8	20k	158.33
21	0.4	11000	0.01	1.8	20k	183.33
22	0.6	11000	0.01	1.8	20k	183.33
23	0.8	11000	0.01	1.8	20k	183.33

序号	轴向切深 (mm)	主轴转速 (rpm)	每齿进给 (mm/z)	径向切深 (mm)	采样频率 (Hz)	旋转基频 (Hz)
24	0.9	11000	0.01	1.8	20k	183.33
25	0.5	12500	0.01	1.8	20k	208.33
26	0.7	12500	0.01	1.8	20k	208.33
27	0.9	12500	0.01	1.8	20k	208.33
28	1	12500	0.01	1.8	20k	208.33
29	0.9	15000	0.01	1.8	20k	250
30	1.1	15000	0.01	1.8	20k	250
31	1.3	15000	0.01	1.8	20k	250
32	1.5	15000	0.01	1.8	20k	250

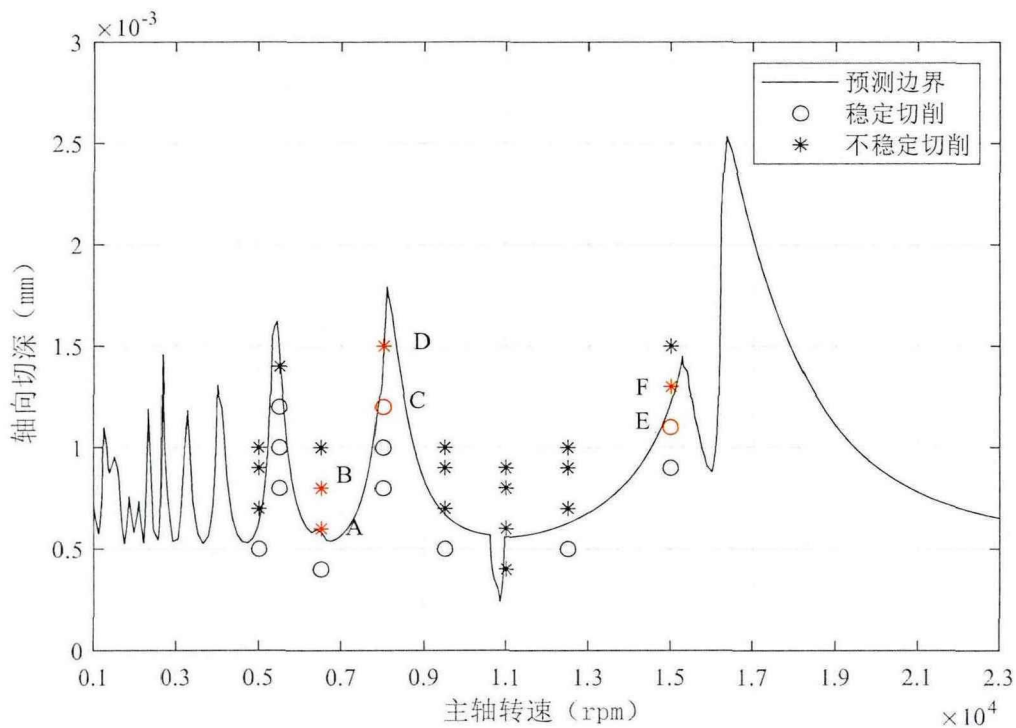
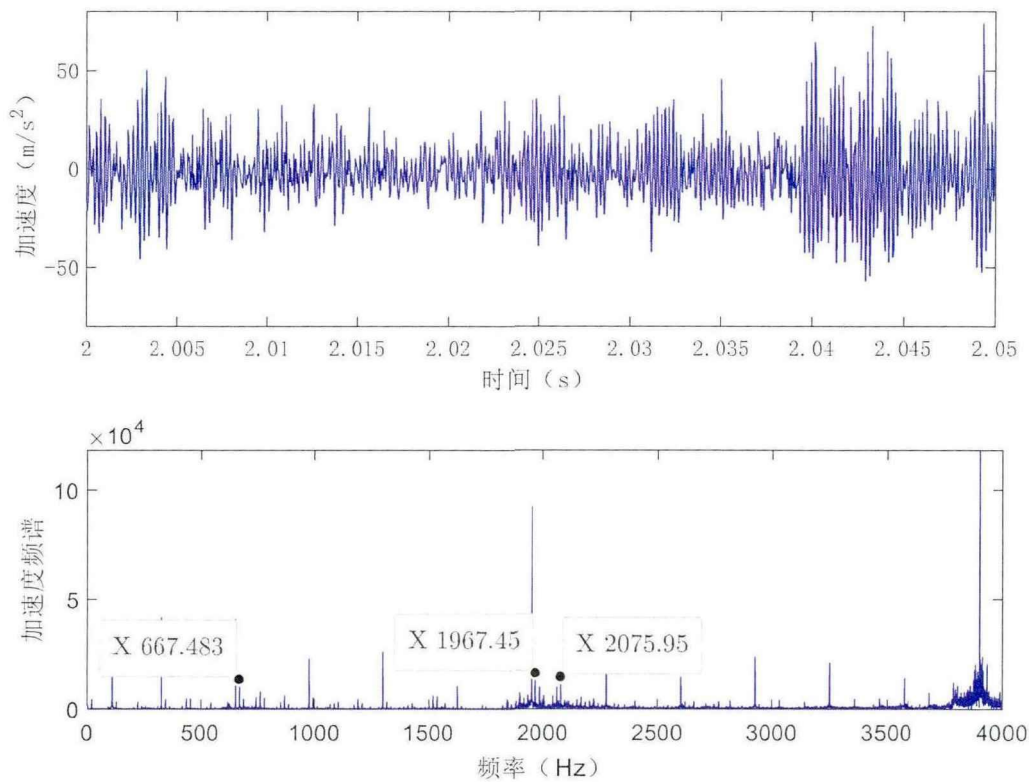


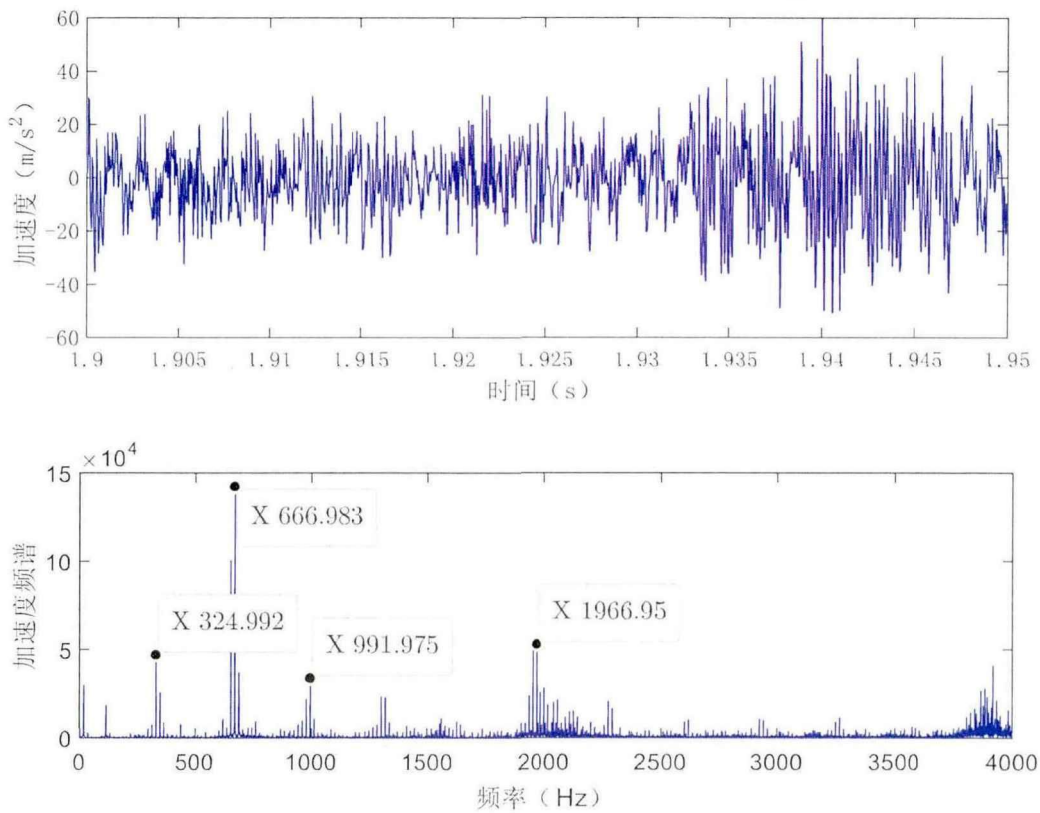
图 4-12 铣削机器人系统的稳定预测结果验证

Fig. 4-12 Stability verification of prediction results

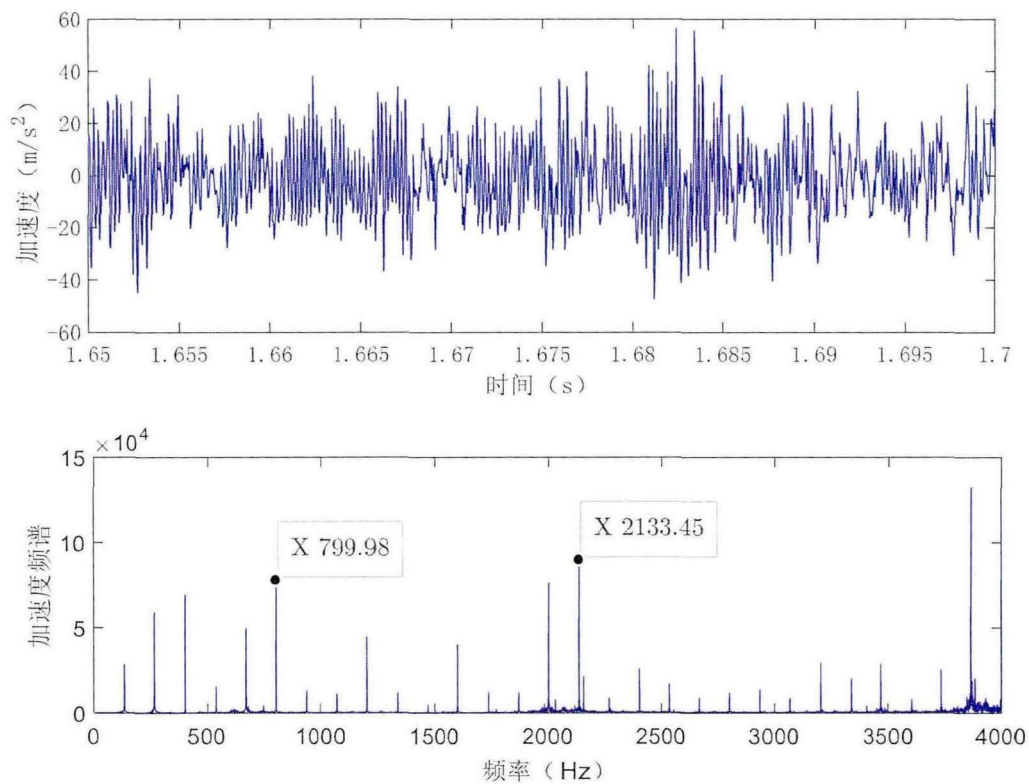
图 4-13 (c)和(d)分别表示 C 参数点 (8000rpm, 1.2mm) 和 D 参数点 (8000rpm, 1.5mm) 测得的加速度信号和频谱, 其中, C 参数点处加速度频谱中未发现明显的颤振频率, 时域信号存在周期性, 而 D 参数点处时域信号周期性较差, 且存在颤振频率 817.48Hz, 2017.45Hz, 3866.9Hz, 经过计算还发现颤振频率之间的差均为基频(133.33Hz)的整数倍。



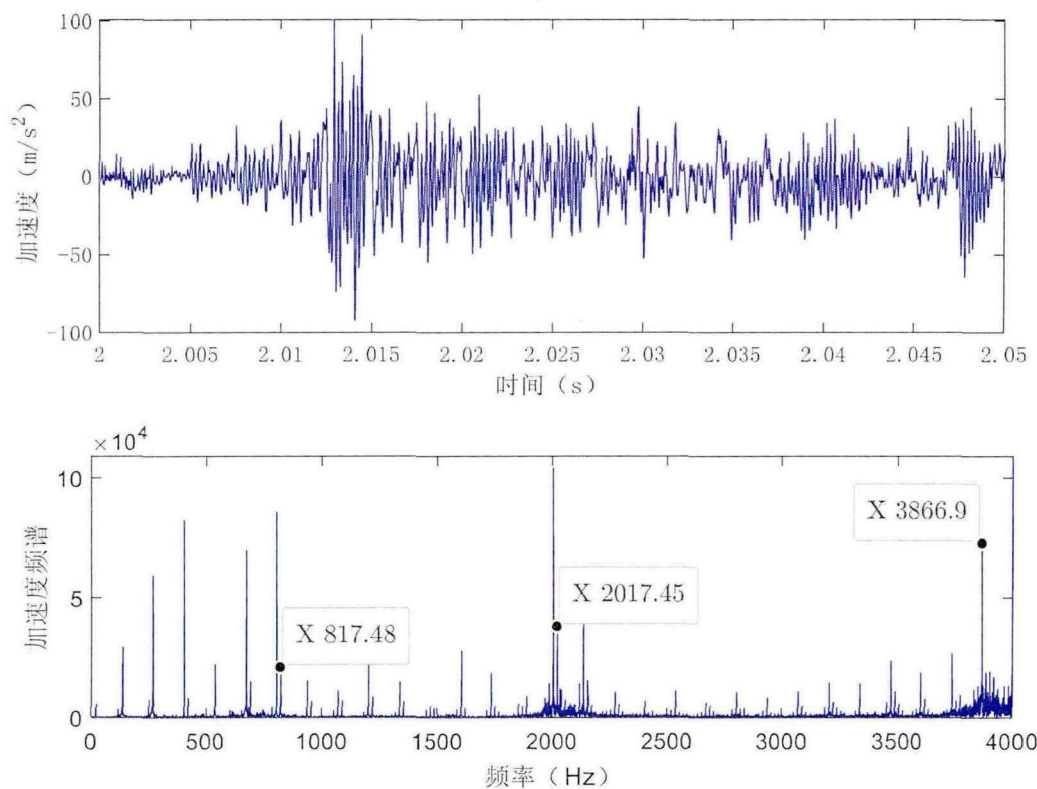
(a) A 点加速度信号和频谱 (颤振)



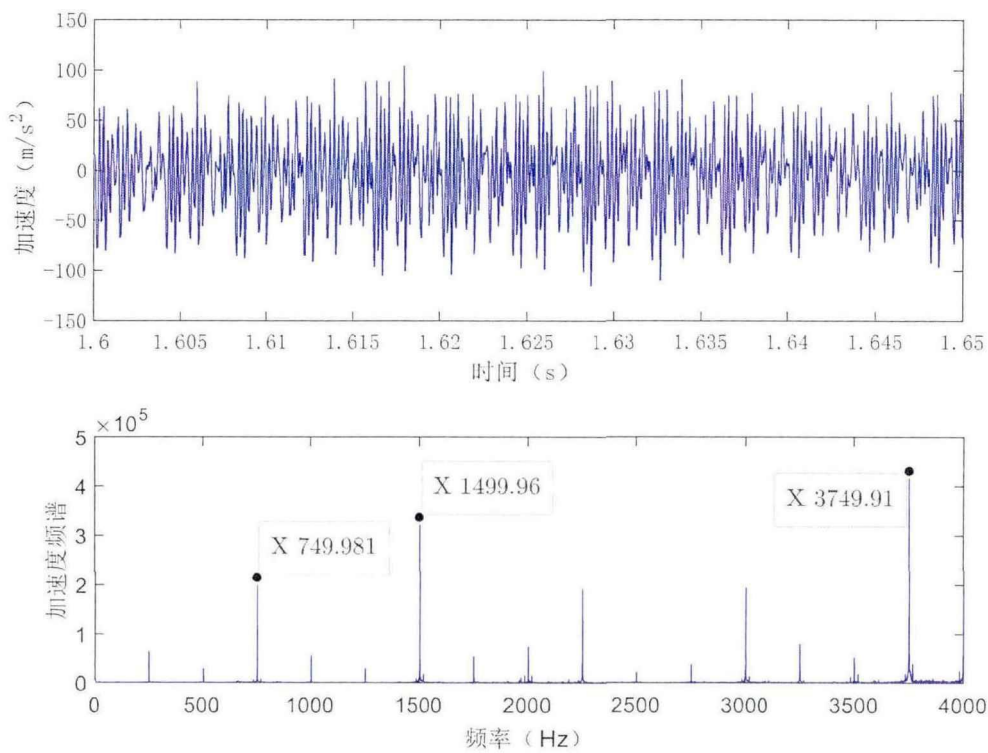
(b) B 点加速度信号和频谱 (颤振)



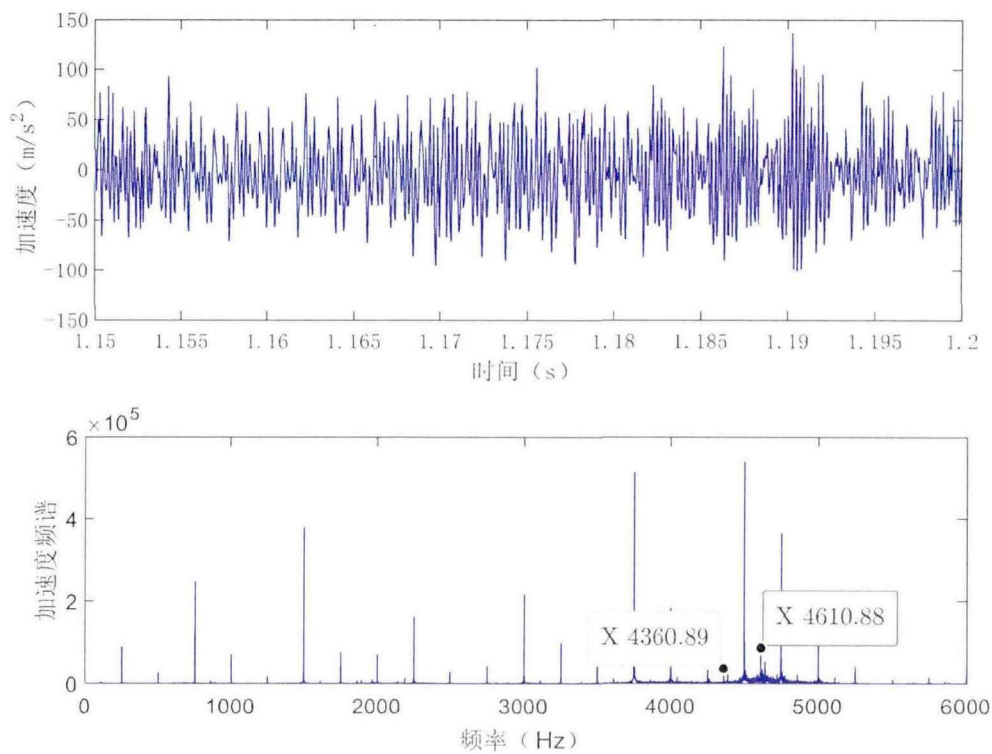
(c) C 点加速度信号和频谱 (稳定)



(d) D 点加速度信号和频谱 (颤振)



(e) E 点加速度信号和频谱（稳定）



(f) F 点加速度信号和频谱（振荡）

图 4-13 不同参数点处加速度信号和频谱

Fig. 4-13 Acceleration signal and spectrum at different parameter points

如图 4-13 (e)和(f)所示, E 参数点 (15500rpm, 1.1mm) 加速度频谱中无明显颤振频率, 呈现稳定切削状态, 而 F 参数点 (15000rpm, 1.3mm) 处的加速度频谱中存在幅值不高的颤振频率, 且颤振频率之间的差值是转动基频的整数倍, 可以认为该参数点处于不稳定状态。以上结果表明稳定性预测边界上的参数点的切削状态预测存在一定误差, 但是即便边界参数点处于不稳定切削状态, 其颤振频率谱幅值不高, 也可以近似认为其处于临界状态。因此, 综合以上实验结果, 本章研究的动力学建模、模态参数辨识及稳定性预测方法具备可行性与稳定性, 能够为机器人铣削加工任务中的工艺参数选择提供依据。

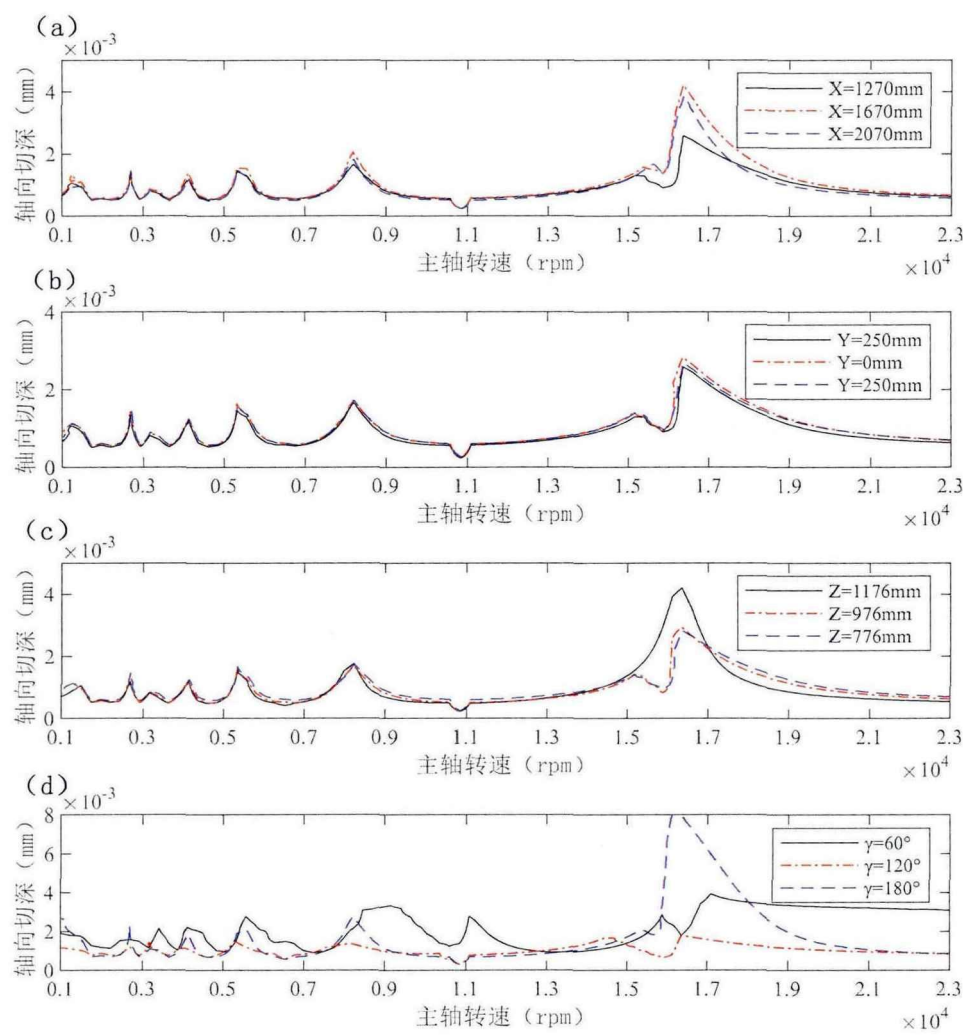


图 4-14 机器人笛卡尔空间各个方向的稳定域分布情况: (a) X 坐标方向上稳定域结果; (b) Y 坐标方向上稳定域结果; (c) Z 坐标方向上稳定域结果; (d)  $\gamma$  坐标方向上稳定域结果

Fig. 4-14 Distribution of stability domains in all directions of cartesian space: (a) The distribution of the stability domain in the X direction; (b) The distribution of the stability domain in the Y direction; (c) The distribution of the stability domain in the Z direction; (d) The distribution of the stability domain in the  $\gamma$  direction



不同于传统的数控机床，工业机器人末端动力学特性随着关节角度配置的变化而改变，机器人末端位姿的改变也必然会影响到机器人铣削稳定域的分布情况。机器人笛卡尔空间位姿包含六个方向，空间位置三个方向（ $x, y, z$ ），空间姿态三个方向（ $\alpha, \beta, \gamma$ ），针对五轴铣削加工任务，机器人会产生一个冗余姿态角 $\gamma$ ，该冗余角的出现为机器人加工姿态的优化提供了条件。本节基于机器人空间 $x, y, z, \gamma$ 四个坐标因素分析末端位置和姿态对铣削颤振稳定域的影响，通过在机器人工作空间内选取多个采样点，分别进行试验模态分析，然后通过频响函数曲线拟合，获得模态参数，最后进行颤振稳定域预测。为了便于对比分析，选取部分采样点位置的测量结果，如表 4-6 所示，各采样点处统一选取 500~600Hz 的模态参数进行稳定域计算。

其中，第 1 组至第 3 组仅改变机器人 $x$ 方向坐标位置，其他方向坐标位置相同，命令机器人逐次运动到这 3 个位置，通过锤击测试，拟合计算，预测获得稳定域结果。第 1 组，第 4 组和第 5 组仅改变 $y$ 方向坐标位置，其他坐标保持不变。第 4 组，第 6 组和第 7 组仅改变 $z$ 方向坐标位置，保持其他方向位置相同。第 8 组到第 10 组保持位置坐标相同，仅改变姿态角 $\gamma$ 。分别对以上位姿处采集的频响函数进行曲线拟合及预测计算，求得稳定域结果如图 4-14 所示。

从结果中可以看出，机器人末端坐标位置和姿态的改变会均引起铣削稳定域的变化，其中，笛卡尔空间的 $x$ 方向坐标、 $y$ 方向坐标、 $z$ 方向坐标对机器人铣削稳定域的影响不大，不同的 $x$ 坐标和 $y$ 坐标预测结果具备相同的稳定性瓣图形状，且临界轴向切深变化很小，特别是在主轴转速低于 15000r/min 时。相比于空间位置因素，空间姿态角 $\gamma$ 对稳定域的影响更大，不同姿态下的临界切深的大小及瓣图的形状呈现出较大的差异性。

表 4-6 机器人刀尖点模态试验采样点位置和姿态信息

Tab. 4-6 The position and posture of the sampling point in the robot tool tip modal test

序号	X (mm)	Y (mm)	Z (mm)	$\alpha$ (°)	$\beta$ (°)	$\gamma$ (°)
1	1270	-250	776	90	0	0
2	1670	-250	776	90	0	0
3	2070	-250	776	90	0	0
4	1270	0	776	90	0	0
5	1270	250	776	90	0	0
6	1270	0	976	90	0	0
7	1270	0	1176	90	0	0
8	1470	0	776	90	0	60
9	1470	0	776	90	0	120
10	1470	0	776	90	0	180

## 4.6 本章小结

本章主要研究机器人铣削加工系统建模、模态参数辨识及颤振稳定域实验探究。通过研究机器人铣削系统动力学模型建模方法，推导出了同时考虑模态耦合与再生作用的动力学微分方程。通过构建非对称频响函数模态空间模型，基于粒子群算法实现了位移频响函数曲线的整体拟合，辨识出机器人铣削系统模态参数，频响拟合实验结果表明，本章提出的方法辨识出的模态参数能较好的实现对位移频响函数曲线的拟合。最后基于半离散法绘制出系统稳定性瓣图，并通过计算不同机器人位姿下稳定域求解结果，分析了机器人稳定域影响要素。机器人端铣实验表明，机器人铣削实验结果与稳定性预测结果基本吻合，根据稳定域预测结果选择加工参数能够有效避免机器人颤振现象的产生，进而从理论上帮助实验人员选择合适的铣削工艺参数。