

第6章 机器人铣削颤振稳定性研究

6.1 引言

串联机器人刚度较低，铣削过程容易发生严重的颤振现象，影响加工精度和表面质量，制约了推广和应用。对于不同的机器人加工系统，其动态特性与颤振稳定性情况相差较大。因此，为准确的了解系统的动态特性，并获得可靠的工艺参数选择区间，需要对机器人加工系统进行实际的建模、实验与分析。

本章针对所搭建铣削加工系统的动态特性与颤振稳定性问题，首先建立平头铣刀立铣加工的平面多自由度物理空间动力学与切削力模型。然后，基于非对称复模态理论，对机器人加工系统进行实验模态分析，辨识各阶模态参数，并重新构建模态空间内的动力学模型。最后，采用半离散法进行颤振稳定性分析，绘制稳定性瓣图，并基于第 5 章提出的加减速算法进行了铣削实验验证。

6.2 机器人铣削动力学模型

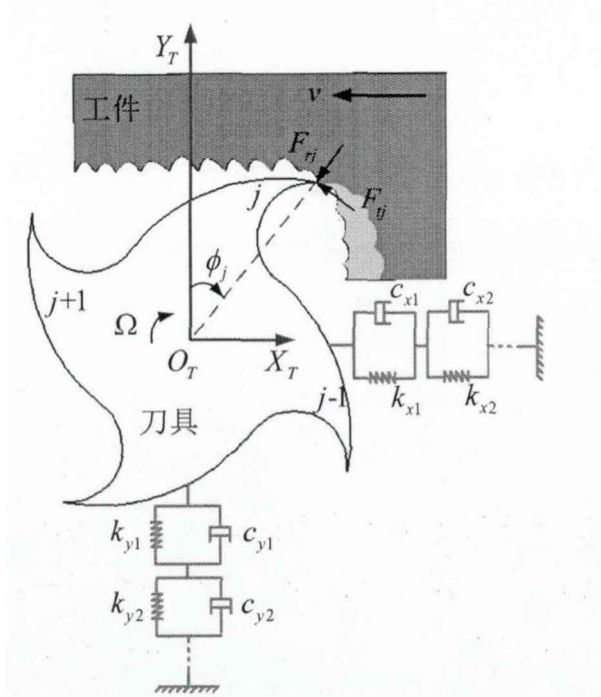


图 6-1 平面多自由度铣削动力学模型

串联机器人刚度较低，是加工系统中的薄弱环节。因此，本章将机器人加工系统对金属工件的铣削过程假设为柔性刀具系统对刚性工件的加工，介绍其铣削动

力学模型。以平头铣刀逆铣过程为例，可建立平面多自由度铣削动力学模型^[115]，如图 6-1 所示，其中 $O_T X_T Y_T$ 为刀具坐标系， j 为刀齿编号， F_{tj} 、 F_{rj} 和 $\phi_j(t)$ 分别为第 j 刀齿所受的切向力、法向力及角位置， Ω 为主轴转速， v 为进给速度。

基于线性切削力模型并忽略刀具的螺旋角效应，第 j 个刀齿所受的瞬时切向力和法向力可表示为：

$$\begin{bmatrix} F_{tj} \\ F_{rj} \end{bmatrix} = ah_j(t) \begin{bmatrix} K_{te} \\ K_{re} \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

其中 $h_j(t)$ 为瞬时切屑厚度， a 为径向切削深度， K_{te} 与 K_{re} 分别为切向和法向切削力系数。考虑再生效应的瞬时切削厚度 $h_j(t)$ 为：

$$h_j(t) = f_z \sin(\phi_j(t)) + \begin{bmatrix} \sin(\phi_j(t)) & \cos(\phi_j(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

其中 $x(t)$ 与 $y(t)$ 为刀具中心点坐标， f_z 为每齿进给量， τ 为考虑再生效应的延时量，等于刀齿切削周期 T ，有 $T = \tau = 60 / (N\Omega)$ ， N 为刀具的刀齿数。第 j 齿的角位置可表示为：

$$\phi_j(t) = (2\pi\Omega / 60)t - 2\pi(j-1) / N \quad (6-3)$$

作用于第 j 个刀齿的法向力和切向力在 X_T 与 Y_T 方向的分量可表示为：

$$\begin{bmatrix} F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix} = g(\phi_j(t)) \begin{bmatrix} -\cos(\phi_j(t)) & -\sin(\phi_j(t)) \\ \sin(\phi_j(t)) & -\cos(\phi_j(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{tj} \\ F_{rj} \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

其中 $g(\phi_j(t))$ 为符号函数，定义如下：

$$g(\phi_j(t)) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi_{st} < \phi_j(t) < \phi_{ex} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6-5)$$

ϕ_{st} 与 ϕ_{ex} 分别为切入、切出角。综合考虑多个刀齿，刀具所受的切削力可表示为：

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \begin{bmatrix} -\cos(\phi_j(t)) & -\sin(\phi_j(t)) \\ \sin(\phi_j(t)) & -\cos(\phi_j(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{tj} \\ F_{rj} \end{bmatrix} \quad (6-6)$$

综合式(6-1)-(6-6)可得：

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = a\mathbf{A}(t) \begin{bmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{bmatrix} + a\mathbf{f}_0(t) \quad (6-7)$$

其中 $\mathbf{A}(t)$ 为方向系数矩阵, $a\mathbf{f}_0(t)$ 为静态力分量, 可分别表示如下:

$$\mathbf{A}(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t)) \begin{bmatrix} -K_t s \phi_j c \phi_j - K_r s^2 \phi_j & -K_t c^2 \phi_j - K_r s \phi_j c \phi_j \\ K_t s^2 \phi_j - K_r s \phi_j c \phi_j & K_t s \phi_j c \phi_j - K_r c^2 \phi_j \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

$$a\mathbf{f}_0(t) = \sum_{j=1}^N ag(\phi_j(t)) \left\{ f_z \begin{bmatrix} -K_t s \phi_j c \phi_j - K_r s^2 \phi_j \\ K_t s^2 \phi_j - K_r s \phi_j c \phi_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_t c^2 \phi_j - K_r s \phi_j c \phi_j \\ K_t s \phi_j c \phi_j - K_r c^2 \phi_j \end{bmatrix} \right\} \quad (6-9)$$

由式(6-8)与(6-9)可知, $\mathbf{A}(t)$ 与 $\mathbf{f}_0(t)$ 均为周期函数, 即 $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+T)$, $\mathbf{f}_0(t) = \mathbf{f}_0(t+T)$ 。

将刀具系统简化为集中质量模型, 假设具有 n 个自由度, 其物理空间内的动力学模型可描述为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (6-10)$$

其中 \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 分别为 n 维物理空间质量、阻尼和刚度矩阵, $\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \ r_2(t) \ \dots \ r_n(t)]^T$ 为 n 维物理空间坐标, 设 $r_1(t) = x(t)$, $r_2(t) = y(t)$, $x(t)$ 与 $y(t)$ 为刀具中心点坐标, $r_3(t) \sim r_n(t)$ 为其他自由度坐标。加工过程中仅刀尖点处受两个方向的外力, 对应 $\mathbf{r}(t)$ 向量, 有 n 维力向量 $\mathbf{f}(t) = [F_x(t) \ F_y(t) \ 0 \ \dots \ 0]^T$ 。

6.3 刀具系统模态分析与参数辨识

6.3.1 模态模型的选择

式(6-10)所示的矩阵微分方程已经给出了考虑再生效应的动力学模型, 但其中的物理空间动力学参数 \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 难以获得。因此, 需要对刀具系统进行模态分析, 以获得各阶模态参数并将模型从物理空间变换到模态空间, 以分析系统的动态特性。目前对结构的模态模型假设主要有三种类型: 对称比例阻尼模型、对称非比例阻尼模型和非对称非比例阻尼模型^[90]。下面分别介绍该三类模型。

(1) 对称比例阻尼模型

该模型假设阻尼矩阵可以表示为质量与刚度矩阵的线性组合, 如下所示:

$$\mathbf{C} = \alpha_M \mathbf{M} + \alpha_K \mathbf{K} \quad (6-11)$$

其中 $\alpha_M \in \mathbb{R}$, $\alpha_K \in \mathbb{R}$ 。在该假设下, 有阻尼系统的阵型矩阵与无阻尼系统相同, 使用无阻尼系统的阵型向量可直接实现对有阻尼系统物理空间模型的解耦, 且阵型元素均为实数。对于 n 自由度系统, 在模态质量归一设定下, 模态空间下的系统动力学模型可描述为:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + [2\xi_k \omega_{nk}] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\omega_{nk}^2] \mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}(t) \quad (6-12)$$

其中 $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为模态坐标向量, ω_{nk} 与 ξ_k 分别为第 k 阶无阻尼固有角频率与阻尼比, $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为阵型矩阵, 有 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{\Phi} \mathbf{q}(t)$, $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为力向量。频响函数矩阵 $\mathbf{H}(\omega)$ 的元素可描述如下

$$H_{ij}(\omega) = \frac{R_i(\omega)}{F_j(\omega)} = \sum_{k=1}^n \frac{\phi_{ik} \phi_{jk}}{-\omega^2 + 2\xi_k \omega_{nk} \omega i + \omega_{nk}^2} \quad (6-13)$$

其中 $R_i(\omega) = \mathcal{F}(r_i(t))$, $r_i(t)$ 为式(6-10)中的物理空间坐标, $F_i(\omega) = \mathcal{F}(f_i(t))$, $f_i(t)$ 为物理空间受力, \mathcal{F} 为傅里叶变换, ϕ_{ik} 与 ϕ_{jk} 为阵型矩阵 $\mathbf{\Phi}$ 中的元素, 有

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (6-14)$$

由式(6-13)可知, $H_{ij}(\omega) = H_{ji}(\omega)$, 即 $\mathbf{H}(\omega)$ 为对称矩阵。为获得刀尖点处的动态特性, 在模态质量归一设定下, 任一阶模态包含四个需要确定的实数变量: ϕ_{ik} 、 ϕ_{jk} 、 ξ_k 与 ω_{nk} 。

(2) 对称非比例阻尼模型

非比例阻尼模型不存在式(6-11)所示的假设, 阻尼参数与质量和刚度参数是相互独立的。此时, 阵型向量的元素不全为实数, 因此也称为复模态。在非比例阻尼假设下, 式(6-10)所示的物理空间模型无法被直接解耦, 需要变换为状态空间模型, 如下所示:

$$\hat{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{v}}(t) + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{v}(t) = \mathbf{f}_v(t) \quad (6-15)$$

其中 $\mathbf{v}(t) = (\mathbf{r}^T(t) \quad \dot{\mathbf{r}}^T(t))^T$ 为状态向量, 状态方程系数矩阵分别为

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_v(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6-16)$$

忽略诸如电磁力、转子与定子之间摩擦力等的影响, 质量阵、阻尼阵与刚度阵均为对称矩阵^[153,154], 即有 $\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}}^T$, $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}^T$ 。此时式(6-15)描述的状态空间模型可变换为 $2n$ 维模态空间模型, 如下所示:

$$\dot{\mathbf{q}}_v(t) - \Lambda \mathbf{q}_v(t) = \mathbf{\Psi}^T \mathbf{f}_v(t) \quad (6-17)$$

其中, $\mathbf{q}_v(t) \in \mathbb{C}^{2n}$ 为模态坐标向量, $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ 为阵型矩阵, 有 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{\Psi} \mathbf{q}_v(t)$, $\mathbf{\Lambda}$ 可表示如下

$$\mathbf{\Lambda} = -\mathbf{\Psi}^T \hat{\mathbf{A}} \mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_k & 0 & \\ & 0 & \bar{\lambda}_k & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (6-18)$$

其中 $\lambda_k = -\xi_k \omega_{nk} \pm i \omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2}$, ω_{nk} 与 ξ_k 分别为第 k 阶固有角频率和阻尼比。频响函数矩阵 $\mathbf{H}(\omega)$ 的元素为:

$$H_{ij}(\omega) = \frac{R_i(\omega)}{F_j(\omega)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\psi_{ik} \psi_{jk}}{\omega i - \lambda_k} + \frac{\bar{\psi}_{ik} \bar{\psi}_{jk}}{\omega i - \bar{\lambda}_k} \right) \quad (6-19)$$

其中 ψ_{ik} 与 ψ_{jk} 均为阵型矩阵 $\mathbf{\Psi}$ 的元素。由式(6-19)可知 $H_{ij}(\omega) = H_{ji}(\omega)$, 即 $\mathbf{H}(\omega)$ 为对称矩阵。为获得刀尖点处的动态特性, 在模态质量归一设定下, 任一阶模态包含 6 个需要确定的实数变量: $\text{real}(\psi_{ik})$ 、 $\text{imag}(\psi_{ik})$ 、 $\text{real}(\psi_{jk})$ 、 $\text{imag}(\psi_{jk})$ 、 ξ_k 与 ω_{nk} 。

(3) 非对称非比例阻尼模型

系统结构通常受到额外力的作用, 如转子-定子摩擦力、电磁力、不稳定的气体力与时变的流体力等, 这些力较难建模和测量^[90]。当考虑这些力的作用时, 质量阵、阻尼阵与刚度阵皆为非对称阵, 比例阻尼模型与对称非比例阻尼模型均不适用, 因而非对称非比例阻尼模型被提出来。该模型是最具一般性的模型假设, 式(6-11)所示的比例阻尼假设与式(6-16)所示系数矩阵的对称性均不存在。同样构造如式(6-15)所示的 $2n$ 维状态空间模型, 并变换为模态空间模型, 如下所示:

$$\dot{\mathbf{q}}_v(t) - \mathbf{\Lambda} \mathbf{q}_v(t) = \mathbf{\Psi}_L^T \mathbf{f}_v(t) \quad (6-20)$$

其中 $\mathbf{q}_v(t) \in \mathbb{C}^{2n}$ 为模态坐标向量, $\mathbf{\Psi}_L \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ 为左阵型矩阵, 对应的存在右阵型矩阵 $\mathbf{\Psi}_R \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ 且有 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{\Psi}_R \mathbf{q}_v(t)$, $\mathbf{\Lambda}$ 可表示为:

$$\mathbf{\Lambda} = -\mathbf{\Psi}_L^T \hat{\mathbf{B}} \mathbf{\Psi}_R = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_k & 0 & \\ & 0 & \bar{\lambda}_k & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (6-21)$$

同样有 $\lambda_k = -\xi_k \omega_{nk} \pm i \omega_{nk} \sqrt{1 - \xi_k^2}$, ω_{nk} 与 ξ_k 分别为第 k 阶固有角频率和阻尼比, 有

$\omega_{nk}^2 = |\lambda_k|$ 。固有频率 f_{nk} 与固有角频率 ω_{nk} 的关系为 $\omega_{nk} = 2\pi f_{nk}$ 。频响函数矩阵 $\mathbf{H}(\omega)$ 的元素为

$$H_{ij}(\omega) = \frac{R_i(\omega)}{F_j(\omega)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\psi_{ik}^R \psi_{jk}^L}{\omega i - \lambda_k} + \frac{\bar{\psi}_{ik}^R \bar{\psi}_{jk}^L}{\omega i - \bar{\lambda}_k} \right) \tag{6-22}$$

其中 ψ_{ik}^R 与 ψ_{jk}^L 分别为阵型矩阵 Ψ_R 与 Ψ_L 中的元素。由式(6-22)可知 $H_{ij}(\omega) \neq H_{ji}(\omega)$ ，即 $\mathbf{H}(\omega)$ 为非对称矩阵。为获得刀尖点处的动态特性，在模态质量归一设定下，任一阶模态包含 10 个需要确定的实数变量： $\text{real}(\psi_{ik}^R)$ 、 $\text{imag}(\psi_{ik}^R)$ 、 $\text{real}(\psi_{jk}^L)$ 、 $\text{imag}(\psi_{jk}^L)$ 、 $\text{real}(\psi_{jk}^R)$ 、 $\text{imag}(\psi_{jk}^R)$ 、 $\text{real}(\psi_{ik}^L)$ 、 $\text{imag}(\psi_{ik}^L)$ 、 ξ_k 与 ω_{nk} 。

综上所述，非对称非比例阻尼模型表达形式最复杂、待定参数最多、辨识难度最大，对实际系统的描述也最准确。而机器人刚度低、耦合度高，其动态特性存在明显的不对称性。因此，本章选择使用非对称非比例模型进行动力学建模。

6.3.2 模态参数辨识

实验模态分析通过采集被测系统的输入、输出信号，并基于模型假设与参数辨识，获得系统模态参数，具有较高的精度。同时，用锤击法适用于中小型结构的现场实验。因此，本章选择锤击实验模态分析法。

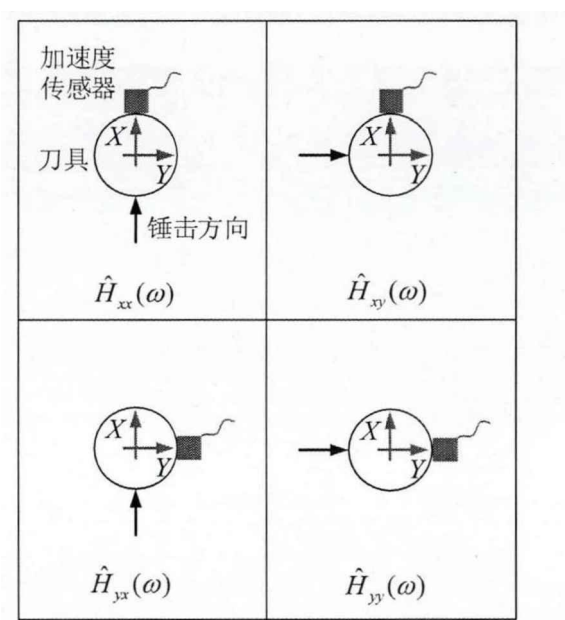


图 6-2 刀尖点处的模态实验

铣削加工过程切削力仅作用于刀尖点处，因此只需要探究刀具系统刀尖点处

在外力作用下的动态特性即可。如图 6-2 所示, 基于图 6-1 给出的动力学模型, 对刀尖点在两个方向上进行模态实验。考虑模态耦合效应, 在同一机器人位姿下, 可同时获得 4 条频响曲线 $\hat{H}_{xx}(\omega)$ 、 $\hat{H}_{xy}(\omega)$ 、 $\hat{H}_{yx}(\omega)$ 与 $\hat{H}_{yy}(\omega)$, 其中坐标方向与图 2-7 的基坐标系一致。

对模态参数辨识的原则是使理论模型对频响曲线的拟合误差最小, 即

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \left(\sum_{f=1}^{N_f} \|Err(\omega_f)\|^2 \right) \\ Err(\omega_f) = \begin{bmatrix} H_{xx}(\omega_f, \mathbf{p}) - \hat{H}_{xx}(\omega_f) \\ H_{xy}(\omega_f, \mathbf{p}) - \hat{H}_{xy}(\omega_f) \\ H_{yx}(\omega_f, \mathbf{p}) - \hat{H}_{yx}(\omega_f) \\ H_{yy}(\omega_f, \mathbf{p}) - \hat{H}_{yy}(\omega_f) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (6-23)$$

其中 $\omega_f (f=1, 2, \dots, N_f)$ 为采样频率, N_f 为采样点数, \mathbf{p} 为待辨识的模态参数向量。

该辨识过程可使用 Matlab 的 *Fmincon* 函数实现。由于 *Fmincon* 函数仅能够对实数目标变量进行最优化计算, 因此需要将复数阵型元素的实部和虚部分拆为两个独立的实数变量, 因此每一阶模态包含 10 个待辨识的实数参数。同时, 针对 *Fmincon* 函数所需给定的待辨识变量初始值及其取值区间, 给出如下方法:

- 对于 ω_{nk} , 使用模态分析软件获得各阶固有频率的近似值, 并以该值作为初始值。以初始值为中心, 上下浮动一定的范围作为取值区间。
- 对于 ξ_k , 选择 $[0, 1]$ 为取值区间, 并在该范围内选择随机数作为初始值。
- 对于 $\text{real}(\psi_{nk}^R)$ 等阵型参数, 选择 $[-1, 1]$ 为取值区间, 并在该范围内选择随机数作为初始值。

通过辨识获得各阶模态参数后, 可对物理空间模型进行变换和解耦, 获得以模态坐标表示的动力学模型。在线性切削力模型假设下, 式(6-7)中的静态力分量 $\mathbf{af}_0(t)$ 对铣削稳定性没有影响, 可忽略该项。因此, 式(6-10)可重写如下:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{r}(t) = \mathbf{\kappa}(t)(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \tau)) \quad (6-24)$$

其中 $\mathbf{\kappa}(t) = \mathbf{\kappa}(t - T)$, 且有

$$\kappa(t) = \begin{bmatrix} a\mathbf{A}(t)_{11} & a\mathbf{A}(t)_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a\mathbf{A}(t)_{21} & a\mathbf{A}(t)_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (6-25)$$

将式(6-24)按照式(6-15)变换为状态空间模型，如下所示：

$$\hat{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{v}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{v}(t) = \kappa'(t)(\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t - \tau)) \quad (6-26)$$

$$\text{其中 } \kappa'(t) = \begin{bmatrix} \kappa(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \text{ 且 } \kappa'(t) = \kappa'(t - T)。$$

基于辨识获得的模态参数，对式(6-26)进行坐标变换，可获得如下以模态坐标表示的状态空间模型：

$$\dot{\mathbf{q}}_v(t) - \Lambda \mathbf{q}_v(t) = \Psi_L^T \kappa'(t) \Psi_R (\mathbf{q}_v(t) - \mathbf{q}_v(t - \tau)) \quad (6-27)$$

6.4 颤振稳定性分析

通过实验模态分析与参数辨识，可获得机器人铣削刀具系统的各阶模态参数，并将式(6-24)所示的物理空间铣削动力学模型变换为式(6-27)所示的以模态坐标表示的状态空间模型，可基于该模型进行颤振稳定性分析并绘制稳定性瓣图。目前，铣削加工颤振预报方法主要有 ZOA 方法、半离散法、全离散法等，其中半离散法具有良好的预测精度和广泛的适应性。因此，本章选择半离散法并给出针对非对称非比例阻尼模型的稳定性分析过程。

对式(6-27)所示的模态模型进行移项变换，获得如下延时周期微分方程

$$\dot{\mathbf{q}}_v(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{q}_v(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{q}_v(t - \tau) \quad (6-28)$$

其中 $\mathbf{A}(t) = \Lambda + \Psi_L^T \kappa'(t) \Psi_R$ 且 $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t - T)$ ， $\mathbf{B}(t) = -\Psi_L^T \kappa'(t) \Psi_R$ 且 $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}(t - T)$ 。

为求解该延时周期微分方程，首先需要对周期 T 进行离散化，定义离散精细度 m 。 m 为正整数，有 $T = m\Delta t = \tau$ 。在周期内的任意 t 时刻，有 $t \in [t_i, t_{i+1}] (i = 1, 2, \dots, m)$ 且 $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ，方程(6-28)中的系数矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 与 $\mathbf{B}(t)$ 可由所属区间内的平均值近似代替，有

$$\mathbf{A}(t) \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{A}(t) dt = \mathbf{A}_i \quad (6-29)$$

$$\mathbf{B}(t) \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{B}(t) dt = \mathbf{B}_i \quad (6-30)$$

延时项 $\mathbf{q}_v(t-\tau)$ 可由离散区间中间点的值代替, 而区间中间点的值可由离散区间端点值的加权近似表示, 有

$$\mathbf{q}_v(t-\tau) \approx \mathbf{q}_{v,\tau}(t_i - \tau + \frac{\Delta t}{2}) \approx w_b \mathbf{q}_{v,i-m} + w_a \mathbf{q}_{v,i-m+1} = \mathbf{q}_{v,\tau} \quad (6-31)$$

其中 $\mathbf{q}_{v,i-m}$ 与 $\mathbf{q}_{v,i-m+1}$ 分别为 $[t_i, t_{i+1}]$ 对应延时区间的端点值, w_b 与 w_a 为加权系数, 可计算如下

$$w_b = \frac{\tau + \Delta t / 2 - m\Delta t}{\Delta t} \quad (6-32)$$

$$w_a = \frac{m\Delta t + \Delta t / 2 - \tau}{\Delta t} \quad (6-33)$$

由于 $T = \tau$, 有 $w_b = w_a = 0.5$ 。因此, 方程(6-28)可近似表示为:

$$\dot{\mathbf{q}}_v(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{q}_v(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{q}_{v,\tau} \approx \mathbf{A}_i \mathbf{q}_v(t) + w_b \mathbf{B}_i \mathbf{q}_{v,i-m} + w_a \mathbf{B}_i \mathbf{q}_{v,i-m+1} \quad (6-34)$$

在初始条件 $\mathbf{q}_v(t_i) = \mathbf{q}_{v,i}$ 下, 方程(6-34)在 $[t_i, t_{i+1}]$ 内的解为

$$\mathbf{q}_v(t) = \exp[(t-t_i)\mathbf{A}_i] \cdot (\mathbf{q}_{v,i} + \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{q}_{v,\tau}) - \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{B}_i \mathbf{q}_{v,\tau} \quad (6-35)$$

对于 t_{i+1} 侧端点值, 有

$$\mathbf{q}_{v,i+1} = \mathbf{P}_i \mathbf{q}_{v,i} + w_a \mathbf{R}_i \mathbf{q}_{v,i-m+1} + w_b \mathbf{R}_i \mathbf{q}_{v,i-m} \quad (6-36)$$

其中 $\mathbf{P}_i = \exp(\mathbf{A}_i \Delta t)$, $\mathbf{R}_i = [\exp(\mathbf{A}_i \Delta t) - \mathbf{I}] \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{B}_i$ 。

由式(6-36)可知, 在一个离散区间内, 可由一个区间端点值计算得到另外一个端点值, 因此可构建向量 $\mathbf{Q}_i = [\mathbf{q}_{v,i}^T \ \mathbf{q}_{v,i-1}^T \ \mathbf{q}_{v,i-2}^T \ \cdots \ \mathbf{q}_{v,i-m+1}^T \ \mathbf{q}_{v,i-m}^T]^T$, 并有如下关系

$$\mathbf{Q}_{i+1} = \mathbf{D}_i \mathbf{Q}_i \quad (6-37)$$

其中

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & w_a \mathbf{R}_i & w_b \mathbf{R}_i \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6-38)$$

根据式(6-37)与(6-38)，可建立周期 T 内 m 个离散区间的递推关系，如下所示：

$$\mathbf{Q}_{m+1} = \mathbf{D}\mathbf{Q}_1 \quad (6-39)$$

其中 $\mathbf{D} = \prod_{i=1}^m \mathbf{D}_i$ ， \mathbf{D} 称为状态转移矩阵。

由Floquet理论^[155]可知，稳定系统的状态转移矩阵特征值的模均小于1；反之，若至少有一个模大于1的特征值，则系统不稳定；当所有特征值的模均为1时，则为临界稳定状态。因此，通过分析矩阵 \mathbf{D} 的特征值，即可获得系统处于临界稳定时对应的轴向切深与主轴转速，从而绘制出稳定性瓣图。

6.5 实验验证

6.5.1 实验环境

刀具参数见表 6-1。根据第 2 章对机器人奇异性与刚度的分析，选择如图 6-3 所示的机器人位姿进行模态试验，主轴方向竖直向下。参考图 2-7 所示的坐标系，该位姿下刀尖点在基坐标系内的坐标见表 3-2。由于刀具刀刃上无法固定加速度传感器，本实验采用相同材质的钢棒模拟刀具，在相同位置上安装加速度传感器并施加锤击激励。实验使用东华 1A101 型加速度传感器与冲击力锤，使用 DH5981 型网络动态信号测试仪进行数据采集，使用 DHDAS 工程软件进行数据处理。

表 6-1 用于铣削稳定性实验的刀具参数

直径 (mm)	齿数	螺旋角 (degree)	刀齿长度 (mm)	刀具悬长 (mm)	刀具材料
12	2	45	60	60	硬质合金

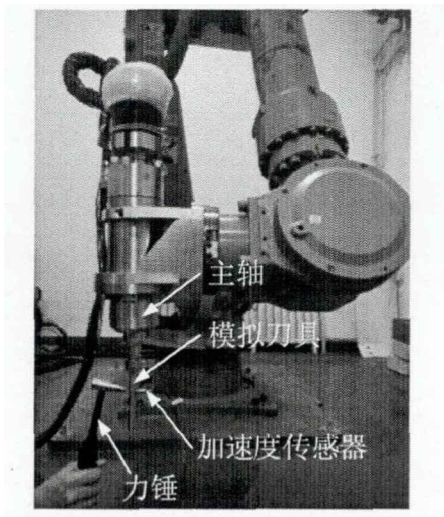


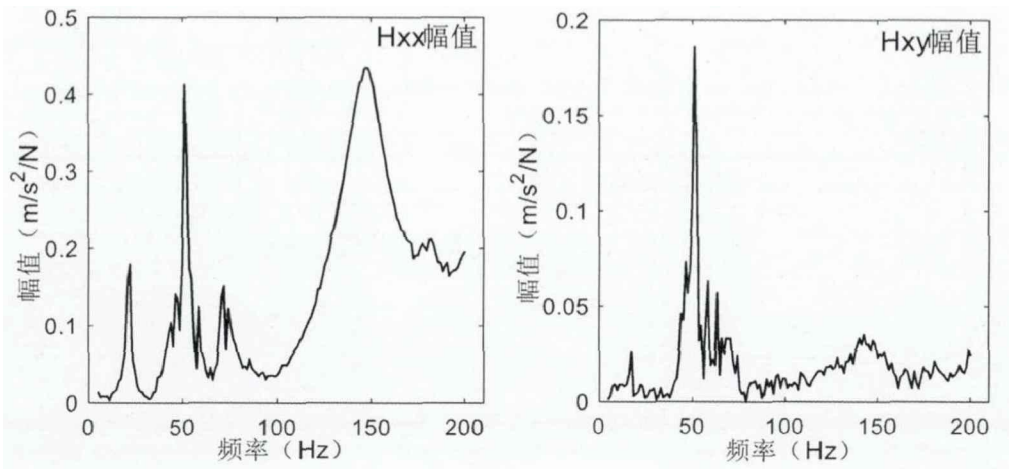
图 6-3 模态分析实验装置与传感器

铣削加工实验使用的工件材料为铝合金，基于 XR-YDCL-III89B 型压电式三向测力仪与文献[89]给出的切削力参数拟合方法，可获得切削力系数为 $K_t = 689\text{ N/mm}^2$ 、 $K_r = 267\text{ N/mm}^2$ 。

6.5.2 实验模态分析与参数辨识

0-200Hz 与 200-2000Hz 频段内的实测加速度频响曲线分别如图 6-4、图 6-5 所示。由图 6-5 可知，大于 1000Hz 频段内的频响曲线具有较小的幅值，变换为位移频响曲线后，远小于 0-1000Hz 频段内的频响幅值。因此，可忽略 1000Hz 以上模态的作用。

根据 6.3.2 节给出的模态参数辨识方法，可获得 12 阶主要模态的固有频率、阻尼比及刀尖点处的阵型参数，如表 6-2 所示。



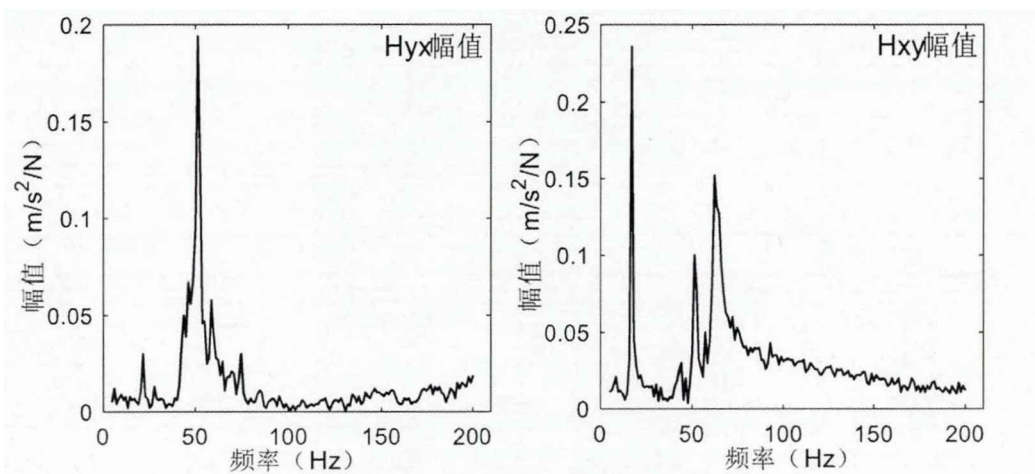


图 6-4 0-200Hz 频段实测频响幅值曲线

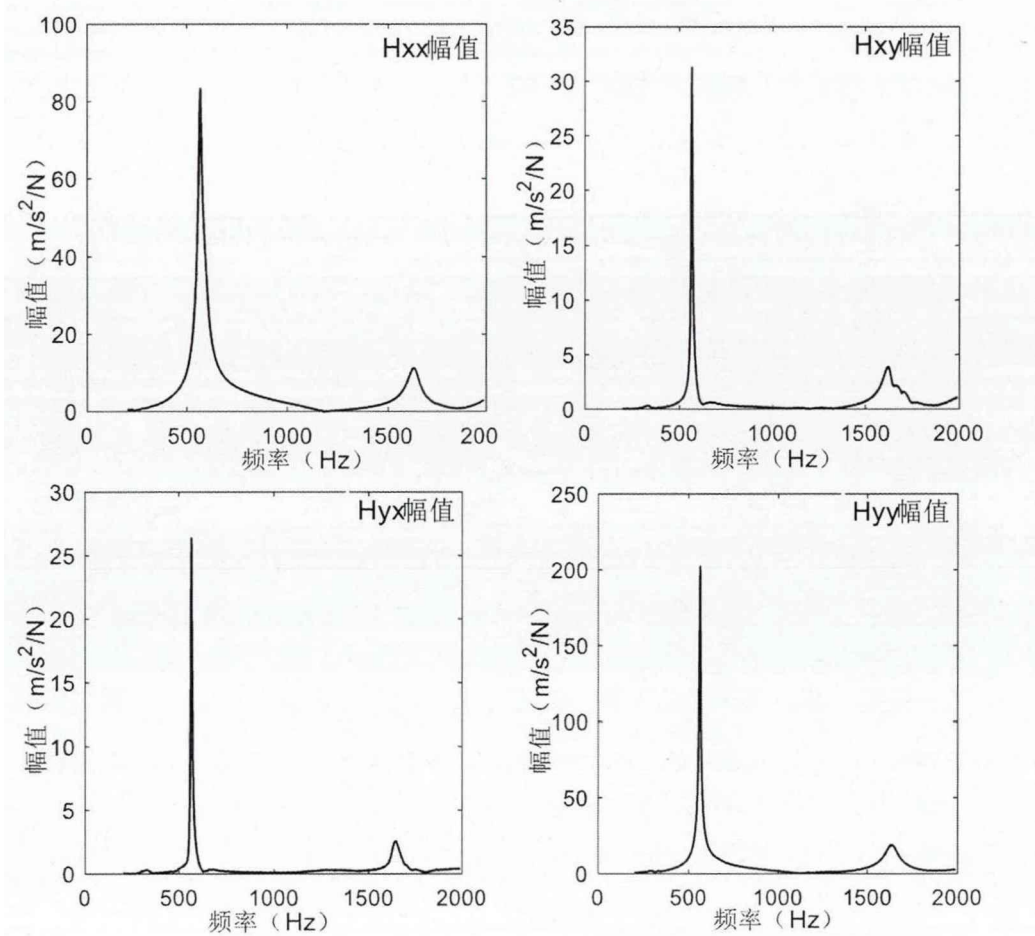


图 6-5 200-2000Hz 频段实测频响幅值曲线

表 6-2 各阶固有频率、阻尼比与刀尖点阵型参数

模态阶数	f_n (Hz)	ξ (%)	$\Psi_R (\sqrt{s/kg} \cdot 10^{-4})$	$\Psi_L (\sqrt{s/kg} \cdot 10^{-4})$
1	7.67	9.08	2865.45+2807.38 <i>i</i> -731.32-885.50 <i>i</i>	-0.36+0.56 <i>i</i> -0.68-0.59 <i>i</i>
2	17.04	1.28	43.14-4.97 <i>i</i> 350.35+134.7 <i>i</i>	-0.11+0.25 <i>i</i> 1.25+7.61 <i>i</i>
3	21.38	2.41	-2.64+3.30 <i>i</i> -0.40+0.01 <i>i</i>	699.151-827.79 <i>i</i> 16.82-17.08 <i>i</i>
4	43.942	4.00	-0.11-0.42 <i>i</i> 0.19+0.13 <i>i</i>	-2297.16-1948.76 <i>i</i> 1544.29+418.22 <i>i</i>
5	51.66	1.42	-3656.54-752.81 <i>i</i> -1678.88-561.91 <i>i</i>	-0.24-0.47 <i>i</i> -0.091-0.23 <i>i</i>
6	58.01	0.55	-1649.35-1386.21 <i>i</i> -1181.56-797.19 <i>i</i>	-0.065-0.057 <i>i</i> -0.060-0.047 <i>i</i>
7	62.56	2.37	0.058-0.0044 <i>i</i> 0.28-0.074 <i>i</i>	-48.88-159.578 <i>i</i> -440.41+3086.77 <i>i</i>
8	71.60	2.50	-0.15-0.019 <i>i</i> 0.026-0.013 <i>i</i>	-2488.12-5014.78 <i>i</i> 459.73+980.45 <i>i</i>
9	73.72	0.61	2.64-24.25 <i>i</i> 5.44+8.21 <i>i</i>	-1.24-6.29 <i>i</i> 0.73-1.56 <i>i</i>
10	93.44	0.59	0.0044-0.0024 <i>i</i> -0.0016+0.010 <i>i</i>	1955.38+1049.33 <i>i</i> -779.98-123.77 <i>i</i>
11	141.29	14.4	0.45-0.13 <i>i</i> 0.0083-0.0084 <i>i</i>	-4575.77+5211.22 <i>i</i> 494.01-774.04 <i>i</i>
12	149.42	6.01	765.47-134.24 <i>i</i> -14.88-31.74 <i>i</i>	2.27+0.43 <i>i</i> -0.098+0.045 <i>i</i>
13	175.458	0.155	0.031+0.016 <i>i</i> -0.011-0.006 <i>i</i>	-59.75-1045.33 <i>i</i> 237.33-219.93 <i>i</i>
14	564.98	0.68	33.88+192.69 <i>i</i> 597.42+828.13 <i>i</i>	2.56+6.08 <i>i</i> 32.19+20.13 <i>i</i>
15	567.10	1.76	1075.24+1227.78 <i>i</i> 2.27-289.68 <i>i</i>	18.24+16.32 <i>i</i> -0.39-4.30 <i>i</i>

基于非对称非比例阻尼模型假设辨识得到的模态参数能够良好的反应系统的动态特性，理论模型对实测曲线的拟合效果如图 6-6、图 6-7 所示。

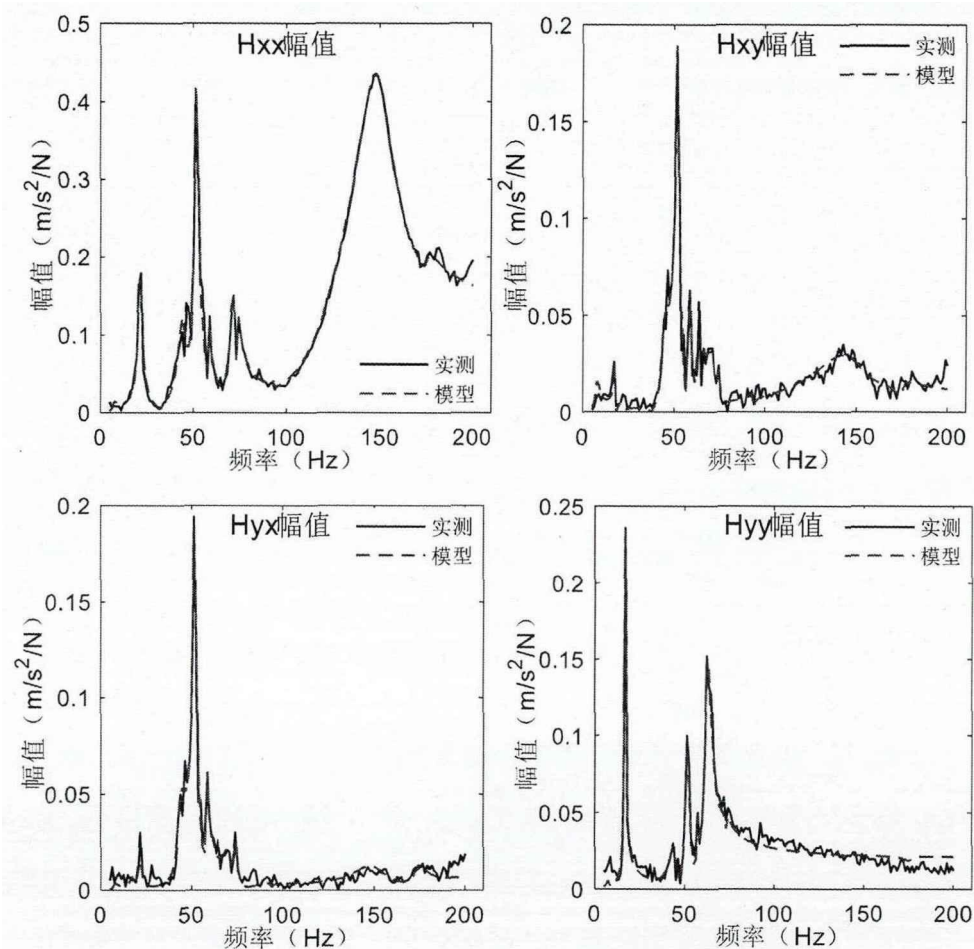
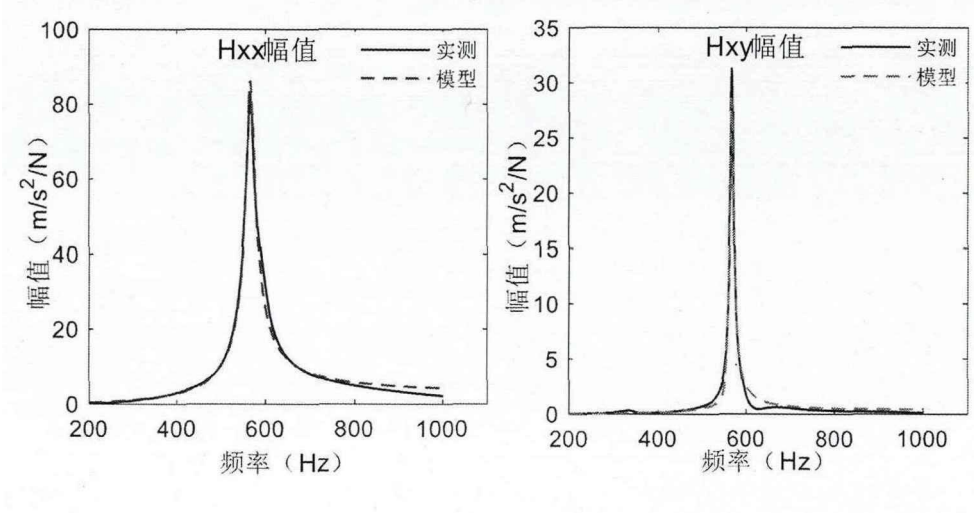


图 6-6 0~200Hz 频段内实测与模型拟合频响曲线



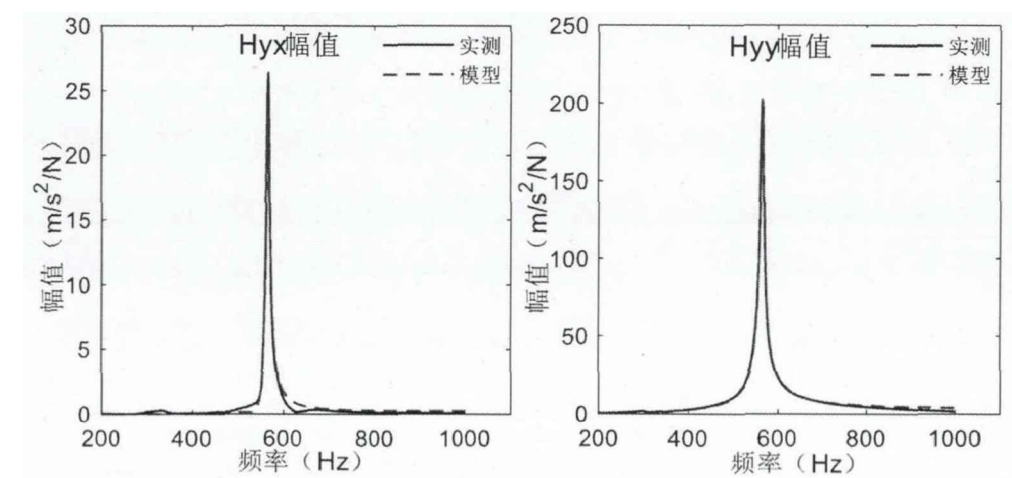


图 6-7 200~1000Hz 频段内实测与模型拟合频响曲线

6.5.3 稳定性分析与实验验证

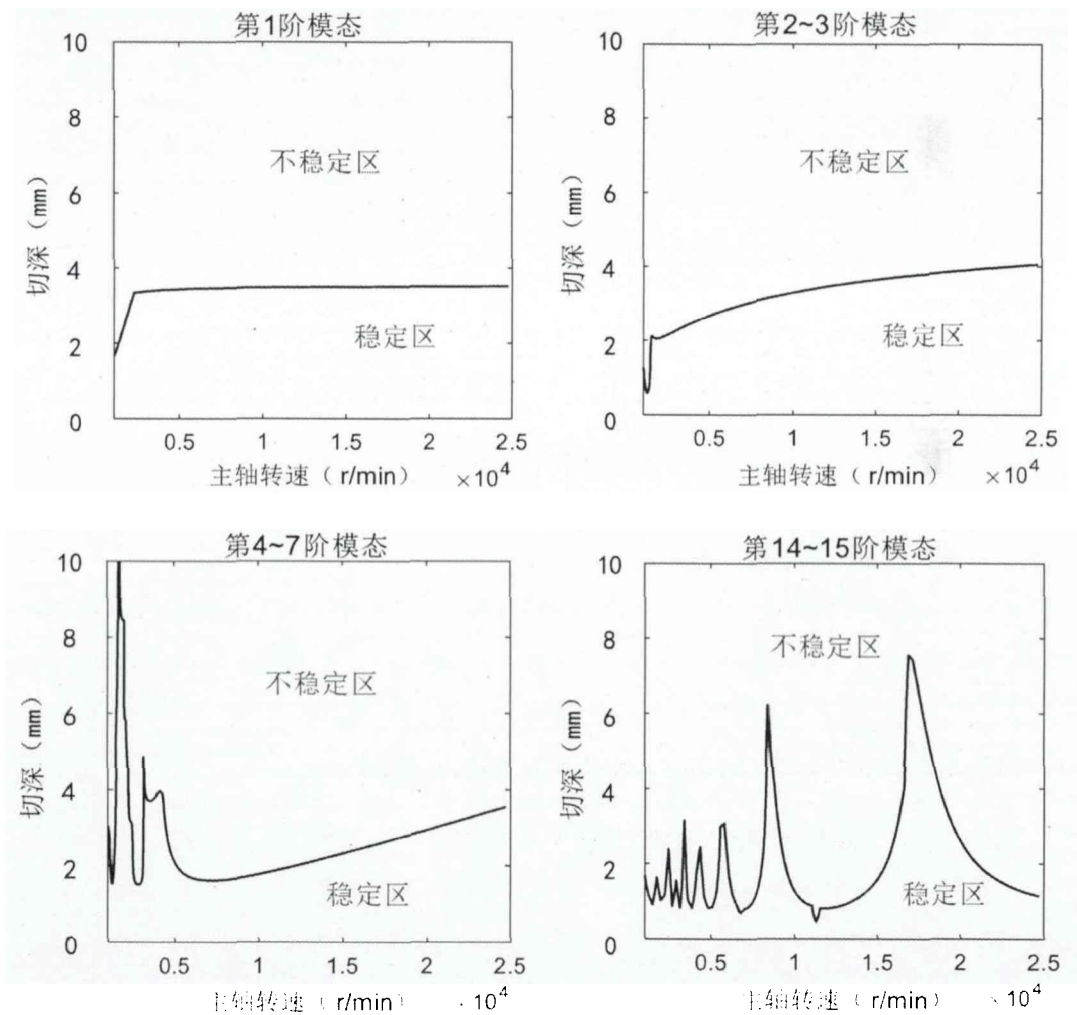


图 6-8 各主要模态稳定性谱图

选择逆铣加工，径向切深为 25%，基于动力学模型与半离散法，可获得各阶模态的稳定性瓣图，其中对颤振起主要作用的是第 1-7 阶和第 14-15 阶模态，如图 6-8 所示，其他阶模态对颤振影响很小。由图 6-8 可知，稳定区域由该 9 阶模态共同决定，其中第 14~15 阶模态影响最大。

基于第 5 章提出的加加速度连续的加减速算法，保持图 6-3 所示的姿态不变，沿机器人基坐标系的 X_0 方向进行直线铣削实验。铣削实验采用的主轴转速、轴向切深等参数见表 6-3，颤振情况见图 6-9。

表 6-3 主轴转速与切深参数

切深 (mm)	主轴转速 (10^4r/min)							
1	2	1.75	1.5	-	1	0.9	0.75	0.5
1.5	2	1.75	1.5	1.2	1	0.9	-	-
2	2	1.75	1.5	1.2	1	0.9	0.75	0.5

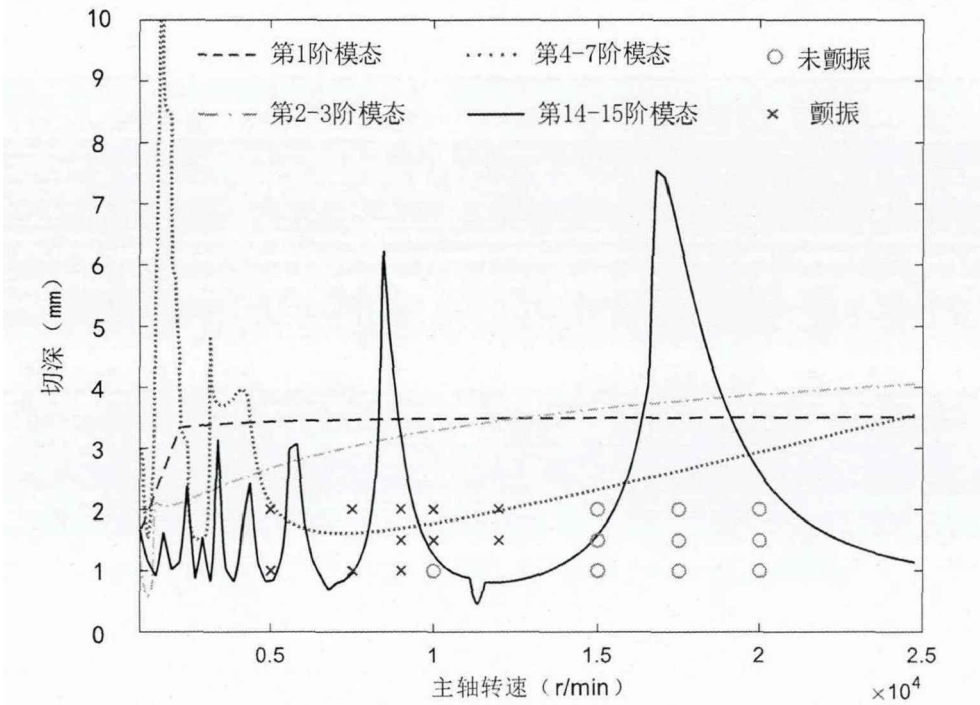


图 6-9 预报的稳定性瓣图与实验测点

如图 6-9 所示，机器人位于该位姿下对测试铝合金的加工，取 25% 径向切深时，较为合理的主轴转速为 15000r/min-20000r/min，对应的轴向切深为 0-2mm。转速低于 15000r/min 时容易发生颤振。由图 6-9 可知，对 (0.001m 切深、9000r/min) 和 (0.002m 切深、15000r/min) 两个测点的颤振预报不准确，而大多数测点是准确的。由此说明，以上对机器人铣削加工系统的动力学建模、模态实验及颤振稳定性

分析具有一定的合理性和精度，能够为机器人铣削加工的参数选择提供一定的指导。当机器人末端处于不同位姿时，仍可采用以上建模和分析过程，为后续的进一步研究奠定了基础。

6.6 本章小结

本章主要研究了所搭建的机器人铣削加工系统的动态特性与颤振稳定性问题。针对平头铣刀立铣加工过程，建立了平面多自由度物理空间动力学模型与切削力模型。基于非对称复模态理论与实验模态分析，获得了铣削系统的各阶模态参数。实验表明，非对称非比例阻尼模型对实验频响曲线具有良好的拟合效果。基于各阶模态参数，将物理空间动力学模型变换到模态空间，同时考虑了多模态耦合效应。最后，基于动力学模型与半离散法对铣削过程进行了稳定性分析，绘制了稳定性瓣图。实验表明，在该机器人位姿下，稳定性瓣图具有一定的精度，能够为工艺参数的选择提供一定的指导。当机器人末端处于不同位姿时，仍可采用以上建模和分析过程，为后续对机器人铣削加工的进一步研究奠定了重要的基础。

