

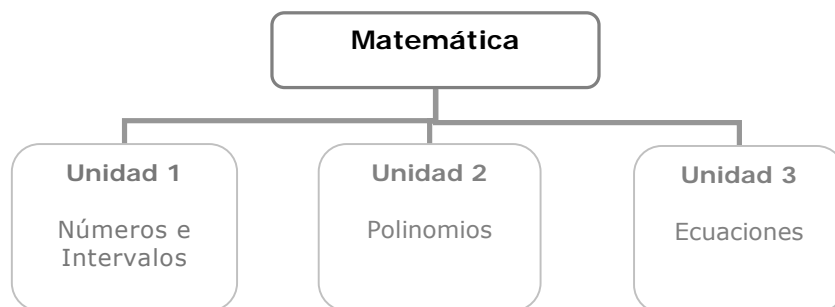
FACULTAD DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA

MANUAL DE APOYO PARA INGRESANTES

Asignatura: MATEMÁTICA

Autor de contenidos: Lic. Daniel Veiga

Coordinador: Dr. Marcelo De Vincenzi



Introducción

Estimado/a ingresante:

Le acercamos esta material con los contenidos mínimos necesarios para iniciar el estudio de la carrera elegida. Esos contenidos constituyen la base de conocimiento sobre la que podrá seguir construyendo sus estudios posteriores.

Como usted sabe, en esta primera instancia le proponemos el estudio independiente con el propósito de prepararse para el examen de ingreso. Si tuviera dificultades para aprobarlo, tendrá la posibilidad de acceder al Curso Recuperatorio donde podrá interactuar con un docente tutor que le brindará una guía y orientación específica para resolver dudas y/o dificultades.

El Manual de Apoyo está organizado en tres unidades. En cada una encontrará; una breve presentación, un listado de contenidos y actividades y los desarrollos temáticos con explicaciones básicas, propuestas de ejercitación y práctica y soluciones para cotejar los resultados.

Índice del Manual

Unidad 1 – Números e intervalos	Pág. 3
Números enteros	
Números racionales	
Radicales	
Intervalos de números reales	
Unidad 2 – Polinomios	Pág. 74
Monomios	
Operaciones con monomios	
Polinomios	
Factoreo	
Unidad 3 – Ecuaciones	Pág. 128
Ecuaciones. Concepto	
Ecuaciones de segundo grado	
Ecuación cúbica incompleta	
Ecuación bicuadrada	
Séptimo caso de factoreo	

UNIDAD 1 – NÚMEROS E INTERVALOS

Presentación

En esta unidad le proponemos el estudio del **manejo operativo de los números reales**, poniendo el énfasis en los números enteros racionales y, entre los irracionales, en aquellos que son expresables como radicales.

El dominio de estos temas es imprescindible para su desempeño profesional, dado que se le presentarán situaciones que se lo exigirán. Tenga en cuenta que es fundamental consolidar la operatoria numérica, pues usted deberá aplicarla en cualquiera de los cálculos que realice al desarrollar su práctica laboral.

Por otro lado, esta primera unidad es la base sobre la que se apoya el resto de los contenidos. No se podría intentar, por ejemplo, resolver ecuaciones sin manejar la operatoria con los números reales, pues en esa resolución usted deberá operar con esos mismos números. Como puede observar, el manejo de la operatoria con los reales será aplicado a lo largo de todos los temas.

Para poder lograr el aprendizaje de los contenidos es necesario que lea los materiales indicados, realice los trabajos prácticos y compare sus resultados con las respuestas que figuran en las grillas para la autocorrección.

A través del estudio de esta unidad esperamos que usted sea capaz de:

- Operar con los distintos tipos de números reales, poniendo énfasis en sus propiedades.
- Lograr el manejo operatorio con diferentes tipos de intervalos en la recta real, junto a tres operaciones elementales: unión (\cup), intersección (\cap) y diferencia ($-$).

A continuación, le presentamos un detalle de los contenidos y actividades que integran esta unidad. Usted deberá ir avanzando en el estudio y profundización de los diferentes temas, realizando las lecturas y elaborando las actividades propuestas.

Contenidos y Actividades

1. Números enteros



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico N°1: Números enteros

2. Números racionales



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico N°2: Números racionales

3. Radicales



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico N° 3: Radicales

4. Intervalos de números reales



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico N° 4: Intervalos de números reales

Cierre de la unidad

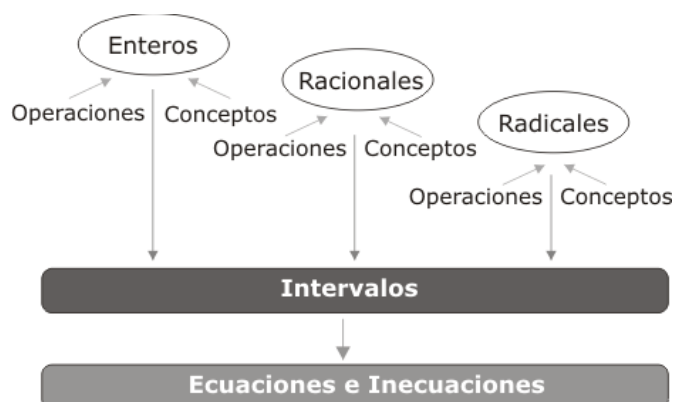


Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico N° 5

Organizador Gráfico

El siguiente esquema le permitirá visualizar la interrelación entre los conceptos que a continuación abordaremos.



Lo/a invitamos ahora a comenzar con el estudio de los contenidos que conforman esta primera unidad.

1. Números enteros

Recordamos que llamamos naturales a aquellos números que se utilizan “para contar”, es decir son los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6,... etc.

Los **números enteros** son una ampliación de los naturales (a los que incluye). Son enteros los naturales, el cero y los opuestos de los naturales. Podríamos indicarlos usando puntos suspensivos, de este modo: ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...

La **operatoria con enteros** presenta una complicación básica con respecto al trabajo con naturales y se refiere al manejo del signo. Un entero puede considerarse formado por un signo y un valor absoluto. **Para operar hace falta tener en cuenta tanto los signos como los valores absolutos.**

Para **sumar** dos enteros de igual signo se suman los valores absolutos y se conserva el signo. En cambio, para sumar dos enteros de distinto signo se restan los valores absolutos (el mayor menos el menor) y se conserva el signo del “más grande” (es decir, del que tiene mayor valor absoluto).

Para **multiplicar** dos enteros se multiplican los valores absolutos y, si son de igual signo, el resultado es positivo pero, si es de distinto signo, el resultado es negativo.

Esta operatoria es mucho más complicada que la de los naturales.

Por supuesto, que hay una parte de esta operatoria que a usted le resulta conocida, pero nosotros no sabemos cuál es y, por lo tanto, le propondremos un trabajo de resolución de pequeños ejercicios que le permitirán detectar dónde están las fallas al confrontar sus resultados con las respuestas proporcionadas por el material.

Por favor, para el estudio de los contenidos que desarrollaremos más adelante, le sugerimos la consideración de la siguiente guía. Usted decidirá si le resulta útil.



Guía para la lectura

Le proponemos que oriente y focalice el estudio hacia la comprensión de los siguientes temas:

- Preste atención a las distintas clases de números que menciona el autor y a las características de cada una de ellas.
- Identifique la definición de “fracción irreducible” que brinda el autor.

- Deténgase en este concepto: “el conjunto de los enteros está incluido dentro del conjunto de los racionales”.
- Advierta que se aprende a reescribir como fracción de enteros a cualquier entero, a cualquier número con desarrollo decimal finito y a cualquier periódico puro o periódico mixto.
- Reconozca las dos maneras equivalentes de definir los racionales (Q).
- Reflexione a partir de este interrogante sobre los números reales: ¿Es cierto que cualquier número real distinto de cero dividido por sí mismo da 1?
- Rescate los conceptos de valor absoluto y signo de los números enteros, advirtiéndoles su importancia para comprender más fácilmente algunas propiedades de: producto, división, suma, resta y potencia de enteros.
- Identifique la regla de signos que se aplica para la potencia de números enteros positivos o negativos y la que se emplea para la división de esos números.
- Reconozca a qué se denomina propiedad distributiva de la potencia respecto del producto y a qué, propiedad distributiva de la potencia respecto del cociente.

Números

Ya en la escuela primaria empezamos a conocer los números. Al terminar la enseñanza media nos hemos enfrentado a todas sus clases. Exceptuando los complejos (que la mayoría de los alumnos conoce en 4º año), todos los otros tipos de números se llaman “reales”.

Por ejemplo, son números reales:

5 ; -3 ; $\frac{1}{2}$; 1.25 ; $\sqrt{5}$; 0.5555..... ; π ; etc.

Usaremos el símbolo R para representar el conjunto de todos los números reales.

Con ellos trabajaremos a lo largo de todo este material.

Subclases dentro de los reales

Como es habitual distinguiremos varias subclases dentro de los reales: naturales, enteros, racionales... Simplemente recordaremos ahora cuáles son y más adelante operaremos con ellos para manejar sus propiedades.

Naturales

Son los números “para contar”:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.... etc. etc.

El símbolo para el conjunto de todos los números naturales es una N mayúscula. Podemos poner entonces:

$$N = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 \dots\dots \}$$

Los puntos suspensivos indican que la lista continúa indefinidamente con números cada vez mayores.

Enteros

Si reunimos todos los números naturales más el cero y los opuestos de los naturales tenemos el conjunto de los números enteros. Recordemos que el opuesto de un número es el resultado de cambiarle el signo. Por ejemplo: el opuesto de “3” es “-3”; el opuesto de “-5” es “5” y el opuesto de “0” es “0”.

El símbolo para este conjunto de todos los enteros es una Z.

Podemos escribir:

$$Z = \{ \dots\dots -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 \dots\dots \}$$

De esta forma se sobreentiende que los puntos suspensivos indican que la lista sigue indefinidamente en ambas direcciones.

Es evidente que todos los naturales son enteros. Por eso decimos que el conjunto de los números naturales está incluido dentro del conjunto de los números enteros. Esto lo simbolizamos así:

$$N \subset Z$$



El símbolo “ \subset ” se lee “está incluido en”

Racionales

Si formamos todas las fracciones posibles entre números enteros (*por supuesto con divisor no nulo*) ya tenemos los números racionales. El conjunto de todos los números racionales se simboliza con Q mayúscula.

Notemos que la palabra "racional" no quiere decir "sensato" o "razonable" o "lógico": simplemente se debe a que "razón" significa "cociente" o "fracción" en Matemáticas.

Conviene hacer aquí una aclaración: cuando consideramos los números $4/6$ y $10/15$, aunque parezca que se trata de racionales distintos eso no es cierto: basta "simplificarlos" (o sea dividir numerador y denominador por el mismo entero) para ver que se trata del mismo número escrito en dos formas distintas. En efecto:

$$\frac{4}{6} = \frac{4 \cancel{/2}}{6 \cancel{/2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{10}{15} = \frac{10 \cancel{/5}}{15 \cancel{/5}} = \frac{2}{3}$$

Queda claro que ambas fracciones son iguales: representan el mismo número racional.

Cuando una fracción ya no se puede simplificar por ningún entero decimos que es una fracción "irreducible".

Tengamos también en cuenta que hay fracciones que tienen como numerador un múltiplo del denominador (por ej: $12/2$). Evidentemente al simplificar nos queda un entero. De modo que los enteros también están entre los racionales. Podemos decir que "el conjunto de los enteros está incluido dentro del conjunto de los racionales". Y esto lo podemos simbolizar así:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Pregunta: ¿es racional el número 0.1? Podemos ver que el 0.1 se puede escribir como una fracción. En efecto:

$$0.1 = \frac{1}{10}$$

Por lo tanto el 0.1 es un racional.

Pregunta: ¿es racional el número 0.23?

Vemos que también lo podemos escribir como un cociente de enteros:

$$0.23 = \frac{23}{100}$$

Entonces el 0.23 también es racional.

Otra más: ¿y el 1.523?

También lo es porque $1.523 = 1523/1000$

La última: ¿cómo mostramos que 0.555... (periódico) es racional? En la escuela media aprendimos a transformar en una fracción un decimal periódico como éste 0.5555... Lo hacemos así:

$$0.5555.... = 5/9$$

Es decir, formamos una fracción que tiene como numerador el período y como denominador tantos "nueves" como cifras tiene el período (aquí el período es "5" y como ese período tiene una sola cifra sabemos que en el denominador va un solo "9").

También aprendimos a reescribir uno del tipo de $0,\overline{23}$. En efecto:

$$0,\overline{23} = 23/99 \text{ (de fácil verificación con su calculadora)}$$

Los números como $0,\overline{23}$ que se escriben con un cero seguido de un período que se repite indefinidamente se llaman "periódicos puros". Si tienen al comienzo una parte no periódica, como en el caso de $0.6\overline{24}$ se los llama "periódicos mixtos".

También aprendimos en la escuela media a reescribir estos últimos como cociente de enteros. Recordemos que un número como $0.6\overline{24}$ (llamémoslo "z") puede escribirse como fracción de enteros poniendo como numerador la resta de las cifras "624" menos las cifras no periódicas "6" (lo que daría $624 - 6 = 618$) y como denominador un número formado por tantos "nueves" como cifras tiene la parte periódica y tantos "ceros" como cifras tiene la parte no periódica (aquí : 990 donde los dos "9" van por las cifras periódicas "2" y "4" y por otra parte el "0" que va por la cifra "6" no periódica). Vale decir que podríamos escribir el número "z" como la fracción 618/990 (Ud. puede verificarlo fácilmente con la calculadora).

Es decir que se aprende a reescribir como fracción de enteros a cualquier entero (por ej. $-7 = -14/2$), a cualquier número con desarrollo decimal finito (por ej. $1,3 = 13/10$); y a cualquier periódico puro (por ej. $0,\overline{7} = 7/9$) o periódico mixto (por ej. $0,2\overline{9} = 27/9$).

Conocer esas conversiones nos permite aceptar que los racionales son los números reales que se escriben con desarrollo decimal finito o con desarrollo decimal infinito periódico. Vale decir que nos da la posibilidad de definir los racionales (Q) de dos maneras equivalentes:

$$Q: \left\{ \begin{array}{l} \text{fracciones de enteros de divisor no nulo o bien} \\ \text{reales con desarrollo decimal finito o infinito periódico} \end{array} \right.$$

Este conjunto Q formado por todos los racionales incluye evidentemente a todos los enteros; por eso Z está incluido en Q, lo que podemos simbolizar:

$$Z \subset Q$$

Si relacionamos también a los naturales podemos escribir:

$$N \subset Z \subset Q$$

Ahora bien: ¿cuáles son los reales que no están en Q? Son los llamados...

Irracionales

Son todos los reales con desarrollo decimal *infinito no periódico*. El primer irracional que conocimos en la primaria es π . Este número tiene como primeras cifras:

$$\pi = 3,141592.....etc.$$

(es común usar valores "redondeados" como $\pi \cong 3,14$ ó $\pi \cong 3,1416$)

Los griegos se enfrentaron hace alrededor de 2000 años con otro irracional: $\sqrt{2}$ (cuyas primeras cifras son 1,4142.....etc.).

Ejemplo: $\sqrt[3]{8}$ es el número 2; es racional.

En cambio $\sqrt{3}$ es irracional.

Los racionales y los irracionales son todos los reales que hay. Podemos continuar la “cadena” de conjuntos incluidos y escribir:

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Pero es importante tener en claro que conocer los tipos de números reales que vamos a estudiar y saber que unas clases están incluidas en otras es apenas empezar a abrir “la puerta” del tema.

En realidad se conoce el tema cuando se saben *manejar* los números “en acción” y el campo de acción de los números son las...

Operaciones

Comencemos por las dos más sencillas: suma y producto.

Estas dos operaciones tienen la **propiedad conmutativa**: “el orden de los números no cambia el resultado”

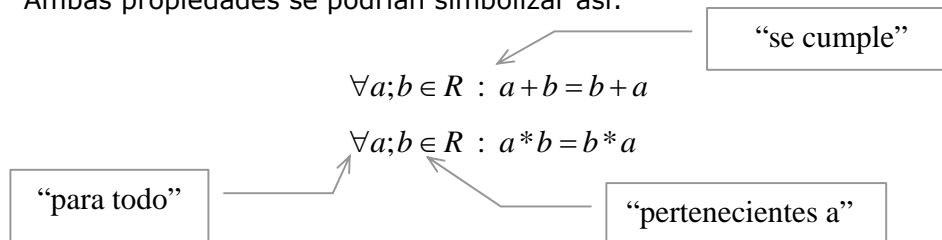
- **Para el producto:**

Cualesquiera sean los reales a, b , se cumple: $a * b = b * a$
 (“el orden de los factores no altera el producto”)

- **Para la suma:**

Cualesquiera sean los reales a, b vale: $a + b = b + a$
 (“el orden de los sumandos no altera la suma”)

Ambas propiedades se podrían simbolizar así:



El símbolo \forall que significa "para todo" es como una "A" invertida (se dice que se lo eligió porque la A es la inicial de la palabra inglesa ALL que quiere decir "todos")

También estas dos operaciones tienen la propiedad asociativa: "al aplicar la operación a tres números con un cierto orden, el resultado no depende de si empiezo operando con los dos primeros o con los dos últimos".

Para la suma (en símbolos):

$$\forall a; b; c \in R \text{ vale } (a + b) + c = a + (b + c)$$

Un ejemplo de esta propiedad sería:

Al efectuar la siguiente suma del modo indicado:

$$(2 + 3) + 7 = 5 + 7 = 12 \quad (\text{inicio sumando los dos primeros números})$$

Tenemos el mismo resultado que al operar de este otro modo:

$$2 + (3 + 7) = 2 + 10 = 12 \quad (\text{inicio sumando los dos últimos})$$

Para el producto (en símbolos):

$$\forall a; b; c \in R \text{ vale } (a * b) * c = a * (b * c)$$

Por ejemplo:

$$(3 * 2) * 5 = 6 * 5 = 30 \quad (\text{inicio multiplicando los dos primeros})$$

Vale lo mismo que:

$$3 * (2 * 5) = 3 * 10 = 30 \quad (\text{inicio multiplicando los dos últimos})$$

Un comentario y varias aclaraciones:

Leyendo algún libro o apunte es posible encontrar una pregunta del tipo:

$$\text{¿en } R \text{ es cierto que } a + b = b + a?$$

Hay que aclarar que la pregunta no está del todo bien formulada. Evidentemente se está dando algo por sobreentendido. Y ese algo es:

se pregunta si eso se cumple *para todos los números reales*. Sin embargo no se lo está diciendo explícitamente.

No conviene usar ese tipo de sobreentendidos. Es mejor hacer la pregunta del modo más claro posible para que no deje dudas.

Para poder ver cuál es el problema con esta forma de preguntar veamos este caso:

¿En \mathbb{R} , es cierto que $\frac{a}{a} = 1$?

Usted, ¿qué contestaría? ¿contestó que *sí*, que “un número dividido por sí mismo da como resultado 1”?

En caso de que esa fuera su respuesta le sugerimos que tome la calculadora y halle el valor de $\frac{0}{0}$. Después nos comenta...

Lo que sucedió es que la máquina dio un mensaje de **error**. La operación no es válida. ¡No vale ni 0 ni 1 ni ningún número!

Entonces la forma correcta de haber hecho la pregunta es:

“¿Es cierto que cualquier número real *distinto de cero* dividido por sí mismo da 1?”
o si se prefiere usar símbolos:

“¿Es cierto que: $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ vale que: $\frac{a}{a} = 1$?”

Aquí sí la respuesta es afirmativa.

También hemos visto que casi la totalidad de los egresados de la escuela media suele decir: “todo número elevado a la cero da 1”

¿Será cierto?

Si usted cree que sí, le sugerimos que tome una calculadora científica y halle el valor de 0^0 (“cero a la cero”). Después nos cuenta...

Aquí también la frase que repiten esos egresados tiene un error. Para no equivocarnos podemos decir:

“todo número *real no nulo* elevado a la cero da 1.”

o también

“todo real distinto de cero, elevado a la cero da 1”.

En símbolos:

$$\forall a \in \mathbb{R}; a \neq 0 \quad \text{vale} \quad a^0 = 1$$

Hasta aquí nuestro comentario.

Habíamos visto dos propiedades de los reales. Veremos otras más.

Valor absoluto y signo

El valor absoluto de un real x se simboliza: $|x|$ y viene definido por la regla:

- Si un real es positivo o cero: su valor absoluto es ese mismo número real.

Si un real es negativo: su valor absoluto es el opuesto de ese número real.

es decir:

$$\begin{cases} \text{Si } x \geq 0 & \text{entonces } |x| = x & \text{(I)} \\ \text{Si } x < 0 & \text{entonces } |x| = -x & \text{(II)} \end{cases}$$

por ejemplo: el 7 es positivo, por lo tanto su valor absoluto es el mismo 7.
 $|7| = 7$

otro ejemplo: el -3 es negativo, por lo tanto su valor absoluto es su opuesto (el opuesto de -3 es 3)
 $|-3| = 3$

y *finalmente* el valor absoluto de *cero* es cero.
 $|0| = 0$

Tanto para negativos como para positivos el valor absoluto es positivo (Y para cero el valor absoluto es cero, que no es ni positivo ni negativo).

Algunos creen entonces que la expresión (II) ("si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ ") está mal escrita: no entienden qué hace ese signo menos ubicado delante de la x . Veámoslo:

Cuando $x < 0$ entonces " x " ya tiene un signo menos (puede ser por ejemplo $x = -3$).

Quiere decir que ese otro signo menos que se ubica delante de la x (o sea delante del "-3") hace que el resultado sea positivo.

Para verlo mejor podemos ponerlo así:

$$|(-3)| = -(-3) = 3$$

¿se entiende la función de este signo "-"?

En cuanto al signo en los reales hay tres:

positivos	→	signo: +1
negativos	→	signo: -1
cero	→	signo: 0

Tener en cuenta que el signo de un real es un **número real** (puede ser el 1 ó el -1 ó el 0)

Por ejemplo:

signo de (8) = 1

signo de (-3) = -1

signo de (0) = 0

Es fácil ver ahora que cualquier real se puede escribir como producto de su valor absoluto por su signo.

Por ejemplo:

$$8 = |8| \cdot \text{signo}(8)$$

esto vale 8

(y es cierto que $8 = 8 \cdot 1$)

esto vale 1

$$-5 = |-5| \cdot \text{signo}(-5)$$

esto es 5

(y es cierto que $-5 = 5 \cdot (-1)$)

esto es -1

Enteros

Los conceptos de valor absoluto y signo que vimos para reales valen por supuesto también para enteros (que son un tipo particular de reales).

Estos dos conceptos de signo y valor absoluto nos permiten entender más fácilmente algunas propiedades de: producto, división, suma, resta y potencia de enteros.

Suma de enteros

- (I) Si son de igual signo: conservo el signo y sumo los valores absolutos.
- (II) Si son de \neq signo: queda el signo del "más grande" (el de mayor valor absoluto) y se restan los valores absolutos (el mayor menos el menor).



Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad (7) + (5) &= 12 \\ (-7) + (-5) &= -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad (7) + (-5) &= 2 \\ (7) + (-9) &= -2 \\ (-7) + (5) &= -2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (7) + (-5) &= 2 \\ (7) + (-9) &= -2 \\ (-7) + (5) &= -2 \end{aligned}} \right\} \text{ quedó en cada caso el signo del "más grande".}$$

Producto de enteros (positivos o negativos)

Siempre se multiplican los valores absolutos:

- (I) si son de igual signo: resultado positivo.
- (II) si son de \neq signo: resultado negativo.

Por supuesto si uno de los dos (o los dos) fuera cero, el producto sería cero.

ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad (3) \cdot (5) &= 15 \\ (-3) \cdot (-5) &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad (3) \cdot (-5) &= -15 \\ (-3) \cdot (5) &= -15 \end{aligned}$$

Para productos múltiples con factores positivos y negativos podemos encontrar una regla de los signos observando que los signos menos "se eliminan de a dos".

$$(-5) \cdot (-3) = +15$$

Por lo tanto si un producto con varios factores tiene una cantidad **par** de signos **menos**, el resultado es positivo.

En cambio si hay una cantidad **impar** de signo **menos** el resultado es negativo.

ejemplo:

$$(-3) \cdot (-2) \cdot (+1) \cdot (-3) \cdot (+2) \cdot (-1) = +36$$

Hay cuatro signos "-". Por lo tanto el resultado es positivo.

ejemplo:

$$(-1) \cdot (+1) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-1) \cdot (-1) = -6$$

Hay cinco signos "-". Por lo tanto el resultado es negativo.

Este queda solo y así produce el resultado negativo.

El signo y la potencia

Una potencia de enteros (*positivos o negativos*) con exponente **natural** es un producto repetido de un mismo factor.

Ejemplo: $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

El signo del resultado se relaciona entonces con la regla de signos del producto múltiple.

Veamos:

- 1) $(-2)^5$ la base es negativa y el exponente impar. Hay una cantidad **impar** de factores negativos.

El resultado es **negativo**.

$$(-2)^5 = -32$$

- 2) $(-2)^4$ la base es negativa y el exponente es par. Hay entonces una cantidad **par** de factores negativos.

El resultado es **positivo**.

- 3) $(2)^5$

- 4) $(2)^4$

En los casos *tres* y *cuatro* la base es positiva por lo tanto el resultado solo puede ser positivo (varios signos "+" en el producto, sólo pueden dar otro signo "+").

Podemos agrupar estos casos en dos bloques:

exponente impar	conserva el signo de la base <i>ejemplo:</i> $(-2)^5 = -32$ base negativa, resultado negativo. $(2)^5 = +32$ base positiva, resultado positivo.
exponente par	siempre da positivo <i>ejemplo:</i> $(-2)^4 = +16$ $(2)^4 = +16$

División de enteros

Para la división de enteros **positivos o negativos** vale la misma regla de signos que para el producto:

igual signo → resultado positivo

distinto signo → resultado negativo

La potencia con el producto y la división

Consideremos la expresión $(a \cdot b)^3$ con a, b enteros.

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) (a \cdot b) (a \cdot b) = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$$

por definición de cubo

puedo reordenar los factores

Otra vez definición de cubo

en síntesis $(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$ (o sea la potencia se distribuye respecto del producto)

Esto no vale sólo para el cubo, o la cuarta potencia o el cuadrado. Vale para cualquier exponente natural.

Es decir, para a, b enteros y n natural (cualesquiera sean ellos) vale:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Lo llamamos "propiedad distributiva de la potencia respecto del producto".

Por supuesto que también debemos recordar una fórmula análoga que vale para el cociente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{¡ojo!}: \text{aquí } b \neq 0$$

A esto lo llamamos la propiedad distributiva de la potencia respecto del cociente.



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 1: **Números enteros**

Con este trabajo práctico, que encontrará al final de la unidad, pretendemos que aplique los contenidos abordados en los textos leídos.

Consigna

Calcule los resultados:

1. $-3 + 8 =$
2. $-3 \cdot 7 =$
3. $2 \cdot (-5) =$
4. $(-3) \cdot (-2) =$
5. $-3 - 2 =$
6. $-5 + 3 - 2 =$
7. $(-5) \cdot (3) \cdot (-2) =$
8. $(-1) \cdot (-2) \cdot (+3) \cdot (-1) \cdot (-2) =$
9. $(-3) \cdot (-2) + (7 - 1) =$
10. $(-4) \cdot (-5) - (-3 + 2) =$
11. $(-3)^5 =$
12. $(-3)^4 =$
13. $(3)^4 =$
14. $(-2)^4 - (-3)^2 =$ *(atención: aquí el cuadrado sólo afecta al "−3" y no al "−" del centro)*
15. $(3)^5 - (-3)^4 =$
16. $(-2)^4 \cdot (-3)^2 - (4)^2 \cdot (-3)^3 =$ *El signo "menos" entre 2º y 3º paréntesis no está afectado por el cuadrado*
17. $-3 (-2)$
18. $4 - 1 (-2)$
19. $(7^2)^0$

20. $3^0 \cdot 2^1 \cdot (-1)^2$

EVALUACIÓN

Para poder autoevaluarse compare los resultados que obtuvo con los que le presentamos a continuación.

Orientaciones para la corrección

- 1) 5
 - 2) -21
 - 3) -10
 - 4) 6
 - 5) -5
 - 6) -4
 - 7) 30
 - 8) 12
 - 9) 12
 - 10) 21
 - 11) -243
 - 12) 81
 - 13) 81
 - 14) 7
 - 15) 162
 - 16) 576
 - 17) 6
 - 18) 6
 - 19) 1
 - 20) 2
-

2. Números racionales

Sabemos que se llaman **racionales** los números reales que se pueden escribir como cociente o división de enteros (con divisor no nulo). Por ejemplo, el número 7 es racional porque se puede escribir como $14/2$, el número 2.3 es racional porque se puede escribir como $23/10$ y el número $0.\dot{3}$ también es racional porque se puede escribir como $3/9$.

Los números racionales surgen en nuestra formación escolar cuando aprendemos a dividir enteros ($6:2 = 3$ porque $3*2=6$) y nos encontramos con divisiones "imposibles" como, por ejemplo, $7:5$. Es así que, al no encontrar ningún entero que multiplicado por 5 dé por resultado 7, nos sentimos ante la presencia de expresiones matemáticas inconcebibles (en el lenguaje escolar de quien no conoce los fraccionarios se dice: "*7 dividido 5 no se puede*").

En otras circunstancias, los fraccionarios aparecen como resultado de una medición. En efecto, medir es comparar una cantidad de magnitud (por ejemplo la longitud de una mesa) con otra cantidad tomada como unidad, y el resultado es siempre un racional.

Por otro lado, es necesario definir cuándo dos racionales son iguales (es decir cuándo representan el mismo número). La idea es: dos racionales a/b y c/d son iguales cuando $a*d = b*c$. Por ejemplo los racionales $3/2$ y $6/4$ son iguales (o sea son dos formas de escribir el mismo número) porque $3*4=6*2$.

Una vez conocida la igualdad de racionales es necesario manejar las **operaciones básicas**. Para ello resulta imprescindible conocer la propiedad llamada "*propiedad fundamental de las fracciones*". Ella nos dice que al multiplicar numerador y denominador de una fracción por el mismo entero no nulo, el racional que se obtiene es igual al original.

En símbolos sería: $\frac{a}{b} = \frac{a * n}{b * n}$ (con $n \neq 0$ y $b \neq 0$).

Observando la expresión escrita podemos comprobar que se cumple la definición de igualdad definida. En efecto, $a*b*n=a*n*b$ como se necesita.

Esto permite sumar fracciones de igual denominador fácilmente: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

Y para el caso de fracciones de distinto denominador se procede de igual manera simplemente después de reescribirlas para que tengan igual denominador.

Se utiliza entonces la propiedad fundamental indicada antes y se realiza lo siguiente:



$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$ de modo que ahora se han obtenido dos fracciones de igual denominador sobre las que se puede realizar la **suma** manteniendo el denominador común y sumando los numeradores.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{d \cdot b}$$

De modo análogo se procede con la **resta**.

Para el **producto** se efectúa:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \text{ (siempre con denominadores no nulos)}$$

Y para el **cociente** se verifica que:

“dividir por una fracción”

equivale a

“multiplicar por la fracción inversa”.

En símbolos:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Profundice esta explicación con la lectura de los contenidos que le proponemos a continuación.



Guía para la lectura

A través de este material iremos retomando las nociones previas que usted fue adquiriendo a lo largo de su formación escolar sobre los conceptos que conforman este punto de la unidad, para que pueda profundizarlas, cuestionarlas y/o resignificarlas a la luz de nuevos contenidos.

Al abordar este texto le proponemos orientar su lectura del siguiente modo:

- Identifique las características de la propiedad fundamental de las fracciones.

- Focalice su atención en el repaso de las operaciones con fracciones (producto, suma, resta y división) que realiza el autor, así como en las demás propiedades que él desarrolla.

Racionales

Encaremos el repaso de este tema trabajando con la forma de *fracciones de enteros con divisor no nulo*.

Propiedad fundamental de las fracciones:

Para cualesquiera a , b , n enteros (b y n no nulos) vale:

$$\frac{a}{b} = \frac{a * n}{b * n}$$

Ésta es la propiedad que me “autoriza” a multiplicar numerador y denominador de una fracción por el mismo entero *no nulo*.

Ejemplo:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 * 8}{5 * 8} = \frac{24}{40}$$

Esta cadena de igualdades puede ser comprobada usando la calculadora para hallar la primera división ($3/5$) y la última ($24/40$): dará el mismo resultado.

Leído de derecha a izquierda (con lo que quedaría $\frac{a * n}{b * n} = \frac{a}{b}$) es la propiedad que nos permite simplificar una fracción de enteros dividiendo numerador y divisor por el mismo entero no nulo.

Ejemplo:

$$\frac{20}{14} = \frac{20/2}{14/2} = \frac{10}{7}$$

esta última fracción se denomina *irreducible*: ya no se puede simplificar por ningún entero

Repasemos lo referente a las operaciones con fracciones.



Producto de fracciones

Es la más sencilla: se multiplican ordenadamente numerador por numerador y denominador por denominador.

En símbolos:

para a, b, c, d enteros ($b \neq 0$; $d \neq 0$) vale:

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{7} * \frac{5}{8} = \frac{3*5}{7*8} = \frac{15}{56}$$

Suma de fracciones

Si tienen igual denominador sencillamente se suman los numeradores y se conserva el denominador:

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$$

Si escribimos esta suma del siguiente modo:

$$2 \text{ quintos} + 6 \text{ quintos} = 8 \text{ quintos}$$

vemos mejor lo razonable de la regla para sumar fracciones.

Para el caso de fracciones de distinto denominador conviene en primer lugar reexpresar las fracciones para que tengan igual denominador y luego aplicar la regla recién vista.

Consideremos:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$$

reexpresamos cada fracción así: $\frac{3}{5} = \frac{3*7}{5*7} = \frac{21}{35}$ Y $\frac{2}{7} = \frac{2*5}{7*5} = \frac{10}{35}$

Llevando esto a la suma de fracciones:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3*7}{5*7} + \frac{2*5}{7*5} = \frac{21}{35} + \frac{10}{35}$$

Ya está expresado como suma de fracciones de igual denominador (este proceso se llama "reducir a común denominador")

¿Qué falta hacer? Sumar simplemente los numeradores.

$$\frac{21}{35} + \frac{10}{35} = \frac{31}{35}$$

Esto que acabamos de hacer muestra el fundamento de lo que nos enseñó la maestra. ¿Recordamos cómo era?

"saco denominador común"

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{\quad}{35}$$

(en otras palabras encuentro un múltiplo de los denominadores. ¡¡No estamos sacando **factor común**: el factor común es un **submúltiplo**; en cambio, el común denominador es un **múltiplo**!!)

En este ejemplo "divido 35 por 5. Esto da 7". Significa que al 5 debo multiplicarlo por 7 para obtener ese 35. Quiere decir que estoy averiguando "¿por qué número debo multiplicar al denominador 5 para obtener el común denominador 35?"

entonces..."como la respuesta es 7, multiplico este 7 por el 3":

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3*7 + \quad}{35}$$

Aquí estoy aplicando la "propiedad fundamental de las fracciones" (si multiplico abajo por 7, también multiplico arriba por 7).

Continúo... "divido el 35 por 7. Esto da 5". Estoy averiguando ¿por qué número debo multiplicar al denominador 7 para obtener el denominador común

35?" Como el resultado es 5, vuelvo a aplicar la "propiedad fundamental de las fracciones" y multiplico el numerador 2 por este 5.

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 2 \cdot 5}{35}$$

Ahora solo falta "hacer unas cuentas"

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 2 \cdot 5}{35} = \frac{21 + 10}{35} = \frac{31}{35}$$

¡Y ya está!

Otro ejemplo:

Podríamos presentarlo así:

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = \frac{20}{45} + \frac{18}{45} = \frac{38}{45}$$

reexpreso

hago cuentas

sumo numeradores y conservo denominador

Otra forma de presentarlo sería:

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{5} = \frac{4 \cdot 5 + 2 \cdot 9}{45} = \frac{20 + 18}{45} = \frac{38}{45}$$

Resta de fracciones

Con la resta se procede de modo análogo. El único cambio consiste en que en lugar de haber un signo suma entre las dos fracciones hay un signo de resta. El siguiente ejemplo nos lo muestra:

$$\frac{3}{7} - \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 4 - 5 \cdot 7}{28} = \frac{12 - 35}{28} = \frac{-23}{28}$$

División de fracciones:

Al dividir dos enteros como 12 y 6 decimos que el resultado es 2 porque "2 multiplicado por 6 es 12".

Es decir:

$$\frac{12}{6} = 2 \text{ pues } 2 * 6 = 12$$

Esto rige para la división entre enteros.

Es análogo para la división entre fracciones:

Al dividir $\frac{3}{2}$ por $\frac{5}{7}$ el resultado es $\frac{21}{10}$ pues

$$\frac{21}{10} * \frac{5}{7} = \frac{21*5}{10*7} = \frac{105}{70} = \frac{3}{2}$$

Simplifico dividiendo por 35 numerador y denominador

Es decir:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{21}{10}$$

En general para enteros cualesquiera a, b, c, d (siendo b, c, d no nulos) vale:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$$

Para verificar esto debemos comprobar que $\frac{a}{b} * \frac{d}{c}$ ("el resultado") multiplicado por $\frac{c}{d}$ ("el divisor") da $\frac{a}{b}$ ("el dividendo")

Veámoslo:

$$\left(\frac{a}{b} * \frac{d}{c} \right) * \frac{c}{d} = \frac{a * d * c}{b * c * d} = \frac{a}{b}$$

¡Se cumple!

Concluimos entonces que dividir una fracción por otra equivale a multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda ("la segunda invertida")

Ejemplo:

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{5} * \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

En lugar de dividir por 7/4 multiplico por 4/7

Resolvamos un caso con operaciones combinadas:

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{5} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2*2+1*3}{6}}{\frac{3*3+5*1}{15}} = \frac{\frac{4+3}{6}}{\frac{9+5}{15}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{14}{15}} = \frac{7}{6} * \frac{15}{14} = \frac{7*15}{6*14} = \frac{105}{84} = \frac{5}{4}$$

Simplifico dividiendo por 21

Saco denominador común tanto en el numerador como en el denominador.

Más propiedades. También son válidas las siguientes:

- 1) $a^m * a^n = a^{m+n}$ ("Para producto de potencias de igual base se suman los exponentes")

Esta propiedad es fácilmente aceptable. Consideremos el producto $X^3 * X^2$

La potencia X^3 significa " $X * X * X$ " es decir tres veces el factor X. La potencia X^2 significa " $X * X$ " es decir dos veces el factor X.



Entonces es sencillo entender que $X^3 * X^2$ significa $X*X*X*X*X$ y esto último se puede simbolizar: X^5 . La fórmula de más arriba no hace más que generalizar esto para cualesquiera exponentes naturales m y n .

Ahora preguntémosnos: ¿por qué se aclara que son potencias de igual base? Sencillamente porque si fueran de bases distintas no podrían unificarse en un único exponente sin más. Por ejemplo la expresión a^3*b^2 (que se traduce por: $a*a*a*b*b$) no se podría unificar en una sola potencia.

$$2) \quad (a^m)^n = a^{m*n} \quad (\text{"Para potencia de potencia se multiplican los exponentes"})$$

Analicemos un ejemplo de esta potencia de potencia:

$$(a^3)^2$$

conociendo el concepto de potencia está claro que aquí hay dos paréntesis multiplicando: $(a^3) * (a^3)$ pero cada paréntesis contiene 3 factores, es decir: $(a*a*a)*(a*a*a)$. Por eso resulta evidente que en total hay 2×3 factores (es decir 6 factores), lo que se simboliza a^6 .

$$(a^3)^2 = a^{3*2}$$

En general la potencia $(a^m)^n$ significa: **n** paréntesis de **m** factores cada uno, con lo cual se tiene **m*n** factores en total. Es decir:

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

$$3) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{"Para cociente de potencias de igual base se restan los exponentes"})$$

Veamos un ejemplo: $\frac{a^5}{a^3}$

El numerador a^5 está formado por 5 factores "a". El denominador está formado por 3 factores "a". Con ello:



$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a * a * a * a * a}{a * a * a}$ al simplificar tres de los factores "de arriba" con tres de los factores "de abajo" sólo quedan dos factores "a" del numerador.

$$\frac{\cancel{a} * \cancel{a} * \cancel{a} * a * a}{\cancel{a} * \cancel{a} * \cancel{a}} = a^2 \text{ y este } a^2 \text{ es } a^{5-3}$$

Por eso la regla nos pide restar de los 5 de arriba los 3 de abajo como se indica:

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3}$$

Si bien hemos analizado un caso particular sabemos que la propiedad es válida **en general** para cualesquiera m y n naturales (¡siempre que "a" no sea cero!!).

4) Por otro lado un número como 2^0 puede escribirse así 2^{3-3} (porque $0=3-3$) y, a su vez, este 2^{3-3}

para todo real "a" distinto de cero vale: $a^0=1$

puede escribirse $\frac{2^3}{2^3}$ (aplicando que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$) y como $\frac{2^3}{2^3}$ es

evidentemente igual a 1 nos queda claro (después de todo este trabajo) que $2^0=1$. Tener en cuenta que 0^0 no es un número. Escribimos entonces:

5) También vale (para todo real no nulo "a" y para todo natural "n") la siguiente propiedad.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Veamos esta propiedad "en acción" en un caso concreto:

El número 2^{-3} se puede escribir, por ejemplo, como 2^{0-3}

(porque $0-3 = -3$) y aplicando la propiedad $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

nos quedaría:

$$2^{-3} = 2^{0-3} = \frac{2^0}{2^3} = \frac{1}{2^3}$$

Con lo cual observamos que (como ejemplo particular de la propiedad general que estamos viendo) vale:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

Tengamos en cuenta que lo que acabamos de ver fue simplemente un ejemplo, *un caso particular* (no fue una demostración!!)

Resumamos las reglas vistas (para **m, n** naturales):

$$(a * b)^n = a^n * b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (\forall b \neq 0)$$

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\forall a \neq 0)$$

$$a^0 = 1 \quad (\forall a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\forall a \neq 0)$$

Las aplicaremos en varios ejemplos:

el primero:



Consideremos $[a^5 * (a^2)^3]^4$ y tratemos de reescribirlo como una potencia de "a" (vale decir: el símbolo "a" y un solo exponente)

$$[a^5 * (a^2)^3]^4 = (a^5 * a^6)^4 = (a^{11})^4 = a^{44}$$

$(a^2)^3 = a^6$ $a^5 * a^6 = a^{11}$

el segundo:

$$\frac{(a^6)^3 * (a^4)^4}{(a^2)^3 * a} = \frac{a^{18} * a^{16}}{a^6 * a} = \frac{a^{34}}{a^7} = a^{27}$$

el tercero: en este ejemplo se debe primero separar las dos variables "x" e "y" y luego operar para conseguir un producto de una potencia de "x" por una potencia de "y".

$$(x^3)^2 * (x^2 y^4)^3 = (x^3)^2 (y^2)^2 * (x^2)^3 (y^4)^3 = x^6 y^2 x^6 y^{12} =$$

$$x^{6+6} y^{2+12} = x^{12} y^{14}$$

Distribuyo potencias respecto del producto

el cuarto ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{[(x^3)^3 y^2]^4 (x^3 y^4)^3}{(xy^2)^2 (x^3 y)^3} &= \frac{(x^9 y^2)^4 (x^3 y^4)^3}{(xy^2)^2 (x^3 y)^3} = \frac{(x^9)^4 (y^2)^4 (x^3)^3 (y^4)^3}{x^2 (y^2)^2 (x^3)^3 y^3} = \\ &= \frac{x^{36} y^8 x^9 y^{12}}{x^2 y^4 x^9 y^3} = \frac{x^{36+9} y^{8+12}}{x^{2+9} y^{4+3}} = \frac{x^{45} y^{20}}{x^{11} y^7} = x^{45-11} y^{20-7} = x^{34} y^{13} \end{aligned}$$



Reconocida internacionalmente por la acreditadora CQAIE (Washington, USA)

UAI Universidad Abierta
Interamericana

UAIOnline

Orientador del Aprendizaje



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 2: **Números racionales**

Consignas

Simplifique hasta obtener fracciones irreducibles.

1) $\frac{12}{27}$

2) $-\frac{26}{40}$

3) $\frac{30}{35}$

4) $\frac{24}{32}$

5) $\frac{9}{18}$

6) $-\frac{20}{45}$

Obtenga los resultados de las siguientes sumas:

7) $\frac{3}{7} + \frac{1}{2}$

8) $\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$

9) $\frac{3}{5} - \frac{2}{3}$

10) $\frac{2}{7} - \frac{4}{9}$



$$11) \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$$

$$12) \frac{4}{3} - \frac{1}{7} + \frac{3}{2}$$

Realice las siguientes operaciones:

$$13) \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5} \right) * \frac{2}{3}$$

$$14) \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) * \frac{1}{4}$$

$$15) \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}}{\frac{3}{2}}$$

$$16) \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}$$

EVALUACIÓN

Compare los resultados que usted obtuvo con los que nosotros le presentamos a continuación.



Reconocida internacionalmente por la acreditadora CQAIE (Washington, USA)

UAI Universidad Abierta
Interamericana

UAIOnline

Orientador del Aprendizaje

Orientaciones para la corrección

1) $\frac{4}{9}$

2) $-\frac{13}{20}$

3) $\frac{6}{7}$

4) $\frac{3}{4}$

5) $\frac{1}{2}$

6) $-\frac{4}{9}$

7) $\frac{13}{14}$

8) $\frac{13}{20}$

9) $-\frac{1}{15}$

10) $-\frac{10}{63}$

11) $\frac{13}{30}$

12) $\frac{113}{42}$



13) $\frac{17}{15}$

14) $\frac{5}{24}$

15) $\frac{14}{45}$

16) 6

3. Radicales

Hay números reales que no se pueden escribir como división o cociente de enteros. A esos números se los llama irracionales (no porque no sean "lógicos" sino porque no son "razón" o cociente de enteros).

Estos números aparecen relativamente temprano en el desarrollo de nuestra civilización. Tan temprano como es posible al aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1. Es fácil calcular que esta diagonal mide $\sqrt{2}$. Sin embargo, no es tan fácil ver que este número no se puede escribir como razón de enteros (la demostración de esto aparece en cualquier libro de Matemática de primer año de la enseñanza media).

Para los pitagóricos debe haber sido grande la sorpresa al comprobar que una figura tan sencilla como la diagonal de un cuadrado de lado 1 "no tiene medida" comparada con el lado (se dice que son "inconmensurables"). A pesar del prejuicio respecto de tales números es evidente que terminaron por ser aceptados y por operarse sencillamente con ellos.

El trabajo con estos irracionales que se expresan como raíces es otra parte de la matemática elemental que necesitamos manejar para el estudio de la matemática universitaria. Y es por eso que le dedicaremos tiempo al repaso de su operatoria y propiedades.

En el manejo de los **radicales** es importante entender la relación entre las **fracciones** y las **raíces**.

Una expresión con raíz se puede escribir como otra con un exponente fraccionario. Por ejemplo, si usted toma su calculadora y escribe $9^{0.5}$ (9 elevado a la 0.5) el resultado debe ser 3 (tenga en cuenta que la calculadora sólo da la raíz positiva). Es decir que $9^{0.5}$ equivale a $\sqrt{9}$ (obviamente es posible escribirlo también $9^{\frac{1}{2}}$).



Más en general decimos que $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$ cualesquiera sean los valores de "k" y "n" enteros positivos y, en lo que sigue, $a \geq 0$.

Teniendo en cuenta esta relación entre fracciones y raíces no sorprende encontrarnos con expresiones como "reducir a común índice" (emparentada con "reducir a común denominador"). En efecto, si observamos la expresión siguiente, con dos raíces multiplicadas que tienen el mismo índice, vemos que se pueden multiplicar simplemente aplicando la distributividad de la radicación respecto del producto. Esto es:

$$\sqrt[n]{a^k} * \sqrt[n]{a^s} = \sqrt[n]{a^k * a^s} = \sqrt[n]{a^{k+s}}$$

De modo análogo a lo que sucede con la suma de fracciones, cuando los índices no son iguales, se puede intentar reescribir ambas expresiones de modo que tengan el mismo índice. Nos basamos para ello en la propiedad fundamental de la radicación que nos dice *que si se multiplican el índice y el exponente de una raíz por el mismo número natural, la nueva expresión es igual a la original*. En símbolos:

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n * h]{a^{k * h}} \text{ (siendo h cualquier natural)}$$

No es difícil ver la relación entre esta propiedad y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplican numerador y denominador de una fracción por el mismo entero (no nulo) la fracción obtenida es igual a la original. En efecto, si escribimos la expresión radical con exponente fraccionario se ve la razón de ese "parentesco":

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$$

Ahora vemos que si multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción del exponente por un mismo natural (sea, por ejemplo, el natural "h") la fracción no varía y por tanto la potencia expresa el mismo número.

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{n * h}{n * h}} = \sqrt[n * h]{a^{k * h}}$$

Si ahora volvemos a expresar esta potencia de exponente fraccionario como raíz tenemos:

$$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{n * h}{n * h}} = \sqrt[n * h]{a^{k * h}}$$

Y vemos aquí expresada la propiedad de las raíces como una consecuencia de la propiedad de las fracciones.

¿Cómo utilizamos esta propiedad para multiplicar dos radicales de distinto índice? Iniciamos reexpresando ambas raíces de modo de obtener expresiones con igual índice:



$$\sqrt[n]{a^k} * \sqrt[r]{a^s} = \sqrt[n^*r]{a^{k*r}} * \sqrt[r^*n]{a^{s*n}}$$

Ahora que las dos raíces tienen igual índice podemos simplemente multiplicarlas apoyándonos en la distributividad de la radicación respecto del producto.

$$\sqrt[n]{a^k} * \sqrt[r]{a^s} = \sqrt[n^*r]{a^{k*r}} * \sqrt[r^*n]{a^{s*n}} = \sqrt[n^*r]{a^{k*r} * a^{s*n}}$$

Ahora sólo falta operar con las expresiones que están dentro de la raíz. Es fácil ver que se trata de un producto de potencias de igual base y se suman directamente los exponentes.

$$\sqrt[n]{a^k} * \sqrt[r]{a^s} = \sqrt[n^*r]{a^{k*r}} * \sqrt[r^*n]{a^{s*n}} = \sqrt[n^*r]{a^{k*r} * a^{s*n}} = \sqrt[n^*r]{a^{k*r+s*n}}$$

De igual modo se procede con la división de raíces.

Amplíe los conceptos abordados hasta aquí con la siguiente orientación para la lectura.



Guía para la lectura

Este material bibliográfico, al igual que el que leyó en el punto anterior de la unidad, retoma sus conocimientos previos sobre estos temas y es posible que, a partir de aquí, tenga que ajustarlos o profundizarlos.

Siguiendo la misma propuesta que la ofrecida en las guías de los contenidos vistos precedentemente, puede orientar su lectura del siguiente modo:

- Identifique cuál fue el origen de los números irracionales.
- Deténgase en el repaso que el autor realiza de las características de las potencias de exponente natural y de algunas propiedades de la radicación.
- Reconozca la propiedad fundamental de las raíces.
- Distinga qué es la reducción a común índice, y preste atención a los ejemplos que brinda el autor.
- Identifique la propiedad para raíz de raíz.
- Concéntrese en la propiedad distributiva de la radicación respecto del producto y del cociente, y en las características de la suma y resta de radicales.

- Observe cómo se expresan las raíces usando exponentes fraccionarios, cómo se opera aplicando propiedades de la potencia y cómo se vuelven a expresar como radical.

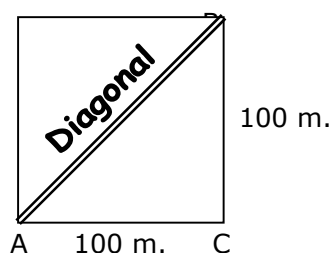
El nacimiento de los irracionales

¿Cuánto ahorramos al caminar en diagonal?

Consideremos el siguiente problema:

En una manzana de la ciudad de La Plata (famosa por sus diagonales) estamos parados en una esquina y queremos ir a la esquina más lejana dentro de esa manzana. En el gráfico:

Estamos en A y queremos ir a B.



Tenemos dos opciones:

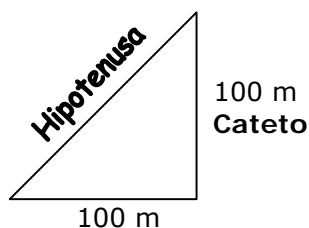
- Ir en diagonal desde A hacia B directamente.
- Ir de A hacia C y finalmente de C hacia B.

La pregunta es: ¿Cuánto ahorramos al ir en diagonal?

En primer lugar, el trayecto ACB tiene una longitud de $100\text{ m} + 100\text{ m} = 200\text{ m}$

El trayecto en diagonal se calcula así:

Consideremos uno de los dos triángulos en que la diagonal corta a la manzana.



Cateto

Éste es un triángulo rectángulo. Para él vale el teorema de Pitágoras, que dice:

“En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”. Es decir:

$$\text{Hip}^2 = (100 \text{ m})^2 + (100 \text{ m})^2$$

$$\text{Hip}^2 = 10.000 \text{ m}^2 + 10.000 \text{ m}^2$$

$$\text{Hip}^2 = 20.000 \text{ m}^2$$

Para despejar el valor de la hipotenusa tomo raíz cuadrada en ambos miembros y obtengo:

$$\text{Hip} = \sqrt{20.000 \text{ m}^2}$$

$$\text{Hip} = \sqrt{20.000} \cdot \text{m} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{10.000} \cdot \text{m} = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \text{m}$$

Pero $\sqrt{2} \cong 1,41$, con lo cual queda:

$$\text{Hip} \cong 1,41 \cdot 100 \text{ m} = 141 \text{ m}$$

Es fácil ahora calcular que la longitud del camino que ahorramos al ir en diagonal es aproximadamente de:

$$200 \text{ m} - 141 \text{ m} \cong 59 \text{ m}$$

Ahora bien, al calcular la longitud nos enfrentamos al número $\sqrt{2}$. Éste no es una raíz exacta.

Un irracional como $\sqrt{2}$ no puede ser escrito como cociente de dos enteros. Y es por eso que sorprendió a los pitagóricos, que sólo conocían los racionales (que se pueden escribir como cociente de enteros).

Ese fue el origen de los **números irracionales**, con los cuales trabajaremos en esta unidad.

Radicales

Recordemos algunas características de las potencias de exponente natural. Para un exponente **par** el resultado es siempre positivo o cero. Por ejemplo:

$$(-3)^2 = 9 \qquad (9 > 0)$$

$$(5)^2 = 25 \qquad (25 > 0)$$

$$(0)^2 = 0 \qquad (0 = 0)$$

El resultado de la potencia par es positivo para base distinta de cero y es cero para base cero.

Para un exponente impar el resultado tiene el mismo signo que la base:

$$(-3)^3 = -27$$

$$(2)^5 = 32$$

$$(0)^5 = 0$$

Vamos a repasar ahora algunas propiedades de la radicación (que es una operación inversa de la potenciación: la logaritmación es otra).

Si pedimos que se complete el blanco en la expresión siguiente:

$$3^2 = \square$$

estamos pidiendo calcular una **potencia**: 3^2

En cambio, si pedimos que se complete el blanco en:

$$\square^3 = 8$$

lo que se pide es calcular la raíz cúbica de 8. Es decir, se pide efectuar una radicación. La forma habitual de indicar esa operación es:

$$\sqrt[3]{8}$$

El uso de este símbolo de **radicación** queda definido, para este caso *particular*, con la condición siguiente:

$$\sqrt[3]{8} = x \quad \text{si y solo si} \quad x^3 = 8$$

En este punto conviene notar que cuando el índice (la cantidad ubicada encima de la raíz) es impar la definición **general** puede darse sin problemas:

Para cualesquiera "n" (natural impar) y "a" y "b" reales, vale:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si y sólo si} \quad b^n = a$$



Por ejemplo:

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \text{pues } 2^5 = 32$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{pues } (-2)^3 = -8$$

$$\sqrt[3]{0} = 0 \quad \text{pues } (0)^3 = 0$$

Pero en el caso de exponente natural par se nos presenta un problema. En efecto:

$\sqrt[2]{9}$ tendría 2 soluciones distintas: el 3 y el -3. Esto es así porque:

$$(3)^2 = 9 \quad \text{y también} \quad (-3)^2 = 9.$$

El problema es que entonces el símbolo $\sqrt[2]{9}$ ya no representa un solo número sino dos números distintos.

No se podría poner $3 = \sqrt{9}$ y $-3 = \sqrt{9}$ porque al aplicar carácter transitivo de la igualdad tendríamos que concluir que $3 = -3$ (!!!).

Para evitar estos inconvenientes se adopta actualmente el siguiente criterio:

Se define como raíz par de cualquier real no negativo "a", **al real no negativo** "b" que cumple $b^n = a$ (donde "n" es el índice par de la raíz)

En símbolos:

$\forall a \geq 0 ; \forall b \geq 0 , \forall n \text{ natural par} , \text{ definimos } :$

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a$$

Entonces vale $\sqrt{9} = 3$ (y ya no "-3")

Recordemos ahora algo de nomenclatura. En la expresión de la raíz distinguimos dos elementos: "índice" y "radicando". Los indicamos a continuación:

$$\overset{\text{índice}}{\sqrt[n]{\text{radicando}}}$$



Hace falta aclarar algo más en el tema de la radicación de reales.

¿Cuánto vale $\sqrt[2]{x^2}$?

Notemos que x^2 es no negativo y el índice es par. El resultado debe ser no negativo. Entonces la pregunta es: ¿cuál es el número real no negativo que elevado al cuadrado da x^2 ?

Se hace más fácil pensarlo para un número en particular:

$$1) \sqrt[2]{3^2} = 3 \quad \text{pues } (3)^2 = 3^2 \text{ y } 3 > 0$$

$$2) \sqrt[2]{(-3)^2} = \sqrt[2]{9} = 3 \quad (\text{el real } \textit{no negativo} \text{ que elevado al cuadrado da } (-3)^2 \text{ es } 3. \text{ ¡Por supuesto que } (-3) \text{ parece cumplir también lo pedido, pero es negativo!})$$

En el (2) vale $3^2 = 9$ (y 9 es el radicando, porque: $(-3)^2 = 9$).

En ambos casos el resultado de $\sqrt[2]{x^2}$ fue el valor absoluto de x : $|x|$. Ésta es la respuesta a la pregunta hecha más arriba: *el real no negativo que elevado al cuadrado da x^2 es $|x|$.*

Efectivamente vale:

$$\sqrt[2]{x^2} = |x| \quad \text{para cualquier real } x$$

En cambio, para exponente e índice impar podríamos poner, por ejemplo:

$$\sqrt[3]{x^3} = x \quad \sqrt[5]{x^5} = x$$

Por ejemplo $\sqrt[3]{(-2)^3}$ es la raíz cúbica de (-8) y por tanto es (-2) .

Lo mismo para el caso de $\sqrt[3]{(2)^3}$: la raíz cúbica de (8) es (2) . En estos dos casos todo ocurre como si la raíz impar y el índice impar (de igual valor ambos)



simplemente se anularan. Tengamos en cuenta que con el índice y exponente par (de igual valor) no sucede así pues puede darse el caso de

$\sqrt[2]{(-2)^2}$ que no nos da (-2) sino (2) (vale decir: *no podemos cancelar sin más el índice y el exponente si son pares*)

En lo que sigue trabajaremos con radicandos exclusivamente *no negativos*. De modo que los radicandos y los resultados de las raíces serán no negativos.

La propiedad fundamental de las raíces

Lo primero es repasar algo que luego nos será muy útil:

“Si multiplicamos el índice y el exponente por el mismo natural el resultado de la raíz no se altera”.

En símbolos:

$$\forall a \geq 0; \forall n, m, k \in \mathbb{N} \quad \text{vale} \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Ejemplos:

$$1) \quad \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5 \cdot 2]{4^{3 \cdot 2}} = \sqrt[10]{4^6}$$

$$2) \quad \sqrt[7]{a^2} = \sqrt[7 \cdot 5]{a^{2 \cdot 5}} = \sqrt[35]{a^{10}}$$

Supongamos que queremos comparar dos raíces como $\sqrt[3]{2^2}$ y $\sqrt[4]{2^3}$

Así como están no es fácil ver cuál es más grande (si hay alguna que lo sea). Para hacerlo podríamos expresar ambas raíces de modo que tengan igual índice.

1) multiplico índice y exponente de $\sqrt[3]{2^2}$ por 4:

$$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3 \cdot 4]{2^{2 \cdot 4}} = \sqrt[12]{2^8}$$



2) multiplico índice y exponente de $\sqrt[4]{2^3}$ por 3:

$$\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4 \cdot 3]{2^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{2^9}$$

Ahora sabemos que:

$$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{2^8} \quad \text{y} \quad \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$$

Así expresadas son fáciles de comparar. Vemos que:

$$\sqrt[12]{2^9} > \sqrt[12]{2^8}$$

y por lo tanto:

$$\sqrt[4]{2^3} > \sqrt[3]{2^2}$$

Al proceso de reescribir $\sqrt[3]{2^2}$ y $\sqrt[4]{2^3}$ como raíces de igual índice se lo llama **“reducción a común índice”**.

Otro ejemplo:

Reducir a común índice los números:

$$A = \sqrt[3]{3^2} \quad \text{y} \quad B = \sqrt[5]{3^3}$$

$$A = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3 \cdot 5]{3^{2 \cdot 5}} = \sqrt[15]{3^{10}}$$

$$B = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5 \cdot 3]{3^{3 \cdot 3}} = \sqrt[15]{3^9}$$

si ahora quisiéramos compararlas sabríamos fácilmente que $B < A$ porque:

$$\sqrt[15]{3^9} < \sqrt[15]{3^{10}}$$

Uno más:

Reducir a común índice los radicales siguientes y compararlos:



$$A = \sqrt[5]{a^2 b^3} \quad \text{y} \quad B = \sqrt[7]{a^5 b^2}$$

Obviamente ya sabemos que el recurso es multiplicar por "7" índice y exponentes de A y multiplicar por "5" índice y exponentes de B.

$$\sqrt[5]{a^2 b^3} = \sqrt[5 \cdot 7]{(a^2 b^3)^7} = \sqrt[5 \cdot 7]{(a^2)^7 (b^3)^7} = \sqrt[35]{a^{14} b^{21}} = A$$

$$\sqrt[7]{a^5 b^2} = \sqrt[7 \cdot 5]{(a^5 b^2)^5} = \sqrt[7 \cdot 5]{(a^5)^5 (b^2)^5} = \sqrt[35]{a^{25} b^{10}} = B$$

Ahora bien en lugar de *multiplicar* por un natural el índice y el exponente de un radical podemos *en ciertos casos*, proceder a la inversa. Es decir podemos *dividir* exponente e índice por el mismo natural.

Veamos:

$$\sqrt[10]{x^8} = \sqrt[10/2]{x^{8/2}} = \sqrt[5]{x^4}$$

Una vez expresado como $\sqrt[5]{x^4}$ ya no podemos continuar porque 5 y 4 no tienen divisores comunes. Así está expresado como radical irreducible.

Otro ejemplo:

Simplificar en lo posible la expresión del radical $\sqrt[8]{x^{12}}$

No es difícil encontrar un divisor común para 8 y 12. Por ejemplo el 2 lo es. Pero nos conviene elegir el 4 que también es divisor común pero es el mayor. (¿se acuerda de "máximo común divisor?")

Entonces:

$$\sqrt[8]{x^{12}} = \sqrt[8/4]{x^{12/4}} = \sqrt[2]{x^3}$$

Ejemplo:

Simplificar la expresión del radical $\sqrt[10]{a^6 b^4}$

Aquí el divisor apropiado para el 10, el 6 y el 4 es el 2.



$$\sqrt[10]{a^6 b^4} = \sqrt[10/2]{a^{6/2} b^{4/2}} = \sqrt[5]{a^3 b^2}$$

Raíz de raíz

¿Cómo escribir más sencillamente el radical $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$?

La propiedad para raíz de raíz es:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}; \forall x \geq 0 \text{ vale: } \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

Vale decir que en el caso de *raíz de raíz* simplemente podemos multiplicar los índices.

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[5 \cdot 2]{3} = \sqrt[10]{3}$$

Ud. puede verificar esta igualdad usando la calculadora científica.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^2 y^3}} = \sqrt[4 \cdot 3]{x^2 y^3} = \sqrt[12]{x^2 y^3}$$

Otro ejemplo:

$$\sqrt[6]{\sqrt[10]{x^4}} = \sqrt[6 \cdot 10]{x^4} = \sqrt[60]{x^4}$$

y puedo seguir (recordando que el máximo común divisor de 60 y 4 es 4):

$$\sqrt[60]{x^4} = \sqrt[60/4]{x^{4/4}} = \sqrt[15]{x}$$

(seguimos trabajando con $x \geq 0$)

Producto de radicales

Tenemos a disposición una propiedad de los radicales:

$$\sqrt[n]{a * b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} \quad \forall n \in \mathbb{N}; \forall a, b \geq 0$$

es la "propiedad distributiva de la radicación respecto del producto"

Comprobémosla en un caso particular

$$\sqrt[3]{(27) * (8)} = \sqrt[3]{27} * \sqrt[3]{8}$$

lo hacemos así: calculamos el valor de $\sqrt[3]{(27) * (8)}$ y además el de $(\sqrt[3]{27}) * (\sqrt[3]{8})$. Debemos verificar que son iguales.

En efecto:

$$\sqrt[3]{(27) * (8)} = \sqrt[3]{216} = 6 \quad \left. \vphantom{\sqrt[3]{(27) * (8)}} \right\} \text{ ise verifica!}$$

$$(\sqrt[3]{27}) * (\sqrt[3]{8}) = 3 * 2 = 6$$

Usando su calculadora científica intente comprobarlo en un par de otros casos.

Por ejemplo:

en éste: $\sqrt[5]{(20) * (7)} = \sqrt[5]{20} * \sqrt[5]{7}$

y en éste : $\sqrt[3]{(9) * (8)} = \sqrt[3]{9} * \sqrt[3]{8}$

La propiedad distributiva que comentamos, leída “de derecha a izquierda” nos dice:

$$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b} \quad \forall n \in N, \forall a; b \geq 0$$

es decir nos permite *unificar* los dos radicales. Pero ¡cuidado!, esta fórmula exige que los dos tengan igual índice.

Veamos un caso:

$$\sqrt[5]{a^2} * \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^2 * a} = \sqrt[5]{a^3}$$

aquí aplicamos: $a^2 * a = a^{2+1}$

↑

Aplicamos la propiedad

Otro:

$$\sqrt[7]{a^2b} * \sqrt[7]{ab^3} = \sqrt[7]{a^2b * ab^3} = \sqrt[7]{a^3b^4}$$

↑

$a^2bab^3 = a^2abb^3 = a^3b^4$

¿Cómo proceder cuando los dos radicales no tienen el mismo índice? Sencillamente expresándolos de modo que tengan igual índice (¡ahora usamos el proceso de reducción a común índice!):



Por ejemplo:

$$\sqrt[5]{3^2} * \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[5*4]{3^{2*4}} * \sqrt[4*5]{2^{3*5}} = \sqrt[20]{3^8} * \sqrt[20]{2^{15}} = \sqrt[20]{3^8 * 2^{15}}$$

Veamos otro ejemplo:

$$\sqrt[7]{a^3} * \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[7*3]{a^{3*3}} * \sqrt[3*7]{a^{2*7}} = \sqrt[21]{a^9} * \sqrt[21]{a^{14}} = \sqrt[21]{a^9 a^{14}} = \sqrt[21]{a^{23}}$$

Un caso con más letras:

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{ab^2} * \sqrt[5]{a^4b} &= \sqrt[6*5]{a^5(b^2)^5} * \sqrt[5*6]{a^{4*6}b^{1*6}} = \sqrt[30]{a^5b^{10}} * \sqrt[30]{a^{24}b^6} = \\ &= \sqrt[30]{a^5b^{10}a^{24}b^6} = \sqrt[30]{a^5a^{24}b^{10}b^6} = \sqrt[30]{a^{29}b^{16}} \end{aligned}$$

aquí aplico la propiedad distributiva para "unificar"

Cociente de raíces:

La radicación no sólo es distributiva respecto del producto. También lo es respecto de la división.

En efecto:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \geq 0, \forall b > 0$$

y, análogamente a la anterior propiedad ésta nueva, leída al revés:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

nos autoriza a “unificar” una división de dos radicales en uno solo (siempre que sean de igual índice):

Por ejemplo:

$$\frac{\sqrt[5]{30}}{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[5]{\frac{30}{6}} = \sqrt[5]{5}$$

Otro ejemplo:

$$\frac{\sqrt[7]{a^4 b^5}}{\sqrt[7]{a^2 b}} = \sqrt[7]{\frac{a^4 b^5}{a^2 b}} = \sqrt[7]{a^2 b^4}$$

Por supuesto que si los dos radicales no tienen igual índice “reducimos a común índice”:

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[7]{a^2}} = \frac{\sqrt[5 \cdot 7]{a^{3 \cdot 7}}}{\sqrt[7 \cdot 5]{a^{2 \cdot 5}}} = \frac{\sqrt[35]{a^{21}}}{\sqrt[35]{a^{10}}} = \sqrt[35]{\frac{a^{21}}{a^{10}}} = \sqrt[35]{a^{11}}$$

Otro ejemplo más integrador:



$$\frac{\sqrt[4]{3\sqrt{a^5}}}{\sqrt[2]{5\sqrt{a^3}}} = \frac{4\sqrt[3]{a^5}}{2\sqrt[5]{a^3}} = \frac{12\sqrt{a^5}}{10\sqrt{a^3}} = \frac{12\sqrt[5]{a^{5*5}}}{10\sqrt[6]{a^{3*6}}} = \frac{60\sqrt{a^{25}}}{60\sqrt{a^{18}}} = \sqrt[60]{\frac{a^{25}}{a^{18}}} = \sqrt[60]{a^7}$$

elijo multiplicar arriba por
5 y abajo por 6.

Suma y resta de radicales

Para sumar expresiones como la siguiente:

$$3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

simplemente sumamos los coeficientes : $3 + 7 = 10$

y obtenemos un resultado que tiene la misma expresión radical de los dos sumandos:

$$3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

y no es raro que así sea: 3 veces una raíz más 7 veces esa raíz es igual a 10 veces esa misma raíz.

Pero la suma de radicales resulta tan sencilla siempre que los dos sumandos tengan la misma expresión radical.

Hay casos en que encontramos dos términos que no se ven como iguales pero trabajando un poco se pueden expresar de modo que tengan el mismo radical.

Por ejemplo, si tenemos que sumar:

$$3\sqrt{20} + 7\sqrt{5}$$

podríamos en este caso poner $\sqrt{20}$ como $\sqrt{4 \cdot 5}$ y, aplicando la propiedad

distributiva, quedaría: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$ es decir $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Entonces podríamos proceder así:

$$3\sqrt{20} + 7\sqrt{5} = 3 \cdot 2\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

y ahora sumar simplemente

$$6 \sqrt{5} + 7 \sqrt{5} = 13 \sqrt{5}$$

Veamos otro:

Calcular $2 \sqrt{125} - 3 \sqrt{45}$

Aquí lo primero es tratar de reexpresar $\sqrt{125}$ y $\sqrt{45}$.

Empecemos con $\sqrt{125}$. Notemos que $125 = 25 \cdot 5$. Entonces se puede poner:

$$\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Distribuyo la raíz respecto del producto



Continuemos con $\sqrt{45}$. El 45 se puede escribir como $45 = 9 \cdot 5$ y entonces:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot \sqrt{5}$$

Con estas dos simplificaciones podemos resolver sencillamente el ejercicio planteado:

$$2 \sqrt{125} - 3 \sqrt{45} = 2 \cdot 5 \sqrt{5} - 3 \cdot 3 \sqrt{5} = 10 \sqrt{5} - 9 \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

Tengamos en cuenta que no siempre se puede operar como en los ejemplos anteriores.

Veamos qué sucede en un caso como el siguiente.

Calcular $3 \sqrt{18} + 5 \sqrt{20}$

$$(I) \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \sqrt{2}$$

$$(II) \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \sqrt{5}$$

Aplicando (I) y (II) escribimos:

$$3 \sqrt{18} + 5 \sqrt{20} = 3 \cdot 3 \sqrt{2} + 5 \cdot 2 \sqrt{5} = 9 \sqrt{2} + 10 \sqrt{5}$$

y ya no podemos simplificar más esta expresión.

Raíces y exponentes fraccionarios

Al trabajar con enteros pudimos usar exponentes naturales.

Al trabajar con racionales pudimos usar exponentes enteros (que incluyen negativos).

Ahora que estamos trabajando con raíces trabajaremos con exponentes fraccionarios.

Recordemos una fórmula que vincula exponentes fraccionarios con raíces (siendo m,n naturales):

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Un caso particular sería:

$$\sqrt[3]{2^5} = 2^{5/3}$$

Usted puede verificar esta igualdad con la calculadora científica.

Tengamos en cuenta que no sólo se puede pasar de raíz a exponente fraccionario sino también a la inversa.

Por ejemplo:

$$4^{3/2} = \left(\sqrt[2]{4} \right)^3 = (2)^3 = 8$$

Para estos exponentes fraccionarios valen reglas análogas a las que regían el trabajo con los otros exponentes. Veamos algunos ejemplos:

$$a^{2/3} \cdot a^{1/2} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}$$



$$\left(a^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$\frac{a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{7}}} = a^{\frac{5}{3} - \frac{2}{7}}$$

(por supuesto que si "a" está en el divisor debe ser $a \neq 0$)

Desarrollemos el siguiente ejemplo: expresar las raíces usando exponentes fraccionarios, luego operar aplicando propiedades de la potencia y finalmente volver a expresar como radical.

Uno.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[2]{a}\right)^2 &= \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{6}}\right)^2 = \\ \left(a^{\frac{4+3}{6}}\right)^2 &= \left(a^{\frac{7}{6}}\right)^2 = a^{\frac{7}{6} \cdot 2} = a^{\frac{14}{6}} = a^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{a^7} \end{aligned}$$

Dos.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} &= \left(2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{3}{5} + \frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^{\frac{12+5}{20}}\right)^{\frac{1}{3}} = \\ \left(2^{\frac{17}{20}}\right)^{\frac{1}{3}} &= 2^{\frac{17}{20} \cdot \frac{1}{3}} = 2^{\frac{17}{60}} = \sqrt[60]{2^{17}} \end{aligned}$$

Potencias de exponente fraccionario y negativo

En una expresión como ésta:



$$\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$$

la raíz está en el divisor. Podemos reexpresar la raíz como una potencia de exponente fraccionario:

$$\frac{1}{2^{\frac{3}{5}}}$$

y, a continuación, reexpresar la fracción usando exponente negativo:

$$2^{-\frac{3}{5}}$$

Es momento de poner en práctica los conceptos...



Trabajo práctico sugerido

Trabajo práctico N° 3: **Radicales**

Consignas

Opere simplificando al máximo las expresiones indicadas.

$$1) \left[(a^3)^3 (a^2)^2 \right]^5 (a^4 (a^3)^3)^4 =$$

$$2) \left[(a^4)^3 (a^2)^2 \right]^3 (a^5)^2 a^3 =$$

$$3) \frac{\left[(a^3 b)^2 b^3 \right]^4 \left[(ab^2)^3 (ab)^2 \right]^3}{\left[a^2 (ba)^3 \right]^3}$$

$$4) \frac{\left[(x^3 y z^2)^3 (x y^2 z^3)^4 \right]^5}{\left((x^2)^2 y^3 \right)^3}$$



$$5) \frac{(x^3 y^2)^3 (x^4 a^5 (b^2))^5 ab}{(y^4)^3}$$

Opere con los siguientes radicales obteniendo un único radical:

$$6) \sqrt[5]{\sqrt[4]{x^2 y^6}}$$

$$7) \sqrt[7]{\sqrt[10]{x^{14}}}$$

$$8) \sqrt[4]{\sqrt[2]{\sqrt[10]{x^{16}}}}$$

$$9) \sqrt[5]{\sqrt[10]{\sqrt[6]{x^{15}}}}$$

$$10) \sqrt[10]{\sqrt[14]{x^{35}}}$$

Expresé las siguientes potencias de exponente fraccionario como radicales:

$$11) 8^{\frac{1}{3}}$$

$$12) 4^{\frac{5}{2}}$$

$$13) 9^{\frac{3}{2}}$$

Reexpresé cada radical como potencia de exponente fraccionario, luego, opere aplicando las reglas de la potencia y, finalmente, vuelva a expresar como raíz.

$$14) \frac{\sqrt[8]{x^5}}{\sqrt[3]{x^7}} \cdot \frac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[5]{x^9}}$$



$$15) \frac{\sqrt[3]{x^7}}{\sqrt[7]{x^{11}}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^8}}{\sqrt[4]{x^6}}$$

$$16) \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^9}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[9]{x^{10}}}}$$

$$17) \sqrt[7]{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[9]{x^{10}}}}$$

EVALUACIÓN

Para autoevaluarse compare los resultados que usted obtuvo con los que nosotros le presentamos a continuación.

Orientaciones para la corrección

1) a^{117}

2) a^{61}

3) $a^{24} \cdot b^{35}$

4) $x^{53} \cdot y^{46} \cdot z^{90}$

5) $\frac{a^{26} \cdot b^{11} \cdot x^{29}}{y^6}$

6) $\sqrt[10]{xy^3}$

7) $\sqrt[10]{x^2} = \sqrt[5]{x}$

8) $\sqrt[5]{x}$

9) $\sqrt[20]{x}$



$$10) \sqrt[28]{x^7} = \sqrt[4]{x}$$

$$11) \sqrt[3]{8}$$

$$12) \sqrt{4^5}$$

$$13) \sqrt{9^3}$$

$$14) \frac{1}{\sqrt[840]{x^{2467}}}$$

$$15) \sqrt[210]{x^{181}}$$

$$16) \frac{1}{\sqrt[36]{x^{65}}}$$

$$17) \frac{1}{\sqrt[315]{x^{41}}}$$

4. Intervalos de números reales

Al considerar conjuntos de números reales a veces nos encontramos con algunos conjuntos especiales con una característica sencilla: contienen todos los números comprendidos entre otros dos (incluyendo o no a estos dos números). A esos conjuntos se los llama **intervalos**. A los dos números que "encierran" a los demás del intervalo se los llama **extremos** del intervalo.

Los extremos pueden o no formar parte del intervalo. Si ambos forman parte del intervalo, éste se denomina cerrado; si ninguno de los dos pertenece al intervalo, el intervalo se llama abierto. Si uno de los dos pertenece y el otro no, el intervalo recibe el nombre de semiabierto o semicerrado.

Además, debemos tener en cuenta los casos "raros" de intervalos como aquellos que contienen un solo número. En efecto, si los dos extremos son el mismo número entonces en caso de que el intervalo sea cerrado sólo contiene a ese número y en caso de que sea abierto o semiabierto no contiene ninguno, es decir, es el conjunto vacío.

En símbolos:

- $(2 ; 2)$ es el conjunto vacío, ningún número puede ser mayor y a la vez menor que dos.
- $[2 ; 2]$ es el conjunto formado por el solo número 2. Es decir $[2 ; 2]=\{2\}$

Es interesante considerar el intervalo $(2 ; 2]$. ¿Hay algún número que sea al mismo tiempo mayor que 2 y al mismo tiempo menor o igual que 2? Es decir, ¿hay algún número real (llamémoslo "x") que cumpla " $2 < x \leq 2$ "? No es difícil ver que no lo hay y por eso el intervalo que estamos considerando es el conjunto vacío.

La utilización de intervalos para expresar las soluciones de inecuaciones tiene una especial característica de claridad y precisión que la hace significativamente recomendable para ese fin.

Dados dos intervalos se pueden definir varias operaciones con ellos. Nosotros abordaremos sólo la Unión, la Intersección y la Diferencia.

Profundice el estudio de los intervalos con la siguiente guía de lectura.



Guía para la lectura

Le proponemos guiar su lectura del material siguiendo estas orientaciones:

- Rescate qué son los intervalos en la recta real, cómo se simbolizan y cómo se representan gráficamente.
- Distinga los tipos de intervalos mencionados por el autor: cerrados, abiertos y semiabiertos o semicerrados.
- Concéntrese en la expresión del intervalo usando inecuaciones.
- Focalice su atención en la definición de unión de dos intervalos, en su simbolización y en las ejemplificaciones que ofrece el autor.
- Rescate la definición de intersección entre intervalos, su simbolización y los ejemplos brindados por el autor.

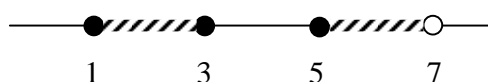
Intervalos en la recta real

Un intervalo en \mathbb{R} es un subconjunto de \mathbb{R} que se caracteriza por verificar una de estas inecuaciones.

$$\begin{aligned} a < x < b \\ a \leq x < b \\ a \leq x \leq b \\ a < x \leq b \end{aligned}$$

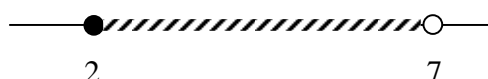
Los intervalos son subconjuntos de \mathbb{R} que incluyen *todos* los reales ubicados entre su extremo izquierdo y su extremo derecho.

Por ejemplo, el siguiente subconjunto de \mathbb{R} (sombreado sobre la recta) no es un intervalo.



Esto es así porque no todos los reales entre 1 y el 7 pertenecen al conjunto (por ejemplo el 4 no pertenece)

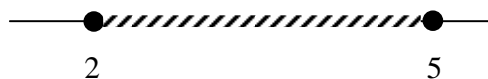
El siguiente sí es un intervalo,



porque todos los reales comprendidos entre sus extremos (o sea el 2 y el 7) pertenecen al conjunto.

La forma habitual de indicar un intervalo es con un par de reales (sus extremos) separados por punto y coma y encerrados entre corchetes o paréntesis.

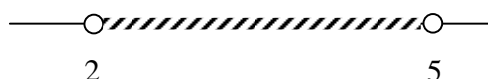
Por ejemplo: el intervalo siguiente formado por los reales comprendidos entre 2 y 5 (incluidos los dos extremos) se representa gráficamente así.



Y se simboliza así: $[2 ; 5]$

Para indicar que los extremos no pertenecen al intervalo se usan paréntesis en lugar de corchetes.

Por ejemplo el símbolo $(2 ; 5)$ representaría al intervalo de reales comprendidos entre 2 y 5 pero *sin incluir los extremos*. Gráficamente se utilizan pequeños círculos “huecos”.

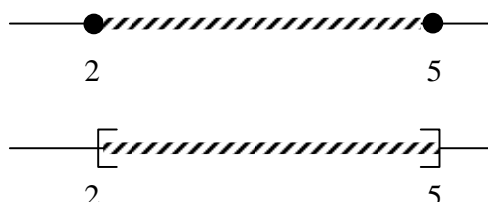


Para representar gráficamente los intervalos con y sin extremos incluidos se suelen usar también corchetes y paréntesis.

Dos formas de Representar el Intervalo $(2 ; 5)$



En cambio:



Dos formas de Representar el Intervalo $[2 ; 5]$

Un intervalo, con sus dos extremos incluidos se llama **CERRADO**.
Por ejemplo: $[2 ; 7]$ es cerrado.

Un intervalo sin ninguno de sus extremos incluidos se llama **ABIERTO**.
Por ejemplo: $(1 ; 5)$ es abierto.

Cuando tienen un extremo incluido y el otro no, se llaman semiabiertos o semicerrados. Son ejemplos de este tipo de intervalos:

$[2 ; 5)$
 $(3 ; 9]$

} Semicerrados o semiabiertos

Consideremos ahora la expresión del intervalo usando inecuaciones.

El intervalo $(2 ; 7)$ está formado por todos los reales que son mayores que 2 y menores que 7. Si simbolizamos con “x” a un número real cualquiera de ese intervalo entonces ese “x” cumple:



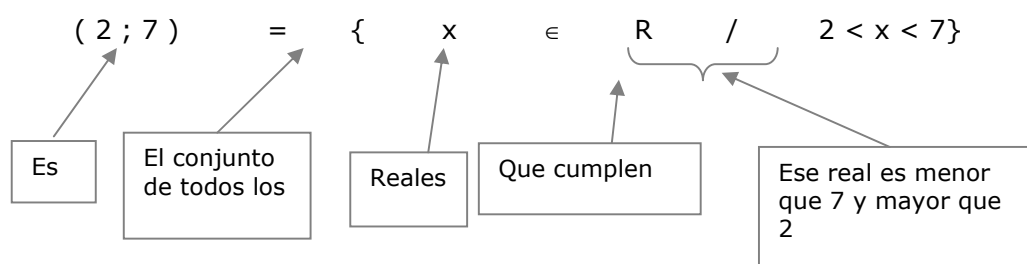
$$2 < x < 7$$

La expresión $2 < x < 7$ es una forma condensada de escribir:

$$2 < x \quad \text{y} \quad x < 7$$

Con esta forma de escribir, podemos expresar el intervalo $(2 ; 7)$ de este modo. " $(2 ; 7)$ es el conjunto de todos los reales que son simultáneamente mayores que 2 y menores que 7".

Con la notación de la teoría de conjuntos esto se simboliza así:



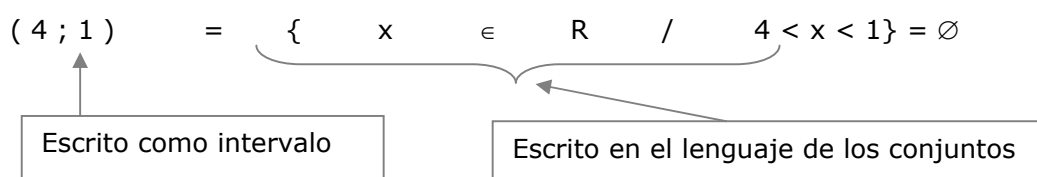
Análogamente, para un cerrado escribiríamos

$$[3 ; 9] = \{ x \in R / 3 \leq x \leq 9 \}$$

Por supuesto que si el extremo que figura escrito a la izquierda es mayor que el que figura escrito a la derecha, el intervalo es vacío.

Consideremos el ejemplo siguiente: $(4 ; 1)$.

Este intervalo es el conjunto vacío porque no hay **ningún real** que sea simultáneamente mayor que 4 y menor que 1.



Conviene considerar otras situaciones en la expresión de intervalos.

El intervalo $[2 ; 2]$ es el conjunto de todos los reales que son mayores o iguales que 2 y menores o iguales que 2. Es decir es el conjunto de todos los reales que cumplen:

$$2 \leq x \leq 2$$

Hay un único número que verifica esa inecuación y es el 2.

De modo que $[2 ; 2]$ es el conjunto $\{ 2 \}$. Vale decir: $[2 ; 2] = \{ 2 \}$

Si, en cambio, el intervalo fuera abierto por uno de los dos extremos (o por los dos) entonces el conjunto sería vacío. Por ejemplo, diremos que el intervalo $[2; 2)$ cumple:

$$[2 ; 2) = \emptyset$$

porque ese intervalo $[2 ; 2)$ es el conjunto de todos los reales que cumplen:

$$2 \leq x < 2$$

y ningún real puede ser *mayor o igual* que 2 y al mismo tiempo *menor* que 2.

Con mayor razón entonces, el intervalo $(2 ; 2)$ es vacío. Ese intervalo puede escribirse:

$$(2 ; 2) = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 2 \}$$

y se ve fácilmente que no existe un real que cumpla simultáneamente las dos condiciones ("ser mayor que 2 y menor que 2").

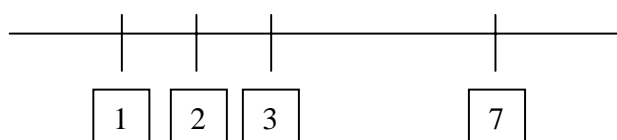
Operaciones con intervalos: Unión e Intersección

Unión de dos intervalos es el conjunto (que a veces puede resultar también un intervalo) formado por todos los elementos que están en alguno de los dos conjuntos (o en los dos). La unión de los intervalos A y B se simboliza así:

$$A \cup B$$

Veamos un ejemplo: $[2 ; 3] \cup (1 ; 7)$

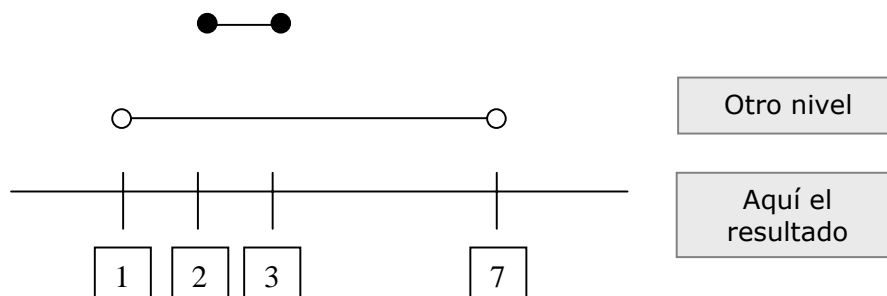
Conviene representar gráficamente los dos intervalos y la solución. Comenzamos por trazar la recta y marcar en ella los puntos que corresponden a los extremos 2; 3; 1; 7.



(No hace falta *respetar una escala pero sí respetar el orden* al marcar los puntos)

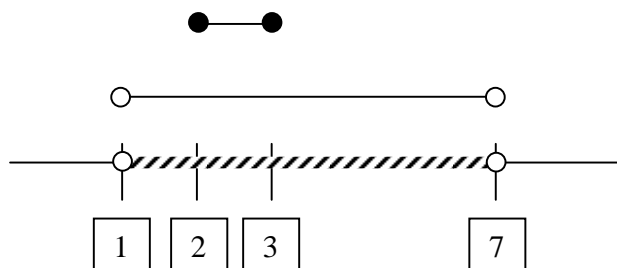
Ahora representamos cada intervalo con un segmento. Lo dibujamos por encima de la recta.

Un nivel



Ahora bien, como se debe encontrar la unión, vamos a sombrear en el eje todos los puntos que pertenezcan a alguno de los intervalos o a los dos. En síntesis, vamos a sombrear todos los puntos de la recta que estén debajo de algún segmento.

Nos queda:

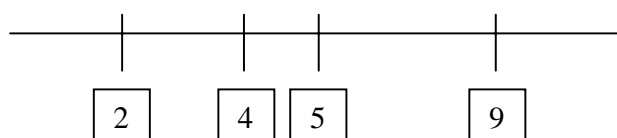


Y el conjunto solución es: $S = (1 ; 7)$ que en este caso es también un intervalo.

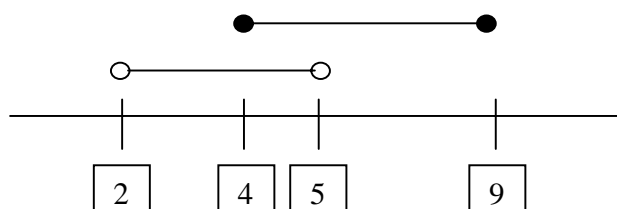
Veamos otro ejemplo

Se pide hallar $(2 ; 5) \cup [4 ; 9]$.

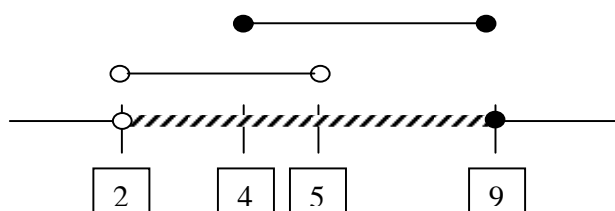
Comenzamos por trazar la recta real y marcar los puntos 2; 5; 4; 9.



Representamos más arriba del eje los dos intervalos.



Ahora sombreamos en la recta los puntos que pertenecen a algún intervalo (o a los dos), es decir sombreamos los puntos de la recta que están "techados" por algún trazo.



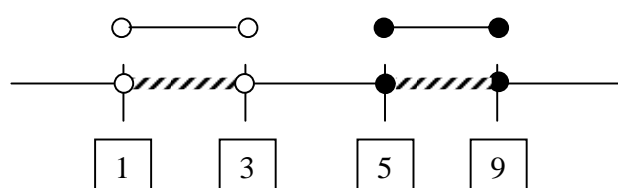
El conjunto solución es entonces: $S = (2 ; 9]$.

Y aquí también el resultado es un intervalo.

Un último ejemplo. Si encontramos la unión:

$$(1 ; 3) \cup [5 ; 9]$$

podemos comprobar que no es un intervalo y no podemos escribirlo de modo más compacto.



Aquí la solución es:

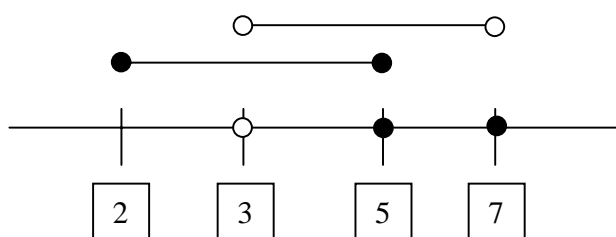
$$S = (1 ; 3) \cup [5 ; 9]$$

Intersección entre intervalos

Dados dos intervalos la intersección de ambos es el conjunto formado por los puntos repetidos (es decir los que figuran en ambos conjuntos). La intersección se indica con el símbolo " \cap ".

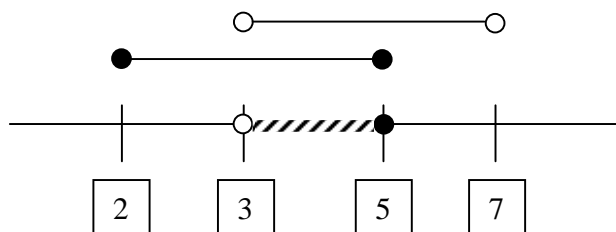
Veamos un ejemplo: $[2 ; 5] \cap (3 ; 7)$

Trazamos la recta real y marcamos los puntos 2; 5; 3; 7. Representamos los dos intervalos.



Ahora sólo falta sombrear sobre la recta real los puntos "repetidos"; es decir los puntos que están debajo de dos trazos (no de uno solo).

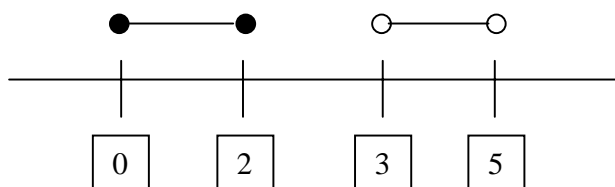
Ellos nos da el siguiente resultado:



El conjunto solución se indica: $S = (3 ; 5]$

Veamos otro ejemplo: $(3 ; 5) \cap [0 ; 2]$.

Trazamos el eje, marcamos los puntos y representamos los intervalos.



En este caso no hay elementos repetidos.

El conjunto solución es vacío. $S = \emptyset$



Diferencia entre intervalos

Dados dos conjuntos A y B, se llama "diferencia entre A y B" (y se la simboliza "A-B") al conjunto que resulta de quitar de A los elementos que pertenecan también a B.

Por ejemplo: si $A = \{a; b; c; d; e\}$ y $B = \{c; e; h; m\}$, entonces, al conjunto A le quito los elementos que están también en B (ellos son: el "c" y el "e") y obtengo, entonces, el conjunto diferencia $A-B = \{a; b; d\}$.

¿Y qué sucede si A y B no tienen elementos en común?

Simplemente, la diferencia "A-B" es el conjunto A (pues no hay que quitar nada de él dado que no hay elementos comunes).

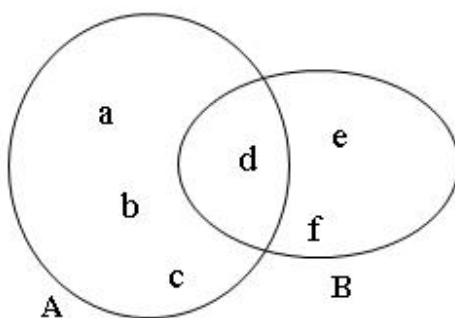
Por ejemplo: si $A = \{a; b; c; d\}$ y $B = \{e; h\}$, entonces resulta $A - B = A$.

¿Y cuál sería A-B si fuese $A = \{a; b\}$ y $B = \{a, b; c; d\}$?

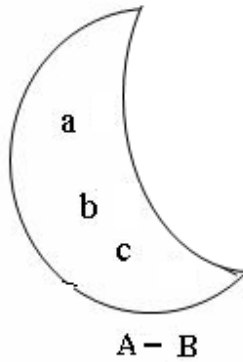
La respuesta es: $A-B = \{\}$ dado que al conjunto A hay que quitarle todos los elementos comunes ique son todos los de A!; es por eso que $A - B = \{\}$.

Para intentar entenderlo de otra forma podemos utilizar los diagramas de Venn.

Si el conjunto $A = \{a; b; c; d\}$ y el conjunto $B = \{d; e; f\}$ sus diagramas de Venn serán:



En este caso para obtener $A-B$ simplemente borraríamos todo B, con lo que se obtendría:



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 4: Intervalos de números reales

Consignas

Expresar las inecuaciones que definen a los siguientes intervalos. En caso de que se trate del conjunto vacío indíquelo usando el símbolo habitual para este conjunto.

- 1) $(1 ; 7]$
- 2) $[-5 ; -3]$
- 3) $(-2 ; -1)$
- 4) $[2 ; 9]$
- 5) $(2 ; -1)$
- 6) $(-3 ; -2)$
- 7) $(3 ; 3]$
- 8) $[2 ; 2]$
- 9) $(2 ; 0]$
- 10) $(-5 ; -5)$

Indique el resultado de la unión de los intervalos indicada en cada caso.



11) $(4 ; 5) \cup (1 ; 5]$

12) $(2 ; 3) \cup [3 ; 7)$

13) $[4 ; 4] \cup (4 ; 5)$

14) $[3 ; 3) \cup (5 ; 7)$

15) $(1 ; 8) \cup [0 ; 7]$

Indique el resultado de la intersección de los intervalos indicada en cada caso.

16) $(-1 ; 3) \cap (4 ; 5)$

17) $(1 ; 4) \cap [2 ; 7]$

18) $[2 ; 5) \cap (3 ; 7]$

19) $(2 ; 5) \cap [5 ; 7]$

20) $(1 ; 7] \cap [7 ; 9)$

EVALUACIÓN

Compare su resolución de los ejercicios con la nuestra.

Orientaciones para la corrección

1) $1 < x \leq 7$

2) $-5 \leq x \leq -3$

3) $-2 < x < -1$

4) $2 \leq x \leq 9$

5) \emptyset

6) $-3 < x < -2$

7) \emptyset

8) $\{2\}$

9) \emptyset

10) \emptyset

11) $(1 ; 5]$



12) (2 ; 7)

13) [4 ; 5)

14) (5 ; 7)

15) [0 ; 8)

16) \emptyset

17) [2 ; 4)

18) (3 ; 5)

19) \emptyset

20) {7}

Cierre de la unidad 1

Lo/a invitamos a dar por terminada esta primera unidad a través del siguiente Trabajo Práctico, que contiene ejercicios integradores de los contenidos abordados acerca de los temas Números e Intervalos.



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 5

Usted hallará las consignas para desarrollar este trabajo al final de la unidad.

Consignas

1) Resuelva los siguientes ítems:

a) $(-5)^2 \cdot (-1)^2 \cdot (-2)^3$

b)
$$\frac{(-3)^{-2} - (-2)^{-3}}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2}$$



c) $\frac{2^{-1} - 1^{-2}}{3^{-2} - 2^{-3}}$

- 2) Resuelva aplicando propiedades de la potencia, de modo de obtener una expresión simplificada.

a)
$$\frac{\left[\left(a^2 b^3 \right)^3 b^3 \right]^2 \left[\left(a^2 b^3 \right)^4 \left(a^3 b \right)^3 \right]^2}{\left[a^3 \left(b^2 a^3 \right)^2 \right]^4}$$

b) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}$

- 3) Opere reduciendo a una única expresión radical, con el índice más bajo posible.

a) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[2]{1024}}}$

b) $\sqrt[3]{a^2 \cdot b} \cdot \sqrt[4]{a^3 \cdot b^3}$

c) $\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3}}}$

- 4) Opere con los siguientes intervalos en la recta real:

a) $[3;7) \cap [4;7)$

b) $[-1; 3) \cap [1; 2)$

c) $[-1; 3) \cup [1; 2)$



5) Realice las siguientes operaciones con los polinomios indicados:

a) $(x^2 - 3x + 1)(x^3 - 4x^2 + 5x + 2)$

b) $(2x^2 + 5x)^2 - (3x^2 - 4x)^2$

c) $(5x^2 - 2x)^3$

d) $(4x^3 - 5x^2)^3$

e) $(4x^2 - 3x^3)^3 - (5x^3 + 3x^2)^3$

6) Efectúe las siguientes divisiones de polinomios ($P(x)$ dividido $Q(x)$) indicando claramente cociente y resto:

a) $P(x) = 2x^5 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$
 $Q(x) = x + 3$

b) $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x + 5$
 $Q(x) = x^2 - 3x + 1$

$$P(x) = x^5 - x^3 - x + 2$$
$$Q(x) = x^2 - 5x - 2$$

UNIDAD 2 - POLINOMIOS

Presentación

Dedicaremos esta unidad a un trabajo integral con la operatoria de polinomios y factorio. Comenzaremos con la operatoria de monomios y, luego, pasaremos a polinomios -en general con una indeterminada- para finalmente entrar al factorio.

Trabajar “con letras” es el primer paso que usted enfrenta al incursionar en el álgebra. El desarrollo de su habilidad en esta tarea le servirá a lo largo de la carrera donde se enfrentará con planteos abstractos para resolver problemas concretos.

A través del estudio de la presente unidad esperamos que usted sea capaz de:

- Identificar monomios y polinomios
- Operar con monomios y polinomios
- Factorizar expresiones polinómicas

A continuación, le presentamos un detalle de los contenidos y actividades que integran esta unidad. Usted deberá ir avanzando en el estudio y profundización de los diferentes temas, realizando las lecturas requeridas y elaborando las actividades propuestas.

Contenidos y Actividades

5. Monomios



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico Nº 6: Monomios

1.1. Operaciones con monomios



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico Nº 7: Operaciones con monomios



6. Polinomios



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico Nº 8: Polinomios

7. Factoreo

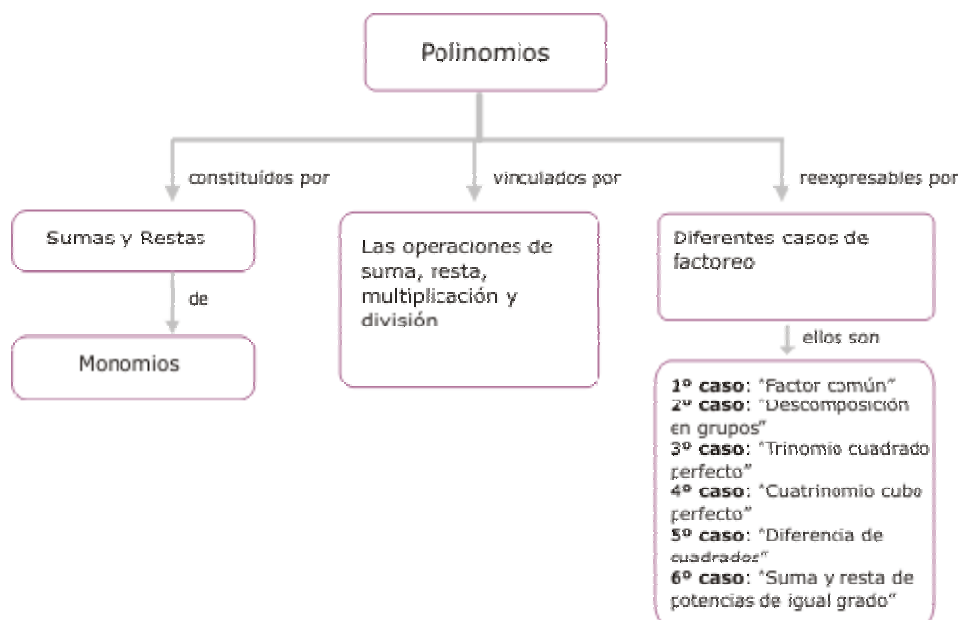


Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico Nº 9: Factoreo

Organizador Gráfico

El siguiente esquema le permitirá visualizar la interrelación entre los conceptos que a continuación abordaremos.



Lo/a invitamos ahora a iniciar el estudio de los contenidos que conforman esta unidad.

1. Monomios

Comencemos este primer punto de la unidad señalando que es común encontrar en matemáticas expresiones que contienen números y letras. Esas letras se llaman indeterminadas. Si las indeterminadas están elevadas a un exponente *natural o cero* y están multiplicadas por números *reales* y no hay sumas ni restas, decimos que esa expresión es un monomio.

Por ejemplo, son monomios:

$$-0.5 x^3 y^4 \text{ (dos indeterminadas)}$$

$$3 x^5 \text{ (una indeterminada)}$$

$$-7 x^2 z^9 \text{ (dos indeterminadas)}$$

En cambio, no son monomios los siguientes:

$$-2.3x^2 + 1.2 x^3 y^4 \text{ (hay una suma)}$$

$$7.4 x^5 - 5.1 x^2 \text{ (hay una resta)}$$

$$-1.2 x^{1/2} \text{ (la } x \text{ está elevada a exponente ni natural ni cero)}$$

Lea, a continuación, el siguiente material bibliográfico en el que se explican la parte numérica y literal, el grado y el valor numérico de un monomio.

Parte numérica y parte literal

Podemos distinguir dos partes en un monomio: la parte de los números ("parte numérica") y la parte de las letras ("parte literal").

Por ejemplo:

En el monomio $-2.3 x^3 y^4$ podemos distinguir dos partes. Una parte numérica: -2.3 y una parte literal: $x^3 y^4$.

En el monomio $5.7 x^8$ la parte numérica es: 5.7 y la parte literal es: x^8 .



Grado de un monomio

El grado de un monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.

Por ejemplo:

El grado de $1.2x^4 y^5$ es 9 (pues $4+5=9$);

El grado de $-2.5 x^6$ es 6;

El grado de 2.3 es 0 (cero) (cuando la indeterminada no aparece podemos considerar que está elevada al exponente cero).

Importante: el monomio 0 (cero) no tiene grado.

En adelante trabajaremos generalmente con monomios que tengan una sola indeterminada.

Comenzaremos por poner nombres simbólicos a los monomios. El nombre constará de una letra mayúscula seguida de la indeterminada entre paréntesis.

Por ejemplo: simbolizo el monomio $2x^3$ con el nombre $P(x)$. Entonces puedo escribir: $P(x) = 2x^3$.

Para indicar que $Q(x)$ es el nombre del monomio $-5x$ escribo:

$$Q(x) = -5x$$

Valor numérico de un monomio

Si reemplazo la indeterminada por un cierto número y efectúo los cálculos indicados, el resultado obtenido se llama el valor numérico del monomio para el valor dado de la indeterminada.

Por ejemplo, consideremos el monomio $P(x) = 4x^3$. Al reemplazar la indeterminada "x" por el número "2" obtenemos el número: $4 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$. Decimos entonces que el valor numérico de $P(x)$ para $x=2$ es 32.

Además "el valor numérico de $P(x)$ para $x = 2$ " se simboliza reemplazando la "x" por el "2" en el nombre del monomio. En este caso el símbolo sería: $P(2)$.

Quiere decir que para el monomio $P(x) = 4x^3$ podemos escribir que $P(2) = 32$.

Otro ejemplo. Si consideramos el monomio $Q(x) = x^3$ entonces vemos fácilmente que el valor numérico de $Q(x)$ para $x = -1$ es: $Q(-1) = (-1)^3 = -1$

Es momento de realizar el siguiente trabajo práctico.



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 6: Monomios

Consignas

Mencione si las siguientes expresiones son monomios.

- 1) $3.5 x^5 - 7.2 x^6$
- 2) $-5.8 x^6 y^7$
- 3) $9.x^{-2}$
- 4) $5 .\sqrt{x}$
- 5) $\sqrt{5} . x^3$

Indique las partes numérica y literal de los siguientes monomios.

- 6) $2.3 x^5 y^4$.
- 7) $-5.6^2 x^3 y^5$.
- 8) $2\pi^3$.
- 9) $-\pi x^4$.
- 10) $\frac{1}{2} x^2 x^3$.

Indique el grado de los siguientes monomios.

- 11) $2.3 x^5 y^4$.
- 12) $-5.6^2 x^3 y^5$.
- 13) $2\pi^3$.
- 14) $-\pi x^4$.
- 15) $\frac{1}{2} x^2 x^3$.

Halle el valor numérico de cada monomio para el valor indicado de "x".

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------|
| 16) $P(x) = -2x^4$ para $x = 1$ | o sea halle $P(1)$ |
| 17) $Q(x) = 3x^2$ para $x = -1$ | o sea halle $Q(-1)$ |
| 18) $R(x) = -x^3$ para $x = -1$ | o sea halle $R(-1)$ |
| 19) $S(x) = -4 x^4$ para $x = -2$ | o sea halle $S(-2)$ |
| 20) $T(x) = 2$ para $x = 3$ | o sea halle $T(3)$ (ipensarlo!) |

EVALUACIÓN

Para poder autoevaluarse compare los resultados que obtuvo con los que le presentamos a continuación.

Orientaciones para la corrección

- 1) No es
- 2) Sí es
- 3) No es (exponente negativo en la indeterminada)
- 4) No es
- 5) Sí es (la raíz afecta al 5 y no a la indeterminada)

- 6) num= 2.3 lit= x^5y^4
- 7) num= -5.6^2 lit= x^3y^5
- 8) num= $2\pi^3$ lit= x^0
- 9) num= $-\pi$ lit= x^4
- 10) num= $\frac{1}{2}$ lit= x^5

- 11) grado = 9
- 12) grado = 8
- 13) grado = 0
- 14) grado = 4
- 15) grado = 5

- 16) $P(1) = -2 (1)^4 = -2$
 - 17) $Q(-1) = 3 (-1)^2 = 3$
 - 18) $R(-1) = - (-1)^3 = -(-1) = 1$
 - 19) $S(-2) = -4 (-2)^4 = -4 (16) = -64$
 - 20) $T(3) = 2$ (no hay nada que reemplazar !!)
-

1.1. Operaciones con monomios

El siguiente texto explica las operaciones con monomios. Léalo con detenimiento y, luego, realice el trabajo práctico que le proponemos.

Operaciones con monomios

Producto de monomios: para multiplicar dos monomios cualesquiera, se multiplican las partes numéricas (el resultado es la parte numérica del producto) y las partes literales (el resultado es la parte literal del producto).

Por ejemplo: tomemos los monomios $P(x) = -3x^2$ y $Q(x) = 5x^4$

Calculemos el producto de las partes numéricas:

$$(-3) \cdot (5) = -15.$$

Ésta es la parte numérica del resultado.

Ahora el producto de las partes literales:

$$(x^2) \cdot (x^4) = x^6$$

Ésta es la parte literal del resultado.

Por lo tanto el producto $P(x) \cdot Q(x)$ vale:

$$P(x) \cdot Q(x) = -15 x^6.$$

Veamos un ejemplo en donde haya más de una indeterminada. Consideremos los monomios $P = -3x^4z^2$ y $Q = 2x^5z^3$ (no pusimos las indeterminadas en el nombre para no complicar). Tendremos entonces:

$$P \cdot Q = (-3x^4z^2) \cdot (2x^5z^3) = (-3 \cdot 2) \cdot (x^4 \cdot x^5) \cdot (z^2 \cdot z^3) = -6x^9z^5.$$

División de monomios

De manera similar a como se procede con el producto, efectuamos la división. Pero para que la división de un monomio P por un monomio Q dé otro monomio, debe cumplirse que el grado de P sea mayor o igual que el grado de Q.

Para obtener la parte numérica del resultado se divide la parte numérica de P por la parte numérica de Q. Para obtener la parte literal del resultado se divide la parte literal de P por la de Q.

Por ejemplo:

si se tienen dos monomios P(x) y Q(x) siendo $P(x) = 10x^5y^4$ y $Q(x) = -2x^4y^2$ el resultado de dividir P por Q es:

$$\text{parte numérica: } (10)/(-2) = -5$$

$$\text{parte literal: } (x^5y^4)/(x^4y^2) = x^1y^2$$

Este último resultado surge de aplicar la regla del cociente de potencias de igual base a cada una de las indeterminadas:

$$(x^5)/(x^4) = x^1 \quad (y^4)/(y^2) = y^2 \quad \therefore \frac{P}{Q} = -5 x y^2$$

Veamos otro ejemplo. Consideremos los monomios $P = -10x^5y^7$ y $Q = 3x^3y^4$.

Aquí la parte numérica queda $(-10)/(3) = -10/3$ y la parte literal queda $(x^5y^7)/(x^3y^4) = x^2y^3$.

En síntesis la división de P por Q da: $P/Q = -(10/3) x^2y^3$

Antes de considerar el tema de la suma y resta de monomios veamos algo acerca de...

Monomios semejantes

Consideremos dos monomios. Se dice que son semejantes si tienen exactamente la misma parte literal.

Por ejemplo:

Son semejantes $P(x) = -0.5x^3$ y $Q(x) = 25x^3$ (aunque difieren en la parte numérica tienen la misma parte literal).

No son semejantes $R(x) = 9x^2$ y $S(x) = 9x^3$ (no importa que tengan la misma parte numérica: la parte literal es diferente).

Preguntamos: ¿son semejantes los monomios $P(x) = -5.1x^5$ y $Q(x) = 2.3x^2x^3$?

Respuesta: es evidente que el monomio $Q(x)$ no está escrito del modo más económico: su parte literal, que aparece escrita como " x^2x^3 " puede ponerse más sencillamente así: " x^5 ". Si lo escribimos así es más directo ver que los dos son semejantes. Ésa es la respuesta.

Ahora podemos pasar al tema...

Suma de monomios

Vamos a distinguir dos casos.

Uno es aquél en que los dos monomios son semejantes.

Para sumar dos monomios semejantes se suman las dos partes numéricas y se conserva la parte literal.

Es decir que la suma de dos monomios semejantes es un tercer monomio semejante a los otros dos. Pero cuya parte numérica es igual a la suma de las partes numéricas originales.

Por ejemplo:

Si tenemos los monomios $P(x) = 5x^3$ y $Q(x) = 7x^3$, entonces la suma de ambos, que se simboliza $P(x) + Q(x)$ vale:

$$P(x) + Q(x) = 12 x^3.$$

Hay que notar que hemos formado un tercer monomio semejante a los dos monomios originales (la parte literal vale: x^3). Además hemos sumado las partes numéricas: $5 + 7 = 12$.

Otro ejemplo. Consideremos los monomios $P(x) = -3x^2$ y $Q(x) = 4x^2$. La suma de ambos vale:

$$P(x) + Q(x) = x^2.$$

En este caso los dos monomios semejantes tenían parte literal: x^2 y ésta misma es la parte literal del resultado. Para la parte numérica hemos sumado:

$$-3 + 4 = 1.$$

Veamos ahora el caso en que los dos monomios que se quiere sumar no son semejantes.

Consideremos el caso de los monomios $P=2x^5$ y $Q=3x^2$. Hay sólo una posibilidad para sumarlos. Y es formar un POLINOMIO con los dos monomios dados.

Veámoslo:

$$\begin{array}{r} + 2x^5 \\ 3x^2 \\ \hline 2x^5 + 3x^2 \end{array}$$

Nota: la suma de los dos monomios anteriores da como resultado un polinomio. Cuando un monomio forma parte de un polinomio decimos que es un término del polinomio. Por ejemplo, en la suma anterior diremos que el polinomio $2x^5 + 3x^2$ tiene dos términos: uno es el $2x^5$ y otro es el $3x^2$.

Opuesto de un monomio

El opuesto de un monomio P simplemente es otro monomio "casi igual" a P pero con la parte numérica cambiada de signo. El opuesto del monomio " P " se indica con " $-P$ ".

Por ejemplo, si $P = -2x^5$ entonces el monomio opuesto de P es:

$$-P = 2x^5$$

En el siguiente ejemplo: si $P(x) = 2.3x^6$ entonces el opuesto de $P(x)$ es el monomio $-P(x) = -2.3x^6$.

Una vez definido el monomio opuesto, pasemos a la resta de dos monomios.

Resta de monomios

El monomio P menos el monomio Q es la suma de P más el opuesto de Q. Vale decir: restar Q es como sumar -Q.

Simbólicamente podemos decirlo así:

$$P - Q = P + (-Q).$$

Por ejemplo si $P=2x^3$ y $Q=4x^2$ entonces la resta $P-Q$ se calcula así:

$$P - Q = P + (-Q) = (2x^3) + (-4x^2) = 2x^3 - 4x^2$$



Trabajo práctico sugerido

Trabajo práctico N° 7: Operaciones con monomios

Consignas

Efectúe los productos de monomios indicados.

- 1) $(-5x^3z^4)(2x^2y^5)$
- 2) $(3x^2y^5)(-9x^3y^7)$
- 3) $(-1.2x^4y^9)(-5x^3y^8)$
- 4) $(1.1x^5)(-5x^4)$
- 5) $(3x^4y^6)(4x^7y^9)$

Realice las divisiones entre los monomios P y Q indicados en cada caso.

- 6) $P=12x^5y^6$; $Q=-2x^3y^5$
- 7) $P=-20x^8$; $Q=4x^3$
- 8) $P=-15x^{10}y^{12}$; $Q=-3x^3y^5$
- 9) $P=10x^4y^7$; $Q=-5x^4y$
- 10) $P=-40x^3$; $Q=10x^3$



Obtenga la suma de los siguientes pares de monomios semejantes.

11) $P = -7x^2$; $Q = 10x^2$

12) $P = 5x^3$; $Q = x^3$

13) $P = (1/2)x^6$; $Q = (1/3)x^6$

14) $P = (2/3)x^4y^7$; $Q = (1/2)x^4y^7$

15) $P = -5x^4$; $Q = 5x^4$

Calcule en cada caso la resta $P-Q$.

16) $P = -6x^3$; $Q = 4x^3$

17) $P = 5x^2y$; $Q = -9x^2y$

18) $P = -10x^3y^2$; $Q = 5x^2y^3$

19) $P = -7$; $Q = -x$

20) $P = -7/3 x^3$; $Q = 5x^3$

EVALUACIÓN

Orientaciones para la corrección

Para poder autoevaluarse compare los resultados que obtuvo con los que le presentamos a continuación.

1) $P*Q = -10 x^5 y^5 z^4$

2) $P*Q = -27 x^5 y^{12}$

3) $P*Q = 6 x^7 y^{17}$

4) $P*Q = -5.5 x^9$

5) $P*Q = 12 x^{11} y^{15}$

6) $P/Q = -6 x^2 y^1$

7) $P/Q = -5 x^5$

8) $P/Q = 5 x^7 y^7$

9) $P/Q = -2 y^6$

10) $P/Q = -4$ (ó si lo prefiere: $-4x^0$)

11) $P+Q = 3x^2$



$$12) P+Q = 6x^3$$

$$13) P+Q = 5/6 x^6$$

$$14) P+Q = (7/6) x^4 y^7$$

$$15) P+Q = 0$$

$$16) P- Q = - 10 x^3$$

$$17) P- Q = 14 x^2 y$$

$$18) P- Q = - 10x^3 y^2 - 5 x^2 y^3$$

$$19) P- Q = -7 + x$$

$$20) P- Q = - (22/3) x^3$$

.

2. Polinomios

Cuando en un polinomio se observan dos o más términos semejantes, se pueden reemplazar por su suma. Por ejemplo, el polinomio $P=2x^3+3x^5+7x^5-8x^9$ tiene dos términos semejantes que son el $3x^5$ y el $7x^5$. La suma de estos dos términos (que son dos monomios) es simplemente $10x^5$. Entonces, el polinomio P puede escribirse más económicamente así:

$$P= 2x^3+10x^5-8x^9$$

A este proceso de reemplazar dos o más términos semejantes por su suma se lo llama reducción de términos semejantes.

Veamos otro ejemplo. Consideremos el polinomio $Q=\underline{2x^2+3x^2}-\underline{5x^4+7x^4}+\underline{12x^7-10x^7}$. Reduzcamos todos los términos semejantes.

En este caso, tenemos las siguientes reducciones:

$$\underline{2x^2+3x^2}=5x^2$$

$$\underline{-5x^4+7x^4}=2x^4$$

$$\underline{12x^7-10x^7}=2x^7.$$

Estas reducciones permiten escribir el polinomio Q de modo más económico así: $Q=5x^2+2x^4+2x^7$.



Actividades para la facilitación de los aprendizajes

Reescriba los siguientes polinomios reduciendo los términos semejantes.

a) $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 3x^3 + 9x^7 - 5x^2 + 6x^3 + 2x^7$

b) $Q(x) = 5x^3 + 3x^4 - 8x^7 + 2x^7 - 5x^4 + x^3$

c) $R(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x^5 - 2x^3 + 5x^2 - x^5$

d) $S(x) = -x^5 + 2^5$

e) $T(x) = 2 + 2^2 + x^2$

Seguidamente, focalizaremos nuestra atención en el grado y en el orden de un polinomio.

- El **grado de un polinomio** es el grado de su término de mayor grado (recuerde que ese término no puede tener parte numérica cero). Si se trata del polinomio nulo (el que es igual a cero: $P(x) = 0$) decimos que no tiene grado.

Aclarémoslo con un ejemplo...

Si consideramos el polinomio $P(x) = 5x^3 - 2x + 3$ vemos que tiene tres monomios. El término " $5x^3$ " tiene grado 3; el término " $-2x$ " tiene grado 1 y el término " 3 " tiene grado 0. El mayor grado es 3. Éste es el grado del polinomio.

Otro ejemplo: el polinomio $P(x) = -2^3$ tiene grado 0 (cero), porque su único término no nulo es una constante (que tiene grado cero).

Otro ejemplo: el grado del polinomio $P(x) = 4x^2 + 0x^5 + 4x$ no es 5 sino 2 (el término $0x^5$ tiene parte numérica cero!)

- Por otro lado, los términos de los polinomios pueden **ordenarse** de acuerdo con sus grados. Se pueden ordenar en orden decreciente de sus grados (es decir de mayor a menor grado) o en orden creciente de ellos (es decir de menor a mayor).

El modo decreciente es el más usado.

Ejemplo: dado el polinomio $P(x) = 2x^2 - 3x^5 + 8x^4$ lo ordenamos en orden creciente si lo escribimos así: $P(x) = 2x^2 + 8x^4 - 3x^5$ y lo ordenamos en or-

den decreciente si lo escribimos así: $P(x) = -3x^5 + 8x^4 + 2x^2$. Éste último es el más común.

Como casos particulares de la operatoria con polinomios debemos enfatizar en los siguientes temas: cuadrado de un binomio, cubo de un binomio y producto de binomios conjugados.

Lea el texto que le presentamos a continuación en el que se explican dichas temáticas, tratando de recuperar lo estudiado en la escuela media.

Operaciones entre polinomios

Suma de polinomios: para sumar dos polinomios P y Q podemos proceder así: formamos un nuevo polinomio con todos los términos de P y todos los términos de Q y luego reducimos los términos semejantes del resultado.

Por ejemplo: para sumar $P=2x^3+3x^5$ con $Q=3x^2-7x^5$ formamos $P+Q= 2x^3+3x^5+3x^2-7x^5$ y reduciendo los términos semejantes obtenemos: $P+Q= -4x^5+2x^3+3x^2$ (hemos reducido los términos " $3x^5$ " y " $-7x^5$ " reemplazándolos por " $-4x^5$ ").

Algunos prefieren escribir los dos polinomios uno encima de otro haciendo coincidir en columnas los términos de igual grado. Luego debajo de la raya horizontal escriben directamente el polinomio $P+Q$ con los términos ya reducidos.

Veamos un ejemplo. Para sumar los polinomios P y Q de más arriba se puede escribir:

$$\begin{array}{r}
 P(x) = 3x^5 + 2x^3 \\
 Q(x) = -7x^5 \quad + 3x^2 \\
 \hline
 P(x)+Q(x) = -4x^5 + 2x^3 + 3x^2
 \end{array}$$

Veamos otro ejemplo. Sumemos los polinomios $P=2x^3-7x^5+4x$ y $Q=3x^4-7x+x^5-6$.

Escribo Q debajo de P (ordenados en forma decreciente).

$$\begin{array}{r}
 P = -7x^5 \quad + 2x^3 + 4x \\
 Q = x^5 + 3x^4 \quad - 7x - 6 \\
 \hline
 P+Q = -6x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x - 6
 \end{array}$$

Opuesto de un polinomio

Dado un polinomio P llamamos opuesto de P (y lo simbolizamos: $-P$), al polinomio que se obtiene cambiando los signos de cada término de P.
Por ejemplo:

Dado el polinomio $P(x) = -8x^3 + 7x - 4$
el polinomio opuesto será:

$$P(x) = 8x^3 - 7x + 4$$

Otro ejemplo:

¿Cuál será el opuesto del polinomio nulo ($P(x)=0$)?

Evidentemente el polinomio opuesto será el mismo polinomio nulo $-P(x)=0$, porque al cambiar el signo al 0, obtengo -0 que vale lo mismo

$$(o\ sea: -0=0)$$

Resta de polinomios

Dados dos polinomios P y Q, la resta $P-Q$ se calcula sumando a P el opuesto de Q.

Vale decir que $P-Q$ es lo mismo que $P+(-Q)$.

En símbolos ponemos:

$$P-Q = P + (-Q)$$

(se ve fácilmente que esto es totalmente análogo a la resta de monomios).

Ejemplo:

Sean $P(x) = 8x^2 - 7x$ y $Q(x) = x^3 - 3$. Entonces la resta $P(x)-Q(x)$, viene dada por la suma de $P(x) = 8x^2 - 7x$ con $-Q(x) = -x^3 + 3$

$$\begin{array}{r}
 P(x) = \quad 8x^2 - 7x \\
 -Q(x) = -x^3 \quad \quad + 3 \\
 \hline
 P(x) - Q(x) = -x^3 + 8x^2 - 7x + 3
 \end{array}$$

Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y de la resta.

Esto significa que debemos multiplicar cada término de P por cada término de Q. Los resultados obtenidos son los términos de $P*Q$. Si es necesario, se hacen las reducciones de términos semejantes.

Ejemplo:

Sean $P(x) = 2x^2 + 3x$ y $Q(x) = 5x - 2$, entonces el producto $P(x) \cdot Q(x)$ se calcula así:

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2 + 3x) \cdot (5x - 2) = \\
 &= (2x^2) \cdot (5x) + (2x^2) \cdot (-2) + (3x) \cdot (5x) + (3x) \cdot (-2) = \\
 &= 10x^3 - 4x^2 + 15x^2 - 6x = \\
 &= 10x^3 + 11x^2 - 6x
 \end{aligned}$$

Veamos otro ejemplo:

Sean $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = 4x - 3$

Entonces el producto es:

$$\begin{aligned}
 P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2 - 3x + 1) \cdot (4x - 3) = \\
 &= (2x^2) \cdot (4x) + (2x^2) \cdot (-3) + (-3x) \cdot (4x) + (-3x) \cdot (-3) + (1) \cdot (4x) + (1) \cdot (-3) = \\
 &= 8x^3 - 6x^2 - 12x^2 + 9x + 4x - 3 \\
 &\text{(Ahora reduzco términos semejantes)} \\
 &= 8x^3 - 18x^2 + 13x - 3
 \end{aligned}$$

División de polinomios

Comencemos por indicar algunos nombres.
Cuando se anota una división como es habitual en el colegio, colocamos:

$$\begin{array}{r|l}
 P(x) & Q(x) \\
 R(x) & C(x)
 \end{array}$$

Los nombres correspondientes figuran en el esquema siguiente.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\
 \text{Resto} & \text{Cociente}
 \end{array}$$

Deben verificarse dos condiciones:

- a) $\left\{ \begin{array}{l} \text{El resto debe cumplir:} \\ \text{O bien es el polinomio nulo.} \\ \text{O bien tiene menor grado que el Divisor.} \end{array} \right.$

Es decir: $R(x) = 0$ ó $\text{grado}(R) < \text{grado}(Q)$

b) $\text{Cociente} \times \text{Divisor} + \text{Resto} = \text{Dividendo}$

Es decir: $C(x) \times Q(x) + R(x) = P(x)$

Estas dos condiciones nos dan la "receta" para "verificar" si una división está bien hecha.

Verificación {

- *por simple "inspección visual" compruebo la condición (a).
- *haciendo las operaciones correspondientes verifico la condición (b)

Conviene escribir el dividendo $P(x)$ y el divisor $Q(x)$ ordenados de modo decreciente.

Antes de ver un ejemplo de división de polinomios consideremos un ejemplo del colegio.

Supongamos tener que resolver la siguiente división entera (es decir una división en que "no sacamos decimales"):

$$\begin{array}{r} 13 \quad | \quad 2 \\ \hline \end{array}$$

Comenzamos encontrando la parte entera de la división de 13 por 2. Esa parte es 6, lo escribimos.

$$\begin{array}{r} 13 \quad | \quad 2 \\ \hline 6 \end{array}$$

Es fácil ver que para llegar a 13 al 12 le falta un 1.

¿Cómo tener una rutina para sistematizar el cálculo de ese resto?: escribimos el resultado de "6 por 2" (que es 12) debajo del dividendo y con signo cambiado (que es una forma de hacer la resta).

$$\begin{array}{r} 13 \quad | \quad 2 \\ -12 \quad \hline 6 \end{array}$$

Sólo queda calcular la suma de (13) con (-12)

$$\begin{array}{r} 13 \quad | \quad 2 \\ \hline \end{array}$$



$$\frac{-12}{1} \quad 6$$

ya hemos calculado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{el cociente: } 6 \\ \text{el resto: } 1 \end{array} \right.$$

Para dividir polinomios se procede igual.
Veamos un ejemplo:

$$4x^2 - 10x + 2 \quad \bigg| \quad x - 1$$

El primer paso es dividir el 1er término del dividendo por el 1er. término del divisor:

$$(4x^2) / (x) = 4x$$

Escribo "4x" como primer término del cociente:

$$4x^2 - 10x + 2 \quad \bigg| \quad \begin{array}{r} x - 1 \\ 4x \end{array}$$

Ahora multiplicamos "4x" por cada término del divisor y escribimos cada resultado debajo del correspondiente término semejante del dividendo.

$$\begin{aligned} (4x) * (x) &= 4x^2 \\ (4x) * (-1) &= -4x \end{aligned}$$

ambos resultados irán ubicados (con signos cambiados) debajo de los términos semejantes del dividendo.

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 10x + 2 \\ -4x^2 + 4x \\ \hline \end{array} \quad \bigg| \quad \begin{array}{r} x - 1 \\ 4x \end{array}$$

A continuación sumo los términos encolumnados y coloco los resultados debajo de la línea.

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 10x + 2 \\ -4x^2 + 4x \\ \hline -6x \end{array} \quad \bigg| \quad \begin{array}{r} x - 1 \\ 4x \end{array}$$

Ahora "bajo el 2" escribiéndolo a la derecha del "-6x".

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 10x + 2 \\ -4x^2 + 4x \\ \hline -6x + 2 \end{array} \quad \bigg| \quad \begin{array}{r} x - 1 \\ 4x \end{array}$$



Nos aparece un "resto provisorio" que es el " $-6x + 2$ ".

Repito ahora el procedimiento inicial, dividiendo el primer término del "resto provisorio" por el primer término del divisor y colocando este resultado en el cociente (a la derecha del " $4x$ ").

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 10x + 2 \\ -4x^2 + 4x \\ \hline -6x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 1 \\ 4x - 6 \end{array}$$

(hice $(-6x)/(x) = -6$)

y ahora multiplicamos el " -6 " por cada término del divisor y ubicamos cada resultado debajo del término semejante en el "resto provisorio".

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 10x + 2 \\ -4x^2 + 4x \\ \hline -6x + 2 \\ 6x - 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 1 \\ 4x - 6 \end{array}$$

$$\text{hice } \begin{cases} (-6) \cdot (x) = -6x & (\text{y al cambiar signo quedó: } 6x) \\ (-6) \cdot (-1) = 6 & (\text{al cambiar signo quedó: } -6) \end{cases}$$

sólo falta hacer la suma:

$$\begin{array}{r} \cancel{4x^2} - 10x + 2 \\ -\cancel{4x^2} + 4x \\ \hline \cancel{-6x} + 2 \\ \cancel{6x} - 6 \\ \hline -4 \end{array} \quad \begin{array}{r} x - 1 \\ 4x - 6 \end{array}$$

Podemos verificar que el procedimiento fue correcto:

(1º) el grado del resto es
grado (resto)=0

el grado del divisor es
grado (divisor)=1

por lo tanto se cumple la condición: grado (resto) < grado (divisor)

$$\begin{aligned} (2^\circ) \text{ Cociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto} &= \\ &= (4x-6) \cdot (x-1) + (-4) = \end{aligned}$$

$$= (4x) \cdot (x) + (4x)(-1) + (-6) \cdot (x) + (-6)(-1) + (-4)$$

$$= 4x^2 - 10x + 2$$

y esto es, justamente igual al dividendo.

Vale decir, comprobamos que también se cumple la otra condición:

$$\text{Cociente} \cdot \text{Divisor} + \text{Resto} = \text{Dividendo}$$

En conclusión: la división está bien hecha.

Veamos otro ejemplo:

$$5x^2 - 9x + 4 \quad | \quad x + 3$$

el primer paso es hacer: $(5x^2)/(x) = 5x$

$$5x^2 - 9x + 4 \quad | \quad x + 3$$

$$\underline{5x}$$

segundo paso:

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 9x + 4 \\ -5x^2 - 15x \\ \hline -24x \end{array} \quad | \quad \begin{array}{r} x + 3 \\ 5x \end{array}$$

(hice: $(5x)(x) = 5x^2$ (al cambiar signo: $-5x^2$)
 $(5x)(3) = 15x$ (al cambiar signo: $-15x$)

tercer paso: "bajo el 4"

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 9x + 4 \\ -5x^2 - 15x \\ \hline -24x + 4 \end{array} \quad | \quad \begin{array}{r} x + 3 \\ 5x \end{array}$$

ahora "reinicio" dividiendo:

$$(-24x)/(x) = -24$$

y ubico el resultado en el cociente para después multiplicar este nuevo término del cociente por cada término del divisor

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 9x + 4 \\ -5x^2 - 15x \\ \hline -24x + 4 \end{array} \quad | \quad \begin{array}{r} x + 3 \\ 5x - 24 \end{array}$$

$(-24) \cdot (x) = -24x$: cambio signo: $24x$

$(-24) \cdot (3) = -72$: cambio signo: 72

ubico en una nueva línea bajo el "resto provisorio" y finalizo.



$$\begin{array}{r}
 5x^2 - 9x + 4 \quad \bigg| \quad x + 3 \\
 -5x^2 - 15x \\
 \hline
 -24x + 4 \\
 24x + 72 \\
 \hline
 76
 \end{array}$$

Obtuve $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cociente} = 5x - 24 \\ \text{Resto} = 76 \end{array} \right.$

Veamos otro ejemplo donde se trabaja con partes numéricas fraccionarias.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 9x + 4 \quad \bigg| \quad 2x - 1 \\
 -3x^2 + (3/2)x \\
 \hline
 -(15/2)x + 4 \\
 +(15/2)x - 15/4 \\
 \hline
 1/4
 \end{array}$$

Obtuvimos:

Cociente: $(3/2)x - 15/4$
Resto: $1/4$

Veamos otro ejemplo:

$$4x^2 - x^4 + 2 \quad \bigg| \quad x - 3$$

En este caso conviene ordenar el dividendo (en orden decreciente) y además dejar una columna libre por cada término que esté "faltando".

$$\begin{array}{r}
 -x^4 \quad \uparrow \quad 4x^2 \quad \uparrow \quad + 2 \quad \bigg| \quad x - 3
 \end{array}$$

Dejamos una columna libre para el término de grado 3 y otra para el término de grado 1.

$$\begin{array}{r}
 -x^4 \quad \quad 4x^2 \quad \quad + 2 \quad \bigg| \quad x - 3 \\
 +x^4 - 3x^3 \\
 \hline
 -3x^3 + 4x^2 \\
 +3x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 -5x^2 \\
 +5x^2 - 15x \\
 \hline
 -15x + 2 \\
 +15x - 45 \\
 \hline
 -43
 \end{array}$$

El cuadrado de la derecha puede escribirse simplemente así:

$$(A + B)^2 = (A + B) (A + B)$$

porque ése es justamente el significado del cuadrado: indica que la base está multiplicada por sí misma.

Ahora podemos aplicar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

$$(A + B) (A + B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$

notemos que podemos escribir más sintéticamente la expresión de la derecha así:

$$\begin{cases} A \cdot A = A^2 & \text{(I)} \\ A \cdot B + B \cdot A = AB + AB = 2AB & \text{(II)} \\ B \cdot B = B^2 & \text{(III)} \end{cases}$$

Nos queda entonces:

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= (A + B) (A + B) = \\ &= A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B = A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

Esta propiedad es la que llamamos la fórmula del Cuadrado del Binomio.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Apliquemos esta fórmula a algunos casos:

$$\begin{aligned} (2x - 5)^2 &= (\quad)^2 + 2 (\quad) (\quad) + (\quad)^2 \\ &= (2x)^2 + 2 (2x) (-5) + (-5)^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} (2x)^2 = 2^2 \cdot x^2 = 4x^2 \\ 2 (2x) (-5) = 2 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot x = -20x \\ (-5)^2 = 25 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Queda entonces:

$$(2x - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$$



Veamos otro:

$$\begin{aligned}(5x^3 - 4x)^2 &= (\quad)^2 + 2 (\quad) [\quad] + [\quad]^2 \\ &= (5x^3)^2 + 2 (5x^3) (-4x) + (-4x)^2\end{aligned}$$

$$\begin{cases} (5x^3)^2 = 5^2 \cdot (x^3)^2 = 25x^6 \\ 2 (5x^3) (-4x) = 2 \cdot 5 \cdot (-4) \cdot x^3 \cdot x = -40x^4 \\ (-4x)^2 = (-4)^2 \cdot x^2 = 16x^2 \end{cases}$$

Reemplazando obtenemos:

$$(5x^3 - 4x)^2 = 25x^6 - 40x^4 + 16x^2$$

Un ejemplo más:

$$\begin{aligned}(-4x - 2x^4)^2 &= (-4x)^2 + 2 (-4x) (-2x^4) + (-2x^4)^2 \\ &= 16x^2 + 16x^5 + 4x^8\end{aligned}$$

Cubo de un binomio

¿Cómo obtener una fórmula para $(A + B)^3$?

Recordemos que " P^3 " se puede escribir " $P^2 \cdot P$ ". Vale decir que podemos poner:

$$(A + B)^3 = \underline{(A + B)^2} (A + B).$$

Reemplazamos $(A + B)^2$ usando la fórmula del cuadrado de un binomio:

$$(A + B)^3 = \underline{(A^2 + 2AB + B^2)}(A + B)$$

y ahora aplicamos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (y resta)

$$(A^2 + 2AB + B^2)(A + B) = A^2 \cdot A + A^2 \cdot B + 2 \cdot AB \cdot A + 2 \cdot AB \cdot B + B^2 \cdot A + B^2 \cdot B$$

Aquí vale:

$$\begin{aligned}A^2 \cdot A &= A^3 \\ 2 \cdot AB \cdot A &= 2A^2B \\ 2 \cdot AB \cdot B &= 2AB^2 \\ B^2 \cdot B &= B^3\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(A + B)^3 = A^3 + \underline{A^2B} + \underline{2A^2B} + \underline{2AB^2} + \underline{AB^2} + B^3$$

Ahora reducimos términos semejantes:

$$\begin{aligned} A^2B + 2A^2B &= 3A^2B \\ 2AB^2 + AB^2 &= 3AB^2 \end{aligned}$$

y nos queda:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

Ésta es la fórmula buscada: la del Cubo de un Binomio.

Apliquémosla en el siguiente caso:

$$(x - 2)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(-2) + 3(x)(-2)^2 + (-2)^3$$

Calculamos:

$$\left\{ \begin{aligned} (x)^3 &= x^3 \\ 3(x)^2(-2) &= -6x^2 \\ 3(x)(-2)^2 &= 3 \cdot x \cdot 4 = 12x \\ (-2)^3 &= -8. \end{aligned} \right.$$

Y así obtenemos:

$$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Otro caso:

$$(-3x - x^2)^3 = (-3x)^3 + 3(-3x)^2(-x^2) + 3(-3x)(-x^2)^2 + (-x^2)^3$$

En esta situación:

$$\left\{ \begin{aligned} (-3x)^3 &= (-3)^3(x)^3 = -27x^3 \\ 3(-3x)^2(-x^2) &= 3(-3)^2(x)^2(-x)^2 = 3 \cdot 9 \cdot (x)^2(-x)^2 = -27x^4 \\ 3(-3x)(-x^2)^2 &= 3(-3)(x)(x)^4 = -9x^5 \\ (-x^2)^3 &= -x^6 \end{aligned} \right.$$

En resumen nos queda:

$$(-3x - x^2)^3 = -27x^3 - 27x^4 - 9x^5 - x^6$$

Producto de Binomios Conjugados

Consideremos dos binomios que tienen una sola diferencia: el signo de uno de los términos. Por ejemplo:

$$\underline{2x + 3} \quad \text{y} \quad \underline{2x - 3}$$

en un caso así se dice que son "binomios conjugados".

Podemos representarlos en general así:

$$(A + B) \quad \text{y} \quad (A - B)$$

Cuando se multiplican binomios conjugados sucede que el resultado se simplifica notablemente por reducción de términos semejantes. Veámoslo:

$$\begin{aligned} (A + B)(A - B) &= A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B \\ &= A^2 - AB + AB - B^2 \end{aligned}$$

Los términos semejantes $-AB$ y AB son opuestos, su suma da cero. Con ello nos queda:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Ésta es la fórmula del producto de binomios conjugados.

Nota:

Conviene tener en cuenta que el segundo cuadrado no afecta al signo menos.

Ahí dice:

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ - B^2 \end{array}$$

El cuadrado afecta solamente a "B", y no a "-B".

Apliquemos esta fórmula en un caso. Por ejemplo multipliquemos:

$$(x + 4)(x - 4) = [\quad]^2 - [\quad]^2$$

Ahí va "x"

Ahí va "4"

Entonces queda:

$$(x + 4)(x - 4) = [x]^2 - [4]^2$$

$$= x^2 - 16$$

Otro ejemplo:

$$(2x^2 + x)(2x^2 - x) = [2x^2]^2 - [x]^2$$

$$= 2^2 (x^2)^2 - x^2$$

$$= 4x^4 - x^2$$

Es momento de poner en práctica lo trabajado, pues le permitirá una mejor apropiación de los contenidos.



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 8: Polinomios

Consignas

Determine el grado de los siguientes polinomios:

- 1) $P(x) = -7x^3 - 9x$
- 2) $Q(x) = 3^4 - 5x$
- 3) $R(x) = -9x^4 - 3x^5 + 0x^{10}$
- 4) $S(x) = -2x^3 - 4x^2 + 7x + 2x^3$
- 5) $T(x) = x^3 + x^4 + 2x^2$

Ordene los siguientes polinomios en orden decreciente.

- 6) $P(x) = x^3 - 5x^4 + 3x$
- 7) $Q(x) = -x^4 + 8x^7 - 2x^9$
- 8) $R(x) = 7x^6 + x^4 - 28$
- 9) $S(x) = 2x^3$
- 10) $T(x) = 24 - x^3$



Encuentre la suma de los polinomios indicados en cada caso.

11) $P=2x^3-5x^2+x^4$ y $Q=5x^3+x$

12) $P=3x^2-x+2$ y $Q=2x^3+x-3$

13) $P=5x^4-3x^2+5$ y $Q=-5x^4+3x^2-2$

14) $P=2x^5-4x+6$ y $Q=-2x^5+4x-6$

15) $P=-x^2+3x$ y $Q=-x^2+3$

Obtenga las restas P-Q en cada caso:

16) $P=5x^2-7x$; $Q(x)=x^3+7x$

17) $P=x^3+x$; $Q(x)=x^3-x$

18) $P=7x-8$; $Q(x)=7x+7$

19) $P=2x^2-3x+9x^3$; $Q(x)=x^4-7x+8$

20) $P=4x^5-7x$; $Q(x)=x^5-x^3-x$

Calcule los siguientes productos P*Q:

21) $P=4x^3-5x$; $Q(x)=2x+7x^4$

22) $P=6x-7x^2$; $Q(x)=8x^3+5x$

23) $P=x^2-7x+8$; $Q(x)=4x^3+6x-2$

24) $P=x^4-7x+8$; $Q(x)=6x^2+5$

25) $P=x^3-7x$; $Q(x)=4-7x+8x^2$

Efectuar las divisiones entre P(x) y Q(x) obteniendo el cociente y el resto.

26) $P(x) = 5x^2 - 8x + 4$; $Q(x) = x + 2$

27) $P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 2x - 1$; $Q(x) = x - 3$

28) $P(x) = 2x^3 - 7x + 1$; $Q(x) = 2x - 1$



$$29) P(x) = x^2 - x^3 + 2 \quad ; Q(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$30) P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 8 \quad ; Q(x) = x^2 + x - 3$$

$$31) P(x) = x^3 - 7x + 2 \quad ; Q(x) = 2x^2 - x + 1$$

Calcule el cuadrado o el cubo del binomio según lo pedido:

$$32) (4 - 3x)^2$$

$$33) (5x - 3x^3)^2$$

$$34) (2 - 3x)^2$$

$$35) (2x^2 - 7x^4)^2$$

$$36) (x - 9)^2$$

Resuelva las multiplicaciones siguientes aplicando el producto de binomios conjugados.

$$37) (2 - 7x)(2 + 7x) =$$

$$38) (-4x + x^3)(-4x - x^3) =$$

$$39) (5x^2 - 8x^4)(5x^2 + 8x^4) =$$

$$40) (1 - x)(1 + x) =$$

$$41) (2 - 9x^5)(2 + 9x^5) =$$

EVALUACIÓN

Orientaciones para la corrección

Para poder autoevaluarse compare los resultados que obtuvo con los que le presentamos a continuación.

$$1) \text{ grado } (P) = 3$$

$$2) \text{ grado } (P) = 1$$



3) grado (P) = 5

4) grado (P) = 2

5) grado (P) = 4

6) $P = -5x^4 + x^3 + 3x$

7) $P = -2x^9 + 8x^7 - x^4$

8) $P = 7x^6 + x^4 - 28$

9) $P = 2x^3$

10) $P = -x^3 + 24$

11) $P + Q = x^4 + 7x^3 - 5x^2 + x$

12) $P + Q = 2x^3 + 3x^2 - 1$

13) $P + Q = 3$

14) $P + Q = 0$

15) $P + Q = -2x^2 + 3x + 3$

16) $P - Q = -x^3 + 5x^2 - 14x$

17) $P - Q = 2x$

18) $P - Q = -15$

19) $P - Q = -x^4 + 9x^3 + 2x^2 + 4x - 8$

20) $P - Q = 3x^5 + x^3 - 6x$

21) $P*Q = -10x^2 + 8x^4 - 35x^5 + 28x^7$

22) $P*Q = 30x^2 - 35x^3 + 48x^4 - 56x^5$

23) $P*Q = -16 + 62x - 44x^2 + 38x^3 - 28x^4 + 4x^5$

24) $P*Q = 40 - 35x + 48x^2 - 42x^3 + 5x^4 + 6x^6$

25) $P*Q = -28x + 49x^2 - 52x^3 - 7x^4 + 8x^5$

26) Coc = $5x - 18$

Resto = 40

27) Coc = $6x^2 + 14x + 44$

Resto = 131

28) Coc = $x^2 + \frac{1}{2}x - 13/4$

Resto = $-9/4$

29) Coc = $-x - 2$

Resto = $-5x + 4$

30) Coc = $x^2 - 4x + 9$

Resto = $-21x + 19$

31) Coc = $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

Resto = $-(29/4)x + (7/4)$

32) $16 - 24x + 9x^2$

33) $25x^2 - 30x^4 + 9x^6$

34) $4 - 12x + 9x^2$

35) $4x^4 - 28x^6 + 49x^8$

36) $x^2 - 18x + 81$

37) $4 - 49x^2$

38) $16x^2 - x^6$

39) $25x^4 - 64x^8$

40) $1 - x^2$

41) $4 - 81x^{10}$

3. Factoreo

Al multiplicar dos polinomios obtenemos un nuevo polinomio, es decir, lo que estaba expresado como producto pasa a estar expresado como suma algebraica. También necesitamos tener la habilidad de re expresar como producto lo que está representado como suma algebraica.

Consideremos el número 15. Podemos escribirlo como una suma:
 $15 = 11 + 4$. También podemos escribirlo como un producto: $15 = 5 \cdot 3$

Algo análogo sucede con el siguiente binomio:

$$P = 2x + x^2$$

Así está escrito como una suma. Pero también podemos escribirlo como un producto:

$$P = x (2 + x)$$

¿Será cierto que es el mismo polinomio expresado de otra forma?

Para averiguarlo escribamos:

$$x (2 + x)$$

y apliquemos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

$$x (2 + x) = 2x + x^2$$

Comprobamos que es cierto: el polinomio P puede escribirse de ambas formas. Cuando está escrito como una suma sus partes se llaman términos o sumandos:

$$2x + x^2$$

Cuando está escrito como un producto sus partes se llaman factores:

$$x (2 + x)$$

Por eso, al partir de su expresión como suma y escribirlo como producto se dice que se lo ha factorizado (o "factoreado").

$$2x + x^2 = x (2 + x) \text{ Sus elementos son } \underline{\text{factores}}, \text{ lo hemos } \underline{\text{factorizado}}.$$

Entonces, se llama factorizar una expresión (o "factorearla") a la operación de expresarla como producto. Veamos un nuevo ejemplo.

Si partimos de:

$$P = x^3 + x^2 + x + 1$$

es posible escribirlo del modo siguiente:

$$P = (x^2 + 1)(x + 1)$$

Comprobémoslo:

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(x + 1) &= x^2 \cdot x + x^2 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 \\ &= x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

¡Se cumple!

Entonces decimos que se puede factorizar el polinomio:

$$P = x^3 + x^2 + x + 1$$

como se indica:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x + 1)$$

Ahora bien, una cosa es conocer el concepto de qué es factorizar una expresión y otra (más difícil) saber cómo factorizar una expresión determinada.

Para simplificar e ir paso a paso se han agrupado algunas técnicas de factorreo bajo el nombre de "casos de factorreo". Ellos son:

- Primer caso: "Factor común"
- Segundo caso: "Descomposición en grupos"
- Tercer caso: "Trinomio cuadrado perfecto"
- Cuarto caso: "Cuadrinomio cubo perfecto"
- Quinto caso: "Diferencia de cuadrados"
- Sexto caso: "Suma y resta de potencias de igual grado"

Primer caso de factorreo: "Factor Común"

Veamos la siguiente expresión:

$$x(b + c + d)$$

Si aplico la propiedad distributiva del producto respecto de la suma obtengo:

$$x (b + c + d) = x . b + x . c + x . d$$

Esta expresión leída de izquierda a derecha ejemplifica la propiedad distributiva mencionada.

Pero escrita de derecha a izquierda:

$$x . b + x . c + x . d = x (b + c + d)$$

ilustra el primer caso de factoreo (parto de una suma y la reexpreso como producto).

La receta para obtener la expresión factorizada es simple (en este caso):

Si observo un factor que aparece en cada término, ese factor puede ser el factor común buscado (tener en cuenta que la expresión "factor común" se refiere a que ese valor aparece en todos los términos (es "común" a todos los términos). En nuestro caso:

$$x . b + x . c + x . d$$

la "x" aparece como factor en cada término:

La técnica sigue entonces: se escribe ese factor común seguido de un paréntesis:

$$x . b + x . c + x . d = x (\quad \quad \quad)$$

dentro del paréntesis escribir la expresión que se obtiene al dividir cada término por el factor común:

$$(x . b) / (x) = b$$

$$(x . c) / (x) = c$$

$$(x . d) / (x) = d$$

En síntesis:

$$x \cdot b + x \cdot c + x \cdot d = x (b + c + d)$$

Es siempre fácil comprobar si hemos procedido bien. Aplico la propiedad distributiva al producto de la derecha y veo si el resultado coincide con la expresión original.

Otro ejemplo:

Factorar la siguiente expresión aplicando el primer caso:

$$ab^2 + mb$$

Vemos que el factor "b" aparece en los dos términos (es "común" a ambos términos). Ese será el factor que escribiré seguido de un paréntesis:

$$ab^2 + mb = b (\quad)$$

Ahora, ¿cómo obtengo los términos que irán dentro del paréntesis?

Dividiendo cada término original por el factor común.

$$(ab^2) / (b) = ab$$

$$(mb) / (b) = m$$

entonces queda:

$$ab^2 + mb = b (ab + m)$$

(Nota: por supuesto cada término dentro del paréntesis debe ir con el signo correspondiente de suma o resta porque de lo contrario parecería un producto).

Queremos decir que si lo escribiéramos así:

$$b (ab \ m)$$

Indicaría que entre "ab" y "m" hay un producto (importante no descuidar esto).

Otro ejemplo:

Aplicar primer caso de factoreo a:

$$ab^2 + a^2b$$

En este caso encontramos que "a" es un factor común, que "b" es otro factor común y que "ab" es otro. Por supuesto que al elegir "ab" como factor común se factoriza la expresión más exhaustivamente.

Veamos las tres posibilidades:

Uno: elijo "a" como factor común.

Escribo entonces:

$$ab^2 + a^2b = a (\quad)$$

ahora divido cada término original por este factor común:

$$(ab^2) / (a) = b^2$$

$$(a^2b) / (a) = ab$$

Ponemos finalmente:

$$ab^2 + a^2b = a (b^2 + ab)$$

Dos: elijo "b" como factor común.

Escribo entonces:

$$ab^2 + a^2b = b (\quad).$$

Ahora divido cada término original por este factor común:

$$(ab^2) / (b) = ab$$

$$(a^2b) / (b) = a^2$$

y concluyo escribiendo:

$$ab^2 + a^2b = b (ab + a^2)$$

Tres: elijo “ab” como factor común.

Escribo entonces:

$$ab^2 + a^2b = ab (\quad)$$

Ahora divido cada término original por este factor común:

$$(ab^2) / (ab) = b$$

$$(a^2b) / (ab) = a$$

Escribo finalmente:

$$ab^2 + a^2b = ab (b + a)$$

Segundo caso de factorreo: “Descomposición en grupos”

Consideremos la expresión:

$$ax^2 + ay + x^3 + xy$$

si agrupamos los dos primeros términos en un grupo y los dos últimos en otro tendríamos:

$$\underline{ax^2 + ay} + \underline{x^3 + xy}$$

en cada uno de estos grupos es fácil encontrar un factor común.

En efecto:

En $ax^2 + ay$ se ve fácilmente que "a" es factor común y podemos reexpresar este primer grupo así:

$$ax^2 + ay = a(x^2 + y)$$

de igual modo vemos que el otro grupo tiene un factor común que es "x" y podemos factorizar este grupo así:

$$x^3 + xy = x(x^2 + y)$$

podemos ahora reemplazar cada grupo por su expresión factorizada

$$ax^2 + ay + x^3 + xy = a(x^2 + y) + x(x^2 + y)$$

Si observamos bien notaremos que la expresión así transformada tiene ahora dos términos:

$$\begin{array}{cc} a(x^2 + y) + x(x^2 + y) \\ \text{uno} \qquad \qquad \text{otro} \end{array}$$

Pero también vemos que en cada uno de estos dos términos está presente el factor " $(x^2 + y)$ ". Éste es entonces un factor común.

Puedo ahora aplicar el primer caso a esta suma:

$$a(x^2 + y) + x(x^2 + y) = (x^2 + y) (\quad)$$

divido cada término por el factor común:

$$a(x^2 + y) / (x^2 + y) = a$$

$$x(x^2 + y) / (x^2 + y) = x$$

finalmente queda:

$$a(x^2 + y) + x(x^2 + y) = (x^2 + y)(a + x)$$

ya está factorizado el polinomio original. Se puede comprobar la corrección del procedimiento aplicando propiedad distributiva a la última expresión.

Otro ejemplo:

Factorizar el polinomio $x^3 + x^2 + x + 1$.

Comienzo por agrupar los dos primeros términos por un lado y los dos últimos por otro.

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \underline{x^3 + x^2} + \underline{x + 1} \qquad (I)$$



factorizo el primero:

$$x^3 + x^2 = x^2 (x + 1)$$

reemplazo en (I) y obtengo

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \underline{x^2 (x + 1)} + \underline{(x + 1)}$$

ahora en estos dos términos hay un factor (x+1).

Aplico el primer caso:

$$x^2 (x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(\quad)$$

$$\text{divido el primero } x^2 (x + 1) : (x + 1) = x^2$$

$$\text{divido el segundo } (x + 1) : (x + 1) = 1$$

completo entonces el paréntesis:

$$x^2 (x + 1) + (x + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)$$

y ya está factorizado el polinomio original:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$$

Tercer caso de factorio: "Trinomio Cuadrado Perfecto"

Hemos visto anteriormente la obtención de la fórmula del "cuadrado de un binomio":

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Esta misma fórmula, escrita "al revés":

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

representa el tercer caso de factorio. Nos indica cómo reexpresar una como producto (recordamos que un cuadrado es solamente un producto con dos factores iguales).

De modo que si tenemos un trinomio ("tres términos") y dos de esos términos se pueden expresar como cuadrados puede ser que este caso sea aplicable. ¿Qué es lo que faltaría para estar seguros?

Faltaría que el otro término fuera el doble producto de las bases de los otros dos.

Veámoslo:

Considero el trinomio $x^2 + 6x + 4$.

Vemos que hay dos términos fácilmente expresables como cuadrados:

$$x^2 = [x]^2 \quad \text{acá la base sería "x"}$$

$$4 = [2]^2 \quad \text{acá la base sería "2"}$$

falta verificar que el otro término (el "6x") se puede escribir como el doble producto de las dos bases

pero $2 \cdot [x] \cdot [2]$ es $4x$ y no $6x$.

¡En este caso no podemos aplicar el tercer caso!

Analicemos otro trinomio:

$$x^6 + 6x^3 + 9$$

Aquí vemos en seguida que " x^6 " y " 9 " pueden reexpresarse como cuadrados:

$$x^6 = [x^3]^2 \quad \text{la base aquí es } x^3$$

$$9 = [3]^2 \quad \text{la base aquí es } 3$$

El otro término es $6x^3$, que es el doble producto de las dos bases. En efecto vale:

$$2 \cdot [x^3] \cdot [3] = 6x^3$$

Ahora sí puedo aplicar el tercer caso.

El trinomio es igual al cuadrado de las dos bases sumadas:

$$x^6 + 6x^3 + 9 = \left(\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \text{una base} \quad \text{la otra base} \end{array} + \right)^2$$

es decir, nos queda:

$$x^6 + 6x^3 + 9 = (x^3 + 3)^2$$

y ya está factorizado el trinomio.

Ahora bien: ¿cómo procederíamos si el trinomio fuera: $x^6 - 6x^3 + 9$?

En este caso estaríamos tentados de reexpresar el primero y el tercer términos de igual modo que en el ejemplo anterior:

$$x^6 = [x^3]^2$$

$$9 = [3]^2$$

pero ahora, el doble producto de estas bases ya no es igual al término "- $6x^3$ ".

¿Cómo sigo entonces?

Muy simplemente. Recordando que tanto $[3]^2$ como $[-3]^2$ valen 9. Me conviene entonces reexpresar el primero y el tercer término así:

$$x^6 = [x^3]^2$$

$$9 = [-3]^2$$

de este modo puedo comprobar que el doble producto es ahora:

$$2 \cdot [x^3] \cdot [-3] = - 6x^3$$

como se necesitaba.

Entonces la factorización queda:

$$x^6 - 6x^3 + 9 = (x^3 + (-3))^2$$

la última expresión puede escribirse más sencillamente así:

$$(x^3 - 3)^2$$

Cuarto caso de factorreo: “Cuadrinomio Cubo Perfecto”

Si tomamos la fórmula del cubo de un binomio:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

y la escribimos “al revés” veremos “la fórmula” del cuarto caso

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Veamos un par de ejemplos. Quiero factorrear el cuadrinomio:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Aquí el primero y el último términos son fácilmente reexpresables como cubos:

$$x^3 = [x]^3 \quad \text{la base aquí es } x$$

$$1 = [1]^3 \quad \text{la base aquí es } 1$$

Ahora pondríamos el triple producto del cuadrado de la primera base por la otra base:

$$3 \cdot [x]^2 \cdot [1] = 3x^2$$

que coincide con el segundo término de la expresión original.

Y ahora pondríamos el triple producto de la primera base por el cuadrado de la segunda:

$$3 \cdot [x] \cdot [1]^2 = 3x$$

que coincide efectivamente con el tercer término de la expresión original.

En síntesis, que el cuatrinomio

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

puede escribirse como:

$$[x]^3 + 3[x]^2[1] + 3[x][1]^2 + [1]^3$$

y por lo tanto se puede factorizar según la fórmula del cuarto caso quedando:

$$([\quad] + (\quad))^3$$

\swarrow
 aquí va la primera base "x"

\searrow
 aquí va la segunda base "1"

nos queda, en definitiva:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

Quinto caso de factoreo: "Diferencia de cuadrados"

Recordemos la fórmula del producto de binomios conjugados:

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

Se ve que la expresión de la izquierda es un producto. Por eso, si escribo la fórmula "al revés":

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

Se nota que esta fórmula indica cómo factorizar una diferencia de dos cuadrados.

Entonces procedo así: escribo la resta como la resta de dos cuadrados; identifico cuáles son las bases de esos cuadrados y luego multiplico la suma y la resta de esas bases.

Ejemplo: Quiero factorizar la diferencia $x^6 - 16x^2$. Lo primero es reescribir cada expresión que está "a los costados" del signo menos como un cuadrado. Esto es:

$$\begin{array}{ll} x^6 = [x^3]^2 & \text{la base es } x^3 \\ 16x^2 = [4x]^2 & \text{la base es } 4x \end{array}$$

Sólo falta multiplicar la suma de esas bases por la resta de ellas.

$$x^6 - 16x^2 = (x^3 + 4x)(x^3 - 4x)$$

ya está factorizado. (Puedo verificar aplicando la propiedad distributiva al producto de la derecha).

Otro ejemplo. Quiero factorizar la diferencia $4x^2 - 25x^6$. Para ello escribo:

$$4x^2 = [2x]^2 \quad \text{la base aquí es } 2x$$

$$25x^6 = [5x^3]^2 \quad \text{la base aquí es } 5x^3$$

Ahora multiplico la suma de estas bases por su resta

$$(2x + 5x^3)(2x - 5x^3)$$

y ya tengo factorizada la expresión original.

$$4x^2 - 25x^6 = (2x + 5x^3)(2x - 5x^3)$$

Antes de pasar a trabajar con el sexto caso de factorización deberemos ver el Teorema del Resto.

Teorema del resto

Cuando se tiene una división de polinomios con el divisor del tipo $x + a$ ("a" es un número real cualquiera) se puede calcular el resto sin hacer la división.

Veamos la situación:

$$P(x) \quad \left| \quad x + a \right.$$

La "receta" dice:

- Tome el número "a"
- Cambie el signo de "a"
- En el dividendo (que es $P(x)$) reemplaza la "x" por el valor de "-a" y haga las cuentas.

Entonces: El resultado es el resto de la división.

Veamos un ejemplo.

Consideremos la siguiente división:

$$2x^2 + 3x + 4 \quad \left| \quad x + 1 \right.$$

en este caso la "a" vale: $a = 1$. El valor opuesto de "a" es: $-a = -1$.

Llevo este valor "-1" a reemplazar la "x" del dividendo:

$$2(-1)^2 + 3(-1) + 4$$

hago las cuentas

$$2(-1)^2 + 3(-1) + 4 = 2 - 3 + 4 = 3$$

éste "3" es el resto ¡y eso es todo!).

Podríamos resumir lo recién hecho de este modo:

En la división:

$$2x^2 + 3x + 4 \quad \Bigg| \quad x + 1$$

el resto vale:

$$\text{Resto} = 2(-1)^2 + 3(-1) + 4 = 3$$

Veamos otro ejemplo:

En la división:

$$5x^3 - 7x \quad \Bigg| \quad x - 2$$

el resto vale:

$$\text{Resto} = 5(2)^3 - 7(2) = 40 - 14 = 26$$

Notemos de paso que este teorema nada dice sobre el cociente. Sólo informa sobre el resto. Por eso está bien llamado "teorema del resto". Antes de seguir veamos qué es el ...

Valor numérico de un polinomio

Si un polinomio se simboliza con $P(x)$, entonces el valor que se obtiene al reemplazar la "x" por cualquier número "b" se llama valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = b$. Ese valor numérico se simbolizará $P(b)$.

¿Cómo se simbolizará el valor que se obtiene al reemplazar la "x" de $P(x)$ por el valor "-a"?

La respuesta es fácil: el valor numérico de $P(x)$ para $x = -a$ se simboliza $P(-a)$.

Ya tenemos la forma de simbolizar en dos renglones el Teorema del Resto:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x) \\ \text{Resto} = P(-a) \end{array} \right. \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} x + a \\ C(x) \end{array}$$

La demostración de este teorema (que es muy sencilla pero que no nos interesa aquí) figura en cualquier libro respetable de matemáticas de tercer año del secundario.

Veamos otro ejemplo. Calculemos – sin hacer la división – el resto de:

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - x - 1 \\ x + 1 \end{array}$$

aquí $a = 1$ por lo tanto $-a = -1$.
El resto es entonces:

$$\text{Resto} = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 - 1 + 1 - 1 = -2$$

Sexto caso de factoreo

Este caso nos enseña a factorizar ciertas sumas y restas de potencias pares o impares.

Aclaremos esto:

$$\begin{aligned} x^4 - 2^4 &: \text{resta de potencias pares} \\ x^5 + 3^5 &: \text{suma de potencias impares} \\ x^5 - 2^5 &: \text{resta de potencias impares} \\ x^8 + 2^8 &: \text{suma de potencias pares} \end{aligned}$$

Se trata de factorizar estas expresiones “usando” la suma o la resta de las bases correspondientes. Por ejemplo, en la expresión $x^4 - 2^4$ (que es resta de potencias pares) las bases son: la “x” y el “2”. Se tratará de determinar si $x^4 - 2^4$ se puede factorizar usando la suma de las bases ($x + 2$) o la resta de esas bases ($x - 2$).

¿Cómo se pueden “usar” esas sumas o restas de bases para factorizar una suma o resta de esas potencias?

Para tener idea de esto, pensemos en el número 12. ¿Cómo puedo usar el “2” para factorizar el “12”? Muy sencillamente:

Empiezo dividiendo el “12” por el “2”.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 2 \end{array}$$

Veo que es una división exacta (o sea el resto es cero). El cociente vale: 6.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 0 \quad 2 \\ 6 \end{array}$$

Y expreso el dividendo (el “12”) como producto del divisor (el “2”) por el cociente (el “6”). Y es por eso que podemos poner: $12 = 2 \cdot 6$ ya está factorizado (no hay ningún resto que agregar porque la división es exacta).

Si se entiende lo que acabamos de decir, entonces será fácil entender cómo se procede en el sexto caso.

$$x^3 + 8$$
$$x^3 = [x]^3 \quad \text{la base es "x"}$$

$$8 = [2]^3 \quad \text{la base es "2"}$$

Esta cuestión se resuelve fácilmente con el Teorema del Resto:

$$\text{Resto} = (-2)^3 + 8 = -8 + 8 = 0$$

Entonces lo único que falta es dividir y reexpresar la resta de potencias como producto del cociente por el divisor.

$$\begin{array}{r} x^3 \qquad \qquad \qquad + \quad 8 \qquad \qquad \qquad \left| \begin{array}{l} x + 2 \\ \hline x^2 - 2x + 4 \end{array} \right. \\ -x^3 - 2x^2 \qquad \qquad \qquad \\ \hline -2x^2 \qquad \qquad \qquad \\ +2x^2 + 4x \qquad \qquad \qquad \\ \hline 4x + 8 \qquad \qquad \qquad \\ -4x - 8 \qquad \qquad \qquad \\ \hline 0 \end{array}$$
$$(x^3 + 8) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Manual de apoyo para ingresantes / Matemática / Pág 120

Veamos otro ejemplo. Queremos factorizar $x^4 + 16$. Lo primero es escribirlo como suma de potencias.

El "16" puede ponerse como 2^4 y entonces $x^4 + 16$ puede ponerse como $x^4 + 2^4$. Las bases son "x" y "2". Intentaremos factorizar usando la suma de estas bases y – si no sirve – intentaremos usar la resta de las bases.

Probemos con la suma de las bases ($x + 2$).

Calculo el resto de dividir:

$$x^4 + 16 \quad \Big| \quad x + 2$$

$$\text{Resto} = (-2)^4 + 16 = 16 + 16 = 32$$

¡No da resto cero!

No sirve la suma de las bases.

Probamos con la resta:

$$x^4 + 16 \quad \Big| \quad x - 2$$

$$\text{Resto} = (2)^4 + 16 = 16 + 16 = 32$$

¡No da resto cero!

No sirve la resta de las bases.

En consecuencia no podemos factorizar ni por la suma ni por la resta de las bases.

Analicemos este otro caso. Tratamos de factorizar $x^6 + 64$. Este caso parece que nos va a llevar al mismo "callejón sin salida" del caso anterior. En efecto:

$$x^6 = [x]^6 \quad \text{la base es "x"}$$

$$64 = [2]^6 \quad \text{la base es "2"}$$

Pruebo con la suma de las bases:

$$x^6 + 64 \quad \Big| \quad x + 2$$

$$\text{Resto} = (-2)^6 + 64 = 128$$

¡No da resto cero!

Por lo tanto, no puedo factorizar usando la suma de bases.

Pruebo con la resta:

$$x^6 + 64 \quad \Big| \quad x - 2$$

$$\text{Resto} = (2)^6 + 64 = 128$$

¡Tampoco da resto cero! Por lo tanto, no puedo factorizar usando la resta de bases.

Aparentemente no vamos a poder factorizar esta expresión. Pero....

... $x^6 + 64$ no sólo puede escribirse como suma de potencias sextas: $x^6 + 2^6$. También puede escribirse como suma de cubos:

$$x^6 = [x^2]^3 \quad \text{la base es "x^2"}$$

$$64 = 2^6 = [2^2]^3 \quad \text{la base es "2^2 = 4"}$$

$$x^6 + 64 = [x^2]^3 + [4]^3$$

Problemas con la suma de bases:

$$z^3 + 4^3 \quad | \quad z + 4$$

$$\text{Resto} = (-4)^3 + 4^3 = -64 + 64 = 0$$

Hago entonces la división:

$$\begin{array}{r|l} z^3 & + 64 \\ -z^3 - 4z^2 & \\ \hline & -4z^2 \\ & + 4z^2 + 16z \\ & \hline & 16z + 64 \\ & -16z - 64 \\ & \hline & 0 \end{array}$$

la división es exacta.

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \cdot \text{Cociente}$$

$$z^3 + 64 = (z + 4) \cdot (z^2 - 4z + 16)$$

$$(x^2)^3 + 64 = (x^2 + 4) \cdot ((x^2)^2 - 4x^2 + 16)$$
$$x^6 + 64 = (x^2 + 4) \cdot (x^4 - 4x^2 + 16)$$

Manual de apoyo para ingresantes / Matemática / Pág 123

Una vez que haya finalizado la lectura, deténgase y realice el próximo trabajo práctico.



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 9: **Factoreo**

Busque las consignas al final de la unidad.

Consignas

Factorice las siguientes expresiones aplicando el primer caso de factoreo:

- 1) $2x^3 - 7x$
- 2) $6x^5 - 9x$
- 3) $ax^2 + ay$
- 4) $x - x^3$
- 5) $ax^3 - a^2x$

Factorice las siguientes expresiones aplicando el segundo caso de factoreo:

- 6) $2a + 2b + ab + b^2$
- 7) $x^2y + xy + ax + a$
- 8) $2x^2 + 2x + a^2x + a^2$
- 9) $x^2 - x + a^2x - a^2$
- 10) $x^2 - x + ax - ax^2$

Factorice los siguientes trinomios aplicando tercer caso de factoreo:

- 11) $x^2 - 2x + 1$
- 12) $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$

13) $x^2 + x + 1/4$

14) $8x + x^2 + 16$

15) $x^2 - x + 1/4$

Factorice las siguientes expresiones aplicando el cuarto caso de factoreo.

16) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

17) $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$

Factorice las siguientes diferencias aplicando el quinto caso.

18) $4x^4 - 16x^2$

19) $25x^2 - 0,36x^6$

20) $9x^2y^4 - 0,01x^8$

21) $m^2x^4z^6 - 0,25y^4$

22) $x^2 - 1/4$

Factorice las siguientes expresiones usando el sexto caso:

23) $x^3 - 27$

24) $x^4 - 1$

25) $x^5 - 1$

26) $x^3 + b^3$ (donde "b" es una constante)

EVALUACIÓN

Orientaciones para la corrección

Para poder autoevaluarse compare los resultados que obtuvo con los que le presentamos a continuación.

1) $x(2x^2 - 7)$

2) $x(6x^4 - 9)$



3) $a(x^2 + y)$

4) $x(1 - x^2)$

5) $ax(x^2 - a)$

6) $(2 + b)(a + b)$

7) $(xy + a)(x + 1)$

8) $(2x + a^2)(x + 1)$

9) $(x + a^2)(x - 1)$

10) $(x - ax)(x - 1)$

11) $(x - 1)^2$

12) $(x^2 + y^3)^2$

13) $(x + \frac{1}{2})^2$

14) $(x + 4)^2$

15) $(x - \frac{1}{2})^2$

16) $(x + 1)^3$

17) $(x^2 + 2)^3$

18) $(2x^2 - 4x)(2x^2 + 4x)$

19) $(5x - 0.6x^3)(5x + 0.6x^3)$

20) $(3xy^2 - 0.1x^4)(3xy^2 + 0.1x^4)$

21) $(mx^2z^3 - 0.5y^2)(mx^2z^3 + 0.5y^2)$

22) $(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$

23) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

24) $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

25) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

26) $(x + b)(x^2 - xb + b^2)$

Cierre de la unidad

Con el fin de dar cierre a esta unidad, le proponemos la realización de la siguiente actividad.

Dados los polinomios $P(x) = 2x - 5$ y $Q(x) = 4 - 3x$:

a) calcule P^2

b) calcule Q^2

c) efectúe $P^2 - Q^2$

d) divida el resultado de c) por $x+2$

e) factorice el cociente de d)

Lo invitamos a continuar con el estudio de la próxima unidad cuyo eje temático son las ecuaciones.

UNIDAD 3 - ECUACIONES

Presentación

En la resolución de problemas continuamente se presenta la tarea de hallar la/s solución/es de una ecuación (si es que existe/n). Es decir, la tarea de encontrar el conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación, denominado conjunto solución, que suele simbolizarse con "S".

Es fácil entender por qué aparece esa tarea en la resolución de problemas. Reflexionemos acerca de qué significa resolver un problema. Se comienza por estudiarlo con atención, identificando variables, dificultades, metas, analogías... Se trata de encontrar un modelo de comprensión del problema. Como fruto de esto es común traducir el problema real a un problema matemático; es usual que este problema tenga condiciones de igualdad (en cuyo caso produce una ecuación) o de desigualdad.

Resolver la ecuación o la inecuación es una condición para la resolución del problema. Una vez resuelta, se pasa a interpretar los resultados y a discriminar cuáles tienen sentido y cuáles no, cuál es ese sentido y qué limitaciones tiene el modelo planteado y la o las soluciones obtenidas.

Sobre la base del manejo de la operatoria con los números reales que vimos en la primera unidad y de los conceptos que acabamos de presentar, en esta unidad centraremos nuestra atención en la resolución de ecuaciones. El tema es muy vasto; nosotros sólo nos ocuparemos de una parte de él: la que nos permita un desempeño básico en esta temática.

A través del estudio de la presente unidad esperamos que usted sea capaz de:

- Comprender el concepto de ecuación, distinguiéndolo de expresiones parecidas a ella.
- Trabajar el manejo de las ecuaciones de una incógnita de primer y segundo grado, con algunas derivaciones sencillas.
- Comprender cómo se resuelven la ecuación cúbica incompleta y la ecuación bicuadrada.
- Manejar la aplicación de la ecuación de segundo grado al séptimo caso de factorización.

A continuación, le presentamos un detalle de los contenidos y actividades que integran esta unidad. Usted deberá ir avanzando en el estudio y profundización de los diferentes temas, realizando las lecturas requeridas y elaborando las actividades propuestas.

Contenidos y Actividades

1. Ecuaciones. Concepto



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico Nº 10: Ecuaciones lineales

2. Ecuaciones de segundo grado



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico Nº 11: Ecuaciones de segundo grado

3. Ecuación cúbica incompleta



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico Nº 12: Ecuación cúbica incompleta

4. Ecuación bicuadrada



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico Nº 13: Ecuación bicuadrada

5. Séptimo caso de factorización

Cierre de la unidad



Trabajo Práctico

- Trabajo Práctico Nº 14



Organizador Gráfico

El siguiente esquema le permitirá visualizar la interrelación entre los conceptos que a continuación abordaremos.



Lo/a invitamos ahora a comenzar con el estudio de los contenidos que conforman esta unidad.

1. Ecuaciones. Concepto

Le proponemos dar comienzo a este tema a través de la lectura del siguiente texto.



Guía para la lectura

Cuando lea este material bibliográfico rescate el concepto de ecuación y distinga las ecuaciones de otras expresiones parecidas a ella: identidades y absurdos o contradicciones.

ECUACIONES

Si consideramos la expresión $3 \cdot 5 + 1 = 16$ vemos que es una igualdad numérica.

¿Qué obtenemos si en lugar de uno de los números (por ejemplo el "5") colocamos un símbolo (por ejemplo x)? Queda $3 \cdot x + 1 = 16$.

Esto es una ecuación. Y en ella sucede que al reemplazar la "x" por ciertos valores se obtiene una igualdad numérica correcta. Ejemplo: al reemplazar la "x" por 5 se obtiene: $3 \cdot 5 + 1 = 16$ que es correcto

En cambio al reemplazar la "x" por 7 se obtiene: $3 \cdot 7 + 1 = 16$ ique es falso! Cada número que produce una igualdad numérica correcta es una solución de la ecuación. Por ejemplo el "5" es solución de la ecuación " $3 \cdot x + 1 = 16$ ".

En este caso el "5" es la única solución de la ecuación " $3 \cdot x + 1 = 16$ ". Al conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación se lo llama CONJUNTO SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN y se lo simboliza con la letra "S" mayúscula.

De modo que la ecuación $3 \cdot x + 1 = 16$ tiene como conjunto solución:
 $S = \{5\}$

Como S es un conjunto se escribe encerrando entre paréntesis sus elementos.

ABSURDOS, IDENTIDADES Y ECUACIONES

Hay otro tipo de expresiones parecidas a las ecuaciones, pero que no lo son. Por ejemplo consideremos la expresión:

$$x + 1 = x$$

¿Cuál será el número tal que sumándole "1" queda igual?

No existe tal número. Esta expresión no tiene solución. Decimos que el conjunto solución es el conjunto vacío:

$$S = \emptyset.$$

Las expresiones con conjunto solución vacío son ABSURDOS O CONTRADICCIONES.

Hay un tercer tipo de estas expresiones. Son aquellas que se verifican con cualquier número real. Por ejemplo la expresión:

$$x + x = 2x$$

se cumple para cualquier valor de x real.

En este caso el conjunto solución es el conjunto de todos los números reales. Se indica simbólicamente así

$$S = R.$$

A estas expresiones se las llama IDENTIDADES.

Resumiendo lo dicho.

Si $S = \emptyset$ se trata de una contradicción o absurdo.

Si $S = R$ se trata de una identidad.

Si S tiene algunos reales pero no todos, se trata de una ecuación.

Analicemos las tres expresiones siguientes y determinemos si se trata de ecuaciones, absurdos o identidades:

$$0 \cdot x = 8$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$4 \cdot x = 8$$

Comencemos por " $0 \cdot x = 8$ ". La pregunta es ¿cuáles son los reales que multiplicados por cero dan por resultado 8? Por ejemplo: ¿ $0 \cdot 7 = 8$? ¿ $0 \cdot 9 = 8$? No, no parecen "funcionar".

Podemos seguir probando pero encontraremos que ningún real "anda bien". Aquí el conjunto solución es vacío:

$$0 \cdot x = 8$$

$$S = \emptyset$$

Se trata de un absurdo o contradicción.

Pasemos ahora a " $0 \cdot x = 0$ ". En este caso basta un ligero análisis para aceptar que cualquier número real verifica esta expresión. Por ejemplo:

$$0 \cdot 7 = 0; \quad 0 \cdot 9 = 0, \text{ etc., etc.}$$

El conjunto solución, en este caso, es todo R :

$$0 \cdot x = 0$$

$$S = R$$

Se trata de una identidad.

Nos queda el caso $4 \cdot x = 8$. Aquí la única solución es el "2". El conjunto solución es $S = \{2\}$. Ésta es entonces legítimamente una ecuación (hay reales que la verifican y hay reales que no la verifican).

Nos preguntamos ahora: ¿habrá ecuaciones que tengan un conjunto solución formado por varios números reales (y no por uno solo)?

Consideremos la ecuación $x^2 = 9$. En este caso vemos que el "3" es solución (o sea "3 pertenece a S ", lo que en símbolos se indica: $3 \in S$). En efecto $(3)^2 = 9$. Pero también vemos que "-3" es solución (o sea $-3 \in S$) porque $(-3)^2 = 9$. No hay otra solución a esta ecuación. El conjunto solución es entonces:



$$x^2 = 9$$

$$S = \{3; -3\}$$

Ahora pasemos a esta otra ecuación:

$$x^3 = x$$

En este caso podemos comprobar que $1 \in S$ (en efecto: $(1)^3 = 1$). También vale que $-1 \in S$ (porque: $(-1)^3 = -1$). Y también se cumple que $0 \in S$ (porque $(0)^3 = 0$).

Usted puede probar con cualquier otro real (que no sea ni el -1 ni el 1 ni el 0) y verá que no verifica esta ecuación. Por lo tanto el conjunto solución es:

$$x^3 = x$$

$$S = \{0; 1; -1\}$$

Nota: cuando se estudian, en matemáticas, sistemas formados por más de una ecuación se puede encontrar otra forma de referirse a ecuaciones, absurdos e identidades. La expresión $0x=8$ sería un sistema incompatible; la expresión $0x=0$ sería un sistema compatible indeterminado y la expresión $8x=16$ sería un sistema compatible determinado(fin nota).

Entre las ecuaciones más sencillas figuran las lineales donde la incógnita se encuentra elevada a la primera potencia. Su estructura básica es, esencialmente, del tipo $ax+b=c$

Es común que la ecuación lineal aparezca presentada con una apariencia distinta de la mencionada, con varias apariciones de la incógnita.

En la explicación que realizaremos a continuación usted encontrará un apoyo para la comprensión del tema.



Guía para la lectura

Con el fin de orientar su lectura, le recomendamos que al abordar el texto se concentre en las características principales de las ecuaciones lineales, en el proceso denominado "despejar la incógnita" y en las ejemplificaciones que ofrece el autor.



ECUACIONES LINEALES

En estas ecuaciones el máximo exponente de la incógnita es el 1. Por ejemplo $7x + 8 = 0$ es lineal pero $2x^2 - 8x + 3 = 0$ no es lineal, sino cuadrática, y la ecuación $2x^3 - 8x + 6 = 0$ es cúbica.

La forma general de una lineal sería: $ax + b = 0$ donde "a" y "b" son números reales.

En este caso sabemos que "a" no puede ser cero porque entonces tendríamos una contradicción ($S = \emptyset$) o una identidad ($S = R$). Veamos esto en concreto:

Si $a = 0$ entonces hay dos variantes:

$$\text{ó } b = 0 \quad \text{ó } b \neq 0$$

Si $a = 0$ y $b = 0$ entonces la ecuación queda $0x + 0 = 0$ y, como ya vimos, se tiene $S = R$, es decir se trata de una identidad.

Si $a = 0$ y $b \neq 0$ (por ejemplo $b = 7$) entonces la ecuación queda $0x = -7$ y como vimos antes $S = \emptyset$ (se trata de un absurdo). Entonces para que se trate de una ecuación debe ser $a \neq 0$.

En ese caso es fácil ver que el conjunto solución es:

$$S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

En efecto, si reemplazo la x por $-(b/a)$ queda:

$$\cancel{a} \left(-\frac{b}{\cancel{a}} \right) + b = -b + b = 0$$

y se verifica la ecuación. Pero ningún otro número real la verifica.

Ahora bien: ¿Cómo disponer de una rutina para resolver estas ecuaciones? Veamos:

Consideremos la ecuación

$$x + 8 = 9$$

Si " $x + 8$ " es igual a "9" entonces sumando "-8" a ambos miembros se mantiene la igualdad:

$$x + 8 + (-8) = 9 + (-8)$$

En el miembro izquierdo tenemos la suma $8 + (-8)$ que sabemos vale cero. En el miembro izquierdo reemplazo entonces el " $8 + (-8)$ " por " 0 " y queda:

$$x + 0 = 9 + (-8)$$

Ahora es muy fácil ver que " $x + 0$ " vale lo mismo que " x " y podemos por lo tanto reemplazar " $x + 0$ " por " x ":

$$x = 9 + (-8)$$

A este proceso se lo llama: "despejar la incógnita". El fundamento del método es ir obteniendo nuevas ecuaciones que tengan el mismo conjunto solución que la original pero que sean "más fáciles de leer". En el caso último, partimos de:

$$x + 8 = 9 \quad (\text{I})$$

Luego $x + 8 + (-8) = 9 + (-8) \quad (\text{II})$

Luego $x + 0 = 9 + (-8) \quad (\text{III})$

Y finalmente $x = 9 + (-8) \quad (\text{IV})$

Cada una de estas ecuaciones tiene el mismo S. Cuando dos ecuaciones tienen igual conjunto solución se llaman EQUIVALENTES.

Podemos decir que este método consiste en *escribir una sucesión de ecuaciones equivalentes a la original tratando de que la última tenga la incógnita "despejada"* (es decir la incógnita sola en un miembro y en el otro miembro un número).

Lo más común es recordar la serie de pasos desde (I) hasta (IV) diciendo que "el 8 que estaba sumando a la izquierda pasó restando a la derecha". Es así como acostumbramos a escribir directamente:

"Paso el 8 restando"

$$\begin{array}{l} x + 8 = 9 \\ \rightarrow x = 9 - 8 \end{array}$$

Esta manera de hablar es un poco extraña, pero es una manera rápida de referirse al proceso de los pasos (I) - (II) - (III) - (IV). Podemos pensarlo de este modo y obtener una solución correcta, siempre que trabajemos con cuidado.

Del mismo modo procedemos, cuando la incógnita está multiplicada por un número (distinto de cero). Veamos un ejemplo:

$$3x = 12 \quad (\text{I})$$

divido ambos miembros por 3 y obtengo:

$$\frac{3X}{3} = \frac{12}{3} \quad (\text{II})$$

en el miembro izquierdo $\frac{3X}{3}$ vale "x" y por eso, al reemplazar, queda:

$$X = \frac{12}{3} \quad (\text{III})$$

Igual que antes, tenemos una forma figurada de hablar para referirnos a este proceso de (I) hasta (III).

Partiendo de $3x = 12$ es costumbre decir que "pasamos el 3 dividiendo al otro miembro" y así queda $X = \frac{12}{3}$.

Lo importante (sin que nos interese la forma en que lo decimos) es que la *última ecuación sea equivalente a la original*. En este caso la primera ecuación:

$$3x = 12$$

$$\text{tiene } S = \{4\}$$

y la última

$$X = \frac{12}{3}$$

también tiene $S = \{4\}$.

Eso es lo verdaderamente importante: que no cambie el conjunto solución.

Es decir que el proceso de despeje consiste en lo siguiente: ir escribiendo una "cadena" de ecuaciones que sean equivalentes a la original hasta llegar a la última que podríamos llamar "de lectura directa" (tiene la x igualada a un número).

Veamos un caso más completo:

$$2x + 7 = 11$$

en este caso no es suficiente con saber que "lo que está sumando pasa restando y lo que está multiplicando pasa dividiendo". Porque aparece la posibilidad de "pasar el 2" y de "pasar el 7". ¿Cuál de los dos "paso" en primer lugar?

La respuesta es simple: en el miembro izquierdo: " $2x + 7$ " hay dos operaciones: producto y suma. Paso en primer lugar el número que rompa la operación principal. La operación principal es aquella que vincula a toda la expresión.

Veamos esto: en la expresión “ $2x+7$ ” el producto vincula al “2” con la “x”. Pero la suma vincula al “ $2x$ ” con el “7”. Esta suma es la operación principal. La expresión “ $2x + 7$ ” es una suma. Por eso si la escribiéramos con paréntesis deberíamos ponerla así:

$$(2x) + 7$$

Para despejar la “x” debemos “desarmar” la expresión “ $2x + 7$ ” comenzando por la operación principal. O sea que primero hay que “pasar el 7”. Por eso procedemos como sigue:

$$2x + 7 = 11$$

operación principal

paso el 7 restando a la derecha

$$2x = 11 - 7$$

el producto es ahora la única operación con la x. No hay dudas: paso el 2 dividiendo a la derecha

$$X = \frac{11 - 7}{2}$$

sólo falta “hacer las cuentas”

$$X = \frac{11 - 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

es decir $x = 2$. Entonces escribimos el conjunto solución así:

$$S = \{2\}$$

¿Cómo procederíamos si en lugar de la anterior tuviéramos que “despejar la x” en la siguiente ecuación?:

$$2 \cdot (x + 7) = 11$$

Comparemos el despeje anterior con éste. Ahora la operación principal a la izquierda es el producto (porque el 2 está multiplicando a todo el “ $x + 7$ ”: eso es lo que indica el paréntesis).

Entonces paso el “2” dividiendo al otro término.

$$X + 7 = \frac{11}{2}$$

ésta es ahora la única
operación con la x

No hay dudas: paso el 7 restando

$$X = \frac{11}{2} - 7$$

Sólo queda "hacer cuentas"

$$X = \frac{11}{2} - 7 = \frac{11-14}{2} = \frac{-3}{2}$$

y expresar el conjunto solución

$$S = \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$$

Trabajemos ahora otro ejemplo:

$$\frac{14-3X}{2} = 4$$

¿Cuál es ahora la operación principal a la izquierda?

Veamos:

El producto vincula al "3" con la "x", la resta vincula al "14" con el "3x" pero solamente la división vincula al "14 - 3x" con el "2". Esta división vincula a todo el miembro izquierdo y es entonces la operación principal. Por eso la vamos a "desarmar" en primer lugar:

paso el "2" multiplicando a derecha

$$14 - 3x = 4 \cdot 2$$

hago cuentas a la derecha

$$14 - 3x = 8$$

ahora ésta es la operación principal

y por eso voy a pasar el 14 al otro miembro.

Pero ¡cuidado!: tengamos en cuenta que el 14 esta sumando (¡y no restando!), porque el signo menos "-" que vemos corresponde al "3x" (no olvidar que el signo de un número se escribe a la izquierda).

Una vez que pasé el 14 restando (y dejé el signo "-" con el 3x) lo que quedó es:

$$-3x = 8 - 14$$

vuelvo a hacer cuentas a derecha

$$-3x = -6$$

Ahora puedo elegir entre varios caminos:

uno puedo multiplicar ambos miembros por "-1" con lo cual queda

$$(-3x) \cdot (-1) = (-6) \cdot (-1)$$

y haciendo cuentas:

$$3x = 6$$

ahora sólo queda pasar el "3" dividiendo a la derecha:

$$X = \frac{6}{3} = 2$$

en síntesis nuestro conjunto solución es:

$$S = \{2\}$$

dos también puedo considerar que "-3x" es el producto de "-3" por la "x" con lo cual estaría "viendo" la ecuación de este modo:

$$(-3) \cdot x = -6$$

ésta es la única operación. No hay dudas sobre el siguiente paso.

paso el "-3" dividiendo a la derecha:

$$X = \frac{-6}{-3}$$

y luego de "hacer cuentas":

$$x = 2$$

con lo cual el conjunto solución queda:

$$S = \{2\}$$

Advertencia:

¡Cuidado!: paso dividiendo "todo el -3". (¡No hay que quitarle el signo "-" durante el pasaje!!).

Algunos alumnos con muy buena base matemática seguramente opinarán que esta advertencia y el desarrollo “pasito a pasito” de lo que venimos explicando son algo inútil. Es una opinión respetable. Pero la experiencia de muchísimos años nos ha mostrado que algunos estudiantes cometen estos errores aún después de terminar la facultad. Por eso lo aclaramos con cuidado: no es una opinión, es experiencia.

Comentario: como docentes hemos comprobado algo curioso.

Es muy común el error de cambiar de signo a un negativo que se pasa dividiendo. Por ejemplo:

$$(-5) \cdot x = 10 \quad (I)$$

$$X = \frac{10}{5} \quad \text{¡error! : no se debió cambiar el signo al número “-5”}.$$

Pero casi nadie se equivoca “al revés”, o sea casi nadie le cambia el signo a un positivo al pasarlo dividiendo. Por ejemplo:

$$\text{partiendo de } 5x = 10 \quad (II)$$

casi nadie escribe

$$X = \frac{10}{-5} \quad (\text{que está mal hecho!!})$$

La razón de esa diferencia de conducta nos resulta difícil de entender pero es un hecho que hemos comprobado muchas veces.

Ud. debe tratar de estar más alerta – si lo necesita – cuando enfrenta la situación (I).

Veamos ahora ecuaciones lineales con varias “apariciones” de la incógnita.

Por ejemplo:

$$3(2 + 5x) + 8(1 + x) = 2(5 - x) - 3(-2 + 3x)$$

Lo primero es aplicar la propiedad distributiva dentro de cada término. En cada uno tendríamos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3(2 + 5x) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5x = 6 + 15x \\ 8(1 + x) = 8 \cdot 1 + 8 \cdot x = 8 + 8x \\ 2(5 - x) = 2 \cdot 5 - 2 \cdot x = 10 - 2x \\ -3(-2 + 3x) = (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3x = 6 - 9x \end{array} \right.$$

Reemplazando en la ecuación original obtenemos:

$$6 + 15x + 8 + 8x = 10 - 2x + 6 - 9x$$

Reducimos términos semejantes en cada miembro.

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 + 8 = 14 \\ 15x + 8x = 23x \\ 10 + 6 = 16 \\ -2x - 9x = -11x \end{array} \right.$$

Al llevar estas cuentas a la ecuación queda:

$$14 + 23x = 16 - 11x$$

Pasamos a la izquierda los términos con "x" y a la derecha los términos sin "x":

$$23x + 11x = 16 - 14$$

Volvemos a reducir términos semejantes en cada miembro,

$$\left\{ \begin{array}{l} 23x + 11x = 34x \\ 16 - 14 = 2 \end{array} \right.$$

y con esto tenemos:

$$34x = 2.$$

Sólo falta “pasar el 34 dividiendo”:

$$x = \frac{2}{34}$$

Operando (o sea simplificando la fracción) obtengo:

$$x = \frac{1}{17}$$

El conjunto solución queda:

$$S = \left\{ \frac{1}{17} \right\}$$

Es momento de realizar el próximo trabajo práctico.



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 10: Ecuaciones lineales

Consignas

“Despeje la x” paso a paso, escribiendo claramente el conjunto solución.

1) $\frac{3X - 9}{2} + 8 = 10$



$$2) \left(5 + \frac{3-2X}{4} \right) \cdot 3 = 6$$

$$3) \frac{(4-2X) \cdot 3 + 16}{4} = 10$$

$$4) [(2-5X) \cdot 8 - 2] \cdot 6 = 36$$

$$5) 5 \cdot \left(1 - \frac{2X-3}{4} \right) = 10$$

Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

$$6) 3(4x - 8) = 9(3 - 2x)$$

$$7) 5(2x + 7) + 4 = 6 - 3(2 - 4x) - 8x$$

$$8) (2 + 6x)(4 + x) = (5 + 2x)(3 + 3x)$$

$$9) 2(3 + x) + 5 = 10(x + 1) + 1 - 8x$$

$$10) 3(4 + x) + 2x = 5(2 + x) + 4$$

EVALUACIÓN

A continuación le presentamos las respuestas correspondientes a los ejercicios 1 a 10.



Reconocida internacionalmente por la acreditadora CQAIE (Washington, USA)

UAI Universidad Abierta
Interamericana

UAIOnline

Orientador del Aprendizaje

Orientaciones para la corrección

1) $x = \frac{13}{3}$

2) $x = \frac{15}{2}$

3) $x = -2$

4) $x = \frac{1}{5}$

5) $x = -\frac{1}{2}$

6) $x = -\frac{5}{2}$

7) $x = -\frac{13}{2}$

8) $x = \frac{7}{5}$

9) $s = \mathbb{R}$

10) $s = \emptyset$



2. Ecuaciones de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado aparecen tempranamente en el desarrollo matemático de las grandes civilizaciones. En estas ecuaciones la incógnita está elevada al segundo grado y tiene básicamente la estructura que sigue:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Para comprender la naturaleza y el trabajo involucrado en la resolución de estas ecuaciones le proponemos la lectura detenida y pormenorizada de los contenidos que presentamos a continuación de esta guía para su lectura:



Guía para la lectura

Durante la lectura preste atención a la explicación para la resolución de las ecuaciones del tipo **(ax + b) (cx + d) = 0**. Observe que es posible aplicar la propiedad distributiva y transformar el miembro izquierdo en un clásico trinomio cuadrático, lo cual permitiría aplicar la fórmula correspondiente para resolverla. Sin embargo, es mucho más fácil y seguro resolver esta ecuación de otra forma. Y ella consiste en tener en cuenta que un producto vale 0, si y sólo si alguno de los dos factores (o los dos) vale 0.

En nuestro caso:

$$(ax + b) (cx + d) = 0$$

equivale a:

$$(ax + b = 0) \text{ ó } (cx + d = 0)$$

Para evitar confusiones comunes en el trabajo con las ecuaciones que venimos presentando, le sugerimos el análisis minucioso de los conceptos desarrollados al final del texto y anticipados con el subtítulo *"Una aclaración para evitar errores"*.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones de segundo grado:

$$3x^2 - 8x = 0 ; 5x^2 - 9 = 0 ; 2x^2 - 9x + 4 = 0 ; 4(x + 1)^2 = 9(x + 2)$$

Al enfrentarnos a una ecuación cuadrática, luego de haber distribuido todos los posibles productos (respecto de sumas y restas) y reducido los términos semejantes (si los hubiera) se puede escribir la ecuación cuadrática en forma polinómica, es decir:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{con } a \neq 0)$$

Por supuesto que si fuera $a = 0$, entonces sería una falsa ecuación cuadrática (no sería de segundo grado).

En cualquier buen libro donde se trate este tema figura la deducción de la fórmula resolvente para esta ecuación (que algunos llaman Fórmula de BASKARA). Se trata de que la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{con } a \neq 0)$$

es equivalente a esta expresión:

(I)

$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \neq 0)$

Es común escribir esta última expresión (usando un abuso de notación) así:

(II)
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \neq 0)$$

Por cualquier duda que se tenga al ver la fórmula (II) con su extraño símbolo “ \pm ” debe entenderse simplemente que es una manera más rápida de escribir la fórmula irrepachable (I).

Veamos en primer lugar la deducción de la fórmula. Partimos de la forma polinómica de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{con } a \neq 0)$$

multiplicamos ambos miembros por “4a”:

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = (4a) \cdot (0)$$

Haciendo cuentas en ambos miembros tenemos:

$$\begin{cases} (4a) \cdot (0) = 0 \\ 4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac \end{cases}$$

Al reemplazar estos valores en la ecuación quedará:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Obsérvese que el primer término de la izquierda (que es “4a²x²”) se puede escribir como un cuadrado, de este modo:

$$4a^2x^2 = (2ax)^2$$

El segundo término de la izquierda (es decir el “4abx”) se puede expresar como un doble producto: el doble producto de (2ax) por (b). En efecto:

$$4abx = 2 \cdot (2ax) \cdot (b)$$

Con lo dicho ya podemos escribir nuestra ecuación de este modo:

$$(2ax)^2 + 2(2ax)(b) + 4ac = 0$$

Los dos primeros términos son “casi” un trinomio cuadrado perfecto. Pero solamente casi. En efecto: tiene el cuadrado de “2ax” y el doble producto de “2ax” por “b”, pero falta el cuadrado de “b”. Para conseguirlo sumamos b² en ambos miembros:

$$(2ax)^2 + 2(2ax)(b) + (b)^2 + 4ac = 0 + b^2$$

Y como a la derecha vale: $0 + b^2 = b^2$, la ecuación nos queda:

$$[2ax]^2 + 2[2ax](b) + (b)^2 + 4ac = b^2$$

Pero el miembro de la izquierda se puede reexpresar, aplicando el tercer caso de factorización ("trinomio cuadrado perfecto") a los tres primeros términos. En efecto recordemos que el esquema de ese caso es:

$$[\quad]^2 + 2\quad + (\quad)^2 = ([\quad] + (\quad))^2$$

en nuestro caso particular:

$$[2ax]^2 + 2[2ax](b) + (b)^2 = ([2ax] + (b))^2$$

Nuestra ecuación nos quedará entonces (sin olvidar el "4ac"):

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$$

En este último paso, aunque no lo notemos, el avance ha sido enorme. En lugar de dos apariciones de la "x" como en $ax^2 + bx + c = 0$, ahora tenemos sólo una: $(2ax + b)^2 + 4ac = 0$

Ya estamos en condiciones de despejar nuestra incógnita "x" (con los cuidados correspondientes).

Primero restamos "4ac" en ambos miembros (que es lo mismo que "pasar el 4ac restando a la derecha")

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Ahora debo “pasar” el cuadrado.

Para hacerlo con corrección pensemos que si nos enfrentáramos a algo así como $x^2 = 9$: ¿cómo despejaría la “x”? Simplemente sabiendo que para que “x” al cuadrado sea 9, entonces “x” puede ser la raíz cuadrada de 9 o el opuesto de la raíz cuadrada de 9. En síntesis:

$$\text{La ecuación } x^2 = 9$$

sería equivalente a la expresión $x = \pm\sqrt{9}$.

Por supuesto si tuviera que resolver: $x^2 = -9$ pondría simplemente $S = \emptyset$ porque entre los números reales no tendría ninguno que cumpliera la condición. Recordemos que estamos trabajando con números reales.

De esta misma manera continuamos con nuestra deducción de la fórmula resolvente de la ecuación de 2º grado.

Si tengo:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \quad (\text{con } a \neq 0)$$

puedo escribir la ecuación equivalente:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \quad (a \neq 0)$$

Notemos que ambas requieren que $b^2 - 4ac \geq 0$ para tener soluciones reales. Si no se cumple esta condición, entonces la última y la penúltima expresiones no se verificarán para ningún real.

Por supuesto que esta fórmula:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \quad (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0)$$

tiene un abuso de notación. Es una forma “abreviada” de escribir la expresión siguiente (que es correcta):

$$2ax+b=+\sqrt{b^2-4ac} \quad \text{ó} \quad 2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac} \quad (a \neq 0 \wedge b^2-4ac \geq 0)$$

Ahora sólo falta terminar de despejar la "x" pasando la "b" restando a la derecha y luego el "2a" dividiendo a la derecha:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como "a" es distinto de cero puedo dividir en ambos miembros por "2a" sin problemas.

En síntesis, lo que hemos deducido es la siguiente equivalencia (que vale para $a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0$):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\updownarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es muy útil que usted trate de reproducir esta deducción por su cuenta. Le servirá para mejorar su manejo algebraico (es una buena aplicación del tercer caso de factorio y excelente ejercitación general).

Pasemos ahora a aplicar la fórmula en algunos ejemplos.

Ejemplo uno

$$2x^2 + 3x + 1 = 0$$

en esta ecuación $a = 2$; $b = 3$ y $c = 1$

por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} -b = -3 \\ b^2 = 3^2 = 9 \\ 4 \cdot a \cdot c = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8 \\ 2 \cdot a = 2 \cdot 2 = 4 \end{array} \right.$$

con lo cual resulta:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$x = \frac{-3+1}{4} \quad \vee \quad x = \frac{-3-1}{4}$$

$$x = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad \vee \quad x = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x = \frac{-1}{2} \quad \vee \quad x = -1$$

El conjunto solución queda, entonces:

$$S = \{ -1/2 ; -1 \}$$

Ejemplo dos

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

aquí tenemos $a = 3$, $b = -10$ y $c = 3$

y por tanto, preparando los elementos para nuestra fórmula

$$\begin{cases} -b = -(-10) = 10 \\ b^2 = (-10)^2 = 100 \\ 4 \cdot a \cdot c = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 \\ 2 \cdot a = 2 \cdot 3 = 6 \end{cases}$$

y reemplazándolos en ella:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$x = \frac{10+8}{6} \quad \vee \quad x = \frac{10-8}{6}$$

$$x = \frac{18}{6} \quad \vee \quad x = \frac{2}{6}$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

el conjunto solución queda: $S = \{ 3 ; 1/3 \}$.

En este ejemplo dos es importante cuidar el valor de “-b”. Notemos que si “b” vale “-10” entonces su opuesto es $-b = -(-10) = 10$.

Ejemplo tres:

$$2x^2 + 5x = 0$$

En esta ecuación $a = 2$, $b = 5$ y $c = 0$

por tanto

$$\begin{cases} -b = -5 \\ b^2 = 5^2 = 25 \\ c = 0 \\ 4 \cdot a \cdot c = 4 \cdot 5 \cdot 0 = 0 \\ 2 \cdot a = 2 \cdot 2 = 4 \end{cases}$$

y aplicando la fórmula tenemos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 0}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-5 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{-5 + 5}{4} \quad \vee \quad x = \frac{-5 - 5}{4}$$

$$x = \frac{0}{4} \quad \vee \quad x = \frac{-10}{4}$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{-5}{2}$$

con lo que el conjunto solución queda:

$$S = \{ 0 ; -5/2 \}$$

La última ecuación que trabajamos ($2x^2 + 5x = 0$) pudo haberse resuelto sin apelar a la fórmula de la ecuación de segundo grado. Se puede resolver usando la siguiente propiedad:

Cuando un producto de dos reales es cero, tenemos la seguridad de que alguno de los dos es cero (eventualmente ambos lo son). En símbolos lo escribiríamos así:

Para todos los reales a, b , vale:

$$a \cdot b = 0 \longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

aquí la doble flecha horizontal indica que la expresión de la izquierda es equivalente a la de la derecha (" \longleftrightarrow " se lee "es equivalente a").

Por supuesto que la " \vee " que figura en esa equivalencia es la llamada "ó débil" que es la más usada en matemáticas. Cuando se escribe " $p \vee q$ " significa que "se cumple p ó se cumple q ó se cumplen ambas". Esta " \vee " en el lenguaje común se puede traducir por "y/o".

Apliquemos esta equivalencia en un ejemplo y veamos después cómo usarla en nuestra ecuación cuadrática.

$$(x + 1) \cdot (x - 8) = 0$$

$$x + 1 = 0 \vee x - 8 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = -1 \vee x = 8$$

$$S = \{-1; 8\}$$

Más arriba dijimos que podíamos – sin usar la fórmula – resolver la ecuación $2x^2 + 5x = 0$. Veamos cómo hacerlo.

El miembro izquierdo de la ecuación se puede reexpresar aplicando sencillamente el primer caso de factoración. En efecto, ambos términos tienen factor común " x ".

Entonces en lugar de escribir:

$$2x^2 + 5x = 0$$

escribimos la expresión equivalente:

$$x \cdot (2x + 5) = 0$$

Ahora ya tenemos una ecuación que tiene un producto igualado a cero. Por eso podemos aplicar la equivalencia recién vista ($a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$). Lo hacemos:

$$x \cdot (2x + 5) = 0$$



$$x = 0 \vee 2x + 5 = 0$$

y ahora ya es muy sencillo:

$$x = 0 \quad \vee \quad 2x + 5 = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -5/2$$

con lo cual $S = \{ 0 ; -5/2 \}$.

Veamos otro ejemplo:

$$3x - x^2 = 0$$

Como en el miembro izquierdo no hay término independiente, podemos aplicar el primer caso de factorización:

$$x (3 - x) = 0$$

ahora aplicamos la equivalencia que estuvimos viendo:

$$x = 0 \quad \vee \quad 3 - x = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad -x = -3$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$$

y ya tenemos el conjunto solución de la ecuación:

$$S = \{0 ; 3\}.$$

¿Y qué pasaría si tuviéramos una ecuación cúbica sin término independiente?
Para entenderlo pasemos al siguiente ejemplo:

$$2x^3 - 11x^2 + 5x = 0$$

No hemos estudiado una fórmula para resolver una ecuación cúbica general.
Pero en este caso especial (en que el término independiente es cero) el miembro izquierdo se puede transformar en producto "sacando factor común "x":

$$x (2x^2 - 11x + 5) = 0$$

Aplicamos ahora la equivalencia vista y colocamos:

$$x (2x^2 - 11x + 5) = 0$$

\updownarrow

$$x=0 \quad \vee \quad 2x^2 - 11x + 5 = 0$$

En la ecuación de la izquierda ("x = 0") nada queda por hacer. En la de la derecha simplemente aplicamos la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado:



$$x = 0 \vee x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{11 \pm 9}{4}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{11+9}{4} \vee x = \frac{11-9}{4}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{20}{4} \vee x = \frac{2}{4}$$

$$x = 0 \vee x = 5 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ 0 ; 5 ; \frac{1}{2} \right\}$$

Veamos otro ejemplo:

$$(2x^3 + 7x^2) (4 - 5x) = 0$$

Aplico, en primer lugar, la equivalencia ($a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$).

$$2x^3 + 7x^2 = 0 \vee 4 - 5x = 0$$

Pero en la ecuación de la izquierda puedo factorizar el polinomio cúbico sacando "x²" como factor común:

$$x^2 (2x + 7) = 0 \vee 4 - 5x = 0$$

Vuelvo a aplicar la equivalencia a la ecuación de la izquierda y obtengo:

$$x^2 = 0 \quad \vee \quad 2x + 7 = 0 \quad \vee \quad 4 - 5x = 0$$

Esto sigue de modo rutinario:

$$x = 0 \quad \vee \quad 2x = -7 \quad \vee \quad -5x = -4$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 2x = -7/2 \quad \vee \quad x = 4/5$$

$$S = \{0 ; -7/2 ; 4/5\}$$

Una aclaración para evitar errores:

Es importante tener claro qué es "a", qué es "b" y qué es "c" en la forma polinómica de la ecuación cuadrática.

Veamos. En la ecuación:

$$2x + 7x^2 + 8 = 0$$

sabemos que $a = 7$ porque "a" es el coeficiente cuadrático (es el número que está multiplicando a la " x^2 "). Ni es el primer coeficiente que aparezca ni es todo el término cuadrático.

Para no confundir tengamos en claro que:

- Coeficiente cuadrático = $a = 7$
- Término cuadrático = $ax^2 = 7x^2$

También sabemos que $b=2$ porque "b" es el coeficiente lineal, es decir, el número que está multiplicando a la " x ".

Aquí tengamos en claro que:

- Coeficiente lineal = $b = 2$
- Término lineal = $bx = 2x$

y finalmente "c" es el término independiente.

- Término independiente = $c = 8$

¿Cuáles son los errores típicos en la resolución de la ecuación cuadrática?

Uno de ellos es olvidar que “-b” significa “el opuesto de b” (o si se prefiere: “b cambiado de signo”). Cuando resolvimos las primeras cuadráticas insistimos en evitar este error anotando con paciencia el valor de “b” primero y luego el de “-b”.

Otro de los errores es confundir los valores de los coeficientes. Para evitar este error hemos aclarado la diferencia entre “coeficientes” y “términos” y hemos dado los nombres correctos a las partes del polinomio cuadrático.

Ejercitemos esta última advertencia:

Pedimos identificar los coeficientes “a”, “b” y “c” en las siguientes ecuaciones cuadráticas:

(I) $x^2 + 3x = 0$
 (II) $1 - x^2 = 0$

En la ecuación (I) tenemos:

$$x^2 + 3x = 0$$

El término cuadrático es x^2 . ¿Cuál es el coeficiente cuadrático si no lo hemos escrito? Evidentemente es el 1 (¡¡no el 0!!) porque la expresión “ x^2 ” es idéntica a “ $1x^2$ ” (pero no a “ $0x^2$ ”). Tengamos en cuenta que si hubiéramos tenido un valor 0 (cero) para “a”, entonces la ecuación habría quedado simplemente “ $3x=0$ ” sin molestarnos en escribir el término “ $0x^2$ ” y ya no sería una cuadrática.

Pasando a la “c”, vemos que ella sí vale cero porque la “c” es todo el término independiente y, si no figura escrita es porque todo el término (que es la “c”), vale cero.

De modo que la ecuación $x^2 + 3x = 0$ se podría escribir (“sin ahorrar tinta”) así:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1x^2 & + & 3x & + & 0 & = & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 a & & b & & c & &
 \end{array}$$

¿Está claro?

Veamos el otro ejemplo: la ecuación (II)

$$1 - x^2 = 0$$

En este caso el término que no está escrito es el lineal. Si “bx” no figura es porque vale “0x” y por lo tanto vale $b = 0$. Por supuesto el término independiente vale $c = 1$.

Con respecto al valor de “a” simplemente debemos notar que “-x²” es lo mismo que “-1x²” con lo cual estaremos de acuerdo en que “a = -1”.

En resumen, la ecuación:

$$1 - x^2 = 0$$

puede escribirse con mucha prolijidad así:

$$\begin{array}{ccc} -1x^2 + 0x + 1 = 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a \quad \quad b \quad \quad c \end{array}$$

Nos queda por ver cómo encarar una ecuación cuadrática cuando no viene presentada en la forma canónica:

Obviamente lo primero es tratar de llevarla a la forma polinómica usando toda la operatoria disponible.

Ejemplo 1: $(3x + 1)^2 + 2x = (5x + 1)^2 - 18$

Desarrollamos el cuadrado de cada binomio:

$$\underline{(3x)^2 + 2(3x)(1) + (1)^2} + 2x = \underline{(5x)^2 + 2(5x)(1) + (1)^2} - 18$$

$$\underline{9x^2 + 6x + 1} + 2x = \underline{25x^2 + 10x + 1} - 18$$

Reducimos términos semejantes en cada miembro:

$$9x^2 + 8x + 1 = 25x^2 + 10x - 17$$

“Pasamos” todos los términos al miembro izquierdo de la ecuación:

$$9x^2 + 8x + 1 - 25x^2 - 10x + 17 = 0$$

y reducimos términos semejantes:

$$-16x^2 - 2x + 18 = 0$$

Ya tenemos la ecuación en forma clásica. Sus coeficientes son:

$$a = -16 \quad ; \quad b = -2 \quad ; \quad c = 18$$

Los reemplazamos en la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-16) \cdot 18}}{2(-16)} = \frac{2 \pm \sqrt{1156}}{-32} = \frac{2 \pm 34}{-32} \\
 x &= \frac{2 + 34}{-32} \quad \vee \quad x = \frac{2 - 34}{-32} \\
 x &= \frac{36}{-32} = \frac{-18}{16} \quad \vee \quad x = \frac{-32}{-32} = 1
 \end{aligned}$$

y ya tenemos el conjunto solución

$$S = \{-18/16 ; 1\}.$$

Ejemplo 2:

$$(2x - 3)^2 + 4x = 4(x - 5)^2$$

Desarrollamos los cuadrados

$$4x^2 - 12x + 9 + 4x = 4(x^2 - 10x + 25)$$

Aplicamos la distributiva en el miembro derecho

$$4x^2 - 12x + 9 + 4x = 4x^2 - 40x + 100$$

Reducimos términos semejantes en cada miembro:

$$4x^2 - 8x + 9 = 4x^2 - 40x + 100$$

“Pasamos” todos los términos al miembro izquierdo de la ecuación:

$$\underline{4x^2} - 8x + 9 - \underline{4x^2} + 40x - 100 = 0$$

Y vemos que se anulan los términos cuadráticos:

$$32x - 91 = 0$$

Es una ecuación lineal. Como en cada paso hemos ido obteniendo ecuaciones equivalentes a la original, quiere decir que la ecuación original también era lineal (sólo aparentemente era cuadrática). La resolución termina así:

$$32x - 91 = 0$$

$$32x = 91$$

$$x = 91/32$$

Y el conjunto solución de la ecuación original es:

$$S = \{91/32\}$$

Ejemplo 3:

$$\frac{1}{x} + x = 2$$

Dejamos a izquierda sólo el término “ $\frac{1}{x}$ ”. Queda entonces:

$$\frac{1}{x} = 2 - x$$

Pasamos multiplicando a derecha la "x" del denominador de la izquierda *(tengamos en cuenta que la nueva ecuación debe tener prohibido el valor $x = 0$ para ser equivalente a la ecuación anterior - que también tiene esa prohibición por hallarse la "x" en el divisor-)*.

$$1 = (2 - x) x \quad (x \neq 0)$$

Aplicamos distributiva en el miembro derecho:

$$1 = 2x - x^2 \quad (x \neq 0)$$

Escribimos en forma canónica pasando todo a la izquierda:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (x \neq 0)$$

Ahora ya es rutina:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Con estos valores calculamos:

$$\begin{cases} -b = 2 \\ b^2 = 4 \\ 4ac = 4 \\ 2a = 2 \end{cases}$$

que al ser llevados a la fórmula resolvente, nos dan:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x = 1$$

$$S = \{ 1 \}$$

La realización del siguiente trabajo le permitirá comprender aspectos teóricos y prácticos de los contenidos explicados en el material de lectura.



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 11: Ecuaciones de segundo grado

Consigna

Resuelva las siguientes ecuaciones, indicando claramente el conjunto solución.

- 1) $5x^2 - 11x + 2 = 0$
- 2) $x^2 - 9x + 8 = 0$
- 3) $3x^2 - 8x - 3 = 0$
- 4) $4x^2 + 5x = 0$ (aquí: $c=0$)
- 5) $2 - 3x + 8x^2 = 0$ (ordene!!)
- 6) $-7x + 8x^2 + 1 = 0$ (ordene!!)
- 7) $2x^2 - 12 = 0$
- 8) $3x^2 + 20 = 0$
- 9) $(2x + 8) * (3x - 9) = 0$
- 10) $(4x - 5) * (2x + 7) * (1 - x) = 0$



- 11) $3x^2 - 9x = 0$
- 12) $6x^2 - 8x = 0$
- 13) $(6x^2 - 7x + 1) * (2x^2 - 5x + 2) = 0$
- 14) $(x^2 - x - 2) * (x^2 + x - 2) = 0$
- 15) $3x^3 + 10x^2 + 3x = 0$
- 16) $2x^4 + 7x^3 + 3x^2 = 0$ (piense!!)
- 17) $6x^3 + 7x^2 + x = 0$
- 18) $2(x + 1) + 3(x + 3) = 5(x + 2)^2$
- 19) $3(x + 5)^2 = 5(x - 1)^2$

EVALUACIÓN

A continuación le presentamos nuestras respuestas.

Orientaciones para la corrección

- 1) $\{ 2 ; \frac{1}{5} \}$
- 2) $\{ 1 ; 8 \}$
- 3) $\{ 3 ; -\frac{1}{3} \}$
- 4) $\{ 0 ; -\frac{5}{4} \}$
- 5) $S = \emptyset$
- 6) $\{ \frac{7 + \sqrt{17}}{16} ; \frac{7 - \sqrt{17}}{16} \}$



$$7) \{ +\sqrt{6}; -\sqrt{6} \}$$

$$8) S = \emptyset$$

$$9) \{ -4 ; 3 \}$$

$$10) \{ \frac{5}{4} ; -\frac{7}{2} ; 1 \}$$

$$11) \{ 0 ; 3 \}$$

$$12) \{ 0 ; \frac{4}{3} \}$$

$$13) \{ 2 ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{2} ; 1 \}$$

$$14) \{ -1 ; 1 ; -2 ; 2 \}$$

$$15) \{ -3 ; -\frac{1}{3} ; 0 \}$$

$$16) \{ 0 ; -3 ; -\frac{1}{2} \}$$

$$17) \{ -\frac{1}{6} ; -1 ; 0 \}$$

$$18) \{ \frac{-15 + 3\sqrt{5}}{10} ; \frac{-15 - 3\sqrt{5}}{10} \}$$

$$19) \{ 10 + 3\sqrt{15} ; 10 - 3\sqrt{15} \}$$

3. Ecuación cúbica incompleta



Resolver una ecuación de tercer grado ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$)) es una tarea cuya dificultad no se trata en la escuela media.

Existe un caso en que el término independiente es nulo ($ax^3 + bx^2 + cx = 0$ ($a \neq 0$)), lo que permite factorizar de modo muy simple el trinomio cúbico restante que figura a la izquierda del signo igual: $ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c)$. Esto permite aplicar la propiedad, que vimos anteriormente, según la cual $A \cdot B = 0$ equivale a $A = 0$ ó $B = 0$.

Orienta el estudio de estos contenidos con la siguiente sugerencia:



Guía para la lectura

Cuando trabaje con este material, deténgase en la etapa de resolución de la ecuación cúbica incompleta presentada por el autor.

ECUACIÓN CÚBICA INCOMPLETA (con término independiente nulo)

Si bien la ecuación cúbica general:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (\text{con } a \neq 0)$$

es un tema que no vamos a tratar en este trabajo, hay casos en que la cúbica está incompleta y podemos resolverla con las herramientas que ya tenemos.

Entre esos casos está el de la ecuación cúbica con término independiente cero:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \quad (\text{con } a \neq 0)$$

En este caso podemos factorizar el miembro izquierdo usando el primer caso ("factor común").

En efecto, el factor "x" está en los tres términos de la izquierda. Podemos entonces "sacar factor común x" y obtener:

$$x(ax^2 + bx + c) = 0.$$

Ahora tengo expresado el miembro izquierdo como un producto de dos factores.

Pero este producto está igualado a cero. Vale decir que podemos aplicar la propiedad ya vista:

$$a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Veamos cómo se trabaja: $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ ($a \neq 0$)

$$x(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$x = 0 \vee ax^2 + bx + c = 0$$

y ahora sólo se necesita aplicar la fórmula en la ecuación de la derecha. Resolvamos un ejemplo:

$$2x^3 - 7x^2 + 3x = 0$$

Factorizamos el miembro izquierdo:

$$x(2x^2 - 7x + 3) = 0$$

Aplicamos la propiedad ($a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$):

$$x = 0 \vee 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{7+5}{4} \vee x = \frac{7-5}{4}$$

$$x = 0 \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{2}$$

El conjunto solución es, entonces: $S = \left\{ 0; 3; \frac{1}{2} \right\}$

Le recomendamos aplicar estos conceptos matemáticos a través del siguiente trabajo.



Trabajo práctico

Trabajo práctico Nº 12: Ecuación cúbica incompleta

Consigna

Resuelva los siguientes ejercicios (con ec. Cuadráticas y cúbicas incompletas):

- 1) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
- 2) $3x^2 - 10x + 3 = 0$
- 3) $x^2 - 7x = 0$
- 4) $-3x^2 + 12 = 0$
- 5) $5x^3 - 4x^2 - x = 0$
- 6) $2x^3 + 9x^2 = 0$
- 7) $x^3 + x = 0$

EVALUACIÓN

Una vez que haya finalizado la tarea, compare sus resultados con la Grilla para la Autocorrección de este TP que se encuentra a continuación.

Orientaciones para la corrección

A continuación, le presentamos nuestras respuestas.

- 1) $S = \{-3; -1/2\}$
- 2) $S = \{3; 1/3\}$
- 3) $S = \{0; 7\}$
- 4) $S = \{-2; 2\}$
- 5) $S = \{-1/5; 0; 1\}$
- 6) $S = \{0; -9/2\}$
- 7) $S = \{0\}$



4. Ecuación bicuadrada

Una ecuación del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) se llama bicuadrada y, si bien es una ecuación de cuarto grado, se puede pensar como una de segundo grado siempre que se tome como incógnita a x^2 .

En efecto, pensada de esta manera podríamos reescribirla así:

$$a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

y, a continuación, aplicar la fórmula para resolverla del modo habitual.

Explicaremos a continuación las particularidades de la ecuación bicuadrada. Como siempre le sugerimos que focalice su estudio.



Guía para la lectura

Al abordar el texto, focalice su atención en el método que se emplea para resolver ecuaciones bicuadradas.

ECUACIÓN BICUADRADA

Se llama así a una ecuación de este tipo: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (con $a \neq 0$)

Esta ecuación puede re escribirse teniendo en cuenta que: $x^4 = (x^2)^2$

En efecto, puede ponerse así:

$$a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0$$

Escrita de esta forma puede pensarse como una cuadrática donde la incógnita es x^2 :

$$a \boxed{x^2}^2 + b \boxed{x^2} + c = 0$$

Puedo entonces aplicar la conocida fórmula resolvente:



$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y una vez que conozco el valor (o los valores) de x^2 , puedo terminar de despejar la x .

Apliquemos esta estrategia a un ejemplo concreto.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Como $x^4 = (x^2)^2$ podemos escribir:

$$(x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = 0$$

Ésta es una cuadrática donde:

$$a = 1; b = -5; c = 4$$

Por lo tanto: $-b = 5$; $b^2 = 25$; $2a = 2$ y $4ac = 16$.

Aplicamos la fórmula (recordando que la incógnita es x^2 y no x como antes).

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x^2 = \frac{5+3}{2} \vee x^2 = \frac{5-3}{2}$$

$$x^2 = \frac{8}{2} = 4 \vee x^2 = \frac{2}{2} = 1$$

Entonces ya sabemos que x^2 puede valer:

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 1$$

Sólo falta un poco de trabajo para despejar la x :

$$x = \pm\sqrt{4} \vee x = \pm\sqrt{1}$$

$$x = \pm 2 \vee x = \pm 1$$

Es decir:

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = -1$$

El conjunto solución queda:

$$S = \{ 2; -2; 1; -1 \}$$

Veamos otro ejemplo con distinto final: $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

Puedo describir la ecuación así: $2(x^2)^2 - 7(x^2) - 4 = 0$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4}$$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} = \frac{7-9}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$x^2 = 4 \vee x^2 = -\frac{1}{2}$$

La última ecuación ($x^2 = -\frac{1}{2}$) tiene conjunto solución vacío, porque ningún real al cuadrado puede ser negativo.

Entonces la resolución continúa: $x = \pm\sqrt{4}$

$$x = \pm 2$$

Con lo cual nos queda como conjunto solución: $S = \{2; -2\}$

Incluso puede suceder que todo el conjunto solución sea vacío, como en el ejemplo siguiente:

$$3x^4 + 7x^2 + 2 = 0$$

Re expresamos: $3(x^2)^2 + 7(x^2) + 2 = 0$

$$x^2 = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}$$



$$x^2 = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6} = \frac{-7+5}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$
$$\frac{-7-5}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$x^2 = -\frac{1}{3} \vee x^2 = -2$$

Ambas ecuaciones tienen conjunto solución vacío. Por lo tanto, el conjunto solución general es vacío, $S = \emptyset$. De las dos ecuaciones que se obtienen puede suceder que ambas tengan solución real, que sólo una la tenga o que ninguna de las dos la tenga.

Le recomendamos, ahora, efectuar el próximo trabajo pues le permitirá aplicar lo estudiado.



Trabajo práctico

Trabajo práctico N° 13: Ecuación bicuadrada

Consigna

Resuelva los siguientes ejercicios:

- 1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- 2) $2x^4 - 17x^2 - 9 = 0$
- 3) $x^4 + x^2 + 3 = 0$
- 4) $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$
- 5) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$

EVALUACIÓN

Nuestras respuestas son las siguientes.

Orientaciones para la corrección

1) $S = \{-2; 2; -1; 1\}$

2) $S = \{-3; 3\}$

3) $S = \emptyset$

4) $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

5) $S = \emptyset$

5. Séptimo caso de factorio

En algunos casos un polinomio de segundo grado tiene una o dos raíces reales. Es posible, en ese caso, factorizarlo de modo que quede reexpresado como el producto de un real (que es el mismo coeficiente cuadrático) por dos binomios lineales (es decir, de primer grado). Este es el séptimo caso de factorio, también conocido como "factorio del trinomio cuadrático".

Séptimo caso de factorio

Consideremos el siguiente trinomio cuadrático: $2x^2 - 7x + 3$.

Si hallamos sus raíces (es decir, si resolvemos la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$) encontramos que ellas son:

$$x_1 = 3 \qquad \qquad y \qquad \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

Entonces el séptimo caso de factorio (que estamos presentando) "nos dice" que el trinomio $2x^2 - 7x + 3$ se puede reescribir -factorizándolo- de esta forma:

$$2x^2 - 7x + 3 = 2(x - 3)(x - \frac{1}{2})$$

Lo primero que debemos hacer es verificar que esto es correcto. Para ello, aplicaremos la propiedad distributiva del producto respecto de la suma o resta. Hagámoslo:

$$\begin{aligned} 2(x - 3)(x - \frac{1}{2}) &= (2x - 6)(x - \frac{1}{2}) = \\ &= (2x)(x) + (2x)(-\frac{1}{2}) + (-6)(x) + (-6)(-\frac{1}{2}) = \end{aligned}$$

$$= 2x^2 - x - 6x + 3 = 2x^2 - 7x + 3$$

Vale decir que:

$$2(x - 3)(x - \frac{1}{2}) = 2x^2 - 7x + 3$$

Con lo cual confirmamos que se cumple lo que queríamos verificar.

No sólo para este caso particular es posible esta factorización.

En general, si el trinomio $ax^2 + bx + c$ tiene las raíces reales " x_1 " y " x_2 " (o sea si x_1 y x_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$) entonces se puede colocar:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Veamos otro ejemplo:

El trinomio $x^2 + 3x - 4$ tiene las siguientes dos raíces:

$$x_1 = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = -4$$

(es decir al resolver la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$ se hallan esas dos soluciones: $S = \{1; -4\}$).

Entonces, usando la fórmula para factorizar el trinomio y teniendo en cuenta que en el trinomio " $x^2 + 3x - 4$ " vale $a=1$, podemos escribir:

$$x^2 + 3x - 4 = 1(x - 1)(x - (-4))$$

y, si lo preferimos,

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$$

Para verificar la factorización sencillamente aplicamos distributiva a la derecha:

$$\begin{aligned} (x - 1)(x + 4) &= x*x + x*4 + (-1)*x + (-1)*4 = \\ &= x^2 + 4x - x - 4 = x^2 + 3x - 4 \end{aligned}$$

con lo que verificamos que la factorización es correcta.

Ahora bien, ¿cómo hacemos para factorizar un trinomio como $3x^2 - 11x - 4$ si no conocemos sus raíces?

La respuesta es sencilla: planteamos y resolvemos la ecuación $3x^2 - 11x - 4 = 0$. Con eso hallamos las dos raíces " x_1 " y " x_2 " (siempre que existan) y luego aplicamos la fórmula de factorización.

Comencemos por plantear la ecuación: $3x^2 - 11x - 4 = 0$



en este caso $\begin{cases} a = 3 \\ b = -11 \\ c = -4 \end{cases}$

a partir de obtenemos:

$$-b = 11$$

$$b^2 = (-11)^2 = 121$$

$$4ac = 4 \cdot 3 \cdot (-4) = -48$$

$$2a = 2 \cdot 3 = 6$$

y la ecuación tiene las soluciones:

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - (-48)}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{11 \pm 13}{6}$$

$$x = \frac{11+13}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \text{ó} \quad x = \frac{11-13}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Entonces tenemos las raíces:

$$x_1 = 4 \quad \text{ó} \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

Aplicamos ahora la fórmula

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 3 & -11 & -4 & 3 & 4 & & -1/3 \end{array}$$

$$3x^2 - 11x - 4 = 3(x - 4)(x - (-1/3))$$

Y ya hemos factorizado el trinomio, que podemos escribir más económicamente:

$$3x^2 - 11x - 4 = 3(x - 4)(x + 1/3)$$

Veamos otro ejemplo:

Se desea factorizar el siguiente trinomio cuadrático:

$$5x^2 + x - 1$$

También en este caso tenemos que hallar primero las raíces para luego aplicar la fórmula.

$$\text{Resolvemos la ecuación: } 5x^2 + x - 1 = 0$$

donde $a = 5$, $b = 1$, $c = -1$ con lo cual:

$$-b = -1 ; b^2 = (1)^2 = 1; \quad 4ac = 4 \cdot 5 \cdot (-1) = -20 ; \quad 2a = 2 \cdot 5 = 10$$

entonces, la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (-20)}}{10} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10}$$

las soluciones son:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{10} \quad y \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{10}$$

Al aplicar la fórmula tenemos:

$$5x^2 + x - 1 = 5 \left(x - \frac{-1 + \sqrt{21}}{10} \right) \left(x - \frac{-1 - \sqrt{21}}{10} \right)$$

que podría, trabajando un poco con los signos, escribirse así:

$$5x^2 + x - 1 = 5 \left(x + \frac{1 - \sqrt{21}}{10} \right) \left(x + \frac{1 + \sqrt{21}}{10} \right)$$

Por supuesto que verificar esto sería bastante más laborioso que lo fue en los casos anteriores.

Cierre de la unidad

A través del siguiente Trabajo Práctico lo invitamos a realizar ejercicios integradores de los contenidos desarrollados en esta unidad.

Consignas

Resuelva los siguientes ejercicios:

$$1) 4 - \frac{5 - 4x}{2} = 7$$

$$2) (x + 8) + 5(x - 2) = 3(x - 6) + 4(x + 3)$$

$$3) (3x - 5) (4 - 2x) = 0$$

$$4) (6 - 3x) (2 + 7x) (x + 1) = 0$$

$$5) \frac{2 + x}{x - 3} = 0$$

$$6) 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$7) 3x^2 - 4x + 9 = 0$$

$$8) 4x^3 - 5x^2 + x = 0$$

Utilizando el séptimo caso, factorice los siguientes trinomios:

$$9) 2x^2 - 7x + 3$$

$$10) 4x^3 - 5x^2 + x = 0$$

Controle y regule sus procesos de aprendizaje. No espere comprensiones mágicas. Trabaje para su logro.

Recuerde que en Matemática la comprensión de los conceptos es un paso previo y fundamental para la automatización de los procedimientos y la posibilidad de resolver los nuevos desafíos que va presentando su aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

Veiga, D. Laboratorio de Cálculo. Buenos Aires, UAI, 2001.

Haeüssler, F. Matemáticas para administración y economía. Prentice Hall. 2003.