Concepto de Módulo –Intervalos en R

Primeras ideas

- ✓ El módulo de un número real se puede interpretar como la distancia a cero.
- ✓ $|3| = 3$ la distancia a cero es 3. Por lo tanto, el módulo es siempre mayor o igual que cero
- ✓ Existe otro valor cuya distancia a cero es 3, en este caso : $|-3| = 3$

Definiciones formales:

- Si $|x| \geq 0$ para todo número real
- $|x| = |-x|$ para todo número real

- $|x + y| = |x| + |y|$, si $x \; e \; y$ son números reales. Esta proposición es Falsa. Contraejemplo si $x = 3 \; e \; y = -8$ resulta $|3 + (-8)| = |3| + |-8|$ y como vemos esto es falso pues $|3 + (-8)| = |-5| = 5$ en cambio $|3| + |-8| = 3 + 8 = 11$
- $|x.y| = |x|.|y|$ si $x \; e \; y$ son números reales. Esta proposición es verdadera para todo par de números reales

Concepto de intervalo

Consideramos el concepto de intervalo como un subconjunto de números reales y en ese sentido definimos:

Dados los números reales a y b, con la condición de $a < b$

- (a, b) es el subconjunto de números reales comprendidos entre a y b. $(a, b) = \{x, x \in R \wedge a < x < b\}$ *Intervalo abierto en los extremos.*

- $[a, b]$ es el subconjunto de números reales comprendidos entre a y b. $[a, b] = \{x, x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$ *Intervalo cerrado en los extremos.*

- $(a, b]$ es el subconjunto de números reales comprendidos entre a y b. $(a, b] = \{x, x \in R \wedge a < x \leq b\}$ *Intervalo semiabierto o semicerrado en uno de los extremos. Análogamente para* $[a, b)$

Consideramos también los intervalos infinitos:

Si (a, ∞)=$\{x, x \in R,\; a < x\}$ Análogamente para $(-\infty, b)$=$\{x, x \in R,\; x < b\}$
O bien cerrado en el extremo:
$[a, +\infty)$=$\{x, x \in R,\; a \leq x\}$ Análogamente para $(-\infty, b]$=$\{x, x \in R,\; x \leq b\}$

Observación: El símbolo ∞ no representa un valor sino la expresión de que los valores del conjunto tienden a infinito.

Propiedades del Módulo, en relaciones de desigualdad, habilita el intervalo como subconjunto que define los valores que lo verifican

- $Si \; a > 0, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ Esta expresión indica la existencia de un intervalo $x \in [-a, a]$

- $Si\ a > 0, |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ Esta expresión indica la existencia de un intervalo $x \in (-a, a)$
- $Si\ a > 0, |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$ análogamente $x \in (-\infty, a] \cup [a, +\infty)$
- $Si\ a > 0, |x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$ análogamente $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$

En esta tabla puedes ver la escritura como intervalo real delos siguientes conjuntos, completa las celdas restantes

Conjunto expresado por su propiedad	Desarrollo de la propiedad o condición	Construcción del intervalo
$\{x \in R, \|x\| < 1\}$	$-1 < x < 1$	$(-1+0, 1+0) = (-1,1)$
$\{x \in R, 0 < \|x-2\| < 1\}$	$-1 < x-2 < 1 \wedge x \neq 2$ Resulta $-1+2 < x < 1+2 \wedge x \neq 2$	$(-1+2, 1+2) = (1,3)$ Con $x \neq x_0$ en este caso $x \neq 2$ Resulta $(1,3) - \{2\}$ Se puede escribir como $(1,2) \cup (2,3)$
$\{x \in R, \|x+3\| > 1\}$		
	$\frac{5}{2} < x < 3$	
		$(-3,1) \cup (1,6)$