

ACTIVIDAD 1

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = -11 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1+1+8) - (-2+2-2) = (10) - (-2) = 12$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -11 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1+2-44) - (11-2-4) = (-43) - (5) = -48$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -11 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2-11-4) - (4-22+1) = (-17) - (-17) = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -11 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (11-1+8) - (2+2-22) = (18) - (-18) = 36$$

Solución

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-48}{12} = -4$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{12} = 0$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{36}{12} = 3$$

ACTIVIDAD 2

$$\begin{aligned} 0x + 0y &= 2 && \text{Incompatible} \\ 2x &= 6 && \text{Compatible Determinado} \\ 0x + 0y &= 0 && \text{Compatible Indeterminado} \end{aligned}$$

ACTIVIDAD 3

Método de Cramer

Punto (a)

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

Determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$$

Soluciones

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4}$$

////////////////////////////////////

Punto (b)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ 3x + 6y = 8 \end{cases}$$

Determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Solución

*No se puede proseguir.
 El determinante es cero,
 de continuar, implicaría
 divisiones sobre cero.*

Analizar

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 32 = -8$$

CONCLUSIÓN:

*Al menos uno de los otros determinantes no es cero.
 Por tanto, por sus propiedades, el sistema no tiene solución.
 Es decir, es un sistema incompatible.*

////////////////////////////////////

Punto (c)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2z = 3 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

Desarrollo

Para $x + y = 1$
 $x = (1 - y)$

Para $x - 2z = 3$ aplicando $x = (1 - y)$
 $(1 - y) - 2z = 3$

$$y = 1 - 3 - 2z$$

$$y = (-2 - 2z)$$

Para $y + 4z = 1$
 $4z = 1 - y$
 $z = \left(\frac{1}{4} - \frac{y}{4} \right)$

Para $z = \left(\frac{1}{4} - \frac{y}{4} \right)$ aplicando $y = (-2 - 2z)$

$$z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-2 - 2z)$$

$$z = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \right)$$

$$z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$$

$$z = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}z$$

$$z - \frac{1}{2}z = \frac{3}{4}$$

$$\frac{z}{2} = \frac{3}{4}$$

$$z = \frac{3}{2}$$

Para $y = (-2 - 2z)$ aplicando $z = \frac{3}{2}$

$$y = -2 - 2\frac{3}{2}$$

$$y = -2 - 3$$

$$y = -5$$

Para $x = (1 - y)$ aplicando $y = -5$

$$x = 1 - (-5)$$

$$x = 6$$

Solución

$$x = 6 \wedge y = -5 \wedge z = \frac{3}{2}$$

SOLUCIÓN USANDO MATRICES

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2z = 3 \\ y + 4z = 1 \end{cases} \text{ Prolijando: } \begin{cases} 1x + 1y + 0z = 1 \\ 1x + 0y - 2z = 3 \\ 0x + 1y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0-2+4) = (0) - (2) = -2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0+0-2) - (0-2+12) = (-2) - (10) = -12$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (12+0+0) - (0-2+4) = (12) - (2) = 10$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0+1+0) - (0+3+1) = (1) - (4) = -3$$

Solución

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-12}{-2} = 6$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{10}{-2} = -5$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

////////////////////////////////

Punto (d)

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y - z = 4 \\ -x - y + z = -4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 1 + 3) - (-1 + 2 + 3) = (4) - (4) = 0 \quad (1)$$

Solución

*No se puede proseguir.
 El determinante es cero,
 de continuar, implicaría
 divisiones sobre cero.*

ANÁLISIS

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (7 - 4 + 12) - (-4 + 7 + 12) = (15) - (15) = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (8 - 4 + 7) - (-4 + 8 + 7) = (11) - (11) = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (-8 - 7 - 12) - (-7 - 8 - 12) = (-27) - (-27) = 0$$

CONCLUSIÓN

*Si todos los otros determinantes son ceros, el sistema tiene infinitas soluciones.
 Es decir, el sistema es compatible indeterminado.*

SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE GAUSS – JORDAN

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right) F1/2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right) F2-F1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$F3+F1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) F2/\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$F3-\left(\frac{1}{2}\right) F2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) F1-\left(\frac{3}{2}\right) F2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ANÁLISIS

Fila cero en matrices reducidas indica infinitas soluciones.

Es decir, es un sistema compatible indeterminado.

////////////////////////////////////

Punto (e)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

Desarrollo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+0+1) - (0+0+0) = (2) - (0) = 2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3+0+4) - (0+0+5) = (7)-(5) = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (5+0+3) - (0+4+0) = (8)-(4) = 4$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (4+0+5) - (3+0+0) = (9)-(3) = 6$$

Soluciones

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3$$

////////////////////////////////////

Punto (f)

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x + y - z = 4 \\ -x - y + z = -4 \end{cases}$$

(ya realizado en el punto d)