Lectura requerida

Ecuación Bicuadrada. En Veiga, D. Laboratorio de Cálculo. UAI, Buenos Aires, 2001.

ECUACIÓN BICUADRADA

Se llama así a una ecuación de este tipo: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (con $a \neq 0$)
Esta ecuación puede re escribirse teniendo en cuenta que: $x^4 = (x^2)^2$
En efecto, puede ponerse así:

$$a(x^2)^2 + b(x^2) + c = 0$$

Escrita de esta forma puede pensarse como una cuadrática donde la incógnita es x^2:

$$a\,\boxed{x^2}^2 + b\,\boxed{x^2} + c = 0$$

Puedo entonces aplicar la conocida fórmula resolvente:

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y una vez que conozco el valor (o los valores) de x^2, puedo terminar de despejar la x.

Apliquemos esta estrategia a un ejemplo concreto.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Como $x^4 = (x^2)^2$ podemos escribir:

$$(x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = 0$$

Ésta es una cuadrática donde:

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 4$$

Por lo tanto: $-b = 5$; $b^2 = 25$; $2a = 2$ y $4ac = 16$.

Aplicamos la fórmula (recordando que la incógnita es x^2 y no x como antes).

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x^2 = \frac{5+3}{2} \vee x^2 = \frac{5-3}{2}$$

$$x^2 = \frac{8}{2} = 4 \vee x^2 = \frac{2}{2} = 1$$

Entonces ya sabemos que x^2 puede valer:

$$x^2 = 4 \vee x^2 = 1$$

Sólo falta un poco de trabajo para despejar la x:

$$x = \pm\sqrt{4} \vee x = \pm\sqrt{1}$$

$$x = \pm 2 \vee x = \pm 1$$

Es decir:

$$x = 2 \vee x = -2 \vee x = 1 \vee x = -1$$

El conjunto solución queda: $S = \{\,2; -2\,; 1\,; -1\}$

Veamos otro ejemplo con distinto final: $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

Puedo rescribir la ecuación así: $2(x^2)^2 - 7(x^2) - 4 = 0$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.(-4)}}{2.2} = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{4}$$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} = \begin{array}{l} \dfrac{7-9}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{7+9}{4} = \dfrac{16}{4} = 4 \end{array}$$

$$x^2 = 4 \vee x^2 = -\frac{1}{2}$$

La última ecuación ($x^2 = -\frac{1}{2}$) tiene conjunto solución vacío, porque ningún real al cuadrado puede ser negativo.

Entonces la resolución continúa: $x = \pm\sqrt{4}$

$$x = \pm 2$$

Con lo cual nos queda como conjunto solución: $S = \{2; -2\}$

Incluso puede suceder que todo el conjunto solución sea vacío, como en el ejemplo siguiente:

$$3x^4 + 7x^2 + 2 = 0$$

Re expresamos: $$3(x^2)^2 + 7(x^2) + 2 = 0$$

$$x^2 = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.3.2}}{2.3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6}$$

$$x^2 = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6} = \begin{matrix} \dfrac{-7+5}{6} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-7-5}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2 \end{matrix}$$

$$x^2 = -\frac{1}{3} \vee x^2 = -2$$

Ambas ecuaciones tienen conjunto solución vacío. Por lo tanto, el conjunto solución general es vacío. $S = \varnothing$

Lectura requerida

Ecuación cúbica incompleta. En Veiga, D. Laboratorio de Cálculo. UAI, Buenos Aires, 2001.

ECUACIÓN CÚBICA INCOMPLETA
(con término independiente nulo)

Si bien la ecuación cúbica general:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{(con } a \neq 0\text{)}$$

es un tema que no vamos a tratar en este trabajo, hay casos en que la cúbica está incompleta y podemos resolverla con las herramientas que ya tenemos.

Entre esos casos está el de la ecuación cúbica con término independiente cero:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \quad \text{(con } a \neq 0\text{)}$$

En este caso podemos factorizar el miembro izquierdo usando el primer caso ("factor común").

En efecto, el factor "*x*" está en los tres términos de la izquierda. Podemos entonces "sacar factor común *x*" y obtener:

$$x(ax^2 + bx + c) = 0.$$

Ahora tengo expresado el miembro izquierdo como un producto de dos factores.

Pero este producto está igualado a cero. Vale decir que podemos aplicar la propiedad ya vista:

$$a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$$

Veamos cómo se trabaja: $\quad ax^3 + bx^2 + cx = 0 \qquad (a \neq 0)$

$$x(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$x = 0 \vee ax^2 + bx + c = 0$$

y ahora sólo se necesita aplicar la fórmula en la ecuación de la derecha.
Resolvamos un ejemplo:

$$2x^3 - 7x^2 + 3x = 0$$

Factorizamos el miembro izquierdo:

$$x(2x^2 - 7x + 3) = 0$$

Aplicamos la propiedad ($a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$):

$$x = 0 \vee 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = 0 \vee x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4.2.3}}{2.2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$x = 0 \vee x = \frac{7 + 5}{4} \vee x = \frac{7 - 5}{4}$$

$$x = 0 \vee x = 3 \vee x = \frac{1}{2}$$

El conjunto solución es, entonces: $S = \left\{ 0\,;3\,;\frac{1}{2} \right\}$