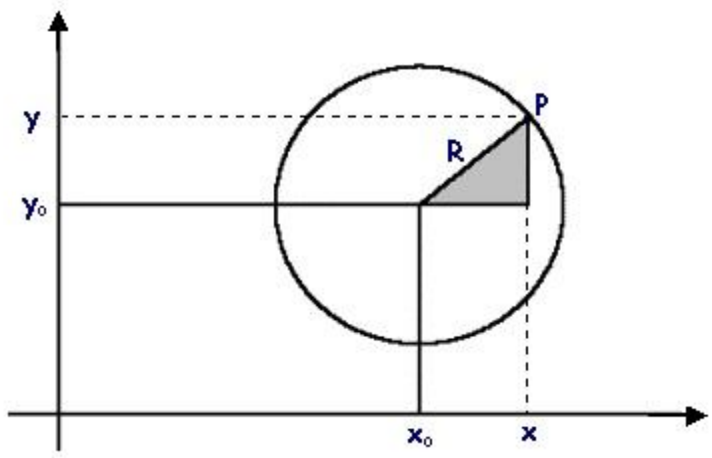
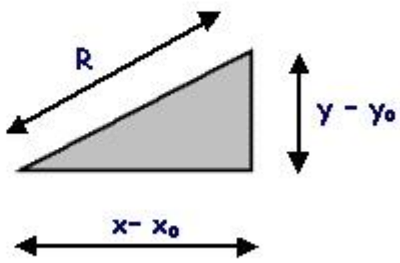
CIRCUNFERENCIA DE CENTRO EN (Xo; Yo) Y RADIO R

En este caso, cualquier punto de la circunferencia tendrá una distancia R hasta el centro de ésta.
Basta observar con cuidado el gráfico siguiente para poder encontrar una figura que nos permita determinar cuál es la ecuación.



Para facilitar el análisis aislemos el triángulo sombreado:



Ahora simplemente aplicamos el teorema de Pitágoras y obtenemos:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2$$

Ésta es la condición que cumple cualquier punto de la circunferencia de centro en (x_o; y_o) y de radio R. Por eso ésta es la ecuación de esa circunferencia.
Por supuesto, en caso de que el centro esté en el origen, el centro será (0; 0) y la ecuación se reduce a: $x^2 + y^2 = R^2$

<u>Pregunta:</u> ¿cuál es la ecuación de la circunferencia que tiene centro en A= (2; 3) y que pasa por B = (5; 1)?

<u>Respuesta:</u>

Ya tenemos el centro, sabemos que $x_o = 2$, $y_o = 3$.

Podemos hallar el radio que es la distancia entre (2; 3) y (5; 1). Para ello:

$dist^2(A; B) = (2-5)^2+(3-1)^2 = 9 + 4 = 13$

Si, R = dist (A; B) entonces $R^2=dist^2(A; B) =13$, con lo cual ya tenemos el centro $(x_o; y_o)$ y R^2.

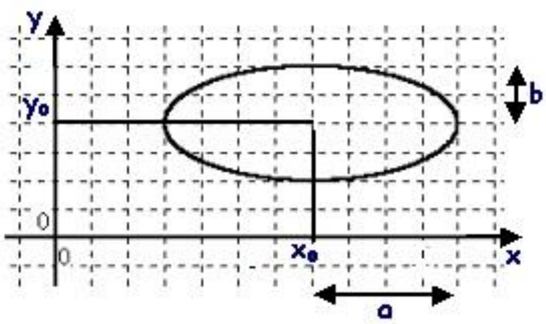
Sólo falta escribir la fórmula: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Elipse de centro $(x_o; y_o)$ y semiejes "a" (horizontal) y "b" (vertical)

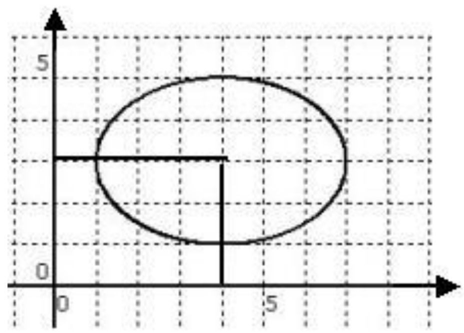
La ecuación cartesiana de esta elipse es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \quad (a>0 y\ b>0)$$

La gráfica de la elipse correspondiente se da a continuación:



Pregunta: ¿cuáles son los valores de x_0, y_0, a, b para esta elipse? ¿Y cuál es su ecuación?



Respuesta:

El centro es (4; 2) o sea x_0=4; y_0=2. Además, el semieje horizontal es a=3 y el semieje vertical es b=2.

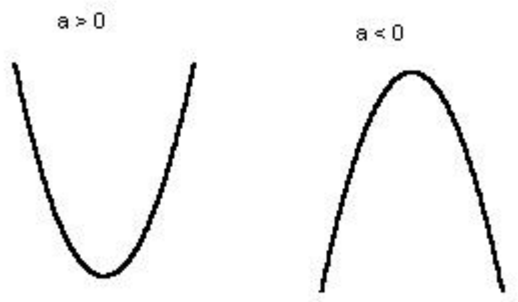
La ecuación queda entonces: $\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

Parábola de eje vertical

La primera forma que veremos de la ecuación de una parábola de eje vertical es:

$y = a\,x^2 + b\,x + c$ ("a" no nulo).

Aquí "a" es el "coeficiente cuadrático", "b" es el coeficiente lineal y "c" es el término independiente, y "ax^2" es el término cuadrático y "bx" es el "término lineal".



El trazado de esta curva es una parábola con un eje de simetría vertical. Sus dos ramas apuntan hacia arriba (la gráfica es cóncava) si "a" es positivo y apuntan hacia abajo (la gráfica es convexa) si "a" es negativo. El siguiente gráfico muestra esto que decimos.

El valor de "c", obviamente representa la "altura" sobre el eje "y" a la cual la curva corta a ese eje. Basta pensar que para x = 0 la "y" vale $y=a.0^2+b.0+c=c$, es decir y= c para entenderlo.

En cuanto al valor de "b" se traduce geométricamente en un desplazamiento horizontal. Usted puede averiguarlo rápidamente usando un graficador (uno muy útil es el Geogebra y observando las gráficas de algunos pares de ecuaciones de este tipo.

Por ejemplo, observe el par de parábolas P_1: $y=2x^2+ 6x$ y P2: $y=2x^2- 6x$.
Y el par, P_3: $y= -2x^2+ 6x$ y P_4: $y=-2x^2-6x$. No le será difícil sacar sus propias conclusiones.

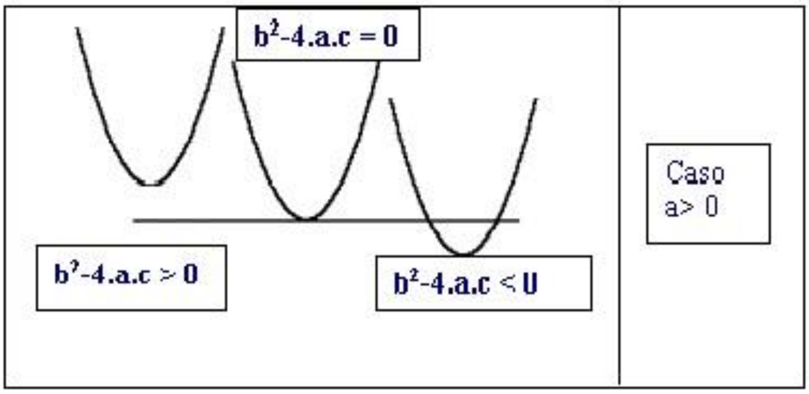
Pero será muy fácil encontrar en qué puntos corta al eje x esta parábola (los valores de "x" que corresponden a esos puntos son raíces o ceros de la

parábola). Para ello basta observar que si un punto de la parábola está en el eje x su ordenada debe valer: y=0.
Entonces es suficiente reemplazar en la ecuación de la parábola, la variable "y" por el valor 0 y hallar qué pasa con la "x".

Es decir: tomamos la ecuación "$y = a\,x^2 + b\,x + c$" y reemplazando obtenemos: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Aplicamos la conocida "fórmula de Baskara" y obtenemos los valores de "x" que verifican la ecuación.

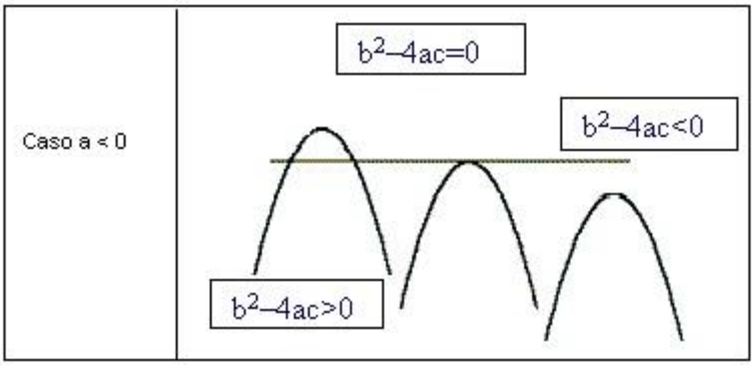
- Si $b^2-4\,a\,c < 0$, no hay soluciones reales, la parábola no corta al eje x.

- Si $b^2-4\,a\,c > 0$, hay dos soluciones reales distintas (como es usual las denominamos x_1 y x_2). La parábola corta al eje x en los puntos $(0;\ x_1)$ y $(0;\ x_2)$



- Si $b^2-4\,a\,c = 0$, la parábola corta en un solo punto: $(0;\ x_1)$–vale $x_1 = x_2$.

Además, si es a>0, es cóncava y si a<0, es convexa.



Para el caso en que a<0 tenemos las mismas posibilidades para el comportamiento de $b^2-4.a.c$

Pregunta:

¿Qué aspecto general tendrá el gráfico de la parábola cuya ecuación es:

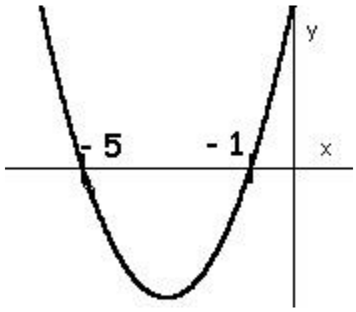
$$y = x^2 + 6x + 5?$$

Respuesta:

Los coeficientes son aquí: a = 1; b = 6; c = 5. Como a >0 la curva es cóncava con las ramas hacia arriba.
Además, b^2 -4.a.c = 6^2 – 4.1.5 = 36 –20 =16 > 0

Esto indica que la parábola corta al eje x en dos puntos distintos.

Ellos son: -5 y -1. Con lo visto hasta ahora el gráfico tiene el siguiente aspecto.



Basta observar que el vale c = 5, para saber que la parábola corta al eje "y" en el punto (0; 5).

El VÉRTICE de la parábola puede calcularse teniendo en cuenta que la recta vertical que pasa por el vértice es el eje de simetría de esta parábola. Como este eje es una recta vertical su ecuación es del tipo: x = k.

El valor de la abscisa del vértice es precisamente ese "k". Para esta parábola en particular, la X_v es el promedio de "−5" y "−1", vale decir X_v = [−5 + (−1)]/2 = −3.

La ecuación del eje es entonces:

x = – 3.

Quiere decir que si la parábola tiene dos raíces reales y distintas la X_v es entonces el promedio de las dos raíces, en símbolos $X_v = (x_1 + x_2) / 2$.

Por supuesto si b^2 -4.a.c = 0 y las dos raíces reales son iguales el promedio será entonces el mismo valor de la raíz $X_v = x_1 = x_2$.

Si calculamos el promedio de x_1 y x_2 en general obtenemos.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{(-b+\sqrt{b^2-4.a.c})}{2.a} + \frac{(-b+\sqrt{b^2-4.a.c})}{2.a}}{2} =$$

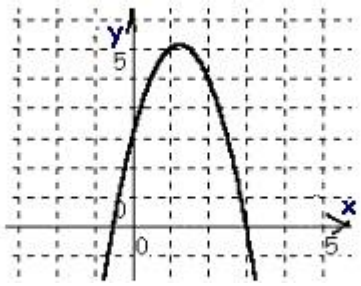
$$= \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4.a.c}-b-\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}}{2} = \frac{\frac{-b-b}{2.a}}{2} = \frac{-2.b}{4.a} = -\frac{b}{2.a}$$

Esta fórmula que nos da la abscisa del vértice: $X_v = -b/(2a)$ tiene la ventaja de no depender de si la parábola tiene o no raíces reales.

Pregunta:
¿cuál es el aspecto de la parábola de ecuación: $y = -2x^2 + 5x + 3$ y cuál es la ecuación de su eje de simetría?

Respuesta: Eje: $x = 5/4$.

Gráfico:



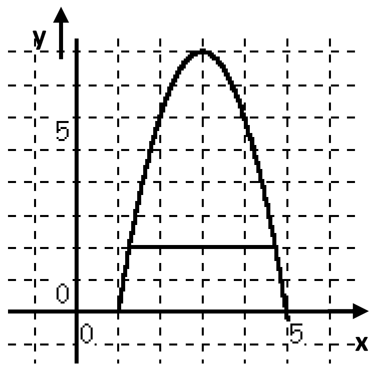
Veamos **una Segunda Forma** de la ecuación de una parábola de eje vertical:
$y = a (x - x_1) (x - x_2)$ (siempre con "a" no nulo)

x_1 y x_2 son las dos raíces reales de la ecuación " $a (x - x_1) (x - x_2) = 0$" vale decir, son las dos abscisas en que la parábola corta al eje x.

Por ejemplo, la parábola de ecuación $y = 2 (x-3) (x+2)$ tiene dos raíces reales: en "3" y en "−2".
Obviamente esta forma de la ecuación es especialmente adecuada para el caso en que conocemos las raíces.

En el caso particular en que las dos raíces reales coinciden, es decir: ($x_1 = - x_2$) la ecuación quedará $y = a (x - x_1)^2$.

Pregunta: ¿cuál será la ecuación de cada trazo en la letra A del siguiente gráfico?



Sabiendo que la parábola tiene eje de simetría vertical y viendo que sus dos raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$, puedo utilizar la forma factorizada de la ecuación:

$$y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) \text{ ("a" no nulo)}$$

Reemplazando los valores de las raíces se obtiene:

$$y = a\,(x - 1)\,(x - 1) \text{ (debemos hallar el valor de "a")}$$

Para hallar "a" procedemos así: leemos en el gráfico el valor de un punto que pertenece a la parábola, por ejemplo, el vértice que tiene coordenadas (3; 8).

La clave de toda la geometría analítica es: "un punto pertenece a una figura" equivale a "las coordenadas del punto verifican la ecuación de la figura". En nuestro caso: el punto (3; 8) está en la figura, esto significa que sus coordenadas verifican la ecuación:

$$y = a\,(x - 1)\,(x - 1)$$

es decir, reemplazando la "x" por "3" y la "y" por "8" se obtiene una verdad.

Veámoslo:

$$8 = a\,(3 - 1)\,(3 - 5)$$

Entonces: $8 = a\,(2)\,(-2)$, es decir: $a = -2$.

La ecuación de la parábola es entonces $\mathbf{y = -2\,(x-1)\,(x-5)}$

Veamos una tercera forma de escribir la ecuación de una parábola de eje vertical especialmente apta para cuando se conocen las coordenadas del vértice. Ella es:

$$y = a\,(x - X_v)^2 + y_v \text{ (con "a" no nulo)}$$

Como ya sabemos si $a>0$, entonces la parábola es cóncava y si $a < 0$, es convexa.

Intentemos hallar la ecuación de la parábola anterior usando esta fórmula.

Sabemos que el vértice está en (3; 8). Es decir, $X_v = 3$ y $y_v = 8$. Reemplazando en la fórmula obtenemos:

$y = a\,(x-3)^2 + 8$ (falta determinar el valor de "a")

Del gráfico vemos que el punto (1; 0) pertenece a la parábola. Por ello escribimos (reemplazando "x" por 1 e "y" por 0):

$$0 = a\,(1-3)^2 + 8$$

que equivale a $0 = 4\,a + 8$, de donde $a = -2$

En síntesis, obtuvimos la ecuación $\mathbf{y = -2\,(x - 3)^2 + 8}$

Comparemos las dos fórmulas obtenidas.

(I) $\mathbf{y = -2\,(x-1)\,(x-5)}$
(II) $\mathbf{y = -2\,(x - 3)^2 + 8}$

Desarrollando ambas se ve que corresponden a la misma figura. En efecto:

(I) $y = -2\,(x-1)\,(x-5) = -2\,(x^2 + 6x + 5) = -2x^2 - 12x - 10$
(II) $y = -2\,(x-3)^2 + 8 = -2\,(x^2 - 6x + 9) + 8 = -2x^2 - 12x - 10$

Se comprueba que son expresiones equivalentes, como era de esperar.