Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuación Lineal:

Es una ecuación del tipo $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b$; donde los a_1; a_2; .... a_n son números reales que están multiplicando a las incógnitas x_1; x_2; …; x_n

Ejemplos:

uno: $2 x_1 + 3 x_2 + 4 x_3 - 2 x_4 = 5$

otro: $3 x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$

otro: $2 x + 3 y - z + w = 2$

Nota: Cada incógnita sólo está multiplicada por un número y elevada a la potencia 1. No será lineal una ecuación en que una incógnita figura multiplicada por otra, ni tampoco una en que alguna incógnita esté afectada por una raíz o figure en el divisor.

Ejemplos:

no es lineal: $2 x + 3 y . z + 8w = 1$

tampoco lo es: $2 x + 3 \sqrt{y+1} = 9$

ni ésta: $2 x + \frac{5}{y+1} = 3$

Solución de una ecuación lineal:

Supongamos tener una ecuación lineal con n incógnitas. Entonces una solución de una ecuación será un conjunto ordenado de n números reales (a este conjunto lo llamamos n-upla) con la siguiente propiedad:

Al reemplazar en la ecuación la primera incógnita por la primera componente de la n-upla, la segunda incógnita por la segunda componente de la n-upla, y en general, al reemplazar la k-ésima incógnita por la k-ésima componente de la n-upla, se obtiene una igualdad numérica verdadera.

Por ejemplo:

Sea la ecuación lineal $2 x + 3 y = - 4$ con dos incógnitas. Una solución es el par ordenado de reales (1; – 2), pues al reemplazar la “x” por el “1” y la “y” por el “– 2”, se obtiene:

$$2\,(1) + 3\,(-\,2) = -\,4$$

... que es una igualdad matemática verdadera.

Conjunto solución de un sistema lineal:

Se lo simboliza con S. Es el conjunto de todas las soluciones del sistema lineal.

Por ejemplo, el sistema lineal:

$$\begin{cases} 2\,x - y = 3 \\ 3\,x + y = 2 \end{cases}$$

... tiene como conjunto solución a:

$$S = \{(1;\, -\,1)\}$$

Es fácil comprobar que la dupla (1; – 1) es una solución del sistema. En efecto, al reemplazar obtenemos:

$$\begin{cases} 2\,(1) - (-\,1) = 3 \\ 3\,(1) + (+\,1) = 2 \end{cases}$$

... que es un conjunto de igualdades matemáticas verdaderas.

Usted puede ensayar con cualquier otra dupla de reales y comprobar que (1 ; – 1) es la única solución.

Otro ejemplo:

El sistema lineal:

$$\{2x - y = 0$$

... admite a (0; 0) como solución (notar que es un sistema homogéneo y que por lo tanto admite la solución trivial).

Pero este sistema admite además como solución a cualquier dupla en la cual el segundo componente sea el doble del primero; es decir, cualquier dupla del tipo (a; 2 a) (donde "a" es un real cualquiera) es solución del sistema. En efecto, al reemplazar se obtiene:

$2(a) - (2a) = 0$

... que equivale a:

$$2a - 2a = 0$$

... y esto es verdadero para cualquier real "a".

Entonces escribiríamos el conjunto solución de este sistema del modo siguiente:

$$S = \{(a; 2a) / \ a \in \Re\}$$

Sistemas compatibles y sistemas incompatibles.

Un sistema que tiene conjunto solución no vacío se llama compatible.

Un sistema con conjunto solución vacío se llama incompatible.

Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

... que vimos anteriormente es compatible pues su conjunto solución es:

$$S = \left|(1\,;\,-1)\right|$$

... que no es vacío.

En cambio, el sistema:

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 20 \end{array}$$

... es incompatible pues su conjunto solución es vacío: $S = \varnothing$. En efecto, no existe ninguna dupla que sea solución simultáneamente de las dos ecuaciones.

Otro ejemplo de sistema incompatible es:

$$\{0x + 0y = 8$$

En este caso se ve fácilmente que no admite como solución ninguna dupla de reales, pues el miembro izquierdo de la igualdad siempre es igual a cero y el derecho es siempre ocho.

Sistemas compatibles determinados o indeterminados:

Dijimos que un sistema compatible es aquél que tiene conjunto solución no vacío.

Si el conjunto solución tiene exactamente una solución (es decir, una n-upla), el sistema se llama compatible determinado.

En cambio, si el conjunto solución tiene infinitas soluciones el sistema se llama compatible indeterminado.

Ejemplos:

El sistema:

$$2x + 3y = 8$$

$$3x - y = 1$$

... es compatible determinado pues su conjunto solución es:

$$S = \{(1; 2)\}$$

En cambio, el sistema:

$$2x - y = 4$$

... es compatible indeterminado pues su conjunto solución está formado por todas las duplas que tengan la segunda componente igual al doble de la primera aumentada en cuatro (es decir, si la primera es "a", la segunda es "2 a – 4"). En símbolos:

$$S = \{(a;\ 2a - 4) \ / \ a \in \Re \}$$

En resumen:

$$\text{Sistema} \begin{cases} \begin{array}{l}\text{Compatible} \\ S \neq \varnothing\end{array} & \begin{cases} \text{Indeterminado: Infinitas soluciones} \\ \text{Determinado: exactamente una sola solución} \end{cases} \\ \\ \begin{array}{l}\text{Incompatible} \\ S = \varnothing\end{array} & \end{cases}$$

Sistema Cuadrado

Un sistema lineal se llama cuadrado si y sólo si tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas. O sea, si es de n x n.

Por ejemplo, el sistema:

$$2\,x_1 + 3\,x_2 + 5\,x_3 = 5$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$-\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 = 5$$

... es un sistema cuadrado, pues tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas, o sea es de 3 x 3.

En cambio, el sistema:

$$\{2\,x - 7\,y + 8\,z - 2\,w = 4\}$$

...no es un sistema cuadrado, pues tiene una ecuación con 4 incógnitas, o sea es de 1 x 4

Matriz asociada a un sistema lineal

Es la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas del sistema lineal.

Ejemplo:

La matriz asociada (MA) del sistema:

$$\begin{cases} 2\,x - 5\,y = 4 \\ -4\,x + 2\,y = 8 \end{cases}$$

... es MA $= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Sistema Crameriano

Un sistema lineal cuadrado se llama Crameriano si y sólo si su matriz asociada tiene determinante distinto de cero.

También podemos decir:

"Un sistema lineal cuadrado es Crameriano si y sólo si su matriz asociada es regular" (recordar que una matriz cuadrada es regular si y sólo si tiene determinante no nulo).

Ejemplo:

El sistema siguiente:

$$2\,x - 5\,y = 4$$

$$-\,x + 4\,y = -\,1$$

... tiene matriz asociada:

$$\text{MA} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

... y el determinante de MA vale:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2)\ (4) - (-1)\ (-\ 5) = 8 - 5 = 3$$

Se cumple que – 3 ≠ 0, por lo cual decimos que esta matriz asociada es regular y el sistema es crameriano.

Otro ejemplo:

El sistema lineal:

$$-\ 3\ x + 2\ y = 8$$
$$6\ x - 4\ y = 7$$

... tiene como matriz asociada:

$$MA = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

... cuyo determinante vale:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = (-3)\ (-4) - (2)\ (6) = 12 - 12 = 0$$

Por lo tanto, la matriz asociada no es regular y en consecuencia el sistema no es Crameriano.

Método de Cramer para resolver Sistemas Cramerianos

Este método se suele estudiar en tercer año del colegio secundario, en donde se lo llama método de resolución por determinantes.

Veamos en qué consiste:

Dado el sistema lineal:

$$a\,x + b\,y = c$$
$$d\,x + e\,y = f$$

... donde las incógnitas son x; y, los coeficientes son: a; b; d; e y los términos independientes c; f, se calculan las siguientes determinantes:

Δ = determinante general

Δ x = determinante para la "x"

Δ y = determinante para la "y"

... que vienen definidos como sigue:

Δ = es el determinante de la Matriz Asociada, o sea: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$

Este determinante es distinto de cero (el sistema es Crameriano)

Δ x = es el determinante de la matriz que se obtiene al reemplazar en la matriz asociada la columna de la "x" por la columna de los términos independientes. Es decir:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$

Δ y = es el determinante de la matriz que se obtiene al reemplazar en la matriz asociada la columna de la "y" por la columna independiente. Vale decir:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Una vez calculados los determinantes se puede hallar los valores de cada incógnita muy simplemente:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} \\ \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} \end{array}\right\} \text{ recordemos que } \Delta \neq 0$$

Veámoslo en un ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -2x + 7y = 2 \end{cases}$$

Calculemos en primer lugar Δ, Δx, Δy:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 2 = 19$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 2 = 9$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 2 = 8$$

Con ellos calculamos los valores de “x” e “y”:

$$x = \Delta x / \Delta = 9 / 19$$
$$y = \Delta y / \Delta = 8 / 19$$

El conjunto solución es entonces:

$$S = \{(9 / 19; 8 / 19)\}$$

Este método, que hemos presentado con un sistema crameriano de 2 x 2, se generaliza fácilmente a sistemas Cramerianos de cualquier orden: 3 x 3, 4 x 4, etc.

Por ejemplo, para 3 x 3 tendríamos:

$$a\,x + b\,y + c\,z = d$$

$$e\,x + f\,y + g\,z = h$$

$$i\,x + j\,y + k\,z = l$$

En este caso el determinante general Δ viene dado por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

... y el determinante para la "x", o sea "Δx", viene dado por:

$$\Delta\,x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix}$$

Este Δ x es el determinante de la matriz que se obtiene reemplazando en la matriz asociada la columna de los términos independientes.

De modo análogo se obtienen los otros dos determinantes: Δ y, Δ z.

El cálculo de los valores de las incógnitas viene dado por:

$$x = \Delta\,x / \Delta \;;\quad y = \Delta\,y / \Delta \;;\quad z = \Delta\,z / \Delta$$