FUNCIÓN CUADRÁTICA

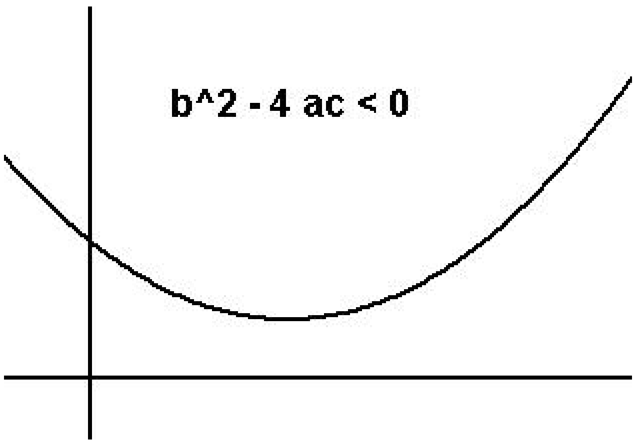
Comencemos este primer punto de la unidad señalando que la **función cuadrática** posee la siguiente forma:

$$F : R \to R / F(x) = a.x^2 + b \cdot x + c \quad con\ a \neq 0$$

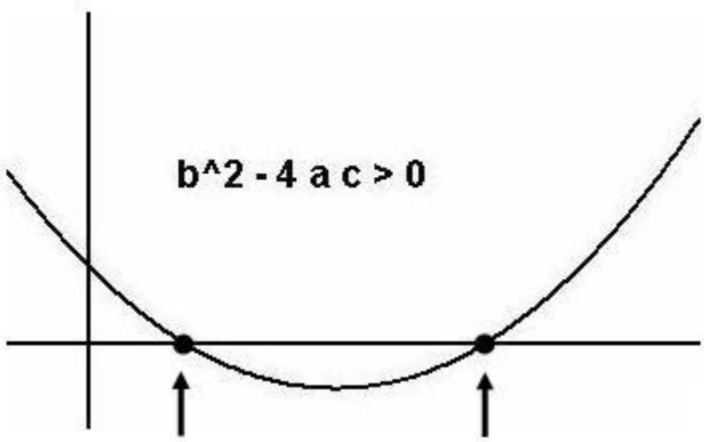
Por lo que planteamos cuando tratamos los elementos de Geometría Analítica, el gráfico de este tipo de función es una **parábola de eje vertical** (que entonces vimos como la gráfica de $y = a.x^2 + b \cdot x + c \ con\, a \neq 0$).

Si el valor de "a" es positivo, la parábola tiene la concavidad hacia arriba, pero sí "a" es negativo, tiene la concavidad hacia abajo.

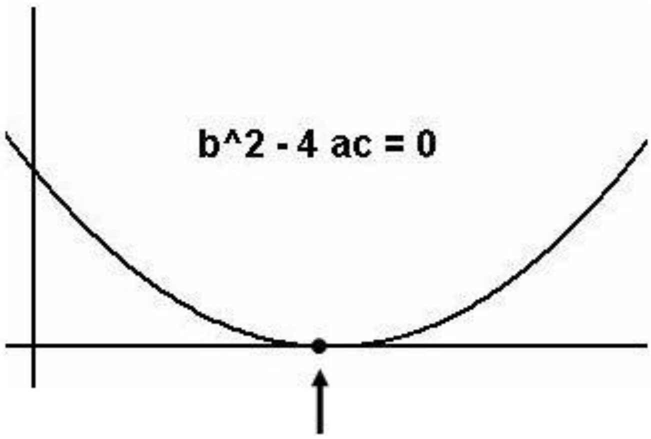
La parábola se interceptará con el eje de las "x" si la ecuación F(x)=0 tiene solución. Esto equivale a decir que habrá intersección si la ecuación $a.x^2 + b \cdot x + c = 0$ posee solución. Pero con lo que sabemos acerca de la resolución de la ecuación cuadrática, podemos afirmar que eso significa que la condición es: $b^2 - 4a.c \geq 0$. Si eso no se cumpliera, si fuera $b^2 - 4a.c < 0$, entonces la parábola no cortaría al eje "x".



Si $b^2 - 4a.c > 0$, habrá dos raíces distintas que están indicadas en el gráfico siguiente con dos flechas.



Si $b^2 - 4a.c = 0$, las dos raíces serán iguales, lo que significa que habrá un solo punto de contacto entre la gráfica de la función y el eje de abscisas.



En los tres ejemplos gráficos que presentamos el coeficiente cuadrático “a” era positivo, por eso la parábola tenía la concavidad hacia arriba.

Para calcular la o las raíces (en caso de que las haya) utilizamos la fórmula resolvente de la ecuación de 2do grado (visto en la segunda unidad).

En cuanto al vértice de la parábola, la abscisa viene dada por la expresión $x_V = \frac{-b}{2a}$,

lo que nos permite calcular sin dificultad la correspondiente ordenada, que simplemente es la imagen de x_V, es decir: $y_V = F(x_V)$.

Debemos aclarar que la función cuadrática también puede estar dada por alguna de estas otras formas (las vimos cuando abordamos el tema de la parábola de eje vertical, en Geometría Analítica):

$$F(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ o \ \ bien \ \ F(x) = a(x - x_V)^2 . + y_V$$

Seguidamente, veremos cómo podemos **graficar una función cuadrática conociendo su fórmula**.

En la función dada por: $F: R \to R / F(x) = x^2 - 4 \cdot x + 3$ observamos, en primer lugar, que los coeficientes son: a=1; b=4; c=3.

Como a>0, la parábola es cóncava hacia arriba. Por otro lado, el valor de $b^2 - 4a.c$ es $b^2 - 4a.c = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ lo que indica que la gráfica corta al eje de abscisas en dos puntos distintos. Esos puntos son las soluciones de la ecuación $F(x) = 0$ que es: $x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0$

Los puntos son:

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4+2}{2} = 3 \ ;$$

$$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4-2}{2} = 1 .$$

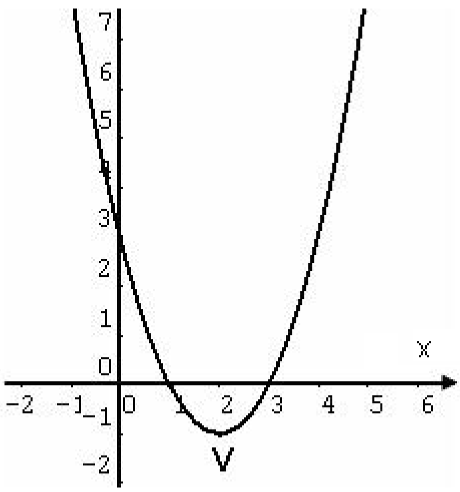
El conjunto de ceros de la función es: **{1; 3}**

La abscisa del vértice viene dada por: $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

Con ello la ordenada de ese vértice es: $y_V = F(x_V) = F(2) = 2^2 - 5.2 + 4 = -2$

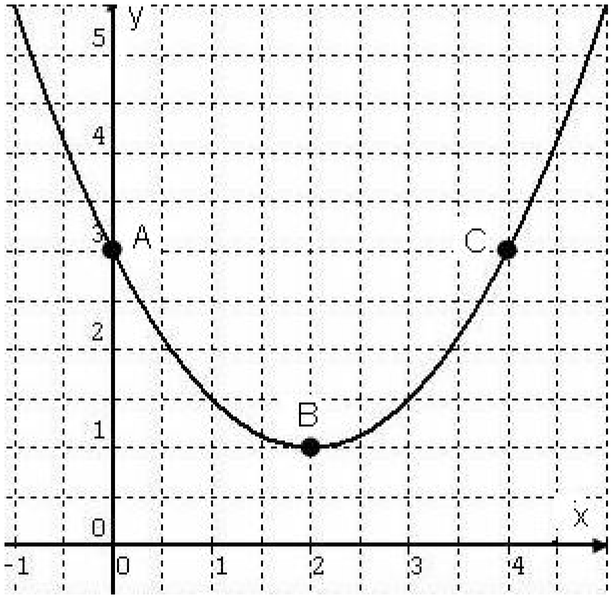
El vértice es **V= (2; –2).** Por otro lado, el valor de c=3 nos da la intersección con el eje vertical que es el punto **{0; 3}.**

Con estos elementos, el gráfico quedaría así:



A continuación, encararemos el problema de hallar **una fórmula para la función cuadrática a partir de su gráfico**.

Observemos, a modo de ejemplo, el siguiente:



En él encontramos que el vértice es el punto V= (2; 1). Y entonces nos resulta conveniente usar esta fórmula:

$$F(x) = a(x - x_V)^2 . + y_V$$

En este caso, $x_V = 2$ y $y_V = 1$

Entonces, la fórmula de la función podría escribirse $F(x) = a(x-2)^2 . +1$ con el valor “a” por determinar. Pero sabemos que el punto A= (0;3). Esto equivale a decir que F (0) =3. A partir de ahí podemos determinar el valor de “a”:

$a(0-2)^2 . +1 = 3$ y de aquí a.4+1=3 con lo cual a=1/2

Por lo tanto, la fórmula de la función puede expresarse así:

$$F(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 . +1$$

Lo invitamos, ahora, a conocer cómo podemos encontrar **una función que describa una situación dada**, por ejemplo, la siguiente:

Supongamos que tenemos 100 m de alambre y deseamos utilizarlos para cercar un terreno rectangular.

¿Cuál es la función matemática que describe el área del terreno cercado en función de la longitud de uno de los lados?

Comencemos por calcular cuál es el área del terreno cercado si se toman ciertos valores particulares de uno de los lados. Por ejemplo: ¿cuál es el área cercada si uno de los lados mide 20m?

Como es un rectángulo, si uno de los lados mide 20m, entonces el lado opuesto mide lo mismo. Con ello ya se han gastado 40m y, por eso, quedan 60m para los otros dos lados, lo que significa que cada uno mide 30m. En síntesis, si uno de los lados mide 20m, entonces el otro mide 30m y, por lo tanto, el área cercada mide 20m x 30m= 600m^2. Pensándolo en el lenguaje de las funciones, y denominando "x" al tamaño de uno de los lados (medidos en metros) y "F(x)" a la correspondiente área (medida en metros cuadrados), tenemos que para x=20 el área encerrada es F (20) = 600.

Del mismo modo podemos calcular el área para otros valores particulares del lado. Pero intentémoslo, ahora, con un valor genérico de esa longitud, llamémosle "x" a la longitud de ese lado. Si uno de los lados mide "x" (en metros), entonces hay otro que también mide "x" con lo cual entre los dos "consumen" la cantidad de "2x" metros de alambre. Significa que para los otros dos "quedan" "100–2x". Entonces, para cada uno de ellos la longitud es "250–x" (es fácil advertir que la mitad de "100–2x" es "50–x"). Por ello, el área del terreno cercado será:

$$F(x) = x.(50 - x) = 50.x - \ x^2$$

Podemos preguntarnos **cuál es dominio de esta función**, no en el sentido de alguna restricción puramente matemática, sino acerca de cuáles son los valores de "x" que tienen significado en la realidad. Por ejemplo, el valor de "x" no puede ser negativo, pues no tendría sentido decir que un rectángulo tiene uno de sus lados con longitud negativa. Ahora bien, no cualquier valor positivo es posible, dado que se dispone de 100m no podría uno de los lados tener más de 50m. La posibilidad de que "x" fuera 0m o bien 50m se correspondería con un rectángulo que tiene, 0m x 50m o bien 50m x 0m con lo cual en ambos casos el área sería nula.

Podemos decir, entonces, que el dominio de esta función es el intervalo $[0; 50]$, con lo cual la escribiríamos así:

$$F : [0;50] \rightarrow R / F(x) = -x^2 + 50x$$

Considerando que esta función es cuadrática, podemos hallar cuál de las posibles medidas de "x" determina un área mayor. Observando que "a<0" sabemos que la gráfica es una parábola cóncava hacia abajo. Esto significa que su vértice corresponde a un valor máximo del área.

El valor de "x" que lo produce es el valor de x_V.

Dado que a = –1 y b = 50 se ve que $x_V = \frac{-50}{2\cdot(-1)} = 25$. Y con ello resulta $y_V = -(25)^2 + 50\cdot(25) = -625 + 1250 = 625$

Interpretando ese resultado podemos sostener que el área máxima se obtiene con un lado de 25m, y esa área máxima es de $625m^2$.

Hemos calculado sencillamente cuál era el valor de "x" que producía un máximo valor de F(x), porque se trataba de una función cuadrática. No realizamos este cálculo para funciones más complejas, pues excede los propósitos de esta asignatura. El tema de determinación de máximos o mínimos se abordará con detenimiento en la asignatura Cálculo Infinitesimal I.