NOCIONES PRELIMINARES DE MATEMTICAS

2. NMEROS COMPLEJOS.

2.1 Nocin de nmero complejo.

En el Clculo nos encontramos que ecuaciones como: $x + 4 = 0$, no tienen solucin en los dominios de R (conjunto de nmeros reales). Un modo de superar esta limitacin es definir un super-conjunto C que englobe al conjunto R, pero que abarque tambin a nmeros ms generales, los llamados nmeros complejos, que puedan ser soluciones de ecuaciones como la de arriba.

* **Unidad imaginaria**: Se define unidad imaginaria, representada por i, como aquel 'nmero' de C tal que: i=-1, o tambin expresado (de forma *mnemotcnica*):

$$i = \sqrt{-1}$$

De esta manera la ecuacin $x + 4 = 0$, se solucionara as:

$$x^2 = -4 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4.(-1) \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4}.\sqrt{-1} \quad \rightarrow \quad x = \pm 2i$$

* **Nmero complejo:** La forma general (forma binmica) es:

$$a + bi$$

es decir, un nmero complejo est formado por dos nmeros reales,*a* y *b*, llamadas:

a: parte real
b: parte imaginaria

por ejemplo: 5 - 7 i, -4 + 8 i, + i.

2.2 El cuerpo C de los nmeros complejos

En el conjunto C de los nmeros complejos se definen las dos operaciones internas, + y **.** , cuyo funcionamiento es como sigue:

<u>Suma</u>: se suman partes reales y partes imaginarias por separado, es decir:

Sean dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$
Su suma es: $\rightarrow \quad z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

<u>Producto</u>: se multiplican segn la regla aritmtica:

Sean dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

Su producto es: $\rightarrow \quad z_1 . z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

NOTA: Este ltimo resultado puede obtenerse mediante un producto aritmtico:

$$\begin{array}{rcl} a_2 & + & b_2 i \\ \times \; a_1 & + & b_1 i \\ \hline a_1 a_2 & + & a_1 b_2 i \\ -b_1 b_2 & + & b_1 a_2 i \\ \hline \multicolumn{3}{c}{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i} \end{array}$$

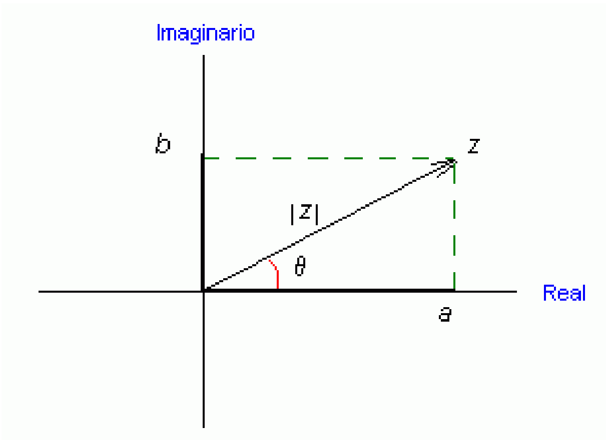
1. (C, +) tiene estructura de *grupo abeliano aditivo*, donde 0 + 0 i es el elemento neutro, y cualquier elemento, *a* + *b*i, tiene su opuesto, el -*a* - *b*i.

2. (C, **.**) tiene estructura de *grupo abeliano aditivo*, donde 1 + 0 i es el elemento neutro, y cualquier elemento, *a* + *b*i, tiene su inverso, el $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$.

3. Adems la operacin "**.**" es distributiva respecto de la "+", lo que signitica que (C,+,**.**) represente un *cuerpo conmutativo*.

2.3 Representacin segn el *diagrama de Argand*.

Sea un nmero complejo cualquiera, *z*=*a*+*b*i, existe una representacin sobre un plano (llamado diagrama de Argand), en el que sobre dos ejes perpendiculares -como se muestra en la figura- se coloca sobre el eje horizontal (eje real) la parte real de *z*, ***a***, y sobre el eje vertical (eje imaginario) la parte imaginaria de *z, **b***, se trazan sendas paralelas a los ejes (lneas punteadas en la figura) y su punto de corte es la punta del *fasor z.*



(NOTA: Se llama *fasor* a un vector cuyo punto de aplicacin es fijo, en el caso de nmeros complejos ste es el origen).

En esta representacin es de destacar, sobre el tringulo rectngulo inferior de la figura:

* que *a* y *b* son precisamente los catetos de ese tringulo rectngulo.
* que la hipotenusa es la longitud del *fasor z*, esta longitud se llama "*mdulo de z*", y se la representa por |*z*|, o tambin por '*r*'.
* que el ngulo que forma *z* con el eje positivo real (en sentido anti-horario), q, es llamado *"argumento de z"*.

Tambin es destacable las dos relaciones siguientes:

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan\theta = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Adems llamando *r* al "mdulo" y q al "argumento" de *z* = *a* + *b* i, tenemos:

$$\begin{cases} a = r \cos\theta \\ b = r \sin\theta \end{cases}$$

por lo tanto, el complejo *z* tambin puede expresarse:

$z = a + b\mathrm{i} = r(\cos q + \mathrm{i} \sin q)$

El argumento q, a veces suele expresarse como arg(*z*), y el mdulo, |*z*| *r,* a veces se le representa por md(*z*).

Forma trigonomtrica:
A esta forma de expresar el nmero complejo, $z = r(\cos q + \mathrm{i} \sin q)$ se la llama forma trigonomtrica. El ngulo q suele expresarse en radianes (seguir el vnculo para repasar este concepto), aunque tambin puede ser expresado en grados sexagesimales.

Forma polar:
Otra forma de expresar el nmero complejo $z = a + b\mathrm{i}$ es, $z = r_\theta$, llamada forma polar.

En cuanto a los mdulos de nmeros complejos podemos destacar las siguientes propiedades:

$$1)\quad \forall z \in C \quad |z| \geq 0$$

$$2)\quad \forall z_1, z_2 \in C \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$3)\quad \forall z \neq 0 + 0i \in C \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$4)\quad \forall z_1, z_2 \in C, z_2 \neq 0 + 0i \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$5)\quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

en adelante, al mdulo del complejo *z*, |*z*|, lo expresaremos simplemente por *r*.

Los argumentos de nmeros complejos poseen las propiedades:

Sean z_1, z_2 tales que $\arg(z_1) = \theta_1$, $\arg(z_2) = \theta_2$, tenemos:

$$1)\quad \arg(z_1 . z_2) = (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi$$

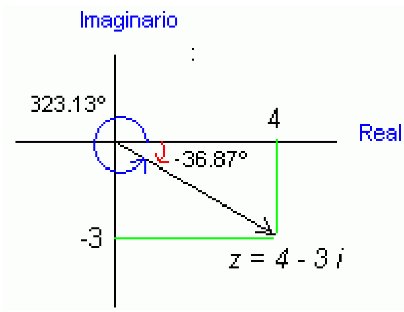
$$2)\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$$

es decir, al multiplicar dos complejos se multiplican sus mdulos y se suman sus argumentos; mientras que al dividir dos complejos se dividen los mdulos y se restan los argumentos.

TRES FORMAS DE EXPRESAR UN COMPLEJO

Como ejemplo, consideremos el nmero complejo $z = 4 - 3\mathrm{i}$, vamos a expresarlo en su forma trigonomtrica y en la forma polar.

Es una buena idea comenzar por representarlo en el diagrama de Argand. A continuacin hallamos su mdulo:



$$r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

y su fase, q, que es el arco tangente de *b/a*, es decir:

$$\theta = \arctan\frac{(-3)}{4} = \arctan(-0.75) = -36.87°$$

si el ngulo nos aparece negativo indica que se evala hacia abajo (en rojo en la grfica), evidentemente tambin puede expresarse por: q = 360 - 36.87 = 323.13 (en azul) con signo positivo.

Por lo tanto:

$$\begin{cases} z = 4 - 3i & \text{Forma binómica} \\ z = 5(\cos 323.13° + i \sin 323.13°) & \text{Forma trigonométrica} \\ z = 5_{323.13°} & \text{Forma polar} \end{cases}$$

Finalmente, en **2.5**, veremos otra forma del nmero complejo, la forma exponencial.

2.4 Conjugado de un nmero complejo.

Dado un nmero complejo $z = a + b\,i$, se llama complejo conjugado de z, $\bar{z}$, al complejo:

$$\bar{z} = a - bi$$

que consiste simplemente en cambiar el signo de la parte imaginaria de z. Por ejemplo, el conjugado de $z = 5 - 8\,i$ es $\bar{z} = 5 + 8\,i$. La utilidad de esta definicin est en que basndose en que $z.\bar{z} = a^2 + b^2$ nos permite simplificar ciertas expresiones , por ejemplo el mdulo, *r*, del nmero complejo *z*, puede ser expresado :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z.\bar{z}}$$

o tambin para el complejo inverso del complejo $z = a + b\,i$:

$$z.z^{-1} = 1 \rightarrow z^{-1} = \frac{1}{(a+bi)} \cdot \frac{(a-bi)}{(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$
$$\rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}}$$

Tambin la parte entera y la parte imaginaria de un nmero complejo *z* puede expresarse:

$$\mathrm{Re}(z) = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{Parte real de z}$$
$$\mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2}(z - z)(-i) \quad \text{Parte imaginaria de z}$$

2.5 Forma exponencial de un nmero complejo

Existe una importante relacin entre la funcin exponencial y las funciones trigonomtricas, es la llamada relacin de Euler:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

para cualquier nmero real *x*. Entonces si nosotros tomamos la forma trigonomtrica del nmero complejo:

$$z = r(\cos q + i \sin q)$$

con q expresado en radianes (es imprescindible pues los grados no son nmeros reales), podremos expresar el parntesis como:

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

por lo tanto, el nmero complejo*z* puede ser expresado como:

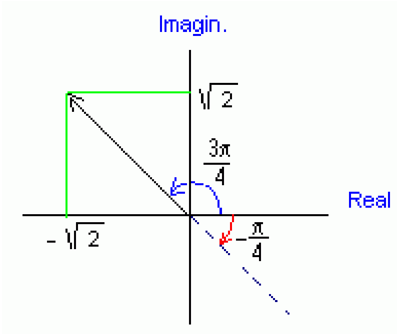
$$z = re^{i\theta}$$

que es la llamada *forma exponencial* de *z*:

Como ejemplo, pasemos a la forma exponencial el complejo:

$$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

lo primero que haremos es representarlo en el*plano de Argand*:



A continuacin hallamos mdulo y argumento.

el mdulo es:

$$r = \sqrt{2+2} = 2$$

el argumento segn la grfica es:

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

NOTA: Al realizar Arctan (-1) con una calculadora nos da -0.7854 radianes, es decir, -p/4, que es el menor ngulo que tiene por tangente -1 (ngulo en rojo en la grfica), sin embargo nosotros debemos sumarle p a ese ngulo puesto que conocemos que q se encuentra en el cuadrante II y no en el IV.

Por lo tanto, el nmero complejo*z* en su forma exponencial es:

$$z = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

2.6 Producto y cociente de nmeros complejos.

Del producto de nmeros complejos ya hemos hablado en**2.2**, pero ahora vamos a considerar que los complejos los tenemos en su *forma exponencial*, que es la forma idnea para operar:

Producto: se multiplican los mdulos y se suman los exponentes de la exponencial es decir:

Sean dos números complejos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

Su producto es: $\rightarrow z_1 . z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Cociente: se dividen los mdulos y se restan los exponentes de la exponencial es decir:

Sean dos números complejos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$
Su cociente es:

$$\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

En realidad el 'cociente' no es ms que un producto de un complejo por el inverso del otro, es decir:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1}$$

Como ejemplos de producto y cociente, consideremos dos nmeros complejos:

$$z_1 = 8e^{3i},\ z_2 = 4e^{2i} \rightarrow \begin{cases} z_1 . z_2 = 32e^{5i} & \text{Producto} \\ \dfrac{z_1}{z_2} = 2e^{1i} & \text{Cociente} \end{cases}$$

2.7 Elevacin a una potencia entera de nmeros complejos.

Dado un nmero complejo $z = a + b$ i , elevarlo a un potencia entera n, equivale a multiplicarlo por s mismo n veces. Esto se podra hacer aritmticamente, como ya hemos dicho en **2.2**, aunque el proceso pueda llegar a ser muy laborioso. Por el contrario operar con el complejo en su forma exponencial es una tarea muy simple:

Se eleva el mdulo a n y el argumento se multiplica por n, por ejemplo:

$$z = 2e^{5i} \rightarrow \quad z^4 = 2^4 (e^{5i})^4 = 16e^{20i}$$

Claro que si el nmero complejo estuviera en su forma binmica deberamos pasarlo a la forma exponencial, tal como lo hemos hecho en un ejemplo anterior, antes de elevarlo a la potencia

2.8 Races *n*-simas de un nmero complejo.

Dado un complejo $z = r e^{i\theta}$, se llaman <u>races *n*-simas</u> de z a los nmeros complejos w que cumplen $w^n = z$. Es fcil comprobar que hay siempre n complejos que cumplen esa condicin. Tradicionalmente a esos n complejos se les ha venido expresando como:

$$z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$$

Estas races n-simas se hallan por la expresin general:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{(para k= 0, 1, ..., n-1)}$$

Como casos especiales, tenemos las races cuadradas (dos) y las races cbicas (tres):

*** Races cuadradas:**

$$z_0 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}\ ,\quad z_1 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}}$$

*** Races cbicas:**

Como un ejemplo, las tres races cbicas de $z = 4 e^{2i}$ son:

Las races *n*-simas de la unidad:

Las races *n*-simas de la unidad son muy notorias, como veremos aqu. Se trata de los *n* complejos, que elevados a la potencia *n* dan 1, o sea: **1 + 0 i.** Estos suelen expresarse como:

$$\omega_0 , \omega_1 , \dots , \omega_{n-1}$$

y se obtienen de la frmula general:

$$\omega_k = \sqrt[n]{1}\ e^{i\frac{0+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{(para k = 0, 1, ..., n-1)}$$

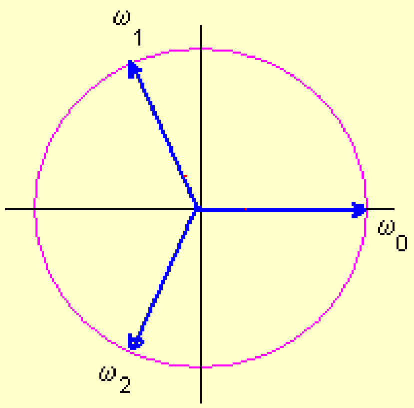
Entre sus propiedades son destacables las dos siguientes:

1) Si dibujamos una circunferencia de radio 1, y sobre ella trazamos los *n* fasores $\omega_0 , \omega_1 , \dots , \omega_{n-1}$, stos dividen al circulo en *n* partes iguales, o en otras palabras si unimos las puntas de los *n* fasores obtenemos un polgono regular de *n* lados iguales inscrito en un circulo de radio 1.

Por ejemplo, las tres races cbicas de 1 son:

$$\omega_0 = e^{0i} \quad , \quad \omega_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad , \quad \omega_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

que trazadas sobre una circunferencia de radio unidad:



$$z_0 = \sqrt[3]{r}\, e^{i\frac{\theta}{3}} \quad , \quad z_1 = \sqrt[3]{r}\, e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} \quad , \quad z_2 = \sqrt[3]{r}\, e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{2}{3}} \quad , \quad z_1 = \sqrt[3]{4}\, e^{i\frac{2+2\pi}{3}} \quad , \quad z_2 = \sqrt[3]{r}\, e^{i\frac{2+4\pi}{3}}$$

Si unimos las tres puntas de estos

2) Para hallar las races *n*-simas de un nmero complejo *z* (que no sea el 1+0i, podemos operar as:

a) Hallamos una raz *n*-sima de *z*, por ejemplo la *zo*:

$$z_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

b) Entonces las *n*-1 races n-simas restantes de *z* se obtienen multiplicando esta raz por las *n* races n-simas de la unidad:

$$z_1 = \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}} = z_0 \,.\, \omega_1$$

$$z_2 = \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta+4\pi}{n}} = z_0 \,.\, \omega_2$$

$$\ldots$$

$$z_n = \sqrt[n]{r}\; e^{i\frac{\theta+n2\pi}{n}} = z_0 \,.\, \omega_n$$

2.9 Logaritmo de un nmero complejo.

Dado un nmero complejo $z = r\,e^{i\theta}$, el logaritmo neperiano (en C slo tienen sentido los logaritmos neperianos) de *z* viene dado por:

Log *z* = ln *r* + (q + 2kp) i

En realidad hay infinitos valores de Log *z* , pues k puede ser 0, 1, 2... (se dice que en C la funcin logaritmo neperiano *es multivaluada*), sin embargo se habla del "valor principal" de Log *z* como aqul valor correspondiente a k = 0. Es decir, el valor principal de Log *z* es:

Log *z* = ln *r* + q i

<u>2.10</u> Expresiones complejas de las funciones circulares.

A partir de la *relacin de Euler* ya citada en **2.5**:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Se construyen otras relaciones importantes, en primer lugar sustituyendo *x* por (-*x*), y teniendo en cuenta que:

sen(-*x*) = - sen *x*
cos(-*x*) = cos *x*

podemos expresar:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

ahora restando y sucesivamente sumando estas dos expresiones obtenemos:

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i\,(\sin x) \quad , \quad e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$$

por lo tanto, teniendo en cuenta que el inverso de *i*, 1/*i*, es (-*i*):

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}(-i)$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}(-i)$$

que son las expresiones de las funciones trigonomtricas en C.

2.11 Frmula de Moivre

Se llama frmula de Moivre (en realidad se debera llamar frmula de "<u>*De Moivre*</u>" ☺), a una expresin muy sencilla de obtener utilizando complejos:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Una expresin que es muy til en clculo. Como ejemplo de aplicacin de esta frmula vamos a obtener las expresiones trigonomtricas del seno y coseno del ngulo doble:

Consideremos la frmula de Moivre para n=2:

(cos q + i sen q) = cos 2q + i sen 2q

para cualquier ngulo q (en radianes) comprendido entre 0 y 2p. Si desarrollamos esta expresin nos queda:

cos q + i 2 sen q cos q - sen q = cos 2q + i sen 2q

es decir,

cos q - sen q - cos 2q = i (sen 2q - 2 sen q cos q)

para que se cumpla la igualdad ambos miembros deben ser 0, por tanto:

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{cases}$$

2.12 Algunos ejercicios.

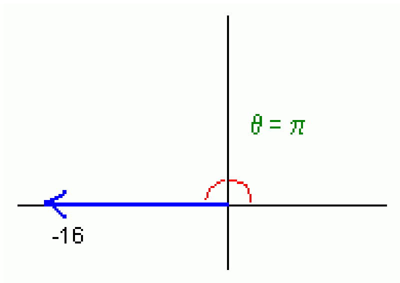
En primer lugar veamos algunos ejercicios resueltos:

Ejercicio 1: Hallar en C las soluciones de la ecuacin $z^4 + 16 = 0$.

Solucin: En primer lugar, podemos expresar la ecuacin en la forma:

$$z^4 = -16$$

con lo que la solucin son las cuatro*races cuartas* del nmero complejo -16 + 0 i. Representamos grficamente este complejo, y podemos observar que su mdulo y argumento son:



r = 16
q = p

por lo tanto el nmero complejo -16+0 i puede ser expresado como $16e^{i\pi}$. Entonces las soluciones son sus races cuartas:

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Ejercicio 2: Hallar en C los valores de a que verifican la relacin cos a = 3.

Solucin: Tomamos la relacin que en **2.10** hemos obtenido para el coseno:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

la igualamos al nmero 3, y resolvemos la ecuacin ena:

$$\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = 3 \rightarrow e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 6 = 0$$

multiplicamos por $e^{i\alpha}$:

$$(e^{i\alpha})^2 - 6e^{i\alpha} + 1 = 0$$

que es una ecuacin de segundo grado, haciendo $e^{i\alpha}$ = t:

t - 6 t + 1 = 0

cuyas soluciones son:

$$e^{i\alpha} = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

finalmente tomamos logaritmos neperianos en ambos miembros:

$$i\alpha = \log\left((3 \pm 2\sqrt{2})e^{0i}\right) = \ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + (0 + 2k\pi)i$$
$$\rightarrow \quad \alpha = 2k\pi - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$$

Ejercicio 3: Obtener y representar las tres soluciones de la ecuacin:

z + 8 i = 0

Solucin: Si expresamos la ecuacin en la forma z = - 8 i, tendremos que hallar las tres races cbicas del complejo - 8 i, el cual en forma exponencial es:

$$8e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

por lo tanto, estas tres races son nmeros complejos cuyos mdulos y argumentos son:

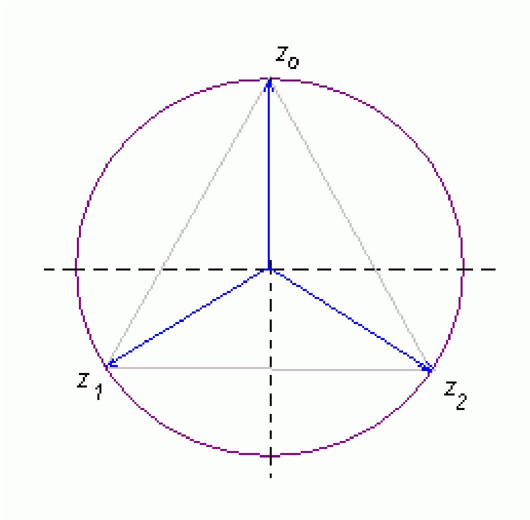
es decir, son los tres complejos:

$$r_k = \sqrt[3]{8} = 2; \quad \theta_k = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2)$$

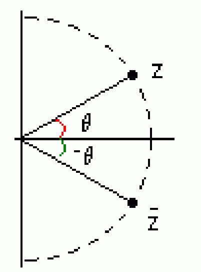
al representarlos en el diagrama de Argand, nos aparecen equidistantes en el circulo.

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}, \; z_1 = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}, \; z_2 = 2e^{\frac{11\pi}{6}i}$$

Ejercicio 4: Hallar los nmeros complejos cuyo cubo sea igual al cuadrado de su conjugado.



Solucin: A estos complejos los expresamos en su forma $z = re^{i\theta}$, es fcil comprobar, entonces, la forma de su complejo conjugado (por ejemplo grficamente):



se comprueba que el complejo conjugado es:

$$\bar{z} = re^{i(-\theta)}$$

por tanto, podemos establecer la ecuacin:

$$z^3 = \bar{z}^2 \quad \Rightarrow \quad \left(re^{i\theta}\right)^3 = \left(re^{i(-\theta)}\right)^2$$

es decir,

$$r^3 e^{i3\theta} = r^2 e^{i(-2\theta)} \quad \Rightarrow \quad r = e^{i(-5\theta + 2k\pi)}$$

aqu el 2kq del argumento hay que ponerlo debido a la indeterminacin en el nmero de vueltas para los ngulos (esto siempre suceder en ecuaciones en las que intervenga q). Finalmente, concluimos que *r* es 1 (el mdulo del miembro de la derecha es 1), y (-5q +2*k*p) es 0 (el argumento de la izquierda es 0).

$$\begin{cases} r = 1 \\ -5\theta + 2k\pi = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \dfrac{2k\pi}{5} \quad (k = 0,1,2,3,4) \end{cases}$$

Estos nmeros complejos son:

$$\begin{cases} z_0 = \cos 0 + i \sin 0 \\ z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \\ z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \\ z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5} \\ z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} \end{cases}$$

* **Ejercicios para el alumno:**

1) Hallar el valor del argumento para los nmeros complejos:

$$a)\quad z=\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\qquad b)\quad z=\frac{i}{-2-2i}\qquad c)\quad z=(\sqrt{3}-i)^6$$

Solución $a)\ \frac{2\pi}{3};\quad b)\ \frac{5\pi}{4};\quad c)\ \pi$

2) Simplificar la expresin:

$$\frac{1+2i}{3-4i}-\frac{2-i}{5i}$$

Solución $-\frac{2}{5}$

3) Hallar las tres races cbicas del nmero complejo $-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$. Representarlas en el plano de Argand.

4) Resolver en C la ecuacin

$$z^5-4-4i=0$$

Solución

$$z_0=\sqrt{2}\ (\cos 9^\circ+i\ \sin 9^\circ)$$
$$z_1=\sqrt{2}\ (\cos 81^\circ+i\ \sin 81^\circ)$$
$$z_2=\sqrt{2}\ (\cos 153^\circ+i\ \sin 153^\circ)$$
$$z_3=\sqrt{2}\ (\cos 225^\circ+i\ \sin 225^\circ)$$
$$z_4=\sqrt{2}\ (\cos 297^\circ+i\ \sin 297^\circ)$$

5) Con ayuda de la formula de *De Moivre* deducir las identidades trigonomtricas siguientes:

a) cos 3q = cos q - 3 cos q sen q

b) sen 3q = 3 cos q sen q - sen q

6) Siendo q un ngulo (en radianes) comprendido ente 0 y 2p, resolver la ecuacin:

$$|e^{i\theta}-1|=2$$

Solución π

* Pgina de ejercicios resueltos.

---

* Lecciones y recursos complementarios en Internet:

- Wolfram Research (Eric Weisstein's world of MATHEMATICS)
- Ecuaciones con nmeros complejos
- Los nmeros complejos
- Lecciones matemticas de Descartes
- Tema de nmeros Complejos (por Renato Alvarez)
- Calculadora de nmeros complejos
- Calc 3D . Calculadora de nmeros complejos

Pgina nueva 1

Ejercicio 1: Hallar el valor del argumento para los nmeros complejos:

$$a)\ z=\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\quad b)\ z=\frac{i}{-2-2i}\quad c)\ z=(\sqrt{3}-i)^6$$

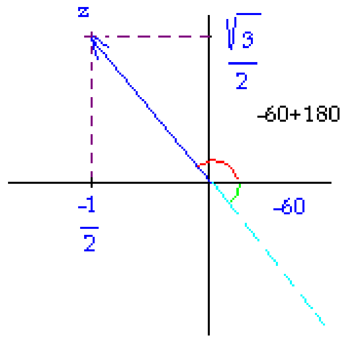
Solucin:

a) Mutiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador: $1-\sqrt{3}i$

$$\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{1-3(i)^2}=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Representamos grficamente este nmero complejo en un diagrama de Argand.

Podemos comprobar que su argumento es el ngulo indicado en color rojo.



Con una calculadora podemos hacer el clculo:

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$$

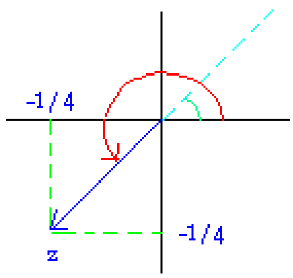
a lo cual responde con -60 si trabaja con grados (-p/3 si lo hace en radianes). Se trata del ngulo punteado en color *verde* del grfico (no olvidemos que la calculadora solo devuelve valores de ngulos entre -90 y 90 , pero nosotros sumamos 180 (p si estamos con radianes) a ese ngulo. El resultado final ser:

q = -60 + 180 = 120 en grados. q = -p/3 + p = 2p/3 en radianes.

b) Mutiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador: (-2 + 2i)

$$\frac{i}{-2-2i}\cdot\frac{-2+2i}{-2+2i}=\frac{-2i+2(i)^2}{(-2)^2-2^2i^2}=\frac{-2-2i}{4+4}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$$

Representamos grficamente este nmero complejo en un diagrama de Argand.



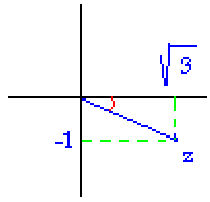
Con una calculadora podemos hacer el clculo:

La calculadora responde con 45 (p/4 radianes) , que es el ngulo en verde, al cual debemos sumarle 180 (p si estamos con radianes) para obtener el argumento 225 (5p/4 radianes), el ngulo en rojo que es el argumento pedido.

c) Para hacer la potencia sexta del nmero complejo $(\sqrt{3}-i)$ podemos multiplicar este complejo por s mismo seis veces, pero es ms simple operar con el complejo es su forma polar. Para ello representmosle en el plano de Argand:

$$\theta = \text{arctg}\frac{y}{x} = \text{arctg}\,1$$

Este nmero complejo tiene por mdulo:



Y por argumento:

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

que equivale a -30 (p/6 radianes). Por lo tanto el nmero complejo que tenemos es: $z = e^{-\frac{\pi}{6}i}$.

$$\theta = \text{arctg}\frac{y}{x} = \text{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Ahora elevamos este nmero a la sexta potencia:

$$z^6 = e^{-\pi i}$$

Por lo tanto el argumento pedido es -p (o p, que es lo mismo).

Pgina nueva 1

Ejercicio 2: Simplificar la expresin:

$$\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$$

Solucin:

En la primera fraccin podemos multiplicar y dividir por el conjugado del denominador, esto es:

3 + 4 i

En la segunda tenemos en cuenta que: $\frac{1}{i}=-i$

Por lo tanto, tenemos:

Finalmente hacemos las operaciones pertinentes:

$$\frac{(1+2i).(3+4i)}{(3-4i).(3+4i)}+\frac{(2-i).(-i)}{5}$$

$$=\frac{-5+10i}{3^2+4^2}+\frac{(-2i)+i^2}{5}=-\frac{5}{25}+\frac{10}{25}i+\frac{(-1-2i)}{5}=$$
$$=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i=-\frac{2}{5}$$

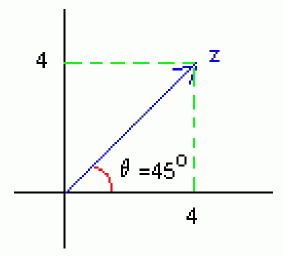
4) Resolver en C la ecuación:

$z^5 - 4 - 4i = 0$

Solución: Podemos despejar z^5 :

$z^5 = 4 + 4i$

Ahora representemos en el plano de Argand el número complejo 4 + 4 i (está hecho a la izquierda). Este complejo tiene por módulo y argumento:



$$r = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = \sqrt{2^5}$$

q = 45º (obviamente pues el fasor z está en la diagonal)

Por lo tanto, el complejo 4+4i puede ser expresado: $\sqrt{2^5}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Las soluciones de la ecuación vienen dadas por las cinco raíces quintas de este número complejo:

$$z_k = 2^{5/10} e^{\frac{\pi/4+2k\pi}{5} i} \qquad (k = 0,1,\cdots,4)$$

O expresada en grados:

$$z_k = 2^{1/2} e^{\frac{45^\circ+k360^\circ}{5}} \qquad (k = 0,1,\cdots,4)$$

Es decir, se trata de los números complejos:

$$z_0 = 2^{1/2} (\cos \frac{45^\circ}{5} + i \sin \frac{45^\circ}{5})$$

$$z_1 = 2^{1/2} (\cos \frac{45^\circ+360^\circ}{5} + i \sin \frac{45^\circ+360^\circ}{5})$$

$$z_2 = 2^{1/2} (\cos \frac{45^\circ+720^\circ}{5} + i \sin \frac{45^\circ+720^\circ}{5})$$

$$z_3 = 2^{1/2} (\cos \frac{45^\circ+1080^\circ}{5} + i \sin \frac{45^\circ+1080^\circ}{5})$$

$$z_4 = 2^{1/2} (\cos \frac{45^\circ+1440^\circ}{5} + i \sin \frac{45^\circ+1440^\circ}{5})$$

6) Siendo q un ángulo (en radianes) comprendido entre 0 y 2 p , resolver la ecuación:

$|e^{iq}-1| = 2$ {1}

Solución: Para un complejo las barras indican su módulo, es decir, para $z = a + i\, b$ tenemos:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

El complejo e^{iq} puede expresarse como: 1 (cos q + i sin q) , y por tanto:

el complejo e^{iq} -1 puede expresarse como: (cos q - 1)+ i sin q, siendo (cos q - 1) la "parte real" y sin q la "parte imaginaria", por tanto su módulo es:

$$|e^{i\theta} - 1| = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta}$$

Por lo tanto, la ecuación {1} puede expresarse en la forma:

$$\sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \text{sen}^2\,\theta} = 2$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros:

$(\cos q - 1)^2 + \sin^2 q = 2^2$

Finalmente despejamos el valor del ángulo q :

$\sin^2 q + \cos^2 q - 2 \cos q + 1 = 4$ --> $- 2 \cos q + 2 = 4$ --> $- 2 \cos q = 2$

Es decir, cos q = -1 . Y por tanto el ángulo pedido es q = p .

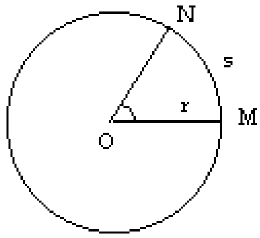
Radianes

NOCIONES PRELIMINARES DE MATEMTICAS

NGULOS EN RADIANES

Se define el **radian** como el ngulo que en una circunferencia subtiende respecto del centro O un arco MN con igual longitud que el radio r.

Si la longitud *s* del arco MN coincide con la longitud de *r* , entonces el ngulo subtendido desde el centro O corresponde a 1 radian.



En general, si tenemos una circunferencia de radio *r*, y un cierto ngulo a subtendiendo un arco de longitud *s*, el cociente *s/r* nos da el valor de ese ngulo en radianes.

Por otra parte, nosotros conocemos que la mitad de la circunferencia corresponde a un arco de longitud *pr,* mitad que equivale a un ngulo de 180 , lo cual nos permite hacer transformaciones entre radianes y ngulos:

Por ejemplo, cuntos radianes son 30 ?.

Respuesta: considerando la relacin

$$\frac{\pi}{180^{o}} = \frac{x}{30}$$

tenemos que *x* = *p/6* radianes.

Otro ejemplo, cuntos grados son 0,357 radianes ?.

Respuesta: considerando la relacin

$$\frac{\pi}{180^{o}} = \frac{0{,}357}{x}$$

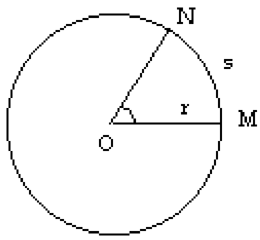
tenemos que *x = 20,45 .*

* Es interesante tambin recordar que 1 radin son 180/*p* *,* es decir, 57,29... grados. Mientras que 1 grado son *p*/180 , o sea, 0,1745... radianes.

* PROPIEDADES INMEDIATAS

* Segn esta definicin de radian, puede establecerse la siguiente relacin entre un ngulo a y el arco de circunferencia subtendido:

s = a . r



es decir, la longitud del arco s es el producto del nguloa (en radianes) por el radio del circulo.

* Algunas equivalencias entre ngulos en grados y en radianes:

Grdos	Radian.
30	p/6
60	p/3
90	p/2
120	2p/3
180	p
270	3p/2
360	2p

NOTA: Es muy prctico conocer "de memoria" la tabla presente, pues con ello ganamos en "velocidad de clculo". Algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Queremos conocer rpidamente a qu equivalen 75 , entonces:

75 = 60 + 15 -> p/3 + (1/2) p/6 -> 5p/12

Ejemplo 2: Queremos conocer rpidamente a qu equivalen 265 , entonces:

265 = 270 - 5 -> 3p/2 - (1/6) p/6 -> 53p/36

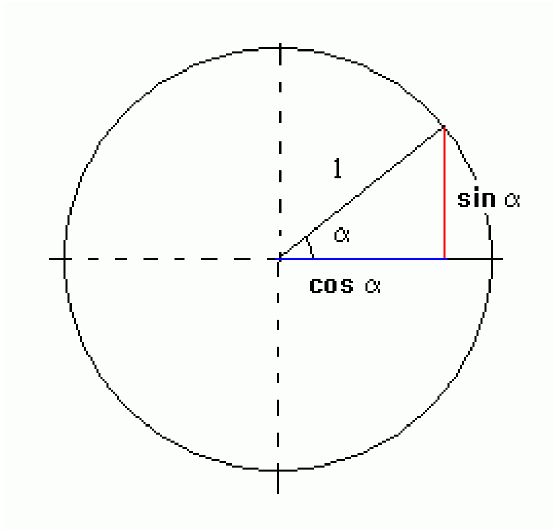
*** La circunferencia trigonomtrica.**

Se trata de una circunferencia imaginaria de radio r = 1, lo cual conduce a que la relacin s = a . r, se reduzca a:

s = a

Esta circunferencia adems facilita que podamos trazar fcilmente sobre ella los valores del seno, coseno y tangente de un determinado ngulo en radianes:

Si tenemos un ngulo a en una *circunferencia trigonomtrica* como la de la figura, la longitud del cateto vertical (marcado en rojo) ser el valor de sin a, puesto que la hipotenusa vale 1. Anlogamente, la longitud del cateto horizontal (marcado en azul) es el valor de cos a.



En el presente ejemplo tanto el seno como el coseno son positivos, pues se encuentran o bien arriba del eje horizontal, o bien a la derecha del vertical. Pero pueden darse otros casos:

El ngulo de la figura 1 se halla en el cuadrante II y tiene como seno un valor positivo (en azul), el coseno (en rojo) tiene un valor negativo. En la figura 2, el ngulo se halla en el cuadrante III y ambos valores son negativos.

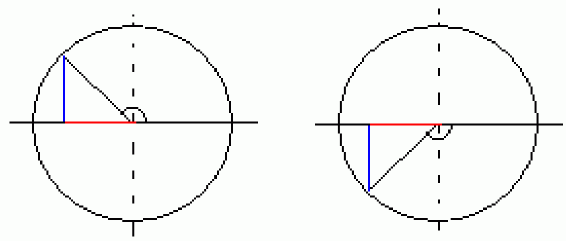


Fig. 1 Fig 2

Nosotros podemos trazar este tipo de *circunferencias trigonomtricas* para hacer diversas consideraciones sobre *senos* y *cosenos* de ciertos ngulos.

Por ejemplo:

En la figura 1 tenemos dos ngulos que se diferencia en p/2, sean a, b, con el mayor siendo b = a + p/2, entonces como puede apreciarse en la circunferencia trigonomtrica los dos tringulos que aparecen sobre ella son iguales, pero lo que es el seno para el ngulo pequeo es el coseno (con signo *negativo)* para el grande, y lo que es el coseno para el pequeo es es seno para el grande. Por tanto podemos escribir:

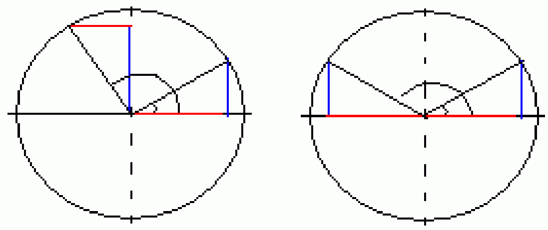


Fig. 1 Fig. 2

$$\sin (a + p/2) = \cos a$$
$$\cos (a + p/2) = - \sin a$$

En la figura 2 tenemos dos ngulos cuya suma es p (llamados *ngulos suplementarios*), sean a, b, con el mayor siendo b = p - a, entonces se puede apreciar que ambos senos coinciden, mientras que los cosenos tienen la misma longitud pero signos opuestos. Es decir:

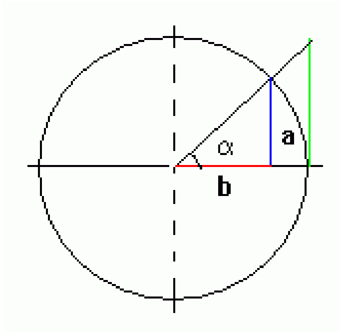
$$\sin (p - a) = \sin a$$
$$\cos (p - a) = - \cos a$$

El alumno deber acostumbrarse a manejar estas relaciones entre senos y cosenos de ngulos ayudndose de la circunferencia trigonomtrica.

* **Un caso especial:** ***la <u>tangente</u>.***

Tambin podemos utilizar la circunferencia trigonomtrica para hacer evaluaciones de tangentes de ngulos, aunque en este caso puede ser suficiente la consideracin de que la tangente es el cociente de seno entre coseno.

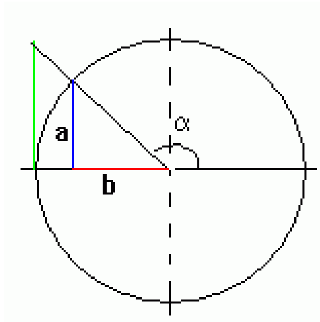
Tangente de un ngulo que se halle en el cuadrante I..



Si nos fijamos en la circunferencia de arriba, para el ngulo a tenemos que su tangente es la longitud del segmento marcado en verde, puesto que sabemos que: tg a = a/b, es decir, seno entre coseno, por lo tanto segn el teorema de Tales aplicado a los tringulos semejantes:

$$\frac{\tan \alpha}{1} = \frac{a}{b}$$

ahora bien, la tangente es la lnea verde de la figura de arriba que al estar sobre el eje horizontal es positiva, como efectivamente tiene que ser pues a/b es una cantidad positiva en el cuadrante I. Pero hay que tener cuidado con lo que sucede en los cuadrantes II y III. Veamos:



La tangente de un ngulo que se halle en el cuadrante II debe considerarse negativa.

Para estos casos la lnea verde nos da el valor de la tangente (sin el signo), sin embargo hay que considerar que el sentido de la tangente puede diferir del de a/b. En el ejemplo de arriba, para un ngulo en el cuadrante II, la lnea verde nos da el valor de la tangente <u>sin embargo sta es *negativa*</u>, como as lo indica a/b. Una anomala similar nos ocurre con los ngulos del cuadrante III, cuya lnea de la tangente la tenemos que trazar hacia abajo y sin embargo esa tangente es positiva. En el cuadrante IV no hay esa anomala.

* EJERCICIOS PARA EL ALUMNO

1) Dibuje una circunferencia trigonomtrica con dos ngulos a y b, siendo a pequeo y siendo b = p/2 - a (dos ngulos complementarios). Establezca las relaciones entre senos y cosenos de los ngulos complementarios.

2) Considere una circunferencia trigonomtrica con dos ngulos a y b, siendo a pequeo y siendo b = a + p . Establezca las relaciones entre senos y cosenos de estos dos ngulos.

3) Sean dos ngulos a y b, siendo a pequeo y siendo b = 3p/2 -a . Establezca con la ayuda de la circunferencia trigonomtrica las relaciones entre senos y cosenos de estos dos ngulos.

4) Sean dos ngulos a y b, siendo a pequeo y siendo b = -a (tambin puede expresarse b = 2p - a) . Establezca con la ayuda de la circunferencia trigonomtrica las relaciones entre senos y cosenos de estos dos ngulos.

-- Regresar a funciones trigonomtricas --

Funciones logaritmicas y exponenciales

ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/func_logaritm.htm

NOCIONES PRELIMINARES DE MATEMTICAS

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARTMICAS

* **Funciones exponenciales.**

Se llama *"exponencial"* a un nmero positivo elevado a una variable *x*, por ejemplo:

$$2^x, \quad (5.31)^x, \quad (\pi)^x$$

Aunque la funcin *exponencial* por excelencia en Matemticas es e^x (siendo *e*=2.718281...), tal es as que a esta funcin se la suele expresar abreviadamente como exp(*x*), llamndola a secas "la *exponencial* de *x*".

Pero en general una funcin exponencial tiene la forma:

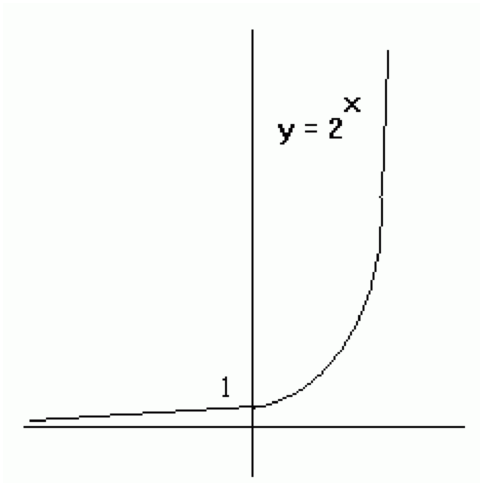
$$y = a^x$$

siendo *a* un nmero positivo distinto de 0.

Para dibujar las grficas de estas funciones conviene considerar dos casos: I) exponenciales con *a* > 1; y II) exponenciales con *a* < 1.

*** Funcin exponencial con *a*>1.**

En esta grfica puede apreciarse cmo la funcin exponencial es siempre positiva; cuando *x* tiende a - ∞ la funcin tiende a anularse, mientras que por la derecha <u>crece muy rpidamente</u> hacia ∞ (2 elevado a 20 es superior a un milln). Toda funcin exponencial con *a* mayor que 1 tiene una grfica muy similar a sta. A este caso pertenece la funcin *y*= e^x .



*** Funcin exponencial con *a*<1.**

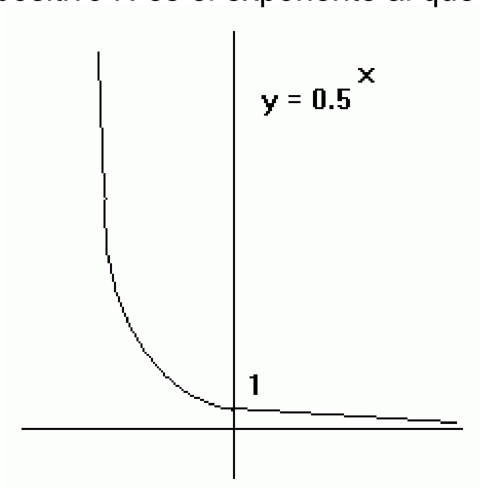
Como puede apreciarse en la grfica, la funcin exponencial es siempre positiva, pero en este caso el comportamiento de la funcin es el opuesto al caso anterior: es cuando *x* tiende a ∞ cuando la funcin tiende a anularse, por contra, crece rpidamamente para valores negativos de *x.*

* **Funciones *logaritmicas.***

Decimos que *logaritmo* (base *a*) de un nmero positivo N es *z*, lo cual expresamos, $\log_a N = z$, si se verifica:

$$a^z = N$$

En otras palabras, el logaritmo (base *a*) del nmero positivo N es el exponente al que hay que elevar la base *a* para obtener ese nmero N



Por ejemplo, decimos que el Logaritmo decimal (base 10) de 100 es 2, puesto que 10=100.

En el caso de que la base sea el nmero *e* = *2,7182818...* se llama "logaritmo natural" o "logaritmo neperiano" (en honor del matemtico John Neper), lo cual se suele denotar de una de estas formas:

Log N (sin poner la base), Ln N

En Matemticas generalmente se utilizan logaritmos neperianos, y escasamente se utilizan logaritmos en otras bases. Veamos las propiedades de los logaritmos:

* PROPIEDADES

Sean dos nmeros positivos *x*, y, se tiene:

I) log (*x . y)* = log *x* + log *y*
II) log (*x / y)* = log *x* - log *y*
III) log x^c = *c* log *x* (siendo *c* un nmero positivo o negativo, entero o no)

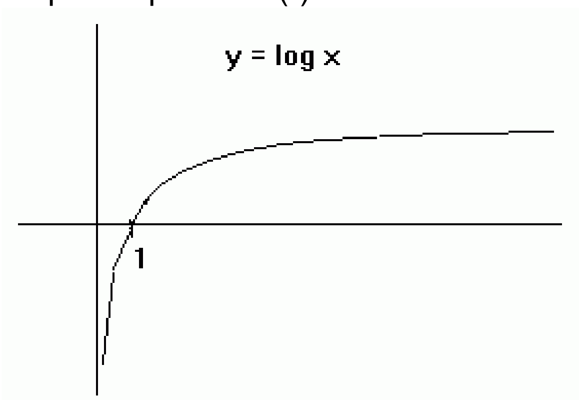
Casos especiales:

* log (*1 / x)* = - log *x* (segn la propiedad II, o la III con el exponente -1)
* (puesto que la raz equivale al exponente)

$$\log \sqrt{x} = \frac{\log x}{2}$$

*** Funcin logaritmo** (neperiano).

Podemos observar: (1) que slo existe logaritmo para *x* positivo. (2) que para *x*=1 el logaritmo se anula, cosa que es lgica pues *e* = 1 -y en general *N* = 1-. (3) Para el rango (0, 1) el logaritmo es negativo. (4) Para *x* tendiendo a 0 el logaritmo se hace - ∞ . Y (5) el logaritmo crece lentamente para valores positivos de *x*, y tiende a infinito lentamente cuando *x* tiende a infinito.



-- Regresar a tema de funciones --

Funciones trigonométricas

ehu.eus/juancarlos.gorostizaga/apoyo/func_trigonom.htm

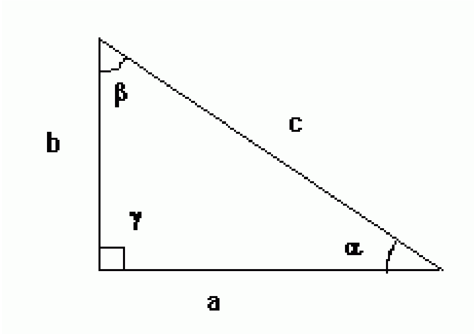
NOCIONES PRELIMINARES DE MATEMÁTICAS

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones *y = sin x, y = cos x, y = tg x.*

Conviene que comencemos repasando la noción trigonométrica de*seno*, *coseno* y *tangente* de un ángulo.

Sea un triangulo rectángulo, como el del gráfico presente, siendo los catetos los lados "a" y "b", y la hipotenusa el lado mayor (opuesto al ángulo recto) "c". Las relaciones entre los catetos y la hipotenusa se llaman *seno, coseno* y *tangente*, es decir:



El *seno* (sin ó sen) es el cociente entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.
El *coseno* (cos) es el cociente entre el cateto adjunto al ángulo y la hipotenusa.
La *tangente* (tg ó tan) es el cociente entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa.
La tangente puede considerarse también como el cociente del seno entre coseno.

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}\ ,\quad \cos\alpha = \frac{a}{c}\ ,\quad tg\ \alpha = \frac{b}{a}$$

* **Algunas observaciones y propiedades**.

- En Cálculo los ángulos suelen expresarse en radianes más bien que en grados. Siga el enlace si no domina bien el concepto de "radian".

- Como c > a y también c > b, se tiene que el seno y el coseno no pueden supera al valor 1; cosa que no sucede con la tangente. Por otra parte, lo valores de *a* y *b* pueden ser positivos o negativos:

En la figura 1, tanto "a" como "b" son positivos ("a" se halla a la derecha, "b" está arriba). En la figura 2, "a" es positivo, y "b" es negativo. En la figura 3, ambos son negativos. En la figura 4, "a" es negativo y "b" positivo.

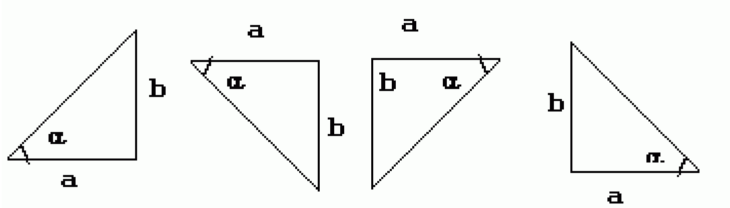


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

- Por tanto, los valores de seno, coseno y tangente de un cierto ángulo pueden ser positivos o negativos. Para el caso del seno y coseno estos valores están comprendidos entre -1 y +1. Por contra, la tangente de un ángulo puede tener cualquier valor.

- Para cualquier ángulo se cumple la relación fundamental:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

lo cual nos permite obtener otras relaciones entre ellos, tales como:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \quad , \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

- La *circunferencia trigonométrica*. Se trata de una circunferencia de radio R = 1 que permite establecer relaciones entre *seno* y *coseno* de un determinado ángulo, o entre estos y la tangente. Seguir el vínculo para conocer más sobre esta circunferencia.

*** La función *seno*.**

Por $y = \sin x$ (o castellanizado $y = \text{sen } x$) se entiende la función con valores de x comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$, teniendo como imágenes el seno del ángulo x radianes. Teniéndose en cuenta que si x es superior a 2π (360 grados) se considera un ángulo superior a una vuelta - imagínese un punto dando vueltas a una circunferencia, que no se detiene al llegar al punto de partida.

Por otra parte, se considera a x **positivo** cuando partiendo de las "3 horas" -siga imaginando el punto dando vueltas como si fuera un reloj- ha girado en sentido contrario al normal del reloj, y se considera a x **negativo** cuando partiendo de esa misma posición hubiera girado en sentido del reloj.

En la figura 1 vemos un ángulo positivo de x radianes, mientras que en la figura 2 se trata de una ángulo negativo de x radianes. Por ejemplo el x de las figuras de arriba podría ser *un radian*, por supuesto en Matemáticas se considera que:

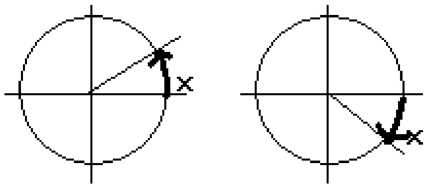


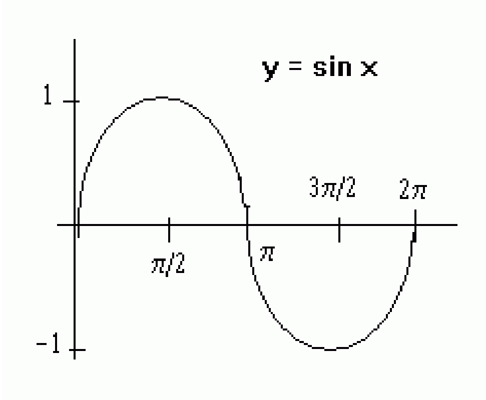
Fig.1 Fig.2

$1 + 2\pi$ equivale a 1 radian, $1 + 4\pi$ equivale a 1, $1 + 6\pi$ equivale a 1, ...
$2\pi - 1$ equivale a - 1, $4\pi - 1$ equivale a -1, $6\pi - 1$ equivale a -1, ...

En definitiva, $x + 2k\pi$ (siendo k un número entero) es equivalente a x, y por tanto se tiene que: $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$.

* Gráfica de la función $y = \sin x$.

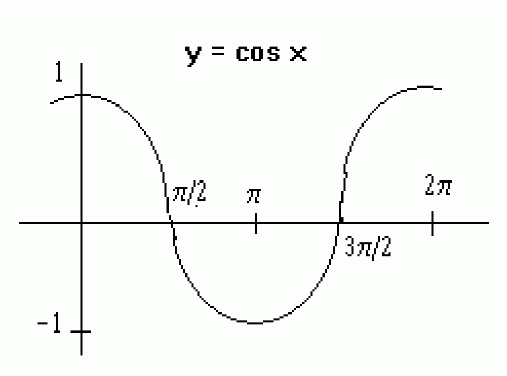
Observe cómo la función $y = \sin x$ es positiva en el intervalo [0, π], y es negativa en el intervalo [π, 2π], asimismo se anula en los puntos $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$.



*** La función *coseno*.**

Por $y = \cos x$ se entiende la función con valores de x comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$, teniendo como imágenes el coseno del ángulo x radianes. También hay que tener en cuenta que si x es superior a 2π (360 grados) es considerado un ángulo superior a una vuelta, como hemos dicho anteriormente para el caso del seno.

* Gráfica de la función $y = \cos x$.

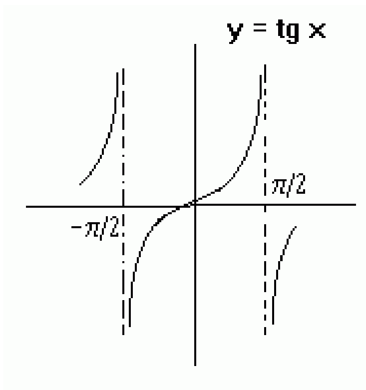


Observe cómo la función $y = \cos x$ es positiva en los intervalos [0, $\pi/2$] y [$3\pi/2$, 2π], y es negativa en el intervalo [$\pi/2$, $3\pi/2$], asimismo se anula en los puntos $x=\pi/2$, $x=3\pi/2$.

*** La función *tangente*.**

Por $y = \operatorname{tg} x$ (también denotado tan x) se entiende la función con valores de x comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$, teniendo como imágenes la tangente del ángulo x radianes. No obstante, esta función no posee imágenes (tiene *discontinuidades*) en los puntos $x = k\pi/2$, para k entero (positivo o negativo).

* Gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$.



Observe cómo la función $y = \operatorname{tg} x$ es positiva en el intervalo [0, $\pi/2$], y es negativa en el intervalo [$-\pi/2$, 0], se anula en los puntos $x=0$, $x=\pi$, $x=2\pi$ ... (al igual que el seno). En los punto $x = k\pi/2$ tiene un tipo específico de discontinuidad: tendiendo hacia $-\infty$ por la derecha de ellos, y tendiendo hacia $+\infty$ por la izquierda.

-- Regresar al tema de funciones --