Presentación

En nuestra vida cotidiana solemos enfrentarnos con situaciones que involucran el **manejo de funciones**. Cada vez que conocemos una correspondencia entre dos magnitudes o variables, como por ejemplo el color de una luz de semáforo y el mensaje correspondiente, estamos frente a una función -siempre que se cumpla que cada "valor de salida" tenga especificado con claridad uno y sólo un valor de llegada"-. En el caso del semáforo, al color rojo le corresponde sólo un mensaje: "deténgase". Cuando realizamos un envío por correo, el precio dependerá del peso de nuestra encomienda dentro de ciertos valores -hasta tantos gramos el precio es tal, de tantos a tantos gramos el precio es tal otro, etc.-.

En ambos ejemplos se cumple la primera condición que debe reunir una función: para cada valor "de salida" se identifica perfectamente un "valor de llegada".

Por el contrario, si confeccionáramos una lista en la que al nombre de cada empleado de una firma le hiciéramos corresponder el nombre de sus hijos, no se cumpliría la doble condición mencionada, porque algunos empleados no tendrán hijos y otros tendrán más de uno. Por lo tanto, "no todo elemento de salida tiene un correspondiente de llegada" y, además, "hay elementos de salida que tienen más de un elemento de llegada".

Comenzaremos la unidad abordando el concepto de función. Continuaremos con los conjuntos de Positividad, de Negatividad y de Ceros de una función y, luego, con las funciones elementales, lineal, especiales, crecientes y decrecientes e inyectivas y sobreyectivas.

Estos temas tienen que ver con la posibilidad de modelizar una situación, es decir que poder describirla matemáticamente, al menos en los aspectos esenciales para nuestro trabajo.

A través del estudio de la presente unidad esperamos que usted sea capaz de:

- Identificar si una relación dada cumple los requisitos para ser considerada una función.
- Plantear una función que modelice una cierta situación problemática.

1. El Concepto de Función

Cuando hablamos de función nos referimos a una relación entre dos conjuntos siempre y cuando cumpla ciertas condiciones, que veremos.

Una función posee tres componentes:

- un conjunto de "salida",
- un conjunto de "llegada"
- un conjunto de correspondencias

Veamos cuáles son los nombres matemáticos que se utilizan con más frecuencia para designarlos…

El "conjunto de salida" se denomina "**Dominio**", el "conjunto de llegada", "**Codominio**" y el conjunto de las correspondencias, "**Gráfico o conjunto de pares ordenados**".

Dado un elemento del dominio, llamaremos imagen de éste al elemento del codominio que es su correspondiente. Por ejemplo, si consideramos la función que a cada color del semáforo le asigna el mensaje correspondiente, la imagen del color verde es el mensaje "avance". Ahora bien, ciertos elementos del codominio pueden ser la imagen de algún elemento del dominio, mientras que otros pueden no serlo. Aquellos que sí lo sean forman lo que se denomina la **imagen de la función**.

Dado un elemento del codominio, pensemos en los elementos que lo tienen como imagen. El conjunto de éstos se llama la **preimagen** de ese elemento del codominio. Como algunos elementos del codominio pueden no ser imagen de ningún elemento del dominio, puede suceder que la preimagen de un elemento sea simplemente el conjunto vacío.

El dominio de una función

A veces una función viene dada por una fórmula y no se aclara el dominio de esa función. Para poder operar con ella es necesario conocer cuál es el conjunto más amplio de números reales. Por ejemplo, si una fórmula tiene un cociente es evidente que el denominador no podrá ser cero, y eso impone restricciones a los posibles valores del dominio de la función. Pero el cociente no es la única operación "delicada", también existen restricciones para:

- la raíz cuando es de índice par, porque no existe raíz de índice par de un número negativo,

- el logaritmo, ya que la base debe ser positiva y no puede ser igual a 1 y el argumento debe ser positivo,
- el arco seno y para el arco coseno, dado que sólo existen para valores comprendidos entre −1 y 1…

La imagen de una función

Al enfrentarnos a **una función dada como un diagrama sagital**, también conocido como diagrama de flechas, es sencillísimo determinar cuál es el conjunto de valores del codominio que forman la imagen de la función, sólo se trata de observar el esquema.

Pero cuando **la función viene dada por una fórmula** esa determinación no es tan sencilla. Habitualmente, "se despeja la x" con lo cual se obtiene la correspondencia "inversa", que equivale a invertir todas las flechas de la correspondencia "directa". Entonces, el conjunto de valores de "salida" de esta correspondencia "inversa" es lo mismo que el conjunto de "llegada" de la correspondencia "directa".

En cambio, si **la función está dada por un gráfico cartesiano**, el dominio de la función es el conjunto de valores del eje horizontal que están en una misma vertical que algún punto del gráfico, es decir que es el conjunto de todas las proyecciones de los puntos del gráfico sobre el eje horizontal. La imagen de la función es un conjunto de valores en el eje vertical (el eje donde están los valores del codominio), justamente de aquellos que están a una misma altura que algún punto del gráfico de la función, es decir, de aquellos puntos del eje vertical que son la proyección horizontal de algún punto del gráfico de la función.

Complemente esta explicación con el material de lectura que especificamos a continuación. Deténgase especialmente en los procedimientos descriptos por el autor.

Conjuntos de Positividad, de Negatividad y de Ceros de una función

Al estudiar una función puede interesarnos saber qué valores del dominio tienen una **imagen positiva**. Al conjunto de esos valores se lo conoce con el nombre de **Conjunto de Positividad** de la función.

- Si **la función viene dada por una fórmula**, conocer el Conjunto de Positividad de la función implicará conocer la fórmula y despejar qué valores de "x" tienen $F(x) > 0$.
- En caso de que **la función venga dada por un gráfico cartesiano**, la determinación consistirá en averiguar cuáles son los valores del eje horizontal que tienen imagen positiva, es decir, cuáles son los puntos del eje horizontal que están por debajo del gráfico de la función (aunque si se piensa descuidadamente se puede creer que esto está mal dicho).

De modo análogo denominamos **Conjunto de Negatividad** al conjunto de los valores de la función cuyas **imágenes son negativas**.

- Si **la función viene dada por una fórmula**, conocer su Conjunto de Negatividad implicará plantear la inecuación $F(x) < 0$ y "despejar".
- Si, por el contrario, **la función viene dada por un gráfico cartesiano** conocer el Conjunto de Negatividad requerirá determinar cuál es el conjunto de puntos del eje horizontal que queda ubicado por encima del gráfico (los puntos del gráfico están por debajo).

Como usted se imaginará, se llama **Conjunto de Ceros** al conjunto de todos los valores del dominio de una función cuya imagen es nula, es decir, que es igual a cero.

- Si **la función viene dada por una fórmula**, para determinar el Conjunto de Ceros se deberá plantear la ecuación $F(x) = 0$ y "despejar" el conjunto de valores "x" que la satisfacen.
- Si **la función viene dada por un gráfico cartesiano**, para determinar el Conjunto de Ceros será necesario saber cuáles son los puntos del eje horizontal que coinciden con el gráfico cartesiano (o sea los puntos de intersección).

Funciones Elementales

- ### Constante

El trabajo con funciones requiere el conocimiento de una variedad de funciones elementales que serán la base para poder enfrentar, luego, funciones más complejas.

La más sencilla es la **función constante** que asigna la misma imagen a todos los valores del dominio y tiene como gráfico cartesiano a una recta horizontal.

Formalmente, se escribe así:

F: R→ R /F(x)=k (donde **k** es un número real)

- ### Lineal

Podemos considerar la **función lineal** como una complejización de la anterior. Su gráfico es una recta oblicua.

La fórmula de esta función podría presentarse así:

F: R→ R / F(x) = m x + b *(donde "m" y "b" son números reales con "m" no nulo)*

Cuando la "x" vale "0" su imagen es la siguiente: F(0)= m 0 + b = b

Es decir, la imagen de "0" en una función lineal es siempre "b".

El gráfico cartesiano de esta función tiene un punto (0, b). Ese valor "b", que es nuestro **primer parámetro**, representa la ordenada del punto de intersección entre el gráfico cartesiano de la función lineal y el eje de ordenadas. Dicho valor "b" se llama la "ordenada al origen" de la recta.

El otro parámetro importante para esta función, y para nuestra asignatura, es la "pendiente" que corresponde a "m".

Si consideramos dos valores distintos en el dominio de la función, llamémoslos X1 y X2, sus imágenes serán "y1=F(x1)=mx1+b" y "y2=mx2+b" respectivamente.

Si calculamos el incremento de la "x" al pasar de "x1" a "x2" valdrá:

"Δx=x1"

Al calcular el correspondiente incremento de la función, cuando la variable pasa de "x1" a "x2", obtenemos:

"$\Delta y = F(x2) - F(x1) = (m\ x2 + b) - (m\ x1 + b)$"

que operando algebraicamente nos permite llegar a:

"$\Delta y = mx2 + b - mx1 - b = mx2 - mx1 = m\ (x2-x1)$"

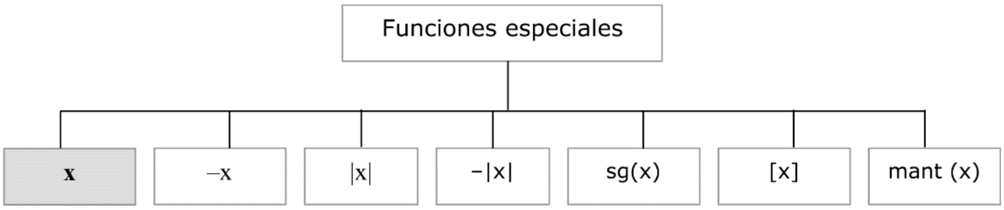
Entonces, el cociente de los dos incrementos, conocido como cociente incremental, valdrá $\Delta y/\Delta x = (m\ (x2-x1))/\ (x2-x1)$ que, como $x2-x1$ no es cero porque consideramos dos valores **distintos** de x, podemos simplificar y obtener: $\Delta y/\Delta x = m$.

Es decir que el coeficiente de la "x" representa el **cociente incremental** de la función. Para una función lineal ese **cociente** es constante.

Debemos dejar en claro que así como una recta horizontal es el gráfico cartesiano de una función constante y una recta oblicua es el gráfico cartesiano de una función lineal, ocurre que una recta vertical no es el gráfico cartesiano de ninguna función. Esto se debe a que un valor del dominio no le correspondería exclusivamente uno del codominio, sino infinitos valores. Eso es incompatible con el concepto de función.

- **Especiales**

En las próximas páginas describiremos cada una de las siguientes funciones:

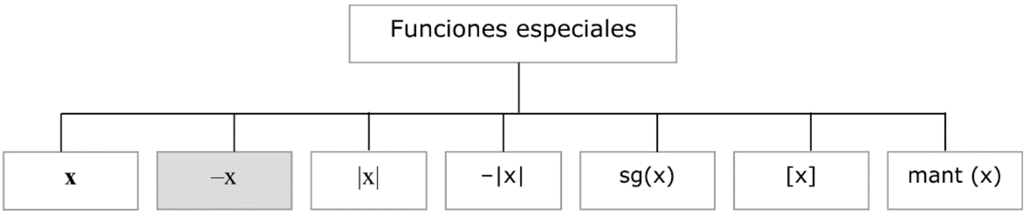


La **función identidad x** asigna a cada elemento de su dominio, como su **imagen**, ese mismo elemento.

Su fórmula es: $F: R \rightarrow R / F(x)=x$

Por ejemplo, la **imagen** de 2 es 2, la de –7 es –7, y así sucesivamente.

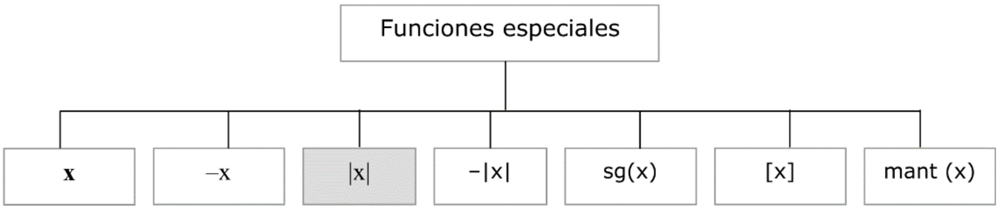
Si el dominio es todo R, su gráfico será una recta oblicua que resulta bisectriz del 1º y 3º cuadrantes.



La **función –x** asigna a cada elemento de su dominio, como su imagen, el número opuesto. Es decir que la imagen de 2 es –2 y la de –7 es 7.

Su fórmula es: F: R → R/ F(x) = – x

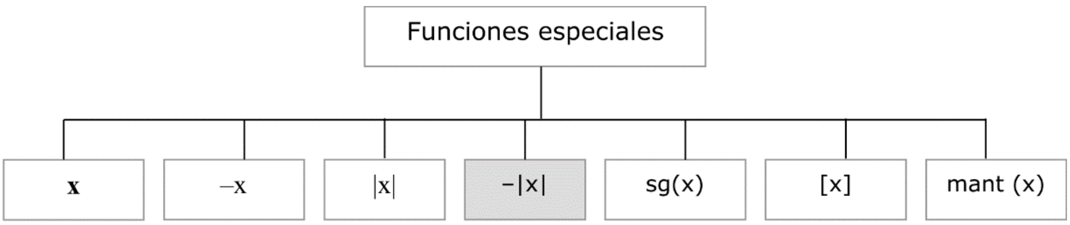
Basta graficar unos cuantos puntos para reconocer que su gráfico, si el dominio es todo R, es la recta bisectriz del 2º y 4º cuadrantes.



La **función |x|,** conocida como "valor absoluto" o "módulo", asigna a cada número su valor absoluto. Es decir que a cualquier positivo le otorga ese mismo positivo, al cero le asigna el cero y a cualquier negativo le asigna su opuesto.

Su fórmula es: F: R → R/ F(x) = |x|

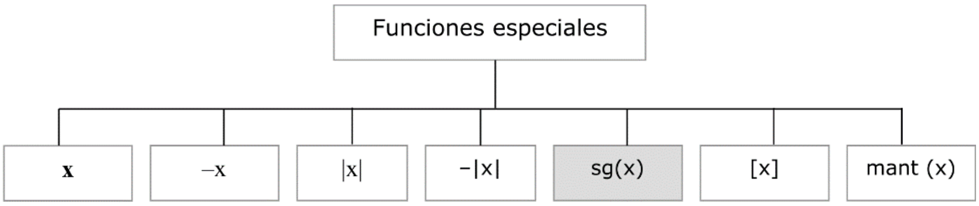
Para los negativos su gráfico coincide con el de F(x) = – x, mientras que para los positivos y el cero su gráfico coincide con el de F(x) = x.



La **función –|x|** asigna a cada número su valor absoluto cambiado de signo.

Es decir que su fórmula es: F(x) = – |x|

Esta función tiene como gráfico cartesiano uno relacionado con el de la función anterior. Sólo que éste es simétrico de aquel respecto del eje horizontal.



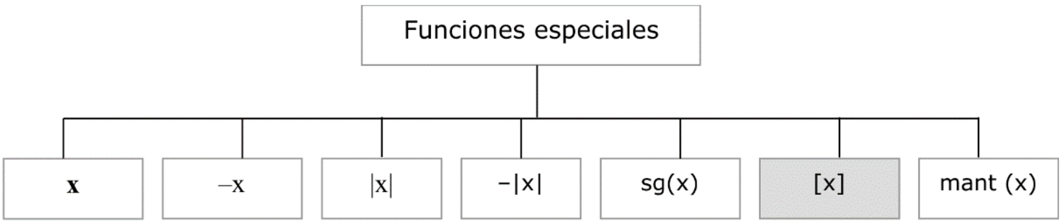
La **función signo sg(x)** asigna a cualquier positivo, como imagen, el 1; a cualquier negativo, el −1 y al cero, el mismo cero.

Su fórmula es F: R → R/ F(x) = sg (x)

donde:

sg= signo

Basta pensar un poco para aceptar que su gráfico está "cortado". Para los negativos es una semirrecta horizontal de altura "−1", para los positivos es otra de altura "1" y para el cero es "un punto", el punto (0; 0). Ahora bien, como no es posible graficar "un punto", se debe utilizar un recurso expresivo para ello. Una forma habitual es marcar un pequeño círculo sombreado de negro con centro en el punto que se desea representar (en nuestro caso, con centro en (0; 0)).



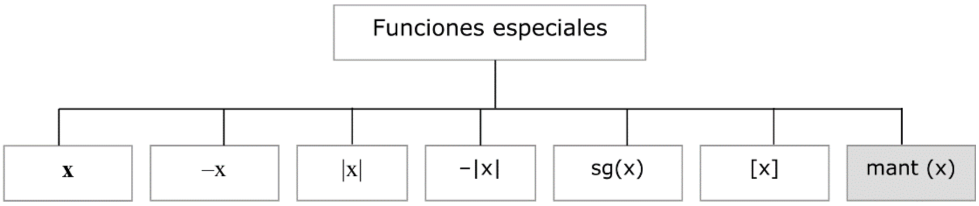
La **función [x]**, conocida como "parte entera", asigna a cada real, como imagen, el mayor entero que no lo sobrepasa. Por ejemplo, para el 5 su parte entera es 5, pues éste es el mayor entero que no es mayor que 5. Para 3.2 la parte entera es 3, ya que éste es el mayor entero posible que no es mayor que 3.2 (por supuesto que el siguiente entero, el 4, ya sería mayor que 3.2). Y para un negativo no entero pensemos como ejemplo cuál es la imagen del −5.4. Erróneamente, suele pensarse que su parte entera es el –5, pero –5 es mayor que –5.4 (–5 está a la derecha de –5.4). Por eso, no puede haber dudas: la parte entera de –5.4 es –6.

La fórmula sería F: R → R/ F(x) = [x]

donde:

La "x" aparece encerrada entre corchetes.

El gráfico de esta función está constituido por escalones, por tal razón se dice que es una función escalonada. En efecto, todos los valores del intervalo [2; 3) tienen como parte entera el número 2. Por eso para ese intervalo el gráfico es un segmento horizontal de altura 2, que incluye su extremo izquierdo pero no su extremo derecho.



La última de este grupo de funciones es la llamada **"función mantisa",** que simbolizamos **mant (x).**

La mantisa de un número real es la diferencia entre el número y su parte entera. Por ejemplo, la mantisa de 3.6 es 0.6 puesto que 3.6–3=0.6. Usando la notación "mant" para representar la palabra "mantisa" escribiríamos:

Mant(3.6) = 3.6 – [3.6] = 3.6 – 3 = 0.6

Y, en general, podemos escribir:

Mant(x) = x – [x]

Esta función está formada por pequeños trozos de segmentos entre dos valores enteros consecutivos. Por ejemplo, entre 0 y 1 la función vale 0 para el 0, vale 0.1 para el 0.1, vale 0.5 para 0.5 y así siguiendo con los valores cercanos a 1, como 0.8 cuya imagen es 0.8 y 0.9 cuya imagen es 0.9.

Funciones Crecientes y Decrecientes

En relación con una función como F: R →R / F(x) = 2 x + 3, si consideramos dos valores distintos en su dominio, por ejemplo el "1" y el "3" y comparamos sus imágenes, vemos que ellas son: F(1)=2.1+3=5 y F(3)=2.3+3=9.

Usted habrá notado que el número mayor (el 3) tiene la mayor imagen (el 9) o, lo que es lo mismo, el número menor (el 1) tiene la menor imagen (el 5).

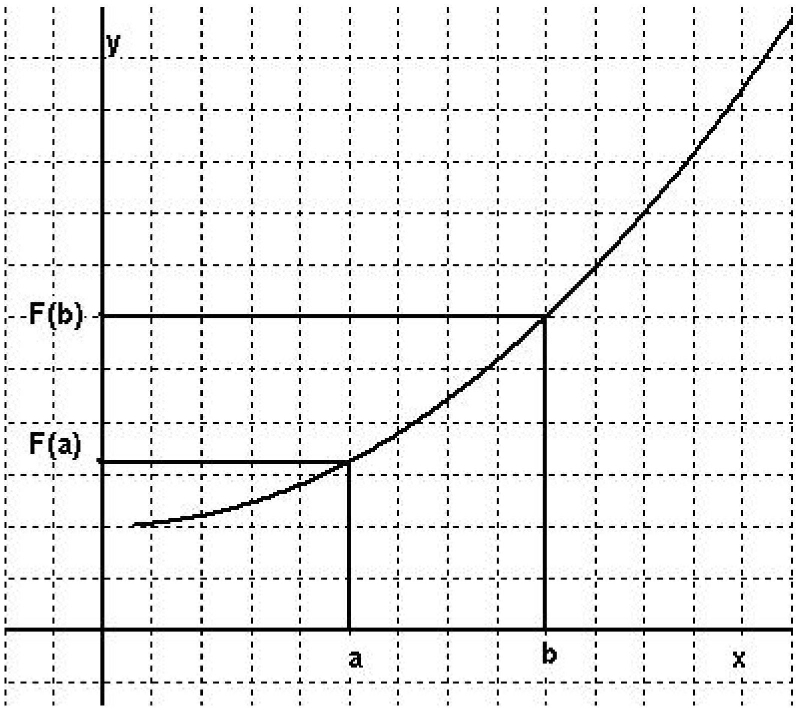
¿Eso ocurre sólo para el "1" y el "3"? ¿o para cualquier par de números distintos de su dominio?

Sucede para cualquier par de números distintos de su dominio. En efecto, si "a" y "b" son dos números distintos en el dominio de la función que estamos considerando, si se cumple que "a < b", entonces, ocurrirá (al multiplicar ambos miembros por 2, que es positivo) que "2a < 2b" y, por lo tanto, (simplemente sumando "3" a ambos miembros) que "2a + 3< 2b + 3". Es decir que si "a < b", entonces, "F(a) < F(b)".

En esta función, a medida que tomamos en cuenta valores cada vez mayores del dominio sus imágenes son también cada vez mayores.

En un caso como éste decimos que la función es **creciente** en su dominio.

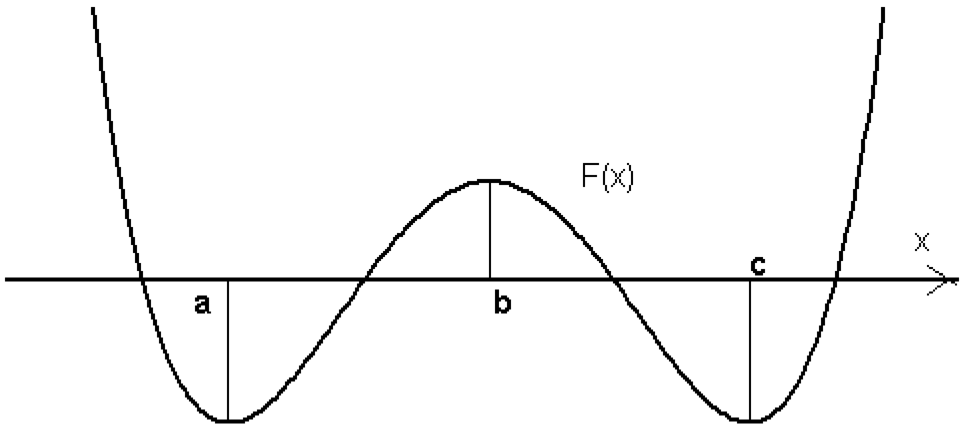
Observémoslo en el siguiente gráfico:



En el gráfico vemos que a mayores valores de "x" corresponden mayores valores de "y".

Ahora bien, podemos considerar también el crecimiento en una porción del dominio, por ejemplo en un intervalo. Una función puede ser creciente en un intervalo del dominio y ser decreciente en otro.

Por ejemplo para la función:



La función es **decreciente** en (−∞; a) y también en (b; c), con lo cual podemos decir que es decreciente en (−∞; a) U (b; c). Por otro lado, es **creciente** en (a; b) y también lo es en (c; +∞) con lo cual podemos afirmar que es creciente en (a; b) U (c; +∞).

Llamaremos Intervalos de crecimiento a la unión de todos los intervalos del dominio donde la función es creciente y denominaremos Intervalos de decrecimiento a la unión de todos los intervalos en donde la función es decreciente.

Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas

Consideremos la expresión $a^2 = 5^2$, ("a" es un número real).

¿Podremos deducir a partir de ella que "a=5"?

Es evidente que no, pues podría ser que fuera "a=5" o bien "a= −5". Entonces, sabemos que $a^2 = 5^2$ no implica que "a =5".

De $a^2 = b^2$ no podemos concluir que "a=b". Lo que sí sabemos es que $a^2 = b^2$ implica $a = b \vee a = -b$. Podríamos decir que la función cuadrado no se puede simplificar, es decir, no se puede "tachar" sin más y obtener una expresión equivalente a la original.

En cambio, si tuviéramos $a^3 = b^3$ concluiríamos, sin duda, que $a = b$.

Simbólicamente colocaríamos: $a^3 = b^3 \Rightarrow a = b$

Si usted tiene alguna duda al respecto puede intentar hallar dos números distintos que tengan el mismo cubo.

Es decir que la función cubo se puede simplificar obteniendo una expresión igual a la original. Cuando pasa esto decimos que la función es **inyectiva**.

Una función será llamada inyectiva cuando, para cualesquiera reales a; b del dominio, vale: "si se cumple F(a)=F(b) entonces a=b"

Por lo tanto, una función no será inyectiva si encontramos al menos un par de números distintos que tienen la misma imagen. Es decir, F no es inyectiva si existen a; b distintos, en el dominio, tales que F(a)=F(b).

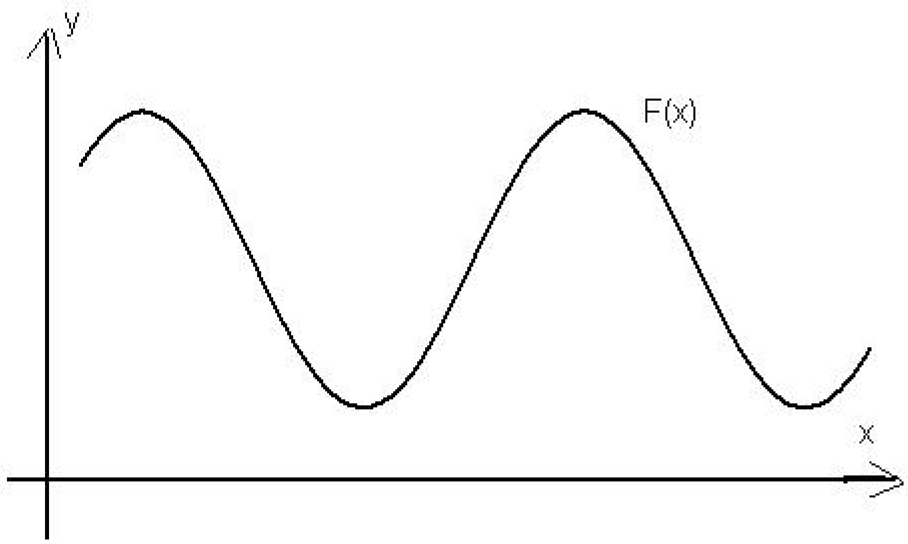
Por ejemplo, la función cuadrado: $F : R \to R / F(x) = x^2$ no es inyectiva, porque encontramos al menos dos números reales distintos, por ejemplo,

−3 y 3 que tienen igual imagen. Es decir, F no es inyectiva, porque $3 \neq -3 \ y \ F(3) = F(-3)$.

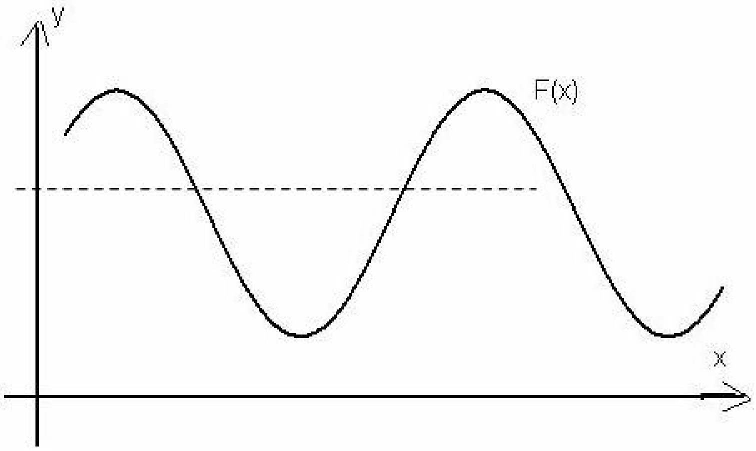
En cambio, esto no pasaría para la función cubo, sería imposible encontrar dos reales distintos con igual cubo.

Ahora bien, en un gráfico ¿cómo se "ve" la inyectividad de una función?

Consideremos esta función:

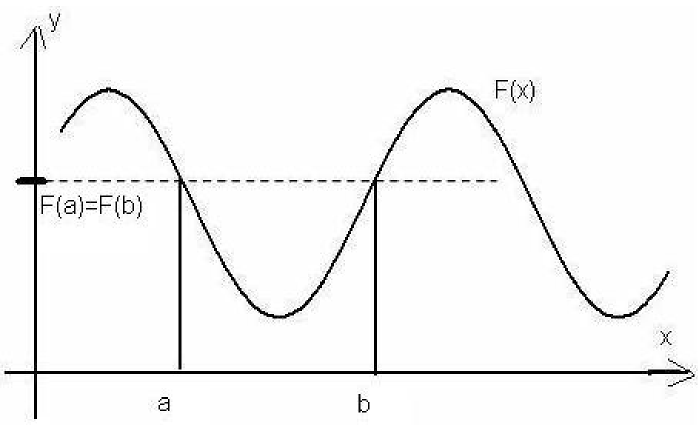


Será suficiente con trazar una horizontal que corte al gráfico para encontrar lo siguiente:



Vemos que esta horizontal corta al gráfico en más de un punto. Hemos señalado dos de ellos. Podríamos indicar tres, pero excede nuestros fines.

Señalemos las abscisas de esos puntos donde la horizontal corta al gráfico.

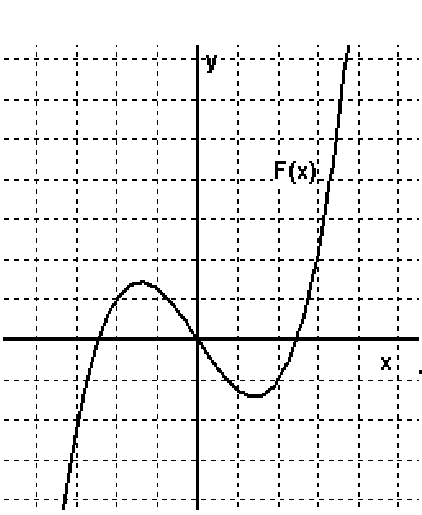


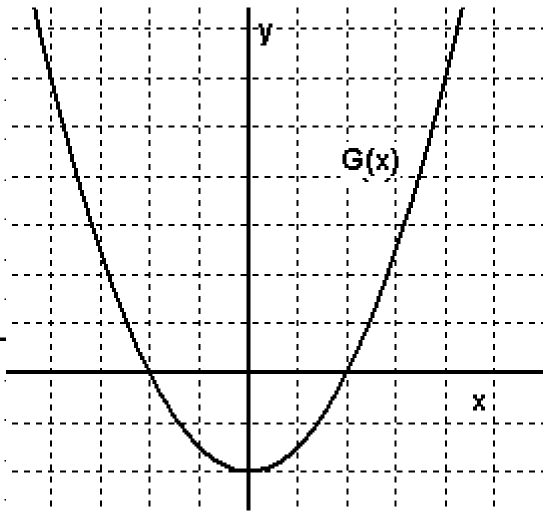
Las abscisas de los puntos de intersección se han llamado "a" y "b". Vemos que las imágenes de "a" y "b" son iguales (simbólicamente F(a)=F(b)) a pesar de que $a \neq b$. Y, entonces, F no es inyectiva.

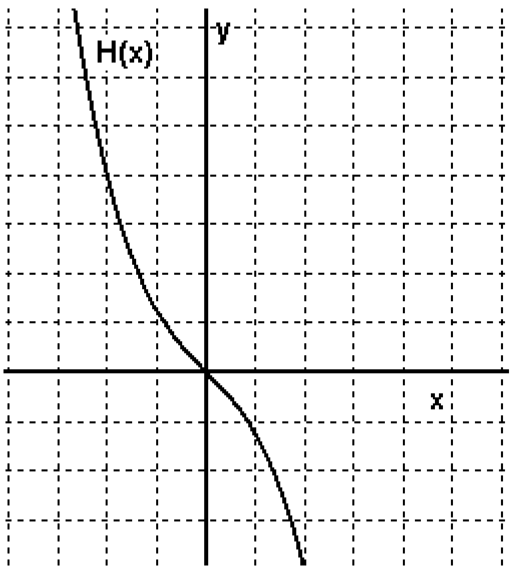
Cada vez que el gráfico sea tal que pueda ser cortado por una horizontal en más de un punto, tendremos la situación anterior, y diremos que la función no es inyectiva.

De modo que, gráficamente hablando, una función será inyectiva cuando, y sólo cuando, ninguna horizontal corte a su gráfico en más de un punto.

Actividad: Observe los siguientes gráficos y reconozca cuáles de las siguientes funciones son inyectivas.



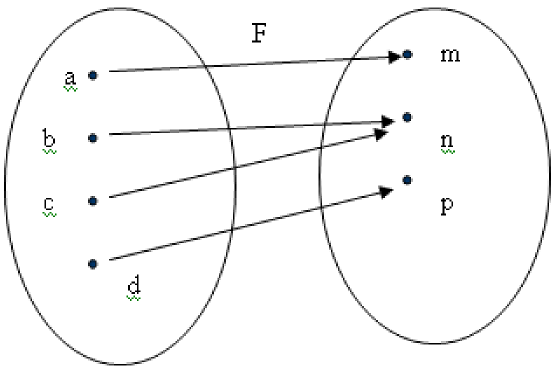




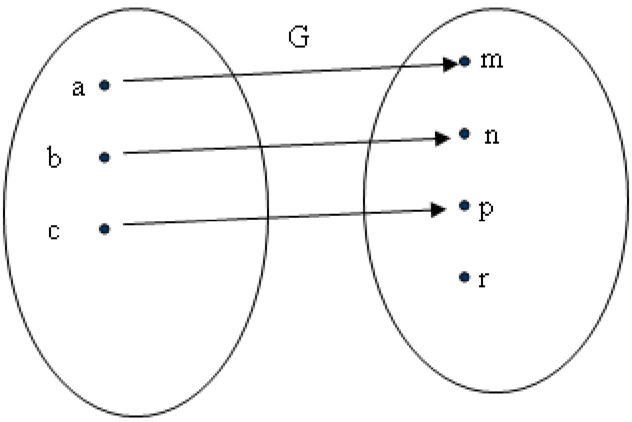
Seguramente, usted habrá advertido que las funciones F y G son no inyectivas mientras que la H sí lo es. Será útil trazar rectas horizontales para comprobar cuál de ellas es la que tiene imágenes iguales para números distintos en el dominio.

Hasta aquí nos hemos referido a la función inyectiva. Avancemos, ahora, con el concepto de **función sobreyectiva**.

En un diagrama sagital como el siguiente observamos una característica importante de ciertas funciones: todos los elementos del Codominio tienen alguna flecha que llega a ellos, es decir, todos los elementos del Codominio son la imagen de algún elemento del Dominio.



Comparemos esta función con la que viene dada en el siguiente diagrama:

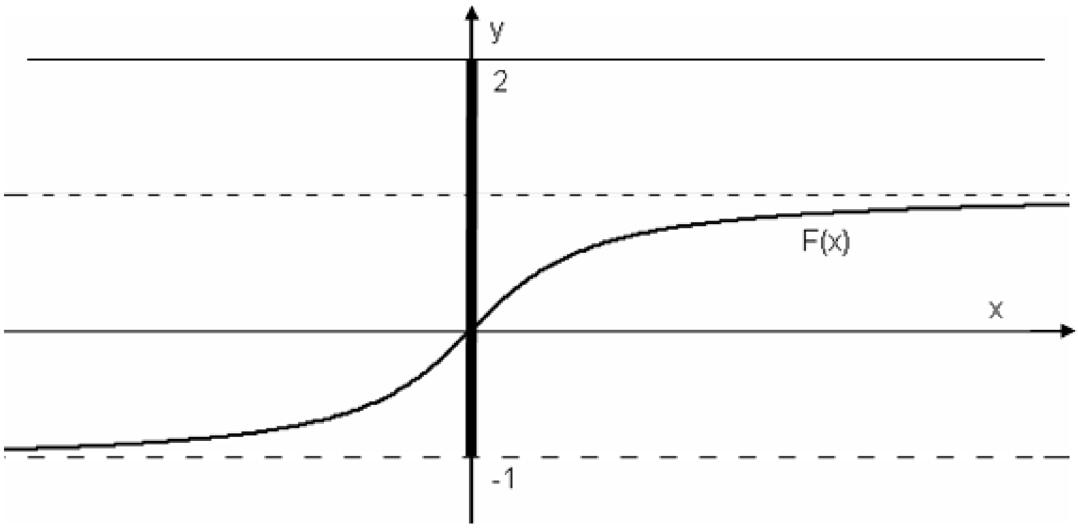


Este diagrama de la función G tiene, en el Codominio, un elemento “r” que no es imagen de ningún elemento del Dominio. Esto significa que la función G no es sobreyectiva.

Considerando que la imagen de una función es el conjunto de todos los elementos del Codominio que son imagen de algún elemento del Dominio, podemos ver que en una función que no es Sobreyectiva ocurre que el codominio y la imagen son distintos. Tengamos en cuenta que para esta función, COD= {m; n; p; r} mientras que IM={m; n; p}, claramente se advierte que no son iguales. De modo que también podemos decir que una función es **sobreyectiva** cuando su imagen es igual a su codominio.

¿De qué modo se caracteriza gráficamente que una función sea sobreyectiva?

Supongamos que tenemos la función $F: R \rightarrow [-1; 1]$ con el siguiente gráfico:



Hemos resaltado con un trazo muy grueso el Codominio de F. Vemos que los números que están entre 1 y 2 en el Codominio no tienen ninguna preimagen, no son imagen de ningún número del Dominio. Es decir que la función no es sobreyectiva. Cualquier recta horizontal que tenga altura entre 1 y 2 cortará al Codominio, pero no al gráfico.

En otras palabras, cuando existe una horizontal que corta al Codominio pero no al gráfico, la función no es sobreyectiva.

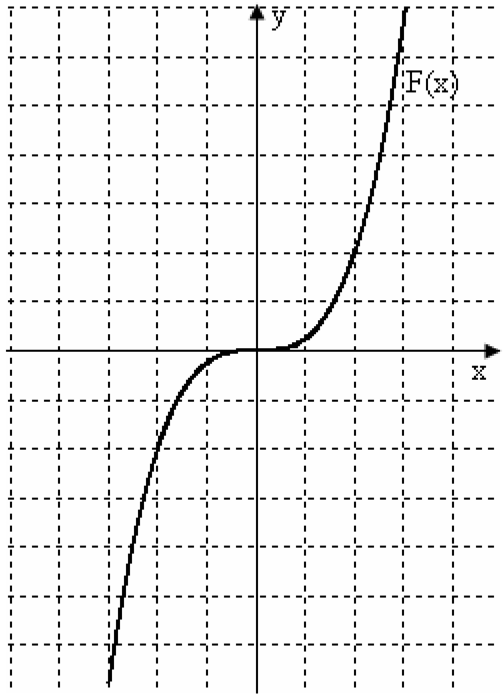
De aquí podemos formular, en lenguaje gráfico, que una función es sobreyectiva cuando toda horizontal que corta al Codominio corta también al gráfico.

Por otro lado, una función que sea simultáneamente **Inyectiva** y **Sobreyectiva** se llamará **Biyectiva**.

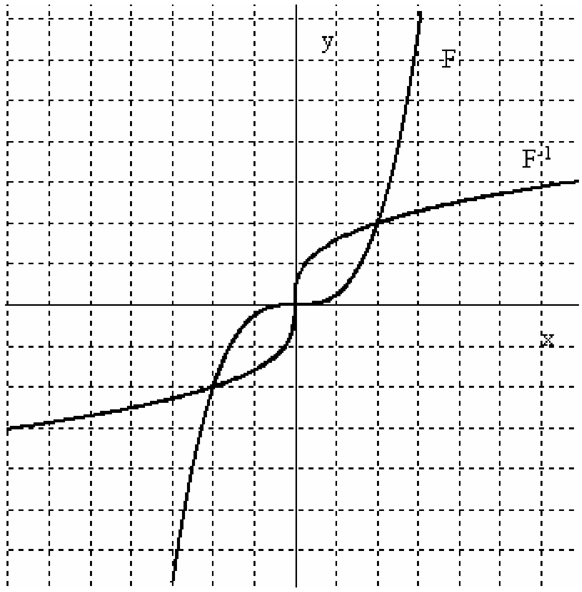
Si se invierte la posición de cada elemento y su imagen en una función que sea Biyectiva, se obtendrá nuevamente otra función. Eso sólo sucede para funciones que sean Biyectivas, por eso a éstas se las llama también funciones inversibles (tienen función inversa, es decir, su relación inversa es también función).

El gráfico de la función inversa de una función F (la función inversa se designará F^{-1}) tiene una característica: es simétrico respecto de la recta bisectriz del 1er y 3er cuadrantes. Veámoslo en un gráfico.

Tenemos una función F biyectiva (no indicamos en el gráfico el Dominio y el Codominio para no recargarlo):



Su función inversa será F^{-1}. Las indicamos a ambas en el mismo gráfico:



Basta trazar la recta y=x, que es la bisectriz de 1er y 3er cuadrantes, para advertir que F y F^{-1} son simétricas respecto de ella.