Funciones Exponenciales

En muchos fenómenos de distintas áreas se presentan comportamientos de crecimiento o de decrecimiento que llamamos “exponenciales”.

Veamos un ejemplo concreto del comportamiento exponencial.

Consideremos una población inicial de 100 bacterias en un medio apropiado para su desarrollo. La cantidad de bacterias presente se mide a intervalos de tiempo, y se obtienen los valores indicados en la siguiente tabla.

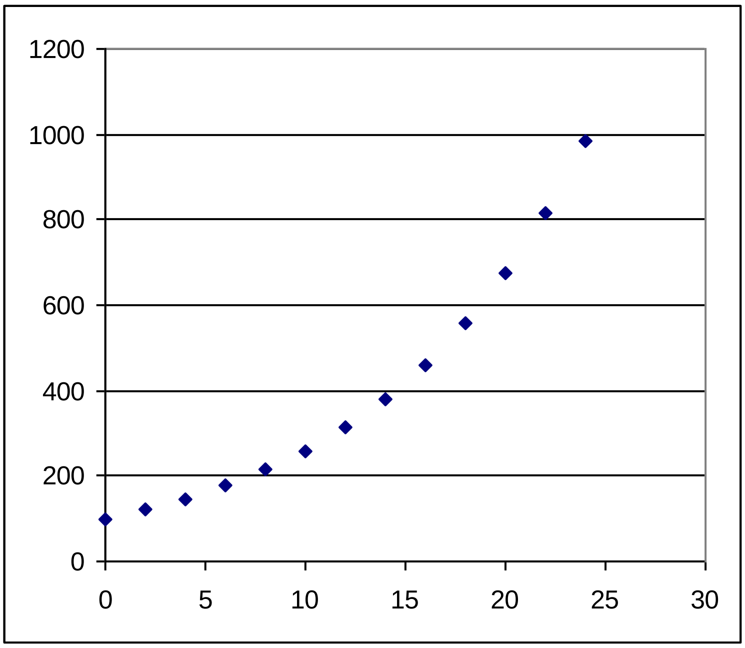
t	n=F(t)
2	121
4	146
6	177
8	214
10	259
12	314
14	380
16	459
18	556
20	673
22	814
24	985

donde:

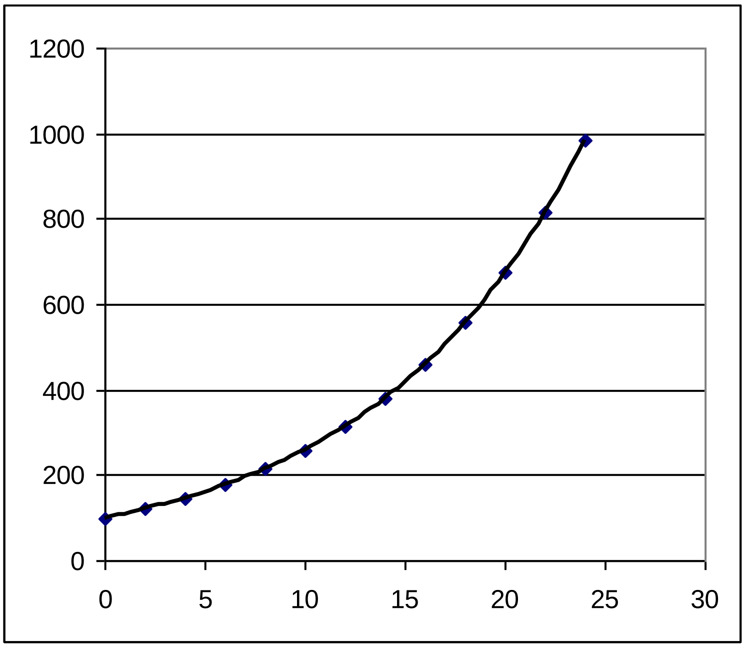
“t”: es el tiempo medido en minutos

“n”: es la cantidad de bacterias en el instante “t”

Al representar dichos valores en un par de ejes coordenados podemos obtener este gráfico:



El siguiente diagrama nos permite apreciar el diseño general que tendrá la función correspondiente:

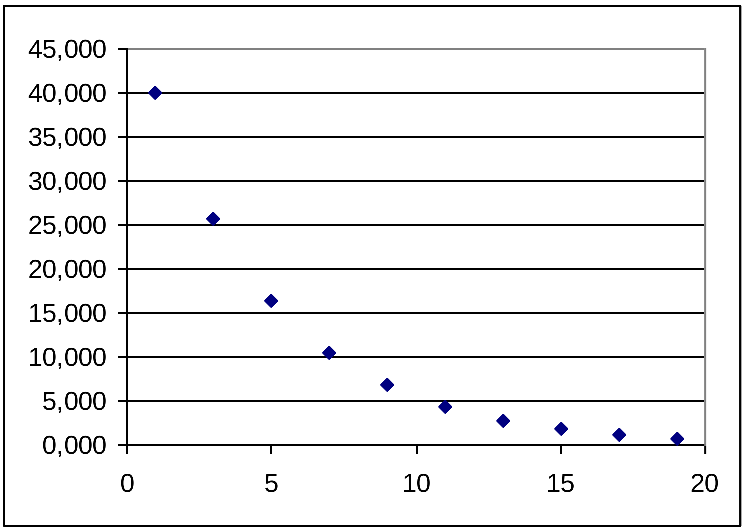


Observe que **esta función es creciente**, pero no en el estilo de una función lineal, pues a mayores valores de “t” corresponden mayores valores de N(t). A medida que consideramos valores superiores, el crecimiento es cada vez mayor, y el gráfico es más empinado. Una función lineal, en cambio, crece de modo “parejo”, la recta tiene la misma pendiente en toda su extensión.

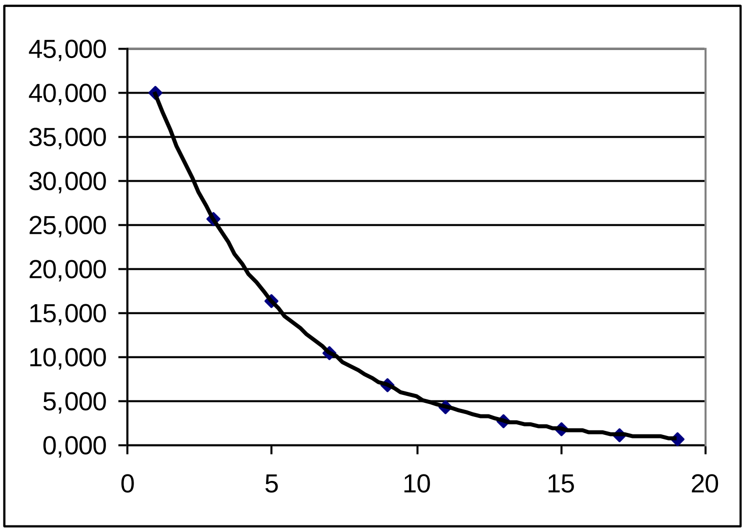
Esta fórmula satisface plenamente los valores de la tabla:

$$F : R \to R / F(x) = 100 \cdot (1.1)^{x}$$

También podríamos enfrentarnos con una función similar si consideráramos, por ejemplo, la radiación emitida por una pieza de material radiactivo. En ese caso, obtendríamos una **función decreciente**, porque la actividad del material es cada vez menor. El diagrama de puntos tendría este aspecto:



Uniendo con un trazo suave tendríamos:



Los dos tipos de funciones presentadas en los ejemplos son exponenciales y corresponden a funciones con base “grande” (b>1) y con base “chica” (0<b<1).

Pero, ¿qué entendemos por función exponencial?

Las funciones exponenciales se definen de este modo:

$$F : R \rightarrow R : F(x) = b^{x} \ (siendo\ b > 0\ y \quad b \neq 1)$$

Algunos ejemplos son:

$$F : R \rightarrow R : F(x) = (3.2)^{x} \ ,$$

$$G : R \rightarrow R : G(x) = (0.7)^{x} \ ,$$

$$H : R \rightarrow R : H(x) = (\frac{2}{3})^{x}$$

De estas funciones pueden derivarse otras, que surgen al multiplicar aquellas por una constante (no nula), al sumarles o al restarles una constante**.**

Las funciones exponenciales poseen ciertas características o propiedades que es importante que comprobemos y recordemos.

Características de las formas exponenciales

- La imagen de la función es siempre positiva
- La función exponencial es siempre inyectiva
- La función exponencial no es sobreyectiva
- El eje de las “x” es una asíntota para ambas variedades (base “chica” y base “grande”)
- La función exponencial de “base grande” es creciente y la de “base chica” es decreciente

Expliquemos cada una de ellas.

- **La imagen de la función es siempre positiva**, es decir, si $F : R \rightarrow R : F(x) = b^{x} \ (siendo\ b > 0\ y \quad b \neq 1)$ entonces vale $F(x) > 0$. Esto es así porque la gráfica de la función exponencial se ubica siempre por encima del eje de las abscisas. Para poder comprender este punto, observe los gráficos anteriores.

  Esto hace que si tenemos una inecuación como la siguiente: $0.9^{x} \cdot (x-2) > 0$ podamos tener en cuenta lo que venimos diciendo para saber que esa inecuación es equivalente a $(x-2) > 0$. En efecto, para que un producto sea positivo, los dos factores deben ser del mismo signo y como 0.9^{x} es siempre positivo esto significa que

$(x-2)$ también debe serlo. No vale la pena agregar cómo finaliza la resolución de esta última inecuación, porque es demasiado sencilla.

- **La función exponencial es siempre inyectiva**, es decir, no repite valores independientemente del tipo de base que posea. Además, podemos decidir que en su gráfico no haya puntos distintos que tengan la misma ordenada. Si F es inyectiva significa que la expresión $"F(a)=F(b)"\ equivale\, a\ \ "a=b"$ para cualquier par de valores a y b del dominio. Con ello se puede "simplificar" cualquier ecuación del tipo $0.5^{x+2}=0.5^{5}$. Como la exponencial es siempre inyectiva, podemos simplificar la ecuación de este modo:

$$0.5^{x+2}=0.5^{5}\ \Leftrightarrow x+2=5\ \Leftrightarrow x=3$$

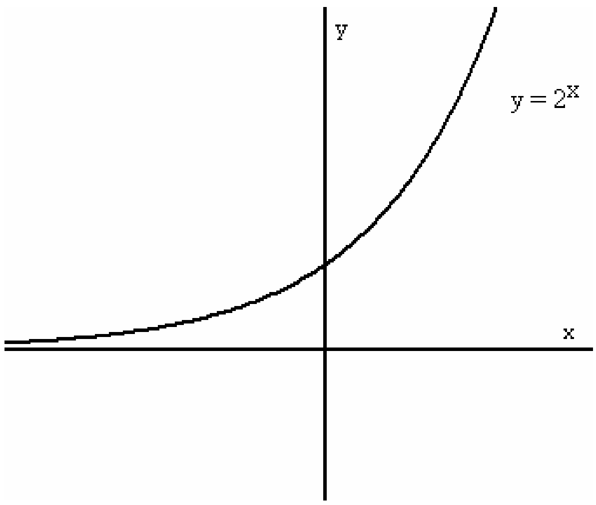
… y así queda resuelta.

- **La función exponencial no es sobreyectiva**, porque su Codominio es R y su imagen es $\left[0;+\infty\right)$. Esto significa que hay números del Codominio que no son imagen de ningún número del dominio.

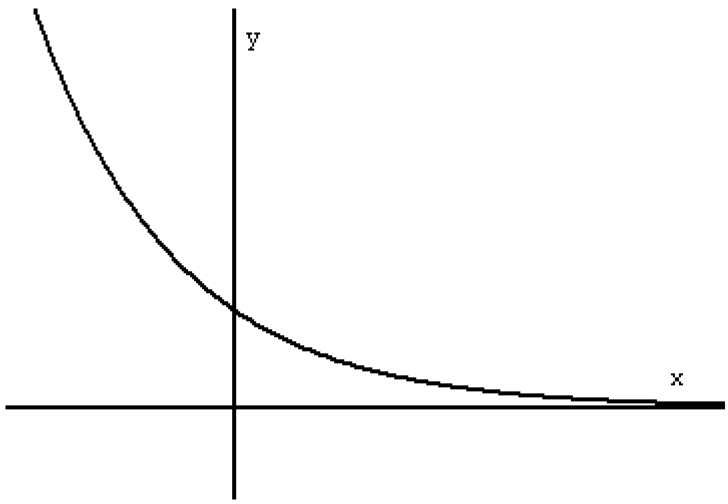
  Por ejemplo, considerando la función $F:R\rightarrow R\,/\,F(x)=2^{x}$, vemos que el número 8 es imagen del número 3 y el 16, del 4. En general, cualquier positivo es imagen de algún real, pero ningún negativo es imagen de un número del dominio. Si pensáramos cuál podría ser el exponente "x" que verificara: $2^{x}=-8$, advertiríamos que no existe tal "x". Si lo pensáramos gráficamente, notaríamos que ninguna recta horizontal cuya ordenada fuera negativa cortaría al gráfico. Podemos verificarlo en cualquier gráfico que tenga una función exponencial.

- El eje de las "x" es una asíntota para ambas variedades de función exponencial. La de "base chica" se va aproximando al eje de abscisas en el sector "derecho" del gráfico, mientras que la de base grande se aproxima al eje "x" en el sector "izquierdo" del gráfico.

  Tomamos el siguiente gráfico de $F(x)=2^{x}$ como ejemplo para "base grande".



Consideramos el gráfico de $F(x) = 0.5^x$ como ejemplo para "base chica".



- **La función exponencial de "base grande" es creciente**, es decir que a mayores valores de "x" corresponden mayores valores de "y" y recíprocamente. Por eso esta función "conserva el orden" y nos permite, a partir de $2^a < 2^b$, obtener $a < b$. Inversamente, **la función exponencial de "base chica" es decreciente**, esto es, a mayores valores de "x" corresponden menores valores de "y". Con lo cual esta función "invierte el orden" y nos permite, a partir de $(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$, obtener $a > b$.

La clase anterior desarrollamos conceptos de la **función logaritmo**, veremos ahora las relaciones que existen entre ambos tipos de funciones.

Diremos que las **funciones logarítmicas**, que son **inversas** de las **exponenciales.**

Comencemos con el siguiente problema que brinda la base y el resultado, y pide hallar el exponente.

Sabiendo que $2^x = 32$ determinemos cuál es el valor de "x".

Para encontrar la función debemos "invertir" la función exponencial, pero ello requiere que la función a invertir sea biyectiva, es decir inyectiva (que ya lo es la exponencial) y sobreyectiva (que no lo es). Entonces, deberíamos "reducir" o "restringir" el Codominio para que coincida con la imagen. Esto es simple: dado que la imagen es $[0; +\infty)$, restringimos el Codominio para que sea igual, es decir, **redefinimos la función exponencial** de este modo:

$$F^* : R \to [0;\ +\infty) / F^*(x) = b^x \ \ (b > 0 \ \wedge b \neq 1)$$

Como la función así redefinida es sobreyectiva, además de inyectiva, tiene función inversa. Lo que equivale a decir que su relación inversa es una función.

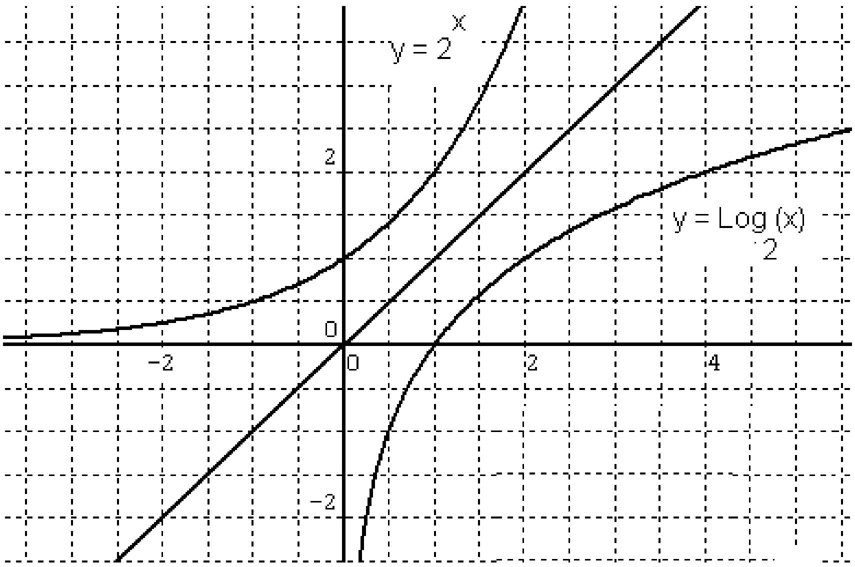
Esa función inversa es la que llamamos **función logarítmica** que viene dada por:

$$F^{-1}:[0;\ +\infty) \to R\,/\,F^{-1}(x) = Log_b(x) \quad (b > 0\ \wedge b \neq 1)$$

Denominamos “argumento” al valor "x" al que se le aplica la función.

Para conocer el aspecto gráfico de una función logarítmica debemos recordar que los gráficos de dos funciones inversas (en nuestro caso **exponenciales y logarítmicas**) son simétricos respecto de la recta y=x. Por otro lado, debido a que existen diferencias entre el gráfico de una función exponencial de "base grande" y otra de "base chica", los gráficos de las funciones inversas correspondientes (la logarítmica de "base grande" y la de "base chica") también diferirán.

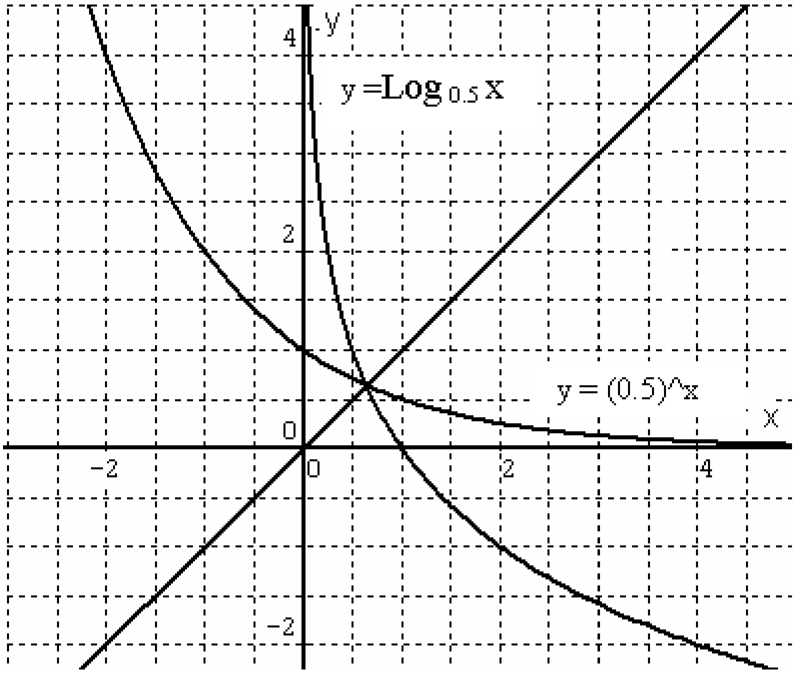
Veamos un par de funciones inversas: una exponencial y la otra logarítmica, ambas de "base grande".



¿Considera usted que las funciones representadas en el gráfico tienen un comportamiento similar?

- ¿Ambas son inyectivas?
- ¿Ambas son sobreyectivas?
- ¿Qué sucede con estas funciones respecto del crecimiento?

En el siguiente gráfico representamos una función exponencial de "base chica" y su correspondiente inversa logarítmica. Graficamos, específicamente, las funciones $F(x) = (\frac{1}{2})^x$ y su inversa $F(x) = Log_2(x)$



En ambos gráficos podemos observar que las dos funciones de "base chica" (tanto la exponencial como la logarítmica) son **decrecientes**, y que las dos funciones de "base grande" (tanto la exponencial como la logarítmica) son **crecientes**.

Las propiedades que venimos nombrando se traducen en la posibilidad de resolver inecuaciones del tipo de: $Log_2(x+2) > Log_2(5)$.

Como se trata de una inecuación que involucra una función logarítmica de "base grande", sabemos que esa función es creciente y, por lo tanto, "conserva el orden". Por eso, de ella podemos deducir lo siguiente:

$x+2>5$ y, posteriormente, $x>3$

Dichas propiedades también se utilizan en la resolución de ecuaciones como la siguiente: $Log_3(4+x) = Log_3(2x)$

Dado que la función logarítmica es inyectiva, podemos "simplificar" la expresión y obtenemos $4+x=2x$. Pero debemos tener en cuenta que ambas expresiones logarítmicas deben estar definidas, es decir, ambos argumentos deben ser positivos (vale decir debe cumplirse, además, que: $4+x>0 \wedge 2x>0$).

Ahora bien, la propia definición de la función logarítmica nos da la pauta para resolver ecuaciones como la siguiente: $Log_2(x+2) = 3$.

Siguiendo esa definición, la ecuación anterior equivale a $x+2=2^3$, esto es, $x=8-2=6$, aunque siempre debe cumplirse que el argumento de la función logarítmica sea positivo, es decir $x+2>0$ que es lo mismo que $x>-2$.

Si la inecuación involucrara una función de "base chica" como, por ejemplo, $Log_{\frac{1}{3}}(7+2x)>Log_{\frac{1}{3}}(5x+1)$, deberíamos tener presente que la base de la función logarítmica se encuentra entre 0 y 1 con lo cual la función es decreciente (estos es “invierte el orden”) y se podría obtener la inecuación equivalente $0<7+2x<5x+1$. Escribimos la condición de positividad, porque todo argumento de logaritmo debe ser positivo.

La resolución proseguiría así:

$$0<7+2x<5x+1 \Leftrightarrow (0<7+2x \wedge 7+2x<5x+1) \Leftrightarrow (x>-\frac{7}{2} \wedge 3x>6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x>-\frac{7}{2} \wedge x>2) \Leftrightarrow (x>2)$$

Con lo cual el conjunto solución sería: $S=(2;+\infty)$