UAI Universidad Abierta Interamericana

CLASE 1

Modelos Matemáticos

Objetivos

En esta clase se espera que puedas:

1. Estudiar situaciones problemáticas a través de modelos funcionales.
2. Identificar los parámetros que posibilitan el estudio analítico de las funciones de ecuación algebraica y de las trascendentes
3. Predecir el comportamiento de una función cuando los valores de la variable independiente tienden a un punto determinado.
4. Establecer la definición de entorno de un punto con el concepto de intervalo abierto y distancia del intervalo

Contenidos

Funciones- Construcción del modelo. Definición de función. Expresión de la terna. Clasificación de funciones: De ecuación algebraica: polinómicas, racionales-homográficas, función módulo, funciones por partes o “a trozos”. Identificación de parámetros. Funciones Trascendentes: Exponenciales, Logarítmicas y Trigonométricas.

Actividad asincrónica de aprendizaje

“Buscando el modelo”

Te propongo analizar las situaciones que les presento a continuación buscando el modelo matemático que más se aproxima en la interpretación de las condiciones

Actividad 1: ***En el camino***

Dos amigos, Carlos y Beatriz parten de Ciudad de Buenos Aires a Mar del Plata, en distintos horarios a velocidad constante. Carlos pasa por Chascomús a las $12\ hs$ y llega a Mar del Plata a las $18\ hs$. Beatriz parte del mismo lugar a las $13\ hs$ al doble de velocidad que Carlos.

Considerando:

- la distancia de Ciudad de Buenos Aires a Mar del Plata aproximadamente de $400 km$ y la distancia de Ciudad de Buenos Aires a Chascomús aproximadamente de $100 km$.

- La hipótesis es de velocidad constante para ambos móviles.

¿A qué hora salió Carlos de Buenos Aires? ¿A qué velocidad viajó Beatriz? ¿Se encontraron en la ruta? Si es así te pido des precisiones al respecto.

El gráfico de ambos recorridos, la posición en función del tiempo, en un mismo sistema cartesiano ¿qué conclusiones aporta?

<u>Actividad 2</u> **"Bajar los costos"**

Uno de los pedidos realizados a la fábrica de cajas de cartón es de base cuadrada, sin tapa, con una capacidad de 180 cm^3 y más de 3 cm de altura. En estas producciones se espera que el gasto sea mínimo, por eso antes de fabricarlas deciden buscar las dimensiones de la caja para las que la cantidad de cartón a usar sea la mínima posible.

¿Cuáles pueden ser las dimensiones de la caja? ¿hay más de una posibilidad?

Te propongo ingresar al foro: **La caja "el menor costo posible"** para proponer tus ideas y ver que opinan los compañeros y compañeras.

Finalmente, enriquecido por el debate, resuelve la actividad. ¿Cuál es el modelo matemático que aproxima o se ajusta a esta situación?

~~https://drive.google.com/file/d/1P-OZWbvd38Nuw5Lq2DcuzaBCwHH8vCLf/view?usp=sharing (sugerencia para resolver~~)

<u>Actividad 3</u>

"Las monedas antiguas, se cotizan"

Una moneda antigua de colección, tiene un valor actualizado en 2021 de $1100. Los expertos estiman que, por el comportamiento del mercado, su valor se modifica desde 2010 y en adelante aumentando en forma continua un 12% cada año. La moneda llega a manos de un coleccionista muy novato, e inmediatamente piensa que se puede enriquecer con ella.

Calcula el valor de esta moneda hace 4 años y luego, aceptando que la estimación de aumento se sostiene en el tiempo averigua cuál será su valor en 2026.

Establece el modelo matemático que vincula el precio de la moneda a lo largo de los años y prepara un informe para el coleccionista centrándolo en la posible ganancia según el año en que se desprenda de ella.

En este caso te pedimos resolver en grupo que no exceda las cuatro personas.

Puedes utilizar un graficador para aproximar la función. GeoGebra es de fácil acceso podés descargarlo en el celular o en tu ordenador, es de descarga gratuita (puede ser Geogebra clásico 5 y 6 o bien calculadora gráfica).

https://www.geogebra.org/download?lang=es-ES

Actividad 4

"Revisando teoría de funciones y dialogando en el proceso"

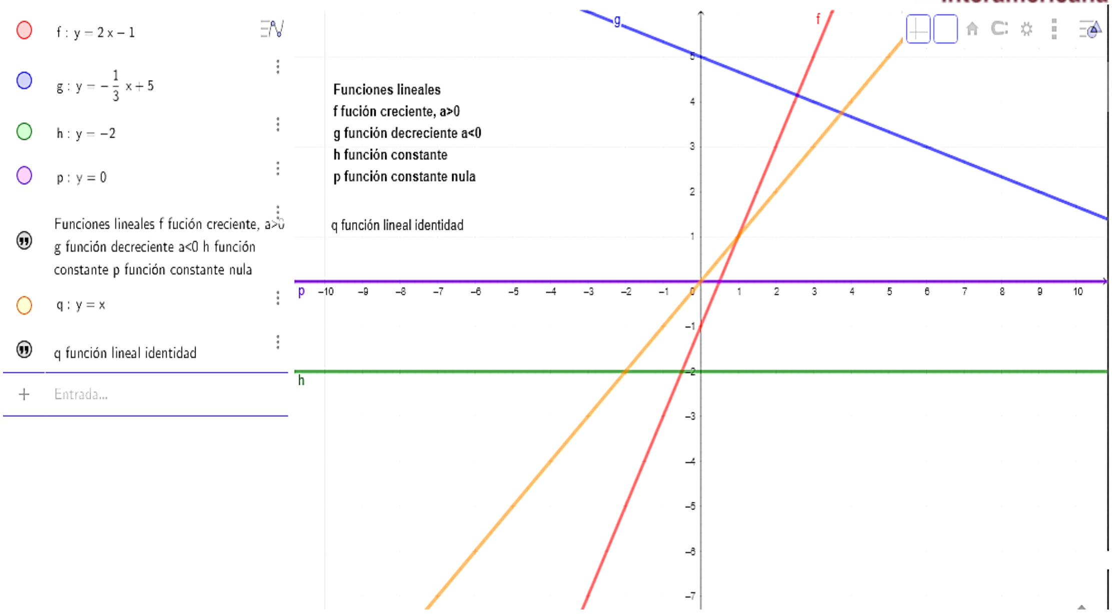
Tu intervención*

Breve recorrido sobre las funciones definidas por la terna $[Dom, Codom, G_F]$, el significado de G_F es gráfico de la función. Pero debemos entender bien su significado. Se entiende por gráfico de la función a su expresión por alguna ley de correspondencia que **a cada elemento del dominio le hace corresponder un único elemento del codominio.**

*Explica el significado de las condiciones de existencia y unicidad para la definición de función.

Funciones Polinómicas: Lineales

Ecuación de la función	$D(f)$	$Cod(f)$	$Im(f)$	ceros o raíces Intersección con el eje de abscisas	Intersección con el eje de ordenadas
$y = mx + b$	R	R	R	$mx + b = 0$	$f(0) = b$
Lineal Constante Si $m = 0$ $f(x) = b$	R	R	$\{b\}$	$b = 0$ Es un absurdo No existen ceros o raíces	$f(0) = b$
Lineal Nula Si $m = 0$ y $b = 0$ $f(x) = 0$	R	R	$\{0\}$	$0 = 0$ proposición siempre verdadera Existen infinitos ceros o raíces	$f(0) = b$



Gráficos cartesianos 1Funciones Lineales

Funciones Cuadráticas

Ecuación de la función	$D(f)$	$Cod(f)$	$Im(f)$	ceros o raíces Intersección con el eje de abscisas
$f(x) = ax^2 + bx + c$ Es necesario tener en cuenta que esta ecuación es de formato polinómico pero puede estar incompleta. Ejemplos: $y = 3x^2$ $y = x^2 - 2$ $y = x^2 + \frac{1}{2}x$	R	R	Varía según sea el vértice un máximo o un mínimo	$ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $b^2 - 4ac$ discrimina las raíces o ceros de la función. El teorema fundamental del álgebra indica: **Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.** En este caso tiene a los sumo dos ceros o raíces. $b^2 - 4ac > 0$, se obtienen dos raíces reales y distintas. $b^2 - 4ac = 0$, obtenemos raíces reales coincidentes (raíz doble) $b^2 - 4ac < 0$, no tiene raíces reales, se obtienen raíces en C y son complejas conjugadas.

<u>LOS FORMATOS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA</u>

Dada una función real, es decir definida como $f: R \to R, y = f(x)$ siendo $f(x)$ una función cuya ecuación es un polinomio de grado dos (se dice una función que tiene asociado un polinomio de grado 2

Expresión de la función $f: R \to R$	*Nombre del formato*	*Datos que aporta*
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Polinómico	$f(0) = c$ determina la ordenada al origen. El coeficiente a (principal) determina la amplitud de la parábola y el sentido de las ramas.
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	Factorizado	x_1 y x_2 son los ceros o raíces de la función El coeficiente a (principal) determina la amplitud de la parábola y el sentido de las ramas.
$f(x) = a(x - h)^2 + k$	Canónico	h es la abscisa del vértice k es la ordenada del vértice y a el sentido de las ramas.

*. Usa el graficador para ejemplificar funciones cuadráticas y analiza la incidencia de los parámetros de la ecuación en el gráfico.

Sugerencias:

Denominamos parámetros a los elementos que determinan la ecuación y que pueden verse en el gráfico de manera directa o indirecta. Por ejemplo si la ecuación de la función es $f(x) = -2(x+2)^2 - 3$ se puede observar el vértice $V = (-2, -3)$. El coeficiente -2 indica que la parábola presentará sus ramas descendentes y que su concavidad es menor respecto de la que denominamos ecuación matriz es $f(x) = x^2$

Funciones Polinómicas

Les propongo revisar el contenido de funciones polinómicas. En este caso la expresión está factorizada.

*Dada la función $f: R \to R, f(x) = -2x(x-1)(x+\frac{1}{2})(x-3)$ aproxima un gráfico luego de analizar C_0 , C_+, C_- Finalmente incluye la ecuación en un graficador y compara con tu producción

Recuerden que si la expresión no estuviera factorizada conviene hacerlo para estudiar la función

Funciones Racionales: Homográficas

Un caso particular de las funciones racionales es la función homográfica

Las funciones racionales $A \rightarrow R, f(x) = \frac{a}{x-b} + c$ con $a \neq 0$, se llaman homográficas y su gráfico se denomina hipérbola equilátera.
Los problemas de proporcionalidad inversa se pueden describir mediante estas funciones.

El ejemplo más simple de estas funciones es la terna $\left[A, R, \frac{1}{x}\right]$ siendo el dominio natural $A = R - \{0\}$, es decir la función $f: R - \{0\} \rightarrow R, f(x) = \frac{1}{x}$

<u>Respecto de esta función analicemos varias cuestiones:</u>

1. El dominio natural se determinó pues el denominador no puede ser cero (por la definición de división)
2. **Para valores de x que tienden a 0 por la izquierda y por la derecha, la función tiende ~~a cero~~**
3. Consecuencia de 1 y 2, $\boxed{\textbf{existe una asíntota vertical en } x = 0}$
4. En esta función la imagen no puede ser cero $\frac{1}{x} \neq 0$ esto significa que **no existen ceros o raíces de la función**. Gráficamente **la función no interseca al eje de abscisas**.

> * Pensalo, escribilo y trae tus ideas para la clase:
> ¿Cómo se comporta la función a medida que los valores de x son cada vez más grandes en valor absoluto?

Aclaración: Cuando hablamos de cada vez más grandes en valor absoluto nos referimos a que los valores de x aumenten en el semieje positivo de abscisas y disminuyan en el semieje negativo de abscisas.

En las actividades sincrónicas trabajaremos sobre Funciones trascendentes

<u>Actividad sincrónica de aprendizaje</u>

En Blackboard Collaborate mediante videoconferencia desarrollaremos las siguientes actividades, en el orden que se detalla:

1. Nos presentaremos para comenzar a conocernos, dialogaremos sobre las expectativas de la materia y de la forma de cursada.
2. Trabajaremos con la puesta en común de las estrategias utilizadas en las actividades asincrónicas y sobre las elaboraciones conceptuales que se plantearon como revisión.
3. Presentaremos los conceptos de las funciones trascendentes de forma dinámica.
4. Resolveremos las actividades siguientes de manera grupal y en la puesta en común cada grupo presentará sus elaboraciones.

Actividad 5: Dada la función $f: R \rightarrow R, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$ a) Prevé y describe la incidencia de cada elemento de la ecuación en el gráfico de la función b) Realiza el gráfico cartesiano y compara con tus previsiones.

Actividad 6: Dada la función $g: A \to R, f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)+1$ a) Define su dominio A b) Realiza el gráfico en el mismo plano cartesiano que la función f de la actividad 5 c) Compara las funciones f y g

Actividad 7: Analiza la función: $f: R \to R, f(x) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) - 1$, determina fase, período, amplitud y frecuencia.

5. Actividad de evaluación formativa al finalizar el encuentro sincrónico en la plataforma.
   ~~https://ultra.uaionline.edu.ar/ultra/courses/_48280_1/outline/assessment/test/_1562835_1?courseId=_48280_1&gradeitemView=details~~