Universidad Abierta Interamericana

UAI

CLASE 2

Límite de una Función

Objetivos

En esta clase se espera que puedas:

1. Identificar las condiciones para la composición de funciones.
2. Encontrar la inversa de una función, según las condiciones de posibilidad.
3. Establecer la definición de entorno de un punto con el concepto de intervalo abierto.
4. Predecir el comportamiento de una función cuando los valores de la variable independiente tienden a un punto determinado.
5. Iniciar el proceso de deconstrucción de la definición de límite funcional

Contenidos

Composición de funciones y función inversa. Entorno y entorno reducido de un punto. Límite finito de funciones de variable real.

Actividad asincrónica de aprendizaje

"El área del charco, su cambio en función del tiempo"

Un charco circular de agua se está evaporando y disminuye lentamente su tamaño. Después de cierta cantidad de minutos (t minutos), el radio del charco mide $\frac{18}{2t+3}$ pulgadas; en otras palabras, el radio está expresado en función del tiempo. El área A del charco está dada por $A = \pi r^2$. Nuestro interés es saber la modificación del área a medida que transcurre el tiempo. Pretendemos que escribas esa función.

Aclaraciones: Suponer que el formato del charco sea exactamente un círculo es irreal, con las herramientas del cálculo infinitesimal más adelante podremos aproximarnos a un cálculo del área de un charco de formato irregular. En este caso, consideraremos el modelo circular.

Actividad 1: Intenta la resolución de la propuesta anterior. La propuesta es realizarlo en pequeños grupos. Luego analiza la teoría. (la teoría aportada es NOTAS DE ANÁLISIS I (TOMO 1: CAPÍTULOS 1 – 6 Y APÉNDICE A) NICOLÁS S. BOTBOL Versión: Mayo de 2005 ~~https://ultra.uaionline.edu.ar/bbcswebdav/pid-1585956-dt-content-rid-1173880_1/xid-1173880_1~~

Actividad 2:

Dadas las funciones definidas en $A \to \mathbb{R}$, A es el dominio con las restricciones sobre $\mathbb{R}$. Hallar si es posible $fog(x)$ y $gof(x)$. Indicar Dominio y Codominio en cada caso.

a) $\boldsymbol{f(x) = -3x + 1 \; y \; g(x) = (x+1)^2}$

b) $\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{x} \; y \; g(x) = (x-1)^3}$

c) $\boldsymbol{f(x) = 2^{x-1} \; y \; g(x) = (\log_2 x) + 1}$

Actividad 3: En el texto aportado estudia la definición de función inversa y luego propone pares de funciones inversas y la verificación de que efectivamente lo son.

~~https://ultra.uaionline.edu.ar/bbcswebdav/pid-1585956-dt-content-rid-1173880_1/xid-1173880_1 páginas (19 a 23)~~

Actividad 4:

Recordamos la **definición** de función inversa: "***Sea*** $\boldsymbol{f: A \rightarrow R}$***, si*** $\boldsymbol{A \subset R}$ ***y*** $\boldsymbol{f}$ ***es una función biyectiva, entonces aseguramos que*** $\boldsymbol{f^{-1}: B \rightarrow R}$***, si*** $\boldsymbol{B \subset R}$ ***es la función inversa de*** $\boldsymbol{f}$ ***y*** $\boldsymbol{f^{-1}(y) = x}$***,*** $\boldsymbol{y \in B}$ ***y*** $\boldsymbol{x \in A}$

Halla, si es posible, las inversas de las siguientes funciones:

a) $f: R \rightarrow R, f(x) = x^3 - 1$

b) $g: R \rightarrow R, g(x) = (x+1)^2 - 3$

Aproximándonos a la noción de límite

Adrián Paenza es un matemático, periodista y profesor argentino, con una amplia trayectoria como divulgador científico. Justamente en este tiempo es muy conocido por ser un importante divulgador de la ciencia en el mundo. Una faceta tangencial es que durante mucho tiempo fue periodista deportivo.

Sus libros: Matemática ¿estás ahí? (episodio 1, 2 y 3) hicieron que muchas personas que sentían que esa ciencia era inaccesible se entusiasmaran intentando resolver los problemas que allí proponía. Hizo ciclos televisivos como: "Científicos Industria Argentina" "Alterados por pi" de divulgación de la Matemática y de la Ciencia en general.

Vean la primera parte de este video del Matemático Paenza (hasta 6:30 minutos) pero por supuesto completo si lo desean https://youtu.be/eCB_Jr_VKyg?t=4

Para abordar la definición de límite de una función, revisaremos algunos conceptos que son recursos matemáticos para una mejor comprensión:

Concepto de Módulo

El módulo pensado en ejemplos, primeras ideas

- ✓ El módulo de un número real se puede interpretar como la distancia a cero.
- ✓ $|3| = 3$ la distancia a cero es 3. Por lo tanto, el módulo es siempre mayor o igual que cero
- ✓ Existe otro valor cuya distancia a cero es 3, en este caso : $|-3| = 3$

Definiciones formales:

- Si $|x| \geq 0$ para todo número real
- $|x| = |-x|$ para todo número real

Concepto de intervalo

Un intervalo es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y en ese sentido definimos:

Dados los números reales a y b, con la condición de $a < b$

- (a, b) es el subconjunto de números reales comprendidos entre a y b. $(a, b) = \{x, x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\}$ *Intervalo abierto en los extremos.*

- $[a, b]$ es el subconjunto de números reales comprendidos entre a y b. $[a, b] = \{x, x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\}$ *Intervalo cerrado en los extremos.*

- $(a, b]$ es el subconjunto de números reales comprendidos entre a y b. $(a, b] = \{x, x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\}$ *Intervalo semiabierto o semicerrado en uno de los extremos. Análogamente para* $[a, b)$

Consideramos también los intervalos infinitos:

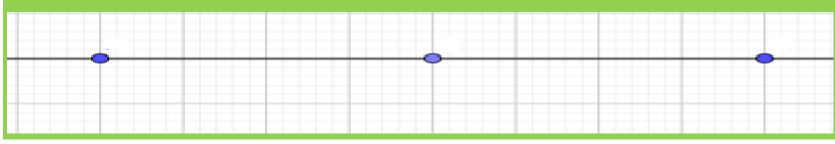
Si (a, ∞)=$\{x, x \in \mathbb{R},\ a < x\}$ Análogamente para $(-\infty, b)$=$\{x, x \in \mathbb{R},\ x < b\}$
O bien cerrado en el extremo:
$[a, +\infty)$=$\{x, x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$ Análogamente para $(-\infty, b]$=$\{x, x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$

Observación: El símbolo ∞ no representa un valor sino la expresión de que los valores del conjunto tienden a infinito. Es decir, si tiende a $+\infty$ los valores son cada vez más grandes. Si tiende a $-\infty$ los valores son cada vez más pequeños.
<u>Propiedades del Módulo</u>: en relaciones de desigualdad, habilita al intervalo como subconjunto que define los valores que lo verifican

- $Si\ a > 0, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ Esta expresión indica la existencia de un intervalo $x \in [-a, a]$
- $Si\ a > 0, |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ Esta expresión indica la existencia de un intervalo $x \in (-a, a)$
- $Si\ a > 0, |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$ análogamente $x \in (-\infty, a] \cup [a, +\infty)$
- $Si\ a > 0, |x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$ análogamente $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$

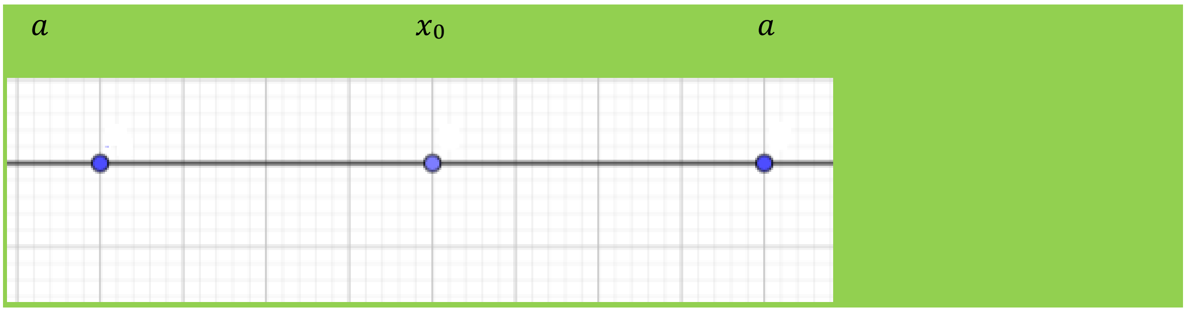
En esta clase nos posicionamos en los intervalos no infinitos, y enlazamos esta idea con la distancia entre dos puntos: Dados dos números reales cualesquiera x e y, la distancia entre ellos se expresa como $|x - y|$.
Comencemos por un ejemplo:
Si el intervalo es $[-3,3]$ tiene una distancia entre ellos $|3 - (-3)| = 6$ ese intervalo tiene un punto medio en este caso es 0 que en este contexto lo denominaremos x_0.

-3 $x_0 = 0$ 3



Si $0 \in \mathbb{R}$ y consideramos un valor fijo por ejemplo 3 y siendo $3 > 0$. Entonces para todo número real $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ la distancia a 0 se mantiene menor que un valor cualquiera que lo representaremos simbólicamente δ. (en este caso consideraremos $\delta = 3$)
Resulta:
Si $0 < |x - 0| < 3$ equivale a establecer el conjunto $\{x \in \mathbb{R}, x_0 - 3 < x < x_0 + 3\}$
y así resulta el intervalo $x \in (0 - 3,\ 0 + 3)$

Consideremos ahora un caso general:
Luego el intervalo $[-a, a]$ tiene una distancia entre ellos $|a - (-a)| = 2a$ ese intervalo tiene un punto que denominaremos x_0.



Si $x_0 \in \mathbb{R}$ y consideramos un valor fijo por ejemplo δ y siendo $\delta > 0$. Entonces para todo número real $x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$ la distancia a x_0 se mantiene menor que un valor cualquiera δ .
Si $0 < |x - x_0| < \delta$ equivale a establecer el conjunto $\{x \in \mathbb{R}, x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$
y así resulta el intervalo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Trabajemos ahora sobre este concepto

Actividad 5: Puedes ver aquí la escritura como intervalo real de los siguientes conjuntos, completa las celdas

Conjunto expresado por su propiedad	Desarrollo de la propiedad o condición	Construcción del intervalo
$\{x \in \mathbb{R}, \|x\| < 1\}$	$-1 < x < 1$	$(-1 + 0; 1 + 0) = (-1; 1)$
$\{x \in \mathbb{R}, 0 < \|x - 2\| < 1\}$	$-1 < x - 2 < 1 \wedge x \neq 2$ Resulta $-1 + 2 < x < 1 + 2 \wedge x \neq 2$	$(-1 + 2;\ 1 + 2) = (1; 3)$ Con $x \neq x_0$ en este caso $x \neq 2$ Resulta $(1; 3) - \{2\}$ Se puede escribir también como $(1; 2) \cup (2; 3)$
$\{x \in \mathbb{R}, \|x + 3\| > 1\}$		
	$\frac{5}{2} < x < 3$	
		$(-3; 1) \cup (1; 5)$

Aproximándonos al concepto de límite de una función…

Es necesario pensar en el comportamiento de la función en los "alrededores" de un punto.
La pregunta suele ser: ¿*Cómo se comporta la función* $f(x)$ *cuando* x *se acerca a un punto elegido?*
Suele llamarse al punto elegido x_0 y debemos considerar los valores de x cercanos a x_0 ¿los valores de $f(x)$ tienden a algún valor en y?

La idea de ***"alrededor de un valor*** $\boldsymbol{x_0}$***"*** nos conduce a la definición de **<u>Entorno de un punto</u>**
Definición:
Se denomina entorno de un punto al conjunto formado por los valores de $x, x \in \mathbb{R}$ / la distancia al punto x_0 se mantiene menor que un número real h.
Se simboliza: $E_{(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{h})}=\{x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < h\}$
Luego resulta $E_{(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{h})}=(x_0 - h; x_0 + h)$
Suele decirse entorno de centro x_0 y radio h

<u>Actividad 6</u>:
Explicita el entorno, si es posible, a partir de los siguientes conjuntos
$A = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, |x + 1| < 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}, |x - 2| < 4\}$

Cuando intentamos estudiar el comportamiento en las "cercanías" del punto, pero no en él, se utiliza el concepto de **<u>Entorno reducido de un punto</u>**
Definición
Se denomina entorno reducido de un punto al conjunto formado por los valores de $x, x \in \mathbb{R}$ / la distancia al punto x_0 se mantiene menor que un número real h, tal que $x_0 \notin E_{(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{h})}$
Se simboliza: $E^*{}_{(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{h})}=\{x \in \mathbb{R}, 0 < |x - x_0| < h\}$
Luego resulta $E_{(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{h})}=(x_0 - h; x_0 + h) - \{x \neq x_0\}$
Suele decirse entorno reducido de centro x_0 y radio h

<u>Actividad 7</u>: Selecciona cuál o cuáles de los siguientes conjuntos definen un entorno reducido. Escríbelo.
$A = \{x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 5| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}, |x + 5| < 5\}$, $C = \left(-3; \frac{11}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; 8\right)$

En las actividades sincrónicas trabajaremos sobre límite finito de una función

<u>Actividad sincrónica de aprendizaje</u>

En Blackboard Collaborate mediante videoconferencia desarrollaremos las siguientes actividades, en el orden que se detalla:

1. Realizaremos un recorrido 360° sobre la comprensión de las actividades asincrónicas.

2. Retomaremos las actividades asincrónicas 6 y 7 las revisarán en grupos distribuidos arbitrariamente para luego acordar las respuestas en la puesta en común.
3. Presentación de conceptos referidos a la noción de límite de una función.
4. Actividades que aportan al concepto de límite

Aproximándonos al concepto de límite

<u>Actividad 8</u>:

Dadas las funciones: f, g, h definidas respectivamente por las siguientes ternas: $[\mathbb{R}, \mathbb{R}, x+1]$, $[\mathbb{R}, , \{x+1 \; si \; x \neq 1, 1 \; si \; x = 1\}]$, $[\mathbb{R}-\{1\}, \mathbb{R}, \frac{x^2-1}{x-1}]$
¿Cómo se comportan los valores de la función en las proximidades de $x = 1$? ¿Qué sucede con $f(x)$ cuando x se aproxima a 1?

Definición de límite finito de una función

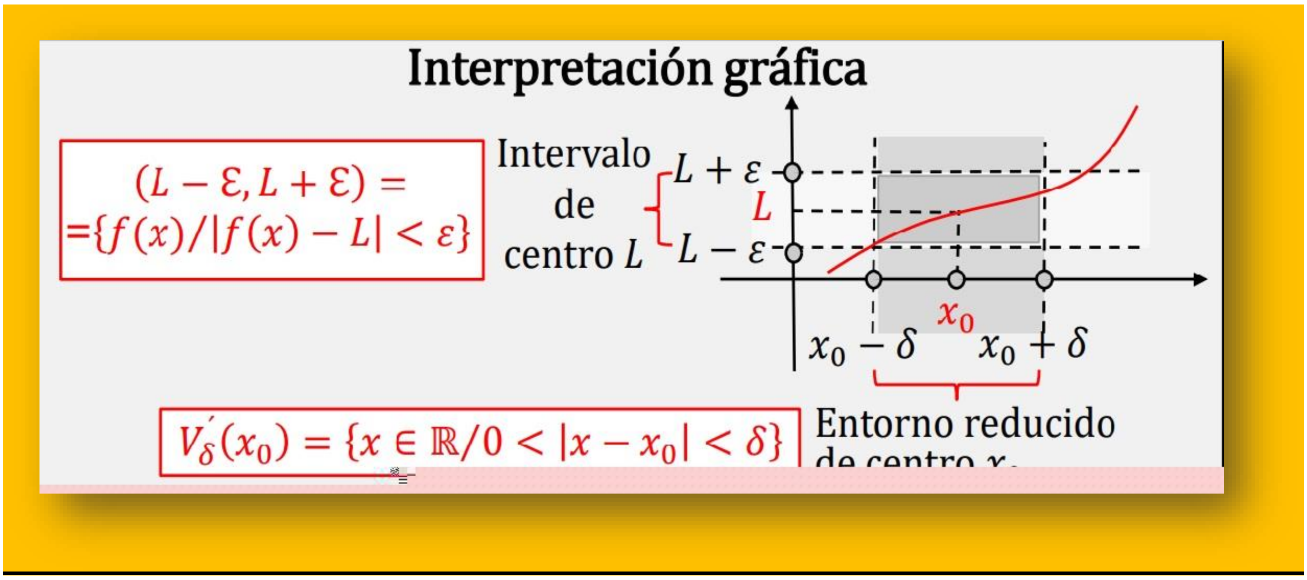
Sea $x_0 \epsilon \ \mathbb{R}$, f una función real definida en el intervalo (a, b), definida o no en x_0 y sea $l \in \mathbb{R}$.

Decimos que $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a x_0 o bien que el límite de $f(x)$ es l cuando x tiende a x_0 si verifica que:

$$Cualquiera \; sea \; \epsilon > 0, existe \; \delta > 0$$

$$tal \; que \; si \; 0 < |x - x_0| < \delta,$$

$$entonces |f(x) - l| < \varepsilon$$



Unicidad del Límite

> Sea $x_0 \epsilon\ (a, b)$, f una función real definida en el intervalo (a, b), salvo quizás en x_0 y sean $l \in \mathbb{R}$ y $l' \in \mathbb{R}$.
>
> Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l'$ Entonces $l = l'$
>
> Es decir en caso de existir el límite de una función es único.

<u>Actividad 10</u>:

Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x-1}{x+1}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+2}{4x-1}$; c) $\lim\limits_{x \to 2} 3x^2 - 4x - 1$

<u>Teoría</u>

Álgebra de los límites Propiedades: Dadas f y g definidas en un intervalo abierto excepto quizás en x_0 , tal que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$
Trabajaremos el límite de las operaciones entre las funciones. Límite de funciones: constante, identidad.

Límites Laterales: Analizaremos en la clase una primera aproximación a la búsqueda de límites laterales

<u>Actividad 11</u>: Hallar los límites laterales de las siguientes funciones

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = sg(x)$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1 si\ x \geq 1, \quad x^2 si\ x < 1$

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x\ si\ x \geq 1, \quad x^2 si\ x < 1$

<u>Actividad de Evaluación final de la clase</u>

Te propongo para finalizar esta clase responder cuatro preguntas que encontrarás en este enlace

~~**https://ultra.uaionline.edu.ar/ultra/courses/_48280_1/outline/assessment/test/_1581987_1?courseId=_48280_1&gradeitemView=details**~~