

Calificación: 10 (diez)  
Excelente!!

1

**Aplica las reglas que correspondan para derivar la siguiente**

**función:**  $f(x) = \sqrt[3]{3x-1} \cdot [\cos(x+8)]^4$

*La derivada de un producto se calcula según la fórmula :*

$$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$$

Cálculo de  $g(x)$

$$g(x) = \sqrt[3]{3x-1}$$

$$g(x) = (3x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{3}(3x-1)^{\frac{-2}{3}} \cdot 3$$

$$g'(x) = (3x-1)^{\frac{-2}{3}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} \quad (1)$$

Cálculo de  $h(x)$

$$h(x) = [\cos(x+8)]^4$$

$$h'(x) = 4[\cos(x+8)]^3 \cdot [-\sin(x+8)]$$

$$h'(x) = -4 \cdot \cos^3(x+8) \cdot \sin(x+8) \quad (2)$$

### Solución

Teniendo (1) y (2), y aplicando la regla del producto :

$$f'(x) = \frac{\cos^4(x+8)}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} - 4\sqrt[3]{3x-1} \cdot \sin(x+8) \cdot \cos^3(x+8) \quad \checkmark$$

2

**Analiza si la función  $\frac{-1}{x^2 - 4x + 5}$  verifica el Teorema de Rolle en el intervalo (1; 3). Halla el valor "c" de la conclusión.**

El teorema de Rolle pide que se verifiquen 3 condiciones :

1.  $f$  es continua en el intervalo cerrado  $[a; b]$
2.  $f$  es derivable en el intervalo abierto  $(a; b)$
3.  $f$  debe verificar igualdad entre  $f(a) = f(b)$

1

¿Es continua?

Análisis :

Buscar los valores de  $x$  que anulen la expresión  
(que hagan de divisores cero).

Al buscar las raíces, veo que la expresión no tiene en los reales soluciones que anulen la expresión (tiene solución compleja). Entonces :

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$  Y es una función de tipo algebraica.

Y por tanto, es continua en el intervalo dado.



2  
¿Es derivable?

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 - 4x + 5}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2 - 4x + 5}$$

$$-f'(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$$

Aplicando la regla de la función recíproca  $\left( \left[ \frac{1}{f(x)} \right] \right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$

$$\cancel{X} f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 4x + 5)^2} = \frac{2x - 4}{(x^2 - 4x + 5)^2} = f'(x)$$

Tenemos una situación en la que el dominio será:

$\mathbb{R} - (\text{raíces que hacen 0 el denominador de } f')$

Pero a similitud de lo visto anteriormente,  
la expresión sigue sin tener solución (raíces 0)  
en los reales (las tiene en los complejos)

Entonces :

$$\text{Dom } f' = \mathbb{R} \quad \checkmark$$

Por tanto, es derivable en el intervalo dado.

3  
Verificar igualdad

$$f(1) = \frac{-1}{(1)^2 - 4(1) + 5} = \frac{-1}{1 - 4 + 5} = \frac{-1}{2} \quad \checkmark$$

$$f(3) = \frac{-1}{(3)^2 - 4(3) + 5} = \frac{-1}{9 - 12 + 5} = \frac{-1}{2} \quad \checkmark$$

*Verifica igualdad*

#### 4 Conclusión

*Encuentro «c» haciendo la derivada 0:*

$$\frac{2x - 4}{(x^2 - 4x + 5)^2} = 0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2 \quad \checkmark$$

Por tanto:

$$c = 2$$

### 3

**Resolver aplicando L'Hopital:**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x - 2)}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(2x-2)}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(2(1)-2)}{(1)^2-3(1)+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(0)}{1-3+2} = \frac{0}{0} \quad \checkmark$$

Aplicando L'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(2x-2)}{x^2-3x+2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}[\text{sen}(2x-2)]}{\frac{d}{dx}(x^2-3x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot \cos(2x-2)}{2x-3} = \frac{2 \cdot \cos[2(1)-2]}{2(1)-3} = \frac{2(1)}{-1} = -2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{2x^3 - x^2 + 2}$$

*Este ejercicio tiene vuelta de tuerca.  
Para que aplique L'Hopital, debe verificarse que  
exista el tipo de indeterminación que resuelve.*

*En este caso, eso se verifica resolviendo la indeterminación  
del numerador y la del denominador por separado.*

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 3x - 8 \rightarrow$  el límite al  $+\infty$  de un polinomio  
cuyo coeficiente principal es positivo es igual a  $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - x^2 + 2 \rightarrow$  el límite al  $+\infty$  de un polinomio  
cuyo coeficiente principal es positivo es igual a  $+\infty$

Por tanto, la indeterminación es  $\frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la regla de L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{2x^3 - x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 3x - 8)}{\frac{d}{dx}(2x^3 - x^2 + 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{6x^2 - 2x} \quad \checkmark$$

*Volviendo a aplicar la regla de L'Hopital*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{6x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(2x+3)}{\frac{d}{dx}(6x^2-2x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{12x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{6x-1}$$

Resolviendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{6x-1} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \checkmark$$

**4**

**Realiza el estudio completo de la función**

$f(x) = \frac{9x^2 - x + 4}{x}$ . **Halla la recta tangente y la normal en el punto de abscisa 1.**

1

Dominio

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\} \quad \checkmark$$

2

Conjunto de ceros

*(igualar la fórmula a cero)*

$$\frac{9x^2 - x + 4}{x} = 0$$

$$9x^2 - x + 4 = 0x$$

$$9x^2 - x + 4 = 0 \quad \begin{cases} x_1 \notin \mathbb{R} \\ x_2 \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Por tanto :

$$C_0 = \emptyset$$



3

Conjunto de positividad y negatividad

(al no contar con un conjunto de ceros y sin cero en el dominio)

$$-\infty \leftarrow \text{-----}(0) \text{-----} \rightarrow +\infty$$

(tomar valores a la izquierda y derecha del 0) :

$$f(-1) = \frac{9x^2 - x + 4}{x} = \frac{9(-1)^2 - (-1) + 4}{(-1)} = \frac{9(1) + 1 + 4}{(-1)} = -14$$

$$f(1) = \frac{9x^2 - x + 4}{x} = \frac{9(1)^2 - (1) + 4}{(1)} = 9(1) - 1 + 4 = 12$$

Por tanto :

$$\begin{aligned} C_- &= (-\infty; 0) \\ C_+ &= (0; +\infty) \end{aligned}$$



4

Asíntotas

ASÍNTOTA VERTICAL (AV) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{9x^2 - x + 4}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x^2 - x + 4}{x} = +\infty$$



Es divergente, por tanto, el límite no existe.

Entonces :

Donde se anula el denominador de la función es  $\rightarrow AV : x = 0$

ASÍNTOTA HORIZONTAL (AH) :

No existe ya que el grado del numerador supera al del denominador  $\rightarrow AH : \nexists$

ASÍNTOTA OBLICUA (AO) :

-----  
Por la vía rápida  
-----

En casos como éstos, hay una forma expédita de encontrar la asíntota, y que es, repartiendo el denominador :

$$\frac{9x^2 - x + 4}{x} = \frac{9x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{4}{x} = 9x - 1 + \frac{4}{x}$$

Cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $\frac{4}{x}$  tiende a 0 (a desaparecer), por tanto :

$$9x - 1 + \frac{4}{x} \text{ cuando } x \rightarrow \infty : 9x - 1$$



-----  
Por la vía formal  
-----



Teniendo que  $AO = mx + b$

Cálculo de m:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x + 4}{x} / x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x + 4}{x^2}$$

(aplicando L'Hopital)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x + 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(9x^2 - x + 4)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x - 1}{2x}$$

(volviendo a aplicar L'Hopital)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(18x - 1)}{\frac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18(1) - 0}{2(1)} = \frac{18}{2} = 9$$



Cálculo de b:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x + 4}{x} - 9x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x + 4 - 9x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - x}{x} = \end{aligned}$$

(aplicando L'Hopital)

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(4 - x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0 - 1}{1} = -1$$



Entonces, siendo  $m = 9$  y  $b = -1$ :

$$AO = mx + b = 9x + (-1) = 9x - 1$$



5

Puntos críticos (máximos o mínimos) :

*Para los puntos críticos, se necesita  $f'(x)$  pues son puntos donde se anula la derivada.*

*Aplicando la distribución del denominador :*

$$f(x) = \frac{9x^2 - x + 4}{x} = \frac{9x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{4}{x} = 9x - 1 + \frac{4}{x} = 9x - 1 + 4x^{-1}$$

*... encontramos una forma más conveniente para derivar :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(9x - 1 + 4x^{-1}) &= 9 - 0 + (-4x^{-2}) \\ &= 9 + (-4x^{-2}) = 9 - 4x^{-2} = 9 - \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

*Entonces, los puntos críticos se calculan anulando la derivada :*

$$9 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$9 = \frac{4}{x^2}$$

$$9x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{9} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = +\frac{2}{3} \end{array} \right.$$



*Para determinar cuál de esos resultados es máximo o mínimo, la función debe ser estudiada por tramos :*

$$-\infty \leftarrow \text{-----} \left[ -\frac{2}{3} \right] \text{-----} (0) \text{-----} \left[ +\frac{2}{3} \right] \text{-----} \rightarrow +\infty$$

	$\left( -\infty; -\frac{2}{3} \right)$	$x = -\frac{2}{3}$	$\left( -\frac{2}{3}; 0 \right)$	$x = 0$	$\left( 0; +\frac{2}{3} \right)$	$x = +\frac{2}{3}$	$\left( +\frac{2}{3}; +\infty \right)$
$f'$	$f'\left(-\frac{3}{3}\right) = +$	0	$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -$	$\nexists$	$f'\left(+\frac{1}{3}\right) = -$	0	$f'\left(+\frac{3}{3}\right) = +$
$f$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	Mín	$\nearrow$
	✓	✓	✓		✓	✓	✓

$$f'(-1) = 9 - \frac{4}{(-1)^2} = 9 - 4 = 5$$

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 9 - \frac{4}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 9 - \frac{4}{\frac{1}{9}} = 9 - 4 \cdot 9 = 9 - 36 = -27$$

$$f'\left(+\frac{1}{3}\right) = 9 - \frac{4}{\left(+\frac{1}{3}\right)^2} = 9 - \frac{4}{\frac{1}{9}} = 9 - 4 \cdot 9 = 9 - 36 = -27$$

$$f'(1) = 9 - \frac{4}{(1)^2} = 9 - 4 = 5$$

Siendo entonces :

$$\text{Máximo relativo : } x = -\frac{2}{3} \quad \checkmark$$

$$\text{Mínimo relativo : } x = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

6

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Del examen de la tabla anterior :

$$I_C = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

$$I_D = \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right)$$



7

Puntos de inflexión, concavidad, convexidad.

Para buscar los puntos de inflexión,  
debo igualar la 2da derivada a cero :

$$f'(x) = 9 - \frac{4}{x^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(9) - 4 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 - 4 \cdot \frac{d}{dx}(x^{-2}) \\ &= -4 \cdot (-2)x^{-3} = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3} \end{aligned}$$

Entonces :

$$\frac{8}{x^3} = 0$$

$$8 = 0 \cdot x^3$$

$$8 = 0!$$



$8 \neq 0$  (es decir, no es punto de inflexión).  
En otras palabras, la 2da derivada nunca se anula.

Entonces, se estudiará la concavidad a partir del dominio :

	$(-\infty; 0)$	$x = 0$	$(0; +\infty)$
$f''$	$f''(-1) = -$	$\nexists$	$f''(+1) = +$
$f$	$\cap$ Cónca	$\nexists$	$\cup$ Convexa



$$f''(x) = \frac{8}{x^3}$$

$$f''(-1) = \frac{8}{(-1)^3} = -8$$

$$f''(+1) = \frac{8}{(+1)^3} = +8$$

Por tanto :

Puntos de inflexión :  $\nexists$

Intervalo de concavidad :  $(-\infty; 0)$

Intervalo de convexidad :  $(0; +\infty)$

8

Conjunto Imagen :

Teniendo máximo y mínimos relativos, tenemos que :

$$\text{Max. Relat. : } f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + 4}{-\frac{2}{3}} = \frac{9\frac{4}{9} + \frac{2}{3} + 4}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{36}{9} + \frac{2}{3} + 4}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\frac{36+6+36}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{36+6+36}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{78}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{78}{9} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -13$$



$$\text{Mín. Relat. : } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right) + 4}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{36}{9} - \frac{2}{3} + 4}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{36-6+36}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{66}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{66}{9} \cdot \frac{3}{2} = 11$$

Por lo cual:

$$\text{Im} f(x) = (-\infty; -13) \cup (11; +\infty)$$

9

Recta tangente y normal en abscisa = 1

Sabiendo :

Que la ecuación de la recta tangente es :  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Que la ecuación de la recta normal es :  $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

$$\text{Que : } f(1) = \frac{9(1)^2 - (1) + 4}{(1)} = \frac{9 - 1 + 4}{1} = 12$$

$$\text{Que : } f'(1) = 9 - \frac{4}{(1)^2} = 5$$

Entonces :

RECTA TANGENTE

$$y - f(1) = [f'(1)][x - (1)]$$

$$y - 12 = 5(x - 1)$$

$$y = 5x - 5 + 12$$

$$y = 5x + 7$$

*RECTA NORMAL*

$$y - f(1) = \frac{-1}{f'(1)}(x - 1)$$

$$y - 12 = \frac{-1}{5}(x - 1)$$

$$y - 12 = \frac{-1}{5}x + \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{-1}{5}x + \frac{1}{5} + 12$$

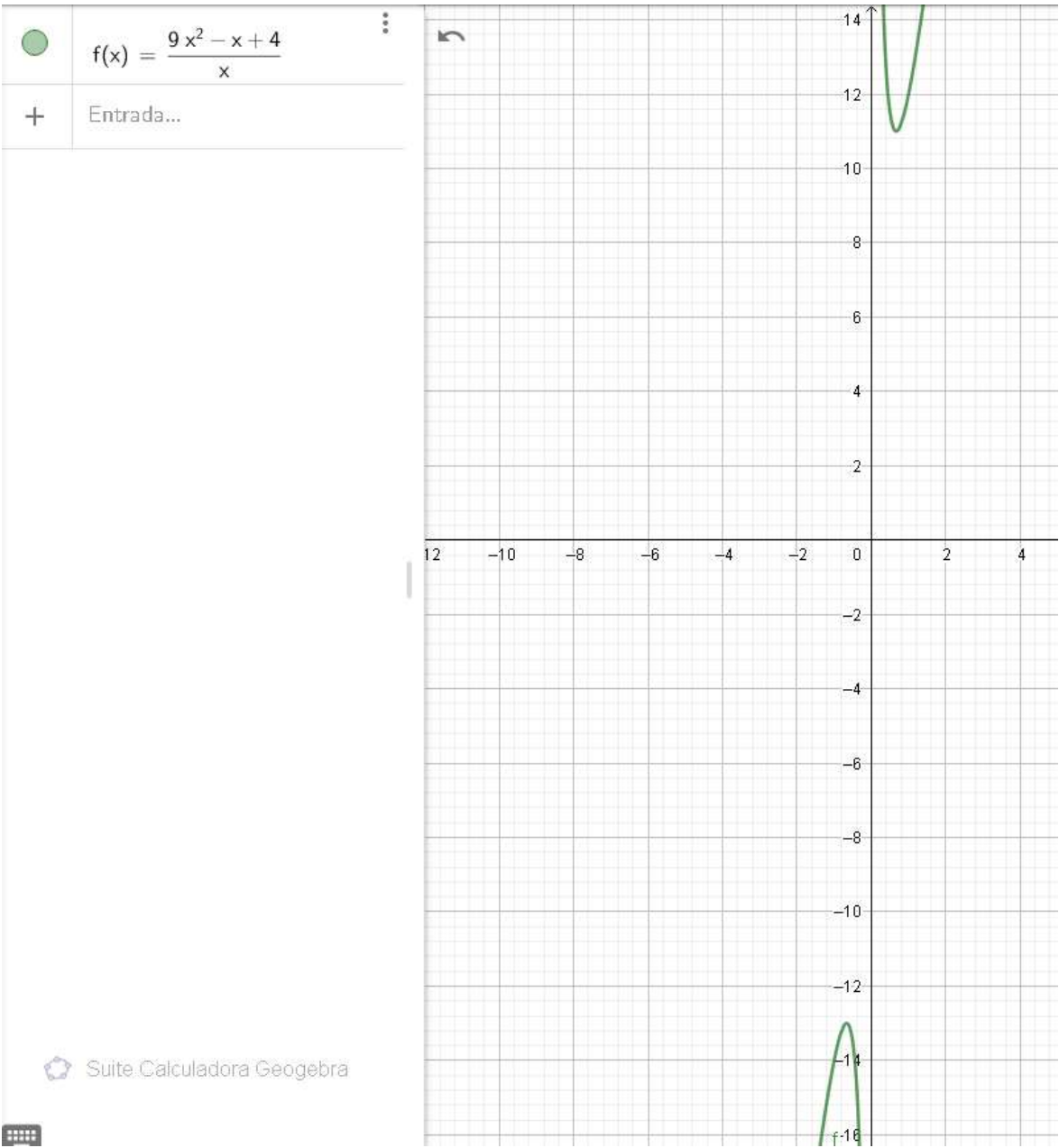
$$y = \frac{-1}{5}x + \frac{61}{5}$$



10

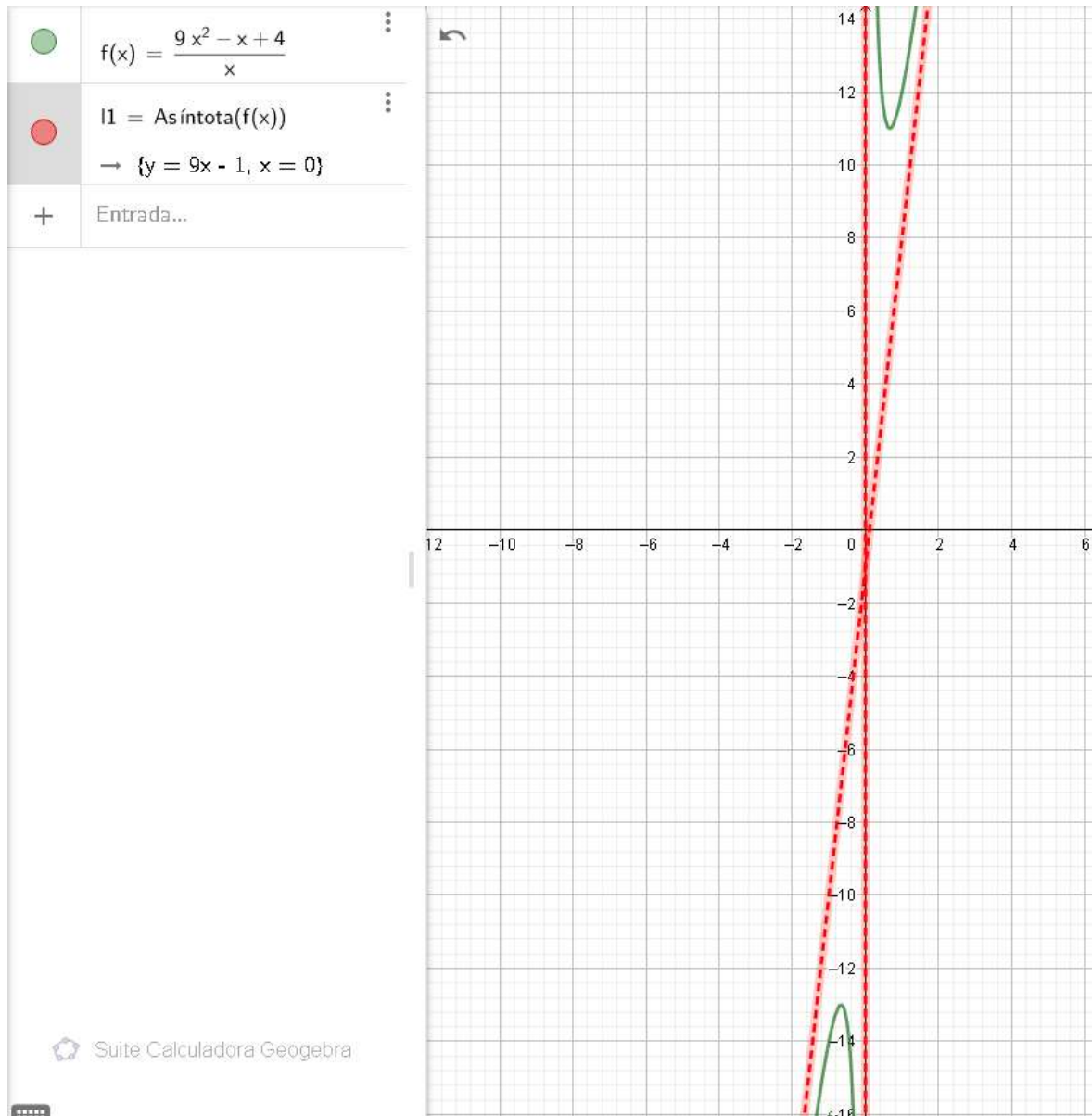
Comprobación gráfica

Puntos 1 al 3 (dominio, positividad, negatividad)



Punto 4 (asíntotas)





Puntos 5 al 8 (puntos críticos, crecimiento, decrecimiento, inflexión, concavidad, convexidad, imagen)

