

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/328571353>

# Método de Newton Raphson

Conference Paper · October 2018

---

CITATIONS

0

---

READS

19,120

1 author:



[Jose Enrique Vargas Cantero](#)

Universidad Tecnológica de Bolívar

1 PUBLICATION 0 CITATIONS

SEE PROFILE

# Método de Newton Raphson.

Jose Enrique Vargas Cantero

Facultad de ingeniería, Universidad Tecnológica de Bolívar

Cartagena, Colombia

vargascanteroj@gmail.com

**Abstract—** Este artículo busca explicar de manera detallada el funcionamiento del método de Newton Raphson, teniendo como objetivo general explicar el fundamento teórico pertinente y todo lo concerniente a la aplicación del método. Además de lo anterior, se exponen los posibles inconvenientes que se pueden presentar a la hora de poner en práctica el método, contemplando a su vez la solución pertinente del problema.

## I. INTRODUCCIÓN

El método de Newton Raphson es un procedimiento algorítmico que permite hallar raíces de funciones, conocido un valor numérico cercano a la raíz. Es un método abierto e iterativo, en general de rápida convergencia, muy útil para el cálculo de raíces cuadradas y de mayor grado, aunque para algunos casos el método presenta inconvenientes, por ejemplo si existen raíces múltiples, en este caso se tendría que aplicar diferentes soluciones para así lograr encontrar la raíz sin abandonar el método.

## II. TEORÍA DEL MÉTODO

Sabemos por el teorema de Taylor que para un  $x_0 \in (a, b)$  tal que  $F'(x_0)$  es diferente de cero y además si se cumple que tanto la función como la derivada son continuas en el intervalo  $(a, b)$ , entonces

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots$$

Buscamos el punto donde  $f(x_1) = 0$ , entonces:

$$0 = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0) + \dots$$

por lo tanto podemos concluir que

$$x_1 \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De forma general:

$$x_{n+1} \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\bullet \text{ Donde } \left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq k < 1, \text{ para toda } x \in (a, b)$$

También es posible hacer un análisis geométrico del método a partir de la siguiente gráfica

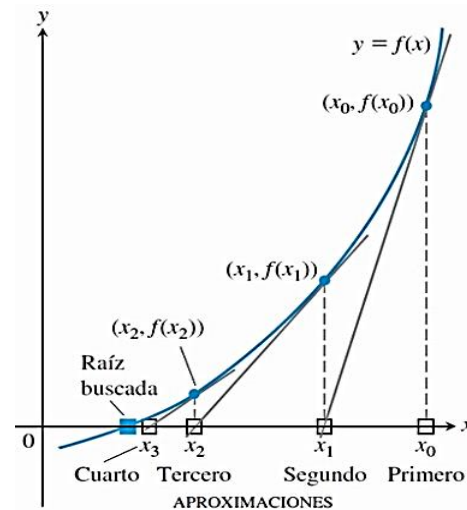


Fig. 1 Descripción gráfica del método

### A. Historia

El método numérico de Newton fue descrito por Sir Isaac Newton en 'Sobre el análisis mediante ecuaciones con un número infinito de términos', escrito en 1669, publicado en 1711 por William Jones y en De metodus fluxionum et serierum infinitarum (escrito en 1671, traducido y publicado como Método de las fluxiones en 1736 por John Colson). Sin embargo, su descripción difiere en forma sustancial de la descripción moderna presentada más arriba: Newton aplicaba el método solo a polinomios, y no consideraba las aproximaciones sucesivas  $x_n$ , sino que calculaba una secuencia de polinomios para llegar a la aproximación de la raíz  $x$ . Finalmente, Newton ve el método como puramente algebraico y falla al no ver la conexión con el cálculo.

El método es llamado así por el matemático inglés Joseph Raphson (contemporáneo de Newton) siendo miembro de la Royal Society en 1691 por su libro «Aequationum Universalis», publicado en 1690, que contenía este método para aproximar raíces. Newton en su libro «Método de las fluxiones» describe el mismo método, en 1671, pero no fue publicado hasta 1736, lo que significa que Raphson había publicado este resultado 46 años antes. Aunque no fue tan popular como los trabajos de Newton, se le reconoció posteriormente

## B. Algoritmo

Existen diferentes formas de obtener el algoritmo de este método, cada una de ellas desarrolladas en un contexto matemático un poco similar. Se podría entender el método de Newton como un caso especial del método del punto fijo, al igual que se puede obtener el algoritmo a partir de un análisis geométrico como se ilustra en la Fig. 1.

### Método de Newton

Para obtener una solución a  $f(x) = 0$  dada la función diferenciable  $f$  y una aproximación inicial  $p_0$ :

**ENTRADA** aproximación inicial  $p_0$ ; tolerancia  $TOL$ ; número máximo de iteraciones  $N_0$ .

**SALIDA** solución aproximada  $p$  o mensaje de fracaso.

**Paso 1** Tome  $i = 1$ .

**Paso 2** Mientras  $i \leq N_0$  haga pasos 3–6.

**Paso 3** Tome  $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$ . (Calcule  $p_i$ )

**Paso 4** Si  $|p - p_0| < TOL$  entonces

**SALIDA** ( $p$ ): (Procedimiento terminado satisfactoriamente.)  
**PARAR.**

**Paso 5** Tome  $i = i + 1$ .

**Paso 6** Tome  $p_0 = p$ . (Redefine  $p_0$ .)

**Paso 7** **SALIDA** ("El método fracasó después de  $N_0$  iteraciones,  $N_0 = \cdot, N_0$ );  
(Procedimiento terminado sin éxito.)  
**PARAR.** ■

## C. Convergencia del método

El orden de convergencia de este método es, por lo menos, cuadrático. Sin embargo, si la raíz buscada es de multiplicidad algebraica mayor a uno (Una raíz doble, triple,...), el método de Newton-Raphson pierde su convergencia cuadrática.

No hay un criterio general de convergencia para el método de Newton-Raphson. Su convergencia depende de la naturaleza de la función y de la exactitud del valor inicial. La única solución en estos casos es tener un valor inicial que sea "suficientemente" cercano a la raíz. ¡Y para algunas funciones ningún valor inicial funcionará! Los buenos valores iniciales por lo común se predicen con un conocimiento del problema físico o mediante el uso de recursos alternativos, tales como las gráficas, que proporcionan mayor claridad en el comportamiento de la solución. [2]

## D. Error

Este método es de convergencia cuadrática. Esto significa que si en algún momento el error es menor o igual a 0,1, a cada nueva iteración doblamos (aproximadamente) el número de decimales exactos. En la práctica puede servir para hacer una estimación aproximada del error.

$$E = \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$$

Con lo cual se toma el error relativo como si la última aproximación fuera el valor exacto. Se detiene el proceso iterativo cuando este error relativo es aproximadamente menor que una cantidad fijada previamente.

## III. PROBLEMAS CON EL METODO

### A. Desventajas

Aunque en general el método de Newton-Raphson es muy eficiente, hay situaciones donde se comporta de manera deficiente. Por ejemplo en el caso especial de raíces múltiples. Sin embargo, también cuando se trata de raíces simples, se encuentran dificultades, como por ejemplo la función.

$$f(x) = x^{10} - 1$$

Si se aplica el método se observara que aunque la técnica converge a la raíz (1), lo hace muy lentamente,  $n=\infty$ ,  $X=1.00000$

Casos donde se presentan otras dificultades:

1. Punto de inflexión [ $F''(x)=0$ ], en la vecindad de una raíz.
2. Tendencia del método a oscilar alrededor de un mínimo o un máximo local.
3. valor inicial cercano a una raíz salta a una posición varias raíces más lejos. Esta tendencia a alejarse del área de interés se debe a que se encuentran pendientes cercanas a cero.
4. Una pendiente cero [ $f'(x) = 0$ ], causa una división entre cero en la fórmula de Newton-Raphson, lo cual ocasiona que la solución se dispare horizontalmente y jamás toca al eje  $x$ .

## IV. RAICES MULTIPLES

Una raíz múltiple corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje  $x$ . Por ejemplo, una raíz doble resulta de:

$$F(x) = (x - 3)(x - 2)(x - 2).$$

La ecuación tiene una *raíz doble* porque un valor de  $x$  hace que dos términos de la ecuación sean iguales a cero. Gráficamente, esto significa que la curva toca en forma tangencial al eje  $x$  en la raíz doble.

Una raíz triple corresponde al caso en que un valor de  $x$  hace que tres términos en una ecuación sean iguales a cero, como en:

$$F(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 1)(x - 1).$$

En general, la multiplicidad impar de raíces cruza el eje, mientras que la multiplicidad par no lo cruza.

Esto significa que el método pierde su convergencia cuadrática y pasa a ser lineal de constante asintótica de convergencia  $1-1/m$ , con  $m$  la multiplicidad de la raíz.

### A. ¿Cómo solucionarlo?

Las raíces múltiples ofrecen algunas dificultades al método, el problema radica en el hecho de que no sólo  $f(x)$ , sino también  $f'(x)$  se aproxima a cero en la raíz. Tales problemas afectan el método de Newton-Raphson, el cual contiene derivada (o su aproximación) en el denominador de su fórmula respectiva. Esto provocará una división entre cero cuando la solución converge muy cerca de la raíz. Una forma simple de evitar dichos problemas, que se ha demostrado teóricamente (Ralston y Rabinowitz, 1978), se basa en el hecho de que  $f(x)$  siempre alcanzará un valor cero antes que  $f'(x)$ . Por lo tanto, si se compara  $f(x)$  contra cero, dentro del programa, entonces los cálculos se pueden terminar antes de que  $f'(x)$  llegue a cero. [2]

Se han propuesto algunas modificaciones para atenuar este problema. Ralston y Rabinowitz (1978) proponen que se realice un pequeño cambio en la formulación para que se regrese a la convergencia cuadrática, como en:

$$x_{i+1} = x_i - m \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Donde  $m$  es la multiplicidad de la raíz (es decir,  $m = 2$  para una raíz doble,  $m = 3$  para una raíz triple, etc.). Se trata de una alternativa poco satisfactoria, porque depende del conocimiento de la multiplicidad de la raíz.

Otra alternativa, también sugerida por Ralston y Rabinowitz (1978), consiste en definir una nueva función  $u(x)$ , que es el cociente de la función original entre su derivada:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Se puede demostrar que esta función tiene raíces en las mismas posiciones que la función original. Por lo tanto, la ecuación se sustituye en la ecuación original de Newton-Raphson para desarrollar una forma alternativa del método:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

Se sustituyen las ecuaciones, con lo cual obtenemos:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{[f'(x)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}$$

## V. CONCLUSIONES

El método de Newton es muy eficiente y rápido a la hora de encontrar raíces de una ecuación ya que presenta convergencia cuadrática, pero existen algunas excepciones en las cuales el comportamiento de la convergencia es totalmente diferente al cuadrático, esto sin tener en consideración algunos casos ya mencionados en los cuales el método necesita un análisis especial. Ahora bien el problema de la convergencia del método ocurre cuando la ecuación tiene múltiples raíces y el procedimiento a seguir es modificar el algoritmo aplicando una nueva fórmula, garantizando así la eficacia y capacidad del método.

## REFERENCIAS

- [1] Tjalling J. Ypma, Historical development of the Newton-Raphson method, SIAM Review 37 (4), 531–551, 1995.
- [2] Chapra, S. and Canale, R. (2007). Métodos numéricos para ingenieros (5a. ed.). Distrito Federal: McGraw-Hill Interamericana.
- [3] Burden, R., Faires, D. and Burden, A. (2017). Análisis numérico (10a. ed.). Distrito Federal: CENGAGE Learning.