CLASE 12

Integral indefinida

Objetivos

En esta clase se espera que puedas:

1. Identificar el concepto de la integral como antiderivada.
2. Comprender el proceso de integración inmediata de una función en un intervalo real.
3. Identificar el método de integración más conveniente para integrar cuando el proceso no es inmediato.

Contenidos

Integral indefinida. La antiderivada: notación y constante de integración.
Linealidad de la integración indefinida.
Presentación de la tabla de integrales.
Integración inmediata.
Métodos de integración por sustitución, por partes

Actividad asincrónica de aprendizaje

En esta clase se les envía el enunciado del segundo examen parcial.

Actividad 1:

Sabemos que derivar es una operación entre el subconjunto de funciones reales derivables en (a,b) y el conjunto de funciones reales.

$$f:(a,b) \to \mathbb{R}\ derivable\ entonces\ existe\ f':(a,b) \to \mathbb{R}$$

Surge así naturalmente la pregunta ¿Existirá una operación inversa? Es decir, ¿se podrá antiderivar?

¿Si $f':(a,b) \to \mathbb{R}, existe\ F:(a,b) \to \mathbb{R}\ tal\ que\ F'(x) = f(x)\ para\ todo\ x \in (a,b)$?

Analiza esta propuesta, busca en la bibliografía, propone ejemplos.

Actividad 2:

En caso de poder antiderivar, ¿la función que obtenemos, $F:(a,b) \to \mathbb{R}$ es única?

Actividad 3:

En el TP Nº4 de la cátedra resuelve las integrales del punto A, que puedas resolver de manera directa

Ruta de trabajo:
Trabaja con tu grupo y prepara ideas, dudas, material de consulta para trabajar en clase.

<u>Actividad sincrónica de aprendizaje</u>

En Blackboard Collaborate mediante videoconferencia desarrollaremos las siguientes actividades, en el orden que se detalla:

1. Haremos un recorrido de tipo informal para el aporte de ideas, dudas. Elaboraremos con los alumnos los acuerdos conceptuales y de procedimientos sobre los conceptos de antiderivada, integración inmediata.
2. Conceptualización de métodos de integración por partes y por sustitución.

<u>Aportes de resolución: Con conceptualizaciones</u>

Incluyo el desarrollo de algunos ejercicios del *<u>TPN°4 de la cátedra</u>*

B) 28) $\int \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}dx$

Como la consigna indica resolver por sustitución debo pensar:

a) En el concepto: Se trata de integrar la derivada de una función de función desarrollada así: $\int f\big(g(x)\big).g'(x) = F(g(x)) + C$ o sea busco la primitiva de la función compuesta

b) En el desarrollo: Se trata de establecer el formato para trabajar, llamaremos $u = g(x)$ luego derivar u u' que resultará $g'(x)dx = du$ y en los términos de la sustitución es $u'dx = du$ de aquí se despeja $dx = \frac{du}{u'}$

c) La conveniencia de elección de la expresión a sustituir, en este caso resulta ideal elegir $u = \ln x$ y esa elección se basa en la observación de que derivar u conduce al otro factor en la integral que es $\frac{1}{x}$

Resolución: $\int \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}dx$

u	$u'dx = du$	dx
$\ln x$	$\frac{1}{x}dx = du$	$dx = xdu$

Reemplazo o Sustituyo:

la integral debe resultar para una función en variable u

$\int \frac{1}{u}.\frac{1}{x}.x\,du = \int \frac{1}{u}.\frac{1}{\cancel{x}}.\cancel{x}\,du \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$

Una vez resuelta la integral sustituyo nuevamente y resulta $\boxed{\ln(\ln x) + C}$

Conclusión: $\int \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}dx = \ln(\ln x) + C$ y puede verificarse derivando el resultado para ver si se obtiene la función F(x) de la integral.

C) 31) $\int x \, sen \, x \, dx$

Como la consigna indica resolver por partes debo pensar:

a) En el concepto: También es posible en este caso pensar en la regla de la cadena que luego de aplicarla dio por resultado la función que pretendemos derivar. Se trata de integrar una función desarrollada así: $\int [(u(x).v'(x)]dx$

b) el desarrollo: Se trata de establecer el formato para trabajar, llamaremos $u(x)$ y $v'(x)$ respectivamente a alguna de las funciones que plantea la integral. La resolución se obtiene por la aplicación de la expresión:

$\int [(u(x).v'(x)]dx = u(x).v(x) - [u'(x).v(x)]dx$

En general escribimos $\int u \, dv = u.v - \int v \, du$

Aclaración

La conveniencia de elección, no puede garantizarse. Sin embargo, es un buen recurso buscar simultáneamente que u sea tal que su derivada resulte luego sencilla en la integral y la integración de dv sea en lo posible de integración inmediata.

En este caso es conveniente elegir $u = x$ y $dv = sen \, x$

Resolución:

$u(x)$ en general escribimos u	$u'(x)$ en general escribimos du	$v'(x)$ en general escribimos dv	$v(x)$ en general escribimos v
x	$1dx$	$sen \, x$	$- \, cos \, x$

Organizo en la fórmula

$$\int x \, sen \, x \, dx = x.(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + sen \, x + C$$

Observación: La integral $\int (-\cos x) \, dx$ es de integración directa

Una vez resuelta la integral puedo verificarla.

Otro ejemplo:

Ejercicio 35: $\int e^x sen \, x \, dx$

u	du	dv	v
$\operatorname{sen} x$	$\cos x \, dx$	$e^x dx$	e^x

Resuelvo: $\int e^x sen \, x \, dx = sen \, x.e^x - \int e^x \, cosx \, dx$

Observación: La integral $\int e^x \, cosx \, dx$ no resultó de integración directa y repetir el proceso parece llevarnos a una repetición (ad infinitum)

Sin embargo, podemos encontrar la solución repitiendo el proceso y realizando un proceso algebraico:

Resolvemos la integral $\int e^x \, cosx \, dx$ con la integración por partes y resultará:

$$\int e^x sen \, x \, dx = sen \, x.e^x - \cos x \, .e^x - \int e^x \, sen \, x \, dx$$

Luego realizamos el pasaje de la integral al primer miembro y resulta

$$2\int e^{x} sen\ x\ dx = sen\ x. e^{x} - \cos x\ . e^{x}$$

$$\boxed{\int e^{x} sen\ x\ dx = \frac{1}{2}\ e^{x}(sen\ x - sen\ x)}$$

Evaluación de la clase: En la plataforma. La evaluación consiste en un trabajo colaborativo con el siguiente formato:

Cada alumna/o elige tres ejercicios en total del TPNº4 apartados A, B, C los resuelve e intercambia con otro integrante del aula que hizo lo propio. La segunda parte consiste en realizar una devolución entre compañeros sobre la producción de su par en esta tarea.