

10. Integrales

1 Área debajo de la gráfica de una función positiva

Comenzaremos poniendo atención al problema de calcular el **área** debajo de la gráfica de una función f positiva y sobre el eje x desde $x = a$ hasta $x = b$.

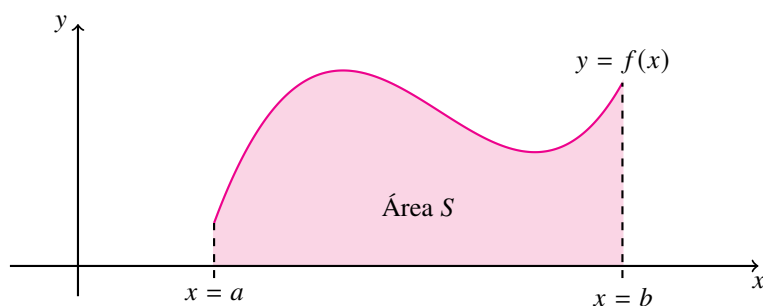


Figura 1: Área debajo de la gráfica $y = f(x)$ sobre el eje x en el intervalo $[a, b]$.

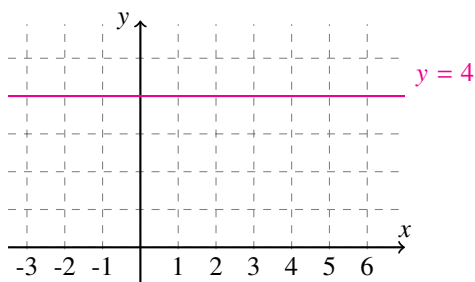
La región que nos interesa se escribe en forma de conjunto como

$$S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

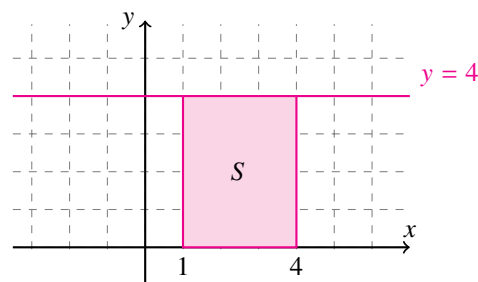
Según sea la función, podremos resolver el problema utilizando las fórmulas para calcular áreas de **figuras geométricas** conocidas.

■ Ejemplo 1.1 — Área debajo de una función constante.

Si realizamos la gráfica de la función $f(x) = 4$ obtenemos la Figura 2a



(a) Gráfica de la función $f(x) = 4$.



(b) Rectángulo S cuya base es el intervalo $[1, 4]$.

Figura 2: Gráfica de la función $f(x) = 4$ y rectángulo debajo de la gráfica considerando como base el intervalo $[1, 4]$.

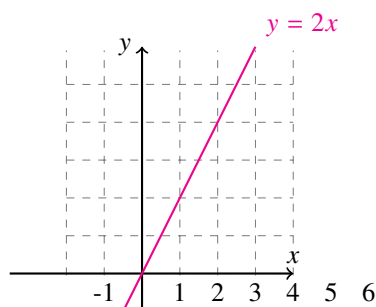
La **región debajo de la gráfica** de $f(x) = 4$ en el intervalo $[1, 4]$ es un **rectángulo** que se representa en la Figura 2b. Su **base** mide 3 unidades y su **altura** mide 4 unidades. Por lo tanto,

$$\text{Area}(S) = 3 \text{ unidades} \times 4 \text{ unidades} = 12 \text{ unidades}^2$$

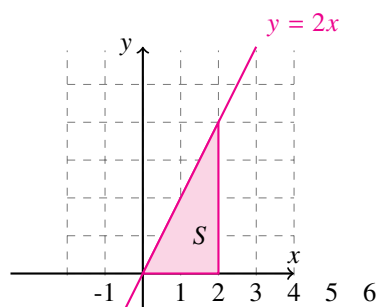
■

■ **Ejemplo 1.2 — Área debajo de una recta que pasa por el origen.**

Si realizamos la gráfica de la función $f(x) = 2x$ obtenemos la Figura 3a



(a) Gráfica de la función $g(x) = 2x$.



(b) Triángulo S cuya base es el intervalo $[0, 2]$.

Figura 3: Gráfica de la función $g(x) = 2x$ y triángulo debajo de la gráfica considerando como base el intervalo $[0, 2]$.

La **región debajo de la gráfica** de $g(x) = 2x$ en el intervalo $[0, 2]$ es un **triángulo** que se representa en la Figura 3b. Su **base** mide 2 unidades y su **altura** mide 4 unidades. Por lo tanto,

$$Area(S) = \frac{2 \text{ unidades} \times 4 \text{ unidades}}{2} = 4 \text{ unidades}^2$$

■

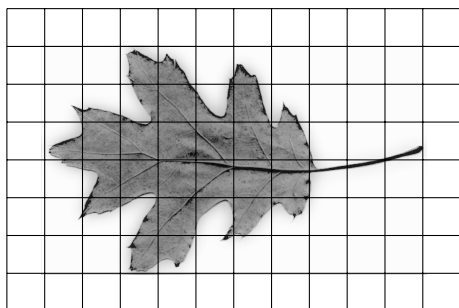
Actividad 10.1 Determinen el área de la región S correspondiente a las siguientes funciones en los intervalos indicados.

- a) $f(x) = 3$ en el intervalo $[0, 2]$ b) $g(x) = \frac{1}{2}$ en el intervalo $[2, \frac{7}{3}]$
 c) $h(x) = x$ en el intervalo $[0, 2]$ d) $m(x) = x + 1$ en intervalo $[1, 3]$
 e) $p(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en el intervalo $[0, 4]$

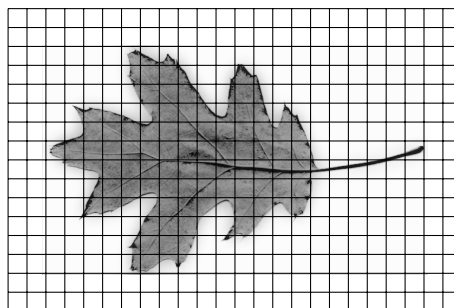
■

En el caso general, donde la forma de la región S tiene tramos curvos o irregulares, se requiere utilizar estrategias de **aproximación** que garanticen un resultado cada vez más preciso del valor del área buscada.

Por ejemplo, para determinar el área de la hoja de roble de la Figura 4 utilizaremos las grillas pintadas sobre ella. La cuadrícula de la Grilla 1 se separa cada 1 cm. En la Grilla 2, la separación es de medio centímetro.



Grilla 1



Grilla 2

Figura 4: Grilla sobre la hoja de roble para estimar su área.

Actividad 10.2

a) Completen la Tabla 1 determinando:

- E : cantidad de cuadrados que se encuentran **completamente** dentro de la hoja.
- M : cantidad de cuadrados que intersecan **parcialmente** la hoja.

	E	M	$M + E$
Grilla 1			
Grilla 2			

Tabla 1: Estimación del área de la hoja de roble usando las grillas de la Figura 4.

b) El área de los cuadrados de la Grilla 1 es de 1 cm^2 y el área de los cuadrados de la Grilla 2 es de 0.25 cm^2 . Calculen el área ocupada por los cuadrados E y el área ocupada por la suma de los cuadrados $E + M$ y completen.

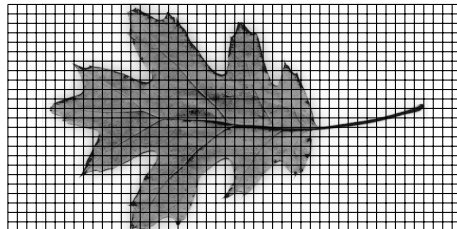
Grilla 1: _____ \leq Área de la hoja \leq _____

Grilla 2: _____ \leq Área de la hoja \leq _____

■

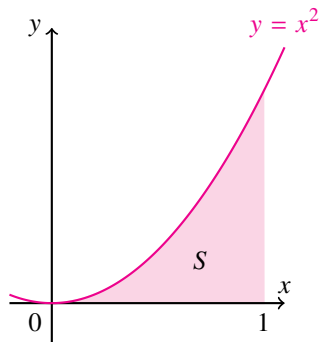
Para una mejor estimación del área de la hoja se reduce el tamaño de la grilla y se **re-contabilizan** los cuadrados completamente contenidos en la hoja y los cuadrados parcialmente contenidos en la hoja. En la Figura 5 se presenta una **tercera** cuadrícula con una Grilla 3 con una separación de 0.125 cm que nos permitirá realizar una nueva estimación del área.

$$\text{Grilla 3: } (0.125)^2 \times E \text{ cm}^2 \leq \text{Área de la hoja} \leq (0.125)^2 \times (E + M) \text{ cm}^2$$

Figura 5: Grilla 3 con una separación de 0.125 cm en la cuadrícula.

Usaremos un procedimiento similar al anterior para estimar el área S debajo de la gráfica de una función positiva como nos propusimos al comienzo del Módulo.

En este caso, usaremos rectángulos para estimar el área debajo de la parábola $y = x^2$ desde $x = 0$ a $x = 1$. Ver Figura 6.

Figura 6: Área debajo de $y = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Dividiremos el área S en 4 franjas verticales S_1, S_2, S_3 y S_4 de igual ancho como en la Figura 7 y aproximaremos cada franja con un rectángulo con la misma **base** y la misma **altura** que cada franja.

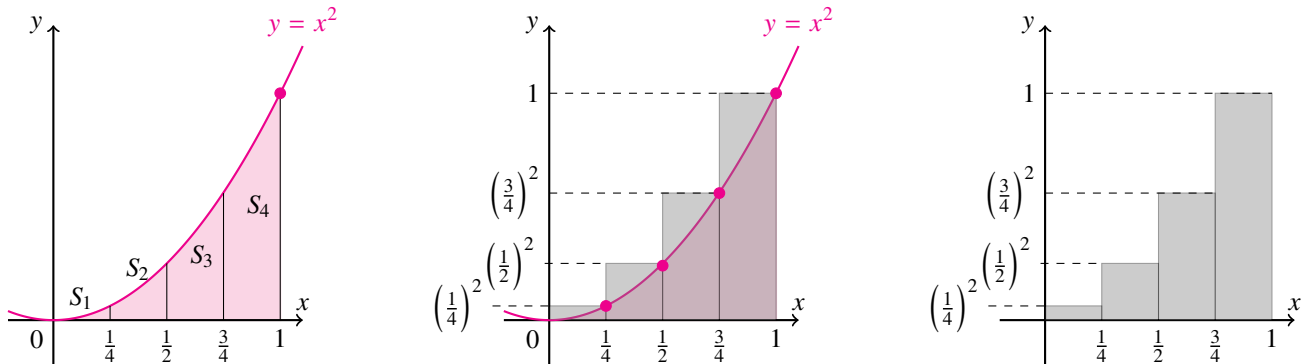


Figura 7: Subdivisión en cuatro franjas verticales para estimar el área S .

Cada rectángulo tiene una **base** que mide $\frac{1}{4}$ y sus alturas son $\left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2$ y 1 . Si tomamos R_4 como la suma de las áreas de estos rectángulos obtenemos

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot (1)^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

Por lo tanto, el área de la región S cumple

$$S < 0.46875$$

Si utilizáramos rectángulos más pequeños como los de la Figura 8 que tienen la misma **base** pero cuyas alturas están determinadas por los valores de la función en el borde **izquierdo** de cada sub-intervalo (el primero de los rectángulos queda “chato” de altura cero). La suma de las áreas en este caso queda

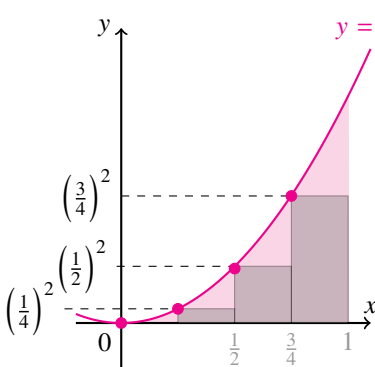


Figura 8: Rectángulos más pequeños.

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot (0)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

con lo que

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Podemos repetir el proceso con un mayor número de rectángulos verticales como en la Figura 9 que tiene 8 franjas.

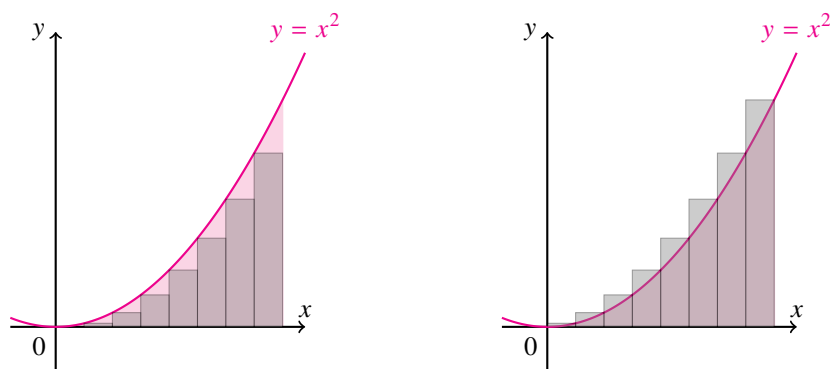


Figura 9: Subdivisión en ocho franjas para estimar el área S .

Calculando la suma de las áreas de los rectángulos de la izquierda (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos de la derecha (R_8) obtenemos

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

En la Tabla 2 se presentan los resultados (hechos con una computadora) de la suma de los rectángulos izquierdos y derechos para sub-divisiones de n rectángulos.

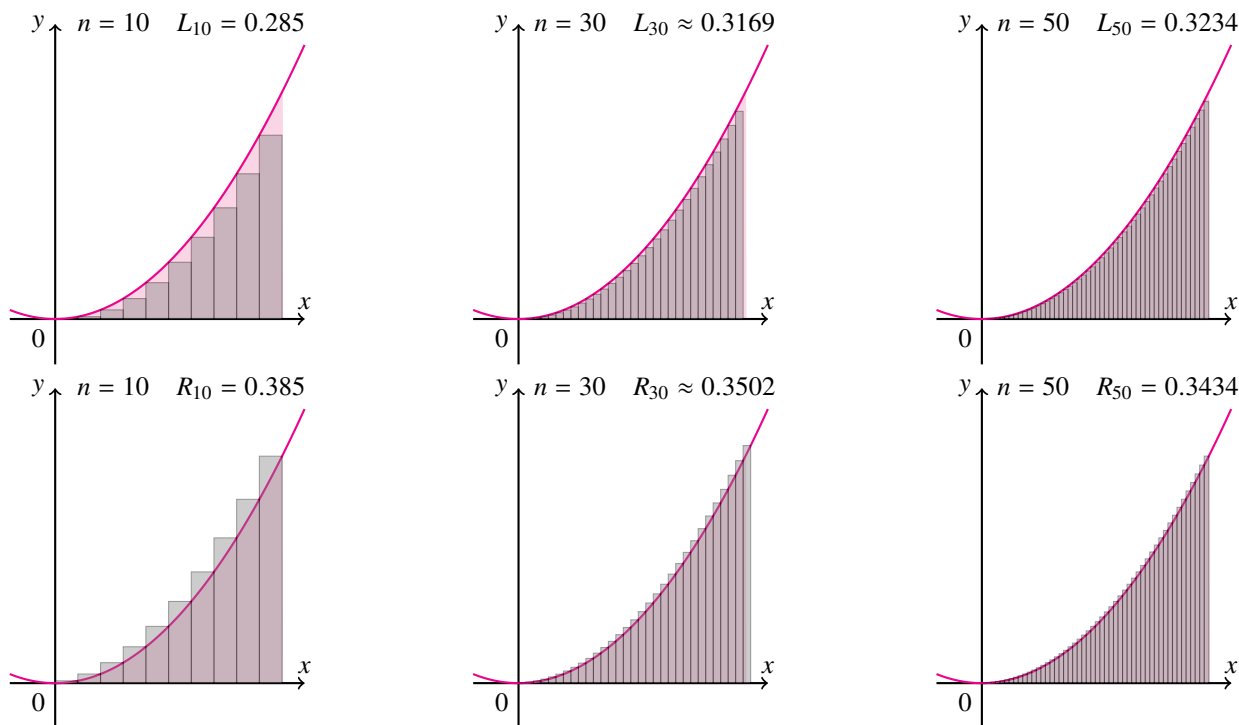


Figura 10: El área S estimada con una gran cantidad de rectángulos izquierdos y derechos.

De la Figura 10 y la Tabla 2 parece que a medida que n crece (haciendo más sub-divisiones) obtenemos mejores aproximaciones del área de S de tal forma que podemos proponer

$$\text{Área de } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$$

En esta situación, tratándose de la función $f(x) = x^2$ es posible calcular el valor del área buscada en forma exacta trabajando en forma analítica con las expresiones de L_n y R_n . Mostraremos que

$$\text{Área de } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \frac{1}{3}$$

n	L_n	R_n
10	0.285	0.385
20	0.30875	0.35875
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234	0.3434
100	0.32835	0.33835
1000	0.3328335	0.3338335

Tabla 2: Estimación del área de S usando gran cantidad de rectángulos.

Demostración Comenzamos con los rectángulos que usan el borde de la derecha que nos permite obtener (sumando las áreas de todos ellos) R_n . Cada rectángulo tiene base de longitud $\frac{1}{n}$ y la altura se obtiene evaluando la función en cada uno de los valores $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}$ por lo que

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

Para continuar necesitamos una fórmula que permita calcular la suma que está entre paréntesis y que presentamos a continuación (puede demostrarse usando el Principio de

Inducción)

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

por lo que

$$R_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}$$

Ahora debemos tomar el límite (recordar el Módulo 7)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)}{6n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{3}$$

Un procedimiento similar permite ver también que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{1}{3}$.

Aplicaremos el mismo procedimiento a una función cualquiera (positiva) subdividiendo la región S en n franjas verticales S_1, S_2, \dots, S_n del mismo ancho

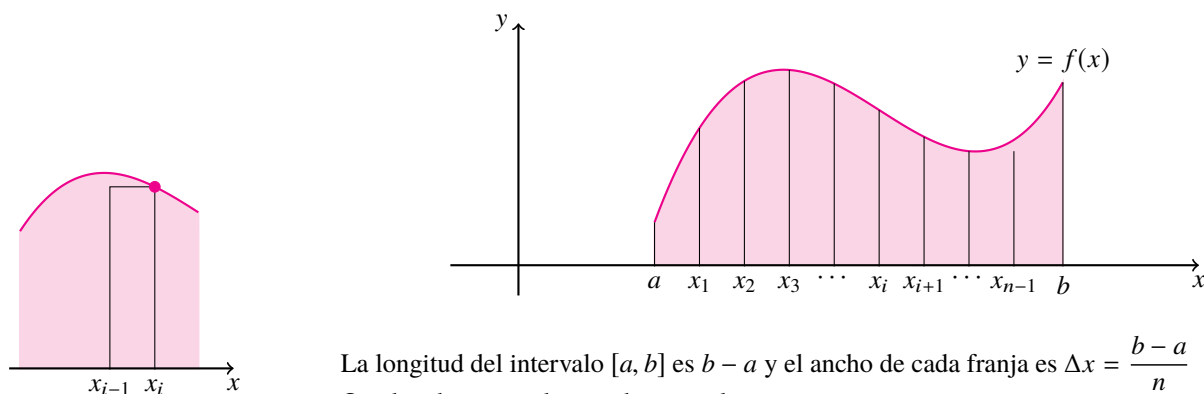


Figura 11: La altura de los rectángulos está determinada por el valor de la función en el borde derecho de cada intervalo.

La longitud del intervalo $[a, b]$ es $b - a$ y el ancho de cada franja es $\Delta x = \frac{b - a}{n}$. Quedan determinados n sub-intervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los bordes de la derecha de cada intervalo están dados por

$$x_1 = a + \Delta x \quad x_2 = a + 2\Delta x \quad x_3 = a + 3\Delta x \quad \dots$$

Aproximamos el área de cada franja por rectángulos verticales de ancho Δx y altura $f(x_i)$ (la altura de cada rectángulo es el valor de la función en el borde de la derecha de cada intervalo) y sumamos las áreas para obtener

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

En la Figura 12 se presenta una secuencia de $n = 2, n = 4, n = 8$ y $n = 12$ intervalos de tal manera que se considera que R_n se aproxima cada vez más al valor del área de S a medida que $n \rightarrow +\infty$.

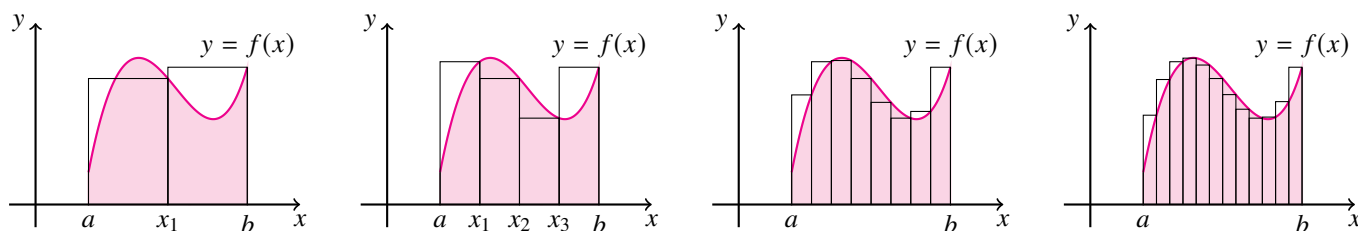


Figura 12: Divisiones con $n = 2, n = 4, n = 8$ y $n = 12$ subintervalos para determinar el área de la región S .

■ **Definición 1.1 — Área debajo de la gráfica de una función continua y positiva.**

El **área** de la región S formada por los puntos debajo de la gráfica de una función continua y positiva para valores de $x \in [a, b]$ está determinada por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

donde se considera a x_i como el borde **derecho** del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Y donde $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ es la longitud de cada subintervalo (todos miden lo mismo).

El mismo valor del área se obtiene considerando L_n usando los bordes izquierdo de cada subintervalo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

Y en general, el mismo valor se obtiene usando un valor cualquier x_i^* (denominado **valor de prueba**) dentro de cada subintervalo

$$\text{Área de } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

Usando la notación de Σ se escribe

$$\text{Área de } S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

Actividad 10.3 Considerar la función $f(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, 2]$.

- a) En la Figura 13 se representa la gráfica de f . Incorporen allí los rectángulos correspondientes a R_4 y L_4 .

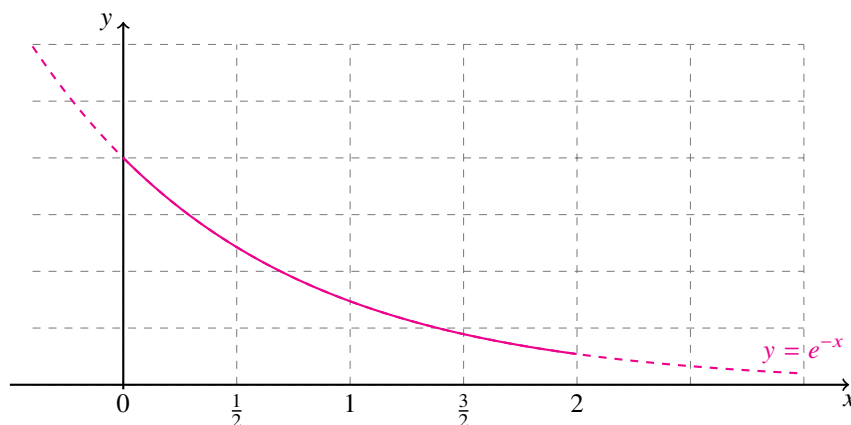


Figura 13: Gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[0, 2]$.

- b) Calculen las áreas de R_4 y L_4 ; y realicen una estimación del área debajo de la curva de la función f en el intervalo $[0, 2]$.
- c) Realicen el mismo procedimiento para calcular R_8 y L_8 usando la misma Figura 13 y mejoren la estimación del inciso anterior.

2 Distancia recorrida y posición de un móvil

Actividad 10.4 Consideren las siguientes situaciones y respondan las consignas

- a) Lucas realiza un viaje en bicicleta por una ruta a una velocidad **constante** de 20 km/h durante 5 horas. ¿Qué distancia recorrió Lucas?
- b) Alicia realiza un viaje en bicicleta. El gráfico de la Figura 14 representa la velocidad vs. el tiempo de Alicia durante su trayecto que duró 5 horas. En realidad, la función velocidad de Alicia durante el trayecto es continua (sin saltos) pero simplificamos la situación en $t = 2$ debido a que Alicia aceleró de 15 km/h a 20 km/h en un momento muy breve. ¿Qué distancia recorrió Alicia en total?
- c) Nicolás realizó un viaje en bicicleta hacia el norte en una ruta a una velocidad constante de 12 km/h durante 2 horas, luego dió la vuelta y viajó hacia el sur a una velocidad constante de 20 km/h durante 1 hora. Consideramos que la velocidad viajando hacia el norte es positiva y la velocidad viajando hacia el sur es negativa.

Asumiendo que el cambio de la velocidad de Nicolás al dar la vuelta se hace en un momento muy breve, ¿cuál de las gráficas de la Figura 15 representa correctamente la velocidad de Nicolás durante sus 3 horas de viaje? Expliquen el motivo de la elección.

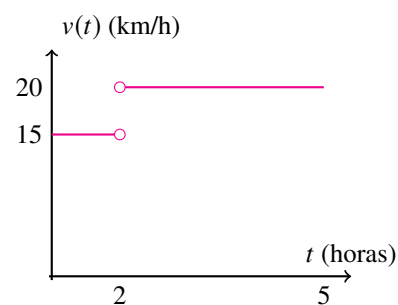


Figura 14: Gráfica de la función velocidad de Alicia.

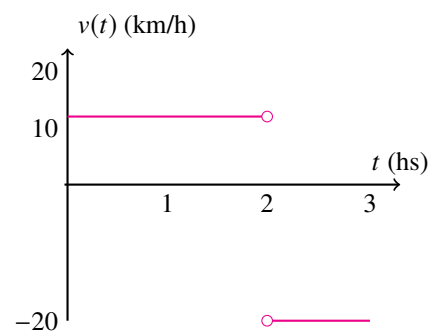
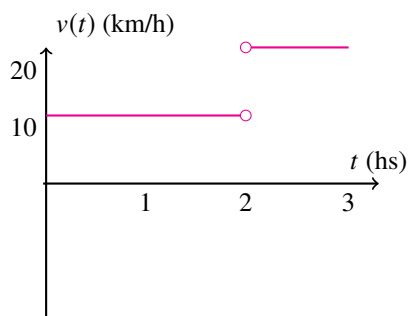
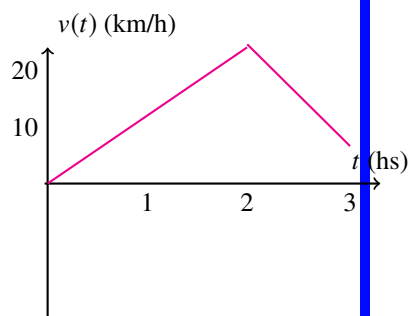


Figura 15: Para elegir la función velocidad de Nicolás.

- d) En la Figura 16 se representa la función velocidad durante el viaje que Andrea realizó primero hacia el norte, luego hacia el sur y luego de nuevo hacia el norte por una ruta. Los valores entre paréntesis de la figura son los valores de las áreas sombreadas.

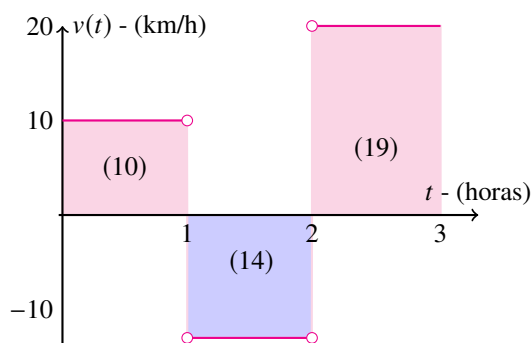


Figura 16: Gráfica de la velocidad de Andrea.

Completen los espacios en blanco según corresponda. Expliquen cómo lo calcularon.

- En la primera hora de viaje Andrea recorre _____ km al norte.
- En la siguiente hora Andrea recorre _____ km al sur; su posición respecto al punto donde comenzó el viaje es de _____ km al sur.
- A la 3 horas, Andrea se encuentra a _____ km al norte del punto donde comenzó su viaje; porque en la tercer hora realizó 19 km al _____ del punto de comienzo del viaje.

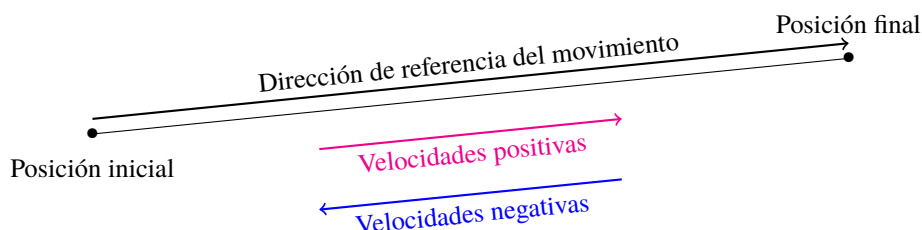
Consideraremos el problema general de determinar la **posición** de un objeto que se mueve describiendo una trayectoria curvilínea y la **distancia** que recorre el objeto durante un período de tiempo. En el Módulo 4 presentamos la velocidad instantánea de un móvil como la derivada de la posición respecto al tiempo

$$v = p' = \frac{dp}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

O sea, si conocemos la posición de un objeto en cada instante de tiempo entonces podemos determinar su velocidad en cada instante mediante la derivada de la posición.

En esta oportunidad consideraremos el problema **inverso** que consiste en determinar la posición de un objeto conociendo su velocidad. Esta situación requiere los siguientes acuerdos

- El movimiento del objeto se realiza en una **única dirección** como si fuera el movimiento de un auto en una ruta que avanza o retrocede pero no se mueve hacia los costados.
- Se requiere fijar un **sentido de referencia** que indica hacia dónde estamos considerando el **avance** y el **retroceso** del móvil.
- Si velocidad es **positiva**, el movimiento del objeto se realiza en **sentido positivo** del sistema de referencia elegido.
- Si la velocidad es **negativa**, el movimiento del objeto se realiza en **sentido contrario** al sentido positivo del sistema de referencia.



Si la velocidad del objeto se mantiene constante durante todo el trayecto entonces la distancia recorrida se determina de manera sencilla como

$$\text{Variación de la posición} = \text{velocidad} \times \text{Variación del tiempo}$$

$$\Delta p = v \times \Delta t$$

Pero si la velocidad cambia durante el recorrido entonces no es tan sencillo determinar la posición del objeto.

■ Ejemplo 2.1 — Un recorrido en auto contando los kilómetros.

En general, el tablero de un auto tiene varios instrumentos medidores. Uno de ellos muestra la **velocidad** del auto en cada instante (el velocímetro); y otro cuenta los kilómetros recorridos (el cuentakilómetros u odómetro). En esta situación no hay velocidades negativas en el velocímetro; las velocidades que marca el velocímetro son positivas y van hacia **adelante** respecto del auto. Pero lo que sucede es que en el auto en que viajamos se ha roto el cuentakilómetros por lo que no podemos saber el kilometraje que vamos haciendo durante el trayecto. Por lo tanto decidimos tomar nota

de la velocidad marcada en el velocímetro cada 5 segundos durante un período de 30 segundos. Presentamos los datos recopilados en la siguiente tabla

Tiempo (en segundos)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (en km/h)	67	70	69	65	61	55	53

Para hacer consistente la recopilación de los datos debemos hacer una conversión de unidades considerando que 1 km/h equivale aproximadamente a 0.28 m/s.

Tiempo (en segundos)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (en m/s)	18.6	19.4	19.2	18.1	16.9	15.3	14.7



Durante cada intervalo de tiempo de 5 segundos la velocidad no cambia mucho por lo que podemos suponer que la velocidad se mantiene **constante** en cada intervalo de 5 segs.

En el **primer intervalo** que dura 5 segundos la velocidad se considera constante 18.6 m/s por lo que el auto **avanza**

$$18.6 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 93 \text{ m}$$

En el **segundo intervalo**, que también dura 5 segundos, la velocidad se considera constante 19.4 m/s por lo que el auto avanza

$$19.4 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 97.5 \text{ m}$$

En forma similar podemos calcular, de manera aproximada, la cantidad de metros que avanzó el auto en todo el trayecto que duró 30 segundos (no incluimos las unidades)

$$(18.6 \times 5) + (19.4 \times 5) + (19.2 \times 5) + (18.1 \times 5) + (16.9 \times 5) + (15.3 \times 5) = 611 \text{ metros}$$

Seguramente podríamos lograr una mayor aproximación en nuestros cálculos si las lecturas del velocímetro fueran cada 2 segundos. O con intervalos más cortos.

■

Las cuentas realizadas en el Ejemplo 2.1 se parecen mucho a las cuentas que realizamos en el problema del área debajo de la gráfica de una función positiva. Cada intervalo de tiempo y la velocidad que se considera constante en dicho intervalo se asocia a cada rectángulo en la gráfica de la velocidad en función del tiempo como se representa en la Figura 17.

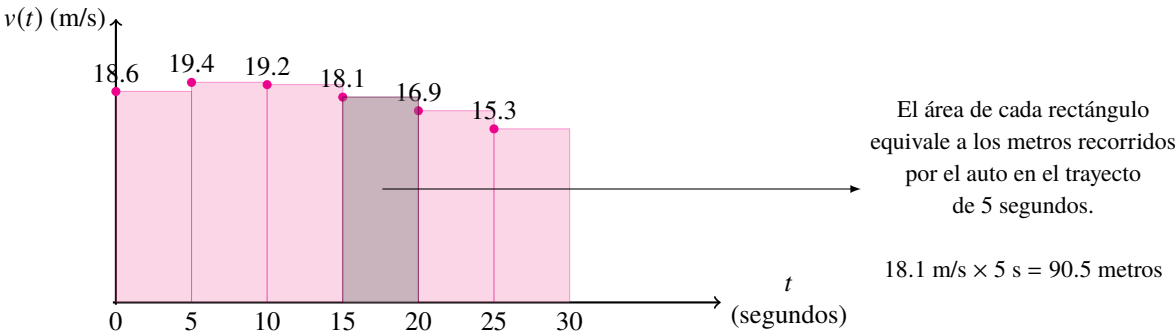


Figura 17: Subdivisión en 6 intervalos de 5 segundos.

■ **Ejemplo 2.2 — Un objeto enganchado a un resorte vertical.**

Consideremos un objeto enganchado a un resorte que cuelga del techo de tal manera que se produce un movimiento exclusivamente vertical. Podemos considerar que el sentido **positivo** del movimiento se produce hacia **arriba** y el sentido **negativo** del movimiento se produce hacia **abajo**. Ver Figura 19.

En la Figura 18 se representa la velocidad $v(t)$ de un objeto sostenido por un resorte desde el techo que se mueve durante un lapso de tiempo de $t = 0$ hasta $t = 2\pi$.

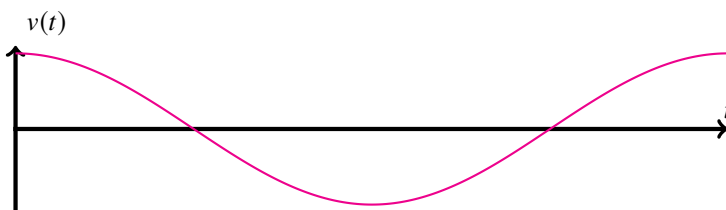


Figura 18: Velocidad de un objeto sostenido por un resorte desde el techo.

Subdividimos el intervalo $[0, 2\pi]$ en pequeños intervalos para considerar allí que la velocidad es **constante**. Pero considerando que el área de los rectángulos **debajo** del eje horizontal corresponden a velocidades **negativas** por lo que corresponden a un movimiento **hacia abajo**.

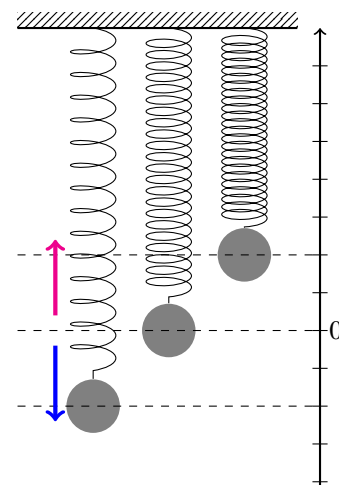
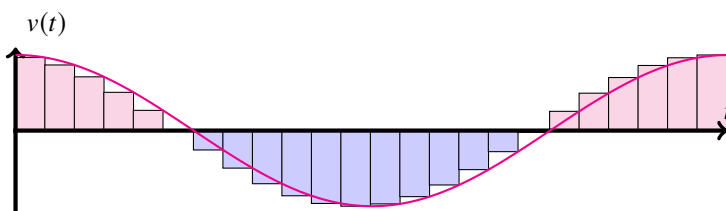


Figura 19: Objeto sostenido por un resorte.

Actividad 10.5 En la Figura 20 se representa la velocidad de un objeto enganchado a un resorte que cuelga del techo y que se mueve en un lapso de tiempo de $t = 0$ hasta $t = 5.5$ segundos considerando que el sentido del movimiento positivo se refiere hacia arriba. Las cantidades entre paréntesis representan el valor del área de la región correspondiente.

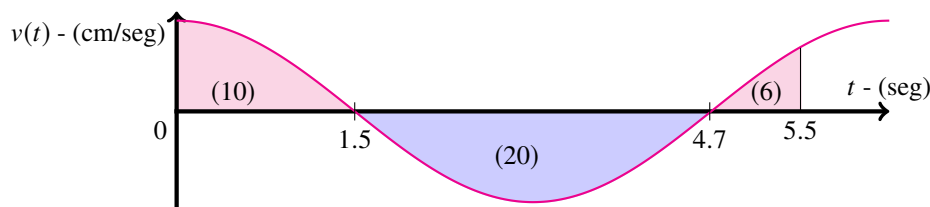


Figura 20: Velocidad (cm/seg) vs. tiempo (seg).

- ¿Cuántos metros subió el objeto en el primer intervalo de 0 a 1.5 segundos?
- ¿Cuántos metros bajó el objeto en el intervalo de 1.5 a 4.7 segundos? Respecto a la posición inicial, ¿se encuentra arriba o debajo? ¿A qué distancia?
- ¿Cuántos metros subió el objeto en el intervalo de 4.7 a 5.5 segundos? Respecto a la posición inicial, ¿en qué posición se encuentra?

La situación general se considera de la siguiente manera:

■ **Definición 2.1 — Desplazamiento de un objeto.**

Si $p(t)$ representa la posición de un objeto y $v(t)$ la velocidad del objeto (que consideraremos funciones continuas) que se mueve en sentido uni-dimensional, habiendo fijado un sentido positivo para el movimiento y considerando que se toma un intervalo de tiempo desde $t = a$ (instante inicial) hasta $t = b$ (instante final), se determina la posición del objeto al final del recorrido por

$$p(b) = p(a) + \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} v(t_1^*)\Delta t + v(t_2^*)\Delta t + \cdots + v(t_n^*)\Delta t}_{\text{Desplazamiento resultante hacia atrás o hacia adelante}} \quad (1)$$

Desplazamiento resultante hacia atrás o hacia adelante

tomando t_n^* algún **valor de prueba** en cada subintervalo de tiempo de tamaño Δt . También escribimos la ecuación 1 usando la notación $\Delta p = p(b) - p(a)$ de la forma

$$\Delta p = \lim_{n \rightarrow +\infty} v(t_1^*)\Delta t + v(t_2^*)\Delta t + \cdots + v(t_n^*)\Delta t \quad (2)$$

con la misma consideración de tomar t_n^* algún **valor de prueba** dentro de cada subintervalo de tiempo de tamaño Δt .

La cantidad $v(t)$ tiene unidades de velocidad y Δt tiene unidades de tiempo que, en el caso que sean compatibles se tiene

$$p = \frac{[\text{longitud}]}{[\text{tiempo}]} \times [\text{tiempo}] = [\text{longitud}]$$

La suma $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$ que aparece en la Definición 3.1 se llama **suma de Riemann** por el matemático Bernhard Riemann (1826–1866).

3 La integral definida

Tomamos como base los problemas:

- El área debajo de la gráfica de una función continua y positiva en un intervalo $[a, b]$.
- La posición de un objeto que se mueve uni-dimensionalmente conociendo su velocidad y conociendo la posición inicial.

■ **Definición 3.1**

Si f es una función definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Sean $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ los bordes de esos intervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ valores cualesquiera en esos subintervalos, con x_i^* en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f desde a hasta b** es

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x \end{aligned}$$

siempre que ese límite exista. Si el límite existe, se dice que f es **integrable** en $[a, b]$.

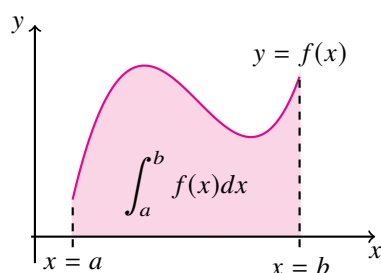
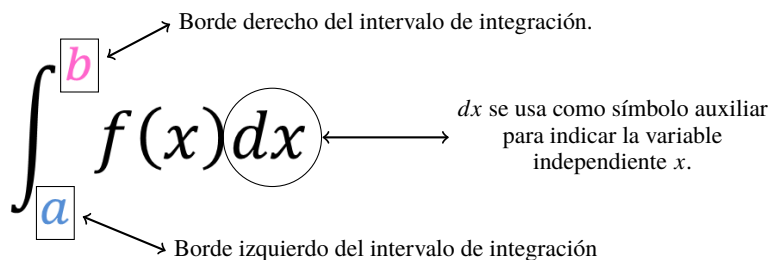


Figura 21: La integral definida de f en el intervalo $[a, b]$.

Ⓒ El símbolo \int se llama **signo de integral**. Es una especie de S alargada.



- C** La integral definida $\int_a^b f(x) dx$ es un número. La variable x se considera **auxiliar** y no cumple ningún papel concreto. Es más, se puede usar cualquier letra como variable y el valor de la integral es el mismo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(r) dr = \int_a^b f(t) dt.$$

Si la función f es **positiva** y continua entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Área debajo de la gráfica de } f \text{ y sobre el eje } x \text{ en el intervalo } [a, b]$$

como en la Figura 21 tal como se desarrolló en la Sección 1.

Si los valores de la función f son tanto **positivos** como **negativos**, como en la Figura 22, entonces se consideran las regiones debajo del eje x con un aporte **negativo** de sus áreas y las regiones sobre el eje x con aportes **positivos** de sus áreas, de modo que la suma de ellas representa el **área neta** entre la gráfica de la función f y el eje x .

$$\int_a^b f(x) dx = \text{Área neta entre la gráfica de la función } f \text{ y el eje } x.$$

Por ejemplo, en la Figura 22 corresponde calcular

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3$$

Cuando se estudia el movimiento de un objeto mediante las funciones **posición**, $p(t)$, y **velocidad**, $v(t)$, se tiene que

$$\Delta p = p(b) - p(a) = \int_a^b v(t) dt$$

Aunque hemos definido la $\int_a^b f(x) dx$ dividiendo el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de igual longitud, hay situaciones en las que conviene trabajar con intervalos de distinta longitud. Por ejemplo, hay experimentos biológicos en donde los datos son recolectados en tiempos que no son igualmente espaciados. También se define en este caso la integral definida si la longitud de los intervalos tiende a 0 en el proceso del límite.

Teorema 3.1 — Existencia de la integral definida.

Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene solo un número finito de discontinuidades tipo salto, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Es decir, la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ existe.

En las condiciones del Teorema 3.1, se puede asegurar que la función f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en cada sub-intervalo correspondiente a la Suma de Riemann. En algunos libros se utilizan los valores x_i^{\min} y x_i^{\max} para indicar donde la función alcanza sus valores mínimos y máximos (respectivamente) en los sub-intervalos. Las sumas de Riemann asociadas a dichos valores se denominan usualmente **Sumas inferiores** y **Sumas superiores**. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces el límite de la Definición 3.1 existe y da el mismo valor sin importar la elección de los puntos x_i . Para simplificar el cálculo de la integral generalmente se toman los valores x_i como el borde derecho de los intervalos. Entonces, $x_i^* = x_i$ y la definición de la integral se simplifica como sigue.

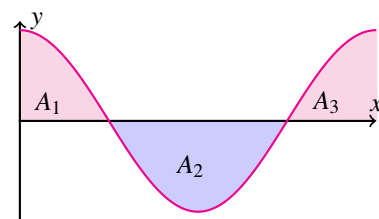


Figura 22: La **integral definida** como área neta entre la gráfica de f y el eje x en el intervalo $[a, b]$.

Teorema 3.2 Si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, y $x_i = a + i \Delta x$.

Los problemas del área debajo de la gráfica de una función, del desplazamiento de un objeto móvil o de la determinación de la cantidad de infección son tres ejemplos de una clase más amplia de problemas similares que estudian el cálculo de una **cantidad total** mediante la suma sobre pequeños subintervalos en los que intervienen funciones que se suponen **constantes** allí.

- El **área total** debajo de la gráfica de una función positiva se considera como la suma de las áreas de pequeños rectángulos dado que se estima que la función es constante en cada pequeño intervalo.
- La **distancia total** recorrida por un objeto se calcula como la suma de pequeñas distancias calculadas en pequeños intervalos de tiempo bajo el supuesto de que la velocidad es constante en cada uno de ellos.
- La **cantidad de infección** acumulada por una infección se calcula como la suma de la cantidad de células infectadas por unidad de volumen acumuladas en un período de tiempo.

Otros problemas similares en los que intervienen funciones que se pueden suponer **localmente constantes** son la densidad de una sustancia, la concentración de una solución, la magnitud de una fuerza, entre otros.

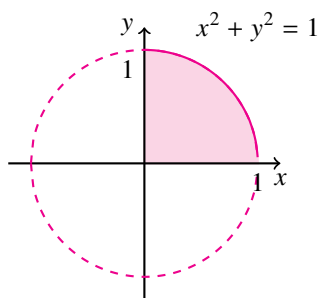


Figura 23: Gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en el intervalo $[0, 1]$.

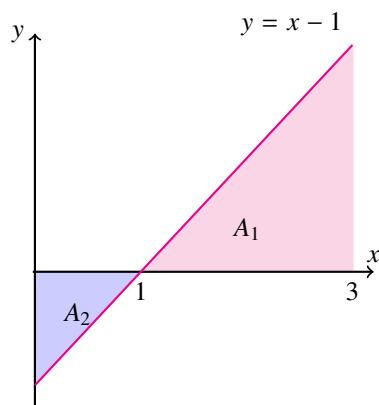


Figura 24: Gráfica de la función $g(x) = x - 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

■ **Ejemplo 3.1 — Cálculo de dos integrales usando la interpretación geométrica.**

Evaluemos las siguientes integrales interpretando en términos de áreas.

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

b) $\int_0^3 (x-1) dx$

- a) Como $f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$, podemos interpretar a esta integral como el área bajo la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ de 0 a 1. Pero como $y^2 = 1-x^2$, obtenemos que $x^2 + y^2 = 1$, que muestra que la gráfica de f es el cuarto de circunferencia con radio 1 de la Figura 23. Por lo tanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{4} \pi 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

- b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se muestra en la Figura 24. Calculamos la integral como la diferencia de las áreas de los triángulos:

$$\int_0^3 (x-1) dx = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) - \frac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1.5$$

■

Actividad 10.6 Estimen la integral definida de la función g cuya gráfica se presenta en la Figura 25 usando 6 subintervalos: tomando los bordes derechos de cada intervalo, luego tomando los bordes izquierdos de cada intervalo y luego tomando los valores medios de cada intervalo.

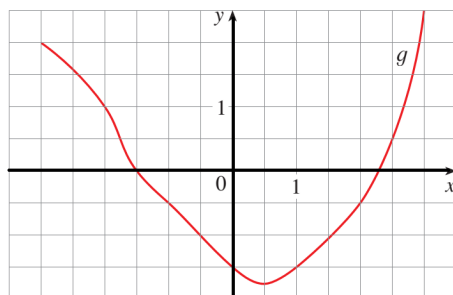


Figura 25: Gráfica de la función g .

Actividad 10.7 Durante el test de una nueva droga, los investigadores miden la concentración de la droga en el plasma sanguíneo cada 10 minutos. Los valores promedio se presentan en la Tabla 3 donde t se mide en minutos y C se mide en $\mu\text{g/mL}$. Estimen, usando los bordes izquierdos y derechos, la integral $\int_0^{100} C(t)dt$.

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$C(t)$	0	1.3	1.8	2.2	2.4	2.5	2.4	2.3	2.0	1.6	1.1

Tabla 3: Concentración C de la nueva droga medida en intervalos de 10 minutos.

Actividad 10.8 La Figura 26 muestra la velocidad de un auto frenando en una carretera. Estimen la distancia que recorre el auto antes de detenerse.

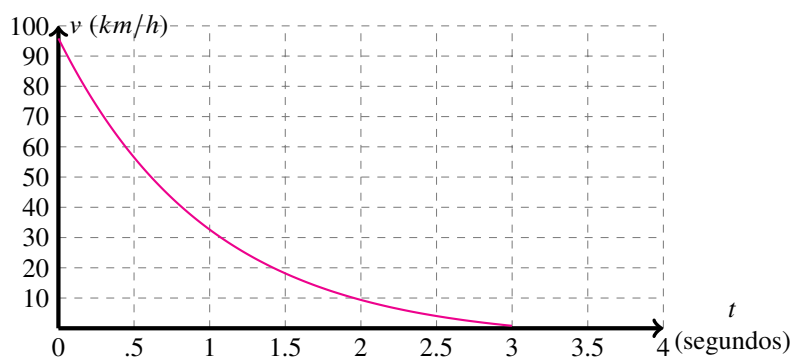


Figura 26: Velocidad del auto mientras va frenando.

Actividad 10.9 En un estudio sobre el metabolismo del ácido salicílico (SA) se modela la concentración de SA mediante la función $C(t) = 11.4te^{-t}$ donde t se mide en horas y C se mide en $\mu\text{g/mL}$. Usando valores de la derecha del intervalo con 8 subintervalos estimar $\int_0^4 C(t)dt$.

3.1 Propiedades de la integral definida

Cuando se define la **integral definida** se toma $a < b$ para que tenga sentido el intervalo $[a, b]$; sin embargo aceptaremos a partir de ahora las siguientes propiedades que se consideran válidas para cualesquiera valores de a y b

Propiedad 3.3 — Propiedades de la integral definida.

Considerando f y g funciones continuas se tiene que

- a) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- b) $\int_a^a f(x) dx = 0$
- c) $\int_a^b c dx = c(b - a)$, para cualquier constante c
- d) $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- e) $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$, para cualquier constante c
- f) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$
- g) $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$, para cualquier constante c

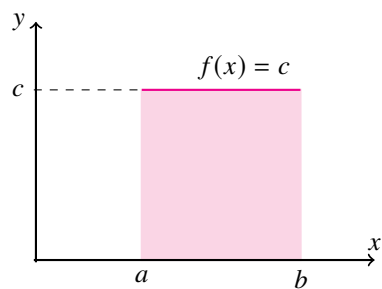


Figura 27: Área del rectángulo debajo de la función $f(x) = c$.

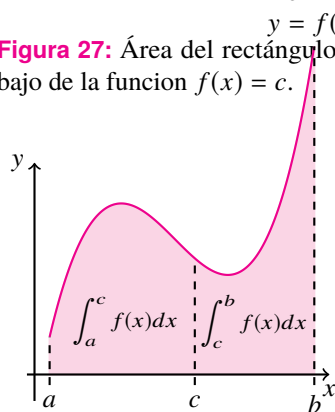


Figura 28: El intervalo se sub-divide en $[a, c]$ y $[c, b]$.

La Propiedad b) se refiere a que el área de un segmento se toma como 0 dado que la base es un intervalo de la forma $[a, a]$. La Propiedad c) dice que la integral de una función constante $f(x) = c$ es la constante por la longitud del intervalo. Si $c > 0$ y $a < b$, se interpreta gráficamente dado que $c(b - a)$ es el área del rectángulo sombreado de la Figura 27.

Las Propiedades d), e) y f) se refieren a cómo se comporta la integral definida con las operaciones algebraicas entre funciones de **suma**, **resta** y **multiplicación por una constante**. Coloquialmente, en el caso de la suma: “la integral definida de una suma de funciones es la suma de las integrales definidas”. En forma similar para la resta y para la multiplicación por una constante. Se deducen de operar correctamente con los límites para $n \rightarrow +\infty$ sabiendo que existen. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) + g(x_i)] \Delta x \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \\
 &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.
 \end{aligned}$$

La Propiedad e) se puede demostrar en forma análoga y dice que la integral de una constante por una función es la constante por la integral de la función. En otras palabras, una constante (pero sólo una constante) se puede pasar al frente de un signo de integral.

La Propiedad f) se demuestra al escribir $f - g = f + (-g)$ y usar las Propiedades d) y e) con $c = -1$. En cuanto a la Propiedad g), tomando el caso particular en que $a \leq c \leq b$, se propone interpretarla según la Figura 28.

Propiedad 3.4 — Propiedades de monotonía de la integral definida.

- a) Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- b) Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.
- c) Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

La Propiedad a) dice que las áreas son positivas. La Propiedad b) dice la integral definida **respet**a el orden entre funciones (ver Figura 29). Por último, en la Figura 30 se ilustra la Propiedad c) para el caso donde $f(x) \geq 0$. Si f es continua podríamos tomar m y M como los valores mínimo y máximo absolutos de f en el intervalo $[a, b]$. En este caso la Propiedad c) dice que el área bajo la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M .

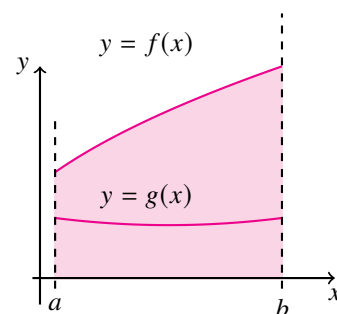


Figura 29: Comparación entre las integrales de f y g en el intervalo $[a, b]$ siendo $f \geq g \geq 0$.

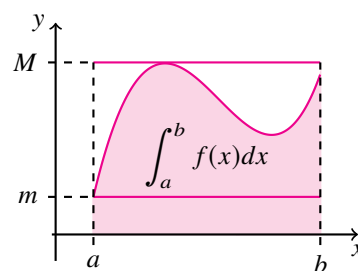


Figura 30: Función acotada en el intervalo $[a, b]$ con $m \leq f(x) \leq M$.

Ejemplo 3.2 — Propiedades algebraicas de la integral definida.

Usaremos las propiedades d) y e) para calcular $\int_0^1 (2 + 3x^2) dx$.

$$\int_0^1 (2 + 3x^2) dx \underbrace{=}_{d)} \int_0^1 2 dx + \int_0^1 3x^2 dx \underbrace{=}_{e)} \int_0^1 2 dx + 3 \int_0^1 x^2 dx$$

Sabemos también por la propiedad c) que $\int_0^1 2 dx = 2(1-0) = 2$ y que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ (recordar página 6). Por lo tanto

$$\int_0^1 (2 + 3x^2) dx = 2 + 3 \frac{1}{3} = 2 + 1 = 3.$$

■

Ejemplo 3.3 — Propiedades algebraicas de la integral definida.

Sabiendo que $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ y $\int_0^8 f(x) dx = 12$ podemos operar usando la Propiedad g) para obtener $\int_8^{10} f(x) dx$.

$$\int_0^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx$$

y entonces

$$\int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx = 17 - 12 = 5.$$

■

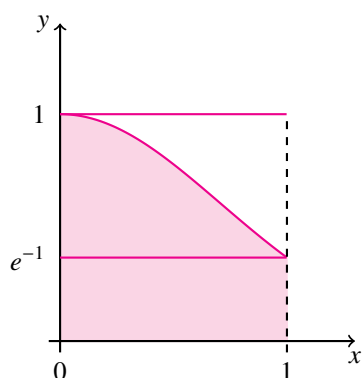


Figura 31: Gráfica de la función $f(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $[0, 1]$.

■ **Ejemplo 3.4 — Propiedad de monotonía de la integral definida.**

Usemos la Propiedad c) para estimar $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

Como $f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente en $[0, 1]$ (chequear usando la derivada), su valor máximo absoluto es $M = f(0) = 1$ y su valor mínimo absoluto es $m = f(1) = e^{-1}$. Entonces, por la Propiedad c),

$$e^{-1}(1 - 0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1 - 0)$$

$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1.$$

Como $e^{-1} \approx 0.3679$, podemos afirmar que $0.3679 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$.

Actividad 10.10 Escriban la siguiente expresión para que quede de la forma $\int_a^b f(x)dx$ (con un único símbolo de integral).

$$\int_{-2}^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx - \int_{-2}^{-1} f(x)dx$$

Actividad 10.11 Si $\int_1^5 f(x)dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)dx = 3$, encuentren $\int_1^4 f(x)dx$.

Actividad 10.12 Encuentren los valores de las siguientes integrales. Deberán usar las propiedades conocidas y las gráficas de las funciones involucradas.

a) $\int_{-1}^3 (1 + 3x)dx$

b) $\int_0^1 (2 - x^2)dx$

Actividad 10.13 Encuentren $\int_0^5 f(x)dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Actividad 10.14 Consideren f la función cuya gráfica se presenta en al Figura 32. Ordenen las siguientes cantidades de menor a mayor.

a) $\int_0^8 f(x)dx$ b) $\int_0^3 f(x)dx$ c) $\int_3^8 f(x)dx$ d) $\int_4^8 f(x)dx$

Actividad 10.15 Usando las propiedades de monotonía verifiquen que

$$2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2} dx \leq 2\sqrt{2}$$

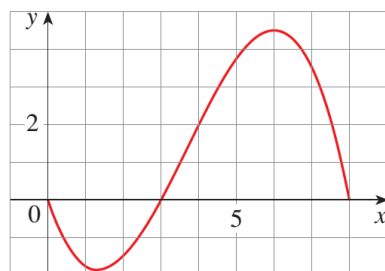


Figura 32: Gráfica de la función f .

4 Antiderivadas

A continuación recopilamos las derivadas de las funciones que desarrollamos anteriormente.

Derivando		Derivando	
$F(x)$	\rightarrow	$F(x)$	$F'(x)$
x^a (para cualquier $a \in \mathbb{R}$)	\rightarrow	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$
e^x	\rightarrow	$\cos(x)$	$-\text{sen}(x)$
a^x (para $a > 0$)	\rightarrow	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	\rightarrow	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\log_a(x)$ (para $a > 0$)	\rightarrow	$\arcsen(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
		$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Decimos, por ejemplo que

$$f(x) = 3x^2 \text{ es la derivada de } F(x) = x^3$$

El **proceso inverso** se denomina **antiderivada**.

Decimos que

$$F(x) = x^3 \text{ es una antiderivada de } f(x) = 3x^2$$

Y aquí debemos remarcar que este **proceso inverso** no es único (nunca). Porque existen una cantidad infinita de funciones que son **antiderivadas** de $f(x) = 3x^2$.

En todos los casos debe considerarse el dominio de las funciones y sus derivadas tal como se detalló en los módulos anteriores. Por ejemplo, recordar que las funciones exponenciales están definidas y son derivables en todo \mathbb{R} . En cambio, la función x^a con $a = \frac{1}{2}$ está definida en el intervalo $[0, +\infty)$ y es derivable sólo en el intervalo $(0, +\infty)$.

$$\begin{array}{l}
 F_1(x) = x^3 \\
 F_2(x) = x^3 + 1 \\
 F_3(x) = x^3 + \pi \\
 F_4(x) = x^3 - 3 \\
 \vdots \\
 F_C(x) = x^3 + C
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 f(x) = 3x^2$$

Podemos decir que cualquier función de la forma

$$F_c(x) = x^3 + C$$

(donde C puede ser cualquier número real) es una **antiderivada** de la función $f(x) = 3x^2$ en todo \mathbb{R} .

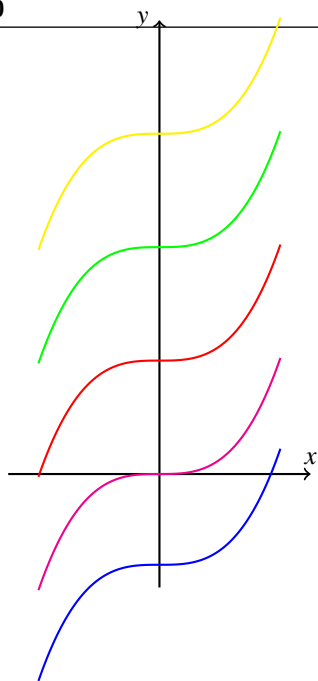


Figura 33: Varias antiderivadas de la función $f(x) = 3x^2$.

Si $H(x)$ es una función tal que $H'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces tomando x_2 y $x_1 \in (a, b)$ se tiene, usando el Teorema del Valor Medio, que existe \tilde{x} en el intervalo (a, b) tal que

$$H(x_2) - H(x_1) = \underbrace{H'(\tilde{x})(x_2 - x_1)}_{=0}$$

Por lo tanto

$$H(x_2) - H(x_1) = 0$$

O sea, $H(x_2) = H(x_1)$. Y por lo tanto H es una función constante.

■ Definición 4.1

Una función $F(x)$ se dice **antiderivada** o **primitiva** de la función $f(x)$ en un intervalo (un intervalo que puede ser de cualquier forma) si $F'(x) = f(x)$.



No todas las funciones tienen una antiderivada en cualquier intervalo. La existencia o no de las antiderivadas estará condicionada a las propiedades de la función (incluyendo el dominio que se esté considerando).

Sin embargo, si una función f tiene alguna primitiva en algún intervalo, entonces necesariamente tendrá una cantidad infinita de primitivas (por lo detallado más arriba) que se pueden construir sumando cualquier constante C .

El siguiente teorema dice un poco más. Dice que todas las **antiderivadas** de una función (en el caso que exista alguna) son exclusivamente de la forma en que se construyen sumando alguna constante C .

Teorema 4.1 Si F es una **antiderivada** de f en un intervalo (de cualquier forma), entonces **todas** las antiderivadas de f en el mismo intervalo son de la forma

$$F_C(x) = F(x) + C$$

para cualquier constante C .

Si $F(x)$ y $G(x)$ son dos **antiderivadas** de la función $f(x)$ en el mismo intervalo (a, b) entonces

$$H(x) = F(x) - G(x)$$

es una función derivable en el intervalo (a, b) y

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in (a, b)$$

por lo tanto $H(x)$ debe ser una función constante (ver el recuadro del margen)

$$H(x) = C \implies F(x) = G(x) + C$$

■ Ejemplo 4.1 — Antiderivada de función trigonométrica.

Si consideramos $f(x) = \sin(x)$ entonces $F(x) = -\cos(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en todo \mathbb{R} . De modo que el conjunto completo de funciones antiderivadas de $f(x)$ en todo \mathbb{R} será de la forma

$$F(x) = -\cos(x) + C$$

■

■ Ejemplo 4.2 — La función logaritmo como primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

La función $f(x) = \frac{1}{x}$ está definida en el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Determinaremos las antiderivadas de $f(x)$ en cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ (lo haremos en cada intervalo por separado).

En el intervalo $(0, +\infty)$ sabemos que la función $F(x) = \ln(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ por lo tanto las antiderivadas en el intervalo $(0, +\infty)$ son de la forma

$$F_C(x) = \ln(x) + C$$

En el intervalo $(-\infty, 0)$ no podemos usar la misma función $\ln(x)$ porque las funciones logarítmicas no están definidas para valores negativos de x . Sin embargo, podemos

tomar $G(x) = \ln(-x)$ que sí está definida para $x < 0$ y además cumple

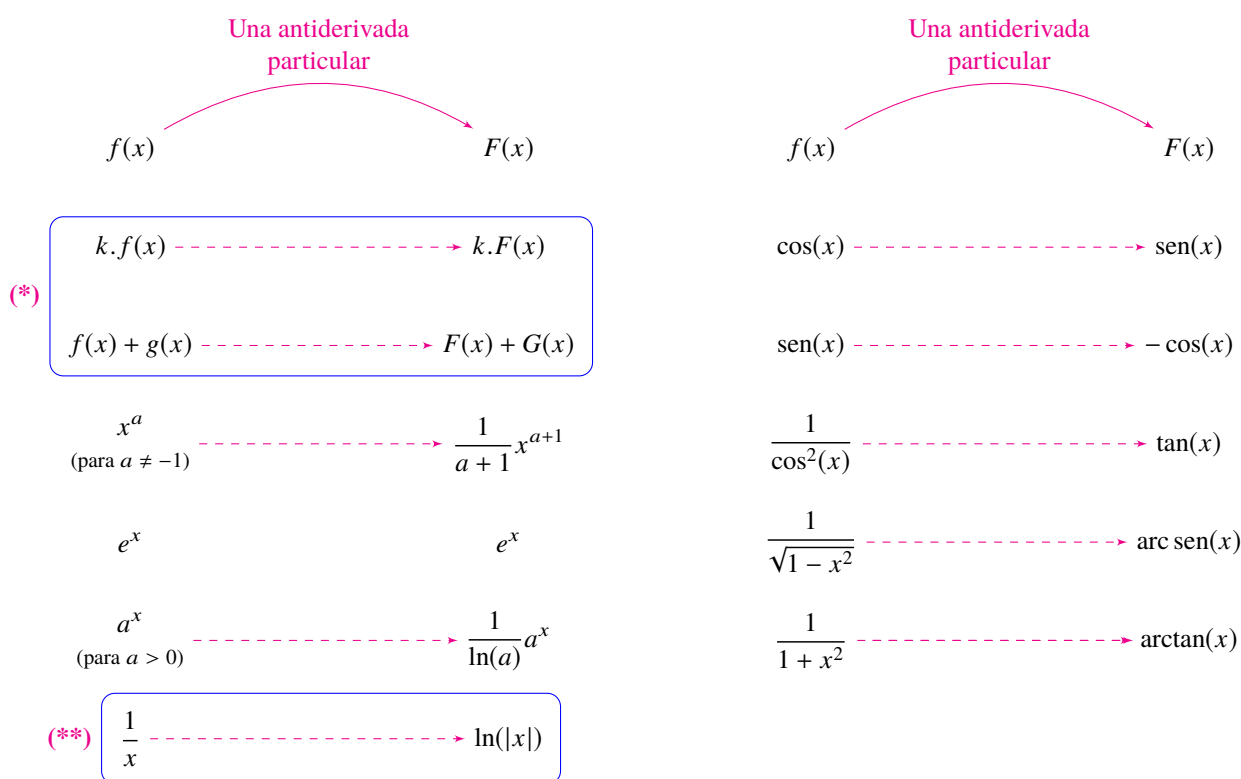
$$G'(x) = \frac{d}{dx} (\ln(-x)) \underbrace{=}_{\substack{\text{Regla de} \\ \text{la cadena}}} \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ definida en el intervalo $(-\infty, 0)$. Todas las demás antiderivadas de $f(x)$ en ese intervalo serán de la forma

$$G_C(x) = \ln(-x) + D$$

■

Conociendo una antiderivada **particular** de una función en un cierto intervalo, podemos determinar todas sus posibles antiderivadas. Según las reglas de derivación y las derivadas de las funciones desarrolladas en módulos previos tenemos que



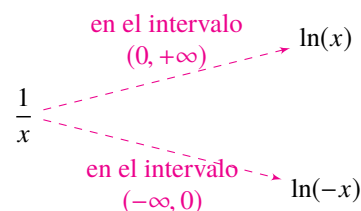
Encontrar antiderivadas en casos más complejos requiere técnicas o procedimientos que desarrollaremos en las próximas secciones. Las reglas marcadas con (*) permiten usar las propiedades de la derivada con la **suma** y con el **producto por un número** para determinar las antiderivadas en el caso de combinaciones lineales entre funciones. Por ejemplo,

$$F(x) = x^3 + 2 \arctan(x) - 4 \cos(x) \text{ es una antiderivada de } f(x) = 3x^2 + \frac{2}{1+x^2} + 4 \sin(x)$$

En cuanto a (**) usamos la notación $|x|$ para escribir de forma compacta la función

$$\text{Valor absoluto de } x = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

según lo desarrollado en el Ejemplo 4.2. De modo que se resumen cómo queda determinada una antiderivada particular en cada caso



5 Cálculo de integrales definidas

En las secciones anteriores calculamos **integrales definidas** como un límite de sumas de Riemann para determinar el valor del área comprendida entre la gráfica de una función positiva y el eje x , también para estudiar el movimiento de un objetivo según su velocidad. El siguiente teorema relaciona el cálculo de las integrales definidas con el cálculo de antiderivadas.

Teorema 5.1 — Regla de Barrow. Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Se utiliza regularmente la notación: $F(b) - F(a) = \Delta F = F(x) \Big|_a^b$

Demostración Dividimos el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de tamaño $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ tomando los puntos $x_0 (= a), x_1, \dots, x_n (= b)$. Tomando $F(x)$ una antiderivada cualquiera de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ escribimos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(x_n) - \underbrace{F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) + \dots + F(x_3) - F(x_2) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)}_{\text{Sumamos y restamos varios términos de la forma } F(x_i) \text{ con } 1 \leq i \leq n-1} \\ &= \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) \end{aligned}$$

Considerando que $F(x)$ es continua y derivable en cada intervalo $[x_i, x_{i-1}]$ podemos afirmar que (Teorema del Valor Medio) en cada subintervalo existe un valor x_i^* tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i^*)\Delta x$$

por lo tanto

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

Tomamos límite para $n \rightarrow +\infty$ en ambos lados de la igualdad. El miembro de la izquierda es constante respecto de n y el miembro de la derecha corresponde a las sumas de Riemann de la función $f(x)$ por lo que

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Por ejemplo, vimos en la página 6, usando sumas de Riemann, que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Tomando $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ como una antiderivada de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$ tendremos, según el Teorema 5.1, el mismo resultado

$$\int_0^1 x^2 dx = F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1}{3}$$

El Teorema 5.1 es consistente con lo desarrollado en sección 2 cuando expresamos

$$\Delta p = p(b) - p(a) = \int_a^b v(t) dt$$

considerando que $p'(t) = v(t)$. O sea, la función posición de un objeto en movimiento es una antiderivada de la función velocidad del objeto.

■ **Ejemplo 5.1 — Regla de Barrow con una función exponencial.**

Calcularemos $\int_0^3 e^x dx$.

Dado que $F(x) = e^x$ es una antiderivada de e^x en el intervalo $[1, 3]$ podemos calcular

$$\int_0^3 e^x dx = F(3) - F(0) = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \approx 19.085$$

■

■ **Ejemplo 5.2 — Regla de Barrow con funciones trigonométricas.**

Determinaremos el valor del área comprendida entre la gráfica de la función $\cos(x)$ y el eje x en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Dado que la función $f(x) = \cos(x)$ es positiva en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y que $F(x) = \sin(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en el intervalo se puede calcular

$$\text{Área} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = F(\frac{\pi}{2}) - F(0) = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1$$

■

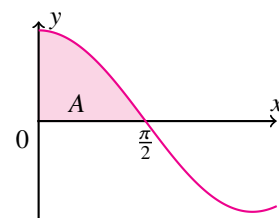


Figura 34: Área comprendida entre la gráfica de la función $\cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

■ **Ejemplo 5.3 — Área de una región que tiene partes arriba y debajo del eje x .**

Determinaremos el valor del área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x$ y el eje x en el intervalo $[0, 3]$.

El área que queremos determinar se puede obtener sumando las áreas A_1 y A_2 (ver Figura 35). En el caso de A_1 , como la función es negativa en el intervalo $(0, 2)$, y usando $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ como antiderivada de $f(x)$ en el intervalo $[0, 3]$ sabemos que

$$A_1 = - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = - [F(2) - F(0)] = - \left(\frac{1}{3}2^3 - 2^2 \right) + \left(\frac{1}{3}0^3 - 0^2 \right) = \frac{4}{3}$$

Y en el caso de A_2 , como la función es positiva en el intervalo $(2, 3)$

$$A_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = F(3) - F(2) = \left(\frac{1}{3}3^3 - 3^2 \right) - \left(\frac{1}{3}2^3 - 2^2 \right) = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

El área de la región será

$$A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

■

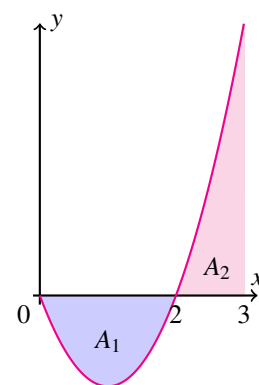


Figura 35: Área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en el intervalo $[0, 3]$.

Actividad 10.16 Calculen las siguientes integrales definidas

a) $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x) dx$

b) $\int_{-2}^5 6 dx$

c) $\int_1^4 (5 - 2t + 3t^2) dt$

d) $\int_0^1 x^{4/5} dx$

e) $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$

f) $\int_1^2 \frac{3}{t^4} dt$

g) $\int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta$

h) $\int_0^{\pi/4} \sec^2(t) dt$

i) $\int_1^9 \frac{2}{x} dx$

j) $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x} dx$

k) $\int_0^1 10^x dx$

l) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{1+t^2} dt$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

para $n \neq -1$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} a^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

6 Integral indefinida

Para continuar introduciremos una notación propia y específica para las **antiderivadas** que facilitará el trabajo. La notación usada tradicionalmente es

$$\int f(x) dx$$

para indicar la determinación de antiderivadas de la función $f(x)$ de manera general. O sea,

$$F(x) = \int f(x) dx \iff F'(x) = f(x)$$

Remarcamos la diferencia entre el doble uso del símbolo \int tanto para lo que denominamos **integral definida** como con lo que denominamos **integral indefinida**.

Integral definida

$$\int_a^b f(x) dx$$

Un número real que se obtiene como límite de las sumas de Riemann para la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Por ejemplo,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Con esta notación escribimos la Tabla 4 con las **primitivas** de las funciones usuales. La relación

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

siendo $F(x)$ cualquier primitiva de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ generaliza lo que mencionamos para el caso de la posición de un móvil y su relación con la velocidad

$$\int_a^b v(t) dt = p(b) - p(a)$$

Tabla 4: Tabla de primitivas o integrales indefinidas.

Más generalmente, consideraremos a cualquier magnitud física, química o biológica que se corresponda con una función de $F(x)$ de \mathbb{R} (o algún subconjunto de \mathbb{R}) en \mathbb{R} donde la variable independiente es el **tiempo** “ t ” de tal manera que

$$\Delta F = F(b) - F(a) = \text{variación de } F \text{ en el intervalo de tiempo } [a, b]$$

$$F'(t) = \text{velocidad instantánea de } F \text{ en el instante } t$$

$$\int_a^b F'(t)dt = \text{Límite de las sumas de Riemman de } F'(t) \text{ en el intervalo } [a, b]$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$$

■ **Ejemplo 6.1 — Determinación de un volumen conociendo la velocidad.**

En un proceso de elaboración de cerveza casera se trasvasa el líquido de un recipiente a otro a una velocidad de $V'(t)$ cm³/seg.

La integral definida

$$\int_0^5 V'(t)dt = \Delta V$$

representa la **variación** en cm³ del volumen de cerveza que se produjo entre los instantes $t_0 = 0$ y $t_1 = 5$ segundos.

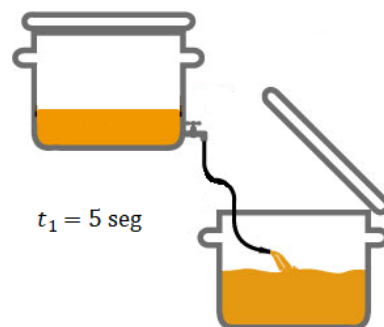
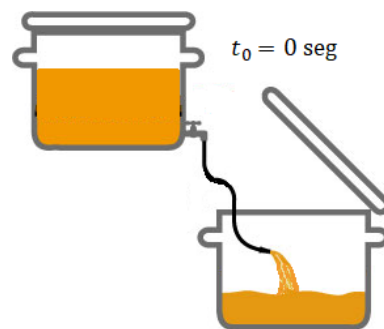


Figura 36: Cerveza fluyendo de un tanque a otro.

Actividad 10.17 En cada caso, indicar qué representa la integral definida planteada:

- Si $w'(t)$ es la velocidad de crecimiento en cada instante t de un niño en kilos/año. ¿Qué representa $\int_5^{10} w'(t)dt$?
- En una reacción química, la velocidad de reacción es la derivada de la concentración $[C](t)$ del producto que está reaccionando. ¿Qué representa $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}[C](t)dt$?
- Se comienza con 100 abejas las cuales aumentan a una velocidad de $n'(t)$ abejas por semana. ¿Qué representa la expresión $100 + \int_0^{120} n'(t)dt$?

Actividad 10.18 Una colonia de bacterias incrementa su tamaño a una velocidad de 4.05×6^t bacterias por hora. Considerando que inicialmente la población tuvo 46 bacterias, encuentren el tamaño de la población 4 horas más tarde.

7 Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema 5.1 permite calcular la **integral definida** de una función continua a través de alguna antiderivada. Pero, ¿existen siempre antiderivadas? El Teorema Fundamental del Cálculo que se presenta a continuación define una función de manera explícita que cumple ser una antiderivada de la función original bajo la condición de que se trate de una función continua.

Teorema 7.1 — Teorema Fundamental del Cálculo. Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ entonces la función $F(x)$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{para } a \leq x \leq b \quad (3)$$

es una antiderivada de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. O sea, $F'(x) = f(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$

La función $F(x)$ (3) es la **única antiderivada** de $f(t)$ que cumple $F(a) = 0$.

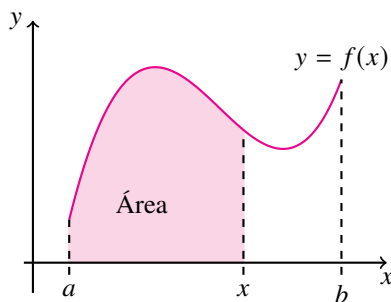


Figura 37: Área debajo de la gráfica de la función $f(x)$ sobre el eje x en el intervalo $[a, x]$.

La función $F(x)$ se define como la **integral definida** de la función $f(t)$ en el intervalo $[a, x]$. De modo que la variable x (variable independiente de F) representa el borde derecho en el que se calcula la integral definida. Para cada valor de x fijo,

$$\int_a^x f(t) dt$$

es un número real; haciendo variar x en el intervalo $[a, b]$ se obtienen los valores de $F(x)$.

Si $f(t)$ es positiva en el intervalo $[a, b]$ entonces $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ representa el valor del **área** debajo de la gráfica de la función f en el intervalo $[a, x]$ como se ve en la Figura 37. En este caso, si quisiéramos calcular la derivada de $F(x)$ en algún x deberíamos evaluar

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Si $\Delta x > 0$, entonces $F(x + \Delta x) - F(x)$ representa el área sombreada en la Figura 38: el área debajo de la gráfica de la función f en el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Para valores pequeños de Δx , se puede aproximar con el área del rectángulo de base Δx y altura $f(x)$

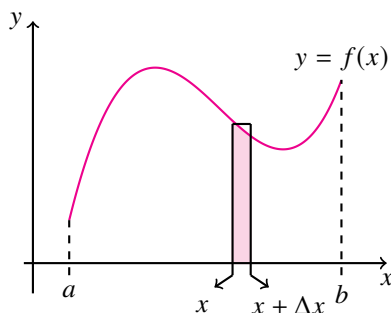


Figura 38: Área debajo de la gráfica de la función $f(x)$ sobre el eje x en el intervalo $[a, x]$.

$$F(x + \Delta x) - F(x) \approx f(x)\Delta x$$

o sea,

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \approx f(x)$$

y tomando límite para $\Delta x \rightarrow 0^+$ se obtiene

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Un razonamiento similar sirve para el caso que $\Delta x < 0$ y en el caso que $f(x)$ no sea positiva. El **Teorema Fundamental del Cálculo** se escribe, en la notación de Leibniz como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Actividad 10.19 Usen el Teorema Fundamental del Cálculo para calcular las derivadas de las siguientes funciones.

a) $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1} dt$

b) $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t} dt$

c) $g(y) = \int_2^y t^2 \sin(t) dt$

d) $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4} dx$