Facultad de Tecnología Informática
Analista Programador – UAI Online
Cálculo Infinitesimal I

CLASE 8

Calificación: 9 (nueve)
Excelente!

Examen Parcial

Contenidos Indeterminaciones. Límites especiales. Continuidad de la función. Modelos funcionales. Noción de Límite. Cálculo de límites finitos e infinitos. Funciones continuas y discontinuas. Tipos de discontinuidad. Cálculo y determinación de las ecuaciones de las asíntotas de una función: Horizontal, vertical y oblicua. Derivada concepto. Derivada por definición.

Comisión: 1O
Apellido y Nombre: **TORDOYA, GERARDO**
DNI: **22.777.420**
Fecha: **30/MAY/2021**

Criterios de Evaluación

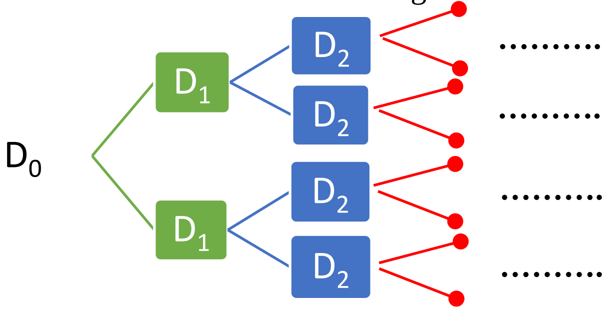
1. Desarrolla cada ítem dejando constancia de los pasos realizados y elaborando las argumentaciones por escrito (puedes utilizar graficadores informáticos).
2. Desarrolla las actividades propuestas basándose en procedimientos claros y pertinentes.
3. Demuestra comprensión de los conceptos que se abordan en cada actividad.

Pautas de corrección

1. Entrega de un trabajo totalmente legible y claro, ajustándose a las condiciones establecidas para ello e indicando claramente el número de ejercicio que resuelves.
2. El puntaje no es distribuible punto por punto sino por el cumplimiento de los criterios.

Actividad asincrónica (domiciliario)

1. Un sistema de decisión binario parte de una entrada y se bifurca en cada instancia de decisión como muestra la figura:



Modelizar matemáticamente la cantidad de outputs en función de las instancias transitadas desde la entrada del dato.

ARISTAS = N – 1 (donde N es cantidad de nodos)
NODOS = 2^X (donde X es la instancia de decisión)

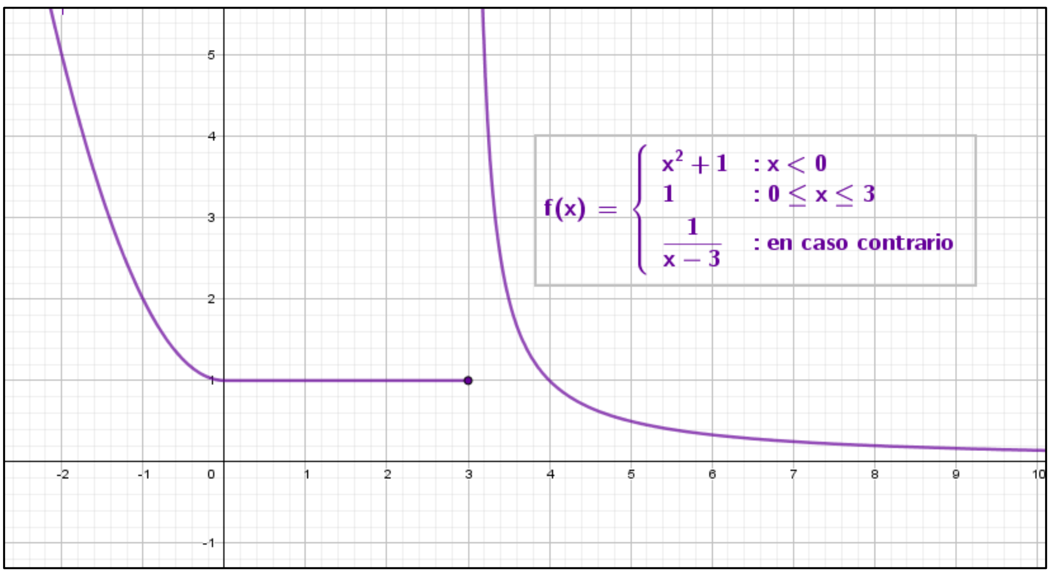
Ejemplo: no hubo decisión (instancia 0), entonces cantidad de nodos es 2^0 = 1.

Respuesta: Por la profundidad de las ramas:
N (instancias) = 3 (líneas punteadas: output)
2^3 = 8

Por tanto, $\boxed{f(x) = 2^x}$ es la modelización pedida (donde x es la instancia y f(x) la cantidad de nodos que le corresponde).

(Y el dominio de esta f(x) son los números naturales)

2. En el siguiente gráfico: estudia la continuidad de la función en $x = 0$ y en $x = 3$ (Dom= (-∞, +∞)):



Para que una función y=f(x) sea continua en f(c) se deben cumplir las siguientes condiciones:

- Que f(c) exista
- Que exista el Lim x→c de f(x)
- Que el Lim x→c de f(x) = f(c)

1. Para el primer punto (x = 0) hay continuidad puesto que 0 (cero) está incluido en el dominio de cambio de la primera a la segunda rama. Es decir, no hay operaciones que me impidan operar con cero.
2. El 3 (tres), aunque entra dentro del dominio definido para la segunda y tercera rama, sí tiene una operación restrictiva en la tercera rama (cero al denominador). Por tanto, al no cumplir la tercera rama con la condición de que la función exista para f(3), no hay continuidad entre el 2do y 3er segmento.

(f(3) está definida en la segunda rama, hay algún error de expresión en esta última oración)

Para 0 por izquierda: le corresponde la primera rama
Para 0 por derecha: le corresponde la segunda rama
Por tanto debe verificarse que:

$$\text{Lim } x\to 0(x^2+1) = \text{Lim } x\to 0(1)$$
$$0^2+1 = 1$$
$$1 = 1$$
(VERIFICA)

Para 3 por izquierda: le corresponde la segunda rama
Para 3 por derecha: le corresponde la tercera rama
Por tanto debe verificarse que:

$$\text{Lim } x\to 3(1) = \text{Lim } x\to 3[1/(x-3)]$$
$$1\ \cancel{3} = 1/(3-3)$$
$$3 = 1/0$$
(NO VERIFICA)

3. Hallar el valor de "*a*" que hace continua la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 8 - ax & si\ x \le 2 \\ ax^2 - 2ax + 4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Usando el mismo razonamiento del punto anterior, usaré la condición "que exista el Lim x→c de f(x)" pues la misma comprueba la continuidad entre las dos ramas. Entonces,

Para 2 por izquierda: le corresponde la primera rama
Para 2 por derecha: le corresponde la segunda rama
Por tanto, debe verificarse que:

$$\text{Lim } x\to 2(8-ax) = \text{Lim } x\to 2(ax^2-2ax+4)$$
$$8-a2 = a2^2-2a2+4$$
$$8-a2 = a4-a4+4$$
$$8-a2 = 4$$

-8+a2 = -4
a2 = 8-4
a2 = 4
a = 4/2
a = 2 ✓

4. Se dice que el límite de una función es indeterminado si no puede calcularse de manera directa y se hace necesario apelar a un procedimiento particular. Investiga los límites de las funciones que figuran a continuación y calcula los límites cuando sea posible:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x} =$	$\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{3x-27} =$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+3)} =$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{3x})^{3x}]^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$$ ✓

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{3x-27} = \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{3x-27}*\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$
$$= \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3\sqrt{x}-9}{(3x-27)(\sqrt{x}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(3x-27)(\sqrt{x}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 9}\frac{x-9}{3(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$
$$= \lim_{x\to 9}\frac{1}{3(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{3(\sqrt{9}+3)}$$
$$= \frac{1}{3(3+3)} = \frac{1}{3(6)} = \frac{1}{18}$$ ✓

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+3} = \frac{3}{5}$$ ✓

5. Halla, si existen, asíntotas para las siguientes funciones:

$f\!: A \to R,\ (x) = \frac{x^2+3x}{x-2}$; $\mathrm{g}: A \to R,\ \mathrm{g}(x) = \frac{x-5}{x^2-x-6}$

<u>**Para f(x):**</u> $f\!: A \to R,\ (x) = \frac{x^2+3x}{x-2}$

ASÍNTOTA HORIZONTAL
Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador,
La función no tiene asíntota horizontal.

Por tanto, $\boxed{AH = \nexists}$ para f(x). ✓

ASÍNTOTA VERTICAL
Son los valores de x que hacen 0 el denominador.
Por tanto, $\boxed{AV = 2}$. Expresión de la asíntota vertical: x=2
✓

ASÍNTOTA OBLICUA
Hay asíntota oblicua cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.
Puesto que AO = mx + b, entonces:

m = lim x→∞ $\frac{f(x)}{x}$= lim x→∞ $(\frac{x^2+3x}{x-2} * \frac{1}{x})$= lim x→∞ $\frac{x^2+3x}{x^2-2x}$ = 1 (tomando en cuenta los coeficientes de los términos de mayor grado).

b = lim x→∞ [f(x)-mx] = lim x→∞ $\frac{x^2+3x}{x-2}$ - x] = lim x→∞ $\frac{x^2+3x-x(x-2)}{x-2}$
= lim x→∞ $\frac{x^2+3x-x^2+2x}{x-2}$ = lim x→∞ $\frac{5x}{x-2}$ = 5 (tomando en cuenta los coeficientes de los términos de mayor grado).

Por tanto, $\boxed{AO = x + 5}$. ✓ Expresión de la Asíntota Oblicua: y=x+5

<u>Para g(x)</u>: $g : A \to R,\ g(x) = \frac{x-5}{x^2-x-6}$

ASÍNTOTA HORIZONTAL
Las asíntotas horizontales aparecen cuando ocurre una de las siguientes condiciones (ambas condiciones no pueden ocurrir en la misma función):
• El grado del numerador es menor que el grado del denominador. En este caso, la asíntota es la recta horizontal y = 0.
• El grado del numerador es igual al grado del denominador. En este caso, la asíntota es la recta horizontal y = a/b, donde a es el coeficiente de mayor grado del numerador y b es el del denominador.

Por tanto, dándose el primer caso, $\boxed{AH = 0}$.
✓

Expresión de la asíntota horizontal: y=0

ASÍNTOTA VERTICAL
Como se trata de una función racional, la posible asíntota vertical estará en el valor que anula a su denominador, que es x = -2 y x = 3.

lim x→(-2)+ $[\frac{x-5}{x^2-x-6}]$ = +∞
lim x→(-2)- $[\frac{x-5}{x^2-x-6}]$ = -∞

lim x→(3)+ $[\frac{x-5}{x^2-x-6}]$ = +∞ ✗ - infinito

lim x→(3)- $\left[\frac{x-5}{x^2-x-6}\right]$ = -∞ + infinito

Puesto que la condición de la asíntota vertical es que cumpla con que: lim x→c g(x) = ∞, entonces $\boxed{\text{AV = -2}}$ y $\boxed{\text{AV = 3}}$.

Expresión de las asíntotas verticales x=-2 y x=3

ASÍNTOTA OBLICUA

Hay asíntota oblicua cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

Por tanto, $\boxed{\text{AO} = \nexists}$ para g(x).

6. Calcula la derivada por definición de *f(x)*= x^2+3, en $x=1$ ¿Qué representa el valor hallado?

f(x) = $(x)^2$+3

f(x+h) = $(x+h)^2$+3

f'(1) = lim h→0 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = lim h→0 $\frac{(1+h)^2+3-(1^2+3)}{h}$

= lim h→0 $\frac{1^2+2(1)h+h^2+3-1^2-3}{h}$ = lim h→0 $\frac{2(1)h+h^2}{h}$ = lim h→0 $\frac{h(2(1)+h)}{h}$

= lim h→0 (2(1)+h) = 2(1) = 2

Comprobación con la tabla de derivadas:

f'(x) = 2x + 0 = 2x

para x = 1: 2(1) = 2

El valor hallado representa la pendiente de la recta tangente a f(x) en x=1.

Actividad sincrónica

En Blackboard Collaborate mediante videoconferencia se realizará la defensa del examen escrito enviado y devuelto con anticipación.

Se presentará un cronograma de horarios para su defensa en pequeños grupos y el objetivo es que cada alumno/a del grupo tenga la posibilidad de ampliar, reelaborar conceptos y procedimientos en el debate de las producciones.