1
Aplica las reglas que correspondan para derivar la siguiente función: $f(x) \;=\; \sqrt[3]{3x-1}\cdot[Cos(x+8)]^4$

$$La\ derivada\ de\ un\ producto\ se\ calcula\ según\ la\ fórmula:$$

$$(g\cdot h)' \;=\; g'\cdot h + g\cdot h'$$

Cálculo de g(x)

$$g(x) \;=\; \sqrt[3]{3x-1}$$

$$g(x) \;=\; (3x-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$g'(x) \;=\; \frac{1}{3}(3x-1)^{\frac{-2}{3}}\cdot 3$$

$$g'(x) \;=\; (3x-1)^{\frac{-2}{3}}$$

$$g'(x) \;=\; \frac{1}{(3x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$g'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} \tag{1}$$

Cálculo de h(x)

$$h(x) \;=\; [Cos(x+8)]^4$$

$$h'(x) \;=\; 4[Cos(x+8)]^3\cdot[-Sen(x+8)]$$

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

$$h'(x) = -4 \cdot Cos^3(x+8) \cdot Sen(x+8) \quad (2)$$

Solución

$$Teniendo\ (1)\ y\ (2),\ y\ aplicando\ la\ regla\ del\ producto:$$

$$f'(x) = \frac{Cos^4(x+8)}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} - 4\sqrt[3]{3x-1} \cdot Sen(x+8) \cdot Cos^3(x+8)$$

2

Analiza si la función $\frac{-1}{x^2-4x+5}$ verifica el Teorema de Rolle en el intervalo $(1;\ 3)$. Halla el valor "c" de la conclusión.

El teorema de Rolle pide que se verifiquen 3 condiciones:
1. *f es continua en el intervalo cerrado $[a;\ b]$*
2. *f es derivable en el intervalo abierto $(a;\ b)$*
3. *f debe verificar igualdad entre $f(a) = f(b)$*

1
¿Es continua?

Análisis:
Buscar los valores de x que anulen la expresión (que hagan de divisores cero).
Al buscar las raíces, veo que la expresión no tiene en los reales soluciones que anulen la expresión (tiene solución compleja). Entonces:

$$Dom\ f = \mathbb{R}$$

Y por tanto, es continua en el intervalo dado.

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

2
¿Es derivable?

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 - 4x + 5}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2 - 4x + 5}$$

$$-f'(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$$

$$\textit{Aplicando la regla de la función recíproca} \left(\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}\right)$$

$$-f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2 - 4x + 5\right)}{\left(x^2 - 4x + 5\right)^2} = \frac{2x - 4}{\left(x^2 - 4x + 5\right)^2}$$

Tenemos una situación en la que el dominio será:
$\mathbb{R}$ − (*raíces que hacen* 0 *el denominador de* f')
Pero a similitud de lo visto anteriormente,
la expresión sigue sin tener solución (*raíces* 0)
en los reales (*las tiene en los complejos*)

Entonces:

$$Dom\ f' = \mathbb{R}$$

Por tanto, es derivable en el intevalo dado.

3
Verificar igualdad

$$f(1) = \frac{-1}{(1)^2 - 4(1) + 5} = \frac{-1}{1 - 4 + 5} = \frac{-1}{2}$$

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

$$f(3) = \frac{-1}{(3)^2 - 4(3) + 5} = \frac{-1}{9 - 12 + 5} = \frac{-1}{2}$$

$$Verifica\ igualdad$$

4
Conclusión

$$Encuentro\ «c»\ haciendo\ la\ derivada\ 0:$$

$$\frac{2x-4}{\left(x^2-4x+5\right)^2} = 0$$

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Por tanto:

$$c = 2$$

3
Resolver aplicando L'Hopital:

1

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(2x-2)}{x^2-3x+2}$$

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

$$\lim_{x \to 1} \frac{sen(2x-2)}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{sen(2(1)-2)}{(1)^2-3(1)+2} = \lim_{x \to 1} \frac{sen(0)}{1-3+2} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital :

$$\lim_{x \to 1} \frac{sen(2x-2)}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}[sen(2x-2)]}{\frac{d}{dx}\left(x^2-3x+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2 \cdot cos(2x-2)}{2x-3} = \frac{2 \cdot cos[2(1)-2]}{2(1)-3} = \frac{2(1)}{-1} = -2$$

2

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x - 8}{2x^3 - x^2 + 2}$$

Este ejercicio tiene vuelta de tuerca.
Para que aplique L'Hopital, debe verificarse que
exista el tipo de indeterminación que resuelve.

En este caso, eso se verifica resolviendo la indeterminación
del numerador y la del denominador por separado.

$\lim_{x \to \infty} x^2+3x-8 \to$ *el límite al* $+\infty$ *de un polinomio*
cuyo coeficiente principal es positivo es igual a $+\infty$

$\lim_{x \to \infty} 2x^3-x^2+2 \to$ *el límite al* $+\infty$ *de un polinomio*
cuyo coeficiente principal es positivo es igual a $+\infty$

Por tanto, la indeterminación es $\frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la regla de L'Hopital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x-8}{2x^3-x^2+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(x^2+3x-8\right)}{\frac{d}{dx}\left(2x^3-x^2+2\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{6x^2-2x}$$

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

$$\textit{Volviendo a aplicar la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(2x+3)}{\frac{d}{dx}\left(6x^2-2x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{6x-1}$$

Resolviendo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{6x-1}=\frac{1}{\infty}=0$$

4
Realiza el estudio completo de la función $f(x) = \frac{9x^2-x+4}{x}$. Halla la recta tangente y la normal en el punto de abscisa 1.

1
Dominio

$$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{ 0 \}$$

2
Conjunto de ceros

$$(\textit{igualar la fórmula a cero})$$

$$\frac{9x^2-x+4}{x}=0$$

$$9x^2-x+4 = 0x$$

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

$$9x^2 - x + 4 = 0 \begin{cases} x_1 \nexists \mathbb{R} \\ x_2 \nexists \mathbb{R} \end{cases}$$

Por tanto:

$$C_0 = \varnothing$$

3
Conjunto de positividad y negatividad

$$(\textit{al no contar con un conjunto de ceros y sin cero en el dominio})$$

$$-\infty \leftarrow \text{---------------}(0)\text{---------------} \rightarrow +\infty$$

$$(\textit{tomar valores a la izquierda y derecha del } 0):$$

$$f(-1) = \frac{9x^2 - x + 4}{x} = \frac{9(-1)^2 - (-1) + 4}{(-1)} = \frac{9(1) + 1 + 4}{(-1)} = -14$$

$$f(1) = \frac{9x^2 - x + 4}{x} = \frac{9(1)^2 - (1) + 4}{(1)} = 9(1) - 1 + 4 = 12$$

Por tanto:

$$C_- = (-\infty;\ 0)$$
$$C_+ = (0;\ +\infty)$$

4
Asíntotas

$$\textit{ASÍNTOTA VERTICAL } (AV):$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{9x^2 - x + 4}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{9x^2 - x + 4}{x} = +\infty$$

Es divergente, por tanto, el límite no existe.

Entonces:

Donde se anula el denominador de la función es $\rightarrow$ $AV:\ x = 0$

ASÍNTOTA HORIZONTAL (AH):

No existe ya que el grado del numerador supera al del denominador $\rightarrow$ $AH: \nexists$

ASÍNTOTA OBLICUA (AO):

———————————
Por la vía rápida
———————————

En casos como éstos, hay una forma expédita de encontrar la asíntota, y que es, repartiendo el denominador:

$$\frac{9x^2 - x + 4}{x} = \frac{9x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{4}{x} = 9x - 1 + \frac{4}{x}$$

Cuando $x \rightarrow \infty$, $\frac{4}{x}$ *tiende a* 0 *(a desaparecer), por tanto:*

$$9x - 1 + \frac{4}{x} \text{ cuando } x \rightarrow \infty:\ 9x - 1$$

————————————
Por la vía formal
————————————

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

$$Teniendo\ que\ AO\ =\ mx\ +\ b$$

Cálculo de m:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-x+4}{x} / x = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-x+4}{x^2}$$

$$(aplicando\ L'Hopital)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-x+4}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(9x^2-x+4\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{18x-1}{2x}$$

$$(volviendo\ a\ aplicar\ L'Hopital)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{18x-1}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(18x-1)}{\frac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{18(1)-0}{2(1)} = \frac{18}{2} = 9$$

Cálculo de b:

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-x+4}{x} - 9x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2-x+4-9x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4-x}{x} =$$

$$(aplicando\ L'Hopital)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4-x}{x} = = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(4-x)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{0-1}{1} = -1$$

Entonces, siendo m = 9 y b = -1:

$$AO\ =\ mx\ +\ b\ =\ 9x\ +(-1)\ =\ 9x-1$$

5

Puntos críticos (máximos o mínimos) :

Para los puntos críticos, se necesita $f'(x)$
pues son puntos donde se anula la derivada.

Aplicando la distribución del denominador :

$$f(x) = \frac{9x^2 - x + 4}{x} = \frac{9x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{4}{x} = 9x - 1 + \frac{4}{x} = 9x - 1 + 4x^{-1}$$

...encontramos una forma más conveniente para derivar :

$$\frac{d}{dx}\left(9x - 1 + 4x^{-1}\right) = 9 - 0 + \left(-4x^{-2}\right)$$

$$= 9 + \left(-4x^{-2}\right) = 9 - 4x^{-2} = 9 - \frac{4}{x^2}$$

Entonces, los puntos críticos se calculan anulando la derivada :

$$9 - \frac{4}{x^2} = 0$$

$$9 = \frac{4}{x^2}$$

$$9x^2 = 4$$

$$x^2 = \frac{4}{9}\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3} \\[2ex] x_2 = +\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Para determinar cuál de esos resultados es máximo o mínimo,
la función debe ser estudiada por tramos :

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

$$-\infty \leftarrow ----------\left[-\frac{2}{3}\right]----------(0)----------\left[+\frac{2}{3}\right]---------- \rightarrow +\infty$$

	$\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$	$x=-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3};0\right)$	$x=0$	$\left(0;+\frac{2}{3}\right)$	$x=+\frac{2}{3}$	$\left(+\frac{2}{3};+\infty\right)$
f'	$f'\left(-\frac{3}{3}\right)=+$	0	$f'\left(-\frac{1}{3}\right)=-$	$\nexists$	$f'\left(+\frac{1}{3}\right)=-$	0	$f'\left(+\frac{3}{3}\right)=+$
f	$\nearrow$	$Máx$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$Mín$	$\nearrow$

$$f'(-1) = 9-\frac{4}{(-1)^2} = 9-4 = 5$$

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 9-\frac{4}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 9-\frac{4}{\frac{1}{9}} = 9-4\cdot 9 = 9-36 = -27$$

$$f'\left(+\frac{1}{3}\right) = 9-\frac{4}{\left(+\frac{1}{3}\right)^2} = 9-\frac{4}{\frac{1}{9}} = 9-4\cdot 9 = 9-36 = -27$$

$$f'(+1) = 9-\frac{4}{(+1)^2} = 9-4 = 5$$

Siendo entonces:

$$Máximo\ relativo:\ x=-\frac{2}{3}$$

$$Mínimo\ relativo:\ x=\frac{2}{3}$$

6
Intervalos de crecimiento y decrecimiento

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

$$\textit{Del examen de la tabla anterior:}$$

$$I_C = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(+\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

$$I_D = \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup \left(0; +\frac{2}{3}\right)$$

7
Puntos de inflexión, concavidad, convexidad.

$$\textit{Para buscar los puntos de inflexión,}$$
$$\textit{debo igualar la 2da derivada a cero:}$$

$$f'(x) = 9 - \frac{4}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(9) - 4 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 - 4 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)$$
$$= -4 \cdot (-2)x^{-3} = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3}$$

$$\textit{Entonces:}$$

$$\frac{8}{x^3} = 0$$

$$8 = 0 \cdot x^3$$

$$8 = 0!$$

$$8 \neq 0 \ (\textit{es decir, no es punto de inflexión}).$$
$$\textit{En otras palabras, la 2da derivada nunca se anula.}$$

$$\textit{Entonces, se estudiará la concavidad a partir del dominio:}$$

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

	$(-\infty;\ 0)$	$x = 0$	$(0;\ +\infty)$
f''	$f''(-1) = -$	$\nexists$	$f''(+1) = +$
f	$\cap$ Cóncava	$\nexists$	$\cup$ Convexa

$$f''(x) = \frac{8}{x^3}$$

$$f''(-1) = \frac{8}{(-1)^3} = -8$$

$$f''(+1) = \frac{8}{(+1)^3} = +8$$

Por tanto:

$$\begin{gathered} Puntos\ de\ inflexión:\ \nexists \\ Intervalo\ de\ concavidad:\ (-\infty;\ 0) \\ Intervalo\ de\ convexidad:\ (0;\ +\infty) \end{gathered}$$

8

Conjunto Imagen:

Teniendo máximo y mínimos relativos, tenemos que:

$$Max.\ Relat.:\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + 4}{-\frac{2}{3}} = \frac{9\frac{4}{9} + \frac{2}{3} + 4}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{36}{9} + \frac{2}{3} + 4}{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{\frac{36+6+36}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{36+6+36}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{78}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{78}{9} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -13$$

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)

$$Mín.\ Relat.:\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right) + 4}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{36}{9} - \frac{2}{3} + 4}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{36-6+36}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{66}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{66}{9} \cdot \frac{3}{2} = 11$$

Por lo cual:

$$Img\ f(x) = (-\infty;\ -13) \cup (11;\ +\infty)$$

9
Recta tangente y normal en abscisa = 1

Sabiendo:

$$Que\ la\ ecuación\ de\ la\ recta\ tangente\ es:\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$Que\ la\ ecuación\ de\ la\ recta\ normal\ es:\ y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$Que:\ f(1) = \frac{9(1)^2 - (1) + 4}{(1)} = \frac{9 - 1 + 4}{1} = 12$$

$$Que:\ f'(1) = 9 - \frac{4}{(1)^2} = 5$$

Entonces:

RECTA TANGENTE

$$y - f(1) = [f'(1)][x - (1)]$$

$$y - 12 = 5(x - 1)$$

$$y = 5x - 5 + 12$$

$$y = 5x + 7$$

$$RECTA\ NORMAL$$

$$y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1)$$

$$y-12=\frac{-1}{5}(x-1)$$

$$y-12=\frac{-1}{5}x+\frac{1}{5}$$

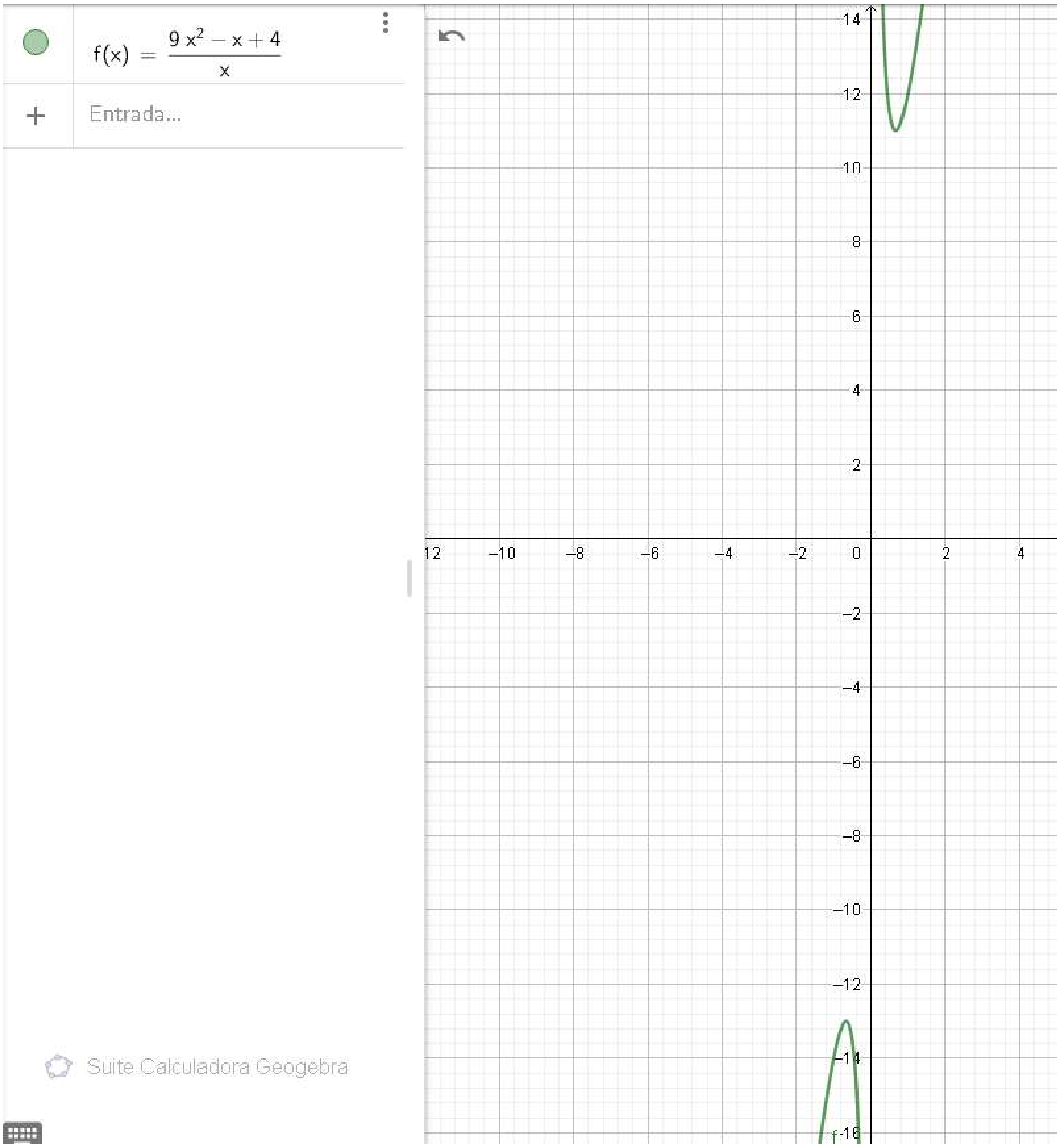
$$y=\frac{-1}{5}x+\frac{1}{5}+12$$

$$y=\frac{-1}{5}x+\frac{61}{5}$$

10
Comprobación gráfica

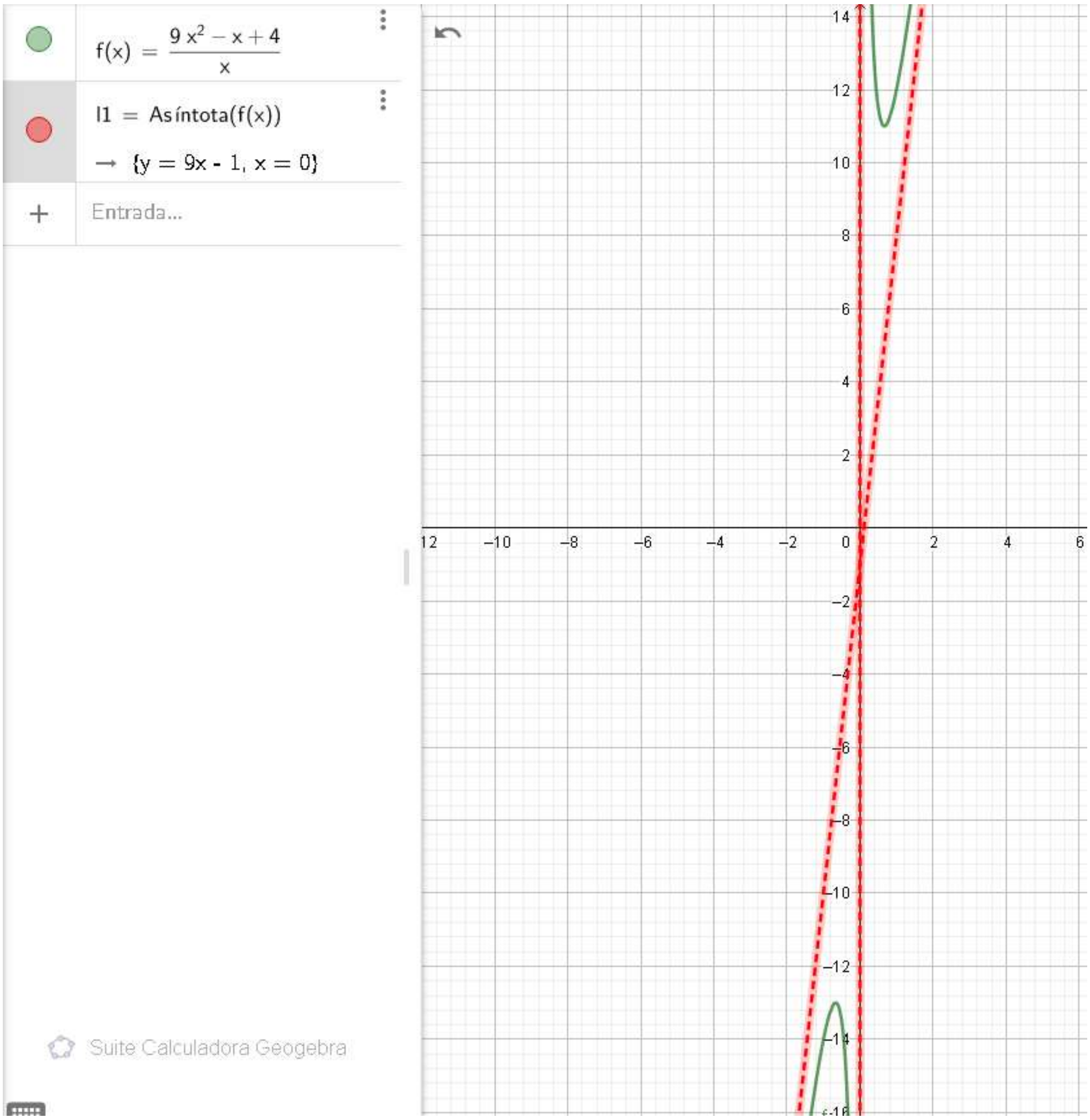
Puntos 1 al 3 (dominio, positividad, negatividad)

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)



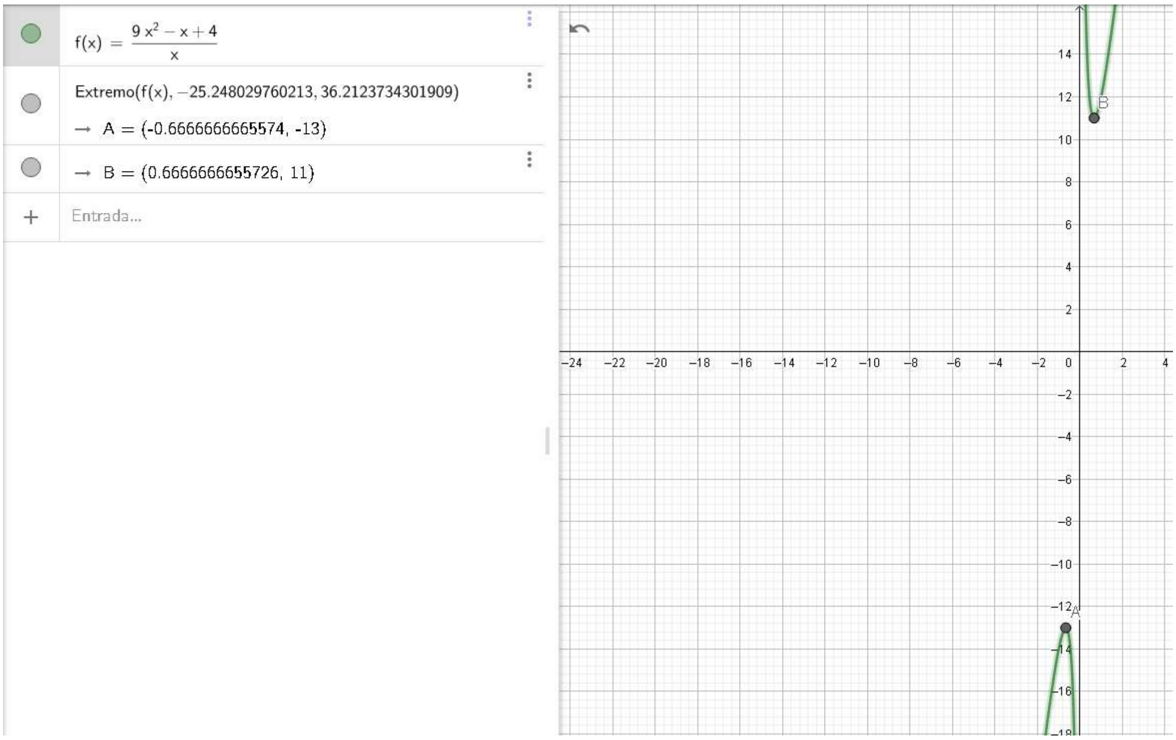
Punto 4 (asíntotas)

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)



Puntos 5 al 8 (puntos críticos, crecimiento, decrecimiento, inflexión, concavidad, convexidad, imagen)

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)



Punto 9 (recta tangente y recta normal)

UAI Cálculo Infinitesimal (Comisión 1-O-N) || Gerardo Tordoya (DNI 22777420)