1

Aplica las reglas que correspondan para derivar la siguiente función:

$f(x) \ = \ (3x+2)^5 * sin\left[(x-1)^2\right]$

$$f(x) \ = \ (3x+2)^5 * sin\left[(x-1)^2\right]$$

$$Aplicando\ la\ regla\ del\ producto: \ (f*g)' \ = \ f' * g \ + \ f * g'$$

$$\frac{d}{dx}(3x+2)^5 = 5(3x+2)^4 * (3)$$

$$Teniendo\ que:$$

$$\frac{d}{dx}(3x+2)^5 = 15(3x+2)^4 \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx} sin\left[(x-1)^2\right] = \ cos(x-1)^2 * 2(x-1) \tag{2}$$

$$Sería\ entonces\ [usando\ (1)\ y\ (2)]:$$

$$f'(x) \ = \ 15(3x+2)^4 * sin\left[(x-1)^2\right] \ + \ \ cos(x-1)^2 * 2(x-1) * (3x+2)^5$$

2

Analiza la función $\sqrt[3]{x^2-4x+3}$ si verifica las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$

$$El\ teorema\ de\ Rolle\ pide\ que\ se\ verifiquen\ 3\ condiciones:$$
$$1.\ f\ es\ continua\ en\ el\ intervalo\ cerrado\ [a;\ b]$$
$$2.\ f\ es\ derivable\ en\ el\ intervalo\ abierto\ (a;\ b)$$
$$3.\ \ debe\ verificar\ igualdad\ entre f(a) \ = \ f(b)$$

$$Análisis:$$

Es una composición de continuas pues puedo sacar raíz cúbica de todos los reales y dentro de la raíz hay una expresión polinómica cuadrática. Por tanto, no tengo impedimentos para operar. Es decir:

$$Dom\ f\ =\ \mathbb{R} \tag{1}$$

Por tanto, es continua en el intervalo dado.

****

$$f(x)\ =\ \sqrt[3]{x^2-4x+3}\ =\ \left(x^2-4x+3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dx}{x}\left[\left(x^2-4x+3\right)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{3}\left(x^2-4x+3\right)^{\frac{-2}{3}} * (2x-4)\ =\ \frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}} \tag{2}$$

$$Dom\ f'\ =\ \mathbb{R}\ -\ (\textit{raíces que hacen } 0 \textit{ el denominador de } f')$$

$$x^2-4x+3\ =\ 0\ =\ \begin{cases} x_1\ = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Entonces:

$$Dom\ f'\ =\ \mathbb{R}\ -\ \{1;\ 3\}$$

Análisis

$$---|------|------|------|---$$

$$---1------\frac{3}{2}-----\frac{5}{2}------3---$$

Por tanto, es derivable en el intevalo dado.

****

Verificar igualdad

$$f\left(\frac{3}{2}\right)\ = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\frac{3}{2}+3} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}-6+3}\ = \sqrt[3]{\frac{9}{4}-\frac{12}{4}}\ = \sqrt[3]{\frac{-3}{4}}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\frac{5}{2} + 3} = \sqrt[3]{\frac{25}{4} - 10 + 3} = \sqrt[3]{\frac{25}{4} - \frac{28}{4}} = \sqrt[3]{\frac{-3}{4}}$$

Verifica igualdad

****

$$Entonces \ \exists \ f(c) = 0$$

$$Encuentro \ c \ haciendo \ la \ derivada \ 0:$$

$$\frac{dx}{x}\left(\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}}\right) = 0$$

$$\frac{dx}{x}(2x-4) = 0$$

$$\frac{dx}{x}(2x) = 4$$

$$\frac{dx}{x}(x) = 2$$

$$Por \ tamto:$$

$$c = 2$$

3

Busca ejemplos, por lo menos dos de distintas indeterminaciones,para aplicar la regla de L'Hopital y resuélvelos.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-e^x}{x} = \frac{1-e^0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$Aplicando \ L'Hopital:$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-e^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1-e^x\right)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{0-e^x}{1} = \frac{0-1}{1} = -1$$

****

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x^3-8} = \frac{2^4-16}{2^3-8} = \frac{16-16}{8-8} = \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x^3-8} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{d}{dx}\left(x^4-16\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^3-8\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{4x^3}{3x^2} = \frac{4\left(2^3\right)}{3\left(2^2\right)} = \frac{4(8)}{3(4)} = \frac{4(2)}{3(1)} = \frac{8}{3}$$

****

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(e^x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2+x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(e^x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2+x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Volviendo a aplicar L'Hopital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(e^x\right)}{\frac{d}{dx}(2x+1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2+0} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

4

Realiza el estudio completo de la función $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$. Halla la recta tangente y la normal en el punto de abscisa -1

$$1)\ Dominio:$$

$$Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{\ 0\ \}$$

****

$$2)\ Conjunto\ de\ ceros:$$

$$(igualar\ la\ f\acute{o}rmula\ a\ cero)$$

$$\frac{x^2+x+1}{x} = 0$$

$$x^2+x+1\ = 0x\ =\ 0$$

$$x^2+x+1\ = 0\ = \begin{cases} x_1 \nexists\ \mathbb{R} \\ x_2 \nexists\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$$Por\ tanto:$$

$$C_0 = \varnothing$$

****

$$3)\ Conjunto\ de\ positividad:$$

$$(al\ no\ contar\ con\ un\ conjunto\ de\ ceros\ y\ sin\ cero\ en\ el\ dominio)$$

$$-\infty \leftarrow --------------(0)-------------- \rightarrow +\infty$$

$$(tomar\ valores\ a\ la\ izquierda\ y\ derecha\ del\ 0):$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+(-1)+1}{-1} = \frac{1-1+1}{-1} = \frac{1}{-1} = -1 \tag{3}$$

$$f(+1)\ =\ \frac{1^2+1+1}{1} = \frac{1+1+1}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$Por\ tanto:$$

$$C_+ = (\ 0;\ +\infty\ )$$

****

4) *Conjunto de negatividad*:

(*ver desarrollo en conjunto de positividad*

$C_{-} = (-\infty;\ 0)$

****

5) *Asíntotas*:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{x^2+x+1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{x^2+x+1}{x} = +\infty$$

ASÍNTOTA VERTICAL (*AV*): *donde se anula el denominador*

$AV:\ x = 0$

ASÍNTOTA HORIZONTAL (*AH*):

AH: *No tiene pues el grado del numerador supera al del denominador*.

ASÍNTOTA OBLICUA (*AO*):

En casos como éstos, hay una forma expédita de encontrar la asíntota, y que es, repartiendo el denominador:

VIA RÁPIDA

$$\frac{x^2+x+1}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$$

Cuando $x \to \infty$, $\frac{1}{x}$ *tiende a* 0, *por tanto*:

$$x+1+\frac{1}{x}\ cuando\ x \to \infty = x+1$$

$$x+1\ es\ entonces,\ por\ la\ vía\ rápida,\ la\ asíntota\ oblicua.$$

$$VÍA\ FORMAL$$

$$Teniendo\ que\ AO = mx + b$$

$$Cálculo\ de\ m:$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1}{x} / x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1}{x^2} = 1$$

$$Cálculo\ de\ b:$$

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1}{x} - x$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

$$Entonces:$$

$$Siendo\ m = 1\ y\ b = 1,\ queda:$$

$$AO = mx + b = x + 1$$

****

$$6)\ Puntos\ críticos\ (máximos\ o\ mínimos):$$

$$(Son\ puntos\ donde\ se\ anula\ la\ derivada)$$

$$Para\ los\ puntos\ críticos,\ se\ necesita\ f'(x):\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x+1-x^2}{x}\right)$$

$$Pero\ si\ aplico\ la\ distribución\ del\ denominador\ (usada\ en\ asíntota\ oblicua\ por\ vía\ rápida):$$

$$\frac{x^2+x+1}{x} = \frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{1}{x} = x+1+\frac{1}{x}$$

$$\ldots que\ es\ una\ forma\ más\ conveniente\ para\ derivar:$$

$$\frac{d}{dx}\left(x+1+\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x+1+x^{-1}\right) = 1+0-x^{-2} = 1-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$Entonces,\ los\ puntos\ críticos\ se\ calculan\ anulando\ la\ derivada:$$

$$\frac{x^2-1}{x^2} = 0$$

$$x^2-1 = 0$$

$$x^2 = 1 = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = +1 \end{cases}$$

$$Para\ determinar\ cuál\ de\ esos\ resultados\ es\ máximo\ o\ mínimo,$$
$$la\ función\ debe\ ser\ estudiada\ por\ tramos:$$

$$-\infty \leftarrow -------[-1]-------(0)-------[+1]------- \rightarrow +\infty$$

	$(-\infty;-1)$	$x=-1$	$(-1;0)$	$x=0$	$(0;1)$	$x=1$	$(1;\infty)$
f'	$f'(-2) = +$	0	$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -$	$\nexists$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -$	0	$f'(2) = +$ (4)
f	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$MÍN$	$\nearrow$

****

$$7)\ Intervalos\ de\ crecimiento\ y\ decrecimiento$$

$$(Del\ examen\ de\ la\ tabla\ anterior):$$

$$I_C = (-\infty;-1)\cup(1;\infty)$$

$$I_D = (-1;0)\cup(0;1)$$

****

$$8)\ Puntos\ de\ inflexión,\ concavidad,\ convexidad.$$

$$\textit{Para calcular esto, necesitamos a } f''. \textit{ Para ello,}$$
$$\textit{debemos elegir la versión de } f' \textit{ que nos conviene operar:}$$

$$1 - \frac{1}{x^2} \ \leftarrow \text{ó} \rightarrow \ \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$\textit{Para la 2da derivada, elegimos } 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\textit{Entonces, si:}$$

$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x^2} \ = \ 1 - x^{-2}$$

$$f''(x) = 0 + 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$\textit{Para buscar los puntos de inflexión, debo igualar la 2da derivada a cero:}$$

$$\frac{2}{x^3} = 0$$

$$\textit{Pero } 2 \ \neq \ 0 \ (\textit{es decir, no es punto de inflexión}).$$
$$\textit{En otras palabras, la 2da derivada nunca se anula.}$$

$$\textit{Entonces, ¿cómo se estudia la concavidad?}$$
$$\textit{Se hace a partir del dominio:}$$

	$(-\infty;\ 0)$	$x = 0$	$(0;\ +\infty)$
f''	$f''(-1) = -$	$\nexists$	$f''(1) = +$
f	$\cap$ Cóncava	$\nexists$	$\cup$ Convexa

$$\textit{Entonces:}$$

$$\textit{Puntos de inflexión: } \nexists$$
$$\textit{Intervalo de concavidad: } (-\infty;\ 0)$$
$$\textit{Intervalo de convexidad: } (0;\ +\infty)$$

****

9) *Conjunto Imagen*:

$$Tomando\ los\ valores\ máximos\ y\ mínimos,\ tenemos\ que:$$

$$Img\ f(x) = (-\infty;\ -1) \cup (+3;\ +\infty)$$

****

$$10)\ Recta\ tangente\ y\ normal\ en\ abscisa = -1$$

$$Sabiendo:$$

$$Que\ la\ ecuación\ de\ la\ recta\ tangente\ es:\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$Que\ la\ ecuación\ de\ la\ recta\ normal\ es:\ y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$
$$Que\ en\ (3)\ se\ calculó\ que \rightarrow f(-1) = -1$$
$$Que\ en\ (4)\ se\ calculó\ que \rightarrow f'(-1) = 0$$

$$Entonces,\ reemplazando:$$

$$RECTA\ TANGENTE$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - (-1) = 0[x - (-1)]$$

$$y + 1 = 0$$

$$y = -1$$

$$RECTA\ NORMAL$$

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y - (-1) = \frac{-1}{0}[x - (-1)]$$

$$y + 1 = \frac{-1}{0}(x + 1)$$

Aplicando matemática al borde :

$$y+1=\frac{-x-1}{0}$$

$$0\cdot(y+1)=-x-1$$

$$0=-x-1$$

$$x=-1$$

****

COMPROBACIÓN GRÁFICA