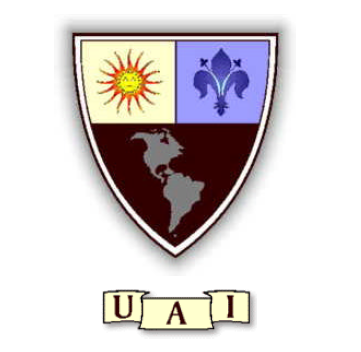
UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA



FACULTAD DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA

CARRERA: **Analista Programador**

ALUMNO: **Tordoya, Gerardo Rodolfo**

MATERIA: **Cálculo Infinitesimal**

INFORME FINAL: **Método de Newton-Raphson**

AÑO: **2021**

Tabla de Contenido

[Introducción 3](#_Toc78053192)

[Desarrollo 5](#_Toc78053193)

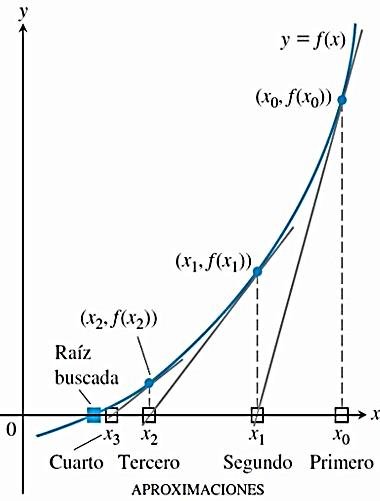
[Conclusión 10](#_Toc78053194)

[Referencias 11](#_Toc78053195)

# Introducción

## 1ER INTENTO

Descripción del método de la recta tangente para aproximar la raíz de una función en un intervalo.



El método de Newton Raphson es un procedimiento algorítmico que permite hallar raíces de funciones, conocido un valor numérico cercano a la raíz. Es un método abierto e iterativo, en general de rápida convergencia, muy útil para el cálculo de raíces cuadradas y de mayor grado, aunque para algunos casos el método presenta inconvenientes (por ejemplo, si existen raíces múltiples, en este caso se tendría que aplicar diferentes soluciones para así lograr encontrar la raíz sin abandonar el método).

De la figura se tiene que la 1ra derivada en x es equivalente a la pendiente

que puede arreglarse para obtener

Por ejemplo, al obtener la raíz de la ecuación x2 – 3x – 4 (con un valor de inicio = 8)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i = 1 | x1 = 8.00 | f(x1) = 36.00 | f’(x1) = 13.00 | x2 = 5.23 | Error (xi+1 – xi / xi+1 \* 100) = -52.96% |
| i = 2 | x2 = 5.23 | f(x2) = 07.66 | f’(x2) = 07.46 | x3 = 4.20 | Error (xi+1 – xi / xi+1 \* 100) = -24.52% |
| i = 3 | x3 = 4.20 | f(x3) = 01.04 | f’(x3) = 05.40 | x4 = 4.01 | Error (xi+1 – xi / xi+1 \* 100) = -04.73% |
| i = 4 | x4 = 4.01 | f(x4) = 01.04 | f’(x4) = 05.40 | x5 = 4.00 | Error (xi+1 – xi / xi+1 \* 100) = -00.25% |

¿Qué calcula la columna de error?

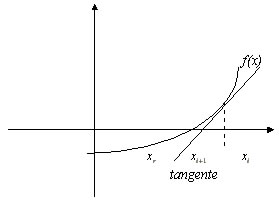
Con respecto al error, muy interesante la pregunta, existe toda un área matemática para el estudio de los errores y su propagación, seguramente en alguna asignatura algo verán pues, al ser programadores, los cálculos de redondeo se verán afectados por operaciones entre las variables que intervengan y las operaciones que con ellas se realicen, es decir, el error se propaga y hay que saberlo manejar. En el caso del método iterativo de Newton, se propone una tolerancia para detener el proceso, esa tolerancia es un error por diferencia entre xi+1 y xi, es decir dos valores sucesivos de tu iteración. Si consideras la diferencia a secas, eso se llama "error absoluto" y se puede utilizar ese parámetro. Pero un error más preciso (que es el "error relativo") es igual al error absoluto dividido por la magnitud de la variable (xi+1). ¿Por qué es más preciso el error relativo? Te lo explico con dinero (que todos entendemos): supón que tu diferencia de ganancia entre un año (xi) y el siguiente (xi+1) es de pesos un millón. Bien, eso parece una gran suma. Pero imagina que eres Google. Entonces eso no es "significativo". ¿Por qué? El error o diferencia relativa, para Google será 1.000.000/100.000.000.000.000.000, donde el denominador es la ganancia Google actual (xi+1). Entonces Google no creció casi nada... Pero si vos, que no eres Google, pones tu ganancia xi+1 en el denominador (supongamos 1.500.000), ¡entonces sí creciste un montón! Y para ver ese crecimiento en lenguaje porcentual, se multiplica por 100, y entonces así se obtiene la diferencia o error porcentual (que es una medida realista de la situación y sus cambios). Eso explica la fórmula del Excel que te envié. Ahora, la pregunta del millón: ¿Por qué el error lo mide (xi+1-xi) y no los valores que toma la función? Porque la aproximación se realiza mediante un concepto que se denomina "Polinomio de Taylor". La recta tangente es el polinomio de grado 1, y si se corta el polinomio allí, el error lo mide el término siguiente que es una potencia de (xi+1-xi).

# Desarrollo

## 2DO INTENTO

El método Newton-Raphson es uno de los más utilizados para localizar raíces ya que en general es muy eficiente y siempre converge para una función polinomial (las funciones deben ser diferenciables y -por tanto- continuas para poder aplicar este método).

Se debe partir de un valor inicial para la raíz xi (este puede ser cualquier valor), y el método convergirá a la raíz más cercana.



Si se extiende una tangente desde (xi, f(xi)), el punto donde esta tangente cruza al eje x representa una aproximación mejorada de la raíz.

La fórmula de Newton-Raphson se deduce a partir de la fórmula de la pendiente de una recta:

Entonces:

Se define la derivada de una función en un punto dado como la pendiente a la recta tangente de dicho punto: m=f’(x). Por tanto:

Ahora bien, hay que determinar un número máximo de iteraciones. Normalmente, esto se hace considerando una “tolerancia”, esto es, el valor absoluto de la diferencia debe ser menor que la tolerancia dada o el resultado de alguna fórmula de error. Una de las fórmulas de error más útiles es la del error relativo porcentual aproximado:

El método de Newton-Raphson es convergente cuadráticamente, es decir, el error es aproximadamente al cuadrado del error anterior. Esto significa que el número de cifras decimales correctas se duplica aproximadamente en cada interacción.

Cuando el método de Newton-Raphson converge, se obtienen resultados en relativamente pocas interacciones, ya que, para raíces no repetidas, este método converge con orden 2 y el error Ei+1 es proporcional al cuadrado del resultado anterior Ei. Supóngase que el error en una iteración es 10-n, entonces el error en la siguiente, (que es proporcional al cuadrado del error anterior) es 10-2n, el que sigue será 10-4n, etc.

De esto puede afirmarse que de cada iteración duplica aproximadamente el número de dígitos correctos. NOTA: Sin embargo, el método de Newton-Raphson algunas veces no converge, sino que oscila. Esto ocurre si no hay raíz real, si la raíz es un punto de inflexión o si el valor inicial está muy alejado de la raíz buscada y alguna otra parte de la función “atrapa” la iteración.

## 3ER INTENTO

Encontrar las soluciones de una cierta ecuación es uno de los problemas más importantes de las matemáticas. En cualquier momento en nuestro estudio podemos encontrarnos una ecuación de la cual necesitamos saber sus soluciones. Pero hay un grave problema relacionado con esto: no tenemos métodos que nos permitan obtener las soluciones de todas las ecuaciones que nos pueden aparecer. Podemos resolver ciertas ecuaciones algebraicas (no hay fórmulas para las de grado 5 y superior) y algunas exponenciales, logarítmicas o trigonométricas, pero no todas. Por ejemplo, no hay métodos que nos den las soluciones exactas de esta ecuación:

x∙2x=1

¿Qué podemos hacer entonces? Pues no nos queda otra que buscar aproximaciones de las soluciones. Es decir, buscar números que, aunque no sean las soluciones exactas sí, sean lo suficientemente aproximados a ellas como para que nos puedan servir en nuestro problema. Y eso es lo que hace nuestro método.

El método de Newton-Raphson es un método iterativo con el que podemos encontrar aproximaciones de soluciones de ecuaciones no lineales. El método parte de un valor inicial que se introduce en una expresión relacionada con la ecuación, obteniendo así un resultado. Ese resultado se introduce en la misma expresión, obteniendo un nuevo resultado, y así sucesivamente. Si la elección del valor inicial es buena, cada vez que introducimos unos de los resultados obtenidos en esa expresión (es decir, cada vez que realizamos una iteración del método) el método nos proporciona una aproximación a la solución real mejor que la que obtuvimos anteriormente. Vamos a ponerle símbolos matemáticos al asunto:

Dada una función f(x) derivable en un intervalo [a, b] en el que f tenga una raíz m y dado un valor real S0 cercano a dicha raíz, el método iterativo…

…converge a esta raíz m de la función inicial, es decir, a la solución de f(x)=0 que pertenece al intervalo [a, b].

O sea que la cosa consiste en elegir bien S0, meterlo en esa expresión para obtener S1, meter después S1 obteniendo así S2, y así sucesivamente. Y la cosa es que cada SK que obtenemos es una mejor aproximación a una solución de f(x)=0 que los valores obtenidos antes. Bien, ¿no? La fórmula necesaria para aplicar el método es sencilla y las operaciones nos las puede hacer una máquina. Pero queda un «pequeño» detalle:

**¿Cómo elegimos S0?**

El método de Newton-Raphson tiene un problema: no tenemos un teorema de convergencia global del método. Su convergencia depende de la elección inicial de S0. Si no elegimos bien ese valor inicial, no tendremos asegurado que los sucesivos resultados obtenidos mediante el método sean de verdad buenas aproximaciones de la solución. Por tanto, la elección de S0 es fundamental. Por ello vamos a dar condiciones para que en el intervalo en cuestión exista una única solución de nuestra ecuación y además el método converja a ella.

Debemos partir de una función f(x) de clase C2 en el intervalo [a, b] (es decir, al menos dos veces derivable en dicho intervalo y con segunda derivada continua en él). Entonces:

1.- En principio debemos escoger un intervalo en el que f(x)=0 cumpla el teorema de Bolzano para poder asegurar así que hay al menos una raíz en dicho intervalo. Es decir, f(x) debe ser continua en dicho intervalo (como le exigimos que sea derivable esta condición no da problemas) y debe cumplirse también que f(a) y f(b) tengan signos distintos.

2.- Debe cumplirse que la primera derivada de f sea distinta de cero en todo el intervalo.

3.- También se debe cumplir que la segunda derivada de f no cambie de signo en dicho intervalo, es decir, que sea siempre positiva o siempre negativa en [a, b].

4.- Con todo esto, es claro que se cumple que:

f(a)∙ f ″(a) > 0

o que:

f(b)∙ f ″(b) > 0

Eligiendo como S0 el extremo del intervalo que cumpla que ese producto es positivo, tenemos asegurado que el método converge a la única solución de la ecuación en [a, b].

**Ejemplo de aplicación de este método.**

Utilizaremos la ecuación para la que comentamos antes que no teníamos método de resolución exacta: **x∙2x=1**.

Nuestra función será . Como la función es derivable infinitas veces en todo ℝ, no tendremos problemas a la hora de exigirle que sea de clase C2 en el intervalo que escojamos.

1.- Vamos con el intervalo. Necesitamos que la función tome valores con signos contrarios en los extremos. Una fácil y rápida comprobación nos lleva a que f (0) = -1 < 0 y f (1) = 1 > 0, por lo que, según el teorema de Bolzano, nuestra función tiene al menos una raíz en el intervalo [ 0, 1].

2.- La primera derivada de nuestra función es:

f ′ (x) = 2x + x∙2x ∙Ln(2) = 2x∙(1 + x∙Ln(2))

Como 2x > 0 para todo valor real de x, para que esa expresión sea nula, debe ser 1 + x∙Ln(2)=0, de donde (despejando) obtenemos que:

Siendo negativo, no pertenece al intervalo [0, 1]. Por tanto, f ′ (x) es distinta de cero en todo el intervalo.

3.- La derivada segunda es:

f ″(x) = 2x ∙ Ln(2) ∙ (2 + x ∙ Ln(2))

El primer factor, 2x, es siempre positivo. El segundo, Ln(2), es una constante positiva. Y el tercer factor, 2 + x ∙ Ln(2), es positivo para todo valor del intervalo [ 0,1 ]. Esto nos lleva a que la segunda derivada de f es positiva en todo el intervalo [0, 1] y, en consecuencia, no cambia de signo en todo el intervalo.

# Conclusión

# Referencias