Tecnología de Computadores

Tres Teoremas

Fourier ~Nyquist ~Shannon

Autores: Ing. Marcelo M. Semeria
Ing. Rubén R. López

NOTA : El presente apunte complementa el contenido del libro **Redes de Computadoras de A.Tanenbaum** para los temas de Fourier, Nyquist y Shannon.

Contenido

Introducción:

Para comprender las bases teóricas en las que se apoya la transmisión de datos debemos buscar herramientas de análisis que nos permitan sacar conclusiones razonadas de los fenómenos físicos que participan en las comunicaciones.

Tres puntos claves para ello son los trabajos de Fourier, Nyquist y Shannon.

No es objetivo de este apunte un detallado estudio de los teoremas anteriores, sino llegar a la comprensión y manejo de sus principios con un mínimo de complicaciones matemáticas pero sin perder de vista los fundamentos físicos

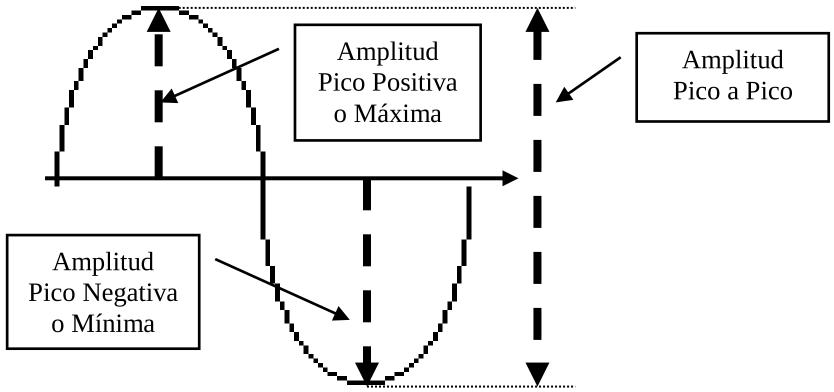
1) Algunos conceptos iniciales

Sin ánimo de generar rigurosas definiciones que sean válidas dentro de todo el amplio rango de la física y la tecnología, y a solo efecto que nos ocupa, adoptaremos los siguientes conceptos:

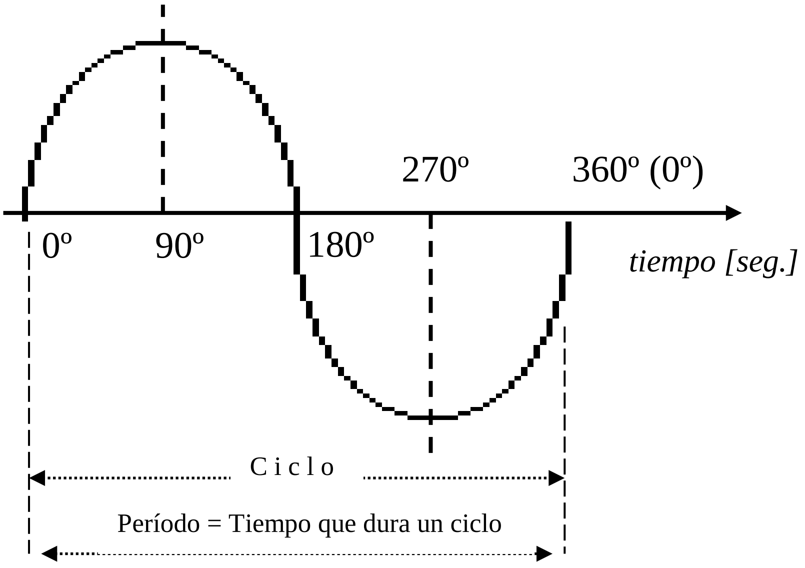
Señal: son los sucesivos valores que van adoptando una variable física (como la tensión, corriente, etc.) a medida que transcurre el tiempo

Amplitud: es el valor que adopta una variable física en un determinado instante. Se destacan:

Amplitud Pico: es el valor máximo o mínimo que adopta una señal
Amplitud pico a pico: es la diferencia entre el valor máximo y mínimo que tiene una señal



Ciclo: podremos decir que se trata de la secuencia ordena de puntos que representan los sucesivos e infinitos valores que adopta una señal hasta el momento en el cual se vuelve a repetir la misma secuencia.



<u>Período:</u> es el tiempo que tarda en transcurrir un ciclo

<u>Frecuencia:</u> es la cantidad de veces que se repite un ciclo durante un segundo (recordemos que el segundo es la unidad de tiempo del sistema métrico MKS)

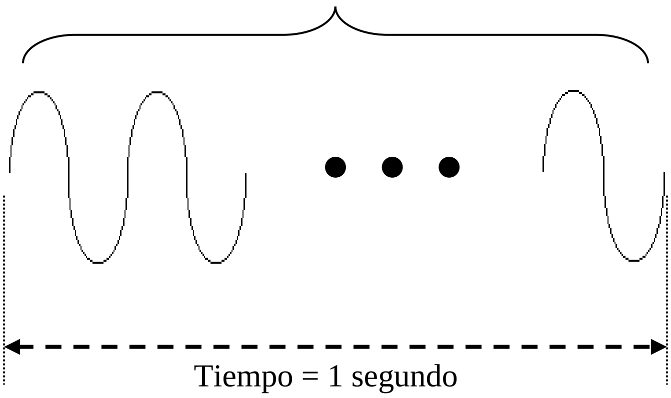
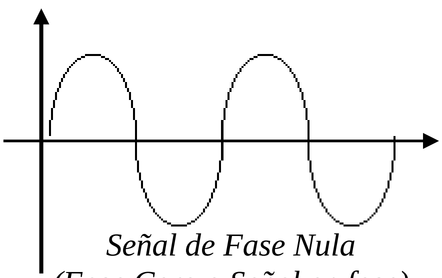


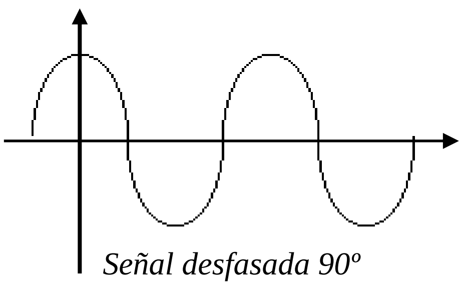
Gráfico
Señal Senoidal
(frecuencia = 50 Hz)

<u>Fase:</u> es la diferencia entre el momento que se inicia la señal y momento en que la misma cruza el centro de coordenadas, medido en grados "eléctricos". Se destacan los siguientes casos:

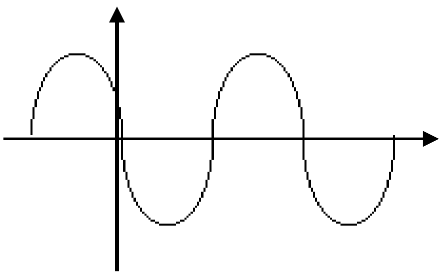
a) Fase Nula (Fase Cero o Señal en fase)
b) 90 (Señal adelantada 90)
c) 180 (Señal desfasada 180)
d) 270 (Señal retrasada 90)



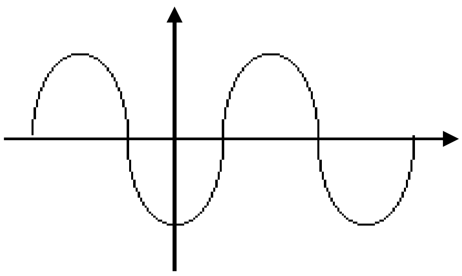
Señal de Fase Nula
(Fase Cero o Señal en fase)



Señal desfasada 90º
(Señal adelantada 90º)



Señal desfasada 180º



Señal desfasada 270º
(Señal retrasada 90º)

Velocidad de Propagación:

es la velocidad que tiene una señal de una determinada frecuencia que recorre un medio físico real, se mide en m/s. La expresión que vincula la frecuencia, la velocidad y la longitud de onda es:

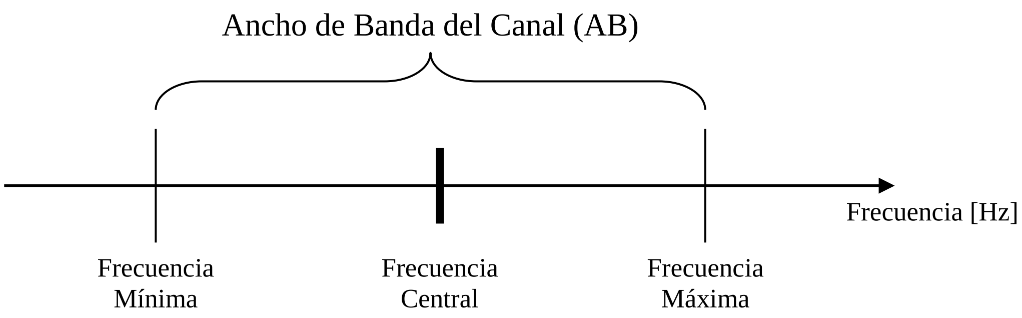
$$v = \lambda f$$

donde v es la velocidad de propagación de la señal en el medio por el cual viaja en m/s
λ (lambda) es la longitud de onda de la señal medida en metros
f es la frecuencia en Hertz (recordar que Hertz = 1/segundo)

Longitud de onda: íntimamente ligado al concepto anterior surge de despejar λ de la expresión y físicamente nos da idea de cual es la longitud "eléctrica" correspondiente a una señal de una frecuencia determinada. Mediante este concepto podremos calcular teniendo en cuenta la frecuencia de una señal, cual es el espacio lineal que ocupa un ciclo o cuanto tarda la misma en atravesar un medio de una longitud determinada

Ancho de Banda: es la diferencia entre la máxima y la mínima frecuencia que puede pasar por un canal de comunicaciones, medida en Hertz.

$AB = F_{max} - F_{min}$ donde F_{max} nos indica el valor de la máxima frecuencia que puede pasar por el canal mientras que F_{min} nos dará el limite mínimo de la misma



Un punto notable, que se puede apreciar en la figura, es la Frecuencia Media o Mitad, su valor se calcula para un AB como la media aritmética entre la frecuencia máxima y la mínima, o sea:

$$F_{media} = (F_{max} - F_{min}) / 2$$

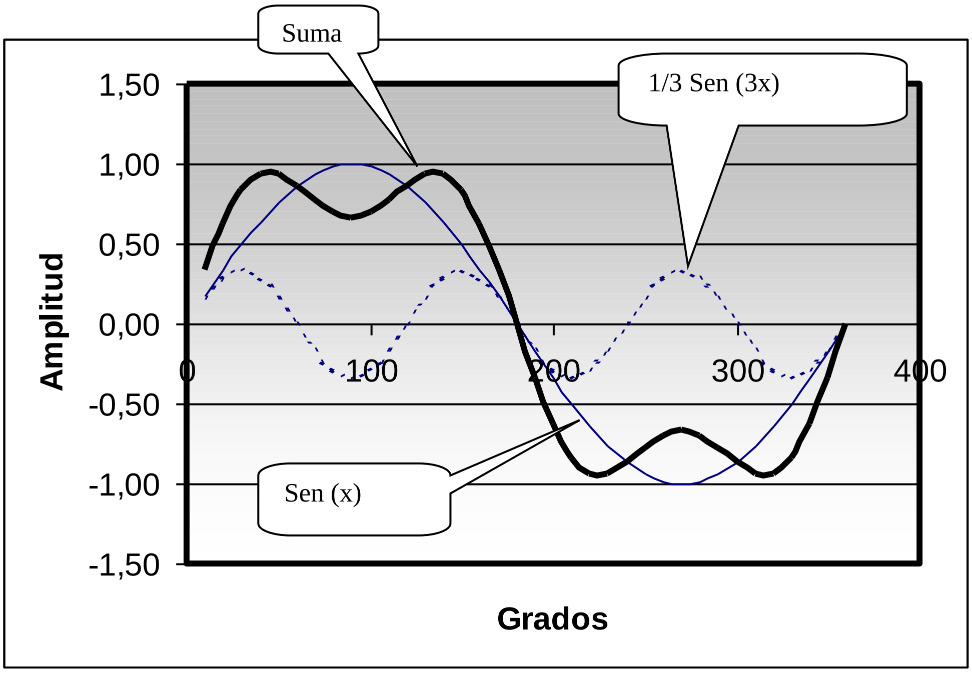
2) Fourier en el dominio temporal

Mediante la aplicación de la Serie de Fourier, podremos comprender como una señal de onda cuadrada esta compuesta matemáticamente y físicamente por la sumatoria de infinitas ondas senoidales; y que frente a la necesidad de la transmisión digital de señales por un canal de comunicaciones, la realidad física del medio utilizado nos pondrá en la practica limitaciones con respecto a la cantidad de estas "infinitas" señales senoidales que se puedan transportar.

Encararemos un explicación gráfica.

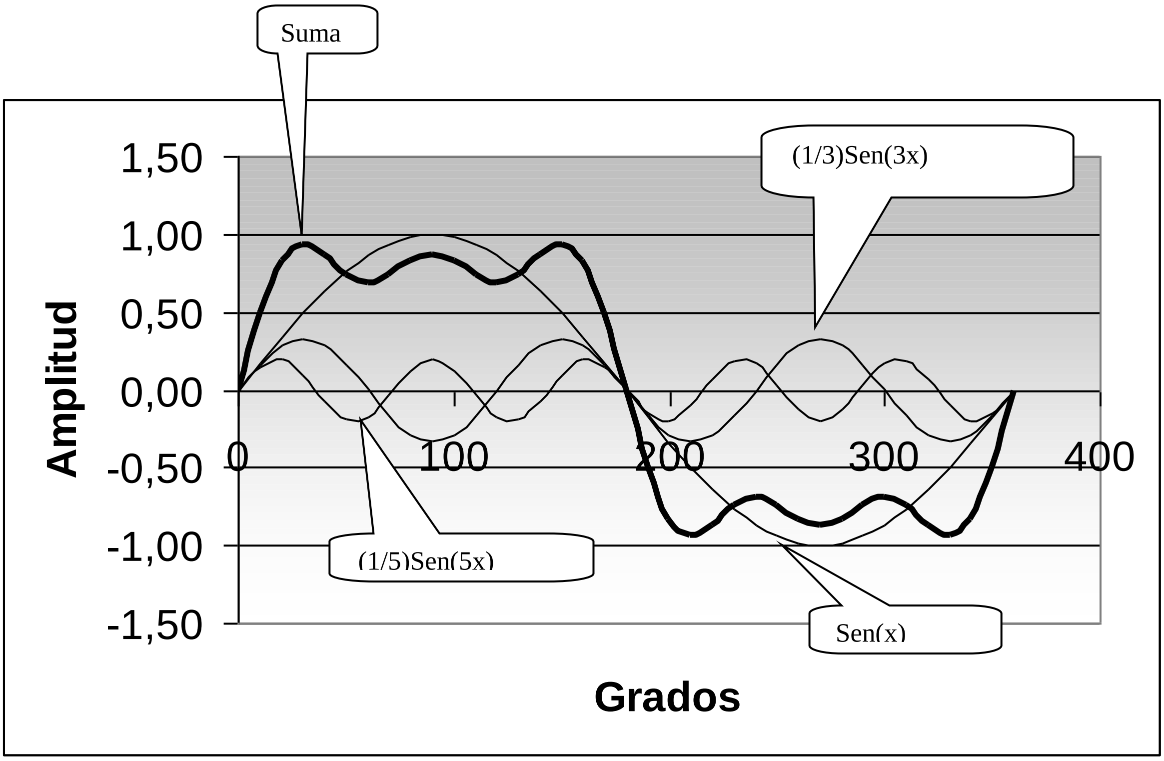
2.1) Sean
a) Sen (x)
b) 1/3 Sen (3x)
c) Sen (x) + 1/3 Sen (3x)

sus gráficas de las señales trigonométricas en el dominio temporal resultarán:



2.2) Y sea tambien
a) Sen (x)
b) 1/3 Sen (3x)
c) 1/5 Sen (5x)
d) Sen (x) + 1/3 sen (3x) + 1/5 Sen (5x)

al graficarlas tendremos:



En las figuras anteriores notamos que a medida que se van agregando componentes (dos en el primer caso 2.1.c y tres en el segundo 2.2.d) la sumatoria de la señal cada ves mas se va pareciendo a una onda cuadrada. Fourier demostró que en el límite, cuando la cantidad de componentes sumados sean infinitos, la onda será exactamente una onda cuadrada. Dichos componentes matemáticamente se los designa ***Términos***, pero en el ámbito de las comunicaciones se los llama ***Armónicas*** mientras que al primero suele llamárselo ***Fundamental***.

En función de lo dicho, podemos concluir diciendo:

una forma de onda cuadrada está formada por la sumatoria de infinitas ondas seno.

En forma mas general se puede decir que *toda forma de onda periódica está compuesta por la suma de infinitos senos y cosenos*

$$g(t) = 1/2\, c + \sum a_n \operatorname{sen}(\omega t) + \sum b_n \cos(\omega t)$$

donde: a_n y b_n son las amplitudes de las armónicas
ω (omega) = 2 π f y f = 1 / T , siendo " **f** " la frecuencia de la señal fundamental y **T** el período o tiempo que tarda en transcurrir un ciclo.

Para el caso particular de una onda cuadrada solo se usan las armónicas impares, tal como se puede apreciar del ultimo ejemplo analizado (1.2.d), siendo por lo tanto b_n igual a cero.

Como consecuencia de lo expresado es muy importante interpretar que cuanto mayor sea el ancho de banda de un canal de comunicaciones, es decir cuanto mayor sean la cantidad de armónicas que puedan atravesar dicho canal, resultará menor la diferencia entre la onda cuadrada que se inyecta en la entrada del medio y la obtenida de sumar todas las armónicas que aparece en el otro extremo del mismo. Recordemos que en teoría deberán ser infinitas ondas senoidales las recibidas para que la onda cuadrada resultante sea perfecta.

Todo lo analizado hasta aquí corresponde al tratamiento en el "dominio" temporal de las señales (ver que en los gráficos el eje horizontal pertenece al tiempo y por supuesto se mide en segundos o múltiplos/submúltiplos de este)

3) Fourier en el dominio de la frecuencia

Toda ves que hablamos del tiempo estamos haciendo directa referencia a la frecuencia, ya que ambas se relacionan por medio de la expresión:

Frecuencia = 1 / Tiempo donde [Frecuencia] = Herz y [T] = Segundos

Si en ves de representar las señales en función del tiempo - tal como hemos hecho en el ítem anterior - ahora hacemos la gráfica referida a la frecuencia (o sea nuestro eje horizontal deja de representar el tiempo y pasa a indicarnos la frecuencia de las distintas componentes que viajan por el canal), obtendremos la representación de las señales en el denominado "Espectro de Frecuencias".

Si bien en un medio físico, un grupo de señales senoidales ***siempre*** se propaga en el dominio temporal como la resultante de la suma de todas ellas (tal como expresa Fourier), su representación gráfica y análisis resulta dificultoso y complicado. A fin de evitar estas circunstancias se realiza la "***transformación***" del *dominio temporal* al *dominio de las frecuencias* logrando simplificar notablemente el análisis relacionado con la propagación de la información dentro de los canales de comunicaciones.

De esta forma, en un gráfico correspondiente al dominio de las frecuencias, representaremos en el eje vertical la amplitud de las armónica (medido en unidades de tensión o corriente) y en el eje horizontal sus respectivas frecuencias (medidas en Hertz). Como dijimos a este gráfico se lo denomina "***Espectro de Frecuencias***" y para un determinado medio real bajo análisis (por ejemplo coaxial, fibra, etc.) tendrá como limite tecnológico (cotas), una mínima y una máxima frecuencia que el canal permitirá pasar (técnicamente se denomina ***Ancho de Banda*** y típicamente se lo representa por las siglas ***AB***)

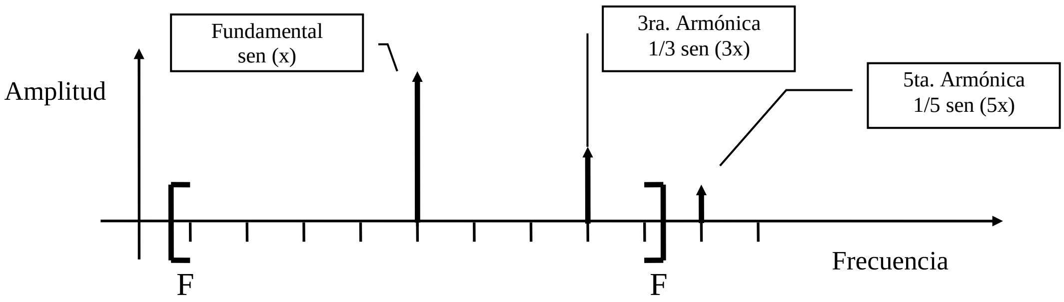
Por lo tanto, lo dicho queda expresado por la formula que ya fuera analizada en el ítem 1:

$AB = F_{max} - F_{min}$ donde F_{max} nos indica el valor de la máxima frecuencia que puede pasar por el canal mientras que F_{min} nos dará el limite mínimo de la misma

Veamos una representación gráfica en el dominio de las frecuencias, para un canal cuyo Ancho de Banda es $AB = F_2 - F_1$ y en el cual se transporta una señal representada por la siguiente expresión:

$x = \text{sen}(x) + 1/3\ \text{sen}(3x) + 1/5\ \text{sen}(5x)$ (ya utilizada en 1.2.d)

La gráfica de su *Espectro de Frecuencia*, de acuerdo a lo visto, sería:



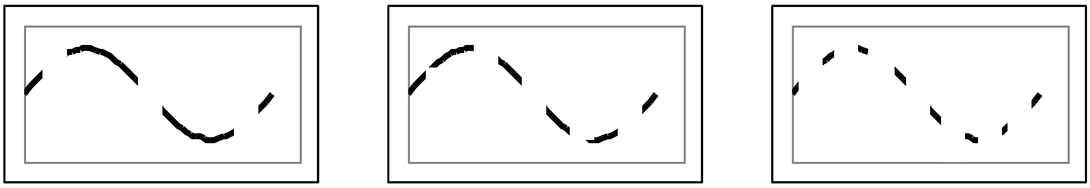
Se ha tomado arbitrariamente valores para de F_2 y F_1 para este canal, de forma tal que se pueda ver claramente como solo es posible transportar la frecuencia fundamental y su 3ra. armónica, sin embargo se comprenderá que no será enviada la 5ta. armónica al quedar fuera del AB; generándose de esta forma una diferencia entre la señal de entrada y la de salida donde aparece una de las clásicas limitaciones tecnológicas que provocan los medios físico en los canales de comunicación.

4) Nyquist (Muestreo de señales)

Cuando se diseña un canal de comunicaciones, dentro de los objetivos primordiales estará el hecho de obtener la máxima transferencia de información (obviamente sin error) por unidad de tiempo, aspecto con el que se busca optimizar al máximo el rendimiento del medio físico.

Una de las formas - la que nos ocupa en este caso - será procurando enviar solamente la mínima información "eléctrica" necesaria (eliminando todo contenido irrelevante e innecesario), que posteriormente mediante un proceso tecnológico (con basamento matemático) del lado del receptor pueda reconstruir la señal original para permitir interpretar la información. El resultado de este proceso, evidentemente es un menor uso del canal por parte de la señal transmitida.

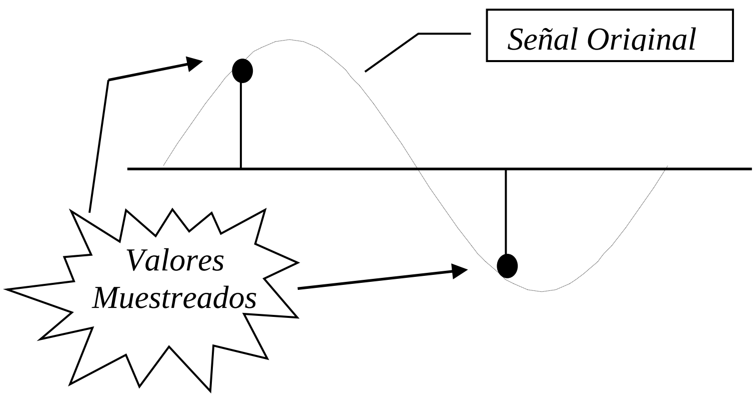
Veamos gráficamente estos conceptos utilizando una onda senoidal como la dibujada, a la que se le borran tramos, tal como se aprecia en las siguientes figuras.



Es indudable que cada ves se va borrando mayor cantidad de información, pero siempre podemos seguir reconociendo la imagen original. Esto nos lleva a plantear la siguiente pregunta ¿Hasta cuando podemos eliminar tramos de la señal sin perder la posibilidad de reconstruirla ?

Nyquist, en 1924, demostró que no es necesario enviar todo un ciclo de una señal (una sucesión de infinitos puntos que caracterizan a toda señal analógica) para que del lado del receptor pueda ser interpretada, sino que basta con solo dos muestras por ciclo para que aún se pueda recuperar la señal original.

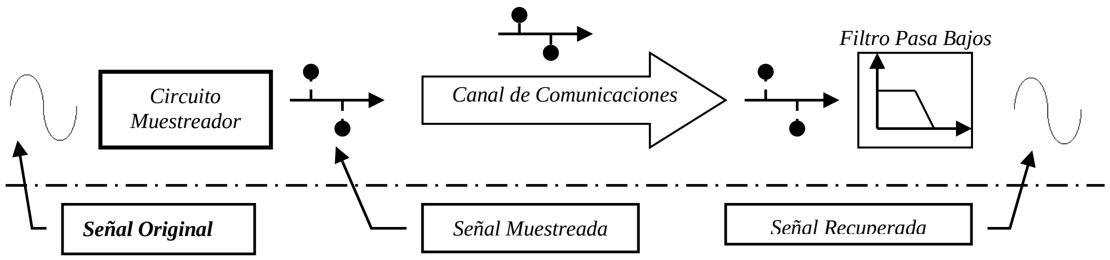
Veamos la siguiente figura:



En ella se puede apreciar que si conocemos la frecuencia, nos bastará con los 2 puntos indicados (los muestreados) para “a simple vista” imaginarnos como mínimo una gráfica como la indicada por el trazo punteado. El resto, corresponderá a un filtro pasa bajos que realizara el efecto de “conformación” (reconstrucción) de señal para obtener la señal de origen.

En forma mas precisa : *Toda señal limitada en banda (debido a que se encuentra acotada por el AB del canal) se puede reconstruir completamente a partir de las muestras tomadas de misma, siempre que la velocidad del muestreo se realice como mínimo al doble de la máxima frecuencia de la señal.* A esta velocidad de muestreo se la denomina “Frecuencia de Nyquist”.

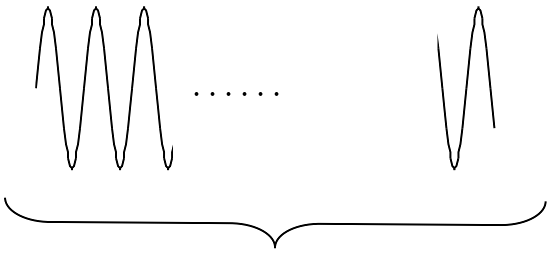
Esto se hace particularmente visible, si la señal recibida (la muestreada) se aplica a un filtro pasabajos ideal, elemento tecnológico que - como ya se dijo - será el encargado de reconstruir la señal recibida para obtener la original.



5) Nyquist aplicado a un canal telefónico

El ancho de banda asignado a un canal telefónico es de 4KHz (supongamos para simplificar que el canal esta completamente disponible para telefonía desde 0Hz hasta 4000Hz).

La máxima señal permitida será entonces de 4000 Hz, es decir 4000 ciclos por segundos (en un segundo "entran" 4000 ciclos), según Nyquist si cada ciclo tiene dos muestras se tendrán entonces 8000 muestras por segundo (Notar que es justamente el doble de la máxima frecuencia).



1seg = 4000 ciclos

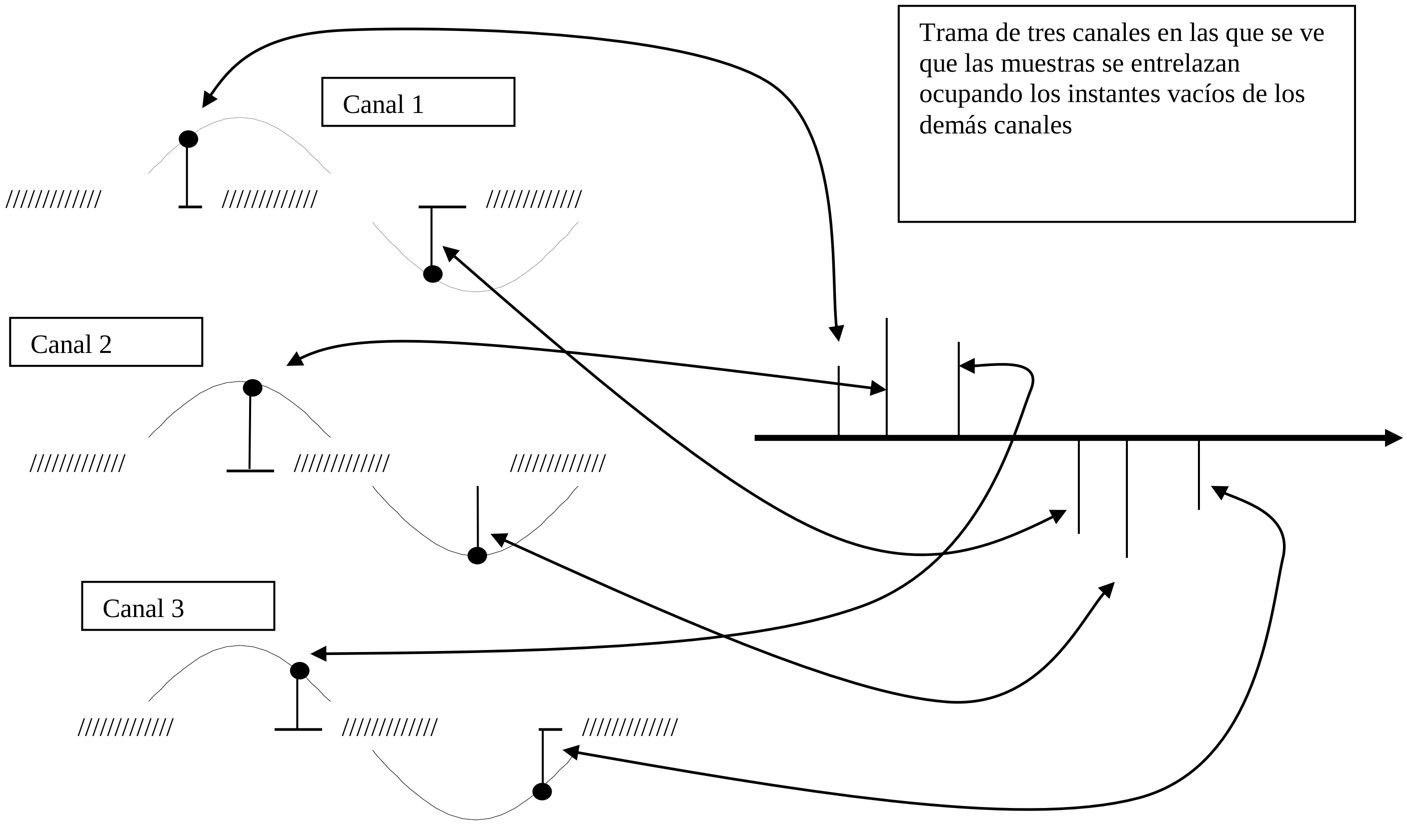
Si codifiquemos la amplitud cada una de las 8000 muestras por segundo con 8 bits, se obtendrá que la cantidad de información a transmitir por el canal es 64000 bps (bit por segundo) o sea la velocidad de un canal telefónico con codificación binaria.

En cambio si usáramos la norma americana donde del Byte a transmitir se destina 1 bit para control nos quedarían solo 7/8 de Byte para datos por lo cual la velocidad será (7/8) 64 Kbps = 56 Kbps. O sea del canal de 64Kbps para datos se utilizan 56 Kbps y los 8Kbps restantes se utilizan para “control”.

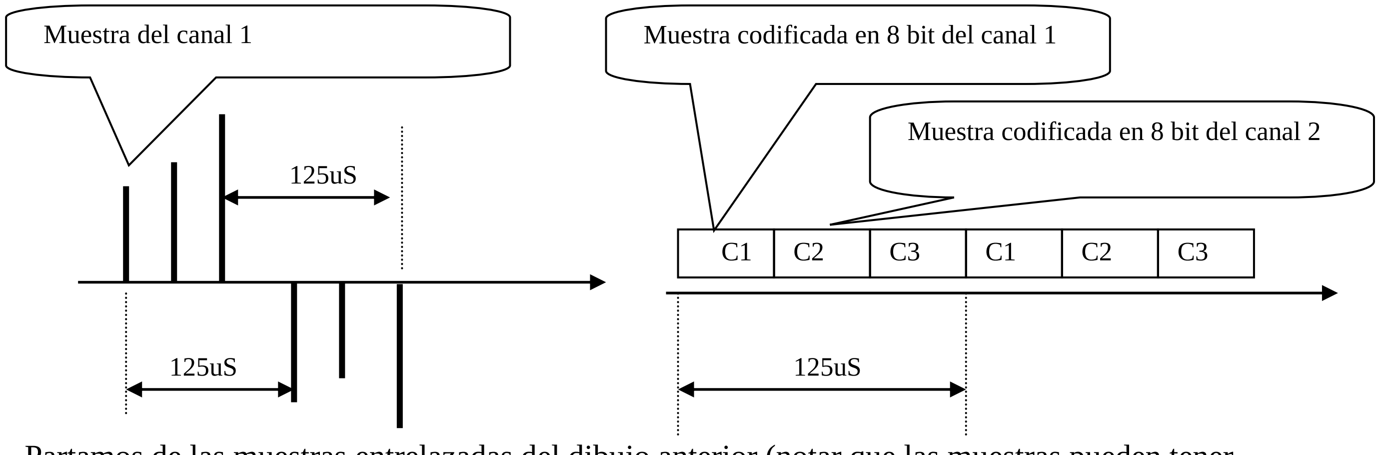
6) Armado de una Trama (“Entramado de Datos”)

Una Trama nos define como los datos y la información de control se acomodan al flujo de bits que se transmite por un canal de comunicaciones, es decir que una trama nos muestra la definición de la estructura de los datos que son enviados a través de un medio de comunicaciones utilizando una transmisión serie.

Tal como se dijo, no es necesario tener la señal completa sino que basta con al menos dos muestras por ciclo, esto nos deja mucho tiempo libre (véase //////////////// en la figura) que puede usarse para transmitir otra señal con la única precaución de muestrearla en instantes distintos de las anteriores).



Considerando siempre canales telefónicos, la distancia entre dos muestras será de 125 μS (0.125ms), esto nos lleva a que los datos codificados deberán estar también a 125 μS uno de otro y entre ellos se intercalarán los demás canales como se muestra en la siguiente figura:



Partamos de las muestras entrelazadas del dibujo anterior (notar que las muestras pueden tener cualquier forma); vemos dibujada a la derecha la trama aplicada a esta comunicación donde cada rectángulo (C1, C2, C3) de la figura es la codificación PCM a 8 BIT de la muestra correspondiente al canal de sonido de una comunicación telefónica.

Un caso real es cuando se arman tramas de 32 canales, ahí estamos en presencia de lo que se conoce como líneas E1.

7) Shannon (Canales con Ruido aleatorio)

Todo canal de comunicaciones, en la práctica se vera afectado por el ruido electromagnético, limitándose de esta forma la capacidad de un canal para transmitir información.

Es lógico pensar que a medida que aumenta el ruido (N) de un canal disminuye su capacidad de transmisión, ya que el mismo estará usando el espacio del canal que corresponde a la información. Una forma de ponderar esta circunstancia es cuantificar la relación S/N es decir la relación señal a ruido, también conocida como NSR.

La ecuación que los relaciona, corresponde a la primera ley de Shannon y dice:

$$C = B \log_2 (1 + S/N)$$

donde: C es la capacidad máxima del canal en bps
B es el ancho de banda del canal medido en Hertz
S/N representa la relación señal / ruido medido en ***veces***

Por ejemplo si supongamos un canal telefónico donde **B** = 4000Hz; **S/N** = 1000 se tendrá que 40000bps es la máxima capacidad posible de este canal.

Si bien de la expresión se puede inferir que aumentando la potencia de la Señal transmitida (S) y el Ancho de Banda utilizable (B) o disminuyendo la potencia de Ruido (N) se mejoraría la capacidad del canal, estas soluciones podrían resultar en la mayoría de los casos físicamente irrealizables o económicamente prohibitivas, siendo su análisis particular del diseño de cada canal para un determinado medio físico y el tipo de transmisión utilizada.

Nota: El trabajo de Shannon (1948) es una ampliación del realizado por Nyquist (1924) donde considera un canal que puede ser afectado por ruido de tipo aleatorio.

8) Ejercicios

Usando algún programa con capacidad de graficación (por ejemplo una planilla de cálculo)

1) Graficar

$Y1(x) = Sen(x) + (1/3)Sen(3x) + (1/5)Sen\ (5x) + (1/7)Sen\ (7x) + (1/9)Sen(9x) + (1/11)Sen(11x).$

Agregar armónicas y comprobar las diferencias

2) Graficar

$Y2(x) = Sen(x) - (1/3)Cos(3x) + (1/5)Sen\ (5x) - (1/7)Cos(7x) + (1/9)Sen(9x) - (1/11)Cos(11x).$

3) Suponer el siguiente sistema formado por dos generadores de señales y un sumador. El generador G1 genera una onda Seno de amplitud 1 y período 2ms y el G2 una onda Coseno de amplitud 2 y periodo 1ms. Se pide

a) Graficar las salidas de G1 y G2 en función del tiempo
b) Graficar las salidas de G1 y G2 en función de la frecuencia

4) La señal del punto anterior pasa por un filtro pasa bajos de frecuencia de corte 600 Hz . Dibujar la señal en su salida tanto en función del tiempo como de la frecuencia.

5) Suponga que los canales telefónicos se muestren a 10 bits en lugar de a 8 ¿ Cual sería su velocidad ?

6) Cual deberá ser el ancho de banda de un canal con SNR = 20dB para que su capacidad sea 64Kbps. NOTA. recordar que para poder aplicar la fórmula dada SNR debe estar especificada en veces, no en Decibeles