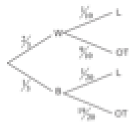
# Probabilidad y Estadística 5

Actividades de Aprendizaje



**Conceptos y definiciones de esta clase:**

- Sucesos Independientes
- Teoría de Conteo
- Arreglos
- Combinaciones
- Permutaciones

- Regla de Bayes
- Variable aleatoria discreta
- Función de Probabilidad para una variable aleatoria discreta

## 1. Probabilidad

### 1.11 Sucesos Independientes.

Dos o más sucesos pertenecientes a un mismo Espacio Muestral son sucesos independientes sí, y sólo si la presentación de uno de ellos no modifica el valor de la probabilidad del o de los otros.
En símbolos:
Dos sucesos A y B son independiente si se cumple que
$P(A/B)=P(A)$ *La primera expresión P(A/B) se lee: "Probabilidad de A sabiendo que ocurrió B". Entonces si es igual a la P(A) quiere decir que B no condiciono nada.*

Y

$P(B/A)=P(B)$. *Esta expresión P(B/A) se lee: "Probabilidad de B sabiendo que ocurrió A". Entonces si es igual a la P(B) quiere decir que A no condiciono nada.*

Si dos o más sucesos son independientes, entonces la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades marginales de cada uno de ellos.
Para dos sucesos
$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$
Para *k* sucesos,
$$P(A_1A_2A_3...A_k)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)...P(A_k)$$

**Ejemplo 1**

En el departamento de reclamos de una empresa trabajan tres empleados, Andrés, Carlos y Juan. La probabilidad de que Andrés esté ausente un día cualquiera es 0,04, de que Carlos esté ausente un día cualquiera es 0,11 y de que Juan esté ausente un día cualquiera es 0,08. Calcular la probabilidad de que en un día cualquiera estén presente los tres.

Solución

Los sucesos aleatorios son
A: Suceso “Andrés está presente”
B: Suceso “Carlos está presente”
C: Suceso “Juan está presente”
Los datos que el problema nos brinda son:
$P(\overline{A}) = 0{,}04$ Es la probabilidad marginal de que Andrés no esté presente
$P(\overline{B}) = 0{,}11$ Es la probabilidad marginal de que Carlos no esté presente
$P(\overline{C}) = 0{,}08$ Es la probabilidad marginal de que Juan no esté presente

Hay que calcular la probabilidad conjunta de que ocurra el suceso A y que ocurra el suceso B y que ocurra C.

En el enunciado del problema no se hace ninguna referencia sobre las modificaciones de alguno de estos valores de probabilidad si previamente se verifica la presencia o ausencia de los otros empleados, por lo tanto, los sucesos son independientes.
De acuerdo a lo estudiado en el acápite correspondiente, la probabilidad conjunta de sucesos independientes es igual al producto de las probabilidades marginales de cada uno de ellos, luego,
$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
pero
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$$
$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}11 = 0{,}89$$
$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$$
Luego,
$$P(ABC) = 0{,}96 \cdot 0{,}89 \cdot 0{,}92 = 0{,}786048$$
La probabilidad de que en un día cualquiera estén presentes los tres es de 0,786048

## 1.12 Regla de la Multiplicación.

Dados dos sucesos A y B definidos en un espacio muestral E.

$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$ que también se puede expresar como

$$P(B \cap A) = P(B).P(A/B)$$

**Ejemplo 2:**

Una caja contiene 3 bolas rojas y 2 bolas azules. Sea A el suceso definido como: “la primera bola que se saca es azul” y el suceso B definido como: “la segunda bola que se saca es azul”. Las bolas no se regresan a la caja luego que se sacaron. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean azules?

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

P(A) = $\frac{2}{5}$ La probabilidad del segundo suceso B está condicionada, porque ya salió una bola azul, con lo cual esa probabilidad quedara planteada como:

P (A / B) = $\frac{1}{4}$ El 1 en el numerador es porque quedo solo una bola azul, y el 4 en el denominador es porque de 5 bolas en total, quedaron 4.

Luego: $P\ (A\ \cap B) = \frac{2}{5} . \frac{1}{4}$

## 1.13 Teoría de Conteo

Para obtener las probabilidades de los hechos complejos a menudo es difícil la enumeración de los casos y para facilitar la labor se suele recurrir a la teoría del conteo.

Esto se refiere a las formas en que pueden arreglarse los elementos de un conjunto.

Hay tres formas de hacerlo:

- **Variaciones**. Son los subgrupos de *n* objetos tomados de a 2 son $V_4^3 = 4 \cdot 3 = 12$
  Sean los objetos A, B, C y D. Las variaciones de estos objetos tomados de a 2 son:
  AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC
  La fórmula que se usa es:
  $$V_n^r = \frac{n!}{(\mathrm{n-r})!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1} = 12$$

- **Permutaciones.** Son los modos de clasificar todos los objetos de conjuntos o sea *n* objetos tomados de a *n*, lo que se indica con *factorial de n* ***En símbolos: n!***
  Por ejemplo: 5! =5.4.3.2.1=120
  3! =3.2.1=6
  La fórmula es:
  $P_n = n!$
  Si tenemos cuatro objetos A, B, C, D, las permutaciones $P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$. Así a continuación podemos ver los 24 grupos que se forman:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ABCD | BCDA | CDAB | DABC |
| ABDC | BCAD | CDBA | DACB |
| ACBD | BDAC | CBAD | DBAC |
| ACDB | BDCA | CBDA | DBCA |
| ADBC | BACD | CABD | DCBA |
| ADCB | BADC | CADB | DCAB |

- **Combinaciones.** Son las variaciones de *n* objetos tomados de a *r,* pero sin tener en cuenta el orden.
  Es el cociente entre las variaciones de *n* objetos tomados de a *r* y las permutaciones de *r*:

$$C_n^r = \frac{V_n^r}{P_r} = \frac{\frac{n!}{(\mathrm{n-r})!}}{r!} = \frac{n!}{(\mathrm{n-r})!.r!}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{(\mathrm{n-r})!.r!}$$

Para cuatro objetos tomados de a 2 tenemos

$$C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!.2!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = \frac{12}{2} = 6$$

Si los cuatro objetos son A, B, C, D, las combinaciones tomadas de a 2 serán: AB, AC, AD, BC, BD y CD.

El símbolo $C_n^r$ es decir combinaciones de *n* tomados de a *r*, se puede simbolizar por $\begin{pmatrix} r \\ n \end{pmatrix}$

## 1. Actividad para la Facilitación de los Aprendizajes

### Situación Problemática 8

Se saca una bolilla al azar de una urna que contiene 6 bolillas rojas, 4 bolillas blancas y 5 bolillas azules. Determine la probabilidad de que:

a- sea roja
b- sea blanca
c- sea azul
d- no sea roja
e- sea roja o blanca

### Situación Problemática 9

Se sacan dos cartas de un mazo común de 52. Halle la probabilidad de que ellas sean ambas ases si la primera carta: a) es reemplazada y b) no es reemplazada.

### Situación Problemática 10

Halle la probabilidad de conseguir un 4 por lo menos una vez en 2 tiradas de un dado sano.

### Situación Problemática 11

Cuántas son: a- las variaciones de 7 objetos tomados de a 3, b- las permutaciones de 7 objetos y c- las combinaciones de 7 objetos tomados de a 3.

## 1.14 Teorema de Bayes

El teorema de Bayes (o regla de Bayes) se utiliza para conocer la probabilidad de que un suceso ocurra cuando se conoce la probabilidad de otros sucesos (que deben cumplir con ciertos requisitos) y que de alguna manera condicionan al primero. En términos de Ciencias de la Computación, el teorema de Bayes ha devenido en modelos que se denominados de “Bayes Ingenuo” o “Naive Bayes” y que se han venido utilizando en la detección de posibles correos no deseados (spam) a partir de algunas palabras que aparecen en los mensajes.

Cabe señalar que, debido a las libertades y ciertas subjetividades en la aplicación y utilización de este teorema, se han desatado algunas polémicas a lo largo de la historia, llegando incluso a generar su propia rama de la estadística.

Desde un punto de vista práctico, este teorema recrea un proceso de ingeniería inversa respecto de lo estudiado sobre la probabilidad total. En el caso de la probabilidad total calculamos la probabilidad de que un determinado suceso ocurra, conociendo las probabilidades de todos sus antecedentes, y cuánto inciden cada uno de ellos sobre el suceso estudiado, mientras que, en Bayes, dado ese resultado, nos interesa saber qué probabilidad hay de que tenga como origen alguno de los antecedentes.

Aclararemos esto último con un ejemplo clásico antes de pasar a las fórmulas.

En una empresa contamos con tres máquinas (M1, M2 y M3) que fabrican un determinado tipo de sillas. Conocemos los porcentajes que cada máquina aporta al total de la producción y también la probabilidad de sillas defectuosas que produce cada máquina.

Si queremos calcular la probabilidad de que una silla salga defectuosa, utilizamos la probabilidad total. En cambio, si queremos conocer cuál es la probabilidad de que una silla defectuosa se haya fabricado con una determinada máquina, utilizaremos la regla de Bayes.

Entonces, partiendo de la fórmula para el cálculo de la probabilidad total de un suceso B

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

el teorema de Bayes nos propone encontrar:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$$

$P(A_i/B)$ se lee “Probabilidad de Ai sabiendo que se da B” o “Probabilidad de Ai conociendo B”, y recordemos que P(B) es la probabilidad total de un suceso B.

## Ejemplo 3:

Para el caso que mencionamos anteriormente de las máquinas M1, M2, M3 que producen sillas sabemos que los porcentajes de la fabricación total son respectivamente 50%, 30% y 20%, y que la probabilidad de que fabriquen una silla defectuosa son 0,1 para la máquina M1, 0,25 para la M2 y 0,3 para la M3.

Si tomamos una silla y resulta que es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la máquina M1?

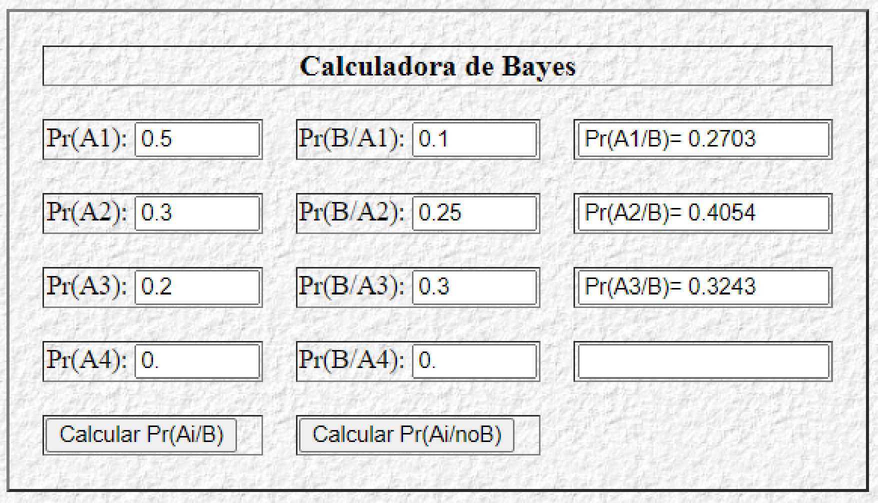
Entonces,

P (silla defectuosa) = P(M1). P (def en M1) + P(M2). P (def en M2) + P(M3). P (def en M3)

Llamando D al evento “silla defectuosa”

P(D) = 0,5. 0,1 + 0,3. 0,25 + 0,2. 0,3 = 0,185 (esta sería la probabilidad de que una silla se fabrique defectuosa en la fábrica)

Ahora bien, ¿cuál es la probabilidad de que una silla defectuosa provenga de la M1?




Utilizando la regla de Bayes

$$P(M1/D) = \frac{P(M1) \cdot P(D/M1)}{P(D)}$$

O sea

$P(M1/D) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}1}{0{,}185} = 0{,}2703$ lo cual quiere decir que hay un 27,03% de probabilidad de que provenga de la máquina 1.

Te invitamos a que pruebes realizar los cálculos para conocer qué probabilidad hay de que esa misma silla hubiera sido fabricada en la máquina 2, y en la máquina 3.

También te indicamos un enlace web en el que se pueden calcular esas probabilidades, aquí los resultados de utilizarlo: [https://www.ugr.es/~jsalinas/bayes.htm](https://www.ugr.es/~jsalinas/bayes.htm)

## 1.15 Variable Aleatoria Discreta

Si realizamos n pruebas o repeticiones de un experimento aleatorio, obtenemos un conjunto de n observaciones o resultados, que constituyen lo que se llama una muestra aleatoria de tamaño n. Este conjunto de resultados dará lugar a una tabla estadística en la cual a unos valores de la variable corresponden unas ciertas frecuencias. Así, si lanzamos un dado 10 veces, podríamos obtener la colección de resultados siguientes:

1, 5, 4, 2, 3, 4, 1, 3, 4, 5

La variable X que representa únicamente los n resultados de n realizaciones de un experimento aleatorio recibe el nombre de ***variable estadística***.
Si imaginamos que el experimento aleatorio se repite indefinidamente, la infinidad de resultados posibles da origen a la noción de ***variable aleatoria*** asociada al experimento. En el ejemplo que estamos considerando, si suponemos que se lanza el dado un número grande de veces, los resultados posibles serán 1, 2, 3, 4, 5, 6 y, además, las frecuencias relativas de cada resultado tienden a la probabilidad, que es $\frac{1}{6}$.
La variable, que representamos por $\xi$, y que toma los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, con probabilidad $\frac{1}{6}$ para cada valor, recibe el nombre de ***variable aleatoria***.
Podemos afirmar que una ***variable aleatoria*** es una variable cuyos valores dependen del resultado de un experimento aleatorio. Frecuentemente el resultado de un experimento se expresa de forma numérica y, en consecuencia, tal resultado es una variable aleatoria. Por ejemplo, observar la altura de un colectivo de individuos. De modo similar a las variables estadísticas, clasificamos las variables aleatorias en discretas o continuas según que el conjunto de valores que puedan tomar sea o no numerable.

**Variable aleatoria discreta**: Variable aleatoria cuantitativa que puede asumir un numero de valores que se pueden contar, que son numerables.

**Variable aleatoria continua:** Variable aleatoria cuantitativa que puede asumir un número incontable de valores.

## 1.16 Función de probabilidad para una variable aleatoria discreta.

En el capítulo anterior hablábamos de sucesos y eventos, y de sus probabilidades. Una función de probabilidad es una correspondencia que le asigna a los valores de una variable aleatoria probabilidades.

**Ejemplo 4:**

Consideremos el siguiente experimento: Se lanzan dos monedas y observamos el número de caras que salen. ¿Qué valores puede tomar el número de caras?
Si llamamos a la variable aleatoria discreta X, entonces X podrá ser 0, 1 o 2. Ahora hallemos según todo lo visto hasta ahora los valores de la probabilidad de los valores de la variable aleatoria. Es decir:

P(X=0); P(X=1) y P(X=2)
Que X=0 quiere decir que no salió ninguna cara, entonces es hallar la probabilidad de que haya salida las dos veces cecas. Luego:

P (X=0) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$

Si la variable aleatoria discreta X=1, entonces la debemos hallar la probabilidad de que haya salido una cara y luego ceca, pero también puede haber salido primero ceca y luego cara. Entonces:

P(X=1) = P (cara, ceca o ceca, cara) = P (cara, ceca) + P (ceca, cara) = .......

Completando los calculos y razonando de la misma manera, construimos la siguiente tabla, similar a la que armábamos para la frecuencia, pero con probabilidades

| **X** | **P(X)** |
|---|---|
| 0 | 0,25 |
| 1 | 0,50 |
| 2 | 0,25 |
| | $\sum p(x) = 1$ |

Toda función de probabilidad debe cumplir dos propiedades:

1) $0 \leq P(X) \leq 1$

2) $\sum p(x) = 1$

En el Ejemplo 4 se cumplen ambas propiedades.

Como habrán observado la tabla anterior es similar a las tablas que armábamos en la Unidad de Aprendizaje 1, donde en lugar de probabilidad aparecía frecuencia. Es evidente que existe una relación.
Supongamos que estamos en una clase presencial o virtual que tuviera 30 alumnos. Se les solicita de tarea que realicen el siguiente experimento: “cada alumno tira un dado 100 veces y anota el numero que sale” Para recolectar los datos más fáciles, armamos una tabla, de dos columnas como la anterior, donde en la primera columna escribimos X que serán los valores que puedo obtener al tirar mi dado, o sea los resultados de mi experimento, por lo tanto, el espacio muestral. Luego realizo una marca al lado de cada número que va saliendo.

| **X** | **frecuencia** |
|---|---|
| 1 | //////... |
| 2 | ///////////... |
| 3 | ///////... |
| 4 | //////... |
| 5 | ////////////.. |
| 6 | /////... |

Por supuesto todas las marquitas que realice deben sumar 100, porque tire el dado 100 veces. Es decir, n=100

Luego cuando nos volvemos a encontrar tendremos 30 tablas similares a la que represente y organizamos los resultados. ¿El número de veces que repetí el experimento será cuánto?

Esta entonces será nuestra **Situación Problemática 12** que resolveremos como trabajo colaborativo.

Venimos hablando de sucesos, eventos y de sus probabilidades. Precisamente, una distribución de probabilidad permite mostrar todos los posibles valores que pueden representarse como resultado de un experimento - si éste se llevara a cabo.

Es comun que al conjunto de los pares $(X_i\,; P(X_{i)})$ se lo denomine "Distribución de Probabilidad".

Verá usted que esta función nos brinda una poderosa herramienta para la proyección de resultados, puesto que se puede diseñar un espacio de acontecimientos futuros considerándolos como tendencias actuales de diversos fenómenos.

**Definición:**

Una ***distribución de probabilidad*** es la distribución de aquellas probabilidades que están asociadas con cada uno de los valores de una variable aleatoria.

Una ***función de probabilidad*** es una regla que asigna probabilidades a los valores de la variable aleatoria.

Cabe señalar que, de acuerdo a cómo sea la naturaleza de la variable que se está analizando, contaremos con distribuciones de variable discreta y distribuciones de variable continua. En las próximas clases, analizaremos algunas de ellas.