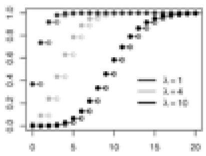
Probabilidad y Estadística 7

Actividades de Aprendizaje



Conceptos y definiciones de esta clase:

- Distribución de Poisson
- Distribución Hipergeométrica

1.1 La distribución de Poisson

Analizaremos a continuación otra distribución de variable aleatoria discreta que fue desarrollada por el matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1840). Se trata de una distribución límite de la distribución binomial, utilizada principalmente cuando un n muy grande se corresponde con un p muy pequeño, y se dificultan los cálculos en la distribución binomial. Es así como esta distribución se utiliza cuando se buscan éxitos en pruebas que son medidas por unidad. Habitualmente se habla de unidades de tiempo, por ejemplo:

- La cantidad de clientes que entran por hora.
- La cantidad de unidades vendidas por día, por semana, o por mes.

Pero también se utilizan con otras unidades, como por ejemplo:

- Cantidad de fallas por metro cuadrado en una impresión.
- Cantidad de semillas que germinaron por hectárea.

Es importante notar que no de manera formal, podemos hablar de una cantidad discreta en un intervalo continuo. Pensemos en los el primer ejemplo, la cantidad de clientes es discreta y el tiempo un continuo.

Para determinar la probabilidad de que ocurran x éxitos por unidad de tiempo, área, o lote, trabajaremos con la siguiente fórmula:

$$P(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

En donde:

x es la cantidad de ocurrencias de las que se desea conocer la probabilidad de que ocurran, y

λ es la tasa por unidad (de tiempo, área, etc.)

Ejemplo 1

Se cuenta con la información de que en un comercio, en promedio, se atienden durante la mañana unas 16 personas por hora. El encargado del local se pregunta cuál será la probabilidad de que se atiendan exactamente 10 personas durante la próxima hora.

La solución es:

$$P(x = 10) = \frac{e^{-16}16^{10}}{10!} = \frac{e^{-16}16^{10}}{10!} = 0.034$$

Nota importante para el alumno:

Deberá prestar atención al hecho de que, si está realizando las cuentas con una calculadora, se pueden cometer errores por aproximación o bien porque se excede el rango de la calculadora. Una alternativa es utilizar calculadora on-line como se pide en las actividades.

Continuando con el ejemplo anterior, en lugar de averiguar la probabilidad de un caso puntual (x=10), bien podríamos haber calculado una probabilidad acumulada. Por ejemplo, cual es la probabilidad de que, como mucho, ingresen 4 clientes en una hora.

En este caso, los cálculos serían:

$$P(x \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-16}16^{x}}{x!} = e^{-16}\left(\frac{16^0}{0!} + \frac{16^1}{1!} + \frac{16^2}{2!} + \frac{16^3}{3!} + \frac{16^4}{4!}\right) = 0.0004$$

Actividad para la Facilitación de los Aprendizajes

Situación Problemática 1

Busque en internet una calculadora online de la distribución de Poisson y verifique el resultado obtenido.

Links a temas de interés

- http://es.easycalculation.com/statistics/poisson-distribution.php
- http://es.ncalculators.com/statistics/poisson-distribution-calculadora.htm

1.2 La distribución hipergeométrica

Se trata de una distribución para una variable que presenta dos resultados y estos pueden caracterizares en cada uno de los individuos de la población a estudiar, que es un conjunto finito.

La manera en que se analiza la distribución es tomando una muestra sin reemplazo y con las mismas probabilidades sea cual fue el subconjunto seleccionado.

Llamaremos entonces:

N a la población finita,

M a la cantidad de éxitos en la población, y

n a la cantidad de individuos de la muestra.

Y se calcula con la siguiente fórmula:

$$h(x;n,M,N) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Ejemplo

Supongamos que estamos preparando una venta al por mayor que consta de lotes de 12 memorias por lote. Contamos con un total de 180 memorias de las que sabemos que 7 han salido defectuosas.

Así pues, nuestros datos son:

N= 180

M=7

n=12

Si queremos saber qué probabilidad tenemos de que en un lote cualquiera salgan 3 memorias falladas calculamos:

$$h(3;12{,}7{,}180) = \frac{\binom{7}{3}\binom{180-7}{12-3}}{\binom{180}{12}} = 0.0065$$

El resultado anterior significa que aproximadamente un 0.6% de los compradores podrán llegar a recibir tres unidades defectuosas en su lote. Y dado que con 180 unidades usted podrá armar y vender 15 lotes, esto significa que 15x0.0065=0.0975 compradores tendrán ese problema. Siendo un número tan bajo, se puede asumir el riesgo.

Supongamos que Usted está interesado en saber cuántos compradores vendrán a quejarse de que han recibido una memoria fallada en su lote y también cuántos quedaran satisfechos de que su lote resultó perfecto.

Bien, para esos casos tendrá que calcular $h(1;12{,}7{,}180)$ y $h(0;12{,}7{,}180)$.

Dejamos a su cargo el cálculo, anticipando que los resultados serán 0.317 y 0.611

Nota:

Si $\mathbf{n}<\mathbf{M}$ el mayor valor para $\mathbf{x}$ que puede considerarse es $\mathbf{n}$ (la cantidad de pruebas exitosas en la muestra no puede superar la cantidad total de la muestra).

Si $\mathbf{n}>\mathbf{M}$, el mayor valor a considerar para $\mathbf{x}$ es $\mathbf{M}$ (la cantidad de pruebas exitosas en la muestra no puede ser mayor que la cantidad de éxitos en la población).

Situación Problemática 2

Deduzca cuántos compradores representan los valores recién calculados.

Situación Problemática 3

Arme una tabla indicando en la primera columna la cantidad de posibles memorias falladas de un lote (de 0 a 7), en la segunda columna las probabilidades calculadas mediante una distribución hipergeométrica y en la tercera columna la cantidad de compradores que esa probabilidad representa.

Totalice las tres columnas. ¿Qué es lo que observa?

Situación Problemática 4

Busque en internet una calculadora online de la distribución hipergeométrica y verifique los resultados obtenidos.

Links a temas de interés

- http://stattrek.com/online-calculator/hypergeometric.aspx
- http://es.easycalculation.com/statistics/hypergeometric-distribution.php

Situación Problemática 5

Obtenga sus conclusiones de lo que ocurrirá cuando n, M y x coincidan en una distribución hipergeométrica.