

Tres Teoremas : Fourier ~Nyquist ~Shannon

Este capítulo fue realizado en conjunto con el Ing. Rubén López

Introducción:

Para comprender las bases teóricas en las que se apoya la transmisión de datos debemos buscar herramientas de análisis que nos permitan sacar conclusiones razonadas de los fenómenos físicos que participan en las comunicaciones.

Tres puntos claves para ello son los trabajos de **Fourier**, **Nyquist** y **Shannon**.

No es objetivo de este apunte un detallado estudio de los teoremas anteriores, sino llegar a la comprensión y manejo de sus principios con un mínimo de complicaciones matemáticas pero sin perder de vista los fundamentos físicos.

Varios de los conceptos básicos fueron ya explicados pero se repiten aquí para dar mayor independencia al texto.

1) Algunos conceptos iniciales

Sin ánimo de generar rigurosas definiciones que sean válidas dentro de todo el amplio rango de la física y la tecnología, y a solo efecto que nos ocupa, adoptaremos los siguientes conceptos

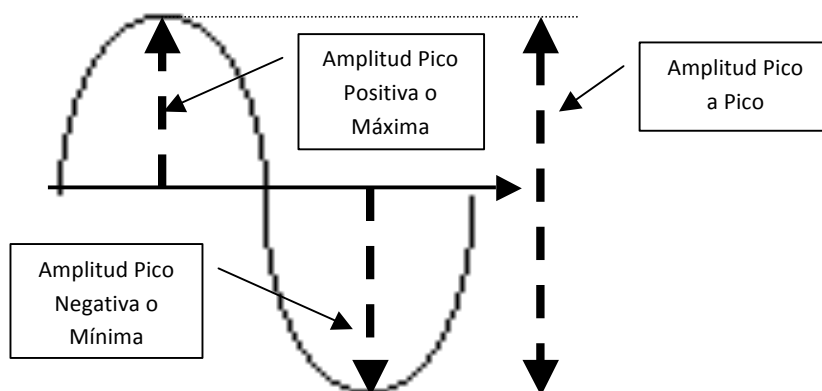
Señal: son los sucesivos valores que van adoptando una variable física (como la tensión, corriente, etc.) a medida que transcurre el tiempo



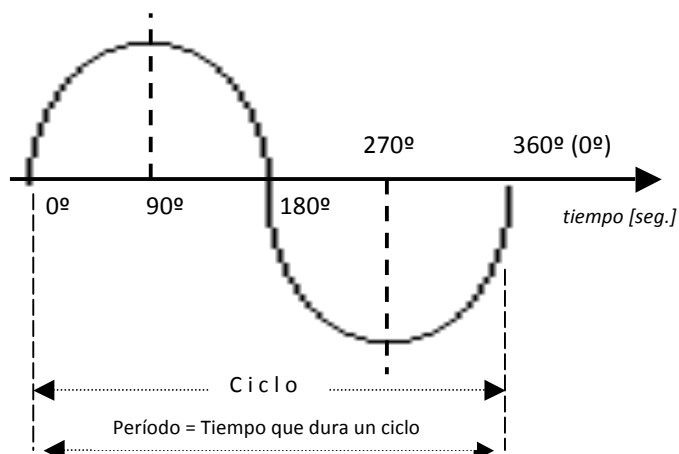
Amplitud: es el valor que adopta una variable física en un determinado instante. Se destacan:

Amplitud Pico: es el valor máximo o mínimo que adopta una señal

Amplitud pico a pico: es la diferencia entre el valor máximo y mínimo que tiene una señal



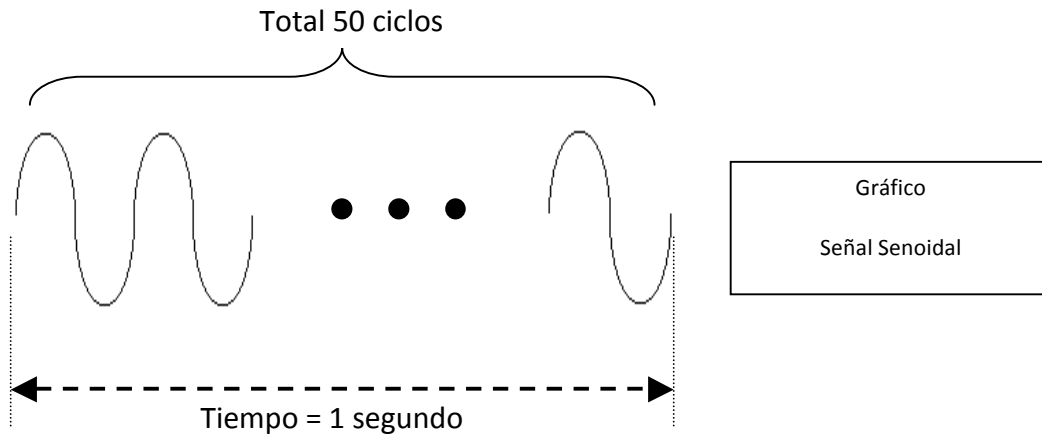
Ciclo: podremos decir que se trata de la secuencia ordena de puntos que representan los sucesivos e infinitos valores que adopta una señal hasta el momento en el cual se vuelve a repetir la misma secuencia.



Período: es el tiempo que tarda en transcurrir un ciclo

Frecuencia: es la cantidad de veces que se repite un ciclo durante un segundo (recordemos que el segundo es la unidad de tiempo del sistema métrico MKS)

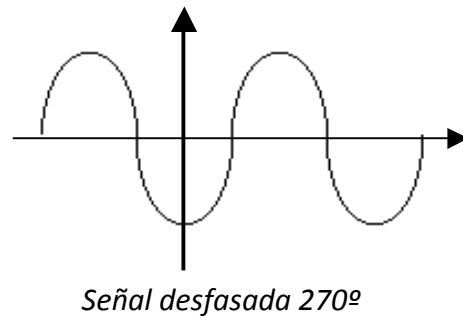
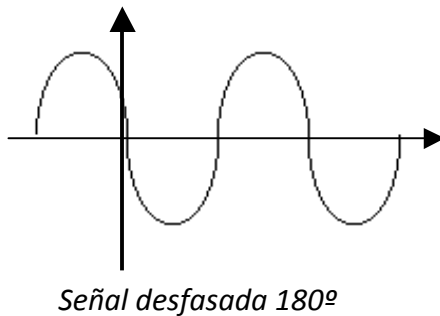
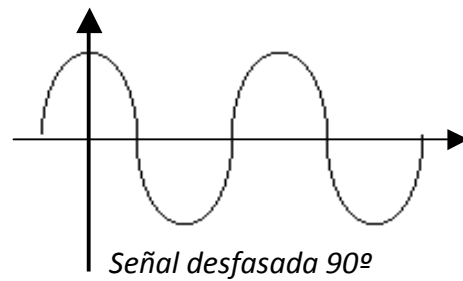
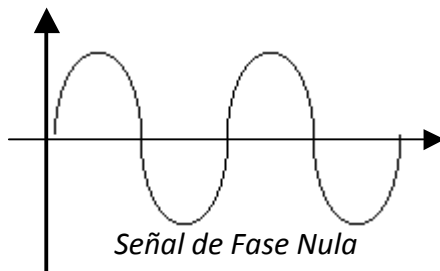
Ejemplo:



Fase: es la diferencia entre el momento que se inicia la señal y momento en que la misma cruza el centro de coordenadas, medido en grados "eléctricos". Se destacan los siguientes casos:

- a) Fase Nula (Fase Cero o Señal en fase)*
- b) 90 (Señal adelantada 90)*
- c) 180 (Señal desfasada 180)*

d) 270 (Señal retrasada 90)



Velocidad de Propagación: Es la que tiene una señal de una determinada frecuencia que recorre un medio físico real, se mide en m/s. La expresión que los vincula es

$$v = \lambda f$$

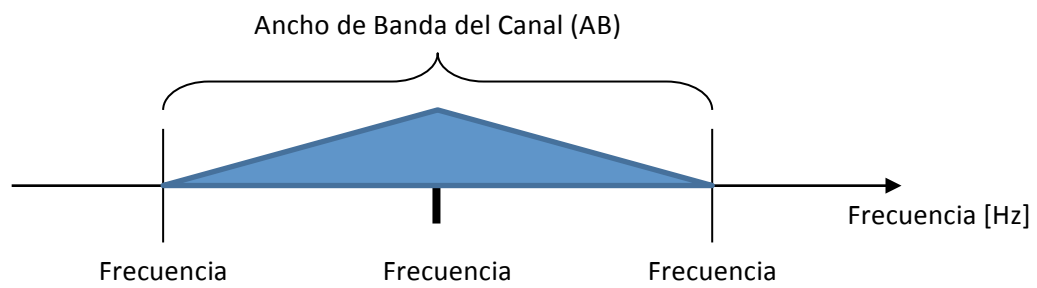
donde v es la velocidad de propagación de la señal en el medio por el cual viaja en m/s
 λ (lambda) es la longitud de onda de la señal medida en metros
 f es la frecuencia en Hertz (recordar que Hertz = 1/segundo)

Longitud de onda: íntimamente ligado al concepto anterior surge de despejar λ de la expresión y físicamente nos da idea de cuál es la longitud "eléctrica" correspondiente a una señal de una frecuencia determinada. Mediante este concepto podremos calcular teniendo en cuenta la frecuencia de una señal, cual es el espacio lineal que ocupa un ciclo

Ancho de Banda: es la diferencia entre la máxima y la mínima frecuencia que puede pasar por un canal de comunicaciones, medida en Hertz.

$$BW = AB = F_{\max} - F_{\min}$$

donde F_{\max} nos indica el valor de la máxima frecuencia que puede pasar por el canal mientras que F_{\min} nos dará el límite mínimo de la misma



Un punto notable, que se puede apreciar en la figura, es la Frecuencia Media o Mitad, su valor se calcula para un AB como la media aritmética entre la frecuencia máxima y la mínima, o sea:

$$F_{\text{media}} = (F_{\text{max}} - F_{\text{min}}) / 2$$

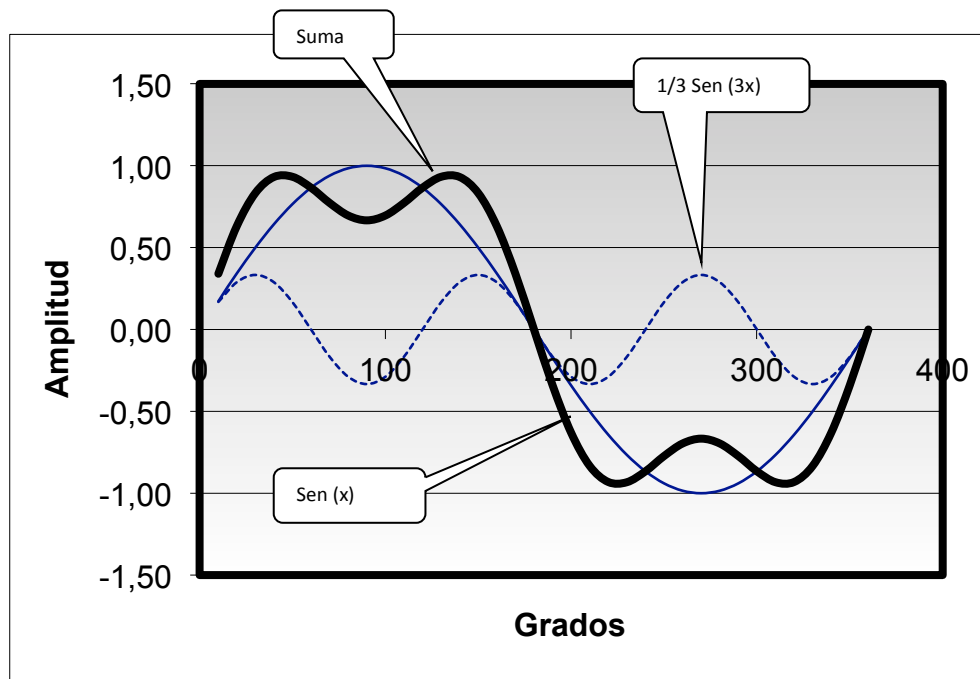
2) Fourier en el dominio temporal

Mediante la aplicación de la Serie de Fourier, podremos comprender como una señal de onda cuadrada está compuesta matemática y físicamente por la sumatoria de infinitas ondas sinodales; y que frente a la necesidad de la transmisión digital de señales por un canal de comunicaciones, la realidad física del medio utilizado nos pondrá en la práctica limitaciones con respecto a la cantidad de estas “infinitas” señales sinodales que se puedan transportar.

Encararemos una explicación gráfica.

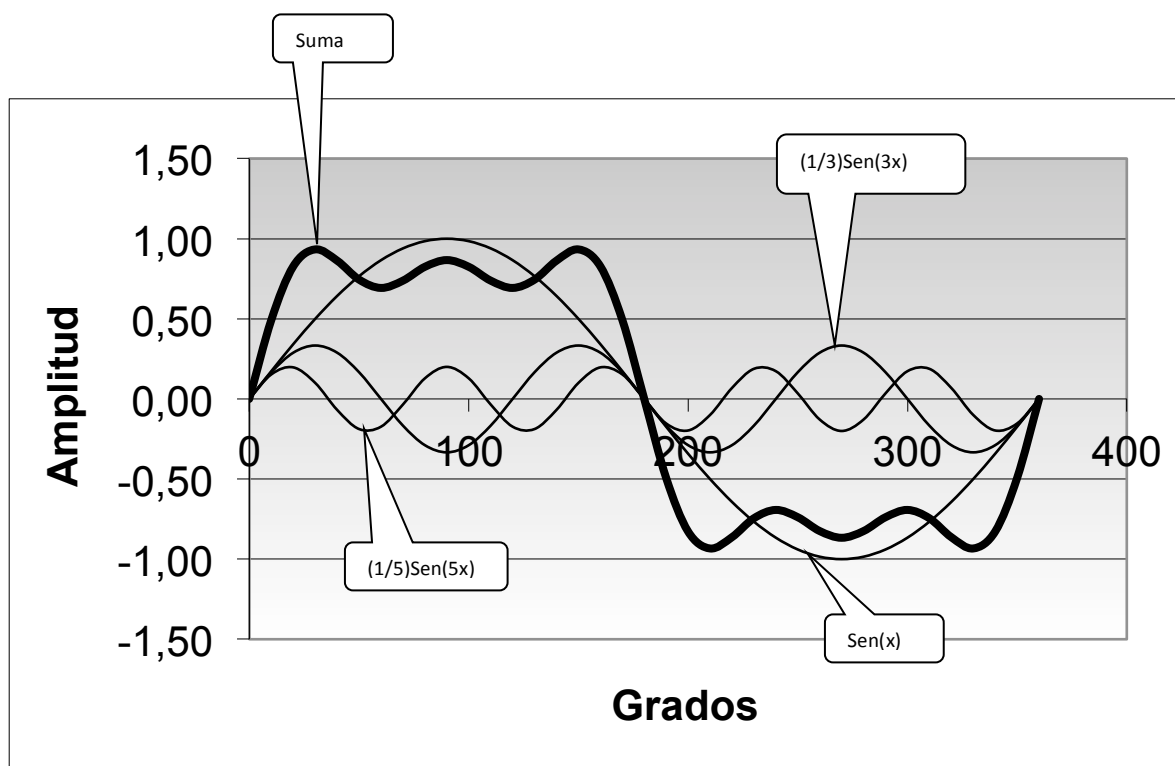
- 2.1) Sean
- a) $\text{Sen}(x)$
 - b) $\frac{1}{3} \text{Sen}(3x)$
 - c) $\text{Sen}(x) + \frac{1}{3} \text{Sen}(3x)$

Las gráficas de las señales trigonométricas anteriores en el dominio temporal resultarán:



- 2.2) Y sea también
- a) $\text{Sen}(x)$
 - b) $\frac{1}{3} \text{Sen}(3x)$
 - c) $\frac{1}{5} \text{Sen}(5x)$
 - d) $\text{Sen}(x) + \frac{1}{3} \text{sen}(3x) + \frac{1}{5} \text{Sen}(5x)$

al graficarlas tendremos:



En las figuras anteriores notamos que a medida que se van agregando componentes (dos en el primer caso 2.1.c y tres en el segundo 2.2.d) la sumatoria de la señal cada vez se va pareciendo más a una onda cuadrada. Fourier demostró en un Corolario de su teorema que en el límite, cuando la cantidad de componentes sumados sean infinitos, la onda será exactamente una onda cuadrada. Dichos componentes matemáticamente se los designa **Términos**, pero en el ámbito de las comunicaciones se los llama **Armónicas** mientras que al primero suele llamárselo **Fundamental**.

En función de lo dicho, podemos concluir diciendo:

Una forma de onda cuadrada está formada por la sumatoria de infinitas ondas seno.

En forma más general se puede decir que *toda forma de onda periódica está compuesta por la suma de infinitos senos y cosenos*

$$g(t) = 1/2 c + \sum a_n \text{sen}(\omega t) + \sum b_n \cos(\omega t)$$

donde:

a_n y b_n son las amplitudes de las armónicas
 ω (omega) = $2\pi f$ con $f = 1/T$, siendo " f " la frecuencia de la señal fundamental y T el período o tiempo que tarda en transcurrir un ciclo.

Para el caso particular de una onda cuadrada solo se usan las armónicas impares, tal como se puede apreciar del último ejemplo analizado (1.2.d), siendo por lo tanto b_n igual a cero.

Como consecuencia de lo expresado es muy importante interpretar que cuanto mayor sea el ancho de banda de un canal de comunicaciones, es decir cuanto mayor sean la cantidad de armónicas que puedan atravesar dicho canal, resultará menor la diferencia entre la onda cuadrada que se inyecta en la entrada del medio y la obtenida de sumar todas las armónicas que aparece en el otro extremo del mismo. Recordemos que en teoría deberán ser infinitas ondas sinodales las recibidas para que la onda cuadrada resultante sea perfecta.

Todo lo analizado hasta aquí corresponde al tratamiento en el “dominio” temporal de las señales (ver que en los gráficos el eje horizontal pertenece al tiempo y por supuesto se mide en segundos o múltiplos/submúltiplos de este)

3) Fourier en el dominio de la frecuencia

Toda vez que hablemos del tiempo estamos haciendo directa referencia también a la frecuencia, ya que ambas se relacionan por medio de la expresión:

$$\text{Frecuencia} = 1 / \text{Tiempo}$$

$$\text{donde [Frecuencia]} = \text{Herz y [T]} = \text{Segundos}$$

Si en vez de representar las señales en función del tiempo - tal como hemos hecho en el ítem anterior - ahora hacemos la gráfica referida a la frecuencia (o sea nuestro eje horizontal deja de representar el tiempo y pasa a indicarnos la frecuencia de las distintas componentes que viajan por el canal), obtendremos la representación de las señales en el denominado “Espectro de Frecuencias”.

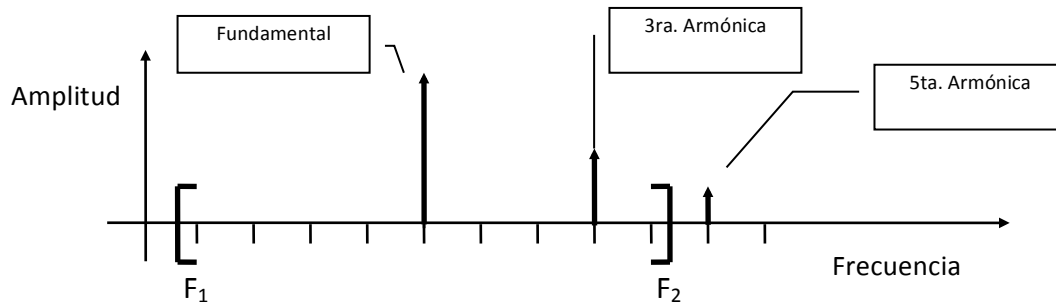
Si bien en un medio físico, un grupo de señales sinodales **siempre** se representa en el dominio temporal como la resultante de la suma de todas ellas (tal como expresa Fourier), su análisis resulta dificultoso y complicado. A fin de evitar estas circunstancias se realiza la “**transformación**” del *dominio temporal* al *dominio de las frecuencias* logrando simplificar notablemente el análisis relacionado con la propagación de la información dentro de los canales de comunicaciones.

De esta forma, en un gráfico correspondiente al dominio de las frecuencias, representaremos en el eje vertical la amplitud de las armónicas (medido en unidades de tensión o corriente) y en el eje horizontal sus respectivas frecuencias (medidas en Hertz). Como dijimos a este gráfico se lo denomina “**Espectro de Frecuencias**” y para un determinado medio real bajo análisis (por ejemplo coaxial, fibra, etc.) tendrá como límite tecnológico (cotas), una mínima y una máxima frecuencia que el canal permitirá pasar (técnicamente se denomina **Ancho de Banda** y típicamente se lo representa por las siglas **AB**)

Veamos una representación gráfica en el dominio de las frecuencias, para un canal cuyo Ancho de Banda es $AB = F_2 - F_1$ y en el cual se transporta una señal representada por la siguiente expresión:

$$x = \text{sen}(x) + 1/3 \text{sen}(3x) + 1/5 \text{sen}(5x) \text{ (ya utilizada en 1.2.d)}$$

La gráfica de su *Espectro de Frecuencia*, de acuerdo a lo visto, será:



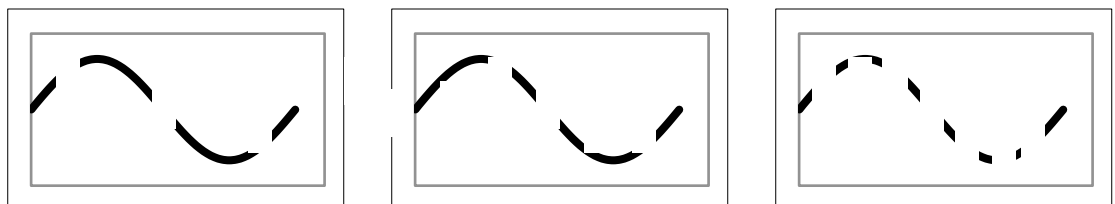
Se han tomado arbitrariamente valores para F_2 y F_1 para este canal, de forma tal que se pueda ver claramente como solo es posible transportar la frecuencia fundamental y su 3ra. armónica, sin embargo se comprenderá que no será transportada la 5ta. armónica al quedar fuera del AB; generándose de esta forma una diferencia entre la señal de entrada y la de salida donde aparece una de las clásicas limitaciones tecnológicas que provocan los medios físico en los canales de comunicación.

4) Nyquist (Muestreo de señales)

Cuando se diseña un canal de comunicaciones, dentro de los objetivos primordiales estará el hecho de obtener la máxima transferencia de información (obviamente sin error) por unidad de tiempo, aspecto con el que se busca optimizar al máximo el rendimiento del medio físico.

Una de las formas - la que nos ocupa en este caso - será procurando enviar solamente la mínima información "eléctrica" necesaria (eliminando todo contenido irrelevante e innecesario), que posteriormente mediante un proceso tecnológico (con basamento matemático) del lado del receptor pueda reconstruir la señal original para permitir interpretar la información. El resultado de este proceso, evidentemente es un menor uso del canal por parte de la señal transmitida.

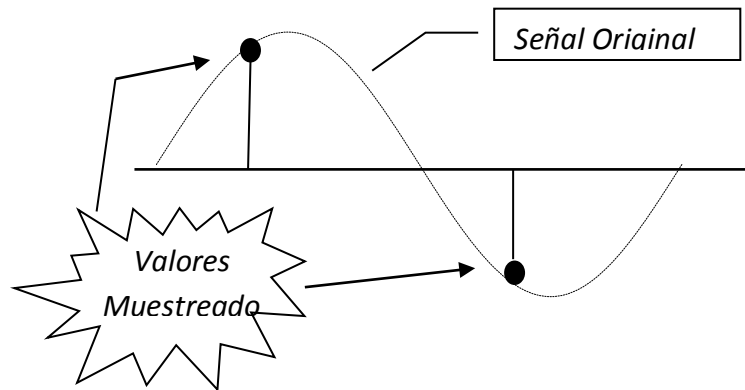
Veamos gráficamente estos conceptos utilizando una onda sinodal como la dibujada, a la que se le borran tramos, tal como se aprecia en las siguientes figuras.



Es indudable que cada vez se va borrando mayor cantidad de información, pero siempre podemos seguir reconociendo la imagen original. Esto nos lleva a plantear la siguiente pregunta ¿Hasta que punto podemos eliminar tramos de la señal sin perder la posibilidad de reconstruirla ?

Nyquist, en 1924, demostró que no es necesario enviar todo un ciclo de una señal (una sucesión de infinitos puntos que caracterizan a toda señal analógica) para que del lado del receptor pueda ser interpretada, sino que basta con solo **dos muestras por ciclo** para que aún se pueda recuperar la señal original.

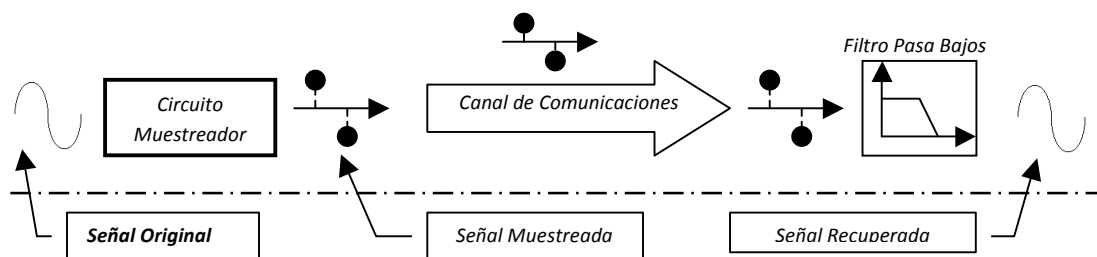
Veamos la siguiente figura:



En ella se puede apreciar que si conocemos la frecuencia, nos bastará con los 2 puntos indicados (los muestreados) para “a simple vista” imaginarnos como mínimo una gráfica como la indicada por el trazo punteado. El resto, corresponderá a un filtro pasa bajos que realizara el efecto de “conformación” (reconstrucción) de señal para obtener la señal de origen.

En forma más precisa : *Toda señal limitada en banda (debido a que se encuentra acotada por el AB del canal) se puede reconstruir completamente a partir de las muestras tomadas de misma, siempre que la velocidad del muestreo se realice como mínimo al doble de la máxima frecuencia de la señal. A esta velocidad de muestreo se la denomina “Frecuencia de Nyquist”.*

Esto se hace particularmente visible, si la señal recibida (la muestreada) se aplica a un filtro pasabajos ideal, elemento tecnológico que - como ya se dijo - será el encargado de reconstruir la señal recibida para obtener la original.



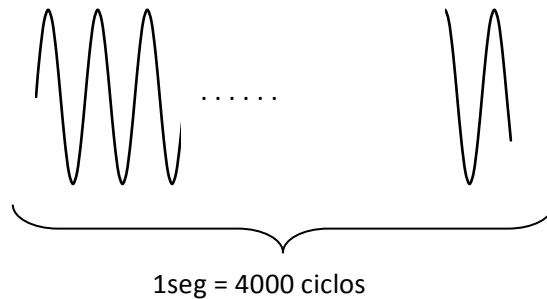
Tecnología de las Comunicaciones

Este procedimiento será tema de un TP (TP #01)

5) Nyquist aplicado a un canal telefónico

El ancho de banda asignado a un canal telefónico es de 4KHz (supongamos para simplificar que el canal está completamente disponible para telefonía desde 0Hz hasta 4000Hz).

La máxima señal permitida será entonces de 4000 Hz, es decir 4000 ciclos por segundos (en un segundo "entran" 4000 ciclos), según Nyquist si cada ciclo tiene dos muestras se tendrán entonces **8000 muestras por segundo** (Notar que es justamente el doble de la máxima frecuencia).



Si codifiquemos la amplitud cada una de las **8000 muestras por segundo** con **8 bits**, se obtendrá que la cantidad de información a transmitir por el canal es **64000 bps** (bit por segundo) o sea la velocidad de un canal telefónico con codificación binaria.

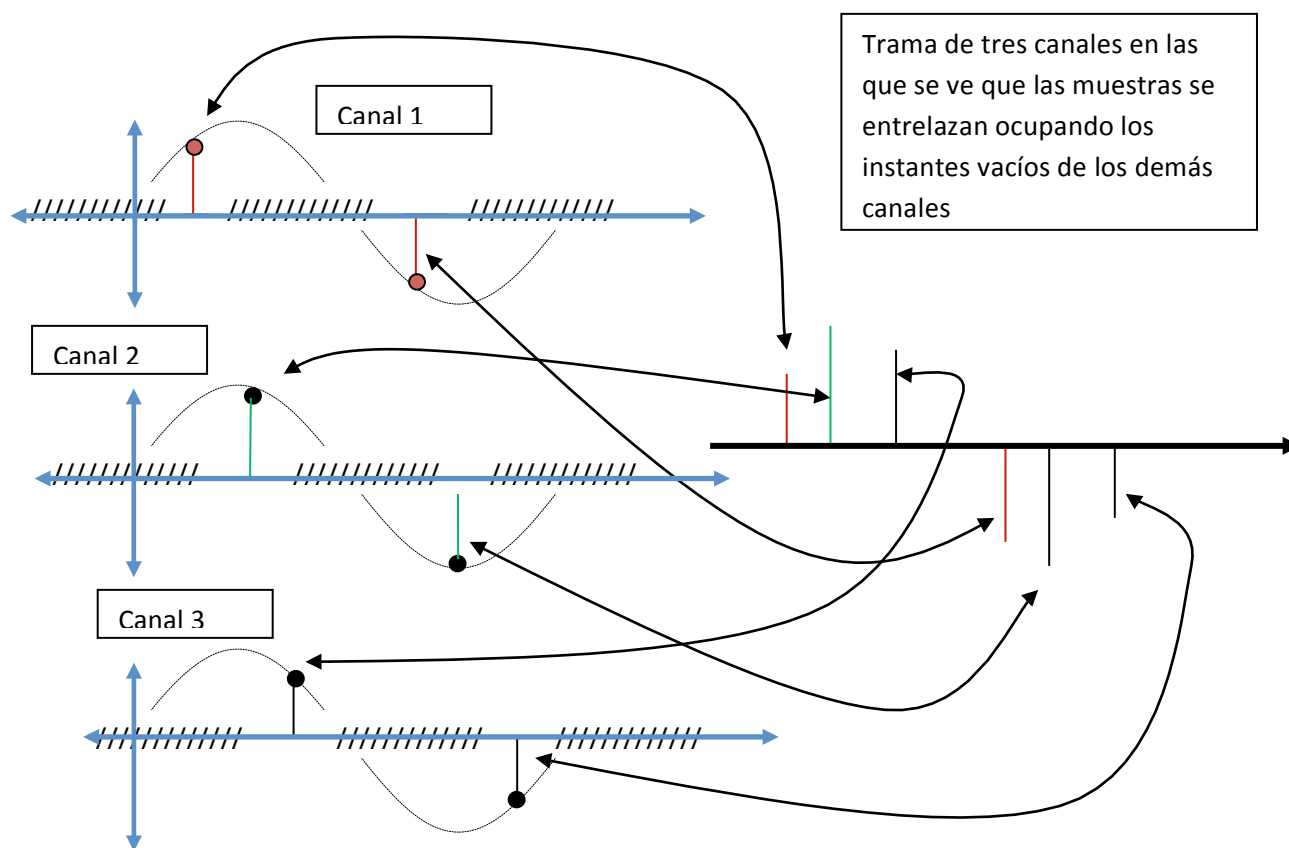
En cambio si usáramos la norma americana donde del Byte a transmitir se destina 1 bit para control nos quedarían solo 7/8 de Byte para datos por lo cual la velocidad será $(7/8) 64 \text{ Kbps} = 56 \text{ Kbps}$. O sea del canal de 64Kbps para datos se utilizan 56 Kbps y los 8Kbps restantes se utilizan para "control".

6) Armado de una Trama ("Entramado de Datos")

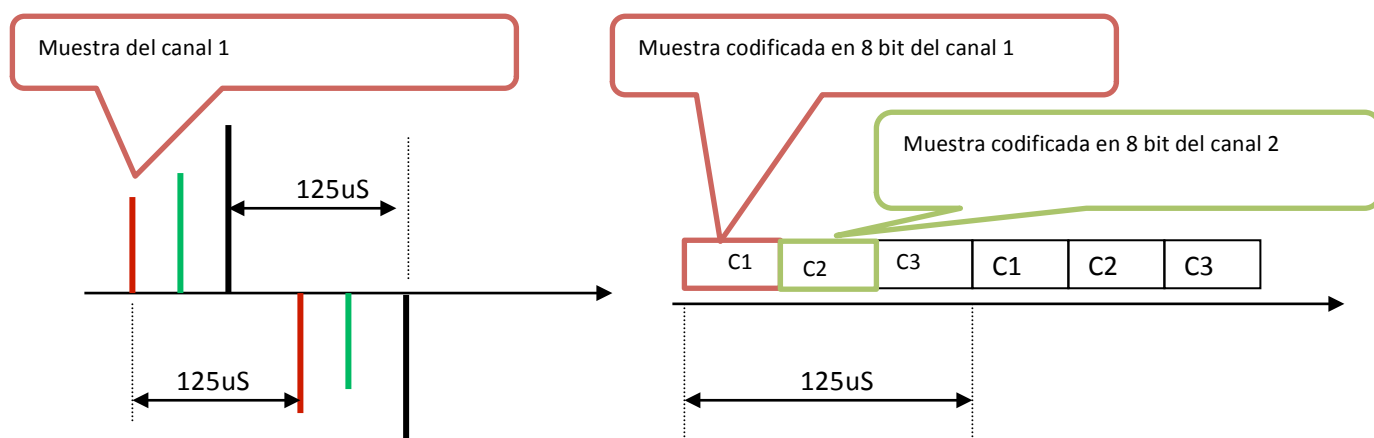
Una Trama nos define como los datos y la información de control se acomodan al flujo de bits que se transmite por un canal de comunicaciones, es decir que una trama nos muestra la definición de la estructura de los datos que son enviados a través de un medio de comunicaciones utilizando una transmisión serie.

Tal como se dijo, no es necesario tener la señal completa sino que basta con al menos dos muestras por ciclo, esto nos deja mucho tiempo libre (véase // en la figura) que puede usarse para transmitir otra señal con la única precaución de muestrearla en instantes distintos de las anteriores).

En el dibujo siguiente, cada canal es muestreado dos veces por ciclo de acuerdo a lo expuesto por Nyquist, cada muestra es luego llevada a la "proto_trama" en donde están las tramas de los demás canales sin solaparse, de forma tal que sea posible luego volver a armar los canales individuales



Considerando siempre canales telefónicos (4KHz), la distancia entre dos muestras será de **125 μ S** (0.125ms) pues el periodo es de $1/4000 = 0.250$ ms y debe haber dos muestras en ese intervalo, esto nos lleva a que los datos codificados deberán estar también a 125 μ S uno de otro y entre ellos se intercalarán los demás canales como se muestra en la siguiente figura:



Partamos de las muestras entrelazadas del dibujo anterior (a la izquierda en el dibujo anterior) y armemos a la derecha la trama correspondiente a este sistema de tres canales, donde cada rectángulo (C1, C2, C3) de la figura es la codificación PCM a 8 BIT de la muestra correspondiente al canal de sonido de una comunicación telefónica.

Un caso real es cuando se arman tramas de 32 canales, ahí estamos en presencia de lo que se conoce como líneas E1.

7) Shannon (Canales con Ruido aleatorio)

Todo canal de comunicaciones se verá afectado por ruido electromagnético, limitándose de esta forma la capacidad de un canal para transmitir información.

Es lógico pensar que a medida que aumenta el ruido (N) de un canal, disminuye su capacidad de transmisión, ya que el mismo estará usando el espacio del canal que corresponde a la información. Una forma de ponderar esta circunstancia es cuantificar la relación S/N es decir la relación señal a ruido, también conocida como NSR.

La ecuación que los relaciona, corresponde a la primera ley de **Shannon** y dice:

$$C = BW \log_2 (1 + S/N)$$

donde: **C** es la capacidad máxima del canal en **bps**

BW es el ancho de banda del canal medido en **Hertz**

S/N representa la relación señal / ruido medido en **veces**

Por ejemplo si supongamos un canal telefónico donde **B** = 4000Hz; **S/N** = 1000 se tendrá que 40000bps es la máxima capacidad posible de este canal.

Si bien de la expresión se puede inferir que aumentando la potencia de la Señal transmitida (S) y el Ancho de Banda utilizable (B) o disminuyendo la potencia de Ruido (N) se mejoraría la capacidad del canal, estas soluciones podrían resultar en la mayoría de los casos físicamente irrealizables o económicamente prohibitivas, siendo su análisis particular del diseño de cada canal para un determinado medio físico y el tipo de transmisión utilizada.

Nota: El trabajo de Shannon (1948) es una ampliación del realizado por Nyquist (1924) donde considera un canal que puede ser afectado por ruido de tipo aleatorio.

8) Ejercicios

Usando algún programa con capacidad de graficación (por ejemplo una planilla de cálculo)

1) Graficar

$$Y_1(x) = \text{Sen}(x) + (1/3)\text{Sen}(3x) + (1/5)\text{Sen}(5x) + (1/7)\text{Sen}(7x) + (1/9)\text{Sen}(9x) + (1/11)\text{Sen}(11x).$$

Agregar armónicas y comprobar las diferencias

2) Graficar

$$Y_2(x) = \text{Sen}(x) - (1/3)\text{Cos}(3x) + (1/5)\text{Sen}(5x) - (1/7)\text{Cos}(7x) + (1/9)\text{Sen}(9x) - (1/11)\text{Cos}(11x).$$

3) Suponer el siguiente sistema formado por dos generadores de señales y un sumador. El generador G1 genera una onda Seno de amplitud 1 y período 2ms y el G2 una onda Coseno de amplitud 2 y periodo 1ms. Se pide

- a) Graficar las salidas de G1 y G2 en función del tiempo
- b) Graficar las salidas de G1 y G2 en función de la frecuencia

4) La señal del punto anterior pasa por un filtro pasa bajos de frecuencia de corte 600 Hz . Dibujar la señal en su salida tanto en función del tiempo como de la frecuencia.

5) Suponga que los canales telefónicos se muestren a 10 bits en lugar de a 8 ¿ Cual sería su velocidad ?

6) Cual deberá ser el ancho de banda de un canal con SNR = 20dB para que su capacidad sea 64Kbps. NOTA. recordar que para poder aplicar la fórmula dada SNR debe estar especificada en veces, no en Decibels

Aplicaciones del Teorema de Shannon a las comunicaciones celulares LTE.

Como ya se vio, el Teorema de Shannon nos da la relación entre la capacidad de un canal, el ancho de banda del mismo y su relación señal a ruido.

La ecuación toma la forma:

$$C = BW \log_2 (1 + S/N)$$

Para el caso de las comunicaciones de radio es interesante dar otra forma a la ecuación, considerando :

$$S = E_b \cdot R$$

- La energía recibida por bit de información : E_b
- La tasa de información : R

$$N = N_0 \cdot BW$$

- La densidad espectral de potencia de ruido N_0 en W/Hz
- El Ancho de Banda BW en Hz

Y tomando en cuenta que la tasa de bits nunca puede ser mayor que la capacidad máxima del canal nos queda:

$$R \leq C = BW \log_2(1+S/N) = BW \log_2 (1 + E_b/N_0 \cdot R/BW)$$

En los enlaces de radio se usa el concepto de Utilización del ancho de Banda

$$\Upsilon = R/BW$$

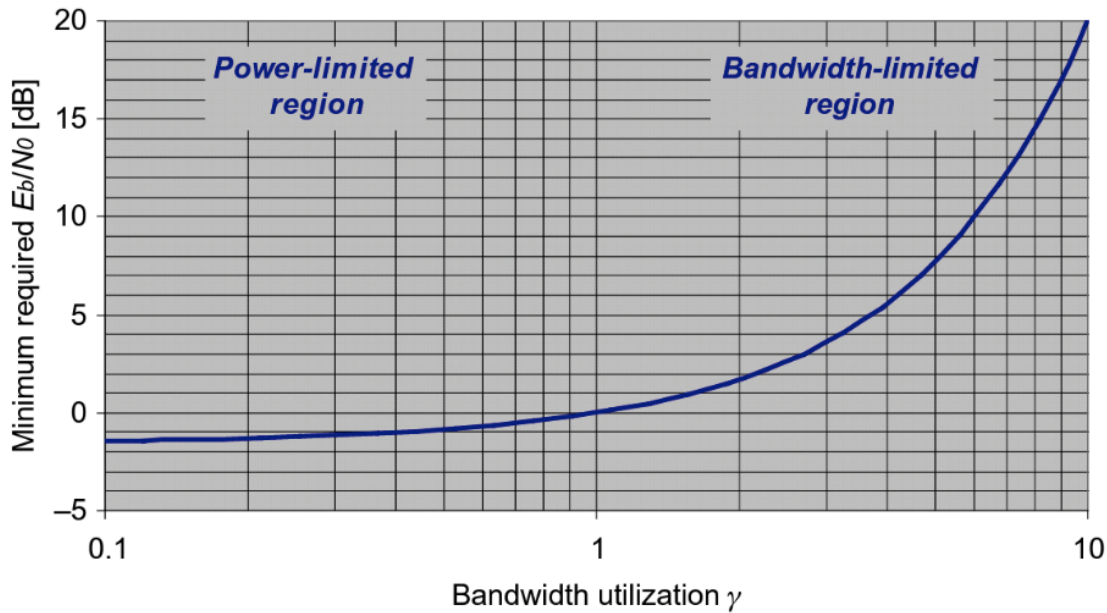
Esto nos permite averiguar cual es la mínima relación E_b/N_0 para una dada utilización Υ

Operando se llega a que:

$$\text{Min} (E_b / E_o) = (2^{\Upsilon} - 1) / \Upsilon$$

Es importante que el estudiante pueda llegar a este resultado.

Una forma más sencilla de analizarlo es mediante la graficación.



Claramente se ven dos zonas con comportamiento distintos

I) Para valores bajos de γ

Dado que γ es la relación entre la tasa de información y el ancho de banda, en esta parte nos encontramos en un sistema "poco exigido" donde se tiene una relación E_b / N_0 relativamente constante independientemente de γ .

La tasa de transmisión está limitada entonces por la potencia de ruido

II) Para valores altos de γ

En este caso el mínimo requerido de E_b/N_0 aumente rápidamente con γ , Aquí el limitante es el ancho de banda.

Altas tasas de transmisión es escenarios ruidosos.

Este suele ser un caso típico de las comunicaciones de telefonía celular y dado que LTE busca muy altas tasas de transmisión es interesante analizarlo.

En estos escenarios la tasa de transmisión está limitada por la potencia de la señal recibida (realmente por la relación potencia de señal a potencia de ruido). Mayor velocidad de la tasa de bits requiera mayor potencia de señal.

Como dato de diseño y para tener un sistema eficiente se suele pensar en un ancho de banda de al menos el mismo orden de la tasa de transmisión.

Soluciones posibles para aumentar la velocidad:

- Reducir la distancia entre el transmisor y el receptor, esto es reducir el tamaño de las celdas de comunicación o tener altas tasas solo en la zona central de la celda.
- Usar múltiples antenas transmisoras enfocadas en la dirección del receptor
- Disminuir la señal de ruido usando un Hardware de mejores prestaciones
- Usar sistemas de modulación de mayor orden (se estudiarán los sistemas de modulación más adelante Aprox clase 6).
- Usar mayor ancho de banda, aunque se trata de un recurso escaso y además de ser caro aumenta la complejidad del equipamiento.
- Usar OFDM donde un gran número de subportadoras se emplean para lograr una alta tasa de transmisión.