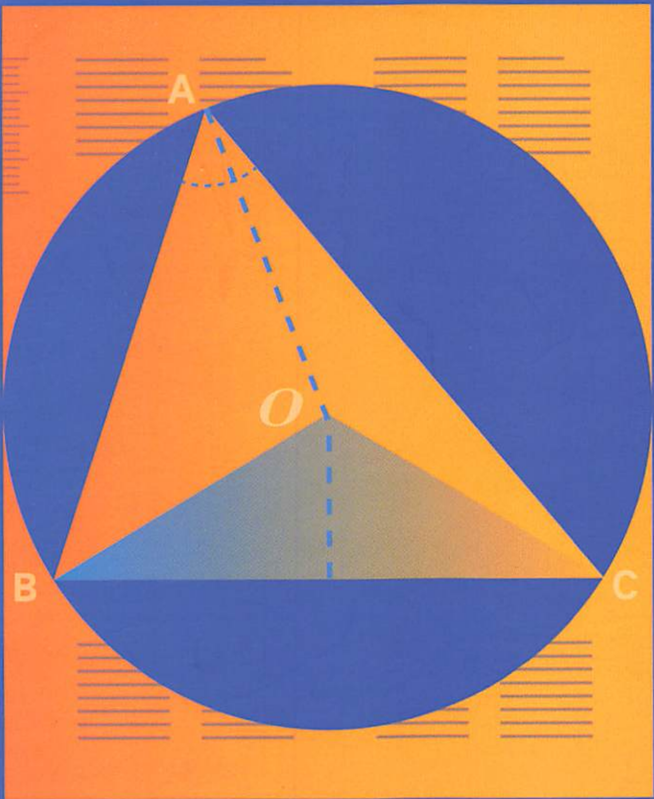
有道考神

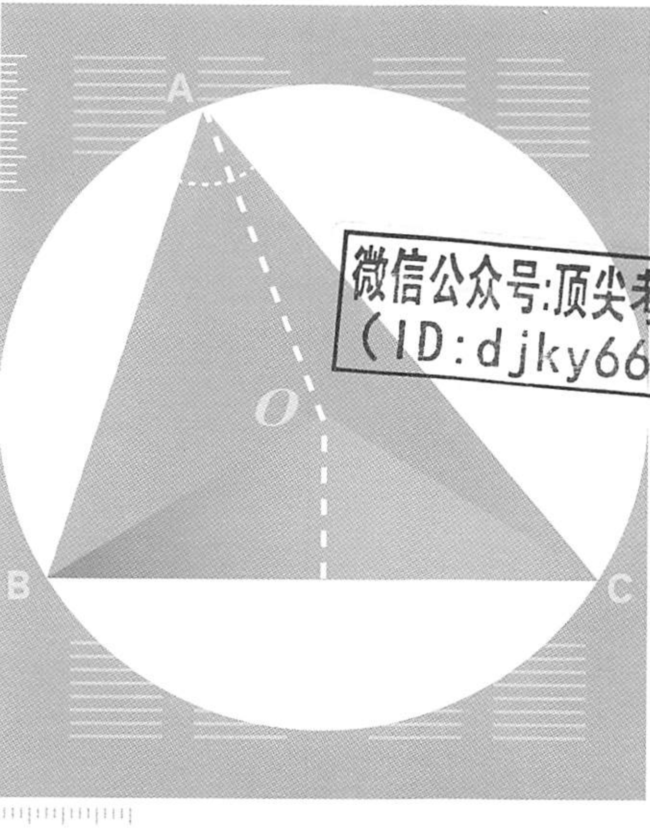
考研数学
常用公式手册



有道考神研发中心 编著

考研数学常用公式手册

内部讲义 仅供考神学员内部使用



有道考神研发中心 编著

目　录

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

一、基本初等函数及其性质

1.幂函数

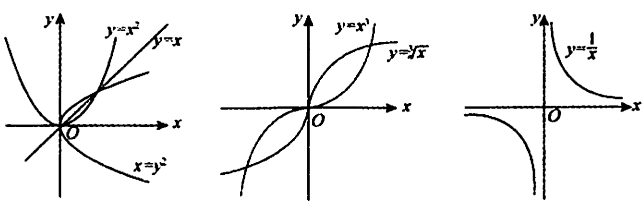
(1)函数形式：$y=x^{\mu}\left(\mu\in R\right)$.

(2)计算性质：

$$y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x},y=x^{-n}=\frac{1}{x^{n}},y=x^{n}\cdot x^{m}=x^{m+n},y=(x^{n})^{m}=x^{mn}.$$

(3)常见函数及其图像：

$$y=x,y=x^{2},y=\sqrt{x},y=x^{3},y=\sqrt[3]{x},y=\frac{1}{x}.$$



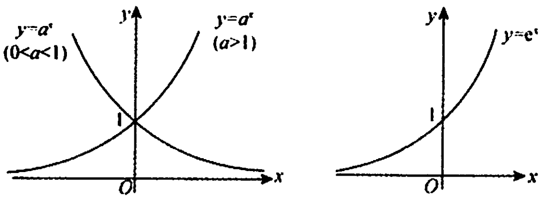
2.指数函数

(1)函数形式：$y=a^{x}$ ($a>0$ 且 $a\neq1$).

(2)定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(0,+\infty)$.

(3)单调性：$a>1$时，$y=a^x$单调增加；$a<1$时，$y=a^x$单调减少.

(4)常见函数及其图像：



(5)极限：$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

(6)特殊函数值：$a^0=1, e^0=1$.

3.对数函数

(1)函数形式：$y=\log_a x$ ($a>0$且$a\neq1$).

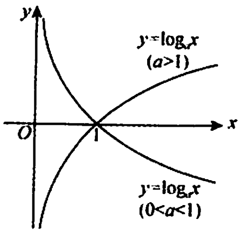
(2)定义域：$(0,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$.

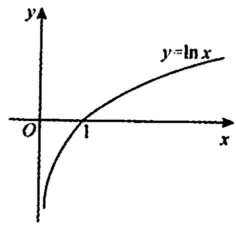
(3)单调性：$a>1$时，$y=\log_a x$单调增加；$a<1$时，$y=\log_a x$单调减少.

(4)特殊函数值：$\log_a 1=0, \log_a a=1, \ln 1=0, \ln e=1$.

(5)极限：$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty, \lim\limits_{x\to0^+} \ln x=-\infty$.

(6)常见函数及其图像：





(7)常用公式： $x = e^{\ln x}(x > 0), u^v = e^{v\ln u}(u > 0)$.

4.三角函数

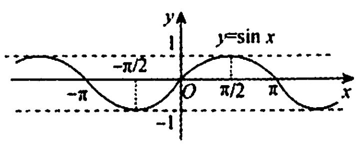
（1）正弦函数、余弦函数

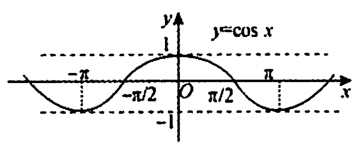
①函数形式： $y = \sin x, y = \cos x$.

②定义域： $(-\infty, +\infty)$， 值域： $[-1,1]$.

③奇偶性： $y = \sin x$ 是奇函数， $y = \cos x$ 是偶函数.

④常见函数及其图像：





⑤常用公式：

（i）平方公式： $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

（ii）二倍角公式： $\sin 2x = 2\sin x\cos x$，

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$.

（iii）降幂公式：$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2},\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

（iv）诱导公式：奇变偶不变，符号看象限.

$$\sin(\frac{k\pi}{2}+x)=\begin{cases}\pm\sin x, k\text{为偶数}, & \pm\text{取决于}x\text{看作锐角时}, \\ \pm\cos x, k\text{为奇数}, & \sin(\frac{k\pi}{2}+x)\text{的符号}.\end{cases}$$

$\sin(\pi-x)=\sin x$，$\sin(\pi+x)=-\sin x$，$\sin(\frac{\pi}{2}\pm x)=\cos x$，

$$\cos(\frac{k\pi}{2}+x)=\begin{cases}\pm\cos x, k\text{为偶数}, & \pm\text{取决于}x\text{看作锐角时}, \\ \pm\sin x, k\text{为奇数}, & \cos(\frac{k\pi}{2}+x)\text{的符号}.\end{cases}$$

$\cos(\pi\pm x)=-\cos x$，$\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$，$\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$.

（v）和角公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

（vi）和差化积：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

（vii）积化和差：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

（2）正切函数、余切函数

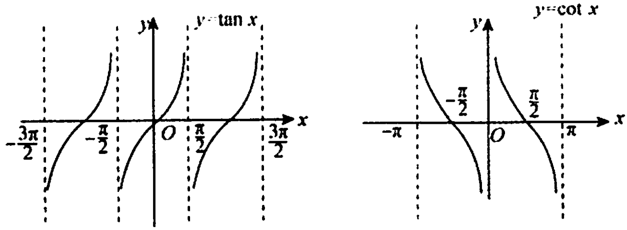
①函数形式： $y=\tan x, y=\cot x$.

②定义域： $y=\tan x, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$， $y=\cot x, x\neq k\pi, k\in Z$ ；

值域： $(-\infty,+\infty)$.

③奇偶性：$y=\tan x, y=\cot x$ 在对称的定义区间内都是奇函数.

④常见函数及其图像：



⑤常用公式：

（i）平方公式：$\tan^2 x+1=\sec^2 x$.

（ii）二倍角公式：$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x},\cot 2x=\dfrac{1-\cot^2 x}{2\cot x}$.

（iii）和角公式：$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

5.反三角函数

（1）反正弦函数、反余弦函数

①函数形式：$y=\arcsin x,y=\arccos x$.

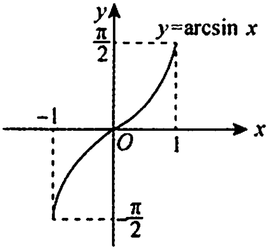
②定义域：$[-1,1]$，值域：$\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\arccos x\in[0,\pi]$.

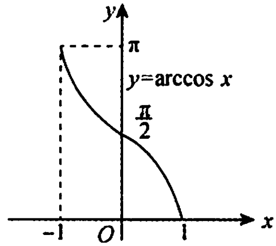
③奇偶性：$y=\arcsin x$ 在定义域内是奇函数.

④有界性：$y=\arcsin x,y=\arccos x$ 在定义域内均有界.

⑤常用公式：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

⑥常见函数及其图像：





（2）反正切函数、反余切函数

①函数形式： $y=\arctan x, y=\operatorname{arc}\cot x$.

②定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$\arcsin x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\arccos x\in(0,\pi)$.

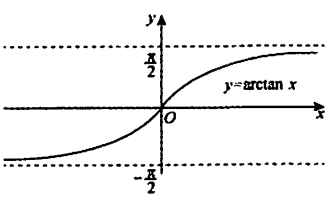
③奇偶性： $y=\arctan x$ 在定义域内是奇函数.

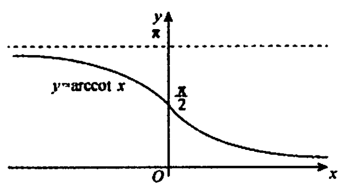
④有界性： $y=\arctan x, y=\operatorname{arc}\cot x$ 在定义域内均有界.

⑤常用公式： $\arctan x+\operatorname{arc}\cot x=\frac{\pi}{2}$ ，

$\arctan x\pm\arctan y=\arctan(\frac{x\pm y}{1\mp xy})$.

⑥常见函数及其图像：





⑦极限： $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}, \lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

二、极限的概念、性质与计算

1.极限与左、右极限

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0)=A+\alpha(x)$, 其中$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)=0$

2.极限的性质

(1)局部保号性：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，若 $A>0$(或$A<0$)，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 且 $x\neq x_0$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

(2)局部有界性：设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 且 $x\neq x_0$ 时，$f(x)$ 有界.

3.极限运算法则

$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则：

(1) $\lim(f(x)\pm g(x))=A\pm B$；

(2) $\lim f(x)g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$；

(4)若 A,B 不全为0，则 $\lim f(x)^{g(x)}=A^B$.

4.无穷小的比较

设$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0,\beta(x)\neq 0$，则：

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，

记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$.

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小.

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c(c\neq 0)$,则$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小，特别地，

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价的无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c(c\neq 0),k>0$,则$\alpha(x)$是$\beta(x)$的$k$阶无穷小，

特别地，若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{x^k}=c(c\neq 0)$,则$\alpha(x)$是$x$的$k$阶无穷小.

5.常见等价无穷小（$x\to 0$时）:

$$\left.\begin{array}{l}\sin x\\ \arcsin x\\ \tan x\\ \arctan x\\ \ln(1+x)\\ e^x-1\end{array}\right\}\sim x,\qquad \begin{array}{l}a^x-1\sim x\ln a,\\ (1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}x,\\ 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,\end{array}\qquad \begin{array}{l}x-\sin x\sim\dfrac{1}{6}x^3,\\ x-\arcsin x\sim-\dfrac{1}{6}x^3,\\ \tan x-x\sim\dfrac{1}{3}x^3,\\ \arctan x-x\sim-\dfrac{1}{3}x^3.\end{array}$$

6.极限存在准则与两个重要极限

(1)夹逼准则

设在 $x=x_0$ 的某去心邻域内，恒有 $\varphi(x)\le f(x)\le \phi(x)$，且

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=A$， 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(2)单调有界定理：单调有界的数列必有极限.

(3)两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

抓大头： $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},n=m\\ 0,n<m\\ \infty,n>m\end{cases}.$$

(4)几个常用极限：

$$\lim_{x\to 0}x^{\alpha}\ln^{\beta}x=0,\alpha>0,\beta>0\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\beta x}}=0,\alpha>0,\beta>0\ ,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{\beta}x}{x^{\alpha}}=0,\alpha>0,\beta>0\ ,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1\ ,\quad \lim_{x\to+0^{+}}x^{x}=1.$$

7.洛必达法则

设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$；

(2) $f(x),g(x)$ 在 x_0 的去心邻域内可导且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为 ∞);

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注： $x\to\infty$ 时有类似结论.

8.泰勒公式

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x ，在 x_0 与 x 之间至少存在一个 ξ ，使得：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶泰勒余项.

令 $x_0=0$ ，则 n 阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

称为带皮亚诺余项的麦克劳林公式.

常用函数在 $x=0$ 处的泰勒公式:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1})$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

三、连续性与间断点

1.连续概念

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

2.间断点及其类型

(1)若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在 $\neq f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处为可去间断点.

(2)若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x), \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 存在但不相等，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处为跳跃间断点.

(3)若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处为无穷间断点.

(4)若 $x \to x_0$ 时，函数值 $f(x)$ 在某个区间内变动无限多次，则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处为振荡间断点.

四、闭区间上连续函数的性质

1.连续函数的有界性

(1)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2)设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

2.最值定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 存在最大值与最小值，即存在 m,M ，使得 $m\le f(x)\le M$.

3.介值定理

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，C 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数，则在 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $f(\xi)=C$.

推论：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $m\le C\le M$ ，则存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=C$.

4.零点定理

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ ，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

第二章　一元函数微分学

一、导数的定义、性质与计算

1.导数的定义

(1) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$（$\Delta x$ 可以换成任意趋于零而不等于零的量）或 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(2)左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 或 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(3)充要条件 $f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$.

2.几何意义

(1)切线方程：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

(2)法线方程：$y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

3.微分的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义，若实际增量 Δy 可用线性增量 $A\Delta x$(A不依赖于Δx) 近似代替，误差相对于 Δx 可以忽略不计，即 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微，称 $A\Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的微分，记作 $dy = A\Delta x$.

4.基本求导（微分）公式

(1) $y = c$（常数）　$y' = 0$　$dy = 0$

(2) $y = x^\alpha$ (α 为实数)　$y' = \alpha x^{\alpha-1}$　$dy = \alpha x^{\alpha-1}dx$

(3) $y = a^x$　$y' = a^x \ln a$　$dy = a^x \ln a dx$

$y = e^x$　$(e^x)' = e^x$　$d(e^x) = e^x dx$

(4) $y = \log_a x$　$y' = \dfrac{1}{x\ln a}$　$dy = \dfrac{1}{x\ln a}dx$

$y = \ln x$　$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$　$d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$

(5) $y = \sin x$　$y' = \cos x$　$d(\sin x) = \cos x dx$

(6) $y = \cos x$　$y' = -\sin x$　$d(\cos x) = -\sin x dx$

(7) $y = \tan x$　$y' = \sec^2 x$　$d(\tan x) = \sec^2 x dx$

(8) $y = \cot x$　$y' = -\csc^2 x$　$d(\cot x) = -\csc^2 x dx$

(9) $y=\sec x \quad y'=\sec x\tan x \quad d(\sec x)=\sec x\tan x dx$

(10) $y=\csc x \quad y'=-\csc x\cot x \quad d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$

(11) $y=\arcsin x \quad y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(12) $y=\arccos x \quad y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(13) $y=\arctan x \quad y'=\frac{1}{1+x^2} \quad d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$

(14) $y=\operatorname{arccot} x \quad y'=-\frac{1}{1+x^2} \quad d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

5.函数求导法则

(1)四则运算法则

① $(u\pm v)'=u'\pm v' \qquad d(u\pm v)=du\pm dv$

② $(uv)'=uv'+vu' \qquad d(uv)=udv+vdu$

③ $(\frac{u}{v})'=\frac{vu'-uv'}{v^2}(v\neq 0) \qquad d(\frac{u}{v})=\frac{vdu-udv}{v^2}$

(2)反函数求导法则

设 $y=f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续，在点 x 处可导且 $f'(x)\neq 0$，则其反函数在点 x 所对应的 y 处可导，并且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

(3)复合函数求导法则

若 $\mu=\varphi(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(\mu)$ 在对应点 μ ($\mu=\varphi(x)$) 可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 可导，且 $y'=f'(\mu)\cdot\varphi'(x)$

(4)隐函数求导法则

①直接求.方程两边对 x 求导，注意 y 是 x 的函数，应按复合函数求导法则处理.

②公式法.由 $F(x,y)=0$ 知 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$，其中，$F_x'$，$F_y'$ 分别表示 $F(x,y)$ 对 x 和 y 的偏导数.

③利用微分形式不变性.由 $F(x,y)=0$ 知 $F_x'dx+F_y'dy=0$，所以 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$.

(5)参数方程求导法则

设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 确定，则：

① $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=h(t)$

② $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dy'/dt}{dx/dt}=\dfrac{h'(t)}{x'(t)}$

6.高阶导数

(1)莱布尼兹公式

若 $u(x),v(x)$ 均 n 阶可导，则 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$，其中 $u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$.

(2)常用高阶导数

① $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\quad(a>0)\qquad(e^x)^{(n)}=e^x$

② $(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

③ $(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+n\cdot\frac{\pi}{2})$

④ $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

⑤ $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{x^n}$

7.连续、可导、可微的关系

可导 $\Leftrightarrow$ 可微，可导必连续，连续未必可导.

二、导数的应用

1.单调性与极值

(1)设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间内可导，如果对 $\forall x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调

增加的（或单调减少）.

（2）极值的必要条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取极值，则 $f'(x_0)=0$.

(3)极值的第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可微，且 $f'(x_0)=0$ （或 $f(x)$ 在 x_0 处连续，但 $f'(x_0)$ 不存在）：

①$f'(x)$ 在 x_0 处左“+”右“-”，则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极大值；

②$f'(x)$ 在 x_0 处左“-”右“+”，则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的极小值；

③$f'(x)$ 在 x_0 处左右同号，则 $x=x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值.

(4) 极值的第二充分条件

设 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x)\neq 0$，且 $f'(x_0)=0$，则：

①当 $f''(x)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；

②当 $f''(x)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

③如果 $f''(x)=0$，此方法失效.

2.函数最值的求法

(1)若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则比较 $f(x)$ 的端点值、

驻点值、不可导点处函数值的大小，最大的则为最大值，最小的则为最小值.

(2)若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导且有唯一驻点，则该点必为极小（大）值点，且此极小（大）值必为函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的最小（大）值点.

3.凹凸性与拐点

(1)凹凸性的定义

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，任取两点 $x_1,x_2\in I$，恒有 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>(<)f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，则称曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 是凹（凸）的.

(2)凹凸性的判别定理

若在 I 上 $f''(x)<0$（或 $f''(x)>0$），则 $f(x)$ 在 I 上是凸的（或凹的）.

(3)拐点的判别定理 1

若在 $x=x_0$ 处 $f''(x)=0$，（或 $f''(x)$ 不存在），$f''(x)$ 在 $x=x_0$ 处左右异号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

(4)拐点的判别定理 2

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的某邻域内有三阶导数，且 $f''(x)=0$，$f'''(x)\neq 0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点.

4.渐近线

(1)水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$，则 $y=a$ 称为函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

(2)铅直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$，或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 称为 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

(3)斜渐近线

若 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$，则 $y=kx+b$ 称为 $y=f(x)$ 的斜渐近线

三、微分中值定理

1.费马定理

若函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，并且在此邻域内

恒有 $f(x)\le f(x_0)$ 或 $f(x)\ge f(x_0)$；

(2) $f(x)$ 在 x_0 处可导；

则有 $f'(x_0)=0$.

2.罗尔定理

设函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2)在开区间 (a,b) 内可导；

(3) $f(a)=f(b)$ ；

则存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $f'(\xi)=0$.

3.拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$ 满足条件：

(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2)在开区间 (a,b) 内可导；

则存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

或存在 $\theta\in(0,1)$ ，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a+(b-a)\theta)$.

4.柯西中值定理

设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 满足条件：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续;

(2)在开区间(a,b)内可导，且$g'(x)\neq 0$;

则存在$\xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

5.泰勒中值定理

设函数$f(x)$在点x_0处的某邻域内具有$n+1$阶导数，则对该邻域内异于x_0的任意点x，在x_0与x之间至少存在一个ξ，使得：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$

$+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

四、弧微分与曲率（仅数学一、二要求）

1.弧微分

$$ds=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\begin{cases}\sqrt{1+y'^2}\,dx\\ \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt\\ \sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta\end{cases}$$

2.曲率

(1)公式

曲率$K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$，曲率半径$R=\dfrac{1}{K}$.

(2)推导

$\because \tan\alpha = y', \therefore \sec^2\alpha \cdot \dfrac{d\alpha}{dx} = y''$,

$\therefore \dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{y''}{1+\tan^2 x} = \dfrac{y''}{1+y'^2}$,

$\therefore d\alpha = \dfrac{y''}{1+y'^2}dx$,

又因为$ds = \sqrt{1+y'^2}dx$，所以，$K = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right| = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

(3)性质

①曲率圆的圆心在该点凹侧的法线上，半径等于曲率的倒数，曲率圆与曲线在该点处相切；

②该点曲率越大，曲率圆的半径越小，该点处弯曲程度越大；

③在该点处，曲线与曲率圆具有相同的切线与曲率，即有相同的一阶导数值与二阶导数值，且凹向相同，可以近似代替.

④在该点的某邻域内，曲线夹在切线与曲率圆之间.

五、导数的经济学应用（仅数学三要求）

1.边际的概念

如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则在 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 内的平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ；在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$ ，经济学中称 $f'(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的边际函数值.

设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的边际函数. $f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 为边际函数值. 其意义为：当 $x=x_0$ 时，x 改变一个单位的绝对量，y 改变 $f'(x_0)$ 个单位的绝对量.

2.经济学中常见的边际函数

(1)边际成本： $C'(Q)$

(2)平均边际成本： $\left(\dfrac{C(Q)}{Q}\right)'$

(3)边际需求： $Q'(P)$

(4)边际收益： $R'(Q)=P(Q)+QP'(Q)$

(5)边际利润： $L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)$

【注】利润最大原则：$L'(Q)=0, L''(Q)<0$，即

$R'(Q)=C'(Q), R''(Q)<C''(Q)$

3.弹性的概念

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $x_0 \neq 0$，称函数的相对改变量 $\frac{\Delta y}{y_0}$ 与自变量的相对改变量 $\frac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{y_0}$ 为函数从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 两点间的平均相对变化率，或称为 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 两点间的弹性.

设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，则称 $E_{yx}=\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$ 为 $f(x)$ 的弹性函数. E_{yx} 在 x_0 处的值称为弹性函数值，简称弹性. 其意义为：当 $x=x_0$ 时，x 改变 1% 的相对量，y 改变 $\left|E_{yx}\right|\%$ 的相对量.

4.经济学中常见的弹性函数

(1)需求价格弹性：$E_{dp}=-\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q}$

【注】需求价格弹性通常也记作 η；

当$\eta<1$时，称商品需求在此处缺乏弹性；

当$\eta>1$时，称商品需求在此处富有弹性；

当$\eta=1$时，称商品需求在此处具有单位弹性.

(2)供给价格弹性：$E_{sp}=\dfrac{dS}{dP}\cdot\dfrac{P}{S}$

(3)成本需求弹性：$E_{cq}=\dfrac{dC}{dQ}\cdot\dfrac{Q}{C}$

(4)收益价格弹性：$E_{rp}=\dfrac{dR}{dP}\cdot\dfrac{P}{R}$

【注】$E_{rp}=[Q+P\dfrac{dQ}{dP}]\cdot\dfrac{P}{PQ}=1+\dfrac{dQ}{dP}\cdot\dfrac{P}{Q}=1-\eta$

可以看出：

若$\eta<1$，即商品为缺乏需求弹性的商品，则价格上涨1%时，总收益上涨$|1-\eta|\%$；

若$\eta>1$，即商品为富有需求弹性的商品，则价格上涨1%时，总收益下降$|1-\eta|\%$；

若$\eta=1$，即商品为单位需求弹性的商品，则价格的变化不会引起总收益的变化.

(5)收益需求弹性：$E_{rq}=\frac{dR}{dQ}\cdot\frac{Q}{R}$

【注】$E_{rq}=[\frac{dP}{dQ}Q+P]\cdot\frac{Q}{PQ}=1+\frac{dP}{dQ}\cdot\frac{Q}{P}=1-\frac{1}{\eta}$

可以看出：

若$\eta<1$，即商品为缺乏需求弹性的商品，则销量上涨1%时，总收益下降$\left|1-\frac{1}{\eta}\right|\%$；

若$\eta>1$，即商品为富有需求弹性的商品，则销量上涨1%时，总收益上涨$\left|1-\frac{1}{\eta}\right|\%$；

若$\eta=1$，即商品为单位需求弹性的商品，则销量的变化不会引起总收益的变化.

第三章 一元函数积分学

一、不定积分

1.原函数与不定积分的概念

如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$；即对任一 $x\in I$ 都有 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ 或 $f(x)dx$ 在区间 I 上的一个原函数；称 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 为 $f(x)$ 或 $f(x)dx$ 在区间 I 上不定积分.

2.原函数的存在性

(1)连续函数一定存在原函数.

(2)含有可去间断点、跳跃间断点、无穷间断点的函数一定没有原函数.

(3)含有振荡间断点的函数可能存在原函数.

3.不定积分的计算性质

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ （$k\neq 0$ 为常数）

(2) $\int[f_1(x)\pm\cdots\pm f_k(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\cdots\pm\int f_k(x)dx$

(3)求导：$[\int f(x)dx]' = f(x)$ 或微分：$d\int f(x)dx = f(x)dx$

(4) $\int F'(x)dx = F(x)+C$ 或 $\int dF(x) = F(x)+C$ （C 是任意常数）

4.基本积分公式

(1) $\int x^k dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}+C$ （$k \neq -1$）

(2) $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}+C$　　$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+C$

(3) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

(4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C(a>0,a\neq 1)$　　$\int e^x dx = e^x+C$

(5) $\int \cos x dx = \sin x+C$　　$\int \sin x dx = -\cos x+C$

(6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \tan x+C$

(7) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x+C$

(8) $\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x|+C$

(9) $\int \frac{1}{\cos x}dx = \int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|+C$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(11) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \quad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

(12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(14) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

(15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

5.常见的几种凑微分形式（第一类换元法）

(1) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)(a \neq 0)$

(2) $\int f(ax^n+b)x^{n-1}dx = \frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)(a \neq 0)$

(3) $\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)de^x$

(4) $\int \frac{f(\frac{1}{x})}{x^2}dx = -\int f(\frac{1}{x})d(\frac{1}{x})$

(5) $\int \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int f(\ln x)d(\ln x)$

(6) $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\int f(\sqrt{x})d(\sqrt{x})$

(7) $\int f(\sin x)\cos xdx = \int f(\sin x)d(\sin x)$

(8) $\int f(\cos x)\sin xdx = -\int f(\cos x)d(\cos x)$

(9) $\int f(\tan x)\sec^2 xdx = \int f(\tan x)d(\tan x)$

(10) $\int f(\cot x)\csc^2 xdx = -\int f(\cot x)d(\cot x)$

(11) $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d(\arcsin x)$

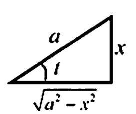
(12) $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d(\arctan x)$

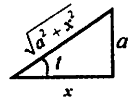
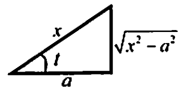
6.去根号（第二类换元法）

(1)根号下 x 是一次幂，整体换元

例如：$\int f(\sqrt{1+x})dx \overset{令\sqrt{1+x}=t, x=t^2-1}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \int f(t)\cdot 2tdt$.

(2)根号下 x 是二次幂，三角换元

根式类型	三角换元	辅助三角形
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a\sin t$ $dx = a\cos tdt$	

$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t$ $dx=a\sec^2 t dt$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t$ $dx=a\sec t\tan t dt$	

7.分部积分

$\int u dv = uv - \int v du$，选 u 的顺序为"对、反、幂、三、指".

8.有理函数积分

真分式拆分模板（其中等号左边均为真分式，(1),(2),(3)代表 x 的一次多项式，a,b,c 为待定系数）：

$$\frac{?}{(1)(2)}=\frac{a}{(1)}+\frac{b}{(2)},$$
$$\frac{?}{(1)(2)(3)}=\frac{a}{(1)}+\frac{b}{(2)}+\frac{c}{(3)},$$
$$\frac{?}{(1)(2)^2}=\frac{a}{(1)}+\frac{b}{(2)}+\frac{c}{(2)^2},$$
$$\frac{?}{x(1+x^2)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{1+x^2}.$$

二、定积分

1.可积（即常义积分、定积分）的充分条件

(1)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(2)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

2.可积（即常义积分、定积分）的必要条件

可积必有界.

3.定积分的基本性质

(1)定积分与积分变量无关：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b dx=b-a$

(4) $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

(5) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$（$k$为常数）

(6) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

(7)设$f(x)\le g(x), x\in[a,b]$, 则$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

推论：当$f(x)\ge 0, x\in[a,b]$时，$\int_a^b f(x)dx\ge 0$;

(8) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

(9)估值定理：设$m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$，其中$m, M$为常数，则$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

(10)积分中值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则在$[a,b]$上至少存在一个ξ，使$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.

(11)平均值公式：$\overline{f(x)} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

4.牛顿—莱布尼兹公式

(1)设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

(2)（$\xi \in (a,b)$的积分中值定理）设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = (b-a)F'(\xi) = (b-a)f(\xi), \xi \in (a,b).$$

5.定积分的常用结论

(1)普通对称性

设$f(x)$在$[-l,l]$上连续，则

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^l f(x)dx, & f(x)\text{为偶函数} \\ 0, & f(x)\text{为奇函数} \end{cases}.$$

(2)重要换元

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $x=a+b-t$，则定积分

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]dx.$$

特别地，设函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上连续，令 $x=-t$，则

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{l} f(-t)dt = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}[f(x)+f(-x)]dx = \int_0^l [f(x)+f(-x)]dx.$$

(3)设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，a 为任意实数，则

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx.$$

(4) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi a^2$

(5)华里士公式（点火公式）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当}n\text{为偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1, & \text{当}n\text{为奇数} \end{cases}$$

(6)三角函数系（以下 m,n 为不同时取 0 的非负整数）

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} \pi, & n=m \\ 0, & n\neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \int_{0}^{2\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{0}^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$

6.定积分的计算

(1)换元法

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，若$x=\varphi(t)$ 满足：

①$\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且$\varphi'(t) \neq 0$.

②$\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$,并且当$t$在$[\alpha,\beta]$上变化时，$\varphi(t)$的值在$[a,b]$上变化，则

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

(2)分部积分公式

设$u(x), v(x)$在$[a,b]$上具有连续导函数$u'(x), v'(x)$,则

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)u'(x)dx.$$

7.柯西不等式

设函数$f(x), g(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\left(\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx\right)^{2} \leq \int_{a}^{b} f^{2}(x)dx \int_{a}^{b} g^{2}(x)dx.$$

三、变限积分

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$，这也说明 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

推论1　设 $F(x)=\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$，则 $F'(x)=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

推论2　$[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt]'_x=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x)$

推论3　$[\int_a^{\varphi(x)} f(t)g(x)dt]'_x=[g(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt]'_x$

$$=g'(x)\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt+g(x)f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

推论4　$F(x)=\int_a^x f(x-t)dt$，则令 $u=x-t$ 得：

$F(x)=\int_0^{x-a} f(u)dt$

$\therefore F'(x)=f(x-a)$

四、反常积分

1.反常积分的计算

(1)无穷限的广义积分（无穷积分）

设 $f(x)$ 连续，则

①$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

② $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

(2)无界函数的广义积分（瑕积分）

① $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$,($x=b$为$f(x)$的瑕点)

② $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$,($x=a$为$f(x)$的瑕点)

③ $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\eta\to0^+}\int_{c+\eta}^{b} f(x)dx$

($x=c$为$f(x)$的瑕点)

2.反常积分敛散性的判定

(1)比较审敛原理 1

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续：

如果 $0\le f(x)\le g(x)$ $(a\le x\le+\infty)$，并且 $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，

那么 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛.

如果 $0\le g(x)\le f(x)$ $(a\le x\le+\infty)$，并且 $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ 发散，

那么 $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

(2)极限审敛法 1

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上连续,

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 同敛散.

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,且 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛.

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$,且 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也发散.

(3)比较审敛原理 2

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点：

如果 $0\le f(x)\le g(x)\ (a<x\le b)$，并且 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，那么 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

如果 $0\le g(x)\le f(x)\ (a<x\le b)$，并且 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，那么 $\int_a^b f(x)dx$ 也发散.

(4)极限审敛法 2

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续, $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点：

如果 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 与 $\int_a^b g(x)dx$ 同敛散.

如果 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,且 $\int_a^b g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛.

如果 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$,且 $\int_a^b g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b f(x)dx$ 也发散.

(5)常见反常积分

① $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx\begin{cases}收敛, p>1\\ 发散, p\le 1\end{cases}$，$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^p x}dx\begin{cases}收敛, p>1\\ 发散, p\le 1\end{cases}$.

② $\int_0^1\dfrac{1}{x^p}dx\begin{cases}收敛, p<1\\ 发散, p\ge 1\end{cases}$.

③ $\int_1^{+\infty}x^k e^{-x^p}dx$, k为任意常数且$p>0$时均收敛.

④ $\int_0^1\dfrac{\ln^k x}{x^p}dx$, k为任意常数且$p<1$时均收敛.

五、定积分的应用

1.求面积

(1)直角坐标系

在 $x\in[a,b]$ 上，由函数 $y=f(x), y=g(x)$ 所围图形的面积为：$S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$.

(2)极坐标系

在 $\theta\in[\alpha,\beta]$ 上，由函数 $r=r_1(\theta), r=r_2(\theta)$ 所围图形的面积

为: $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|d\theta$.

2.求体积

(1)旋转体体积

由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴所围平面图形，绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 $V_x=\int_a^b \pi f^2(x)dx$；绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积 $V_y=\int_a^b 2\pi|xf(x)|dx$.

(2)已知平行截面面积的立体体积: $V=\int_a^b S(x)dx$

3.求弧长（仅数学一、二要求）

(1) $L:y=f(x),a\le x\le b,l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$.

(2) $L:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},a\le t\le b,l=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$.

(3) $L:r=r(\theta),\alpha\le\theta\le\beta,l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta$.

4.侧面积（仅数学一、二要求）

由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a,x=b$ 以及 x 轴所围平面图形，绕 x 轴旋转一周所得旋转体侧面积 $S=\int_a^b 2\pi f(x)ds$，其中 ds 为弧微分.

第四章　微分方程

一、一阶微分方程

1.可分离变量方程

形如：$y'=f(x)g(y)$

解法：分离变量得 $\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$，所以 $\int\dfrac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$.

2.齐次微分方程

形如：$y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

解法：令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$，$y'=u+x\dfrac{du}{dx}$ 于是，原方程

$$\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=f(u)\Rightarrow\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+C .$$

3.一阶线性微分方程

形如：$y'+p(x)y=q(x)$

解法：方程两边同乘积分因子 $e^{\int p(x)dx}$，然后分别积分并

化简得：$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$.

4.伯努利方程（仅数学一要求）

形如：$y'+p(x)y=q(x)y^n$

解法：方程两边同除 y^n，然后令 $z=y^{1-n},z'=(1-n)y^{-n}y'$，则方程化为一阶线性微分方程 $z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$，解法同上.

5.全微分方程（数学一要求，数学二了解）

形如：$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

解法一：凑全微分（数学二要求）

解法二：根据曲线积分与路径无关（仅数学一要求）

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C \text{ 或 } \int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$$

二、可降阶的微分方程

1.不显含 y 型

形如：$G(x,y',y'')=0$

解法：令 $y'=p,y''=p'$，代入方程得 $G(x,p,p')=0$，化为一阶微分方程，解得 $p=y'=p(x,C_1)$，继续解一阶微分方程得 $y=y(x,C_1,C_2)$.

2.不显含 x 型

形如：$G(y,y',y'')=0$

解法：令 $y'=p, y''=p\dfrac{dp}{dy}$，代入方程得 $G(x,p,p\dfrac{dp}{dy})=0$，化为一阶微分方程，解得 $p=y'=p(y,C_1)$，继续解一阶微分方程得 $y=y(x,C_1,C_2)$.

三、常系数线性微分方程

1.线性微分方程解的结构

二阶线性方程的一般形式为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$，其中 $p(x),q(x),f(x)$ 均为连续函数，当右端 $f(x)\equiv 0$ 时，称为二阶线性齐次方程，否则称为非齐次方程.

解的性质与结构(以下性质可推广到任意高阶的线性方程)分以下几种：

(1)若 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个特解，则其线性组合 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 仍为齐次方程的解. 特别地，若 $y_1(x),y_2(x)$ 线性无关(即 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq\lambda$(常数))，则齐次方程的通解为 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

(2)设 $y_1(x),y_2(x)$ 为非线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的两个特解，则其差 $y_1(x)-y_2(x)$ 为相应齐次方程的特解.

(3)设 $y^*(x)$ 为非齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的一

个特解，$y(x)$ 为齐次方程的任意特解，则其和 $y^*(x)+y(x)$ 为 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，特别地，若 $y_1(x),y_2(x)$ 为齐次方程的两个线性无关的特解，则 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解为 $y(x)=y^*(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

2.二阶常系数齐次线性微分方程

形如：$y''+py'+qy=0$ 其中 p,q 均为常数

解法：特征方程：$\lambda^2+p\lambda+q=0$

(1)当 λ_1,λ_2 为不同的特征根时，齐次方程的通解为 $y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$.

(2)当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，齐次方程的通解为 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{\lambda_1 x}$.

(3)当 $\lambda=\alpha\pm i\beta$（复根）时，齐次方程的通解为

$y(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

3.二阶常系数非齐次线性微分方程

(1)求解步骤

形如：$y''+py'+qy=f(x)$ 其中 p,q 均为常数

解法：①求对应齐次方程的通解 $\overline{y}(x)$

②求出非齐次方程的特解 $y^*(x)$

③非齐次方程的通解 $y=\bar{y}(x)+y^*(x)$

(2)非齐次方程的特解 $y^*(x)$ 的求法有三种：微分算子法、常数变易法、待定系数法.

(3)待定系数法设特解形式如下：

①若 $f(x)=P_n(x)e^{rx},P_n(x)$ 为 x 的某一具体的 n 次多项式，

则令 $y^*(x)=Q_n(x)e^{rx}\cdot x^k,k=\begin{cases}0,r\text{不是特征方程的根}\\1,r\text{是特征方程的单根}\\2,r\text{是特征方程的二重根}\end{cases}$，其中

$Q_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

②若 $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x),A,B,\alpha,\beta$ 为给定的常数，则令 $y^*(x)=e^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x)\cdot x^k$，其中 a,b 为待定系数，$k=\begin{cases}0,\alpha\pm\beta i\text{不是特征方程的根}\\1,\alpha\pm\beta i\text{是特征方程的单根}\end{cases}$.

③ 若 $f(x)=e^{\alpha x}(A_m(x)\cos\beta x+B_n(x)\sin\beta x),A_m(x),B_n(x)$ 为 x 多项式，则令 $y^*(x)=e^{\alpha x}(P_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x)\cdot x^k$，

其中 $l=\max\{m,n\}$， $k=\begin{cases}0,\alpha\pm\beta i\text{不是特征方程的根}\\1,\alpha\pm\beta i\text{是特征方程的单根}\end{cases}$.

4.欧拉方程（仅数学一要求）

形如： $x^2y''+a_1xy'+a_2y+=f(x)$，其中 a_1,a_2 为常数.

解法：当 $x>0$ 时，令 $x=e^t$，则：

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}=Dy,x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}=D(D-1)y\ .$$

代入原方程得： $\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_2y=f(e^t)$.这是一个以 t 为自变量， $y(t)$ 为未知函数的二阶常系数线性微分方程.

当 $x<0$ 时，令 $x=-e^t$ 可得类似结论.

5.一阶差分方程

形如： $y_{t+1}-ay_t=f(t)$

解法：(1)先求齐次方程 $y_{t+1}-ay_t=0$ 的通解：特征方程为

$r-a=0,\therefore r=a,\therefore \overline{y}_t=Ca^t$.

(2)再求非齐次方程的特解：

若 $f(t)=P_n(t)d^t$，则令 $y_t^*=Q_n(t)d^t\cdot t^k,k=\begin{cases}0,d=a\\1,d\neq a\end{cases}$，代入非齐次方程解出 y_t^*，则 $y_t=\overline{y}_t+y_t^*=Ca^t+y_t^*$.

第五章　多元函数微分学

一、多元函数的偏导数与全微分

1.偏导数

$$f_x'(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x};$$

$$f_y'(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

2.可微

记 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y),A=f_x'(x,y),B=f_y'(x,y)$，

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，若 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-[A\Delta x+B\Delta y]}{\rho}=0$，则 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微.

3.全微分

若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微，则在该点处 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必存在，且有 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$.

若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处的两个一阶偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 连续，则 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微.

4.二阶混合偏导数与次序无关

设$z=f(x,y)$的两个混合偏导数$f''_{xy}(x,y),f''_{yx}(x,y)$在区域$D$内连续,则有$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

5.极限、连续、偏导数、可微、方向导数（仅数学一）的关系

$$\text{一阶偏导数连续}\Rightarrow\text{可微}\Rightarrow\begin{cases}\text{方向导数存在}\\ \quad\not\Downarrow\\ \text{偏导数存在}\\ \quad\not\Downarrow\\ \text{函数连续}\\ \quad\Downarrow\\ \text{极限存在}\end{cases}$$

二、多元函数微分法

1.多元复合函数求偏导

(1)设$z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$,则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

(2)设$z=f(u,v),u=\varphi(x),v=\phi(x)$,则

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

(3)设$z=f(x,u,v),u=\varphi(x,y),v=\phi(x,y)$, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0+\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

注：复合函数一定要设中间变量，抽象函数的高阶偏导数，其中间变量用数字 1，2，3……表示更简洁.

2.多元隐函数求偏导

(1)设$F(x,y)=0$,则$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

(2)$F(x,y,z)=0$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}$

(3)设由方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$确定的隐函数$y=y(x),z=z(x)$,

则$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$可通过 解关于$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$的线性方程组

$$:\begin{cases}F'_x+F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dy}=0\\ G'_x+G'_y\dfrac{dy}{dx}+G'_z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dx}=-F'_x,\\ G'_y\dfrac{dy}{dx}+G'_z\dfrac{dz}{dx}=-G'_x\end{cases}$$

来求解.

三、多元函数的极值与条件极值

1.多元函数的极值

(1)定义：

设函数$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，若对于该邻域内异于$P(x_0,y_0)$点的任一点$Q(x,y)$恒有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0)(\text{或}<f(x_0,y_0))$$

则称$f(x_0,y_0)$为$f(x,y)$的极小值(极大值).

(2)必要条件

设$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$点的一阶偏导数存在，且$P(x_0,y_0)$是$z=f(x,y)$的极值点，则$\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)=0 \\ f_y'(x_0,y_0)=0 \end{cases}$.

(3)充分条件

设$z=f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$点的某邻域内有连续的偏导数，且$f_x'(x_0,y_0)=0$, $f_y'(x_0,y_0)=0$.记$A(x,y)=f''_{xx}(x,y)$, $B(x,y)=f''_{xy}(x,y)$, $C(x,y)=f''_{yy}(x,y)$：

①若$AC-B^2>0$，则$P(x_0,y_0)$是$z=f(x,y)$的一个极值点.若$A>0$则$P(x_0,y_0)$为极小值点.若$A<0$则$P(x_0,y_0)$为极大值点.

②若$AC-B^2<0$，则$P(x_0,y_0)$不是$z=f(x,y)$的极值点.

③若 $AC-B^2=0$，则此法失效.

2.条件极值

(1)目标函数 $z=f(x,y)$，已知条件 $\varphi(x,y)=0$.

解题步骤：

①构造辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$；

②解方程组 $\begin{cases} f_x'(x,y)+\lambda\varphi_x'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)+\lambda\varphi_y'(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$，求得驻点；

③根据实际问题，判断驻点是否为极值点或最值点.

(2)目标函数 $z=f(x,y)$，已知条件 $\varphi_1(x,y)=0,\varphi_2(x,y)=0$.

解题步骤：

①构造辅助函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi_1(x,y)+\mu\varphi_2(x,y)$；

②解方程组 $\begin{cases} f_x'(x,y)+\lambda\varphi_{1x}'(x,y)+\mu\varphi_{2x}'(x,y)=0 \\ f_y'(x,y)+\lambda\varphi_{1y}'(x,y)+\mu\varphi_{2y}'(x,y)=0 \\ \varphi_1(x,y)=0 \\ \varphi_2(x,y)=0 \end{cases}$，求得驻点；

③根据实际问题，判断驻点是否为极值点或最值点.

第六章　二重积分

一、二重积分的概念

1.概念

$$\iint_D f(x,y)d\sigma .$$

2.几何意义

当$z=f(x,y)\geq 0,(x,y)\in D$时，二重积分表示以$z=f(x,y)$为曲顶，以$D$为底的曲顶柱体的体积.

3.物理意义

当$z=f(x,y)\geq 0,(x,y)\in D$时，二重积分表示 平面薄片的质量.

二、二重积分的性质

1.基本性质

(1) $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma,k$为常数

(2) $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\pm g(x,y)d\sigma$

(3) $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n}\iint\limits_{D_i} f(x,y)d\sigma$, 其中$D_i$为 D 的区域划分且任两个子域最多只有边界重叠（$i=1,2,\cdots,n$）.

(4)$\iint\limits_D d\sigma=A$, 其中A为D的面积.

(5)比较定理

若在D上恒有$f(x,y)\le g(x,y)$, 则$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

(6)估值定理

设M,m分别为$f(x,y)$在闭域D上的最大与最小值, A为D的面积,

则： $mA\le\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le MA$.

(7)中值定理

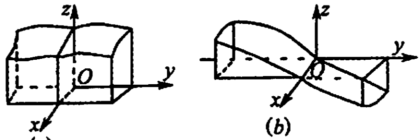
若$f(x,y)$在闭域D上连续，A为D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,η)使$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)A$.

2.普通对称性

(1) 如果积分域D关于x轴对称, $f(x,y)$为y的奇偶函数, 则二重积分$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$

$$=\begin{cases}0, f\text{关于}y\text{为奇函数, 即}f(x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, f\text{关于}y\text{为偶函数, 即}f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_1为D在上半平面部分.这个性质的几何意义见图(a),(b)



(a)

(b)

(2) 如果积分域D关于y轴对称，$f(x,y)$为x的奇偶函数，

则二重积分$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\begin{cases}0, f\text{关于}x\text{的奇函数,即}f(-x,y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma, f\text{关于}x\text{为偶函数,即}f(-x,y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_2为D在右半平面部分

(3) 如果D关于原点对称,$f(x,y)$同时为x,y的奇偶函数，

则二重积分$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$=\begin{cases}0, f\text{关于}x,y\text{的奇函数, 即}f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma, f\text{关于}x,y\text{为偶函数, 即}f(-x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

D_1为D在上半平面部分.

3.轮换对称性

任何情况下均有 $I=\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_{yx}} f(y,x)dydx$ 成立，

因为二重积分与变量无关，对换 x,y 不影响结果.

若积分区域 D_{xy} 关于 $y=x$ 对称，即 $D_{xy}=D_{yx}$，则二重积分 $I=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}}[f(x,y)+f(y,x)]dxdy$.

若 $f(x,y)=f(y,x)$，即被积函数具有轮换对称性，则二重积分 $I=\frac{1}{2}\iint\limits_{D_{xy}\cup D_{yx}}f(x,y)dxdy$，其中 D_{xy},D_{yx} 最多只有边界重叠.

三、二重积分的计算

步骤：

①画积分区域 D；观察对称性；

②观察被积函数，选择积分次序；

③选择坐标系，化为累次积分；

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}f(x,y)dy\\ \int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)dx\\ \int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\end{cases}$$

④计算，先计算后面，再代入前面进行计算.

第七章 无穷级数（数学一、三）

一、数项级数

1.级数的敛散性

(1)设 $c \neq 0$的常数，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$有相同敛散性

(2)设有两个数级$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$,则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = s \pm \sigma$.

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$发散.

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sum_{n=1}^{\infty} v_n$均发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$敛散性不确定.

注：添加或去消有限项不影响一个级数的敛散性.

设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则对其各项任意加括号后所得新级数

仍收敛于原级数的和

2.正项级数敛散性的判定

(1)比较判敛法：设$0 \leq u_n \leq v_n$，若

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛；$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散

(2)比较法的极限形式：设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$及$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数

且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A(v_n\neq 0)$

①若$A\neq 0$且为常数，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$同敛散

②若$A=0$,且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛

③若A为$+\infty$,且$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散

两个常用的比较级数:

①等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\begin{cases}\frac{a}{1-r},|r|<1\\ \text{发散},|r|\geq 1\end{cases}$

②$p-$级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\begin{cases}\text{收敛，}p>1\text{时}\\ \text{发散，}p\leq 1\text{时}\end{cases}$

(3)比值判别法(达朗贝尔准则)(适用于通项u_n中含有 n!

或关于 n 的若干连乘积形式)

设$u_n\geq 0,n=1,2\cdots$对于$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$来讲

$$
若\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}\rho>1时,\sum_{n=1}^{\infty}u_n发散\\ \rho=1时，方法失效\\ \rho<1时,\sum_{n=1}^{\infty}u_n收敛\end{cases}
$$

3.交错级数敛散性的判定

莱布尼兹准则：

若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,(u_n>0)$满足条件：

(1)$u_n\ge u_{n+1},(n=1,2,\cdots\cdots)$；　(2)$\lim_{n\to\infty}u_n=0$,

则交错级数收敛，其和$S\le u_1$,其 n 项余和的绝对值$|R_n|\le u_{n+1}$.

4.一般级数敛散性的判定

(1)绝对收敛：若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，且此时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$一定也收敛.

(2)条件收敛：若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.

二、幂级数

1.幂级数的概念

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

收敛半径，若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$, 则$R=\dfrac{1}{\rho}$.

2.函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛域的求法步骤

(1)用比值（或根值）法求$\rho(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\rho(x)(\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\rho(x));$$

(2)解不等式方程$\rho(x)<1$, 求出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛区间$(a,b)$;

(3)考察$x=a$（或$x=b$）时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$（或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$）的敛散性

(4) 写出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域

3.幂级数的四则运算性质

设$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(x),\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=g(x)$, 其收敛半径分别为

$R_1,R_2,R=\min(R_1,R_2)$, 则对$\forall x\in(-R,R)$, 有：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n = f(x) \pm g(x)$, 且 在 $(-R,R)$ 内绝对收敛.

$$(2)\ (\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)x^n$$

$$= f(x)g(x).$$

(3) 设$b_0 \neq 0$,则在$x=0$的足够小邻域内

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots}$$

$$= C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n + \cdots$$

利用多项式的长除法可得: $C_0 = \dfrac{a_0}{b_0}, C_1 = \dfrac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0^2}, \cdots$.

4.幂级数的分析性质

设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$,则在$(-R,R)$内有

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$f(x)$ 是连续的。

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$可逐项微分, 且$f_x' = (\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可逐项积分，且 $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n)dt$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^x a_n t^n dt) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

5.函数的幂级数展开

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某一邻域内具有任意阶导数，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒级数.

当 $x_0 = 0$ 时，级数化为：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

称为麦克劳林级数 .

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 某领域内具有任意阶导数，则泰勒级数

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$收敛于$f(x)$的充分条件$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$, 其中

$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0)^{n+1},0<\theta<1.$

6.常见的幂级数展开式

$$(1)\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}u^n,(-1,1)$$

$$(2)\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots+(-1)^n u^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n,(-1,1)$$

$$(3)e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\cdots+\frac{u^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!},(-\infty,+\infty)$$

$$(4)\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!},(-\infty,+\infty)$$

$$(5)\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!},(-\infty,+\infty)$$

$$(6)\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1},(-1,1)$$

$$(7)\ (1+u)^a=1+au+\frac{a(a-1)}{2!}u^2+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}u^n\cdots$$

(随 a 的不同而不同，但在 $(-1,1)$ 总有意义)

三、傅里叶级数

1.傅里叶级数的概念

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 或 $[0,2\pi]$ 上可积，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx,(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx,(n=1,2,\cdots)$$

称为 $f(x)$ 的傅立叶系数.

以傅立叶系数为系数的三角级数 $\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

称为 $f(x)$ 的傅立叶级数，记为 $f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数，且在 $[-l,l]$ 上可积，则以

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,(n=0,1,2\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,(n=0,1,2\cdots)$$

为系数的三角级数$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$称为$f(x)$的傅立叶级数，记为$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$.

3.狄利克雷收敛定理

设函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上满足条件：

(1)除有限个第一类间断点外都连续。

(2)只有有限个极值点，则$f(x)$的傅立叶级数在$[-\pi,\pi]$上收敛

且 $S(x)=\begin{cases}f(x),x\text{为}f(x)\text{的连续点；}\\ \frac{1}{2}[f(x_0-0)+f(x_0+0)],x_0\text{为}f(x)\text{的第一类间断点；}\\ \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi_0+0)],x=\pm\pi.\end{cases}$

4.正弦级数、余弦级数

(1) $f(x)$ 为$[0,l]$上的非周期函数，令：

$F(x)=\begin{cases}f(x),0\le x\le l\\ f(-x),-l\le x<0\end{cases}$， $F(x)$ 除 $x=0$ 外在区间$[-\pi,\pi]$上

为偶函数，则 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$（余弦级数），

其中：$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx$（n=0，1，2，……）.

(2) $f(x)$ 为 $[0,l]$ 上的非周期函数，令：

$F(x)=\begin{cases}f(x),0\le x\le l\\ -f(-x),-l\le x<0\end{cases}$，$F(x)$ 除 $x=0$ 外在区间 $[-\pi,\pi]$

上为奇函数，则 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$（正弦级数），

其中：$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$（n=1，2，……）

第八章 向量代数与空间几何（数学一）

一、向量的概念，向量的线性运算

1.向量

既有大小又有方向的量，又称向量.

2.向量的模

向量 $\vec{a}$ 的大小.记为 $|\vec{a}|$.

3.向量的坐标表示

若向量用坐标表示 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\{x,y,z\}$，则 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

4.向量的运算法则

(1)加减运算 设有向量 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $\vec{a}\pm\vec{b}=\{x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2\}$.

(2)数乘运算 数乘运算定义为向量 $\vec{a}$ 与一数量 λ 之积

$\lambda\vec{a}$，$\lambda\vec{a}=\begin{cases}|\lambda\vec{a}|\overline{a^0} & \lambda>0,即与\vec{a}同向\\ \vec{0} & \lambda=0,即为零向量\\ -|\lambda\vec{a}|\overline{a^0} & \lambda<0,即与\vec{a}反向\end{cases}$，设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，则

$\lambda\vec{a}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}$.

二、向量的数量积、向量积、混合积

1.向量的数量积（点积，内积）

向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$.

设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

2.向量的向量积（叉积，外积）

设有两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$，若存在一个向量 $\vec{c}$，满足如下条件

（1）$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$；

（2）$\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$，即 $\vec{c}$ 垂直于 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 所确定的平面；

（3）$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 成右手系.则称向量 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积，记 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$.

设 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\bar{k}.$$

3.向量的混合积

设有三个向量$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$，若先作$\bar{a}$，$\bar{b}$的叉积$\bar{a}\times\bar{b}$，再与$\bar{c}$作点积$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$，则这样的数积称为向量$\bar{a}$，$\bar{b}$，$\bar{c}$的混合积，记为$(a,b,c)$，即$(a,b,c)=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}.$

设$\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\bar{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$，

则$(a,b,c)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$

三、向量的位置关系

1.向量之间的位置关系及结论

设$\bar{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\bar{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\bar{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$

（1）$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$；

（2）$\bar{a}//\bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\times\bar{b}=\bar{0} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$；

其中 x_2,y_2,z_2 之中有一个为“0”，如 $x_2=0$，应理解为 $x_1=0$；

（3）$\bar{a}$，$\bar{b}$ 不共线 $\Leftrightarrow \exists$ 不全为零的数 λ,μ 使 $\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}=\bar{0}$；

（4）向量 $\bar{a}$ 与 $\bar{b}$ 的夹角，可由下式求出

$$\cos(\bar{a}\hat{}\bar{b})=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\cdot\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}};$$

（5）$\bar{a}$，$\bar{b}$，$\bar{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \exists$ 不全为零的数 λ,μ,v，使

$\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}+v\bar{c}=\bar{0}$ 或者 $(a,b,c)=0$

2.单位向量

模为 1 的向量. 向量 $\bar{a}$ 的单位向量记作 $\overline{a^0}$，

$$\overline{a^0}=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\}.$$

3.向量的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 α,β,γ 为向量 $\bar{a}$ 与各坐标轴正向的夹角.

4.单位向量的方向余弦

显然 $\overline{a^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，且有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

四、空间平面与直线

1.平面方程

(1)一般式方程

$Ax+By+Cz+D=0$，法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$

若方程中某个坐标不出现，则平面就平行于该坐标轴，例如平面 $Ax+Cz+D=0 // y$ 轴.

(2)平面的点法式方程

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ $M(x_0,y_0,z_0)$ 为平面上已知点，$\vec{n}=\{A,B,C\}$ 为法向量.

(3)三点式方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$ $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ， $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ，

$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 为平面上的三个点.

(4)截距式方程

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$， a,b,c 分别为平面上坐标轴上的截距，即平面通过三点 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$.

2.直线方程

(1)一般式方程(两平面交线)

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1x+D_1=0 & 平面\pi_1 \\ A_2x+B_2y+C_2x+D_2=0 & 平面\pi_2 \end{cases}$$

平面 π_1 与平面 π_2 的法向量分别为 $\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ ，

$\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ ，直线的方向向量为 $\vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$

(2)标准式方程

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

$M(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上已知点，$\vec{s}=\{l,m,n\}$ 为直线的方向向量.

(3)两点式方程

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1)$， $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为直线上的两点。

(4)参数式方程

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$ $M(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上已知点，$\vec{s}=\{l,m,n\}$ 为直线的方向向量。

3.平面间的关系

设有两个平面：平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和平面 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

(1)平面 π_1 // 平面 π_2 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

(2)平面 $\pi_1 \perp$ 平面 π_2 $\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

(3)平面 π_1 与平面 π_2 的夹角 θ，由下式确定

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

4.平面与直线间关系

直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

平面 π_1： $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

(1) $L // \pi \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$

(2) $L\perp\pi \Leftrightarrow \dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$

(3) L 与 π 的夹角 θ，由下式确定

$$\sin\theta=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

5.直线间关系

设有两直线：直线 $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$

直线 $L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$

(1) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$

(2) $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

(3)直线 L_1 与 L_2 的夹角 θ，由下式确定

$$\cos\theta = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

6.点到平面的距离

$M(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

7.点到直线的距离

$M(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ 距离为

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \times \overrightarrow{M_1P}\right|}{\overrightarrow{M_1P}} = \frac{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ l & m & n \end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

五、空间曲面与曲线

1.准线为各种形式的柱面方程的求法

(1)准线为 $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z \quad\quad = 0 \end{cases}$，母线 // z 轴的柱面方程为

$f(x,y) = 0$，

准线为 $\Gamma: \begin{cases} \varphi(x, z) = 0 \\ y \quad\quad = 0 \end{cases}$，母线 // y 轴的柱面方程为

$\varphi(x,z)=0$，

准线为$\Gamma:\begin{cases}\psi(y,z)=0\\ x\qquad\;\;=0\end{cases}$，母线//$x$轴的柱面方程为

$\psi(y,z)=0$.

(2)准线为$\Gamma:\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$，母线的方向向量为

$\{l,m,n\}$的柱面方程的求法

首先，在准线上任取一点(x,y,z)，则过点(x,y,z)的母线

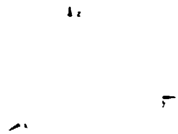
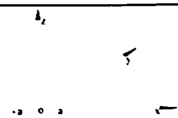
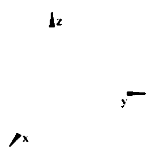
方程为$\dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}$

其中X,Y,Z为母线上任一点的流动坐标，消去方程组

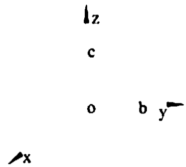
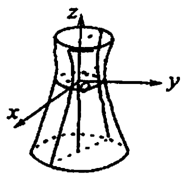
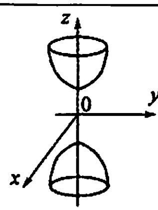
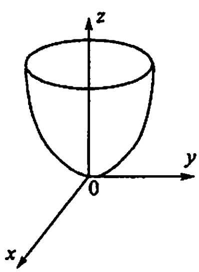
$$\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\\ \dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}\end{cases}$$

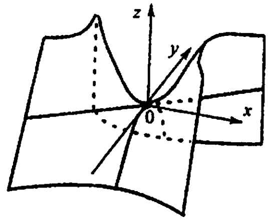
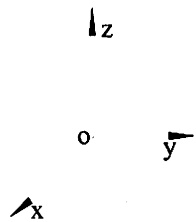
中的x,y,z便得所求的柱面方程.

2.常见柱面方程

常见的柱面方程		
名称	方程	图形
圆柱面	$x^2+y^2=R^2$	
椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
抛物柱面	$x^2=2py,(p>0)$	

标准二次方程及其图形		
名称	方程	图形

椭球面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c$ 均为正数$)$	
单叶双曲面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c$ 均为正数$)$	
双叶双曲面	$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a,b,c$ 均为正数$)$	
椭圆的抛物面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2pz$ $(a,b,p$ 为正数$)$	

双曲抛物面 (又名马鞍面)	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$ $(a,b,p$ 均为正数)	
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $(a,b,c$ 为正数)	

六、空间曲线的切线、法平面与空间曲面的切平面、法线

1.曲线的切线及法平面方程

(1)曲线$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$在$(x_0,y_0,z_0)\leftrightarrow t=t_0$处的切线方程：

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

法平面方程：

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

(2)空间曲线Γ的一般式方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，

则在曲线Γ的$P(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程：

$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_p}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_p}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_p}$$

法线方程：

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_p(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_p(y-y_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_p(z-z_0)=0$$

2.空间曲面的切平面和法线方程

(1)设曲面$\sum$为显示方程$z=f(x,y)$,则在$\sum$上一点$P(x_0,y_0,z_0)$处的

切平面方程:$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p(x-x_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_p(y-y_0)-(z-z_0)=0.$

法线方程:$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_p}=\frac{z-z_0}{-1}$

(2)设曲面$\sum$为隐式方程$F(x,y,z)=0$,则在$\sum$上一点$P(x_0,y_0,z_0)$的

切平面方程：$F'_x\big|(x-x_0)+F'_y\big|_p(y-y_0)+F'_z\big|_p(z-z_0)=0$

法线方程:$\frac{x-x_0}{F'_x|_p}=\frac{y-y_0}{F'_y|_p}=\frac{z-z_0}{F'_z|_p}$

第九章 三重积分（数学一）

一、三重积分的概念

1.概念

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv.$$

2.物理意义

当$f(x,y,z)\geq 0,(x,y,z)\in\Omega$时，三重积分表示空间物体的质量.

二、三重积分的性质

1.基本性质

(1) $\iiint\limits_{\Omega} kf(x,y,z)dv = k\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv, k$为常数

(2) $\iiint\limits_{\Omega}[f(x,y,z)+g(x,y,z)]dv = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv + \iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dv$

(3) $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \sum_{i=1}^{n}\iiint\limits_{\Omega_i} f(x,y,z)dv$, 其中$\Omega_i$为 Ω 的区域划分且任两个子域最多只有边界重叠($i=1,2,\cdots,n$).

(4) $\iiint\limits_{\Omega} dv = A$, 其中$A$为$\Omega$的体积.

(5)比较定理

若在Ω上恒有$f(x,y,z)\le g(x,y,z)$,则$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv\le\iiint\limits_{\Omega} g(x,y,z)dv$

(6)估值定理

设M,m分别为$f(x,y,z)$在闭域Ω上的最大与最小值,A为Ω的体积,

则： $mA\le\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv\le MA$.

(7)中值定理

若$f(x,y,z)$在闭域Ω上连续，A为Ω的体积，则在Ω内至少存在一点(ξ,η,γ)使$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=Af(\xi,\eta,\gamma)$.

2.普通对称性

(1) 如果积分域Ω关于xoz面对称,$f(x,y,z)$为y的奇偶函数,则

三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$

$$=\begin{cases}0,f\text{关于}y\text{为奇函数, 即}f(x,-y,z)=-f(x,y,z)\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv,f\text{关于}y\text{为偶函数, 即}f(x,-y,z)=f(x,y,z)\end{cases}$$

Ω_1为Ω在$y>0$一侧的部分.

(2)Ω 关于其他坐标面对称有类似结论.

3.轮换对称性

若积分区域Ω具有轮换对称性，即对换坐标x,y,z后，Ω不变，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(z,y,x)dv$.

三、三重积分的计算

步骤：

①画积分区域Ω；观察对称性；

②观察被积函数，选择积分次序；

③选择坐标系，化为累次积分；

截面法：$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_a^b dz\iint\limits_{D_{截}} f(x,y,z)dxdy$

投影法：$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D_{投}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

柱面坐标：

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr\int_{z_1(\theta,r)}^{z_2(\theta,r)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$$

球面坐标：$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$

$$=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi\int_{r_1(\theta,\varphi)}^{r_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$$

④计算，先计算后面，再代入前面进行计算.

第十章 曲线积分（数学一）

一、第一类曲线积分

1.概念

$\int_L f(x,y)ds$，代表曲线状物体的质量.

2.性质

若曲线L关于y轴对称,L_1为曲线L在y轴右侧部分,则

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{L_1} f(x,y)ds, & 若f(-x,y)=f(x,y)\\ 0, & 若f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}.$$

若曲线L关于x轴对称，有类似结论.

若曲线L关于$y=x$对称，即L具有轮换对称性，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds=\frac{1}{2}\int_L [f(x,y)+f(y,x)]ds.$$

3.计算

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2}dx\\ \int_c^d f(x(t),y(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt\\ \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2+r'^2}d\theta\end{cases}$$

二、第二类曲线积分

1.概念

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

2.性质

若曲线 L 关于 y 轴对称, L_1 为曲线 L 在 y 轴右侧部分,则

$$\int_L P(x,y)dx=\begin{cases}2\int_{L_1} P(x,y)dx, 若P(-x,y)=P(x,y)\\ 0, \qquad\qquad 若P(-x,y)=-P(x,y)\end{cases};$$

$$\int_L Q(x,y)dy=\begin{cases}0, \qquad\qquad 若Q(-x,y)=Q(x,y)\\ 2\int_{L_1} Q(x,y)dx, 若Q(-x,y)=-Q(x,y)\end{cases}.$$

若曲线 L 关于 x 轴对称，有类似结论.

3.计算

(1)直接法

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_a^b [P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)]dx\\ \int_c^d [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt\\ \int_\alpha^\beta [P(r\cos\theta,r\sin\theta)(r\cos\theta)'+Q(r\cos\theta,r\sin\theta)(r\sin\theta)']d\theta\end{cases}$$

(2)间接法

①平面曲线积分与路径无关的四个等价条件

设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通区域D上具有一阶连续偏导数，则 $\int_L Pdx+Qdy$ 与路径无关

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y},\forall(x,y)\in D$

$\Leftrightarrow \oint_L Pdx+Qdy=0,L$ 为一简单分段光滑封闭曲线

$\Leftrightarrow$ 存在函数 $u(x,y),(x,y)\in D$ 使 $du(x,y)=Pdx+Qdy$, 且 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$

②格林公式

设平面上的有界闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有 D 连续的一阶偏导数，则有

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy .$$

第十一章 曲面积分（数学一）

一、第一类曲面积分

1.概念

$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS$ 代表空间曲面薄片的质量.

2.性质

若 Σ 关于 yoz 面对称，记 Σ_1 为 Σ 在 $x>0$ 的部分，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS, & 若f(x,y,z)=f(-x,y,z)\\ 0 & 若f(x,y,z)=-f(-x,y,z)\end{cases}$$

若 Σ 关于其他坐标面对称，有类似结论.

若 Σ 具有轮换对称性，即对换 x,y,z，Σ 不变，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(y,x,z)dS=\iint\limits_{\Sigma} f(z,y,x)dS$$

3.计算

一投、二代、三计算

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint\limits_{D_{\Sigma}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}dxdy$$

往其他坐标面投影具有类似结论.

二、第二类曲面积分

1.概念

$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy$ 代表穿过有向曲面的流量.

2.性质

若Σ关于 yoz 面对称，记Σ_1为Σ在$x>0$的部分，则

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz=\begin{cases}0, & ,若P(-x,y,z)=P(-x,y,z)\\ 2\iint\limits_{\Sigma_1} P(x,y,z)dydz, & 若P(-x,y,z)=-P(-x,y,z)\end{cases}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_1} Q(x,y,z)dydz, & 若Q(-x,y,z)=Q(-x,y,z)\\ 0, & ,若Q(-x,y,z)=-Q(-x,y,z)\end{cases}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)dydz, & 若R(-x,y,z)=R(-x,y,z)\\ 0, & ,若R(-x,y,z)=-R(-x,y,z)\end{cases}$$

若Σ关于其他坐标面对称，具有类似结论.

3.计算

(1)直接法

①一投、二代、三定号

$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$，$\pm$取决于有向曲面

的法向量与 z 轴正向的夹角，若为锐角则取正，若为钝角则为负.

②轮换投影法（向量点积法）

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iint_{\Sigma}(P,Q,R)(-z'_x,-z'_y,1)dxdy\ .$$

(2)间接法（高斯公式）

设 Ω 是空间中的有界闭区域，由分块光滑的曲面所 S 围成，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Ω 由连续的一阶偏导数，则

$$\iint_{S} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

三、两类曲面积分之间的关系

$$\iint_{S} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS$$

这里 S 是 Ω 的整个边界的外侧(即取外法向)，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 S 上点 (x,y,z) 处的外法向量的方向余弦.

四、空间曲线积分

$$\int_{L} Pdx+Qdy+Rdz$$

①将 L 化为参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，直接代入计算

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$
$$=\int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)$$
$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt$$

②斯托克斯公式

设 L 为分段光滑的又向闭曲线，S 是以 L 为边界的分块光滑有向曲面，L 的正向与 S 的侧(即法向量的指向)符合右手法则，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在包含 S 的一个空间区域内有连续的一阶偏导数，则有

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$ 或

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

第十二章　场论初步（数学一）

一、方向导数与梯度

1.可微函数的方向导数

(1)设 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 存在方向导数且

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta$$

在平面上 l 除了用方向角表示外也可用极角表示：

$l=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta$是$l$的极角，$\theta\in[0,2\pi]$此时相应的方向导数的计算公式为 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin\theta$

(2)设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 存在方向导数且有

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

2.梯度

$$gradf(x_0,y_0)=(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y})$$

$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial l}$随$l$而变化， $l=\frac{grad(f(x_0,y_0)}{|grad(f(x_0,y_0)|}$ 即沿梯度方向时，方向导数取最大值$|grad\, f(x_0,y_0)|$

二、散度与旋度

1.散度的计算公式

设 $\bar{A}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k};P,Q,R$ 均可导，

则 $\bar{A}$ 在 $P(x,y,z)$ 点处的散度为 $div\bar{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

2.旋度的计算公式

设有向量场 $\bar{A}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$ ，其中

P,Q,R 均有连续的一阶偏导数，则旋度 $rot\bar{A}$ 为：

$$rot\bar{A}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

第二部分 线性代数

第一章 行列式

1.行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} \text{(1)取数相乘, 来自不同行不同列} \\ \text{(2)冠以符号,}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} \\ \text{(3)全部相加,}\sum\limits_{n!}(-1)^{\tau} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \end{cases}$$

2.行列式按行（列）展开定理

$$\text{设}A=(a_{ij})_{n\times n},\text{则}a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$$

或 $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$

即 $$AA^*=A^*A=|A|E,\text{其中}$$

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=(A_{ji})=(A_{ij})^T$$

3.行列式的重要结论

(1)设 A,B 为 n 阶方阵，则 $|AB|=|A||B|=|B||A|=|BA|$

但 $|A\pm B|=|A|\pm|B|$ 不一定成立.

(2) $|kA|=k^n|A|$, A为n阶方阵

(3) 设A为n阶方阵，则 $|A^T|=|A|$;$|A^{-1}|=|A|^{-1}$;

(若A可逆) $|A^*|=|A|^{n-1}$ ($n\geq 2$)

(4) $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix}=|A||B|$，$A,B$为方阵，

但 $\begin{vmatrix} O & A_{m\times m} \\ B_{n\times n} & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}\cdot|A||B|$.

(5)范德蒙行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$

设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_i(i=1,2\cdots,n)$ 是 A 的 n 个特征值，则

$|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$.

第二章 矩阵

一、矩阵的概念、运算

1.矩阵的概念

$m\times n$个数a_{ij}排成m行n列的表格$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$称为矩阵，简记为$A$或$(a_{ij})_{m\times n}$.

若$m=n$,则称A是n阶矩阵或n阶方阵.

2.矩阵的运算

(1)矩阵的加法

设$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$是两个$m\times n$矩阵，则$m\times n$矩阵$C=(c_{ij})=a_{ij}+b_{ij}$称为矩阵A 与B的和，记为$A+B=C$

(2)矩阵的数乘

设$A=(a_{ij})$是$m\times n$矩阵，k是一个常数，则$m\times n$矩阵(ka_{ij})称为数k与矩阵A的数乘，记为kA.

(3)矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 称为 A 与 B 的乘积，记为 $C=AB$.

二、方阵的一些结论

1. A^T、A^{-1}、A^* **三者之间的关系**

(1)$(A^T)^T=A,(AB)^T=B^TA^T,(kA)^T=kA^T,(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

(2)$(A^{-1})^{-1}=A,(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$，但 $(A\pm B)^{-1}=A^{-1}\pm B^{-1}$ 不一定成立，

(3)$(A^*)^*=|A|^{n-2}A(n\geq 3)$，$(AB)^*=B^*A^*$，$(kA)^*=k^{n-1}A^*(n\geq 2)$. 但 $(A\pm B)^*=A^*\pm B^*$ 不一定成立

(4)$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1},(A^{-1})^*=(A^*)^{-1},(A^*)^T=(A^T)^*$

2.有关 A*的结论

(1)$AA^*=A^*A=|A|E$

(2)$|A^*|=|A|^{n-1}(n\geq 2),(kA)^*=k^{n-1}A^*,(A^*)^*=|A|^{n-2}A(n\geq 3)$

(3)若 A 可逆，则 $A^*=|A|A^{-1},(A^*)^*=\dfrac{1}{|A|}A$

(4)若 A 为 n 阶方阵，则 $r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

3.有关 A^{-1} 的结论

A可逆 $\Leftrightarrow AB=E;\Leftrightarrow |A|\neq 0;\Leftrightarrow r(A)=n;$

$\Leftrightarrow$ A可以表示为初等矩阵的乘积；

$\Leftrightarrow$ A无零特征值；$\Leftrightarrow Ax=0$只有零解

三、初等矩阵与秩

1.初等矩阵与对角矩阵

(1)初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

(2) $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$，左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，λ_i 乘 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素；右乘，λ_i 乘 $\boldsymbol{A}$ 的各列元素；

(3)对调两行或两列，符号 $\boldsymbol{E(i,j)}$，且 $\boldsymbol{E(i,j)}^{-1}=\boldsymbol{E(i,j)}$，

例如：$\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$；

(4)倍乘某行或某列，符号 $\boldsymbol{E(i(k))}$，且 $\boldsymbol{E(i(k))}^{-1}=\boldsymbol{E(i(\frac{1}{k}))}$，

例如：$\begin{pmatrix}1&&\\&k&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{1}{k}&\\&&1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

(5)倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$，且

$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$，如：$\begin{pmatrix}1&&k\\&1&\\&&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&&-k\\&1&\\&&1\end{pmatrix}(k\neq 0)$；

2.有关矩阵秩的结论

(1)秩 $r(A_{m\times n})$ =行秩=列秩;

(2) $r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$;

(3) $A\neq 0\Rightarrow r(A)\ge 1$；

(4) $0\le r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$；

(5) $r(A^T)=r(A)$；

(6)若 $A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$；

(7)若 P、Q 可逆，则 $r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）

(8) $\max(r(A),r(B))\le r(A,B)\le r(A)+r(B)$；

(9) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$；

(10) $r(AB)\le \min(r(A),r(B))$；

(11)如果 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，且 $AB=0$，

则：

① $\boldsymbol{B}$ 的列向量全部是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 解（转置运算后的结论）；

② $\boldsymbol{r(A)+r(B)\le n}$

(12)若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，则 $\boldsymbol{r(AB)\ge r(A)+r(B)-n}$；

若 $r(A_{m\times n})=n\Rightarrow r(AB)=r(B)$;

若 $r(A_{m\times s})=n\Rightarrow r(AB)=r(A)$;

(13) $r(A_{m\times s})=n\Leftrightarrow Ax=0$ 只有零解.

(14) $$\boldsymbol{r(A^*)}=\begin{cases}\boldsymbol{n} & \boldsymbol{r(A)=n}\\ 1 & \boldsymbol{r(A)=n-1}\\ 0 & \boldsymbol{r(A)<n-1}\end{cases}$$

四、矩阵等价

1.等价的概念

(1)矩阵行等价：$\boldsymbol{A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow PA=B}$（左乘，$\boldsymbol{P}$ 可逆）

$\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax}=0$ 与 $\boldsymbol{Bx}=0$ 同解

(2)矩阵列等价：$\boldsymbol{A\overset{c}{\sim}B\Leftrightarrow AQ=B}$（右乘，$\boldsymbol{Q}$ 可逆）;

(3)矩阵等价：$\boldsymbol{A\sim B\Leftrightarrow PAQ=B}$（$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 可逆）;

2.对于矩阵 $\boldsymbol{A_{m\times n}}$ 与 $\boldsymbol{B_{l\times n}}$：

(1)若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行秩相等；

(2)若 A 与 B 行等价，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性；

(3)矩阵的初等变换不改变矩阵的秩；

(4)矩阵 A 的行秩等于列秩；

五、分块矩阵

1.分块矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A_m \\ B_n & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A_m \\ B_n & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

2.分块矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$ 这里 A,B 均为可逆方阵.

第三章 向量组

一、向量组的线性相关性

1.有关向量组的线性表示

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可以用其余向量线性表示.

(2) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 惟一线性表示.

(3) β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$

2.有关向量组的线性相关性

(1)部分相关，整体相关；整体无关，部分无关.

(2) ① n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow|\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n|\neq 0$，n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow|\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n|=0$.

② n+1 个 n 维向量线性相关.

③若 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_S$ 线性无关，则添加分量后仍线性无关；或一组向量线性相关，去掉某些分量后仍线性相关.

二、向量组的线性表示、极大无关组与秩

1.向量组的线性表示

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 至少有一个向量可以用其余向量线性表示.

(2) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，$\beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 惟一线性表示.

(3) β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$.

2.向量组的秩

等价于矩阵的秩，化行阶梯型，看台阶数.

3.向量组的极大无关组

(1)部分组，来自组内的向量

(2)线性无关

(3)个数等于向量组的秩

4.向量组的秩与线性相关性

(1)若 $r(A_{m\times n})=r=m$，则 A 的行向量组线性无关.

(2)若 $r(A_{m\times n})=r<m$，则 A 的行向量组线性相关.

(3)若 $r(A_{m\times n})=r=n$，则 A 的列向量组线性无关.

(4)若 $r(A_{m\times n})=r<n$，则 A 的列向量组线性相关

三、向量空间

1.基变换公式及过渡矩阵（仅数学一要求）

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是向量空间 V 的两组基，则基变换公式为

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$$

其中 C 是可逆矩阵，称为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵

2.坐标变换公式（仅数学一要求）

若向量 γ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的坐标分别是 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 即

$\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\beta_n$，则向量坐标变换公式为 $X=CY$ 或 $Y=C^{-1}X$.其中 C 是从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到

基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

3.施密特正交化（全体要求）

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则可构造 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 使其两两正交，且 β_i 仅是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 的线性组合 $(i=1,2,\cdots,n)$，再把 β_i 单位化，记 $\gamma_i=\dfrac{\beta_i}{|\beta_i|}$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_i$ 是规范正交向量组.其中

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

…………………………………

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$$

4.正交基及规范正交基（仅数学一要求）

向量空间一组基中的向量如果两两正交，就称为正交基；若正交基中每个向量都是单位向量，就称其为规范正交基.

第四章　线性方程组

一、齐次线性方程组解的结构与解的判定

(1)齐次方程组 $Ax=0$ 恒有解(必有零解).当有非零解时，由于解向量的任意线性组合仍是该齐次方程组的解向量，因此 $Ax=0$ 的全体解向量构成一个向量空间，称为该方程组的解空间，解空间的维数是 $n-r(A)$，解空间的一组基称为齐次方程组的基础解系.

(2) $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，即

① $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的解；

② $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关；

③ $Ax=0$ 的任一解都可以由 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性表出.

$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的通解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 是任意常数.

(3)若 $r(A_{m\times n})=n$，则 $Ax=0$ 只有零解；若 $r(A_{m\times n})<n$，则 $Ax=0$ 有非零解；

二、非齐次线性方程组解的结构与解的判定

(1)设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 $r(A_{m\times n})=m$，则对 $Ax=b$ 而言必有 $r(A)=r(A\vdots b)=m$, 从而 $Ax=b$ 有解.

(2)设 $x_1,x_2,\cdots x_s$ 为 $Ax=b$ 的解，则 $k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_sx_s$ 当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$ 时仍为 $Ax=b$ 的解；但当 $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$ 时，则为 $Ax=0$的解.特别 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 为 $Ax=b$ 的解； $2x_3-(x_1+x_2)$ 为 $Ax=0$ 的解.

(3)非齐次线性方程组 $Ax=b$ 无解 $\Leftrightarrow r(A)+1=r(\overline{A})\Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

三、克拉默法则

线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$，如果系数行列式 $D=|A|\neq 0$，则方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$，其中 D_j 是把 D 中第 j 列元素换成方程组右端的常数列所得的行列式.

第五章 特征值与特征向量

一、特征值与特征向量的概念

(1)设 λ 是 A 的一个特征值，则

$kA, aA+bE, A^2, A^m, f(A), A^T, A^{-1}, A^*$ 有一个特征值分别为

$k\lambda, a\lambda+b, \lambda^2, \lambda^m, f(\lambda), \lambda, \lambda^{-1}, \frac{|A|}{\lambda}$，且对应特征向量相同（$A^T$ 例外）.

(2) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值，则 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}, \prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$ 从而 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 没有特征值.

(3)设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的 s 个特征值，对应特征向量为

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，若 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，则

$A^n\alpha=k_1A^n\alpha_1+k_2A^n\alpha_2+\cdots+k_sA^n\alpha_s=k_1\lambda_1^n\alpha_1+k_2\lambda_2^n\alpha_2+\cdots k_s\lambda_s^n\alpha_s$

二、相似矩阵的结论

若 A,B 相似，则

(1) $A^T,B^T;A^{-1},B^{-1};A^*,B^*$ 分别相似

(2) $|A|=|B|, \sum_{i=1}^{n}A_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}, r(A)=r(B)$

(3) $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,从而$A, B$有相同的特征值

三、相似对角化

(1)先求特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

(2)再求特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

(3)令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,若 P 可逆,则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$.

四、实对称矩阵的性质与对角化

1.实对称矩阵的性质

(1)实对称矩阵一定可对角化

(2)实对称矩阵不同的特征值对应的特征向量正交

2.实对称矩阵的合同对角化

(1)先求特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

(2)再求特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

(3)正交化得: β_1,β_2,β_3

(4)单位化得: $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$

(5)令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,则 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$

第六章 二次型

一、二次型的概念

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j\text{，其中 }a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)\text{，}$$

称为 n 元二次型，简称二次型. 若令

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},$$

这二次型 f 可改写成矩阵向量形式 $f=x^TAx$.其中 A 称为二次型矩阵，

因为 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，所以二次型矩阵均为对称矩阵，且二次型与对称矩阵一一对应，并把矩阵 A 的秩称为二次型的秩.

二、惯性定理与二次型的标准形、规范形

1.惯性定理

对于任一二次型，不论选取怎样的合同变换使它化为仅

含平方项的标准型，其正负惯性指数与所选变换无关，这就是所谓的惯性定理.

2.标准形

(1)二次型 $f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 经过合同变换 $x=Cy$ 化为 $f=x^TAx=y^TC^TACy=\sum_{i=1}^{r}d_iy_i^2$ 称为 f $(r\le n)$ 的标准形. 在一般的数域内，二次型的标准形不是唯一的，与所作的合同变换有关，但系数不为零的平方项的个数由 $r(A$的秩) 唯一确定.

(2)正交变换法化标准形的步骤

①先求特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

②再求特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

③正交化得：β_1,β_2,β_3

④单位化得：$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$

⑤令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则在正交变换 $x=Qy$ 下，二次型的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$.

3.规范形

任一实二次型 f 都可经过合同变换化为规范形

$f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$，其中 r 为 A 的秩，p 为正惯性指数，$r-p$ 为负惯性指数，且规范型唯一.

三、二次型的正定性

1.正定的充要条件

A 正定 $\Leftrightarrow f(x) = x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$

$\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式全大于零

$\Leftrightarrow$ A 的所有特征值大于零

$\Leftrightarrow$ A 的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow \exists$ 可逆阵 P 使 $A = P^T P$

$\Leftrightarrow$ 存在正交矩阵 Q，使 $Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

其中 $\lambda_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$. 正定 $\Rightarrow kA(k>0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定；

$|A| > 0$, A 可逆；$a_{ii} > 0$，且 $|A_{ii}| > 0$

2.正定的必要条件

设 A 正定 $\Rightarrow kA(k>0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定；$|A| > 0$, A 可逆；

$a_{ii} > 0$，且 $|A_{ii}| > 0$

A, B 正定 $\Rightarrow A+B$ 正定，但 AB，BA 不一定正定.

第三部分　概率论与数理统计（数学一、三）

第一章　随机事件与概率

一、基本概念与运算

1.事件的关系与运算

(1)子事件：$A\subset B$，若 A 发生，则 B 发生.

(2)相等事件：$A=B$，即 $A\subset B$，且 $B\subset A$.

(3)和事件：$A\bigcup B$（或 A+B），A 与 B 中至少有一个发生.

(4)差事件：$A-B$，A 发生但 B 不发生.

(5)积事件：$A\bigcap B$（或 AB），A 与 B 同时发生.

(6)互斥事件（互不相容）：$A\bigcap B=\varnothing$.

(7)互逆事件（对立事件）：$A\bigcap B=\varnothing,$且$A\bigcup B=\Omega$，

记$A=\overline{B}$或$B=\overline{A}$

2.运算律

(1)交换律：$A\bigcup B=B\bigcup A$，$A\bigcap B=B\bigcap A$

(2)结合律：$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$；$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$

(3)分配律：$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$

3.德·摩根律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

4.完全事件组

A_1，$A_2 \cdots$，A_n，两两互斥，且和事件为必然事件，即

$A_i \cap A_j = \varnothing$，$i \neq j$，$\bigcup_{i=1}^{n} = \Omega.$

二、概率与古典概型、几何概型

1.概率

事件发生的可能性大小的度量，其严格定义如下：

概率 $P(\cdot)$ 为定义在事件集合上的满足下面 3 个条件的函数：

(1)对任何事件 A，$P(\text{A}) \geq 0$；

(2)对必然事件 Ω，$P(\Omega) = 1$；

(3)对 A_1，$A_2, \cdots$，$A_n, \cdots$，若 $A_i A_j = \varnothing (i \neq j)$，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A)$.

2.概率的基本性质

(1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

(2) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$;

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$; 特别，

当 $B \subset A$ 时，$P(A - B) = P(A) - P(B)$ 且 $P(B) \leq P(A)$；

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$;

(4)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}(P(A_i)$.

3.古典型概率

实验的所有结果只有有限个，且每个结果发生的可能性相同，其概率计算公式：

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

4.几何型概率

样本空间 Ω 为欧氏空间中的一个区域，且每个样本点的出现具有等可能性，其概率计算公式：

$$P(A)=\frac{A\text{的度量（长度、面积、体积）}}{\Omega\text{的度量（长度、面积、体积）}}$$

三、概率计算公式与事件独立性

1.概率的基本公式

(1)条件概率:

$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，表示$A$发生的条件下，$B$发生的概率

(2)全概率公式：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i),B_iB_j=\varnothing,i\neq j,\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega.$$

(3) Bayes 公式：$P(B_j|A)=\dfrac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)},j=1,2,\cdots,n$

注：上述公式中事件 B_i 的个数可为可列个.

(4)乘法公式：

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P(A_2)P(A_1|A_2)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

2.事件的独立性

(1)A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

(2)A，B，C 两两独立

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B);$

$P(BC)=P(B)P(C);$

$P(AC)=P(A)P(C);$

(3)A，B，C 相互独立

$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B);$

$P(BC)=P(B)P(C);$

$P(AC)=P(A)P(C)$;

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

3.独立重复试验

将某试验独立重复 n 次，若每次实验中事件 A 发生的概率为 p，则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为：

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

4.重要公式与结论

(1)$P(\overline{A})=1-P(A)$

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)$$
$$-P(AC)+P(ABC)$$

(3)$P(A-B)=P(A)-P(AB)$

(4)$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB), P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$$

(5)条件概率 $P(\cdot|B)$ 满足概率的所有性质，

例如：. $P(\overline{A}_1|B)=1-P(A_1|B)$

$$P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$$

$$P(A_1A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B)P(A_2 \mid A_1B)$$

(6)若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则 $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$,

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

(7)互斥、互逆与独立性之间的关系:

A 与 B 互逆 ⇒ A 与 B 互斥，但反之不成立，A 与 B 互斥（或互逆）且均非零概率事件 ⇒ A 与 B 不独立.

(8) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 相互独立，则 $f(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ 与 $g(B_1, B_2, \cdots, B_n)$ 也相互独立，其中 $f(\cdot), g(\cdot)$ 分别表示对相应事件做任意事件运算后所得的事件.

(9)概率为 1（或 0）的事件与任何事件相互独立.

第二章 随机变量及其分布

一、随机变量的概念与性质

1.随机变量及概率分布

取值带有随机性的变量，严格地说是定义在样本空间上，取值于实数的函数称为随机变量，概率分布通常指分布函数或分布律

2.分布函数的概念与性质

定义：$F(x)=P(X\le x),-\infty<x<+\infty$

性质：(1) $0\le F(x)\le 1$， $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$

(2) $F(x)$ 单调不减

(3)右连续 $F(x+0)=F(x)$

二、随机变量的概率分布

1.离散型随机变量的概率分布

$$P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots,n,\cdots \qquad p_i\ge 0,\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$$

2.连续型随机变量的概率密度

概率密度 $f(x)$; 非负可积，且

(1) $f(x) \geq 0$,

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(3) x为$f(x)$的连续点，则$f(x) = F'(x)$分布函数

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

三、常见分布

(1) 0-1 分布：$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0,1$

(2) 二项分布 $B(n,p)$：

$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,\cdots,n$

(3) Poisson 分布 $p(\lambda)$：

$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0,1,2\cdots$

(4) 均匀分布 U（a，b）：$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0, 其他 \end{cases}$

(5) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$：

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0, -\infty < x < +\infty$

(6)指数分布 $E(\lambda)$：$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0 \\ 0, 其他 \end{cases}$

(7)几何分布

$G(p): P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, 0<p<1, k=1,2,\cdots.$

(8)超几何分布

$$H(N,M,n): P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ k=0,1,\cdots,\min(n,M)$$

四、随机变量函数的分布

(1)离散型：$P(X=x_i)=p_i, Y=g(X)$ 则

$$P(Y=y_j)=\sum_{g(x_i)=y_j} P(X=x_i)$$

(2)连续型：$X\sim f_X(x), Y=g(x)$ 则

$$F_y(y)=P(Y\le y)=P(g(X)\le y)=\int_{g(x)\le y} f_x(x)dx,\quad f_Y(y)=F'_Y(y).$$

五、重要公式与结论

(1)$X\sim N(0,1)\Rightarrow \varphi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \Phi(0)=\frac{1}{2},$

$\Phi(-a)=P(X\le -a)=1-\Phi(a)$

(2)$X\sim N(\mu,\sigma^2)\Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 且 $P(X\le a)=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

(3)$X\sim E(\lambda)\Rightarrow P(X>s+t\mid X>s)=P(X>t)$

(4)$X\sim G(p)\Rightarrow P(X=m+k\mid X>m)=P(X=k)$

(5)离散型随机变量的分布函数为阶梯间断函数；连续型随机变量的分布函数为连续函数，但不一定为处处可导函数.

第三章 多维随机变量及其分布

一、二维随机变量的分布

1.二维随机变量及其联合分布

由两个随机变量构成的随机向量(X,Y)，联合分布为$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$

2.离散型随机变量的概率分布

(1)联合概率分布律

$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij};i,j=1,2,\cdots$

(2)边缘分布律

$$p_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij},i=1,2,\cdots;\ p_{\cdot j}=\sum_{i}^{\infty}p_{ij},j=1,2,\cdots$$

(3)条件分布律

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\ ;P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

3.连续型随机变量的概率分布

(1)联合概率密度$f(x,y)$:

① $f(x,y)\ge 0$

② $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

(2)分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$$

(3)边缘概率密度：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\ ;\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

(4)条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\ ;\ f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

二、常见二维随机变量的联合分布

(1)二维均匀分布

$$(x,y)\sim U(D)\quad,\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)},(x,y)\in D\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

(2)二维正态分布

$(X,\ Y)\sim N(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

三、两个随机变量函数的概率分布

(1)离散型：

$P(X=x_i,Y=y_i)=p_{ij},Z=g(X,Y)$ 则

$$P(Z=z_k)=P\{g(X,Y)=z_k\}=\sum_{g(x_i,y_i)=z_k}P(X=x_i,Y=y_j)$$

(2)连续型：

$(X,Y)\sim f(x,y),Z=g(X,Y)$,则：

①分布函数法

$$F_z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}=\iint_{g(x,y)\le z}f(x,y)dxdy,$$

$$f_z(z)=F'_z(z)$$

②公式法

由 $Z=g(X,Y)$ 解得 $y=y(x,z),x=x(y,z)$，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y(x,z))\cdot\left|\frac{\partial y(x,z)}{\partial z}\right|dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x(y,z),y)\cdot\left|\frac{\partial x(y,z)}{\partial z}\right|dy$$

四、一些重要公式与结论

(1)边缘密度公式：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,;\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$$

(2) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy$

(3)若（X，Y）服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 则

有：

① $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

②X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\rho=0$，即 X 与 Y 不相关.

③ $C_1X+C_2Y\sim N(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2+2C_1C_2\sigma_1\sigma_2\rho)$.

④X 关于 Y=y 的条件分布为：

$N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2))$.

⑤Y 关于 X=x 的条件分布为：

$N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2))$.

(4)若 X 与 Y 独立，且分别服从 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_1,\sigma_2^2)$, 则:

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$,

$C_1X+C_2Y\sim N(C_1\mu_1+C_2\mu_2,C_1^2\sigma_1^2+C_2^2\sigma_2^2)$.

(5)若 X 与 Y 相互独立，$f(x)$和$g(x)$ 为连续函数，

则 $f(X)$与$g(Y)$ 也相互独立.

第四章　随机变量的数字特征

一、期望

1.数学期望

离散型：$P\{X=x_i\}=p_i,E(X)=\sum_i x_i p_i$；

连续型：$X\sim f(x),E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

2.性质

(1) $E(C)=C,E[E(X)]=E(X)$

(2) $E(C_1X+C_2Y)=C_1E(X)+C_2E(Y)$

(3)若 X 和 Y 独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$

(4) $[E(XY)]^2\le E(X^2)E(Y^2)$

3.随机变量函数的数学期望

(1)对于函数 $Y=g(x)$

X 为离散型：$P\{X=x_i\}=p_i,E(Y)=\sum_i g(x_i)p_i$；

X 为连续型：$X\sim f(x),E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

(2) $Z=g(X,Y)$；

$$(X,Y)\sim P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\,;E(Z)=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$$

$$(X,Y)\sim f(x,y)\,;E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

二、方差

1.定义及公式

(1)方差： $D(X)=E\left[X-E(X)\right]^2=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$

(2)标准差： $\sqrt{D(X)}$，

(3)离散型： $D(X)=\sum_i\left[x_i-E(X)\right]^2p_i$

(4)连续型： $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-E(X)\right]^2f(x)dx$

2.性质

(1) $D(C)=0,D[E(X)]=0,D[D(X)]=0$

(2)X 与 Y 相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

(3) $D(C_1X+C_2)=C_1^2D(X)$

(4)一般有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$

(5) $D(X)<E(X-C)^2,C\neq E(X)$

(6) $D(X)=0\Leftrightarrow P\left\{X=C\right\}=1$

三、协方差

1.定义及计算公式

(1) $Cov(X,Y)=E\left[(X-E(X)(Y-E(Y))\right]$

(2) $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

2.性质

(1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

(2) $Cov(aX,bY)=abCov(Y,X)$

(3) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

四、相关系数

1.定义

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

2.性质

(1) $|\rho(X,Y)|\le 1$

(2) $\rho(X,Y)=1\Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1$, 其中$a>0$

$\rho(X,Y)=-1\Leftrightarrow P(Y=aX+b)=1$, 其中$a<0$

(3)下面 5 个条件互为充要条件:

$\rho(X,Y)=0$

$\Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$

$\Leftrightarrow E(X,Y)=E(X)E(Y)$

$\Leftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

第五章 大数定律与中心极限定理

一、切比雪夫不等式

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\text{ 或 }P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

二、大数定律

1.切比雪夫大数定律

设 $X_1,X_2\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且 $E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2$

$(i=1,2,\cdots)$，则对于任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$.

2.伯努利大数定律

设 $X_1,X_2\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，同 0-1 分布 $B(1,p)$，则对

任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-p\right|<\varepsilon\right\}=1$.

3.辛钦大数定律

设 $X_1,X_2\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立同分布，$EX_i=\mu,i=1,2,$ 则对

于任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$.

三、中心极限定理

1.棣莫弗---拉普斯定理

设 $\eta_n \sim B(n,p)$，（即 $X_1, X_2 \cdots, X_n$，相互独立且同服从 0-1 分布 $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ）则有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

2.列维---林德伯格定理

设 $X_1, X_2 \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立分布， $E(X_i) = \mu$，$D(X_i) = \sigma^2 (\sigma \ne 0) i = 1, 2, \cdots$，则

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

第六章 数理统计的基本概念

一、基本概念

1.总体

研究对象的全体，它是一个随机变量，用 X 表示

2.个体

组成总体的每个基本元素

3.简单随机样本

来自总体 X 的 n 个相互独立且与总体同分布的随机变量 $X_1,X_2\cdots,X_n$, 称为容量为 n 的简单随机样本，简称样本

4.统计量

设 $X_1,X_2\cdots,X_n$, 是来自总体 X 的一个样本，$g(X_1,X_2\cdots,X_n)$ ）是样本的连续函数，且 $g(\bullet)$ 中不含任何未知参数，则称 $g(X_1,X_2\cdots,X_n)$ 为统计量

5.样本均值

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

6.样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

7.样本矩

样本 k 阶原点矩： $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k,k=1,2,\cdots$

样本 k 阶中心矩： $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k,k=1,2,\cdots$

二、三大抽样分布

1.三大分布

(1) χ^2 分布

$\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2\sim\chi^2(n)$，其中 $X_1,X_2\cdots,X_n$, 相互独立，且同服从 $N(0,1)$

(2)t 分布

$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$ 其中 $X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$, 且 X，Y 相互独立

(3)F 分布

$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2}\sim F(n_1,n_2)$，其中 $X\sim\chi^2(n_1),Y\sim\chi^2(n_2)$, 且 X，Y 相互独立

(4)分位数

若 $P(X \le x_\alpha)=\alpha$，则称 x_α 为 X 的 α 分位数

2.正态总体下的抽样分布

设 $X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则：

(1) $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ 或 $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$

(3) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

(4) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

三、重要公式与结论

(1) $E(\overline{X})=E(X), E(S^2)=D(X), D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}$；

(2)对于 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，有 $E(\chi^2(n))=n, D(\chi^2(n))=2n$；

(3)对于 $T\sim t(n)$，有 $E(T)=0, D(T)=\frac{n}{n-2}(n>2)$；

(4)对于 $F\sim F(m,n)$，有 $\frac{1}{F}\sim F(n,m), F_{a/2}(m,n)=\frac{1}{F_{1-a/2}(n,m)}$.

第七章 参数估计

一、点估计

1.矩估计

(1)思想：样本均值等于理论均值

(2)令 $EX=\overline{X}$，解得估计量.

2.最大似然估计

(1)思想：样本值在理论上出现的可能性尽可能大

(2)结论：$\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似数估计，$g(x)$ 为单调函数，则 $g(\hat{\theta})$ 为 $g(\theta)$ 的极大似然估计.

二、估计量的评选标准

1.无偏性

(1)若 $E\hat{\theta}=\theta$，则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量.

(2) $E(\overline{X})=E(X),E(S^2)=D(X)$, 即 $\overline{X}$， S^2 分别为总体 $E(X)$, $D(X)$ 的无偏估计量.

2.有效性

若 $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$，则 $\hat{\theta}_1$ 比.$\hat{\theta}_2$ 更有效.

3.一致性

(1)若 $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$，则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量.

(2)由大数定律易知 $\overline{X}$，S^2 也分别是 $E(X)$, $D(X)$ 的一致估量.

(3)若 $E(\hat{\theta})=\theta, D(\hat{\theta})\to 0(n\to\infty)$ 则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计.

三、区间估计（仅数学一要求）

1.概念

若 $P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\}=1-\alpha$,则称 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间.

2.结论

若 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间，$g(x)$ 为单调增加（或单调减少）函数，则 $(g(\hat{\theta}_1), g(\hat{\theta}_2)$ 或 $g(\hat{\theta}_2)$，$g(\hat{\theta}_1))$ 为 $g(\theta)$ 的置信度是 $1-\alpha$ 的置信区间

2.正态总体均值与方差的置信区间

待估参数		抽样分布	双侧置信区间
μ	σ^2 已知	$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$	$(\overline{X}-\mu_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\mu_{\frac{\alpha}{2}})$ $P\{\lvert\mu\rvert\geq\mu_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$
	σ^2 未知	$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{S}{\sqrt{n}})$ $P\{\lvert T\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha$
σ^2	μ 已知	$W'=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$	$(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)})$ $P\{W'\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\}=\frac{\alpha}{2}$ $P\{W'\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\}=\frac{\alpha}{2}$
	μ 未知	$W=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

第八章 假设检验

一、假设检验的一般步骤

(1)确定所要检验的基本假设 H_0；

(2)选择检验的统计量，并要求知道其在一定条件下的分布；

(3)对确定的显著性水平 α ，查相应的概率分布，得临界值，从而确定否定域；

(4)由样本计算统计量，并判断其是否落入否定域，从而对假设 H_0 作出拒绝还是接受的判断

二、假设检验的两类错误

统计推断是由样本推断总体，所作的结论不能保证绝对不犯错误，而只能以较大概率来保证其可靠性.

第一类错误是否定了真实的假设，即假设本来成立，但被错误地否认了，成为“弃真”，检验水平 α 就是犯第一类错误的概率的最大允许值.

第二类错误是把本来不成立的假设错误地接受了，称为

"存伪".犯这类错误的大小一般用 β 表示，它的大小要视具体情况而定.

三、单个正态总体的均值和方差的假设检验

	原假设 H_0	H_0下的检验统计量及分布	H_0的拒绝域
一个正态总体	$\mu=\mu_0$ （σ^2已知）	$U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\lvert u\rvert=\left\lvert\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\rvert\geq u_{\frac{\alpha}{2}}$
	$\mu=\mu_0$ （σ^2未知）	$T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\lvert t\rvert=\left\lvert\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right\rvert\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 已知)	$W=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\sim\chi^2(n)$	$w=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{x_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2\geq\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$ 或 $w\leq\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)$
	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ 未知)	$W=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$	$w=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$ 或 $w\leq\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)$

有道考神 更懂考

有道考神

— 更 懂 考 试 —

7-15993

有道考神考研