四川大学期末考试参考答案（闭卷）

（2023~2024 学年第 1 学期）　　A 卷

课程号-课序号：**311153050**　课程名称：**离散数学**　任课教师：________

适用专业年级：**软件工程 2021 级**　学生人数：____　印题份数：____　学号：________　姓名：________

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2、 不带手机进入考场；
3、 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

题　　号	一（10%）	二（30%）	三（20%）	四（30%）	五（10%）		
得　　分							
卷面总分			阅卷时间				

注意事项： 1. 请务必将本人所在学院、姓名、学号、任课教师姓名等信息准确填写在试题纸和答卷纸上；
2. **请将答案全部填写在答卷纸上；**
3. 考试结束，请将试题纸、答卷纸和草稿纸一并交给监考老师。

评阅教师	得分

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

提示： 在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选或未选均无分。

1、下列语句中是真命题的是（　C　）。

A、凡事皆有例外。　　B、若命题描述符 P 是命题的抽象表示，则 P 是命题。

C、命题描述符 P 不是命题。　　D、论域为正整数集，$\forall x\exists y[x\ \ +y - =1]$。

2、集合 $A=\{a,b\}$ 上的二元关系可表示为连通分支为 2 的有向图，则该关系一定具有（　D　）

A、自反的；　B、反自反的且传递的；　C 自反的且对称的；　D 对称且传递的。

3、下面集合（　C　）关于整除关系可构成格。

A、{2，3，6，12，24，36}；　B、{1，2，3，4，6，8，12}；

C、{1，2，3，5，6，15，30}；　D、{3，6，9，12}。

4、具有如下定义的代数系统 $\langle G,*\rangle$，（　D　）不构成群。

A、$G=\{1,10\}$，*是模 11 乘；　　B、$G=\{1,3,4,5,9\}$，*是模 11 乘；

C、$G=Q$（有理数集），*是普通加法；　　D、$G=Q$（有理数集），*是普通乘法。

5、设平面图$G(V,E)$有 8 个面，$|V|=10,|E|=12$，则 G 的连通分支数为（ C ）。

A、3；　　B、4；　　C、5；　　D、6

评阅教师	得分

二、填空题（本大题共 15 空，每空 2 分，共 30 分）

1、 无向图$G(10,18)$的连通分支数为 4，最多删除(12) 条边其连通分支数不变。

2、 3 个命题变元可构造（ 256 ）个适合命题公式，其中有（ 255 ）个命题公式存在主合取范式，有（ 1 ）个合适公式不存在主析取范式。

3、 含 4 个变元的一命题适合公式，该主析取范式的极小项项数与主合取范式的极大项项数之和为（16 ）。

4、 设 R 是 A={1，2, 3, 6, 12, 24,36}上的整除关系，该偏序集<A,R>可转变为（ 4 ）种不同全序集。

5、 若集合$A=\{a,b,c\}$，A 上可构建（ 512 ）个二元关系；其中有（ 27 ）个关系反自反又是反对称既是；有（ 8 ）个既对称又是反对称的关系；有（ 5 ）个具有自反的、对称的和传递的二元关系；该集合有（6 ）个的置换。

6、 实数集合 R 上定义二元运算*：a，b∈R，a*b=a+b-ab。 该运算*的幺元是（ 0 ）。

7、设$A=\{1,2,4,8,12,24\}$上的整除关系R，则<A，R>偏序格的最小元为(1)，最大元为(24)。

8、某班有学生 60 人，其中有 38 人会说中文， 16 人会说英文， 21 人会说德文；有 3 个人这三种语言都会说，有 2 个人这三种语言都不会说，问只会说两门语言有（11）人？

评阅教师	得分

三、分析演算题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

1、对于任意集合A,B,C，试推导集合等式$(A-B)\cup(A-C)=A$成立的充要条件。

$$
\begin{aligned}
(A-B)\cup(A-C)&=A\\
A\bar{B}\cup A\bar{C}&=A\\
A\bar{B}+A\bar{C}-A\bar{B}A\bar{C}&=A\\
A-AB+A-AC-A(\bar{B}\bar{C})&=A\\
A-AB-AC-A\overline{(B\cup C)}&=\phi\\
A-AB-AC-\left[A-A(B\cup C)\right]&=\phi\\
A-AB-AC-\left[A-(AB\cup AC)\right]&=\phi\\
A-AB-AC-\left[A-AB-AC-ABC\right]&=\phi\\
ABC&=\phi
\end{aligned}
$$

2、设$E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge\bar{x}_2)\vee(x_2\wedge\bar{x}_3)\vee(\bar{x}_1\wedge x_3)$是布尔代数$\langle\{0,1\},\wedge,\vee,-\rangle$上的一个布尔表达式，

试写出其主析取范式和主合取范式。

解：函数表为：

析取范式：

$$E(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)\vee(\bar{x}_1\wedge x_2\wedge\bar{x}_3)\vee(\bar{x}_1\wedge x_2\wedge x_3)$$
$$\vee(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge\bar{x}_3)\vee(x_1\wedge\bar{x}_2\wedge x_3)\vee(x_1\wedge x_2\wedge\bar{x}_3)$$

合取范式：

$$E(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x\vee_2 x_3)\wedge(\bar{x}_1\vee\bar{x}_2\vee\bar{x}_3)$$

3、 设S=Q×Q，Q为有理数集合，*为S上的二元运算：对任意(a, b)，(c, d)∈S, 有(a, b)*(c, d)=(ac, ad+b)，求出S关于二元运算*的单位元，以及当a≠0时，(a, b)关于*的逆元。

解：

设S关于*的单位元为(a,b)。根据*和单位元的定义，对∀(x,y)∈S,有

(a,b)*(x,y)=(ax,ay+b)=(x,y), (x,y)*(a,b)=(ax,xb+y)=(x,y)。

即ax=x,ay+b=y,xb+y=y对∀x,y∈Q都成立。解得a=1,b=0。

所以S关于*的单位元为(1,0)。

当a≠0时，设(a,b)关于*的逆元为(c,d)。根据逆元的定义，有

(a,b)*(c,d)= (ac,ad+b)=(1,0)

(c,d)*(a,b)= (ac,cb+d)=(1,0)

即ac=1,ad+b=0,cb+d=0。解得$c=1/a, d=-b/a$。 所以(a,b)关于*的逆元为$(1/a,-b/a)$。

4、设无向图G=<V,E>，|E|=12。已知有6个3度顶点，其他顶点的度数均小于3。问G中至少有多少个顶点？

解：设G中度数小于3的顶点有k个，由欧拉握手定理 $24=\sum_{v\in V}\deg(v)$

知，度数小于3 的顶点度数之和为6。

故当其余的顶点度数都为2时，G的顶点最少。

即G中至少有9个顶点。

评阅教师	得分

四、证明题（本大题共4小题，1,2小题每题5分，3.4小题每题10分，共30分）。

1. 证明在元素不少于两个的群中不存在零元。

证明：（用反证法证明）

设在素不少于两个的群<G,＊>中存在零元θ。

对∀ a∈G，由零元的定义有 a*θ=θ。

∵ 〈G，∗〉是群，∴关于∗消去律成立。

∴ a=e。即 G 中只有一个元素，

这与|G|≥2 矛盾。故在元素不少于两个的群中不存在零元。

2、设<R,*>是一个代数系统，*是 R 上二元运算，$\forall a,b \quad a*b=a+b-a\times b$，证明<R,*>是含幺半群。

证明：

1) $\forall a \in R$，$0*a=0+a+0\cdot a=a$，$a*0=a+0+a\cdot 0$

即 $0*a=a*0=a \quad \therefore 0$为幺元

2) $\forall a,b \in R$，由于+，• 在 R 封闭。所以$a*b=a+b+a\cdot b \in R$ 即*在 R 上封闭。

3) $\forall a,b,c \in R$

$(a*b)*c=(a+b+a\cdot b)*c=a+b+a\cdot b+c+(a+b+a\cdot b)\cdot c$

$=a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

$a*(b*c)=a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

所以 $(a*b)*c=a*(b*c)$

因此，〈R，*〉是含幺半群。

3、简单连通无向平面图$G(n,m)$，试证明若$n<12$，该图最小点度小于等于 4。

证明：1）若结点个数小于等于 4 时，结论显然成立。

2）当结点多于 4 个时，用反证法证明。

假设图中所有结点的度数都大于等于 5。

由欧拉握手定理得$\sum\limits_{v\in V}$ deg(v)=2|E|得 $m\ge\frac{5}{2}n$ (1)

又因为 G=〈V,E,F〉是一个连通简单无向平面图，

所以对每个面 f，deg(f)≥3。

由公式$\sum\limits_{f\in F}$ deg(f)=2|E|可得，$f\le\frac{2}{3}m$ (2)

将（1）式代入（2），可得 $f\ge\frac{5}{3}n$ (3)

结合欧拉公式

$n-m+f=2$

$n-\frac{5}{2}n+\frac{5}{3}n\ge 2$

$\frac{1}{6}n\ge 2$

$n\ge 12$

这与已知矛盾。

4.根据推理理论证明：每个考生或者勤奋或者聪明，所有勤奋的人都将有所作为，但并非所有考生都将有所作为，所以，一定有些考生是聪明的。(设 P(a)：a 是考生，Q(a)：a 将有所作为，A(a)：a 是勤奋的，B(a)：a 是聪明的，个体域 x：人的集合)

则命题可符号化为：$\forall x(P(x)\to(A(x)\vee B(x)))$，$\forall x(A(x)\to Q(x))$，$\forall\neg x(P(x)\to Q(x))$ $\exists x(P(x)\wedge B(x))$。

(1)$\forall\neg x(P(x)\to Q(x))$	P
(2)$\neg\forall x(\neg P(x)\vee Q(x))$	T(1)，E
(3)$\exists x(P(x)\wedge\neg Q(x))$	T(2)，E
(4)$P(a)\wedge\neg Q(a)$	T(3)，ES
(5)$P(a)$	T(4)，I
(6)$\neg Q(a)$	T(4)，I
(7)$\forall x(P(x)\to(A(x)\vee B(x))$	P
(8)$P(a)\to(A(a)\vee B(a))$	T(7)，US
(9)$A(a)\vee B(a)$	T(8)(5)，I
(10)$\forall x(A(x)\to Q(x))$	P
(11)$A(a)\to Q(a)$	T(10)，US
(12)$\neg A(a)$	T(11)(6)，I
(13)$B(a)$	T(12)(9)，I
(14)$P(a)\wedge B(a)$	T(5)(13)，I
(15)$\exists x(P(x)\wedge B(x))$	T(14)，EG

评阅教师	得分

五、非标准答案题（本大题共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）。

图论广泛应用于工程实践中，如有线电视网络。然而随着科技的发展，其应用问题越来越复杂，人们只能借助计算机（计算机对矩阵运算具有高效性）对图进行分析处理。现有某工程需求运用计算机计算图的连通分支数，为了解决这一问题，请您分别给出有向图和无向图的表示方法和连通分支数的计算详细步骤.

1) 有向图

计算有向图$G\langle n,m\rangle$的连通分支数，常常将有向图表示为关联矩阵 M。

其连通分支数等于图的节点个数（阶数）减去关联矩阵的秩: $\omega(G) = n - r(M)$。

2）无向图

计算无向图$G(n,m)$的连通分支数，常常将无向图表示为邻接矩阵 A。

其连通分支数步骤：

（1） 计算 $A^i, i = 0,1,2\cdots,n-1$

（2） 计算$B = \sum_{i=0}^{n-1} A^i$

（3） 计算$C: C(i,j) = \begin{cases} 1 & B(i,j) \geq 1 \\ 0 & B(i,j) = 0 \end{cases}$

（4） 对矩阵 C 进行行列变换得到对角方块阵(每个方块均为全 1 阵)

（5） 方块阵的个数即为连通分支数