四川大学期末考试试题（闭卷）-参考解答

（2022~2023 学年第 2 学期）　　A 卷

课程号-课序号：**311153050 / 01**　课程名称：**离散数学**　任课教师：______

适用专业年级：**软件工程 2021 级** 学生人数：**54** 印题份数：**60** 学号：______ 姓名：______

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2、 不带手机进入考场；
3、 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

题　号	一（10%）	二（20%）	三（30%）	四（30%）	五（10%）		
得　分							
卷面总分			阅卷时间				

注意事项： 1. 请务必将本人所在学院、姓名、学号、任课教师姓名等信息准确填写在试题纸和答卷纸上；
2. **请将答案全部填写在答卷纸上，本试题纸上的答案一律不计分；**
3. 考试结束，请将试题纸、答卷纸和草稿纸一并交给监考老师。

评阅教师	得分

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

提示： 在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选或未选均无分。

1. A　2. A　3. C　4. D　5. D

评阅教师	得分

二、填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 20 分）

1、自反性、对称性、传递性

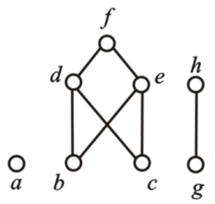
2、 5

3、(a b) (c d)

4、4096　或 2^{12}

5、{{a, b}, {c}, {d, e, f}}

6、a, f, h



7、26

8、12

9、2

10、{[0], [3], [6]}

评阅教师	得分

三、分析演算题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

提示：每小题须写出求解过程。

1、分析计算下面公式的类型。（注：重言式、矛盾式或可满足的）

$$(\forall x)(\forall y)[P(x)\to Q(y)]\leftrightarrow(\exists x)P(x)\to(\forall y)Q(y)$$

证明：（方法不唯一）

$(\forall \boldsymbol{x})(\forall \boldsymbol{y})[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})]$

$\Leftrightarrow (\forall \boldsymbol{x})(\forall \boldsymbol{y})[\sim\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})]$　　**蕴含律**

$\Leftrightarrow (\forall \boldsymbol{x})[\sim\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})] \vee (\forall \boldsymbol{y})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})$　　**辖域收缩**

$\Leftrightarrow \sim(\exists \boldsymbol{x})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee (\forall \boldsymbol{y})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})$　　**量词的否定**

$\Leftrightarrow (\exists \boldsymbol{x})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to (\forall \boldsymbol{y})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})$　　**蕴含律**

所以，$(\forall x)(\forall y)[P(x)\to Q(y)]\leftrightarrow(\exists x)P(x)\to(\forall y)Q(y)$为永真式。

2、有向图 G=(V, E)的邻接矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$，请用矩阵运算求出（G 的强分图；（2）G 中哪些结点之间距离为 3？

解：（1）由 G 的邻接矩阵计算A^2，A^3：

$$A^2=\begin{bmatrix}3&1&1&2\\2&1&1&1\\2&1&1&1\\2&0&1&2\end{bmatrix}\quad,\quad A^3=\begin{bmatrix}7&2&3&5\\5&1&2&4\\5&1&2&4\\5&2&2&3\end{bmatrix}$$

由A，A^2，A^3合并得可达性矩阵：

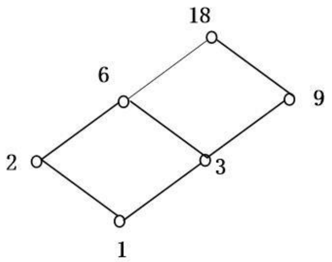
$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

G 为强连通图，为一个强分图。

（2）由A，A^2，A^3可得**没有**距离为3的结点对。

3、D_{18}是正整数18的所有正因子的集合，$\langle D_{18},|\rangle$是偏序格。（1）画出偏序关系哈斯图；（2）求出格中所有4元子格。

解：（1）$\langle D_{18},|\rangle$哈斯图：



（2）所有4元子格有：共6个

{1，2，6，18}，{1，3，9，18}，{1，3，6，18}，

{3，6，9，18}，{1，2，3，6}，{1，2，9，18}

评阅教师	得分

四、证明题（本大题共3小题，每小题10分，共30分）

1、证明：$(P\vee Q)\rightarrow R$，$R\rightarrow(S\vee U)$，$U\rightarrow T$，$\sim(S\vee T)\ \Rightarrow\ \sim P$

证明：

（1）	$(P\vee Q)\rightarrow R$	P
（2）	$R\rightarrow(S\vee U)$	P
（3）	$(P\vee Q)\rightarrow(S\vee U)$	T(1)(2)，I
（4）	$\sim(S\vee T)$	P
（5）	$\sim S\wedge\sim T$	T(4)，E
（6）	$\sim T$	T(5)，I
（7）	$\sim S$	T(5)，I
（8）	$U\rightarrow T$	P
（9）	$\sim U$	T(6)(8)，I
（10）	$\sim(S\vee U)$	T(7)(9)，I, E
（11）	$\sim(P\vee Q)$	T(3)(10)，I
（12）	$\sim P$	T(11), E, I

2、证明：设G是 n阶$(n\geq 3)$、m条边 、f 个面的简单连通平面图，则$m\leq 3(n-2)$ 。

证明：　∵ G是连通的、简单图，　$\boldsymbol{n\geq 3}$

则G中的面至少有3条边围成，即$\deg(Fi)\geq\mathbf{3}$

又∵$\sum\deg(Fi)=2m$

设共有f个面，则$2m=\sum\deg(Fi)\geq 3f$

代入欧拉公式：　$2=n-m+f\leq n-m+\frac{2m}{3}$

整理得：$m\leq 3n-6$

3、设 $G=\{a+bi \mid a,b\in Z\}$，其中 i 是虚数单位，Z 是整数。证明 $<G,+>$ 是群。

证明：（1）　$\forall(a+bi),(c+di)\in G$，$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\in G$，则$<G,+>$满足封闭性；

（2）$\forall(a+bi),(c+di),(e+fi)\in G$，

$\big((a+bi)+(c+di)\big)+(e+fi)=(a+c+e)+(b+d+f)i=(a+bi)+\big((c+di)+(e+fi)\big)$

则$<G,+>$满足结合律；

（3）$\forall(a+bi)\in G$，$(a+bi)+0=0+(a+bi)=a+bi$，则$<G,+>$有幺元 e=0；

（4）$\forall(a+bi)\in G$，$(a+bi)+(-a-bi)=0$，得$(a+bi)$逆元是$(-a-bi)$，因此$<G,+>$每个元素有逆元。

由上可得$<G,+>$是群。

评阅教师	得分

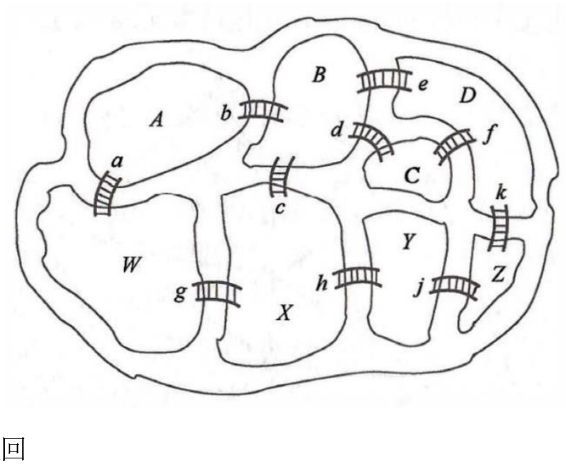
五、非标准答案题（本大题共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

提示： 应用所学知识分析建模，给出具体求解过程。

在一个酒店的大厅，一片水域环绕着八个区域，分别命名为 A、B、C、D、W、X、Y、Z，十座桥被修建在水域的上面，记为 a、b、c、d、e、f、g、h、j、k。如图所示，请用图论的方法解答下面的问题：

（1）　客人在大厅的陆地区域散步并且每座桥只穿过一次（回到起点）是可能的吗？　若可能，给出一个完整的路径；若不可能，请说明如果要构建一个回路使客人经过十座桥至少一次，他走过的桥数的最小值是多少？

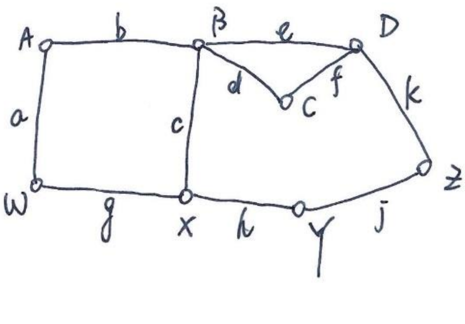
（2）　乘船在水路上旅行，船穿过每座桥一次（不要求能回起点）是可能的吗？给出你的解释。

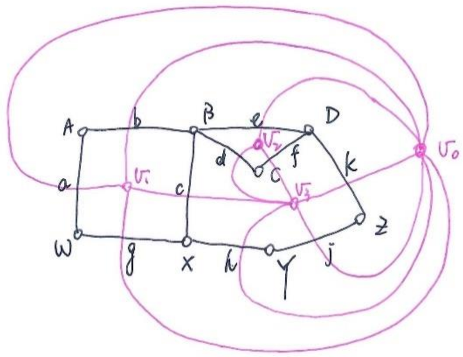


解：（1）不能。有两个奇数度结点 D、X，如图，没有欧拉回路。

若要构建回路，最少复制 c、e 两条边，使得 D 和 X 为偶数度，图为欧拉图。因此游人至少重复经过 c, e 两座桥各一次，经过桥数的最小值为 12。

（构建的回路不唯一）





（2）参考解答：

构造对偶图，问题即为对偶图是否有欧拉回路。

对偶图中有 4 个结点，其中 v0 和 v2 两个为奇数度结点，因此，以 v0 和 v2 为端点有欧拉道路。可以依次穿过桥 b,g,a,c,h,e,d,k,j,f。

（答案不唯一）