四川大学期末考试试卷（闭卷）

（2020~2021 学年第 01 学期） A 卷

课程号：311153050 课程名称：离散数学 任课教师：

适用专业年级：软件工程 2019 级 学号： 姓名：

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、 不带手机进入考场；

3、 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

题 号	一(10%)	二(20%)	三(34%)	四(22%)	五(14%)			
得 分								
卷面总分		教师签名		阅卷时间				

注意事项：1. 请务必将本人所在学院、姓名、学号、任课教师姓名等信息准确填写在试题纸和添卷纸上；

2. **请将答案全部填写在本试题纸上；**

3. 考试结束，请将试题纸、添卷纸和草稿纸一并交给监考老师。

评阅教师	得分

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

提示：在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选或未选均无分。

1.下面集合（ ）关于整除关系构成格。 格.

A、{2，3，6，12，24，36}； B、{1，2．3，4，6，8，12}；

C、{1，2，3，5，6，15，30}； D、{3，6，9，12}。

2. 如图 G 的邻接矩阵为非对称矩阵，则该图是( )。 图

A、无向图； B、有向图； C、零图； D、由一个或者几个强分图构成的图。

3. 连通平面图 G，有 5 个顶点，6 个面，从 G 中最多删去( )边而不改变其连通性。

A、3； B、4； C、5； D、6

4. 具有如下定义的代数系统 $<G,*>$，（ ）构成群。

A、G 为整数集合，*是普通乘法； B、G={0,1,2,3,4}，*是模 5 剩余类加法；

C、G 为自然数集合，*是普通减法； D、G 为无理数集合，*是普通除法。

5. 一个 5 阶无向图中含有 3 个环。该图结点对间的边数可表示为矩阵 $A_{5\times5}$，即矩阵 $A_{5\times5}$ 中元素 a_{ij} 表示结点 i 与结点 j 之间的边数。该无向图边集合基数 m 为（ ）

A、$m=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}a_{ij}$； B、$m=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}a_{ij}+3$；

C、$m=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}a_{ij}-3$； D、$m=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}a_{ij}+3)$

注：1、印制试卷时同时提交《四川大学期末试卷审批表》。

2、本试卷审批表同试卷一并归档保存。

1. C
2. B
3. C
4. B
5. D

评阅教师	得分

二、填空题（本大题共10空，每空2分，共20分）。

1. 有向图G中有10个顶点，50条边。1）如果该图无环简单图，且关联矩阵的秩为6，则该图的分支数为（ 4 ）；2）如果G图中有5个环，但无平行边，且分支数为6，删除所有环后得到子图G'，G'的关联矩阵的秩为（ 4 ）。

2. 设集合A={a,b,c,d,e}，R_1和R_2分别为集合A上的二元关系，且$R_1 \subset R_2$。如果R_1和R_2的自反闭包相等，那么$|R_2|-|R_1|$的**最大值**（ 5 ）；如果R_1和R_2的对称闭包相等，那么$|R_2|-|R_1|$的**最大值**为（ 10 ），其中$|R_2|,|R_1|$分别表示R_2和R_1的基数

3. 一幅标准的52张扑克牌中，至少摸出（ 5 ）张才能保证色选出的牌中至少有2张是同样花色的。

4. 设集合M={1，2，3，4，5}，σ 和 τ 是M上的两个置换，σ=（1 3 5）（2 4），τ=（1 4 5）（2 3），则$\tau^{-1}\sigma^{-1}$=（ （1 4 3 5 2） ）。

5. 设G是平面图，G有8个面，每个面的次数都是3，则G有（ 12 ）条边，

5 设R是A={1,2,3,12,18,24，72}上的整除关系，偏序集<A,R>的极小元（ 1 ），最大元是（ 72 ），其子集$B=\{1,2,3,12\}$上的整除关系构成一个格，元素2的补元是（ 3 ）

评阅教师	得分

三、计算题（本大题共3小题，1小题10分，2，3小题每题12分，共34分）

1. 有向图G的顶点集合为$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，其邻接矩阵$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$，

矩阵元素$a_{ij}=\begin{cases}1 & <v_i,v_j>\text{有一条有向边}\\0 & <v_i,v_j>\text{无有向边}\end{cases}$，找出图中结点间距离大于2结点点对？

解：结点间道路长度等于2道路数为：$A^2=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&2&1&1\\1&1&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$

结点间道路长度等于3道路数为：$A^3=\begin{bmatrix}2&4&2&2\\2&4&2&2\\1&2&1&1\\1&2&1&1\end{bmatrix}$

结点间道路长度小于等于 2 的道路数为：$B = A + A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

结点间有道路长度大于 2 的点对为 B 中$b_{ij} = 0(i \neq j)$的结点对：$< v_3, v_4 >, < v_4, v_1 >$

2.设$\circ$为 R 上的二元运算，$\forall a, b \in R$，$a \circ b = pa + qb$。问 p, q 为何值时$\circ$运算同时满足交换律和结合律?

[illegible]　　[illegible]

解:

1）交换律

$a \circ b = b \circ a$

$pa + qb = pb + qa$

$(p-q)a = (p-q)b$

对于任意的a, b 均成立，只有 $p=q$ 才有交换律。

2）结合律

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$p(pa + qb) + qc = pa + q(pb + qc)$

$p^2 a + pqb + qc = pa + pqb + q^2 c$

$(p^2 - p)a + (q - q^2)c = 0$

对于任意的a, b, c 均成立，$\{p^2 - p = 0\} \wedge \{q - q^2 = 0\}\}$

所以当$\begin{cases} p = 0 \\ q = 1 \end{cases}$，或$\begin{cases} p = 1 \\ q = 0 \end{cases}$,或$\begin{cases} p = 1 \\ q = 1 \end{cases}$，或$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$才有交换律

综上所述，当$\begin{cases} p = 1 \\ q = 1 \end{cases}$或$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$时$\circ$运算同时满足交换律和结合律

3.在一个盗窃案中，有如下事实:：（1）王波或者李明是窃贼；（2）王波是窃贼，作案时间不会发生在夜间 12 点以前；（3）若李明证词正确，则夜间 12 点时被盗物品的房间灯光未灭；（4）若李明证词不正确，则作案时间发生在夜间 12 点前；（5）夜间 12 点被盗房间灯光灭了。根据以上事实找出偷窃者。

解：设 p：王波是窃贼，q：李明是窃贼，r：作案时间在 12 点以前，s：李明的证词正确，t：夜间 12 点时被盗物品所在房间灯光熄灭。

符号化为

p ∇ q,　p→~r,　s→~t,　~s→r,　t

推理过程如下

(1)t P

(2)s→~t P

(3)~s T(1)(2)IE

(4)~s→r P

(5)r T(3)(4)IE

(6)p→~r P

(7)~p T(5)(6)IE

(8)p∇q P

(9)q T(7)(8)E

因此，李明是窃贼。

评阅教师	得分

四、证明题（本大题共2小题，1小题10分，2小题12分，共22分）

1. 设G是连通的平面图，且G的各面的次数至少为l ($l \geq 3$)，证明G的边数m与顶点数n有如下关系：$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$。

证：G是连通的平面图，由欧拉公式可知：

$$n-m+f=2, \quad \text{则：} f=m+2-n;$$

平面图中G的第i面的次数为c_i，$c_i \geq l$，平面图中G的所有面的次数之和等于边数的2倍：2分

$$\sum_{i=1}^{f} c_i = 2m \Rightarrow lf \leq 2m$$

可得 $l(m+2-n) \leq 2m$

$$\Rightarrow m \leq \frac{-l}{l-2}(2-n)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

2. 设$<G,\times>$是一群，$x \in G$。在G内定义$\circ$运算如下：$\forall a,b \in G$，$a \circ b = a \times x^{-1} \times b$。证明$<G,\circ>$是一群。

证：

1） **显然$\circ$是G上的二元运算（即满足封闭性），**

2）$\forall a,b,c \in G$，有

$(a\circ b)\circ c=(a\times x^{-1}\times b)\times x^{-1}\times c=a\times x^{-1}\times(b\times x^{-1}\times c)=a\circ(b\circ c)$ 运算是可结合的。

3）x 是 $<G,\circ>$ 的单位元。事实上，$\forall a\in G$，有

$a\circ x=a\times x^{-1}\times x=a$；$x^{-1}\circ a=x\times x^{-1}\times a=a$

4） 最后证明，$\forall a\in G$，$x\times a^{-1}\times x$ 是 a 在 $<G,\circ>$ 中的逆元。事实上，

$a\circ(x\times a^{-1}\times x)=a\times x^{-1}\times x\times a^{-1}\times x=x$

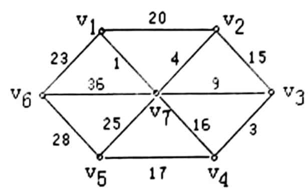
$(x\times a^{-1}\times x)\circ a=x\times a^{-1}\times x\times x^{-1}\times a=x$

5） 由以上证明，$<G,\circ>$ 是群。

评阅教师	得分

五、分析题（本大题共1小题，共14分）

右图所示的赋权图表示某七个城市之间的直接通信线路造价（单位：万元），试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信又使总造价最小。



解：产生7个顶点6条边的连通图，其边权重最小。

$w(v_1,v_7)=1$　　选$e_1=v_1v_7$

$w(v_7,v_2)=4$　　选$e_2=v_7v_2$

$w(v_7,v_3)=9$　　选$e_3=v_7v_3$

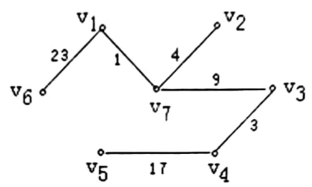
$w(v_3,v_4)=3$　　选$e=v_3v_4$

$w(v_4,v_5)=17$　　选$e=v_4v_5$

$w(v_1,v_6)=23$　　选$e=v_1v_6$

最小生成树 普里姆算法

结果如图：



边权之和为：C(T)=23+1+4+9+3+17=57（万元）即为总造价。