四川大学期末考试试题（娱乐押题卷）

（2024~2025 学年 第 1 学期）

课程号： 311153050　　课程名称： 离散数学　　命题人： Gother
适用专业年级： 软件工程 2023 级　　学号： ______　　姓　名： ______

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、 不带手机进入考场；

3、 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

题　号	一(10%)	二(25%)	三(30%)	四(30%)	五(10%)
得　分					

卷面总分		教师签名		阅卷时间	

注意事项：

1. 请务必将本人所在学院、姓名、学号、任课教师姓名等信息准确填写在试题纸和添卷纸上；
2. 请将答案全部填写在本试题纸上；
3. 考试结束，请将试题纸、添卷纸和草稿纸一并交给监考老师。

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

提示：在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选或未选均无分。

1. 集合 A 上置换的二元关系具有（　　）

　A. 自反性　　B. 对称性　　C. 反对称性　　D. 传递性

2、下列语句中是真命题的是（

　A、凡事皆有例外。

　B、若命题描述符 P 是命题的抽象表示，则 P 是命题。

　C、命题描述符 P 不是命题。

　D、论域为正整数集，∀x∃y[x+y−=1]。

3、设平面图(,) GVE 有 8 个面，10, 12 V E = =，则 G 的连通分支数为（ C ）。

　A、3；　　B、4；　　C、5；　　D、6

4、下面集合（ C ）关于整除关系可构成格。

　A、{2，3，6，12，24，36}　　B、{1，2，3，4，6，8，12}

　C、{1，2，3，5，6，15，30}　　D、{3，6，9，12}。

5. 设 R 和 S 是集合 A 上的任意关系，下列命题成立（ ）。

　A、若 R 和 S 是自励』 则 R。S 也是自反的。

　B、若 R 和 S 是反自反的，则 R0S 也是反自反的。

　C、若 R 和 S 慰才搁号，则 R0S 也是部椭哟。

　D、若 R 和 S 是反糊的，则 R。s 也是反对勒的。

二、填空题（本大题共 10 空，每空 2 分，共 30 分）

1. 论域 $D=\{a, b, c\}$上的谓词 $p(x, y)$，对任意的 $x, y\in D$ 满足 $p(x, y)= p(y, x)$有_______个，符合上述条件的谓词公式 $\forall y\exists xp(x,y)\to\exists x\forall yp(x,y)$ 的真值是_______。
2. 若集合{ , , } A abc =，A 上可构建（ 512 ）个二元关系；其中有（ 27 ）个关系反自反又是反对称既 是；有（ 8 ）个既对称又是反对称的关系；有（ 5 ）个具有自反的、对称的和传递的二元关系；该集 合有（ 6 ）个的置换。
3. 3 个命题变元可构造（ 256 ）个适合命题公式，其中有（ 255 ）个命题公式存在主合取范式, 有 （ 1 ）个合适公式不存在主析取范式。
4. 设 A={1,2,4,8,12,24}上的整除关系 R，则偏序格的最小元为________，最大元为________。
5. 某班有学生 60 人，其中有 38 人会说中文，16 人会说英文，21 人会说德文；有 3 个人这三种语言都会说，有 2 个人这三种语言都不会说，问只会说两门语言有_______人。学校食堂对 270 个大学生的调查显示：64 人喜欢胡萝卜，94 人喜欢花菜，58 人喜欢油菜，三种蔬菜都喜欢的人数为 14 人，有 116 人对这三种蔬菜都不感兴趣。这些被调查的学生中有_______人只对两种蔬菜感兴趣。

6）设集合 M={1，2，3，4，5}，σ 和 τ 是 M 上的两个置换，σ=（1 3 5）（2 4），τ=（1 4 5）（2 3），则 $\tau^{-1}\circ\sigma^{-1}$=（ ）。

三、分析演算题（本大题共 4 小题，第 1 小题 6 分，2, 3, 4 小题各 8 分，共 30 分）

设 p,q,r 是实数，o 为 R 上的二元运算，∀a,b∈R，aob=pa+qb+r。当 p,q,r 分别为何值时代数系统<R,o>存在单位元和零元，其单位元和零元分别为多少?

图 G 的顶点集合为 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，其邻接矩阵 A=$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$，矩阵元素

$a_{ij}=\begin{cases}1 & <v_i,v_j>\text{有一条边}\\0 & <v_i,v_j>\text{无边}\end{cases}$，图中存在结点间距离等于 3 点对吗？如果存在，请给出。

设简单平面图 G 中顶点数 n=7，边数 m=15。计算 G 的连通分支数

2、设, G < •>是群，, ab G ∈ ,a e ≠，且 4 5 a b b a • = •。试分析运算“•”是否具有可交换性。

设 A={a，b，c，d}，R 是 A 上的二元关系，且 R={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>}，

求 r(R)、s(R) 和 s(t(R))

解 $r(R)=R\cup I_A$={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<a，a>，<b，b>，<c，c>，<d，d>}

$s(R)=R\cup R^{-1}$={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<c，b>，<d，c>}

R^2={<a，a>，<a，c>，<b，b>，<b，d>} R^3={<a，b>，<a，d>，<b，a>，<b，c>} R^4=R2

t(R)={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<a，a>，<a，c>，<b，b>，<b，d>，<a，d>}

S(t(R))={<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c， b>，<c，d>，<d，c>，<a，a>，<a，c>，<c，a>，<b，b>，<b，d>，<d，b>， <a，d>， <d，a>}

四、证明题（本大题共 4 小题，第 1 小题 6 分，2, 3, 4 小题各 8 分，共 30 分）

1. 根据推理理论证明：每个考生或者勤奋或者聪明，所有勤奋的人都将有所作为，但并非所有考生都有所作为，所以，一定有一些考生是聪明的。（设 P(a)：a 是考生；Q(a)：a 将有所作为；A(a)：a 是勤奋的；B(a)：a 是聪明的；个体域 x：人的集合）。
2. 证明无向简单非连通图的补图必为连通图。

令图 $G=(V,E)$ 是不连通的，由若干个连通分量⁺组成：

$V=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k$

令图 $G'=(V',E')$ 是图 G 的补图，则有 $\forall u\in V_i, v\in V_j, i\neq j$，有 $(u,v)\in E'$ 。

考虑任意的一对 G' 中的顶点 s 和 t 。

- 若 $s\in V_i, t\in V_j, i\neq j$，则 s 能直接到 t，即存在路径 $[s,t]$
- 若 $s\in V_i, t\in V_i$，则 $\forall u\in V_j, j\neq i, (s,u)\in E', (u,t)\in E'$，即存在路径 $[s,u,t]$

所以图 G' 中任意两点可以相互到达，所以图 G' 连通

我们需要证明补图 G' 是连通的，即对于 G' 中任意两个顶点 $s,t\in V$，都存在一条路径连接 s 和 t
。

情况 1： $s\in V_i, t\in V_j, i\neq j$

在原图 G 中，由于 s 和 t 属于不同的连通分量 V_i 和 V_j，它们之间没有直接边相连，即 $(s,t)\notin E$。

因此，根据补图的定义，$(s,t)\in E'$。
所以，s 和 t 在补图 G' 中是直接相连的。

情况 2： $s,t\in V_i$

若 s 和 t 属于同一个连通分量 V_i，则它们可能在 G 中直接相连，也可能不直接相连。

如果 $(s,t)\notin E$，根据补图的定义，$(s,t)\in E'$，则它们在 G' 中直接相连。

如果 $(s,t)\in E$，则：

对于任意 $u\in V_j, j\neq i$，$(s,u),(u,t)\in E'$（由补图定义）。

因此，s 和 t 可以通过路径 $s\to u\to t$ 在 G' 中连接。

3. 设 G 是连通的平面图，且 G 的各面的次数至少为 $l(l\geq 3)$，证明 G 的边数 m 与顶点数 n 有如下关系：
证明对于连通无向简单平面图，当边数 e＜30 时，必存在度数小于等于 4 的顶点。
设(,) G VE =所有点度均为偶数的连通图。证明：对任何 v V ∈，( ) ( ) 2 G v d v ω −
≤。
设简单平面图 G 中顶点数 n=7，边数 m=15。计算 G 的连通分支数
设(,) G VE　所有点度均为偶数的连通图。证明：对任何
无向图中的连通关系是等价关系

4. 设是一个代数系统，*是 R 上二元运算，∀a, b a*b=a+b-a×b，证明<R,*> 是含幺半群。

**设<G,*>是一群，x∈G，。定义：a○b=a*x*b，证明<G,○>也是一群。1

1、 设 f:A→B,g:B→2A,满足∀b∈B,g(b)={x∈A|f(x)=b}证明：当 f 为满射时 g 为单射

问 g 为单射时，f 是否为满射？

证明：1） 显然$\circ$是G上的二元运算（即满足封闭性），

2）$\forall a,b,c\in G$，有

$(a\circ b)\circ c=(a*x*b)*x*c=a*x*(b*x*c)=a\circ(b\circ c)$ 运算是可结合的。

3）x^{-1}是$<G,\circ>$的单位元。事实上，$\forall a\in G$，有

$a\circ x^{-1}=a*x*x^{-1}=a$；$x^{-1}\circ a=x^{-1}*x*a=a$

4） 最后证明，$\forall a\in G$，$x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}$是a在$<G,\circ>$中的逆元。事实上，

$a\circ(x^{-1}*a^{-1}*x^{-1})=a*x*x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}=x^{-1}$

$(x^{-1}*a^{-1}*x^{-1})\circ a=x^{-1}*a^{-1}*x^{-1}*x*a=x^{-1}$

5） 由以上证明，$<G,\circ>$是群。

五、非标准答案题（本大题共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

某公司正在组织一次国际圆桌会议，共有八名参会者，每位参会者会两种语言。为了使会议顺利进行，要求在安排座位时，相邻两人之间至少有一种共同语言。是否存在一种座位安排，使得相邻两人能交流？如果存在，请给出一种具体的座位安排方法。如果不存在，请说明理由。

以下是每位参会者及其掌握的语言：

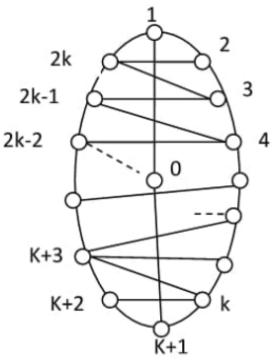
1：英语、法语
2：法语、西班牙语
3：西班牙语、德语
4：德语、汉语
5：汉语、英语
6：英语、西班牙语
7：法语、汉语
8：德语、英语

现有 11 个学生打算几天都在一张圆桌上共进午餐，并且希望在每次午餐时，每个学生两旁所坐的人都不相同。问 11 人共进午餐最多能有多少天?

将 11 个学生分别用结点表示，由于每个同学都可能邻座，因此每两个结点之间都有一条边，因此得到无向完全图 K_{11}，每次午餐时学生都按照一条哈密尔顿回路落座，如果两条哈密尔顿回路有公共边，则公共边端点所代表的学生就是相邻的。

因此上述问题转化为求 K_{11} 有多少条无公共边的哈密尔顿回路问题，利用 11 题的结论，共有(11-1)/2=5 条无公共边的哈密顿回路，因此这 11 个学社共进午餐最多能有 5 天。

解：1) 设 n=2k+1,将节点编号为 0,1,2...2k,并作如下图示，



$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

在上图中先取一条哈密顿回路为 0,1,2,2k,3,2k-1,4,⋯k+3,k,k+2,k+1,0,然后将圆周上的结点按逆时针方向依次转动一个位置，然后可以得到另一条回路为：0,2,3,1,4,2k,5,⋯k+4,k+1,k+3,k+2,0;显然，这两条回路是没有公共边。继续这样做下去，共可产生条无公共边的哈密顿回路。

[押]

假定在 n 个人的团体中，任何 2 人合起来认识其余的 n-2 个人。证明：当 n≥4 时，这 n 个人可以围成一个圆圈，使得每个人两旁都是自己所认识的人。

将 n 个人表示为 n 个顶点。

如果两个人彼此认识，则在对应的两个顶点之间连一条边。

做 n 阶无向简单图 $=<V,E>$，$V=\{v \mid v$ 为此人群中的成员$\}$，$E=\{(u,v) \mid u,v\in V, u\neq v$ 且 u 与 v 认识$\}$. 由已知条件，$\forall u,v\in V$，均有

$$d(u)+d(v)\geq n-2 \tag{15.1}$$

下面再对 u 与 v 是否认识进行讨论.

(1) 若 u 与 v 认识，则由(15.1)可知

$$d(u)+d(v)\geq n-2+2=n \tag{15.2}$$

(2) 若 u 与 v 不认识，则 $\forall w\in V, w\neq u, w\neq v$，$u$ 与 v 必与 w 都认识. 否则，比如 u 与 w 不认识，则 v,w 都不认识 u，于是 v 与 w 合起来至多认识其余的 $n-3$ 个人，这与已知条件矛盾. 因而

$$d(u)+d(v)\geq 2(n-2) \tag{15.3}$$

当 $n\geq 3$ 时，有

$$2(n-2)\geq n-1 \tag{15.4}$$

当 $n\geq 4$ 时，有

$$2(n-2)\geq n \tag{15.5}$$

于是，当 $n\geq 3$ 时，由(15.2)，(15.3)与(15.4)式(根据定理 15.7) G 中存在哈密顿通路，所有的人按在通路中的顺序排成一列，满足要求. 当 $n\geq 4$ 时，由(15.2)，(15.3)与(15.5)式 G 中存在哈密顿回路，所有的人按在回路中的顺序围成圆圈满足要求.