四川大学期末考试参考答案（闭卷）

(2022~2023 学年第 1 学期)　　A 卷

课程号-课序号: **311153050**　课程名称: **离散数学**　任课教师: ______

适用专业年级: **软件工程 2021 级**　学生人数: ____印题份数: ____学号: ______姓名: ______

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺:

1、 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点;

2、 不带手机进入考场;

3、 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名:

题　号	一 (10%)	二 (20%)	三 (30%)	四 (30%)	五 (10%)		
得　分							
卷面总分			阅卷时间				

注意事项: 1. 请务必将本人所在学院、姓名、学号、任课教师姓名等信息准确填写在试题纸和答卷纸上;

2. **请将答案全部填写在答卷纸上;**

3. 考试结束，请将试题纸、答卷纸和草稿纸一并交给监考老师。

评阅教师	得分

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

提示: 在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选或未选均无分。

1、R 是集合 A={a,b,c,d} 上的二元关系，下列结论正确的是(A)

A、当 $R^2=R$ 时，R 具有传递性　　B、当 $R^3=R$ 时，R 具有传递性

C、$R^4=R$ 时，R 具有传递性　　D、以上结论均不正确

2、下列命题公式中为矛盾式的有（ B ）。

A、$(p\to\sim p)\to\sim p$　　B、$\sim(q\to p)\wedge p$

C、$(\sim p\to q)\to(q\to\sim p)$　　D、$(p\vee q)\to r$

3、在论域 A 中，命题 $\exists xG(x)$ 的真值为 1 的充要条件是(B).

A、A 中的任意元素 x，$G(x)$ 的真值均为 1.　B、A 中存在一些元素 x，$G(x)$ 的真值为 1.

C、A 中只存在一个元素 x，$G(x)$ 的真值为 1.　D、以上答案都不正确.

4、设连通分支数为5的平面图$G(V,E)$，$|V|=10,|E|=12$，则G有多少个面（ B ）。

A、6；　　B、8；　　C、7；　　D、9

5、下列语句中是真命题的是（ C ）。

A、如果雪是白色的，则1+1=3。　　B 命题标识符P是命题。

C、不是所有的双射函数均可表示为置换。　　D、论域为正整数集，$\exists x \exists y[x+y=-1]$。

评阅教师	得分

二、填空题（本大题共10空，每空2分，共20分）

1、无向图$G(n,m)$的连通分支数为ω，最多删除($m+\omega-n$)条边，其连通分支数不变。

2、有向图G中有10个顶点，该图关联矩阵的秩为7，则连通分支数为（ 3 ）

3、设$A=\{1,2,4,8,12,24\}$上的整除关系R，则<A，R>偏序格的最小元为（ 1 ），最大元为（ 24 ），

4、含3个变元的命题公式，其主析取范式的极小项项数与主合取范式的极大项项数之和为（8 ）。

5、设$A=\{a,b,c\}$为集合，则$<2^A,\subseteq>$是格，$\{\{a\},\{b\}\}$的最大下界是（ ϕ ），最小上界是（ $\{a,b\}$ ）

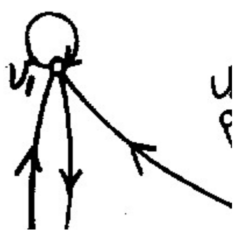
6、设S=Q×Q，Q为有理数集合，*为S上的二元运算：对任意(a，b)，(c，d)∈S，有(a，b)*(c，d)=(ac，ad+b)， S关于二元运算*的单位元为（(1，0)），当a≠0时，(a，b)关于*的逆元为（($a^{-1},-a^{-1}b$)）。

7、某班有学生60人，其中有38人会说中文， 16人会说英文， 21人会说德文；有3个人这三种语言都会说，有2个人这三种语言都不会说，问只会说两门语言有（11）人？

评阅教师	得分

三、分析演算题（本大题共3小题，每小题10分，共30分）

1、有向图G=(V,E)如右图所示，试根据邻接矩阵计算长度为2道路总数和长度为2回路总数。



解：$M=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$　　$M^2=\begin{bmatrix}2&1&1&0\\2&1&1&1\\2&1&2&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$

$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}M_{ij}^2=18,\qquad \sum_{i=1}^{4}M_{ii}^2=6$

G中长度为2的路总数为18，长度为2的回路总数为6。

2、某项工作需要派A、B、C和D 4个人中的2人，派送规则：1）若A去，则C和D中要去1个人； 2) B和C不能都去； 3) 若C去，则D留下。依据上述规则，有几种派法？如何

派？

解 设 A：A 去工作；B：B 去工作；C：C 去工作；D：D 去工作。则根据题意应有：$A\to C\oplus D$，$\neg(B\wedge C)$，$C\to\neg D$ 必须同时成立。因此

$$(A\to C\oplus D)\wedge\neg(B\wedge C)\wedge(C\neg\to D)$$

$$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D))\wedge(\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg C\vee\neg D)$$

$$\Leftrightarrow(\neg A\vee(C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D))\wedge((\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge\neg D)\vee\neg C\vee(\neg C\wedge\neg D))$$

$$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg A\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg D)$$

$$\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg C)\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg C\wedge\neg D)$$

$$\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg C)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg C\wedge\neg D)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{F}\vee\mathrm{F}\vee(\neg A\wedge\neg C)\vee\mathrm{F}\vee\mathrm{F}\vee(C\wedge\neg D\wedge\neg B)\vee\mathrm{F}\vee\mathrm{F}\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B)\vee\mathrm{F}\vee(\neg C\wedge D)\vee\mathrm{F}$$

$\neg(\Leftrightarrow A\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D\wedge\neg B)\vee(\neg$

$C\wedge D)$ $\neg(\Leftrightarrow A\wedge\neg C)\vee(\neg B\wedge C\wedge\neg D)\vee(\neg C\wedge D)$

$\Leftrightarrow \mathrm{T}$

故有三种派法：$B\wedge D$，$A\wedge C$，$A\wedge D$。

3. R 上的二元运算，$\forall a, b\in R$，$a\circ b = pa+qb$。问 p,q 为何值时$\circ$运算同时满足交换律和结合律？

1）交换律

$$a\circ b=b\circ a$$
$$pa+qb=pb+qa$$
$$(p-q)a=(p-q)b$$

对于任意的a,b 均成立，只有 $p=q$ 才有交换律。

2）结合律

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$$
$$p(pa+qb)+qc=pa+q(pb+qc)$$
$$p^2a+pqb+qc=pa+pqb+q^2c$$
$$(p^2-p)a+(q-q^2)c=0$$

对于任意的a,b,c 均成立，$\{p^2-p=0\}\wedge\{q-q^2=0\}\}$

所以当$\begin{cases}p=0\\q=1\end{cases}$，或$\begin{cases}p=1\\q=0\end{cases}$,或$\begin{cases}p=1\\q=1\end{cases}$，或$\begin{cases}p=0\\q=0\end{cases}$才有结合律

综上所述，当$\begin{cases}p=1\\q=1\end{cases}$或$\begin{cases}p=0\\q=0\end{cases}$时$\circ$运算同时满足交换律和结合律

评阅教师	得分

四、证明题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）。

1、设<G，*>是一个群，H1，H2 是 G 的子群。证明 H＝H1∩H2 是 G 的子群。

证明

1)非空性和幺元存在：由于H1，H2 是 G 的两个子群，所以有：e∈H1，e∈H2，即有 e∈H1∩H2；

2)封闭性：对∀a，b∈H，有 a，b∈H1∩H2， 即 a，b∈H1，a，b∈H2，

由于 H1，H2 都是 G 的子群，所以有： a*b∈H1，a*b∈H2，即有：a*b∈H1∩H2

3)逆元存在：对∀a ∈H，有 a∈H1∩H2，即 a∈H1，a∈H2，由于 H1，H2 都是 G 的子群，所以有：a-1∈H1，a-1∈H2，即有：a-1∈H1∩H2。

由 1)、2)、3)知：<H，*>是<G，*>的一个子群。

2、边数$m<30$的简单连通无向平面图$G(n,m)$，证明该图最小点度小于等于 4。

证明：若结点个数小于等于 3 时，结论显然成立。

当结点多于 3 个时，用反证法证明。

记|V|=n, |E|=m, |F|=k。

假设图中所有结点的度数都大于等于 5。

由欧拉握手定理得$\sum_{v\in V}$ deg(v)=2|E|得 5n ≤2m。

又因为G=〈V,E,F〉是一个连通简单无向平面图，

所以对每个面 f, deg(f) ≥ 3。

由公式$\sum_{f\in F}$ deg(f)=2|E|可得，2m≥3k。

再由欧拉公式|V|-|E|+|F|=2 可得 $2\le \frac{2}{5}$m-m+$\frac{2}{3}$m=$\frac{1}{15}$m

从而 30 ≤m, 这与已知矛盾。

3、设<R,*>是一个代数系统，*是 R 上二元运算，$\forall a,b \quad a*b=a+b-a\times b$，证明<R,*>是含幺半群。

证明：

[幺] $\forall a\in R$ ，$0*a=0+a+0\cdot a=a$，$a*0=a+0+a\cdot 0$

即 $0*a=a*0=a \quad \therefore 0$为幺元

[闭] $\forall a,b\in R$，由于+，• 在 R 封闭。所以$a*b=a+b+a\cdot b\in R$ 即*在 R 上封闭。

[结] $\forall a,b,c\in R$

$(a*b)*c=(a+b+a\cdot b)*c=a+b+a\cdot b+c+(a+b+a\cdot b)\cdot c$

$=a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

$a*(b*c)=a+b+c+a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c+a\cdot b\cdot c$

所以 $(a*b)*c=a*(b*c)$

4

因此， 〈R，*〉是含幺半群。

评阅教师	得分

五、非标准答案题（本大题共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）。

n 阶无向图 G 邻接矩阵 $R=[r_{ij}]_{n\times n}$，，其中 $r_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{顶点}i,j\text{存在一条边}\\ 0 & \text{顶点}i,j\text{没有边}\end{cases}$。

可否从邻接矩阵出发，计算图 G 的连通分支数。如果能，请给出具体计算过程。