

习题一

1、利用逻辑联结词把下列命题翻译成符号逻辑形式

- (1) 他既是本片的编剧，又是导演 --- $P \wedge Q$
 (2) 银行利率一降低，股价随之上扬 --- $P \rightarrow Q$
 (3) 尽管银行利率降低，股价却没有上扬 --- $P \wedge Q$
 (4) 占据空间的、有质量而且不断变化的对象称为物质 --- $M \leftrightarrow (S \wedge P \wedge T)$
 (5) 他今天不是乘火车去北京，就是随旅行团去了九寨沟 --- $P \vee Q$
 (6) 小张身体单薄，但是极少生病，并且头脑好使 --- $P \wedge Q \wedge R$
 (7) 不识庐山真面目，只缘身在此山中 --- $P \rightarrow Q$

(解释：因为身在此山中，所以不识庐山真面目)

- (8) 两个三角形相似，当且仅当他们的对应角相等或者对应边成比例

$$--- S \leftrightarrow (E \vee T)$$

- (9) 如果一个整数能被 6 整除，那么它就能被 2 和 3 整除。如果一个整数能被 3 整除，那么它的各位数字之和也能被 3 整除

解：设 P - 一个整数能被 6 整除 Q - 一个整数能被 2 整除 R - 一个整数能被 3 整除
 S - 一个整数各位数字之和能被 3 整除

翻译为：($P \rightarrow (Q \wedge R)$) \wedge ($R \rightarrow S$)

2、判别下面各语句是否命题，如果是命题，说出它的真值

- (1) BASIC 语言是最完美的程序设计语言 --- Y, T/F
 (2) 这件事大概是小王干的 --- N
 (3) $x^2 = 64$ --- N
 (4) 可导的实函数都是连续函数 --- Y, T/F
 (5) 我们要发扬连续作战的作风，再接再厉，争取更大的胜利 --- N
 (6) 客观规律是不以人们意志为转移的 --- Y, T
 (7) 到 2020 年，中国的国民生产总值将赶上和超过美国 --- Y, N/A
 (8) 凡事都有例外 --- Y, F

3、构造下列公式的真值表，并由此判别哪些公式是永真式、矛盾式或可满足式

- (1) $(P \vee (\sim P \wedge Q)) \rightarrow Q$

解：

P	Q	$\sim P \wedge Q$	$P \vee (\sim P \wedge Q)$	$(P \vee (\sim P \wedge Q)) \rightarrow Q$	可满足式
0	0	0	0	1	
0	1	1	1	1	
1	0	0	1	0	
1	1	0	1	1	

(2) ~ (4) 略

4、利用真值表方法验证下列各式为永真式

(1) ~ (8) 略

5、证明下列各等价式

- (1) $\sim ((\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

证明：左式 $\Leftrightarrow ((P \vee \sim Q) \wedge (P \vee Q)) \vee (P \wedge Q)$
 $\Leftrightarrow P \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee T \vee (P \wedge Q)$
 $\Leftrightarrow P \Leftrightarrow$ 右式

- (2) $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee R) \rightarrow Q$

证明：左式 $\Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge (\sim R \vee Q)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\sim P \wedge \sim R) \vee Q \\ &\Leftrightarrow \sim (P \vee R) \vee Q \\ &\Leftrightarrow (P \vee R) \rightarrow Q \Leftrightarrow \text{右式} \end{aligned}$$

$$(3) P \rightarrow (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: 左式} &\Leftrightarrow \sim P \vee Q \vee R \\ &\Leftrightarrow \sim P \vee Q \vee \sim P \vee R \\ &\Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \vee (\sim P \vee R) \\ &\Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R) \Leftrightarrow \text{右式} \end{aligned}$$

$$(4) (P \wedge Q) \vee (R \wedge Q) \vee (R \wedge P) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (R \vee Q) \wedge (R \vee P)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: 左式} &\Leftrightarrow ((P \vee R) \wedge Q) \vee (R \wedge P) \\ &\Leftrightarrow ((P \vee R) \vee R) \wedge ((P \vee R) \vee P) \wedge (Q \vee R) \wedge (Q \vee P) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (R \vee Q) \wedge (R \vee P) \Leftrightarrow \text{右式} \end{aligned}$$

6、如果 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee R$, 能否断定 $P \Leftrightarrow R$? 如果 $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge R$, 能否断定 $P \Leftrightarrow R$? 如果 $\sim P \Leftrightarrow \sim R$, 能否断定 $P \Leftrightarrow R$?

解: (1) 如果 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee R$, 不能判断 $P \Leftrightarrow R$, 因为如果 $Q = P \vee R$, 那么 $P \vee Q \Leftrightarrow P \vee P \vee R \Leftrightarrow Q \vee R$, 但 P 可以不等价于 R .

(2) 如果 $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge R$, 不能判断 $P \Leftrightarrow R$, 因为如果 $Q = P \wedge R$, 那么 $P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge P \wedge R \Leftrightarrow Q \wedge R$, 但 P 可以不等价于 R .

(3) 如果 $\sim P \Leftrightarrow \sim R$, 那么有 $P \Leftrightarrow R$, 因为 $\sim P \Leftrightarrow \sim R$, 则 $\sim P \leftrightarrow \sim R$ 为永真式, 及有 $P \leftrightarrow R$ 为永真式, 所以 $P \Leftrightarrow R$.

7、检查 \uparrow 和 \downarrow 是否满足结合率

解: 用真值表方式检查

P	Q	R	$P \uparrow Q$	$Q \uparrow R$	$(P \uparrow Q) \uparrow R$	$P \uparrow (Q \uparrow R)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1

由上表可知, \uparrow 不满足结合率

P	Q	R	$P \downarrow Q$	$Q \downarrow R$	$(P \downarrow Q) \downarrow R$	$P \downarrow (Q \downarrow R)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

由上表可知, \downarrow 不满足结合率

8、把下列各式用 \uparrow 等价表示出来

$$(1) (P \wedge Q) \vee \sim P$$

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &\Leftrightarrow ((P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)) \vee (P \uparrow P) \\ &\Leftrightarrow (((P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q))) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (P \uparrow P))\end{aligned}$$

$$(2) P \rightarrow (\sim P \rightarrow Q)$$

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &\Leftrightarrow \sim P \vee P \vee Q \\ &\Leftrightarrow Q \\ &\Leftrightarrow (Q \uparrow Q) \uparrow (Q \uparrow Q)\end{aligned}$$

$$(3) (P \rightarrow (Q \vee \sim R)) \wedge \sim P$$

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &\Leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q \vee R) \wedge \sim P \\ &\Leftrightarrow \sim P \vee (\sim Q \wedge \sim P) \vee (R \wedge \sim P) \\ &\Leftrightarrow (P \uparrow P) \vee ((Q \uparrow Q) \wedge (P \uparrow P)) \vee (R \wedge (P \uparrow P)) \\ &\Leftrightarrow (P \uparrow P) \vee ((Q \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow ((Q \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow P)) \vee ((R \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (R \uparrow (P \uparrow P)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{设: } (P \uparrow P) &= N \\ ((Q \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow ((Q \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow P)) &= L \\ ((R \uparrow (P \uparrow P)) \uparrow (R \uparrow (P \uparrow P))) &= M\end{aligned}$$

$$\text{则上式} \Leftrightarrow ((N \uparrow N) \uparrow (L \uparrow L)) \uparrow ((N \uparrow N) \uparrow (L \uparrow L)) \uparrow (M \uparrow M)$$

$$(4) \sim P \wedge \sim Q \wedge (\sim R \rightarrow P)$$

$$\begin{aligned}\text{解: 原式} &\Leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q \wedge (R \vee P) \\ &\Leftrightarrow (P \uparrow P) \wedge (Q \uparrow Q) \wedge ((P \uparrow P) \uparrow (R \uparrow R)) \\ &\Leftrightarrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \wedge ((P \uparrow P) \uparrow (R \uparrow R))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{设: } ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) &= N \\ ((P \uparrow P) \uparrow (R \uparrow R)) &= M\end{aligned}$$

$$\text{则上式} \Leftrightarrow (N \uparrow M) \uparrow (N \uparrow M)$$

9、证明: $\{\sim, \rightarrow\}$ 是最小功能完备集合

证明: 因为 $\{\sim, \vee\}$ 是最小功能完备集合, 所以, 如果 $\{\sim, \rightarrow\}$ 能表示出 \vee , 则其是功能完备集合。由于 $P \vee Q \Leftrightarrow (\sim P) \rightarrow Q$, 所以 $\{\sim, \rightarrow\}$ 是功能完备集合。因为 \sim, \rightarrow 不能相互表示, 所以 $\{\sim, \rightarrow\}$ 是最小功能完备集合; 同理可证: $\{\text{非}, \text{条件非}\}$ 也能将或表示出来:

$$P \vee Q \Leftrightarrow \sim(\sim P \rightarrow \sim Q)$$

10、证明: $\{\sim, \nabla\}$ 不是功能完备集

证明: $P \vee Q$ 没有办法通过 \sim, ∇ 的公式表达出来, 因为

P	Q	$P \vee Q$	$P \nabla P$	$\sim(P \nabla P)$	$P \nabla Q$	
0	0	0	0	1	0	
0	1	1	0	1	1	
1	0	1	0	1	1	
1	1	1	0	1	0	

所以, 通过 \sim, ∇ 不能表达出真值为三个 1 或 1 个 1 的情况, 因此, 不能表达出 $P \vee Q$, 所以不是功能完备集。

11、用 \sim 和 \wedge 把公式 $P \nabla Q \nabla R$ 和 $(P \nabla Q) \rightarrow R$ 表示出来

解:

$$\begin{aligned}(P \nabla Q) \nabla R &\Leftrightarrow ((P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)) \nabla R \\ &\Leftrightarrow (((P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q)) \wedge \sim R) \vee (\sim((P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge Q))\end{aligned}$$

$\wedge R)$

$$\Leftrightarrow (\sim(\sim(P \wedge \sim Q) \wedge \sim(\sim P \wedge Q)) \wedge \sim R) \vee ((\sim(P \wedge \sim Q) \wedge \sim(\sim P \wedge Q)) \wedge \sim R)$$

$$\Leftrightarrow \sim (\sim ((\sim (\sim (P \wedge \sim Q) \wedge \sim (\sim P \wedge Q)) \wedge \sim R)) \wedge \sim (((\sim (P \wedge \sim Q) \wedge \sim (\sim P \wedge Q)) \wedge \sim R)))$$

$$(P \nabla Q) \rightarrow R \quad \Leftrightarrow \sim (\sim (\sim (\sim (P \wedge \sim Q) \wedge \sim (\sim P \wedge Q)) \wedge \sim R))$$

12、 分别利用真值表法和等价变换法求下列公式的主合取范式及主析取范式：

(1) $P \rightarrow ((R \wedge Q) \rightarrow S)$

解：真值表法

P	Q	R	S	$R \wedge Q$	$(R \wedge Q) \rightarrow S$	$P \rightarrow ((R \wedge Q) \rightarrow S)$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

所以：

主合取范式为 $= \sim P \vee \sim Q \vee \sim R \vee S = M_{14}$

主析取范式为 $= m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_8 \vee m_9 \vee m_{10} \vee m_{11} \vee m_{12} \vee m_{13} \vee m_{14} \vee m_{16}$

等价变换法（略）

(2) $(\sim P \vee \sim Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \sim Q)$

解：真值表法

P	Q	$\sim P \vee \sim Q$	$P \leftrightarrow \sim Q$	$(\sim P \vee \sim Q) \rightarrow (P \leftrightarrow \sim Q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

所以：

主合取范式为 $= P \vee Q = M_0$

主析取范式为 $= (\sim P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \vee (P \wedge Q) = m_1 \vee m_2 \vee m_3$

等价变换法（略）

(3) $P \rightarrow (R \wedge (Q \rightarrow P))$

解：真值表法

P	Q	R	$Q \rightarrow P$	$R \wedge (Q \rightarrow P)$	$P \rightarrow (R \wedge (Q \rightarrow P))$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1

0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

所以：

主合取范式为 $= (\sim P \vee Q \vee R) \wedge (\sim P \vee \sim Q \vee R) = M_4 \wedge M_6$

主析取范式为 $= (\sim P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee (\sim P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge \sim R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \sim Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) = m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$

等价变换法（略）

(4) $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\sim P \rightarrow (\sim Q \wedge \sim R))$

解：真值表法

P	Q	R	$Q \wedge R$	$\sim Q \wedge \sim R$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	$\sim P \rightarrow (\sim Q \wedge \sim R)$	$(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\sim P \rightarrow (\sim Q \wedge \sim R))$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1

所以：

主合取范式为 $= (P \vee Q \vee \sim R) \wedge (P \vee \sim Q \vee R) \wedge (P \vee \sim Q \vee \sim R) \wedge (\sim P \vee Q \vee R) \wedge (\sim P \vee Q \vee \sim R) \wedge (\sim P \vee \sim Q \vee R) = M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

主析取范式为 $= (\sim P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee (P \wedge Q \wedge R) = m_0 \vee m_7$

等价变换法（略）

13、 用转化范式的方法判别下面各组公式是否等价

(1) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q)$ 和 $(\sim P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

解： $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow \sim (\sim P \vee Q) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \vee (P \wedge Q) \text{ --合取范式}$

$(\sim P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P) \Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \sim Q) \Leftrightarrow P \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \vee (P \wedge Q) \text{ --合取范式}$

两式的合取范式相同，所以等价

(2) $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ 和 $P \rightarrow (Q \wedge R)$

解： $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R) \text{ --合取范式}$

$P \rightarrow (Q \wedge R) \Leftrightarrow \sim P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R) \text{ --合取范式}$

两式的合取范式相同，所以等价

14、 从 A, B, C, D 4 个人中派 2 人出差，要求满足下列条件：如果 A 去，则必须在 C 或 D 中选一人同去；B 和 C 不能同时去；C 和 D 不能同时去。用构造范式的方法决定选派方案。

解：由题设 A：A 去，B：B 去，C：C 去，D：D 去则满足条件的选派应满足如下范式：

$$(A \rightarrow (C \vee D)) \wedge \sim (B \wedge C) \wedge \sim (C \wedge D)$$

构造和以上范式等价的主析取范式

$$(A \rightarrow (C \vee D)) \wedge \sim (B \wedge C) \wedge \sim (C \wedge D)$$

$$\Leftrightarrow (\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D) \vee (\sim A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge \sim D) \vee (\sim A \wedge \sim B \wedge C \wedge \sim D) \vee (\sim A \wedge B \wedge \sim C \wedge \sim D) \vee (A \wedge \sim B \wedge C \wedge \sim D) \vee (A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D) \vee (\sim A \wedge B \wedge \sim C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \sim C \wedge D)$$

共有八个极小项，但根据题意，需派两人出差，所以，只有其中三项满足要求：

$$(A \wedge \sim B \wedge C \wedge \sim D), (A \wedge \sim B \wedge \sim C \wedge D), (\sim A \wedge B \wedge \sim C \wedge D)$$

即有三种方案：A 和 C 去或者 A 和 D 去或者 B 和 D 去。

15、 证明下列蕴含式：

$$(1) P \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow (P \wedge Q)$$

$$\begin{aligned} \text{证明：} P \rightarrow Q &\Leftrightarrow \sim P \vee Q \Leftrightarrow T \wedge (\sim P \vee Q) \Leftrightarrow (\sim P \vee P) \wedge (\sim P \vee Q) \Leftrightarrow \sim P \vee (P \wedge Q) \\ &\Leftrightarrow P \rightarrow (P \wedge Q) \end{aligned}$$

所以，这是个等价式，因此也是个蕴含式

$$(2) (P \rightarrow Q) \rightarrow Q \Rightarrow (P \vee Q)$$

$$\begin{aligned} \text{证明：} (P \rightarrow Q) \rightarrow Q &\Leftrightarrow \sim (\sim P \vee Q) \vee Q \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \vee Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (Q \vee \sim Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge T \Leftrightarrow (P \vee Q) \end{aligned}$$

所以，这是个等价式，因此也是个蕴含式

$$(3) P \wedge \sim P \wedge R \Rightarrow S$$

证明： $P \wedge \sim P \wedge R \Leftrightarrow F \Rightarrow S$ (F 可蕴含任何命题公式)

$$(4) P \Rightarrow Q \vee R \vee \sim R$$

证明： $P \Rightarrow T \Leftrightarrow Q \vee R \vee \sim R$

16、 证明蕴含关系的性质 1、性质 2 和 3

证明：性质 1 $A \Rightarrow A$

因为在任意的解释下，公式 A 的真值显然和自己相同，当然在为真时也相同，所以蕴含成立。

性质 2 如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ ，则 $A \Leftrightarrow B$

因为 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ 及 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 为永真式，则 $A \leftrightarrow B$ 为永真式。所以 $A \Leftrightarrow B$ 。

性质 3 如果 $A \Rightarrow B$ 且 A 永真式，则 B 必为永真式

因为 $(A \rightarrow B)$ 为永真式，且 A 为永真式，那么只有 B 为永真式才能满足 $(A \rightarrow B)$ 为永真式成立。所以结论为真。

17、 证明定理 1.12

证明： $A \Rightarrow B$, 当且仅当 $\sim B \Rightarrow \sim A$

证明： $\because A \Rightarrow B \Leftrightarrow A \rightarrow B$ 为永真式 $\Leftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$ 为永真式 $\Leftrightarrow \sim B \Rightarrow \sim A$

$\therefore A \Rightarrow B$, 当且仅当 $\sim B \Rightarrow \sim A$

18、 一个有钱人生前留下了一笔珍宝，藏在一个隐秘处。在他留下的遗嘱中指出寻找珍宝的线索如下：

- (1) 如果藏宝的房子靠近池塘，那么珍宝不会藏在东厢房。
- (2) 如果房子的前院栽有大柏树，那么珍宝就藏在东厢房。
- (3) 藏宝房子靠近池塘。
- (4) 要么前院栽有大柏树，要么珍宝埋在花园正中地下。
- (5) 如果后院栽有香樟树，珍宝藏在附近。

请利用蕴含关系找出藏宝处。

解：根据给定的条件有下述命题：

P: 珍宝藏东厢房
 Q: 藏宝的房子靠近池塘
 R: 房子的前院栽有大柏树
 S: 珍宝藏花园正中地下
 T: 后院栽有香樟树
 M: 珍宝藏附近

根据题意, 得出:

$$\begin{aligned} & (Q \rightarrow \sim P) \wedge (R \rightarrow P) \wedge Q \wedge (R \vee S) \wedge (T \rightarrow M) \Rightarrow ? \\ & (Q \rightarrow \sim P) \wedge (R \rightarrow P) \wedge Q \wedge (R \vee S) \wedge (T \rightarrow M) \\ & \Rightarrow \sim P \wedge (R \rightarrow P) \wedge (R \vee S) \wedge (T \rightarrow M) \\ & \Rightarrow \sim R \wedge (R \vee S) \wedge (T \rightarrow M) \\ & \Rightarrow S \wedge (T \rightarrow M) \end{aligned}$$

$\Rightarrow S$ 即珍宝藏花园正中地下

19、 判断下列蕴含关系式是否成立:

(1) $Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

解: 当左端公式解释为 1 时, Q 必须为 1; Q 为 1, P 必为 1; 所以, 右端公式也为 1; 因此, 蕴含关系成立

(2) $(P \rightarrow (Q \vee \sim R)) \wedge (Q \rightarrow (P \wedge R)) \Rightarrow P \rightarrow R$

解: 左端公式 $\Leftrightarrow Q \leftrightarrow (P \wedge R)$, 当解释为 1 是, 分两种情况, $P \wedge R$ 与 Q 同为 1, 那么 $P \rightarrow R$ 也为 1; $P \wedge R$ 与 Q 同为 0, 如果此时 $P=1, R=0$, 则 $P \rightarrow R$ 为 0; 因此, 此蕴含式不成立

(3) $\sim P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \sim Q$

解: 左端公式解释为 1 时, P 必为 0; 当 P 为 0 时, 则 Q 可为 0, 也可为 1; 因此, 此蕴含式不成立

(4) $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow \sim Q) \wedge (P \rightarrow R) \Rightarrow R$

解: 当左端公式按 $P=0, Q=1, R=0$ 解释时, 为 1, 但右端不为 1; 因此, 此蕴含式不成立

(5) $((P \wedge \sim Q) \rightarrow R) \wedge (P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Rightarrow R$

解: 当左端公式按 $P=1, Q=1, R=0$ 解释时, 真值为 1, 但右端为 0; 因此, 此蕴含式不成立

20、 演绎证明下面各蕴含式:

(1) $\sim P \vee Q, R \rightarrow \sim Q \Rightarrow P \rightarrow \sim R$

证明: 运用 cp 法, 将结论条件式的前件作为前提, 证明步骤如下

- [1] P p(附加前提)
- [2] $\sim P \vee Q$ p
- [3] Q T [1, 2] I
- [4] $R \rightarrow \sim Q$ p
- [5] $\sim R$ T [3, 4] I
- [6] $P \rightarrow \sim R$ CP [1, 5]

(2) $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S), (S \vee E) \rightarrow B \Rightarrow P \rightarrow B$

证明: 运用 cp 法, 将结论条件式的前件作为前提, 证明步骤如下

- [1] P p(附加前提)
- [2] $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge S)$ p
- [3] $R \wedge S$ T [1, 2] I
- [4] $(S \vee E) \rightarrow B$ p

[5] B T [3, 4] I

[6] $P \rightarrow B$ CP [1, 5]

(3) $P \rightarrow (Q \rightarrow R), (R \wedge S) \rightarrow E, \sim B \rightarrow (S \wedge \sim E) \Rightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow B)$

证明：运用 cp 法，将结论条件式的前件作为前提，先将结论进行等价变换为 $(P \wedge Q) \rightarrow B$ ，因此 $P \wedge Q$ 可作为附加前提，证明步骤如下

[1] $P \wedge Q$ p(附加前提)

[2] $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ p

[3] $(P \wedge Q) \rightarrow R$ T [2] E

[4] R T [1, 3] I

[5] $(R \wedge S) \rightarrow E$ p

[6] E T [4, 6] I

[7] $\sim B \rightarrow (S \wedge \sim E)$ p

[8] B T [6, 7] I

[9] $(P \wedge Q) \rightarrow B$ cp [1, 8]

(4) $(R \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S), (Q \rightarrow E) \wedge (S \rightarrow B), \sim (E \wedge B), (P \rightarrow R) \Rightarrow \sim P$

证明：运用反证方法，将结论的非纳入前提，证明步骤如下

[1] P p(附加前提)

[2] $P \rightarrow R$ p

[3] R T [1, 2] I

[4] $(R \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$ p

[5] $Q \wedge S$ T [3, 4] I

[6] $(Q \rightarrow E) \wedge (S \rightarrow B)$ p

[7] $E \wedge B$ T [5, 6] I

[8] $\sim (E \wedge B)$ p

[9] F(矛盾式) T [7, 8] E

(5) $P \rightarrow (Q \rightarrow R), Q \rightarrow (R \rightarrow S) \Rightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow S)$

证明：运用 cp 法，将结论条件式的前件作为前提，证明步骤如下

[1] P p(附加前提)

[2] $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ p

[3] $Q \rightarrow R$ T [1, 2] I

[4] $Q \rightarrow (R \rightarrow S)$ p

[5] $R \rightarrow (Q \rightarrow S)$ T [4] E

[6] $Q \rightarrow S$ T [3, 5] I

[7] $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$ CP [1, 6]

21、把下列句子演绎成逻辑形式，并给出证明

- (1) 如果资方拒绝增加工资，那么罢工不会结束；除非罢工超过一年，并且资方撤换了经理；现在资方拒绝了增加工资，罢工刚开始。判断罢工能否停止。

解：根据题意，有如下命题

P：资方拒绝增加工资

Q：罢工结束

R：罢工超过一年

S：资方撤换了经理

所以，前提条件符号化为

$P \rightarrow \sim Q; Q \rightarrow R \wedge S; P \wedge \sim R$

因此，推理过程如下：

- | | | |
|-----|------------------------|------------|
| [1] | $P \wedge \sim R$ | p |
| [2] | $P \rightarrow \sim Q$ | p |
| [3] | $\sim Q$ | T [1, 2] I |

所以，罢工不会结束

(2) 某公司发生了一起盗窃案，经仔细侦察，掌握了如下一些事实：

- 被盗现场没有留下任何痕迹
- 失盗时，小花或则小英正在卡拉 ok 厅
- 如果失盗时小胖正在附近，他就会习惯性地破门而入偷走东西后扬长而去
- 如果失盗时小花正在卡拉 ok 厅唱歌，那么金刚是最大的嫌疑者
- 如果失盗时小胖不在附近，那么他的女友小英会和他一起外出旅游
- 如果失盗时小英正在卡拉 ok 厅唱歌，那么瘦子是最大的嫌疑者

根据以上事实，请通过演绎推理找出偷窃者

解：根据给定的条件有下述命题：

P：现场无任何痕迹

Q：失盗时，小花在 OK 厅

R：失盗时，小英在 OK 厅

S：失盗时，小胖在附近

T：金刚是偷窃者

M：瘦子是偷窃者

则根据案情有如下命题公式：

$\{P, Q \vee R, S \rightarrow \sim P, Q \rightarrow T, \sim S \rightarrow \sim R, R \rightarrow M\}$

- | | | |
|---|-----------------------------|------|
| ① | P | P |
| ② | $S \rightarrow \sim P$ | P |
| ③ | $\sim S$ | T①②I |
| ④ | $\sim S \rightarrow \sim R$ | P |
| ⑤ | $\sim R$ | T③④I |
| ⑥ | $Q \vee R$ | P |
| ⑦ | Q | T⑤⑥I |
| ⑧ | $Q \rightarrow T$ | P |
| ⑨ | T | T⑦⑧I |

即 金刚是偷窃者

22、 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一组命题公式，如果存在一个解释使 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ 取值真，就称这组公式是相容的，否则称为不相容的。不相容意味着 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ 蕴含一个矛盾式，现在判别下列各命题组是否相容

(1) $P \rightarrow (Q \rightarrow R), S \rightarrow (Q \wedge \sim R), P \wedge S$

解：根据题意

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge (S \rightarrow (Q \wedge \sim R)) \wedge (P \wedge S) \Rightarrow (Q \rightarrow R) \wedge (Q \wedge \sim R) \Rightarrow R \wedge \sim R \Rightarrow F$

所以，这组命题公式不相容

(2) $P \vee Q, \sim R \vee S, \sim Q, \sim S$

解：根据题意

$(P \vee Q) \wedge (\sim R \vee S) \wedge \sim Q \wedge \sim S \Rightarrow P \wedge \sim R$

所以，当 $P=1, Q=0, R=0, S=0$ 时，合取式解释为 1，因此这组命题公式相容

(3) $P \leftrightarrow Q, Q \rightarrow R, \sim R \vee S, \sim P \rightarrow S, \sim S$

解：根据题意

$$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (\sim R \vee S) \wedge (\sim P \rightarrow S) \wedge \sim S \Rightarrow (P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge \sim R \wedge P \Rightarrow (P \leftrightarrow Q) \wedge \sim Q \wedge P \Rightarrow F$$

所以，这组命题公式不相容

$$(4) P \rightarrow Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow \sim R, P$$

解：根据题意

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow \sim R) \wedge P \Rightarrow Q \wedge R \wedge (Q \rightarrow \sim R) \Rightarrow R \wedge \sim R \Rightarrow F$$

所以，这组命题公式不相容

23、 利用消解法证明下列各蕴含式：

$$(1) R \rightarrow \sim Q, R \vee S, S \rightarrow \sim Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \sim P$$

$$\text{证明： } R \rightarrow \sim Q \Leftrightarrow \sim R \vee \sim Q$$

$$S \rightarrow \sim Q \Leftrightarrow \sim S \vee \sim Q$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q$$

$$\text{因此子句集合} = \{ \sim R \vee \sim Q, \sim S \vee \sim Q, R \vee S, \sim P \vee Q, P \}$$

消解过程如下：

- [1] $\sim R \vee \sim Q$ p
- [2] $\sim S \vee \sim Q$ p
- [3] $R \vee S$ p
- [4] $\sim P \vee Q$ p
- [5] P p
- [6] Q 由[4, 5]归结
- [7] $\sim R$ 由[1, 6]归结
- [8] $\sim S$ 由[2, 6]归结
- [9] S 由[3, 7]归结
- [10] **FLASE** □ 由[8, 9]归结

导出空子句

$$(2) \sim(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \vee S), (Q \rightarrow P) \vee \sim R, R \Rightarrow P \leftrightarrow Q$$

$$\text{证明： } \sim(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \vee S) \Leftrightarrow \sim P \vee Q \vee R \vee S$$

$$(Q \rightarrow P) \vee \sim R \Leftrightarrow \sim Q \vee P \vee \sim R$$

$$\sim(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \sim((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \Leftrightarrow \sim(P \rightarrow Q) \vee \sim(Q \rightarrow P)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\sim P \vee \sim Q)$$

$$\text{因此子句集合} = \{ \sim P \vee Q \vee R \vee S, \sim Q \vee P \vee \sim R, P \vee Q, \sim P \vee \sim Q, R \}$$

消解过程如下：

- [1] $\sim P \vee Q \vee R \vee S$ p
- [2] $\sim Q \vee P \vee \sim R$ p
- [3] $P \vee Q$ p
- [4] $\sim P \vee \sim Q$ p
- [5] R p
- [6] $\sim Q \vee P$ 由[2, 5]归结
- [7] P 由[3, 6]归结
- [8] $Q \vee R \vee S$ 由[1, 7]归结
- [9] $P \vee S$ 由[2, 8]归结
- [10] $P \vee \sim R$ 由[2, 3]归结
- [11] $\sim Q$ 由[4, 6]归结

- [12] $R \vee S$ 由[8, 11]归结
 [13] $\sim Q \vee P \vee S$ 由[2, 12]归结
 [14] $P \vee R \vee S$ (此题可能有问题)

(3) $P \rightarrow (Q \rightarrow R), Q \rightarrow (R \rightarrow S) \Rightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow S)$

证明: $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow \sim P \vee \sim Q \vee R$

$Q \rightarrow (R \rightarrow S) \Leftrightarrow \sim Q \vee \sim R \vee S$

$\sim (P \rightarrow (Q \rightarrow S)) \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge \sim S$

因此子句集合 = $\{ \sim P \vee \sim Q \vee R, \sim Q \vee \sim R \vee S, P, Q, \sim S \}$

消解过程如下:

- [1] $\sim P \vee \sim Q \vee R$ p
 [2] P p
 [3] $\sim Q \vee R$ 由[1, 2]归结
 [4] Q p
 [5] R 由[3, 4]归结
 [6] $\sim Q \vee \sim R \vee S$ p
 [7] $\sim S$ p
 [8] $\sim Q \vee \sim R$ 由[6, 7]归结
 [9] $\sim R$ 由[4, 8]归结
 [10] **FLASE** \square 由[5, 9]归结
 导出空子句

习题二

1、把下列谓词翻译成谓词公式

(1) 每个有理数都是实数，但是并非每个实数都是有理数，有些实数是有理数

解: $R(x)$ -- x 是实数

$Ra(x)$ -- x 是有理数

翻译如下: $\forall(x)(Ra(x) \rightarrow R(x)) \wedge \sim \forall(x)(R(x) \rightarrow Ra(x)) \wedge \exists(x)(R(x) \wedge Ra(x))$

(2) 直线 a 和 b 平行当且仅当 a 和 b 不相交

解: $A(x)$ -- x 是直线

$F(x, y)$ -- x 与 y 平行

$G(x, y)$ -- x 与 y 相交

翻译如下: $\forall(a)\forall(b)(A(a) \wedge A(b) \rightarrow (F(a, b) \leftrightarrow \sim G(a, b)))$

(3) 除非所有的会员都参加，这个活动才有意义

解: $A(x)$ -- x 是会员

$B(x)$ -- x 有意义 a -- 这个活动

$F(x, y)$ -- x 参加 y

翻译如下: $B(a) \rightarrow \forall(x)(A(x) \rightarrow F(x, a))$

或 $\sim \forall(x)(A(x) \rightarrow F(x, a)) \rightarrow \sim B(a)$

(4) 任何正整数不是合数就是质数

解: $A(x)$ -- x 是正整数

$B(x)$ -- x 是合数

$C(x)$ -- x 是质数

翻译如下: $\forall(x)(A(x) \rightarrow B(x) \vee C(x))$

(6) 凡是存钱的人都想有利息，如果没有利息，人们就不会存钱

解: $A(x)$ -- x 是存钱的人

$F(x, y)$ -- x 想有 y

P -- 存钱没有利息

Q : -- 人们不存钱

a : -- 利息

翻译如下: $\forall(x)(A(x) \rightarrow F(x, a)) \wedge (P \rightarrow Q)$

2、设论域 $D = \{0, 1, 2\}$ ，把下列公式用不含量词的公式表示出来

(1) $\forall(x)P(x) \wedge \exists(x)Q(x)$

解: 上式 $\Leftrightarrow P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge (Q(0) \vee Q(1) \vee Q(2))$

(2) $\forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

解: 上式 $\Leftrightarrow (P(0) \rightarrow Q(0)) \wedge (P(1) \rightarrow Q(1)) \wedge (P(2) \rightarrow Q(2))$

(3) $\forall(x)[\sim P(x)] \vee \exists(x)Q(x)$

解: 上式 $\Leftrightarrow (\sim P(0) \wedge \sim P(1) \wedge \sim P(2)) \vee Q(0) \vee Q(1) \vee Q(2)$

3、指出下列公式中的约束变元和自由变元，并确定公式的辖域

略

4、对下列公式中的变元进行代换，以使任何变元不能既是约束变元又是自由变元

(1) $\forall(x)\exists(y)[P(x, y) \rightarrow Q(y, z)] \vee \forall(z)R(x, y, z)$

解: 代换如下 $\forall(x)\exists(y)[P(x, y) \rightarrow Q(y, z)] \vee \forall(s)R(u, v, s)$

(2) $(\forall(x)[P(x) \rightarrow R(x)] \vee Q(x)) \wedge (\exists(x)R(x) \rightarrow \exists(z)S(x, z))$

解: 代换如下 $(\forall(x)[P(x) \rightarrow R(x)] \vee Q(u)) \wedge (\exists(y)R(y) \rightarrow \exists(z)S(u, z))$

5、把下列语句符号化，并确定相应谓词公式是永真式、可满足式、还是矛盾式

(1) 如果两个数的积等于 0, 那么至少其中一个数为 0, 数 $x-1$ 不等于 0, 所以数 $x-1$ 和 $x+1$ 的积也不等于 0

解: 设论域在任意数域集合, 运用常规的数学符号, 翻译如下

$$\forall(x) \forall(y) (xy = 0 \rightarrow (x=0 \vee y=0)) \wedge ((x-1 \neq 0) \rightarrow ((x-1)(x+1) \neq 0))$$

这是一个可满足式, 但不是永真式, 因为存在 $x=-1$ 时, 谓词公式不成立, 但其它情况均成立, 如果论域中不包含 -1, 为真, 包含就不成立

(2) 诚实的人都讲实话。小林不是诚实的, 因而小林不讲实话

解: $H(x)$ -- x 诚实
 $T(x)$ -- x 讲真话
 a -- 小林

翻译如下:

$$(\forall(x)(H(x) \rightarrow T(x)) \wedge \sim H(a)) \rightarrow \sim T(a)$$

这是一个可满足式, 因为否定条件命题前件, 不一定后件命题一定为假。及小林虽然不诚实, 但可能讲实话

(3) 好货不便宜。小王买的衣服很贵, 所以小王买的是优质衣服

解: $G(x)$ -- x 是好货
 $C(x)$ -- x 便宜
 a -- 小王买的衣服

翻译如下:

$$(\forall(x)(G(x) \rightarrow \sim C(x)) \wedge \sim C(a)) \rightarrow G(a)$$

此谓此公式成立, 是永真式

(4) 每个懂得人性的作家都很高明, 不能刻画人们内心世界的诗人都不是真正的诗人。莎士比亚创作了哈姆雷特。没有一个不懂得人性本质的作家能够刻画人们的内心世界。只有真正的诗人才能创作哈姆雷特。因此, 莎士比亚是个高明的作家。

解: $A(x)$ -- x 懂人性
 $B(x)$ -- x 很高明
 $C(x)$ -- x 能刻画人们内心世界
 $D(x,y)$ -- x 创作 y
 h -- 哈姆雷特
 s -- 莎士比亚

翻译如下:

$$(\forall(x)[(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge (\sim C(x) \rightarrow \sim B(x)) \wedge (B(x) \rightarrow D(x,h)) \wedge (\sim A(x) \rightarrow \sim C(x))] \wedge D(s,h)) \rightarrow B(s)$$

此谓词公式成立 (但没有区分诗人和作家, 还可有更好的表达形式)

6、对于题目给定的解释, 求下列各公式相应的真值

(1) $A = \forall(x)[P(x) \vee Q(x)] \wedge R(a)$, 解释 $D = \{1,2,3\}$, $P(x): x^2+x=2$; $Q(x): x$ 是素数; $R(x): x < 3$; $a = 1$

解: 根据解释, A 变为 $(P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) \wedge (P(3) \vee Q(2)) \wedge R(1)$, 根据 $P(x), Q(x), R(x)$ 的定义, 显然 $P(1) \vee Q(1) = 1$, $P(2) \vee Q(2) = 1$, $P(3) \vee Q(2) = 1$, $R(1) = 1$, 所以整个公式解释为真

(2) $A = P(a, f(b)) \wedge P(b, f(a))$, $B = \forall(x) \exists(y)P(y,x)$, $C = \exists(y) \forall(x)P(y,x)$, $E = \forall(x) \forall(y)[P(x,y) \rightarrow P(f(x), f(y))]$, 解释: $D = \{2,3\}$, $a = 3$, $b = 2$, $f(2)=3$, $f(3)=2$, $P(2,2)=0$, $P(2,3)=0$, $P(3,2)=P(3,3) = 1$

解: 根据解释, A 变为 $P(3,3) \wedge P(2,2) = 1 \wedge 0 = 0$, 真值为假

B 变为 $(P(2,2) \vee P(3,2)) \wedge (P(2,3) \vee P(3,3)) = (0 \vee 1) \wedge (0 \vee 1) = 1$, 真值为真

C 变为 $(P(2,2) \wedge P(2,3)) \vee (P(3,2) \wedge P(3,3)) = (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 1$, 真值为真

E 变为 $(P(2,2) \rightarrow P(3,3)) \wedge (P(2,3) \rightarrow P(3,2)) \wedge (P(3,2) \rightarrow P(2,3)) \wedge (P(3,3) \rightarrow P(2,2)) = (0 \rightarrow 1) \wedge (0 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow 0) = 0$, 真值为假

7、 设论域为整数集合 Z, 试判定下面各公式是否是永真式, 矛盾式或可满足式

(1) $\forall(x)[x > -10 \wedge x^2 \geq 0]$

答: 为假命题

(2) $\exists(x)[2x > 8 \wedge x^2 - 6x + 5 \leq 0]$

答: 为真命题, 当 4, 5 使满足谓词公式

(3) $\forall(x) \exists(y)[x+y=1024]$

答: 为真命题, 对任意整数 x, y 取值为 1024-x 及可

(4) $\exists(y) \forall(x)[xy < 10 \vee x+y \geq 2]$

答: 为真命题, y=0 及成立

8、 试对公式 $\forall(x) \exists(y)[P(x,y) \rightarrow Q(x)]$ 构造一个解释, 使在该解释下公式取值真

例如: 在整域内, $P(x,y)$ 为 $xy > 0$, $Q(x)$ 为 x 不为 0, 那么上述公式解释为, 对任意一个整数 x, 都存在整数 y, 如果 x 乘 y 大于 0, 则 x 不等于 0。显然是个真命题。

9、 证明下列各式成立:

(1) $\forall(x) \forall(y)[P(x) \rightarrow Q(y)] \Leftrightarrow \exists(x)P(x) \rightarrow \forall(y)Q(y)$

证明: 右式 $\Leftrightarrow \forall(x) \forall(y)[\sim P(x) \vee Q(y)] \Leftrightarrow \forall(x) \sim P(x) \vee \forall(y)Q(y) \Leftrightarrow \exists(x)P(x) \rightarrow \forall(y)Q(y)$

(2) $\exists(x) \exists(y) [P(x) \rightarrow Q(y)] \Leftrightarrow \forall(x) P(x) \rightarrow \exists(y) Q(y)$

证明: 右式 $\Leftrightarrow \exists(x) \exists(y) [\sim P(x) \vee Q(y)] \Leftrightarrow \exists(x) \sim P(x) \vee \exists(y) Q(y) \Leftrightarrow \forall(x) P(x) \rightarrow \exists(y) Q(y)$

(3) $\sim \exists(y) \forall(x) P(x,y) \Leftrightarrow \forall(y) \exists(x) [\sim P(x,y)]$

证明: 右式 $\Leftrightarrow \forall(y) \sim \forall(x) P(x,y) \Leftrightarrow \forall(y) \exists(x) [\sim P(x,y)]$

10、 判别 $\exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow \exists(x)P(x) \rightarrow \exists(x)Q(x)$ 是否成立, 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 找一个解释予以说明

解: $\exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow \exists(x) [\sim P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow \exists(x) \sim P(x) \vee \exists(x)Q(x) \Leftrightarrow \forall(x) P(x) \rightarrow \exists(x)Q(x)$ 显然和 $\exists(x)P(x) \rightarrow \exists(x)Q(x)$ 不等价, 现构造如下解释

设论域为 $D=\{a,b\}$, $P(a)=0, P(b)=1, Q(a)=0, Q(b)=0$, 则 $\exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ 解释为真, 而 $\exists(x)P(x) \rightarrow \exists(x)Q(x)$ 解释为假, 所以不等价

11、 把下列公式化为等价的前束范式, 再求出对应的 SKolem 范式

(1) $\sim(\forall(x)P(x) \rightarrow \exists(y)P(y))$

解: 原式 $\Leftrightarrow \sim(\sim \forall(x)P(x) \vee \exists(y)P(y)) \Leftrightarrow \forall(x)P(x) \wedge \forall(y) \sim P(y) \Leftrightarrow \forall(x)(P(x) \wedge \sim P(x)) \Leftrightarrow F$

(2) $\sim(\forall(x)P(x) \rightarrow \exists(y) \forall(z)Q(y,z))$

解: 原式 $\Leftrightarrow \forall(x)P(x) \wedge \forall(y) \exists(z) \sim Q(y,z) \Leftrightarrow \forall(x) \exists(z) (P(x) \wedge \sim Q(x,z))$

其 SKolem 范式为: $\forall(x) (P(x) \wedge \sim Q(x,f(x)))$

(3) $\forall(x) \forall(y) [\exists(z)P(x,y,z) \wedge \exists(u)Q(x,u) \wedge \exists(v)Q(y,v)]$

解: 原式 $\Leftrightarrow \forall(x) \forall(y) \exists(z) \exists(u) \exists(v) [P(x,y,z) \wedge Q(x,u) \wedge Q(y,v)]$

其 SKolem 范式为: $\forall(x) \forall(y) [P(x,y,f(x,y)) \wedge Q(x,g(x,y)) \wedge Q(y,l(x,y))]$

(4) $\forall(x) [\sim P(x,0) \rightarrow (\exists(y)P(y,f(x)) \wedge \forall(z)Q(x,z))]$

解: 原式 $\Leftrightarrow \forall(x) [P(x,0) \vee (\exists(y)P(y,f(x)) \wedge \forall(z)Q(x,z))] \Leftrightarrow \forall(x) \exists(y) \forall(z) [P(x,0) \vee (P(y,f(x)) \wedge Q(x,z))]$

其 SKolem 范式为: $\forall(x) \forall(z) [P(x,0) \vee (P(g(x),f(x)) \wedge Q(x,z))]$

12、 设 G 的前束范式为 $\exists(x) \forall(y)P(x,y)$, 其中 $P(x,y)$ 不含 x,y 以外的变元; 设 f 是不出现在 $P(x,y)$ 中的函数符号。证明: G 是永真式当且仅当 $\exists(x) P(x,f(x))$ 为永真式

证明: 1) 充分性:

当 G 为永真式, 及至少存在一个 $x=a$, 使得 $\forall(y)P(a,y)$ 为永真, 及对论域中任意的元素 b , $P(a,b)$ 为真, 设函数 $f(a)=b$, 那么 $P(a, f(a))$ 为真, 及 $\exists(x)P(x, f(x))$ 为真

2) 必要性:

当 $\exists(x)P(x, f(x))$ 为永真时, 及至少存在一个 $x=a$, 在任意的 $f(a)$ 取任意论域中的值时, 都为真, 及 $\forall(y)P(a,y)$ 为真, 所以 G 为永真

综上所述, 命题成立

13、 证明下列各式成立

(1) $\exists(x) \exists(y)[P(x) \wedge Q(y)] \Rightarrow \exists(x)P(x)$

证明: 左式 $\Leftrightarrow \exists(x)P(x) \wedge \exists(y)Q(y) \Rightarrow \exists(x)P(x)$

(2) $\sim(\exists(x)P(x) \wedge Q(a)) \Rightarrow \exists(x)P(x) \rightarrow \sim Q(a)$

证明: 左式 $\Leftrightarrow \sim\exists(x)P(x) \vee \sim Q(a) \Leftrightarrow \exists(x)P(x) \rightarrow \sim Q(a)$

(3) $\forall(x)[\sim P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall(x)[\sim Q(x)] \Rightarrow P(x)$

证明: 左式 $\Leftrightarrow \forall(x)[(\sim P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \sim Q(x)] \Rightarrow (\sim P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \sim Q(x) \Rightarrow P(x)$

(4) $\forall(x)[P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall(x)[\sim P(x)] \Rightarrow \forall(x)Q(x)$

证明: 左式 $\Leftrightarrow \forall(x)[(P(x) \vee Q(x)) \wedge \sim P(x)] \Rightarrow \forall(x)Q(x)$

(5) $\exists(x)[P(x) \rightarrow \sim Q(x)] \wedge \forall(x)[P(x)] \Rightarrow \sim\forall(x)Q(x)$

证明: 左式 $\Leftrightarrow (\forall(x)P(x) \vee \sim\forall(x)Q(x)) \wedge \forall(x)[P(x) \Rightarrow \sim\forall(x)Q(x)]$

14、 判别下面各式是否成立, 并说明理由

(1) $P(x) \rightarrow \forall(x)Q(x) \Rightarrow \exists(x)[P(x) \wedge Q(x)]$

答: 不成立, 因为

当 $P(x)$ 恒为假时, 左式成立, 但右式不成立

(2) $\exists(x)P(x) \rightarrow \forall(x)Q(x) \Rightarrow \forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

答: 成立, 因为

左式 $\Leftrightarrow \forall(x) \sim P(x) \vee \forall(x)Q(x) \Rightarrow \forall(x)[\sim P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow \forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

(3) $\forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Rightarrow \exists(x)P(x) \rightarrow \forall(x)Q(x)$

答: 不成立, 因为在如下解释情况, 左式成立, 而右式不成立

$D = \{a, b\}$, $P(a)=Q(a)=0$, $P(b)=Q(b)=1$

15、 下面给出了对 $\forall(x)[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \forall(x)P(x) \vee \forall(x)Q(x)$ 的证明:

(证明过程略)

试判断这个证明是否正确。你能给出一个证明吗?

答: 这个证明不正确, 因为: 如果 $P \Rightarrow Q$ 则 $\sim Q \Rightarrow \sim P$ 而 $\sim P \Rightarrow \sim Q$ 不一定成立, 因此在这个证明过程中, 第二步到第三步的蕴含不成立。

16、 演绎下列各式

(1) $\exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Rightarrow \forall(x)P(x) \rightarrow \exists(x)Q(x)$

证明: 运用 CP 法

[1]	$\exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$	p
[2]	$P(a) \rightarrow Q(a)$	ES[2]
[3]	$\forall(x)P(x)$	p(附加前提)
[4]	$P(a)$	US[1]
[5]	$Q(a)$	T[2, 3]I
[6]	$\exists(x)Q(x)$	EG[5]
[7]	$\forall(x)P(x) \rightarrow \exists(x)Q(x)$	CP[3, 6]

(2) $\forall(x)P(x) \rightarrow \forall(x)Q(x) \Rightarrow \exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

证明:

- [1] $\forall(x)P(x) \rightarrow \forall(x)Q(x)$ p
- [2] $\sim \forall(x)P(x) \vee \forall(x)Q(x)$ T[1]E
- [3] $\exists(x)\sim P(x) \vee \forall(y)Q(y)$ T[2]E
- [4] $\exists(x)\forall(y)(\sim P(x) \vee Q(y))$ T[3]E
- [5] $\forall(y)(\sim P(a) \vee Q(y))$ ES[4]
- [6] $(\sim P(a) \vee Q(a))$ GS[5]
- [7] $P(a) \rightarrow Q(a)$ T[6]E
- [8] $\exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ EG[7]

(2) $\forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Rightarrow \exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

证明:

- [1] $\forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ p
- [2] $\forall(x)[\sim P(x) \vee Q(x)]$ T[1]E
- [3] $\sim P(a) \vee Q(a)$ US[2]
- [4] $P(a) \rightarrow Q(a)$ T[3]E
- [5] $\exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ EG[4]

(3) $\forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)], \forall(x)[R(x) \rightarrow \sim Q(x)] \Rightarrow \forall(x)[R(x) \rightarrow \sim P(x)]$

证明:

- [1] $\forall(x)[R(x) \rightarrow \sim Q(x)]$ p
- [2] $R(x) \rightarrow \sim Q(x)$ US[1]
- [3] $Q(x) \rightarrow \sim R(x)$ T[2]E
- [4] $\forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ p
- [5] $P(x) \rightarrow Q(x)$ US[4]
- [6] $P(x) \rightarrow \sim R(x)$ T[3,5]I
- [7] $R(x) \rightarrow \sim P(x)$ T[6]E
- [8] $\forall(x)[R(x) \rightarrow \sim P(x)]$ UG[7]

(4) $\forall(x)[P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge R(x))], \exists(x)P(x) \Rightarrow Q(y) \wedge \exists(x)[P(x) \wedge R(x)]$

证明:

- [1] $\forall(x)[P(x) \rightarrow (Q(y) \wedge R(x))]$ p
- [2] $P(a) \rightarrow (Q(y) \wedge R(a))$ US[1]
- [3] $\exists(x)P(x)$ p
- [4] $P(a)$ ES[3]
- [5] $Q(y) \wedge R(a)$ T[2,4]I
- [6] $Q(y) \wedge R(a) \wedge P(a)$ T[4,5]I
- [7] $Q(y) \wedge \exists(x)[P(x) \wedge R(x)]$ EG[6]

17、 判别下面各个推理是否正确, 如果不正确, 指出错在什么地方 (题目不再重复)

(1) 答: 不正确, 全称指定应该变为其他非 x 的变元, 可修改为: $P(y) \rightarrow Q(x)$

(2) 答: 正确

(3) 答: 不正确, 全称指定应该使用相同的个体常量, 可修改为: $P(a) \vee Q(a)$

(4) 答: 题目不正确, 存在量词的指导变元应该是另外的变元符号

(5) 答: 不正确, 存在量词的辖域应该包含全部的谓词, 可修改为: $\exists(x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

(6) 答: 不正确, 对不同的个体常元应该用不同的变元进行存在指定, 可修改为: $\exists(x)[P(x) \rightarrow Q(b)]$

(7) 答: 不正确, 推理过程中, 应该先使用存在指定, 然后使用全称指定

18、 把下面蕴含式变成 SKolem 范式，然后用消解法证明其正确性

$$(1) \forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \Rightarrow \forall(x)[\exists(y)[P(y) \wedge R(x,y)] \rightarrow \exists(y)[Q(y) \wedge R(x,y)]$$

证明：首先，把结论否定后作为附加前提，与原有前提一起转化为 skolem 范式

$$\forall(x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \sim (\forall(x)[\exists(y)[P(y) \wedge R(x,y)] \rightarrow \exists(y)[Q(y) \wedge R(x,y)])$$

$$\Leftrightarrow \forall(x)[\sim P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists(x)[\exists(y)[P(y) \wedge R(x,y)] \wedge \forall(y)[\sim Q(y) \vee \sim R(x,y)]$$

进行变量替换：

$$\Leftrightarrow \forall(x)[\sim P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists(u)[\exists(y)[P(y) \wedge R(u,y)] \wedge \forall(v)[\sim Q(v) \vee \sim R(u,v)]$$

$$\Leftrightarrow \exists(u) \exists(y) \forall(x) \forall(v) [[\sim P(x) \vee Q(x)] \wedge [P(y) \wedge R(u,y)] \wedge [\sim Q(v) \vee \sim R(u,v)]]$$

$$\Rightarrow \forall(x) \forall(v) [[\sim P(x) \vee Q(x)] \wedge [P(a) \wedge R(b,a)] \wedge [\sim Q(v) \vee \sim R(b,v)]]$$

由 skolem 范式得到子句集合为：

$$\{\sim P(x) \vee Q(x), P(a), R(b,a), \sim Q(v) \vee \sim R(b,v)\}$$

利用代换进行消解的过程如下：

$$[1] \quad \sim Q(v) \vee \sim R(b,v)$$

$$[2] \quad R(b,a)$$

$$[3] \quad \sim Q(a) \quad [1] \text{和}[2], \text{代换}\{a/v\}$$

$$[4] \quad \sim P(x) \vee Q(x)$$

$$[5] \quad \sim P(a) \quad [3] \text{和}[4], \text{代换}\{a/x\}$$

$$[6] \quad P(a)$$

$$[7] \quad \square$$

$$(2) \exists(x)P(x) \rightarrow \forall(x)[(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)], \exists(x)P(x), \exists(x)Q(x) \Rightarrow \exists(x) \exists(y)[R(x) \wedge R(y)]$$

证明：首先，把结论否定后作为附加前提，与原有前提一起转化为 skolem 范式

$$(\exists(x)P(x) \rightarrow \forall(x)[(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x)]) \wedge \exists(x)P(x) \wedge \exists(x)Q(x) \wedge \sim(\exists(x) \exists(y)[R(x) \wedge R(y)])$$

$$\Leftrightarrow (\forall(x) \sim P(x) \vee \forall(x)[(\sim P(x) \wedge \sim Q(x)) \vee R(x)]) \wedge \exists(x)P(x) \wedge \exists(x)Q(x) \wedge \forall(x) \forall(y)[\sim R(x) \vee \sim R(y)]$$

$$\Leftrightarrow \forall(x) \forall(y)[\sim P(x) \vee (\sim P(y) \wedge \sim Q(y) \vee R(y))] \wedge \exists(z)P(z) \wedge \exists(u)Q(u) \wedge \forall(x) \forall(y)[\sim R(x) \vee \sim R(y)]$$

$$\Leftrightarrow \forall(x) \forall(y)[[\sim P(x) \vee (\sim P(y) \wedge \sim Q(y) \vee R(y))] \wedge [\sim R(x) \vee \sim R(y)]] \wedge \exists(z)P(z) \wedge \exists(u)Q(u)$$

$$\Leftrightarrow \exists(z) \exists(u) \forall(x) \forall(y)[\sim P(x) \vee R(y) \vee \sim P(y)] \wedge [\sim P(x) \vee R(y) \vee \sim Q(y)] \wedge [\sim R(x) \vee \sim R(y)] \wedge P(z) \wedge Q(u)$$

$$\Rightarrow \forall(x) \forall(y)[\sim P(x) \vee R(y) \vee \sim P(y)] \wedge [\sim P(x) \vee R(y) \vee \sim Q(y)] \wedge [\sim R(x) \vee \sim R(y)] \wedge P(a) \wedge Q(b)$$

由 skolem 范式得到子句集合为：

$$\{\sim P(x) \vee R(y) \vee \sim P(y), \sim P(x) \vee R(y) \vee \sim Q(y), \sim R(x) \vee \sim R(y), P(a), Q(b)\}$$

$$[1] \quad \sim P(x) \vee R(y) \vee \sim Q(y)$$

$$[2] \quad P(a)$$

$$[3] \quad R(y) \vee \sim Q(y) \quad [1] \text{和}[2], \text{代换}\{a/x\}$$

$$[4] \quad Q(b)$$

$$[5] \quad R(b) \quad [3] \text{和}[4], \text{代换}\{b/y\}$$

$$[6] \quad \sim R(x) \vee \sim R(y)$$

$$[7] \quad \sim R(y) \quad [5] \text{和}[6], \text{代换}\{b/x\}$$

$$[8] \quad \sim P(x) \vee R(y) \vee \sim P(y)$$

$$[9] \quad \sim P(x) \vee R(a) \quad [2] \text{和}[8], \text{代换}\{a/y\}$$

[10] $\sim P(x)$

[11] \square

[7]和[9], 代换 $\{a/y\}$

[2]和[10], 代换 $\{a/x\}$

习题三

1、给出下列集合的表示法：

- (1) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$
- (2) $B = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge y = 2x\}$
- (3) $C = \{x | x \in \mathbb{Z} \wedge \exists (i)(i \in \mathbb{Z} \wedge (x = 15i))\}$

2、证明：集合之间子集关系 \subseteq 的自反性、反对称性和传递性

证明：(1) 因为对任意集合 A 而言， $A \subseteq A$ 成立，所以子集关系的自反性成立

(2) 对任意两个集合 A, B 而言，如果 $A \subseteq B$ 同时 $B \subseteq A$ ，则 $A=B$ ，所以子集关系的反对称性成立

(3) 对任意三个集合而言，如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$ ，那么 $A \subseteq C$ 成立，所以子集关系的传递性成立

3、试写出第一题中集合 A, B, C 对应的特征函数

略

4、仔细区分集合中的关系符号 \in 和 \subseteq ，并判断下列各蕴含关系的真假

题目内容，见课本

- (1) 真，根据子集的定义，任何属于 B 集合的元素也属于 C 集合
- (2) 假，例如： $A = \{1, 2\} B = \{\{1, 2\}, 2, 3\} C = B$ ，1 属于 A ，但并不是 C 集的元素
- (3) 假，例如： $A = \{1, 2\} B = \{1, 2, 3\} C = \{\{1, 2, 3\}\}$ ， A 不是 C 的元素
- (4) 假，例如： $A = \{1, 2\} B = \{1, 2, 3\} C = \{\{1, 2, 3\}\}$ ， A 不是 C 的子集
- (5) 假，例如： $A = 1 B = \{1, 2, 3\} C = \{\{1, 2, 3\}\}$ ， A 不是 C 的元素
- (6) 真，子集关系具有传递性

5、利用 3.1 节例 3.3 中已证明的 Russell 悖论来证明 Cantor 悖论：合于 $A = \{S | S \text{ 是任意的集合}\}$ 的集合 A 不存在

证明：假设 A 存在，显然 A 属于 A ，但确实存在有集合不是自己的元素，所以由所有不是自己的元素的集合够成的集合 B 应该存在并包含在 A 中，但根据 Russell 悖论，这样的集合 B 不存在，所以 A 集合也不存在

6、假设已知集合的元素是整数，试写一个程序判定某个对象是否是该集合的元素，判定某个给定集合是已知集合的子集

编程题目，略

7、略

8、略

9、证明下列各式

$$(1) A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

证明：左式 $= A \cap (B \cap \sim C) = (A \cap B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap \sim A) = (A \cap B) \cap (\sim C \cup \sim A) = (A \cap B) \cap \sim (A \cap C) = (A \cap B) - (A \cap C) =$ 右式

$$(2) A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

证明：右式 $= (A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C) = A \cap \sim B \cap \sim C = A \cap \sim (B \cup C) = A - (B \cup C) =$ 左式

$$(3) (A - B) - C = A - (B \cup C) = (A - C) - B$$

证明： $(A - B) - C = A \cap \sim B \cap \sim C = A \cap \sim (B \cup C) = A - (B \cup C) = A \cap \sim C \cap \sim B = (A - C) - B$

$$(4) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow C \subseteq A$$

证明：充分性

$$\because A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup C$$

假设 C 不是 A 的子集，则 C 中必存在元素 c 在 C 中而不在 A 中，那么 c 一定不在等式的左端集合中，而一定在右端集合中，矛盾

$$\therefore C \subseteq A$$

必要性

$\because C \subseteq A, \therefore A \cap C = C$, 等式两端同时并上另一个集合, 等式成立

$$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$(5) A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

$$\text{证明: 左式} = A \cap (B \cup C - B \cap C) = A \cap ((B \cup C) \cap (\sim B \cup \sim C)) = A \cap (B \cup C) \cap (\sim B \cup \sim C) = AB \sim C + AC \sim B$$

$$\text{右式} = ((A \cap B) \cup (A \cap C)) - ((A \cap B) \cap (A \cap C)) = (A \cap (B \cup C)) \cap \sim (A \cap B \cap C) = A \cap (B \cup C) \cap (\sim A \cup \sim B \cup \sim C) = AB \sim C + AC \sim B$$

所以, 左式 = 右式

10、 下面三式中, 哪个可得出 $B=C$ 的结论

$$(1) A \cup B = A \cup C$$

答: 不能得出此结论, 因为如果 $B \neq C$, 但 B, C 都是 A 的子集, $A \cup B = A \cup C$ 成立

$$(2) A \cap B = A \cap C$$

答: 不能得出此结论, 因为 $B \neq C$, 但 A 是 $C \cap B$ 子集, $A \cap B = A \cap C$ 成立

$$(3) A \oplus B = A \oplus C$$

答: 能, 因为 $A \oplus A = \Phi, \Phi \oplus A = A \oplus \Phi = A$, 同时, $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

所以, 已知等式两端 $A \oplus A \oplus B = A \oplus A \oplus C \Leftrightarrow \Phi \oplus B = \Phi \oplus C \Leftrightarrow B = C$

11、 设 $X = A - (B \cap \sim C), Y = A \cup \sim(B \cup C)$, 试用集合 ABC 的特征函数表示出集合 X 和 Y 对应的特征函数

解:

$$x_{A-(B \cap \sim C)}(x) = 1 \Leftrightarrow x A(x) (1 - x B \cap \sim C(x)) = x A(x) (1 - x B(x) x \sim C(x)) = x A(x) - x A(x) x B(x) (1 - x C(x)) = x A(x) - x A(x) x B(x) + x A(x) x B(x) x C(x) = 1$$

$$x_{A \cup \sim(B \cup C)}(x) = 1 \Leftrightarrow x A(x) + x \sim(B \cup C)(x) - x A(x) x \sim(B \cup C)(x) = x A(x) + 1 - (x B(x) + x C(x) - x B(x) x C(x)) - x A(x) + x A(x) (x B(x) + x C(x) - x B(x) x C(x)) = 1 - x B(x) - x C(x) + x B(x) x C(x) + x A(x) x B(x) + x A(x) x C(x) - x A(x) x B(x) x C(x) = 1$$

12、 证明定理 3.3 中的 (4) 和 (5) 式

$$(4) x_{A-A}(x) = 1 - x A(x)$$

$$\text{证明: } x_{A-A}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \sim A \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow x A(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x A(x) = 1$$

$$\text{所以: } x_{A-A}(x) = 1 - x A(x)$$

$$(4) x_{A \oplus B}(x) = x A(x) + x B(x) - 2 x A(x) x B(x)$$

$$\text{证明: } x_{A \oplus B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \oplus B$$

$$\Leftrightarrow x \in (A-B) \cup (B-A)$$

$$\Leftrightarrow x_{A-B}(x) + x_{B-A}(x) - x_{A-B}(x) x_{B-A}(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow x A(x) (1 - x B(x)) + x B(x) (1 - x A(x)) - x A(x) (1 - x B(x)) x B(x) (1 - x A(x)) = x A(x) - x A(x) x B(x) + x B(x) - x A(x) x B(x) - 0 = 1$$

$$\text{所以: } x_{A \oplus B}(x) = x A(x) + x B(x) - 2 x A(x) x B(x)$$

(注: 因为 x 不能同时属于 $A-B$ 和 $B-A$, 所以 $x_{A-B}(x) x_{B-A}(x)$ 必为 0)

13、 设 A, B, C 是任意集合, 判别下面各式是否正确:

$$(1) (A-B) \cup (B-C) = A-C$$

答: 不成立, 因为当 $A=C$ 但不等于 B 时, $(A-B) \cup (B-C)$ 不为空, 但 $A-C$ 为空, 等式不成立

$$(2) A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$$

答：不成立，假设 $B=C$ ，但 A 不为空，那么 $A \cup (B - C) = A$ ，但 $(A \cup B) - (A \cap C) = \emptyset$ ，等式不成立

$$(3) (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$$

答：不成立，因为如果 A 为空集， C 不为空，那么等式右端为空，而左端为 C ，不为空

$$(4) A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$$

答：正确，因为 $A \cap C$ 中任意元素 a ，即是 A 的元素也是 C 的元素，因此也一定是 B 的元素，所以也是 $B \cap C$ 的元素，所以 $A \cap C \subseteq B \cap C$

$$(5) A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$$

答：正确，假设 $A \neq B$ ，那么当 C 为空集时， $A \cup C = B \cup C$ 就不成立，所以 $A = B$

$$(6) A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

答：正确。

因为， $A \cup B$ 中的任意元素，要么属于 A ，要么属于 B ，所以也属于 C ，所以 $A \cup B \subseteq C$

$$(7) A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$$

答：正确。

因为， A 集中的任意元素，及是 B 的元素又是 C 的元素，所以是 $B \cap C$ 的元素，所以 A 是 $B \cap C$ 的子集

$$(8) A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$$

答：正确。

$$\begin{aligned} \because A \subseteq B & \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \rightarrow x \in B] \Leftrightarrow (\forall x)[x \notin B \rightarrow x \notin A] \\ & \Leftrightarrow (\forall x)[x \in \sim B \rightarrow x \in \sim A] \Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A \end{aligned}$$

14、 有人对 $\sim A \cup \sim B \subseteq \sim(A \cap B)$ 的证明如下：

$$\begin{aligned} (\forall x)[x \in \sim A \cup \sim B] & \Rightarrow (\forall x)[x \in \sim A \vee x \in \sim B] \\ & \Rightarrow (\forall x)[x \notin A \vee x \notin B] \\ & \Rightarrow (\forall x)[x \notin A \cap B] \\ & \Rightarrow (\forall x)[x \in \sim(A \cap B)] \end{aligned}$$

这个证明有效吗？为什么？

答：这个证明是错误的，因为：

$$(\forall x)[x \notin A \vee x \notin B] \Leftrightarrow (\forall x)[\sim(x \in A \wedge x \in B)] \Leftrightarrow (\forall x)[x \notin A \cap B] \Leftrightarrow (\forall x)[x \in \sim(A \cap B)]$$

15、 设 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{c, d\}$ ，求 $A \times B, A \times A, (A \times B) \times B$

解：

$$A \times B = \{(1, c), (1, d), (2, c), (2, d), (3, c), (3, d)\}$$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$\begin{aligned} (A \times B) \times B = \{((1, c), c), ((1, c), d), ((1, d), c), ((1, d), d), ((2, c), c), ((2, c), d), \\ ((2, d), c), ((2, d), d), ((3, c), c), ((3, c), d), ((3, d), c), ((3, d), d)\} \end{aligned}$$

16、 求 $A = \{\emptyset, a, \{b\}\}$ 的幂集

$$\text{解： } 2^A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{a, \{b\}\}, \{\emptyset, a, \{b\}\}\}$$

17、 设 A, B 是任意两集合，证明

$$(1) 2^A \cup 2^B \subseteq 2^{A \cup B}, \text{ 给出等号成立的条件}$$

$$\begin{aligned} \text{证明： } X \in 2^A \cup 2^B & \Leftrightarrow X \in 2^A \vee X \in 2^B \\ & \Leftrightarrow X \subseteq A \vee X \subseteq B \\ & \Rightarrow X \subseteq A \cup B \\ & \Leftrightarrow X \in 2^{A \cup B} \end{aligned}$$

等号成立的条件： $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

(因为若 A 和 B 没有子集关系, 必有 $a \in A - B$ 和 $b \in B - A$, 使 $\{a, b\} \in 2^{A \cup B}$, 但 $\{a, b\} \notin 2^A \cup 2^B$)

$$(2) 2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } X \in 2^A \cap 2^B &\Leftrightarrow X \in 2^A \wedge X \in 2^B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow X \in 2^{A \cap B} \end{aligned}$$

18、 设 A 是含 n 个元素的集合, a 和 b 是 A 中的两个因素, 试决定在 2^A 中含有 a 的元素 (即 A 的子集) 有多少个? 同时含 a 和 b 的元素有多少个?

解:

(1) 在 2^A 中含有元素 a 的子集与不含 a 的子集一样多, 故在 2^A 中含有元素 a 的子集为 2^{n-1} 个; 因为 $A - \{a\}$ 的幂集中任何一个集合都不含 a, 当把 a 放入这些集合中, 就得到全部含 a 的子集

(2) 在 2^A 中含有元素 a, b 的子集与不含 a, b 的子集一样多, 故在 2^A 中含有元素 a, b 的子集为 2^{n-2} 个; 原理同

19、 设 A, B, C 是 3 个任意集合, $C \neq \emptyset$, 证明: $A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C$

证明:

充分性: $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

因为, 对任意一个 $A \times C$ 中元素 (a, c) , 有 $a \in A$, 因为 A 是 B 的子集, 所以 $a \in B$, 所以 (a, c) 是 $B \times C$ 的元素, 所以 $A \times C \subseteq B \times C$

必要性: $A \times C \subseteq B \times C \Rightarrow A \subseteq B$

因为, 对 A 中任意一个元素 a, 和 C 中任意一个元素 c, 那么 $(a, c) \in A \times C$, 又因为 $A \times C \subseteq B \times C$, 所以 $(a, c) \in B \times C$, 因此 $a \in B$, 所以 $A \subseteq B$

综上所述, $A \subseteq B \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times C$

附加题:

证明等式 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

$$\begin{aligned} \text{证明: } A \oplus (B \oplus C) &= A \oplus ((B-C) \cup (C-B)) = (A - ((B-C) \cup (C-B))) \cup (((B-C) \cup (C-B)) - A) \\ &= \sim A \tilde{B} \tilde{C} + \sim A \tilde{B} C + A \tilde{B} \tilde{C} + A \tilde{B} C \end{aligned}$$

$$(A \oplus B) \oplus C = C \oplus (A \oplus B)$$

那么按上式的划简方式, 就是把 C 替换为 A, 把 A 替换为 B, 将 B 替换为 C, 所以

$$C \oplus (A \oplus B) = \sim C A \tilde{B} + \sim C \tilde{A} B + C \tilde{A} \tilde{B} + C A B = \sim A \tilde{B} \tilde{C} + \sim A \tilde{B} C + A \tilde{B} \tilde{C} + A \tilde{B} C$$

习题四

1、 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{0, 1, 4, 9, 12\}$. 分别把下面定义的从集合 A 到集合 B 的二元关系 R 用序偶的集合表示出来

(1) $xRy \Leftrightarrow x|y$

解： $R = \{(1, 0), (1, 1), (1, 4), (1, 9), (1, 12), (2, 0), (2, 4), (2, 12), (3, 0), (3, 9), (3, 12), (4, 0), (4, 4), (4, 12)\}$

(2) $xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{3}$

解： $R = \{(1, 1), (1, 4), (3, 0), (3, 9), (3, 12), (4, 1), (4, 4)\}$

(3) $xRy \Leftrightarrow y/x \leq \lfloor (y-x)/2 \rfloor$

解： $R = \{(3, 9), (3, 12), (4, 9), (4, 12)\}$

2、 用关系图和关系矩阵表示第 1 题中的各个关系

略

3、 设 $A=2^{\{0,1,2\}}$, 定义 A 上的二元关系 R 为 $xRy \Leftrightarrow x \cap y \neq \Phi$; 用集合表示出这个关系, 并画出对应的关系图

解： 关系 $R = \{(\{0\}, \{0\}), (\{0\}, \{0, 1\}), (\{0\}, \{0, 2\}), (\{0\}, \{0, 1, 2\}), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{0, 1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{1\}, \{0, 1, 2\}), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{0, 1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{1\}, \{0, 1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{0, 2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{0, 1, 2\}), (\{0, 1\}, \{0\}), (\{0, 1\}, \{1\}), (\{0, 1\}, \{0, 1\}), (\{0, 1\}, \{0, 2\}), (\{0, 1\}, \{1, 2\}), (\{0, 1\}, \{0, 1, 2\}) \dots \dots \dots\}$

4、 设 A 是含 n 个元素的集合, 请问在 A 上可以定义出多少个二元关系?

解： 因为 R 是 A 上的二元关系, $R \subseteq A \times A$, 所以 R 的数量及为 $A \times A$ 幂集的数量, 而 $|A \times A| = n^2$, 所以共 2^{n^2} 个二元关系

5、 判别第 1 题和第 3 题中定义的二元关系各具有哪些性质?

答： 第 1 题中由于不是 A 上的关系, 所以不具备讨论本章定义的性质

第 3 题所定义的关系

(1) 由于 (Φ, Φ) 不在关系中, 所以不是自反的; 又由于 $(\{0\}, \{0\})$ 在关系中, 所以不是反自反的

(2) 由于 $x \cap y \neq \Phi$, 那么 $y \cap x \neq \Phi$, 所以关系是对称的

(3) 由于 $x \cap y \neq \Phi$ 同时 $y \cap z \neq \Phi$, 并不能一定得到 $x \cap z \neq \Phi$, 例如 $x=\{0\}, y=\{0, 1\}, z=\{1, 2\}$, 但是 $x \cap z = \Phi$

所以, 这个关系是一个对称关系

6、 设在整数集 Z 上定义如下二元关系, 试填写下表:

解： 填表如下

R	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
$x y$	√	×	×	×	√
$x \equiv y \pmod{m}$	√	×	√	×	√
$xy > 0$	×	×	√	×	√
$xy \geq 0$	√	×	√	×	×
$x=y$ 或 $ x-y =1$	√	×	√	×	×
$x^2 > y^2$	×	√	×	√	√

(1) 因为 $x|x$ 成立, 所以自反性成立; 所以反自反性不成立; 因为 $x \neq 0$ 时, $x|0$ 成立, 但 $0|x$ 不成立, 所以对称性不成立, 因为 $1|-1$, 和 $-1|1$ 成立, 所以反对称性不成立; 但 $x|y, y|z$ 成立, 就一定有 $x|z$ 成立, 所以传递性成立

- (2) 因为模 m 相等是整数集合上的等价关系, 所以具有自反、对称、传递性
- (3) 因为 $00 = 0$, 所以自反性不成立; 因为 $x \neq 0$ 时必有 $xx > 0$, 所以反自反性不成立; 因为 $xy > 0$ 必有 $yx > 0$, 所以对称性成立; 因此反对称性不成立; 因为 $xy > 0, yz > 0$, 能得到 x, y, z 同号且不为 0, 所以, $xz > 0$, 所以传递性成立
- (4) 因为 $xx \geq 0$, 所以自反性成立; 因此, 反自反性不成立; 因为 $xy \geq 0$, 所以 $yx \geq 0$, 因此对称性成立; 因此, 反对称性不成立; 因为 $-1*0 \geq 0, 0*1 \geq 0$, 但 $-1*1 < 0$, 所以传递性不成立
- (5) 因为 $x=x$, 所以自反性成立; 因此反自反性不成立; 因为 $|x-y|=1$, 所以 $|y-x|=1$, 因此对称性成立; 所以反对称性不成立; 因为 $|1-2|=1, |2-3|=1$, 但 $|1-3|=2$, 所以传递性不成立
- (6) 因为 $xx = xx$, 所以自反性不成立; 反自反性成立; 因为 $x^2 > y^2$ 成立, 那么 $y^2 > x^2$ 就不成立, 所以对称性不成立, 反对称性成立; 传递性成立
- 7、设 R 是集合 A 上的一个二元关系, 合于 $xRy \wedge yRz \Rightarrow \sim xRz$, 称 R 是 A 上的一个反传递关系。试举一个实际的反传递关系的例子
- 解: 比如在人群集合上, 建立父子关系, 那么就是一个反传递关系, 因为如果 甲是乙的父亲, 乙是丙的父亲, 那么甲和丙就一定不存在父子关系; 另外, 在正整数域上建立的倍数关系, 也是一个反传递关系, 因为如果 a 是 b 的 2 倍, b 是 c 的 2 倍, 那么 a 一定不是 c 的 2 倍
- 8、设 R 和 S 都是集合 A 上的二元关系, 它们经过关系运算后得到 A 上的一个新关系。试判别当 R 和 S 同时具有下表左列某种指定性质时, 经过指定的运算后所得新关系也仍保持这种性质, 把所得结论以 \checkmark, \times 的形式填在下表中相应的位置上

	$R \cap S$	$R \cup S$	$R - S$	$R \circ S$	$\neg R$	R^{-1}
自反性	\checkmark	\checkmark	\times	\checkmark	\times	\checkmark
反自反性	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\times	\times	\checkmark
对称性	\checkmark	\checkmark	\checkmark	\times	\checkmark	\checkmark
反对称性	\checkmark	\times	\checkmark	\times	\times	\checkmark
传递性	\checkmark	\times	\times	\times	\times	\checkmark

(1) 自反性的保持情况说明:

因为 R, S 都具有自反性, 所以 $I_A \subseteq R, I_A \subseteq S$,

因此 $I_A \subseteq R \cap S, I_A \subseteq R \cup S$, 所以自反性在 $R \cap S, R \cup S$ 上保持

因为 $I_A \subseteq S$, 所以 I_A 不是 S 补集的子集, 因此也不是 $R \cap \neg S$ 的子集, 所以自反性在 $R - S$ 上不保持

因为 R, S 是自反的, 所以对任意的 $a \in A, (a, a) \in R, S$, 所以 $(a, a) \in R \circ S$, 因此自反性在 $R \circ S$ 上保持

因为 $(a, a) \in R$, 所以 (a, a) 不属于 $\neg R$, 所以 $\neg R$ 不具有自反性

因为 $(a, a) \in R$, 所以 $(a, a) \in R^{-1}$, 因此 R^{-1} 具有自反性

(2) 反自反性的保持情况说明:

因为 R, S 都具有反自反性, 等价于 $I_A \cap R = \Phi, I_A \cap S = \Phi$

因为 $I_A \cap R \cap S = \Phi, I_A \cap (R \cup S) = \Phi$, 所以 $R \cap S, R \cup S$ 都是反自反的

因为 $I_A \cap R \cap \neg S = \Phi$, 所以 $R - S$ 也是反自反的

对于 $R \circ S$, 假设 $(a, b) \in R, (b, a) \in S$, 那么 $(a, a) \in R \circ S$, 所以反自反在 $R \circ S$ 上不一定保持

因为 (a, a) 不属于 R , 所以 (a, a) 一定属于 $\neg R$, 所以 $\neg R$ 一定是反自反的, 一定不是反自反的

因为 (a, a) 不属于 R , 所以 (a, a) 也不属于 R^{-1} , 因此 R^{-1} 一定是反自反的

(3) 对称性的保持情况说明:

因为 R, S 是对称的, 所以 $R = R^{-1}, S = S^{-1}$

因为 $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1} = R \cap S$, 所以 $R \cap S$ 具有对称性

因为 $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1} = R \cup S$, 所以 $R \cup S$ 具有对称性

因为 $(R - S)^{-1} = (R \cap -S)^{-1} = R^{-1} \cap (-S)^{-1} = R^{-1} \cap -S^{-1} = R \cap S$, 所以 $R - S$ 具有对称性

因为 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R$, 但 $S \circ R$ 通常情况下与 $R \circ S$ 不相同, 所以对称性不一定保持, 例如: $R = \{(a, b), (b, a)\}, S = \{(b, c), (c, b)\}$, 则 $R \circ S = \{(a, c)\}$, 并不对称

因为 $(-R)^{-1} = -R^{-1} = -R$, 所以 R 的补是对称的

因为 R 逆的逆就是 R , 既等于 R 的逆, 所以 R 的逆是对称的

(4) 反对称性的保持情况说明:

因为 R, S 是反对称的, 所以 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A, S \cap S^{-1} \subseteq I_A$

因为 $(R \cap S) \cap (R \cap S)^{-1} = (R \cap R^{-1}) \cap (S \cap S^{-1}) \subseteq I_A$, 所以 $R \cap S$ 具有反对称性

因为如果 $R = \{(a, b)\}, S = \{(b, a)\}$, 都是反对称的, 但 $R \cup S = \{(a, b), (b, a)\}$ 是对称的, 所以 $R \cup S$ 不一定再保持对称性

因为 R 是反对称的, 而 $R - S$ 在 R 的基础上减少集合元素, 因此也一定是反对称的

因为如果 $R = \{(a, b), (c, a)\}, S = \{(b, c), (a, a)\}$, 那么 $R \circ S = \{(a, c), (c, a)\}$, 变为对称的, 所以反对称性, 在复合运算下不一定保持

(5) 传递性的保持情况说明:

因为 R, S 是传递的, 所以 $R^2 \subseteq R, S^2 \subseteq S$

因为 $(R \cap S)^2 = (R \cap S) \circ (R \cap S) \subseteq R^2 \cap S^2 \cap (R \circ S) \cap (S \circ R) \subseteq R \cap S$, 所以传递性保持

如果 $R = \{(a, b)\}, S = \{(b, c)\}$, 都是传递关系, 但 $R \cup S = \{(a, b), (b, c)\}$ 不再是传递关系, 所以传递性在 $R \cup S$ 上不一定保持

如果 $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}, S = \{(a, c)\}$, 分别是两个传递关系, 但 $R - S = \{(a, b), (b, c)\}$ 不再是传递关系, 所以传递性在 $R - S$ 上不一定保持

如果 $R = \{(a, b), (c, d)\}, S = \{(b, c), (d, e)\}$, 分别是两个传递关系, 但 $R \circ S = \{(a, c), (c, e)\}$ 不再是传递关系, 所以传递性在 $R \circ S$ 上不一定保持

如果 $A = \{a, b, c\}, R = \{(a, b)\}$, 那么 $-R = A \times A - R$, 显然不是传递的, 所以传递性在 $-R$ 上不一定保持

因为 $R^2 \subseteq R$, 所以 $(R^2)^{-1} \subseteq R^{-1}$, 即 $(R^{-1})^2 \subseteq R^{-1}$, 所以传递性在逆运算下保持

9、判定满足下述每一种条件的关系是否存在, 如果存在, 举例说明

(1) 既是自反的又是反自反的

答: 不存在, 因为对集合中任意元素 x 而言, $(x, x) \in R$ 和 $(x, x) \notin R$, 不能同时成立

(2) 既是对称的又是反对称的

答: 存在, 凡是 $R \subseteq I_A$ 的关系, 既是对称的, 又是反对称的

(3) 既是传递的又是反传递的

答: 存在, 例如 $A = \{a, b, c\}$, 则 A 上关系 $R = \{(a, b)\}$, 是传递的, 也是反传递的, 因为此关系满足这两个关系性质的定义

(4) 既是自反的, 反对称的, 又是传递的

答: 存在, 例如在整数集合上, 定义的小于等于关系, 就是一个自反的, 反对称的, 传递关系

10、设 R 是集合 A 上的一个二元关系, 证明

(1) R 是自反的 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

证明:

R 是自反的 $\Rightarrow I_A \subseteq R$

因为, R 是自反的, 所以对任意的 A 中元素 a , 有 $(a, a) \in R$, 即 I_A 中任意元素都属于 R , 所以 $I_A \subseteq R$

$I_A \subseteq R \Rightarrow R$ 是自反的

因为, 对任意的 A 中元素 a , 有 $(a, a) \in I_A$, 又 $I_A \subseteq R$, 所以 $(a, a) \in R$, 所以 R 是自反的
综上所述, R 是自反的 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

(2) R 是反自反的 $\Leftrightarrow I_A \cap R = \Phi$

证明:

R 是反自反的 $\Rightarrow I_A \cap R = \Phi$

因为, I_A 中的任意元素 (a, a) , 都不属于 R , 所以 $I_A \cap R = \Phi$

$I_A \cap R = \Phi \Rightarrow R$ 是反自反的

因为 $I_A \cap R = \Phi$, 所以 I_A 中的任意元素 (a, a) , 都不属于 R , 即对任意的 A 中元素 a , 有 $(a, a) \notin R$, 所以 R 是反自反的

综上所述, R 是反自反的 $\Leftrightarrow I_A \cap R = \Phi$

(3) R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

证明:

R 是对称的 $\Rightarrow R = R^{-1}$

因为对 R 中的任意元素 (a, b) , 应为 R 是对称的, 所以 $(b, a) \in R$, 那么 $(a, b) \in R^{-1}$, 所以 $R \subseteq R^{-1}$

因为对 R^{-1} 中的任意元素 (a, b) , 那么 $(b, a) \in R$, 因为 R 是对称的, 那么 $(a, b) \in R$, 所以 $R^{-1} \subseteq R$

所以 $R = R^{-1}$

$R = R^{-1} \Rightarrow R$ 是对称的

对 R 中的任意元素 (a, b) , 因为 $R = R^{-1}$, 所以 (a, b) 也属于 R^{-1} , 所以 $(b, a) \in R$, 因此 R 是对称的

综上所述, R 是对称的 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

(4) R 是反对称的 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

证明:

R 是反对称的 $\Rightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

因为对任意 $(a, b) \in R \cap R^{-1}$, 那么其就同时属于 R 和 R^{-1} , 那么 (b, a) 也属于 R , 根据反对称的定义, $a = b$, 所以 $(a, b) \in I_A$, 所以 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

$R \cap R^{-1} \subseteq I_A \Rightarrow R$ 是反对称的

假设 R 不是反对称的, 那么必定存在 $a \neq b \wedge (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$, 那么 $(a, b) \in R \cap R^{-1}$, 但 (a, b) 不属于 I_A , 矛盾; 因此 R 必是反对称的

综上所述, R 是反对称的 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 是传递的 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

证明:

R 是传递的 $\Rightarrow R^2 \subseteq R$

因为对任意 $(a, b) \in R^2$, 必存在 c , 使得 $(a, c), (c, b)$ 属于 R , 因为 R 是传递的, 所以 (a, b) 属于 R , 因此 $R^2 \subseteq R$

$R^2 \subseteq R \Rightarrow R$ 是传递的

因为对任意的 R 中的元素 $(a, b), (b, c)$, 那么 (a, c) 必定属于 R^2 , 也就属于 R , 所以 R 是传递的

综上所述, R 是传递的 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

11、 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 定义 A 上的关系 $R = \{(a, b) \mid a=b+2\}$, $S = \{(x, y) \mid y=x+1 \vee x=2y\}$
求: $R \circ S, R \circ S^{-1}, R, R^2, (S^{-1})^2$

解: 根据题意, $R=\{(3, 1), (4, 2)\}$, $S=\{(4, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

所以: $R \circ S = \{(3, 2), (4, 3)\}$

$$S^{-1} = \{(2, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

所以: $R \circ S^{-1} = \{(4, 4), (4, 1)\}$

$$R \circ S^{-1} \circ R = \{(4, 2)\}$$

$$R^2 = \emptyset$$

$$(S^{-1})^2 = \{(2, 3), (3, 4), (3, 1), (4, 2)\}$$

12、 设 $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, A 上的二元关系 R 对应的关系图 4-5 所示, 求使 $R^m=R^n$ 的最小整数 m 和 $n(m < n)$

答: $R = R^{16}$; 简要说明如下: 本关系图分为两个部分, $R = R_1 \cup R_2$, 因为 $R_1 \circ R_2 = R_2$.
 $R_1 = \emptyset$, 所以 $R^2 = R_1^2 \cup R_2^2$, 同理 $R^n = R_1^n \cup R_2^n$, 又因为 $I_1 = R_1^3, I_2=R_2^5$; 3, 5 的最小公倍数为 15, 所以 $I = R^{15}$, 所以 $R = R \circ I = R \circ R^{15} = R^{16}$

13、 设 R 是集合 A 上的二元关系, 证明:

$$(1) I_A^n = I_A$$

证明: 因为单位关系的关系矩阵为单位矩阵, 而复合运算就是矩阵的乘法, 根据单位矩阵的性质, $I_A^n = I_A$

$$(2) I_A \circ R = R \circ I_A = R$$

证明: 同上, 因为单位矩阵左乘、右乘一个矩阵, 结果不变; 所以 $I_A \circ R = R \circ I_A = R$

$$(3) (R \cup I_A)^n = I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cdots \cup R^n$$

证明: 根据书中并集关系复合的定理 (4.2), 展开, 并利用上述 1, 2 的结论, 及可得证

14、 证明定理 4.7, 4.8

定理 4.7 设 R_1, R_2 是集合 A 上的二元关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则 $r(R_1) \subseteq r(R_2), s(R_1) \subseteq s(R_2), t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明:

因为 $R_1 \subseteq R_2$

(1) 所以, 对任意 $(a, b) \in r(R_1)$, 那么 $(a, b) \in R_1$ 或 $(a, b) \in I_A$, 所以 $(a, b) \in R_2$ 或 $(a, b) \in I_A$, 因此 $(a, b) \in r(R_2)$, 所以 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) 所以, 对任意 $(a, b) \in s(R_1)$, 那么 $(a, b) \in R_1$ 或 $(a, b) \in R_1'$, 所以 $(a, b) \in R_2$ 或 $(a, b) \in R_2'$, 因此 $(a, b) \in s(R_2)$, 所以 $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) 所以, 对任意 $(a, b) \in t(R_1)$, 则必有 $(a, b) \in R_1^j$, 因此必有 $(a, c_1), (c_1, c_2) \cdots (c_{j-1}, b) \in R_1$, 因此 $(a, c_1), (c_1, c_2) \cdots (c_{j-1}, b) \in R_2 \subseteq t(R_2)$, 根据 $t(R_2)$ 的传递性, 所以 $(a, b) \in t(R_2)$, 所以 $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

定理 4.8 设 R 是集合 A 上的二元关系, 如果 R 是自反的, 则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 都是自反的; 如果 R 是对称的, 则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 都是对称的; 如果 R 是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的

证明:

(1) 因为 R 是自反的, 所以对 A 上任意元素 x , 都有 $(x, x) \in R$, 又因为 R 是 $s(R)$ 和 $t(R)$ 子集, 所以 $(x, x) \in s(R) \wedge (x, x) \in t(R)$, 所以 $s(R)$ 和 $t(R)$ 都是自反的

(2) 因为 R 是对称的, 所以 $R = R'$, 因为 $r(R) = R \cup I_A = R' \cup I_A' = (r(R))'$, 所以 $r(R)$ 是对称的; 设 (a, b) 是 $t(R)$ 中的任一元素, 则必有 $(a, b) \in R^j$, 因此必有 $(a, c_1), (c_1, c_2) \cdots (c_{j-1}, b) \in R$, 因为 R 是对称的, 所以 $(b, c_{j-1}), (c_{j-1}, c_{j-2}) \cdots (c_1, a) \in R \subseteq t(R)$, 根据 $t(R)$ 的传递性, 所以 $(b, a) \in t(R)$,

所以 $t(R)$ 具有对称性

- 15、 写出第 12 题中关系图对应的关系矩阵, 并利用 warshall 算法求这个关系的传递闭包

解:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 16、 设 R_1, R_2 是集合 A 上的两个二元关系, 证明:

$$(1) \quad r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2) \quad r(R_1 \cap R_2) = r(R_1) \cap r(R_2)$$

证明:

$$\text{因为 } r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \cup I_A = R_1 \cup I_A \cup R_2 \cup I_A = r(R_1) \cup r(R_2)$$

$$\text{因为 } r(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup I_A = (R_1 \cup I_A) \cap (R_2 \cup I_A) = r(R_1) \cap r(R_2)$$

$$(2) \quad s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2) \quad s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$$

$$\text{因为 } s(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)' = (R_1 \cup R_1') \cup (R_2 \cup R_2') = s(R_1) \cup s(R_2)$$

$$\text{因为 } s(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap R_2)' = (R_1 \cup R_1') \cap (R_1 \cup R_2') \cap (R_2 \cup R_1') \cap (R_2 \cup R_2') \subseteq (R_1 \cup R_1') \cap (R_2 \cup R_2') = s(R_1) \cap s(R_2)$$

$$(3) \quad t(R_1 \cup R_2) \supseteq t(R_1) \cup t(R_2)$$

因为 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$ 所以 $t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$, 同理 $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$, 所以 $t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$; 因此 $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

$$(4) \quad \text{设 } R \text{ 是集合 } A \text{ 上的二元关系, 证明: } (R^+)^+ = R^+, (R^*)^* = R^*, R \circ R^* = R^+$$

证明:

$$\text{因为 } R^+ = t(R), \text{ 所以 } (R^+)^+ = t(t(R)), \text{ 因为 } t(R) \text{ 是传递的, 所以 } t(t(R)) = t(R);$$

$$\text{因为 } R^* = rt(R), \text{ 所以是传递的, 因此 } t(rt(R)) = rt(R), \text{ 又因为 } rt(R) \text{ 是自反的, 所以 } rt(rt(R)) = rt(R), \text{ 即 } (R^*)^* = R^*$$

$$\text{因为 } R^* = rt(R) = I_A \cup t(R), \text{ 所以, } R \circ R^* = R \circ (I_A \cup t(R)) = (R \circ I_A) \cup (R \circ t(R)) = R \cup R^2 \cup R^3 \dots = t(R) = R^+$$

习题五

1、设 $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$, 定义 A 上的一个二元关系 $R = \{((a, b), (c, d)) \mid ad = bc\}$
证明: R 是 A 上的等价关系

证明:

(自反性) 因为 对任意 $(a, b) \in A$, 都有: $ab = ba$, 既 $((a, b), (a, b)) \in R$, 所以 R 是自反的

(对称性) 如果 $((a, b), (c, d)) \in R$, 那么 $ad = bc$, 所以 $cb = ad$, 既 $((c, d), (a, b)) \in R$, 所以 R 是对称的

(传递性) 如果 $((a, b), (c, d)) \in R$, $((c, d), (e, f)) \in R$, 那么 $ad = bc$, $cf = ed$, 因此, $adcf = bc ed$ (注: 如果 $0 \notin \mathbb{N}$ 中), 那么 $af = eb$, 所以 $((a, b), (e, f)) \in R$, R 具有传递性

综上所述, R 是 A 上的等价关系

2、定义复数集合的子集 $C1 = \{a+bi \mid i^2 = -1, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, 在 $C1$ 上定义关系 S 为 $(a+bi) S (c+di) \Leftrightarrow ac > 0$, 证明: S 是 $C1$ 上的一个等价关系, 并给出 S 的等价类的几何说明

证明:

(1) 对 $C1$ 上的任意一个复数 $a+bi$, 因为 a 不为 0, 所以 $aa > 0$, 即 $(a+bi) S (a+bi)$, S 关系具有自反性

(2) 对 $C1$ 上的任意两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$, 如果 $ac > 0$, 那么 $ca > 0$, 即 $(a+bi) S (c+di)$ 可得 $(c+di) S (a+bi)$, 所以 S 具有对称性

(3) 对 $C1$ 上的任意三个复数 $a+bi, c+di, e+fi$, 如果 $ac > 0$, $ce > 0$, 那么 $ae > 0$, 所以具有传递性, 所以 S 是等价关系

按上述等价关系的定义, 可以看出, 在同一个等价类的复数, 其实部应同为正, 或同为负; 所以等价类, 同为正的是复平面的 i 轴的右侧平面, 同为负的是复平面的 i 轴的左侧平面; $C1$ 不包含 i 轴

3、集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 的一个分化为 $S_0 = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}\}$, 求由 S_0 导出的 A 上的一个等价关系 R

解: 等价关系 $R = \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 4\} \cup \{3\} \times \{3\} = \{(1, 1), (2, 2), (4, 4), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (3, 3)\}$

4、试确定在 4 个元素的集合上可以定义的等价关系数目

解:

在此集合上可以确定的 4 分划个数为: 1

在此集合上可以确定的 3 分划个数为: $c(4, 2) = 6$

在此集合上可以确定的 2 分划个数为: $c(4, 1) + c(4, 2) / 2 = 7$

在此集合上可以确定的 1 分划个数为: $c(4, 4) = 1$

所以共可定义 15 个等价关系

5、设 $R1$ 和 $R2$ 是非空集合 A 上的两个等价关系, 试确定下列各关系是否是 A 上的等价关系, 如果是, 加以证明; 如果不是, 举例说明

(1) $R1 \cup R2$ (2) $R1 \cap R2$ (3) $r(R1 - R2)$ (4) $R1 \circ R2$

解: 根据习题 4 第 8 小题结论 $A = \{1, 2, 3\}$

(1): 不一定是等价关系, 因为传递性在并运算下不一定保持, 例如 $R1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$, $R2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ 都是等价关系, 但并后不是, 因为传递性不满足

(2): 是等价关系, 因为自反性、对称性和传递性, 在交集运算上保持

(3): 不一定是等价关系, 因为传递性在集合差运算下不保持, 例如 $R1 = A \times A$, $R2 =$

$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$, 但 $r(R_1 - R_2) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$, 不是等价关系, 传递性不满足

(4) 不一定是等价关系, 因为对称性和传递性在复合运算下不一定保持; 例如: $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)\}$, $R_1 \circ R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$, 不是对称的

6、设 R 是非空集合 A 上的一个二元关系, 具有对称性和传递性。证明: 如果对每一个 $x \in A$, 存在 $y \in A$ 使 xRy , 那么, R 是 A 上的等价关系。

证明: 因为对每一个 $x \in A$, 存在 $y \in A$ 使 xRy , 由于 R 是对称的, 所以 yRx ; 又因为 R 是传递的, 当 xRy 并且 yRx , 那么 xRx 。所以 R 是自反的。综上所述, R 是自反的, 对称的和传递的, 因此 R 是 A 上的等价关系

7、设 M_n 是全体 n 阶矩阵的集合, 如果对矩阵 $A, B \in M_n$, 存在可逆矩阵 $P \in M_n$, 使得 $A = PBP^{-1}$, 则记为 $A \sim B$ (读为 A 相似于 B); 证明 \sim 是 M_n 上的等价关系

证明: 设 I 为 n 阶单位矩阵

(1) 自反性: 因为对任意 $A \in M_n$, 都有 $A = IAI^{-1}$, 所以 $A \sim A$, 即 \sim 是自反的

(2) 对称性: 因为对任意 $A, B \in M_n$, 如果满足 $A \sim B$, 即存在可逆矩阵 $P \in M_n$, 使得 $A = PBP^{-1}$, 那么 $B = P^{-1}AP$, 令 $P^{-1} = Q$, 则 $B = QAQ^{-1}$, 所以 $B \sim A$, 即 \sim 是对称的

(3) 传递性: 因为对任意 $A, B, C \in M_n$, 如果 $A \sim B, B \sim C$, 那么可逆矩阵 $P, Q \in M_n$, 使得 $A = PBP^{-1}, B = QCQ^{-1}$; 那么 $A = PQBQ^{-1}P^{-1}$, 根据矩阵运算的性质有, 可逆矩阵相乘依然是可逆矩阵, 其逆等于 $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$, 设 $PQ = T$, 那么 $A = TCT^{-1}$, 所以 $A \sim C$, 即 \sim 是传递的, 所以 \sim 是 M_n 上的等价关系

8、设 A 是由 54 的正因子构成的集合, “ $|$ ” 表示整除。画出偏序集 $\langle A, | \rangle$ 对应的 Hasse 图。

解: 先求出偏序集, 然后求出相应的 cover, 然后画出 Hasse 图 (图略)

9、设 $A = \{a, b, c\}$, 画出偏序集合对应的 Hasse 图。试比较本题与上题 Hasse 图的异同

解: (图略), 两图的相同点: 都有最大 (小) 元 不同点: 最大线序一个为 5, 一个为 4

10、是否存在集合 A 上的关系 R , 它既是等价关系, 又是偏序关系? 证明或举例说明你的结论

解: 存在这样的关系, 它就是恒等关系 I_A , 因为 I_A , 是自反的, 对称的, 传递的, 所以它是等价关系; 同时它又是反对称的, 所以它也是偏序关系

11、设 R 是集合 A 上的一个等价关系。现在在等价类之间定义一个新关系 S 使得 R 的任何等价类 $[a]$ 和 $[b]$ 满足 $[a]S[b] \Leftrightarrow aRb$, 判别 S 是一个什么关系。

解: 根据题目信息, 猜测是等价关系, 说明如下:

(1) 因为对任意的 $a \in A$, aRa 成立 (R 是 A 上的等价关系, 是自反的), 所以 $[a]S[a]$, S 是自反的

(2) 假设 $[a]S[b]$ 成立, 那么 aRb ; 因为 R 是对称的, 所以 bRa , 因此 $[b]S[a]$ 成立, 所以 S 是对称的

(3) 假设 $[a]S[b], [b]S[c]$ 成立, 则 aRb, bRc , 因为 R 是传递的, 所以 aRc 成立, 因此 $[a]S[c]$ 成立, 所以 S 是传递的

综上所述, S 是等价类集合上的等价关系

12、设 R 是集合 A 上的二元关系, 如果 R 是反自反的且是传递的, 称 R 是 A 上的拟序关系: (1) 举一个拟序关系的例子 (2) 证明: 拟序关系是反对称的, 并进一步证明拟序关系的自反闭包是 A 上的偏序关系

解:

(1): 例如数域上的大于或小于关系, 就是拟序关系

(2): 假设拟序关系是非反对称的, 那么就一定存在 $(a, b), (b, a)$ 属于 R , 那么根据其传

递性，那么 (a, a) 就属于 R ，与其反自反性矛盾，所以拟序关系是反对称的；因为 R 是反对称的，所以 $r(R)$ 也是反对称的；因为 R 是传递的，所以 $r(R)$ 是传递的；因此 $r(R)$ 是自反的，反对称的，传递的，所以 $r(R)$ 是偏序关系

13、 设 R 是集合 A 上的一个偏序关系， B 是 A 的非空子集；证明： $R \cap (B \times B)$ 是 B 上的偏序关系

证明：

(1) 自反性：对 B 上任意元素 b ，因为 b 属于 A ，所以 (b, b) 属于 R (R 是 A 上自反关系)，所以 (b, b) 即属于 R ，也属于 $B \times B$ ；所以是 $R \cap (B \times B)$ 中元素，所以是自反的；

(2) 对称性：设 $R \cap (B \times B)$ 任意元素 (a, b) ， $a \neq b$ ；那么它属于 R ，又属于 $B \times B$ ；因为 (b, c) 不属于 R (R 的反对称性)，所以 (b, a) 不属于 $R \cap (B \times B)$ ，所以 $R \cap (B \times B)$ 是反对称的

(3) 传递性：设 $R \cap (B \times B)$ 任意两元素 (a, b) ， (b, c) ，那么他们即属于 R ，也属于 $B \times B$ ；因为 R ， $B \times B$ 都是传递关系，所以 (a, c) 属于 $R \cap (B \times B)$ ；因此是 $R \cap (B \times B)$ 传递的

综上所述： $R \cap (B \times B)$ 是偏序关系，同时是 $B \times B$ 的子集，所以是 B 上的偏序关系

14、 对第 9 题，找出偏序集 A 的最大元和最小元，并确定它有多少个包含元素最多的全序子集

解：

最大元为 A ，最小元为 \emptyset ；

其最大全序子集包含 4 个元素（哈图共四层），从 \emptyset 到 A ；

共 6 个：
 $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\} \{a, b, c\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\} \{a, b, c\}\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\} \{a, b, c\}\}, \{\emptyset, \{b\}, \{c, b\} \{a, b, c\}\}, \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\} \{a, b, c\}\}, \{\emptyset, \{c\}, \{c, b\} \{a, b, c\}\}$

15、 设 $A = \{a, b, c, d\}$ ，试构造关于偏序集 $\langle 2A, \subseteq \rangle$ 的一个全序集 $\langle 2A, \leq \rangle$ ，使得 \leq 是 \subseteq 的拓扑排序

解：（构造过程略）

拓扑排序为：
 $\emptyset \leq \{a\} \leq \{b\} \leq \{c\} \leq \{a, b\} \leq \{a, c\} \leq \{a, d\} \leq \{b, c\} \leq \{b, d\} \leq \{c, d\} \leq \{a, b, c\} \leq \{b, c, d\} \leq \{c, d, a\} \leq \{d, a, b\} \leq \{a, b, c, d\}$

习题六

1、 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=A \times A$, 确定下述集合是否为 A 到 B 的全函数或部分函数

(1) $\{(1, (2, 3)), (2, (2, 2)), (3, (1, 3)), (4, (4, 3))\}$

答: 根据本书全函数的定义, 这是从 A 到 B 的全函数

(2) $\{(1, (1, 2)), (1, (2, 3)), (3, (2, 4))\}$

答: 根据本书函数的定义, 每个原像只能有一个像, 所以此定义不是 A 到 B 的函数

(3) $\{(1, (3, 3)), (2, (3, 3)), (3, (2, 1)), (4, (4, 1))\}$

答: 根据本书全函数的定义, 这是从 A 到 B 的全函数

2、 判别以下关系中哪些是全函数

(1) $\{(n_1, n_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{N}, 0 < 2n_1 - n_2 < 5\}$

答: 此关系不满足全函数的定义, 因为 $(3, 3), (3, 2), (3, 1)$ 都属于此关系, 但它违反了本书函数是单值的定义

(2) $\{(n_1, n_2) \mid n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \text{ 是 } n_2 \text{ 的正因子个数}\}$

答: 如果 \mathbb{N} 集合中不包含 0, 那么此关系是全函数, 因为任意一个自然数按正因子个数的定义, 都有确切的值, 因此是全函数

(3) $\{(S_1, S_2) \mid S_1, S_2 \subseteq \{a, b, c, d\} \text{ 且 } S_1 \cap S_2 = \emptyset\}$

答: 此关系不满足全函数的定义, 因为 $(\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\})$ 等属于此关系, 但它违反了本书函数是单值的定义

(4) $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, \gcd(a, b) = 3\}$

答: 此关系不满足全函数的定义, 因为就 1, 2 而言, 3 不是他们的因数; 同时推论开, 所有不是 3 的质数, 3 都不是他们的因数, 因此他们就没有像, 所以不是全函数

(5) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, y = x^2\}$

答: 此关系是全函数, 因为任意一个整数, 都能求到唯一的平方数。所以按定义是全函数

3、 在 3.1 节中, 已经定义了集合的特征函数; 请利用集合 A 和 B 的特征函数表示出对应的特征函数

解:

$$\begin{aligned} \text{求 } A \cup B \text{ 特征函数: } \quad x_{A \cup B}(x) &= 1 \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Leftrightarrow x_A(x) + x_B(x) - x_A(x) x_B(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{求 } A \cap B \text{ 特征函数: } \quad x_{A \cap B}(x) &= 1 \Leftrightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow x_A(x) x_B(x) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{求 } \sim A \text{ 特征函数: } \quad x_{\sim A}(x) = 1 \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow 1 - x_A(x)$$

$$\begin{aligned} \text{求 } A - B \text{ 特征函数: } \quad x_{A - B}(x) &= 1 \Leftrightarrow x \in A \cap \sim B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x_A(x)(1 - x_B(x)) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{求 } A \oplus B \text{ 特征函数: } \quad x_{A \oplus B}(x) &= 1 \Leftrightarrow x \in A \oplus B \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (B - A) \\ &\Leftrightarrow x_{A - B}(x) + x_{B - A}(x) - x_{A - B}(x) x_{B - A}(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow x_A(x)(1 - x_B(x)) + x_B(x)(1 - x_A(x)) - x_A(x)(1 - x_B(x)) x_B(x)(1 - x_A(x)) = \\ &= x_A(x) - x_A(x) x_B(x) + x_B(x) - x_A(x) x_B(x) - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{所以: } x_{A \oplus B}(x) = x_A(x) + x_B(x) - 2x_A(x) x_B(x)$$

4、 试确定在含 n 个元素的集合上可以定义多少个二元关系, 其中有多少个是全函数

答: 可以构成 2^{n^2} 个二元关系, 可以有 n^n 个全函数; 因为, 假设 $|A|=n$, 那么 $A \times A$ 的幂集构成了所有的 A 上的二元关系, 因为 $|A \times A| = n^2$, 所以幂集的个数为 2^{n^2} ; 对于全函数而言, 每个自变量可映射到 n 个像上, 所以总数为 n^n

5、 设 $f: A \rightarrow B, C \subseteq A$; 证明: $f(A) - f(C) \subseteq f(A - C)$

证明：假设 b 属于 $f(A) - f(C)$, 那么 $b \in f(A) \wedge b \notin f(C)$, 所以存在 A 中元素 x , $f(x) = b$, 但不存在 C 中元素 x , $f(x) = b$, 所以 A 中 x 不属于 C , 所以 x 属于 $A - C$, 所以 b 属于 $f(A - C)$; 结论成立

6、设 $f: X \rightarrow Y$, A 和 B 是 X 的子集; 证明: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

证明:

(1) 设 y 为 $f(A \cup B)$ 中任意元素, 则存在 x 属于 $A \cup B$, 使得 $f(x) = y$; 则 x 属于 A 或 x 属于 B , 所以 y 属于 $f(A)$ 或 $f(B)$, 所以 $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$; 同理: 假设 y 属于 $f(A) \cup f(B)$, 那么 y 属于 $f(A)$ 或 $f(B)$, 因此要么存在 x_1 属于 A , 或 x_2 属于 B , 或则 x 属于 A 同时属于 B , 使得 $f(x_1) = y$, 或 $f(x_2) = y$, 或 $f(x) = y$; 这三中情况, 其自变量 x_1, x_2 或 x 都属于 $A \cup B$, 所以 y 属于 $f(A \cup B)$, 因此 $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$; 综上所述, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) 设 y 属于 $f(A \cap B)$, 则存在 x 属于 $A \cap B$, 使得 $f(x) = y$; 所以 x 属于 A 也属于 B , 所以 y 属于 $f(A) \cap f(B)$, 因此 $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$; 等号不成立, 请同学自己举例说明

7、确定下列映射是否单射、满射或双射:

(1) $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(n) = \ln n$

答: 如果 0 不属于 \mathbb{N} , 那么这是一个单射函数, 因为任意一个自然数都可以求其自然对数, 同时 \ln 是单调函数, 所以是单射函数。但是并非任意一个实数其原像都是自然数, 所以不是满射

(2) $f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_2(n)$ 为不超过 n 的素数数目

答: 这是一个满射函数, 但不是单射。因为 $f(3) = f(4) = 3$, 及不超过 $3, 4$ 的素数都是 $1, 2, 3$, 个数为 3 ; 同时因为自然数中的素数有无穷多, 所以对任意一个自然数 m , 都能找到从第 m 个素数起到第 $m+1$ 个素数 (但不包括第 $m+1$ 个素数) 的所有自然数, 其函数值都等于 m , 所以是满射, 但不是单射 (注: 7 是第 5 个素数, 11 是第 6 个素数, 所以 $f(7) = f(8) = f(9) = f(10) = 5$)

(3) $f_3: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f_3(n_1, n_2) = (n_1 + 1)^{n_2}$

答: 这既不是单射, 也不是满射 (与 0 是否属于 \mathbb{N} 无关, 以下说明以 0 不属于 \mathbb{N} 而言); 因为任意两个自然数, 都能求到此函数值, 所以是全函数。因为 $f(1, 2) = f(3, 1) = 4$, 所以不是单射函数; 同时 1 没有原像, 所以不是满射函数

(4) $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_4(x) = x^2 + 2x - 15$

答: 一元二次函数, 既不是单射, 也不是满射; 其几何图像为抛物线

(5) $f_5: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f_5(x) = 1 + 2x^3$

答: 这是一个单射函数, 但不是满射; 因为 3 次曲线是单调函数, 所以在定义域子集范围也是单调的, 所以是单射函数。但任意一个整数像的原像却不一定是整数。所以不是满射

(6) A 是集合, $f_6: 2^A \times 2^A \rightarrow 2^A \times 2^A, f_6(x, y) = (x \cup y, x \cap y)$

答: 假设 $A = \emptyset$, 那么这是一个双射函数 (请同学思考)

假设 A 不是空集, 那么此函数既不是单射, 也不是满射; 因为: 对 $f(x, y) = f(y, x)$, 所以不是单射; 另外对于 (\emptyset, A) , 没有原像; 所以不是满射

(7) $f_7: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_7(x, y) = x + y, f_8: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_8(x, y) = xy$

答: 此两个函数, 都不是单射, 但都是满射函数

8、设 X 是有限集合, $f: X \rightarrow X$, 证明:

(1) 如果 f 是单射, f 必是双射

证明: 假设 f 不是满射, 那么就必定有元素没有原像, 由于 X 是有限集合, 根据鸽笼原理: 原像元素个数 (鸽子) 就比像元素个数多 (鸽笼), 所以必定有多个原像会映射到相同的像

上, 所以不是单射。矛盾。所以 f 必定是满射, 即是双射

(2) 如果 f 是满射, f 必是双射

证明: 假设 f 不是单射, 那么必定存在多个元素映射到相同的像上。由于 X 集合是有限的, 那么因变量的个数就少于自变量个数, 因此 f 就不是满射。与题设矛盾。因此 f 必是单射, 既是双射

9、设 f 是有限集 X 上的一个函数, 满足 $\forall x \in X, f^2(x) = x$; 证明: f 是双射

证明: 因为 $f^2(x) = f \circ f(x) = x$, 既是 $f^2 = I_X$; 所以 f 是自己的逆函数, 根据逆函数的性质, f 必是双射

10、设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow 2^A$, 满足 $\forall b \in B, g(b) = \{x \in A \mid f(x) = b\}$ 证明: 当 f 为满射时 g 为单射; 问 g 为单射时, f 是否为满射?

证明:

(1) 因为 f 是满射, 所以 $\forall b \in B$, 都存在原像集合 $\{x \in A \mid f(x) = b\}$, 所以 g 满足函数的定义; 同时假设 g 不为单射, 那么存在 b_1, b_2 , 使得 $g(b_1) = g(b_2)$, 及存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = b_1 = b_2$, 与 f 是函数矛盾, 所以 g 必为单射

(2) 当 g 为单射时, f 不一定是满射, 因为 A 的幂集中存在空集, 那么当有唯一一个 $b \in B$ 在 f 下没有原像时, 完全可以构造 $g(b) = \emptyset$, 使得 g 为单射

11、设 A, B 都是有限集合, 试确定 A 到 B 有多少个单射? 多少个满射? 多少个双射?

答:

(1) 如果 $|A| < |B|$, 可以构造 $p(|B|, |A|)$ 个单射, 不能构造满射和双射

(2) 如果 $|A| = |B|$, 可以构造 $|A|!$ 个单射, 满射和双射, 构造出的单射就是满射就是双射

(3) 如果 $|A| > |B|$, 不能构造单射和双射, 可以构造 $s(|A|, |B|) |B|!$, 将集合 A 分成 $|B|$ 划分的数目

12、设有函数 $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 这里 $f(x) = 2x, g(x) = x^2 + x - 1, h(x) = x - 2$; 写出 fg, gfh, hhg

解:

$$f(g(x)) = f(x^2 + x - 1) = 2x^2 + 2x - 2$$

$$g(f(h(x))) = g(f(x-2)) = g(2x-4) = (2x-4)^2 + (2x-4) - 1 = 4x^2 - 14x + 11$$

$$h(h(g(x))) = h(h(x^2 + x - 1)) = h(x^2 + x - 3) = x^2 + x - 5$$

13、设 f, g, h 都是集合 A 上的函数; 如果 $f=g$, 是否必有 $h(f(x)) = h(g(x))$ 或 $f(h(x)) = g(h(x))$

答: 有 (可根据函数相等的定义)

14、设 f, g 是实数集 \mathbb{R} 上的函数, 其中 $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x + 1$; 确定 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 是否是满射, 单射和双射

答: 因为 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 都是二次函数, 所以即不是单射, 也不是满射, 所以也不是双射

15、设 f 和 g 都是函数, 证明:

(1) 当 $g(f(x))$ 为单射时, f 必为单射

证明: 假设 f 不为单射, 那么存在 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则有 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, 所以 $g(f(x))$ 不是单射, 与题设矛盾, 所以 f 必为单射

(2) 当 $g(f(x))$ 为满射时, g 必为满射

证明: 假设 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 则 $g(f(x)): A \rightarrow C$ 的函数, 因为 $g(f(x))$ 为满射, 既对任意 $c \in C$, 都存在 $a \in A$, 使得 $g(f(a)) = c$; 因为 f 是 A 到 B 的函数, 所以存在 $b \in B, f(a) = b$, 即 $g(b) = c$; 所以 g 为满射

(3) 当 $g(f(x))$ 为双射时, g 为满射, f 为单射

证明: 综合 (1), (2) 的结论, 即有 g 为满射, f 为单射

16、 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(1) 找出一个 A 上的非单位置换的置换 Π , 计算 Π^2, Π^3, Π^{-1}

解: 设 $\Pi = (1, 2, 3, 4)$, 那么 $\Pi^2 = (1, 3)(2, 4)$, $\Pi^3 = (1, 4, 3, 2)$, $\Pi^{-1} = (4, 3, 2, 1)$

(2) 若 A 上置换 Π 满足 $\Pi^2 = (1)$, 称 Π 为幂么置换, 求 A 上的全部幂么置换

解: 幂么置换共有 $C(4, 2) + C(4, 2)/2 + 1 = 10$ 个, 他们是

$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4); (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3); (1)$

17、 计算有限集合 X 可以定义出多少个函数 f , 使得 $f = f^{-1}$

解:

可如下思考, 要使得 f 是自逆函数, f 必须是双射 (置换), 同时如果将其写成循环节的形式, 如果 f 不是恒等函数, 那么包含的每个循环节只有两个元素, 及 $f(x) = y, f(y) = x$, 循环节为 (x, y) , 那么这种形式的总数为: 只有 1 个循环节的个数 + 有 2 个循环节的个数 + ... + $\text{floor}(|A|/2)$ 个循环节的个数 ($\text{floor}()$, 表示向下取整), 例如假设 $|A| = 5$, 那么 f 只有一个循环节的形式为 $f = (x, y)$, 有两个循环节的形式为 $f = (x, y)(u, v)$; 因为只有 5 个元素, 所以最多两个循环节; 当然还要加上恒等函数; 那么我们来计算有 k 个循环节的函数个数:

我们可以把一个这样的双射函数包含在 K 个循环节中的 $2k$ 个元素想像成一个在 $|A| = n$, 中选取 $2k$ 个元素的排列 $x_1 x_2 x_3 \cdots x_k y_1 y_2 y_3 \cdots y_k$ 对应函数 $f = (x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3) \cdots (x_k, y_k)$; 那么排列的总数为 $p(n, k)$, 但是这个排列与 $y_1 y_2 y_3 \cdots y_k x_1 x_2 \cdots x_k$ 所对应的是同一个, 所以在总数中要除以 2; 但这个排列还与如下的排列对应相同的函数, 及 $x_1 x_2 x_3 \cdots x_k$ 的任何一个排列, 同时相应变动 $y_1 y_2 y_3 \cdots y_k$ 的排列, 所对应的函数是相同的, 所以在总数中还要除以 $p(k, k)$, 那么得到的具有 k 个循环的自逆函数的个数为 $p(n, 2k)/(2p(k, k))$ [$2k \leq n$]

所以自逆函数的总数为: $p(n, 2)/2 + p(n, 4)/2p(2, 2) \cdots p(n, \text{floor}(n/2)*2)/2p(\text{floor}(n/2), \text{floor}(n/2)) + 1$

例如: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 那么 f 总数为: $p(5, 2)/2p(1, 1) + p(5, 4)/2p(2, 2) + 1 = 41$
对公式的说明: 1234, 这个排列对应于函数 $f = (1, 3)(2, 4)$, 那么我们看如下的排列也对应这个函数, 2143, 3412, 4321, 所以总数中要除去 $2p(2, 2) = 4$

18、 证明下列集合 A 和 B 等势

(1) $A = (0, 1), B = (-2, 2)$

证明: 如果能找到从 A 到 B 的双射函数, 就能说明 A 和 B 等势, 存在 A 到 B 上的这样的函数:

例如: $f(x) = 4x - 2$ 或 $f(x) = 5^x - 3$

(2) $A = (-\infty, +\infty), B = (0, +\infty)$

证明: 如果能找到从 A 到 B 的双射函数, 就能说明 A 和 B 等势, 存在 A 到 B 上的这样的函数:

例如: $f(x) = e^x$

(3) $A = (0, 1), B = (1/4, 1/2)$

证明: 如果能找到从 A 到 B 的双射函数, 就能说明 A 和 B 等势, 存在 A 到 B 上的这样的函数:

例如: $f(x) = 1/4 x + 1/4$

(4) $A = \mathbb{N}, B = \{(m, n) | m, n \in \mathbb{N} \wedge m \leq n\}$

证明: 如果将 B 集合写成如下的分化并集形式: $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cdots$, 这样 B 成为可数个集合的并集, 其中 $B_i = \{(i, i), (i, i+1), (i, i+2) \cdots\}$, 是一个可数集合, 根据书中定理, 可数个可数集合的并集依然是可数集, 那么就与 \mathbb{N} 等势, 证毕

19、 设 $A \sim B, C \sim D$; 证明 $A \times C \sim B \times D$

证明：因为 A 与 B 等势，所以存在双射函数 $f(a)=b$ ；同理在 C,D 之间存在双射函数 $g(c)=d$ ；那么在 $A \times C$ 与 $B \times D$ 之间构造如下函数： $k((a, c)) = (f(a), g(c))$ ，那么 k 是一个双射函数，因为：

- (1) 是单射，因为对任意的 $(a_i, c_i) \neq (a_j, c_j)$ ，可得要么 $a_i \neq a_j$ ，要么 $c_i \neq c_j$ ，因为 f, g 都是单射函数，所以要么 $f(a_i) \neq f(a_j)$ ，要么 $g(c_i) \neq g(c_j)$ ；所以 $(f(a_i), g(c_i)) \neq (f(a_j), g(c_j))$ ；是单射
- (2) 是满射，因为对任意的 (b_i, d_i) 而言，由于 f, g 是双射，所以存在 a_i, c_i 使得 $f(a_i) = b_i, g(c_i) = d_i$ ；那么 (a_i, c_i) 就是原像，所以是满射

所以 k 是双射，即 $A \times C \sim B \times D$

20、 证明：非空有限集 A 与可数集 B 的笛卡儿积 $A \times B$ 也是可数集合

证明：因为非空集合 $A \sim (1, 2, 3 \cdots |A|)$ ， $B \sim \mathbb{N}$ ，引用 19 题结论，所以 $A \times B \sim (1, 2, 3 \cdots |A|) \times \mathbb{N}$ $(1, 2, 3 \cdots |A|) \times \mathbb{N}$ 可写成 $\{(1, 1), (1, 2) \cdots\} \cup \{(2, 1), (2, 2) \cdots\} \cup \cdots \cup \{(|A|, 1) \cdots\}$ ，其中任两个集合的交集为空，那么可建立如下从上述集合到 \mathbb{N} 的双射函数： $f((x, y)) = x + |A|(y-1)$ ，例如： $f((1, 1))=1, f((2, 1))=2, \cdots f((|A|, 1))=|A| \cdots$ ，这是一个单射，对任意一个自然数 N，那么 $\text{floor}((N-1)/|A|)+1$ ，就是 y， $N - |A|(y-1) = x$ ，例如： $|A|=5, N=10$ ，那么对应的 x, y 分别为 $y=\text{floor}((10-1)/5)+1 = 2, x=10-5*1=5$ ，原像为 $(5, 2)$ ；因此原命题成立

21、 证明：如果存在从集合 A 到集合 B 的满射；则必有 $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$

证明：设 f 是从 A 到 B 的满射，那么对任意的 B 中元素 b_i ，都至少存在一个 A 元素 a_i 使得 $f(a_i)=b_i$ ，那么构造从 B 到 A 的函数 g，使得 $g=\{(b, a) | f(a)=b\}$ ，那么此函数是单射，所以 $\text{card}(B) \leq \text{card}(A)$

22、 设集合 A 与集合 B 的基数都是 N_0 ，证明： $A \cup B$ 的基数也是 N_0

证明：因为 $A \cup B = (A \oplus B) \cup (B \cap A)$ ，那么 $A \oplus B$ ，和 $B \cap A$ 不能都是有限集合或空，分如下情况讨论

- (1) 假设 $B \oplus A$ 为空，那么 $A=B$ ，那么并集基数为 N_0
- (2) 假设 $B \cap A$ 为空，那么 A, B 分别是两个没有公共元素的可数集合，根据 20 题结论，那么并集基数为 N_0
- (3) 假设其中一个集合为有限集合，那么另一个一定是无限集合，那么假设这个无限集合为 $B \cap A$ ，那么此无限集合是 A 的子集合，那么基数为 N_0 ，根据书中定理，有限集和可数集合的并，一定是可数集合，结论成立；假设这个无限集合为 $B \oplus A$ ，那么他们的基数不会大于两个无公共元素的可数集合的并，所以其基数也为 N_0 ；

综上所述： $A \cup B$ 的基数也是 N_0

习题八

26、证明：在任何人数不少于 2 的人群中，至少有 2 个人在其中有同样多的熟人

证明：设人群人数为 n (≥ 2)，那么每个人有可能有的熟人数为 $(0, 1, \dots, n-1)$ n 种情况，但是，当有人没有熟人时，就不可能有人有 $n-1$ 个熟人；同理，当有人认识其余的所有人时，就不存在有人没有熟人，因此每个人可能有的熟人数只有 $n-1$ 种。而一共有 n 个人，那么根据鸽笼原理，必存在至少有 2 个人在其中有同样多的熟人的情况

习题十

1、设 G 是一个 (n, m) 简单图；证明： $m \leq C(n, 2)$ 等号成立，当且仅当 G 是完全图

证明：此题有两个内容，第一方面证明简单图满足 $m \leq C(n, 2)$ ，第二证明， $m = C(n, 2)$ 当且仅当 G 是完全图

(1)：因为在简单无向图中，每个结点的最大度数为 $n-1$ ，所以图的总度数的上限为 $n(n-1)$ ，所以边的上限为 $n(n-1)/2$ ，因此任意一个简单无像图 G ，其边数满足： $m \leq n(n-1)/2 = C(n, 2)$

(2)： $m = C(n, 2) \Rightarrow G$ 是完全图

因为，当 $m = C(n, 2)$ 时，全图的总度数为 $n(n-1)$ ，因此其平均点度为 $(n-1)$ ，因为 n 阶简单无向图中点度的最大值为 $(n-1)$ ，所以此时每个点的度数都相同并为 $(n-1)$ ，根据完全图的定义，此图为完全图

G 是完全图 $\Rightarrow m = C(n, 2)$

当 G 为完全图时，既每个结点都和其他结点相邻，所以全图的总边数 $m = n(n-1)/2 = C(n, 2)$

2、设 G 是一个 $(n, n+1)$ 的无向图，证明： G 中存在顶点 u ， $d(u) \geq 3$

证明：因为此图总度数为 $2n+2$ ，假设 G 中所有结点度数都小于 3，那么最大点度总数为 $2n$ ，小于 $2n+2$ ，矛盾；所以 G 中存在顶点 u ， $d(u) \geq 3$

3、确定下面的序列中哪些是图的序列，若是图的序列，画出一个对应的图

(1) (3, 2, 0, 1, 5) (2) (6, 3, 3, 2, 2) (3) (4, 4, 2, 2, 4) (4) (7, 6, 8, 3, 9, 5)

解：根据握手定理推论，任何图中，奇数度结点个数为偶数，那么 (1) 不满足要求，其它都是图的点度序列；(图略)

4、证明：在 (n, m) 图中 $\delta \leq 2m/n \leq \Delta$

证明：因为 $2m/n$ 代表简单无向图的平均点度值，所以平均值大于等于最小值，小于等于最大值，结论成立

5、证明定理 10.2

证明：根据有向图点度的定义，任一条有向边为全图贡献一度出度，一度入度，所以总度数仍然为 $2m$ ；另外总度数就是所有结点的出度和入度之和；所以 (1) 式成立；另外一条边贡献一度出度，所以总出度等于边数，同理总入度也等于边数，因此 (2) 成立

6、设 G 是 (n, m) 简单二部图，证明： $m \leq n^2/4$

证明：设 G 的两个顶点集合中顶点个数分别为 n_1, n_2 ，并有 $n = n_1 + n_2$ (1 式)；同时，在简单二部图中，当其为完全二部图是，其边数最大，及 $\max(m) = n_1 \times n_2$ (2 式)；联立 (1) (2) 式，通过高等数学的知识，当 $n_1 = n_2 = 1/2n$ 时， $\max(m)$ 取得最大值 $n^2/4$ ，所以一般 (n, m) 简单二部图，其边数小于等于此最大值既 $m \leq n^2/4$

7、无向图 G 有 21 条边，12 个 3 度结点，其余结点的度数均为 2，求 G 的阶数 n

解：根据握手定理有 $12 \times 3 + (n-3) \times 2 = 42$ ，所以 $n = 6$

8、证明：完全图的点诱导子图也是完全图

证明：设完全图 $K_n = \langle V, E \rangle$ ，那么对任意的 V 的非空子集 V_i 做点诱导子图，根据点诱导子图的定义，因为 V_i 中任意两个结点在 K_n 中都邻接 (如有向图，则有两边有向边)，那么在点诱导图中也邻接，所以 $G(V_i)$ 是完全图

9、如果 $G \cong G'$ ，称 G 是自补图；确定一个图为自补图的最低条件：画出自补图

解：因为 G 和自己的补图同构，那么 G 和 G' 应该有相等条数的边，所以 $m = m'$ ，又因为 $m + m' = n(n-1)/2$ ，所以 G 的边的条数必须满足 $m = n(n-1)/4$ 。因此图 G 的阶数或阶数减一必需是 4 的倍数，这就是最低条件。图略 (4 阶或 5 阶这样的图都容易画出)

10、判断图 10-29 中的两个图是否同构，并说明理由

答：这两个图不同构，因为这两个图中，都有唯一的 3 度点，因此在同构映射中一定相互对

应，但一个图中的 3 度点连接两个一度点，而在另一个图中其 3 度点只连接了一个一度点，不能相互映射。因此不同构

11、证明：图 10-30 中的两个图是同构的

证明：在此二图中，对结点进行标号后，可以找到相关的双射函数，满足图同构的要求（具体映射略）

12、求具有 4 个结点完全图 K_4 的所有非同构的生成子图

解：图略，方法，分别考虑 $(4, 0)$ $(4, 1)$ $(4, 2)$ $(4, 3) \cdots (4, 6)$ 各种情况，分别有 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 共 11 种

13、略

14、试证明在任意 6 个人的组里，存在 3 个人相互认识，或存在 3 个人相互不认识

证明：设 6 个人分别为 $r_1, r_2 \cdots r_6$ ，那么人设一人，比如 r_1 ；那么其余 5 人和 r_1 要么认识，要么不认识，可分成两个集合 S_1, S_2 ，那么 $|S_1| + |S_2| = 5$ ；根据鸽笼原理，必有一个集合的人数会大于等于 3；假设 S_1 的人数大于等于 3，代表和 r_1 不认识的人，下面分两种情况讨论：

（1）如果 S_1 中有两人相互不认识，那么他们和 r_1 构成了 3 个人相互不认识的群体

（2）如果 S_1 中的人都相互认识，那么就找到了 3 个相互认识的群体

综上所述：结论成立

15、如果 u 和 v 是图 G 中仅有的两个奇数度结点，证明 u 和 v 必是连通的

证明：假设 u, v 分别在图 G 的两个分中 G_1, G_2 中，那么 G_1, G_2 各自的总结点度数就是奇数，与握手定理矛盾。因此， u, v 必在一个连通分支中，所以是连通的

16、证明： G 是二部图当且仅当 G 的回路都是偶长回路（非平凡图， $n > 1$ ）

证明：（1）先证明在二部图中，所有奇长道路的两个端点必定分别在两个顶点集合中使用归纳方法：

A) 当道路长度 $L(P)=1$ 时，就是图 G 的边和其两个端点，根据二部图的定义，两个端点分别在两个顶点集合中

B) 假设道路长度 $L(P)=2n+1$ ($n > 0$) 时结论成立，及 $P=V_1V_2 \cdots V_{2n+2}$ ，其中 V_1, V_{2n+2} 分别属于两个顶点集合

C) 当 $L(P)=2(n+1)+1$ ($n > 0$) 时， $P=V_1V_2 \cdots V_{2n+2}V_{2n+3}V_{2n+4}$ ；当我们删除此道路的最后两个结点，道路长度变为 $L(P')=2n+1$ ，根据(B)的假设，那么 V_1, V_{2n+2} 就分别在两个顶点集合。现在把 V_{2n+3} 加入到道路中，因为 V_{2n+3} 是 V_{2n+2} 的邻结点，所以 V_{2n+3} 在 V_{2n+2} 的对集中，既和 V_1 在一个顶点集合中；同理 V_{2n+4} 就在 V_1 的对集中，也就是 V_1, V_{2n+4} 在不同的顶点集合中

综上所述，（1）结论成立

（2） G 是二部图 $\Rightarrow G$ 的回路都是偶长的

设 C 是 G 中的任意回路，那么 $C=V_1 \cdots V_1$ ，假设 $L(C)$ 为奇数，那么根据（1）的结论， V_1, V_1 应该在不同的集合中，矛盾；所以 $L(C)$ 必为偶数

G 的回路都是偶长的 $\Rightarrow G$ 是二部图

首先，按如下方式对 G 的连通分支进行着色，任选一个结点，着红色，然后将其所有邻结点着为黑色，（将红色结点标记），然后逐一对黑色结点的邻结点着为红色并标记黑结点，如此往复，直到全部结点着色标记完成，或遇到已着色的结点被重新着色为相反的颜色（此图有奇长度回路）。下面说明，如果是偶长的，那么就是二部图：

证明：从染色的顺序看，红点到黑点之间的距离为单数，红点到红点的距离为双数，并且相同颜色的点不会相邻。所以可以将图的顶点集合分成两个集合，每个集合的点的颜色一致。根据二部图的定义，这是一个二部图。

如果着色过程中出现已着色点被重新着色成相反颜色,例如: v_1 是开始的红点,如果现在有点为 u_1 点为黑色,并且开始对他的邻结点进行着色,我们发现 w_1 是 u_1 的邻结点,但已经被着色成黑色,那么,我们就找到得到 v_1 到 u_1 的距离为单数的道路 p_1 , v_1 到 w_1 距离为单数的道路 p_2 , 如果 $p_1 + u_1w_1 + p_2$, 就形成一个回路,此回路为奇数,与前提矛盾。所以不可能出现这种情况。

(注:对其他分支重复这种方法,如果遇到孤立结点,则交替着红色和黑色)

17、设 (n, m) 简单图 G 满足 $m > ((n-1)(n-2))/2$, 证明 G 必是连通图; 试构造一个 $m = ((n-1)(n-2))/2$ 的非连通简单图

证明: 假设 G 不是连通图, 那么 G 图至少有两个分支, 假设分别为 $G_1 = (n_1, m_1), G_2 = (n_2, m_2)$; 那么 $n_1 + n_2 = n, m_1 + m_2 = m$, 则 m_1 的最大值为 $n_1(n_1-1)/2, m_2$ 的最大值为 $n_2(n_2-1)/2$; m 的最大值为 $(n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1))/2$, 但 $n_1 = n_2 = n/2$ 是有最大值 $m = n(n-2)/4 \leq ((n-1)(n-2))/2$, 矛盾! 所以 G 是连通图

当图 $G = (2, 0)$ 是, 满足 $m = ((n-1)(n-2))/2 = 0$, 是非连通图

18、设 G 是阶数不小于 3 的连通图; 证明下面 4 条命题相互等价:

(1) G 无割边 (2) G 中的任何两个结点位于同一回路中 (3) G 中任何一结点和任何一条边都位于同一回路中 (4) G 中任何两边都在同一回路中

证明:

(1) \Rightarrow (2): 因为 G 是连通图, 所以任何一对结点 u, v 都是连通的, 所以存在从 u 到 v 的基本道路 P , 设 $e(P)$ 表示 P 中的所有边; 那么在 $G - e(P)$ 的删边子图中 u, v 依然连通; 假设 u, v 不连通, 那么依次从 $P = u \cdots v$ 上的边从 v 开始的添加到子图中, 一定会在某个时候, 刚好添加到某条边 e_i 时, 使得 u, v 连通了, 那么 e_i 就是图 G 的割边; 矛盾; 那么在 $G - e(P)$ 还存在从 v 到 u 的基本道路 P_1 , 那么 PP_1 就构成了从 u 经过 v 在回到 u 的回路

(2) \Rightarrow (1): 假设有割边 $e = (u_1, u_2)$, 那么 u_1, u_2 就不在同一回路中, 矛盾

因此: (1) \Leftrightarrow (2)

(2) \Rightarrow (3): 假设 e 为图任意边, 其端点为 u_1, u_2 , v 为图中任何结点, 不失一般性, v 不等于 u_1, u_2 (如果 v 等于 u_1 或 u_2 , 请同学自己说明, 一定存在包含 e 的回路); 那么根据条件, u_1 和 v 之间存在回路, 如果此回路包含 u_2 , 那么回路可表示为: $v \cdots u_1 \cdots u_2 \cdots v$, 那么可用 e 代替 $u_1 \cdots u_2$ 之间道路, 成为 $v \cdots u_1 e u_2 \cdots v$, 结论成立; 假设包含 v, u_1 的任何回路 C 都不包含 u_2 , 那么 e 一定不在 C 上, 同时, e 不是割边, 所以在 $G - \{e\}$ 中, u_1 和 u_2 间存在基本道路 $u_1 \cdots u_2$, 那么我们可以构造如下闭道路: $v \cdots u_1 \cdots u_2 e u_1 \cdots v$

19、设 $G = (V, E)$ 是点度均为偶数的连通图, 证明: 对任何 $u \in V, \omega(G - u) \leq d(u)/2$

证明: 因为 G 的点度都为偶数, 因此 $G - u$ 最多形成 $d(u)$ 个奇数度点, 而奇数度点必须成对出现在连通分支中, 所以 $\omega(G - u)$ 的最大值为 $d(u)/2$, 所以 $\omega(G - u) \leq d(u)/2$

23、证明: 在具有 $n (n \geq 2)$ 个结点的简单无向图 G 中, 至少有两个结点数相同

证明: 在 n 个结点的简单无向图中, 每个结点的可能度数为 $0, 1, 2, \cdots, n-1$, 共 n 种, 但是如果有结点度为 0 , 那么就不存在有结点度数为 $n-1$; 同理, 有结点度数为 $n-1$, 那就不存在孤立结点, 所以可能的点度只能有 $n-1$ 种, 但有 n 个结点, 所以必有两个结点数要相同

30、略

习题十一

1、设一个树中度为 k 的结点数是 n_k ($2 \leq k$), 求它的叶的数目

解: 设 T 中叶结点数目为 t , 那么根据握手定理, 及数的点边关系可以得到:

$$n = t + n_2 + n_3 + \cdots + n_k \quad (1)$$

$$\sum d(v) = 2m = t + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + kn_k = 2(n-1) \quad (2)$$

所以: $t + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + kn_k = 2(t + n_2 + n_3 + \cdots + n_k) - 2$

$$t = n_3 + 2n_4 + \cdots + (k-2)n_k + 2$$

2、证明: 树 T 中最长简单道路的起点和终点必都是 T 的叶

证明:

- a) 首先证明在 T 中的任意最长道路 P 中, 其起点 u 和终点 v 的所有邻结点必然在 P 中, 否则此道路可以变长, 与最长条件矛盾
- b) 假设在 T 中存在最长道路 P , 其起点 u 或终点 v 不是叶结点(假设是 u), 那么 $d(u) > 1$, 及 u 至少有两个邻结点 u_1, u_2 , 他们都将出现在道路中, 既 $P = uu_1 \cdots u_2 \cdots v$, 因为 u_2 是 u 的邻结点, 所以在 T 中就存在 $C = uu_1 \cdots u_2 u$ 的简单回路, 与树的基本性质矛盾, 所以 u, v 必是叶结点

10、设 e 是连通图 G 的一条边, 证明: e 是 G 的割边当且仅当 e 含于 G 的每个生成树中

证明:

a) e 是 G 的割边 $\Rightarrow e$ 含于 G 的每个生成树中

假设 e 不包含在 G 的生成树 T' 中, 那么删除 e 边后, T' 依然包含在 $G - \{e\}$ 中, 因为 T' 连通, 所以 $G - \{e\}$ 连通, 与 e 是割边矛盾, 所以 e 必包含在 G 的任何生成树中

b) e 含于 G 的每个生成树中 $\Rightarrow e$ 是 G 的割边

假设 e 不是割边, 那么 $G - \{e\}$ 依然连通, 所以存在生成数 T' , 当然 T' 也是 G 的生成树, 但 e 不包含在 T' 中, 与题设矛盾, 因此 e 是 G 的割边

12、略

23、略 (参考课堂 ppt) 讲解

习题十二

1、证明：图 12-7 中的图都是平面图

略（只需要画出其平面图的形式即可）

3、设 G 是阶数不小于 11 的图，证明： G 或 G' （代表 G 的补图）中至少有一个是非平面图

证明：假设 G 和 G' 都是平面图，因为 $m(G) + m(G') = n(n-1)/2$ ，因此至少有一图的边至少为 $n(n-1)/4$ ，根据平面图边与点的关系， $n(n-1)/4 \leq 3n - 6$ ，得到 $n^2 - 13n + 24 \leq 0$ ，因此 $n \leq 10$ ，与题设矛盾；因此必有一图为非平面图

5、证明：少于 30 条边的简单平面图至少有一个顶点的度不大于 4

证明：少于 30 条边的简单平面图所有的顶点的度都大于等于 5，那么根据握手定理和平面图的性质有：

$$5n \leq 2m \quad (1)$$

$$m \leq 3n - 6 \quad (2) \Rightarrow 5n \leq 6n - 12 \Rightarrow n \geq 12$$

根据 (1) 式， $60 \leq 2m$ ，既 $m \geq 30$

与题设矛盾，因此至少有一个顶点的度不大于 4

7、证明：对 $K_{3,3}$ 的任意一条边 e ， $K_{3,3}-e$ 是平面图；同样，对 K_5 的任何边 e ， K_5-e 也是平面图

证明：因为 $K_{3,3}$ 的任意一条边 e_i, e_j ， $K_{3,3}-e_i, K_{3,3}-e_j$ 都是同构的，而根据题 1 (a) 的结论，我们可以平面嵌入它，因此 $K_{3,3}-e$ 是平面图；同理， K_5-e 也是平面图

9、如果一平面图于其对偶图同构，则称这个平面图为自对偶图，推导自对偶图必须满足的结点数 n 与边数 m 的关系，并找出一些自对偶图

解：如果一个图是平面图，那么满足欧拉公式：

$$n - m + f = 2 \quad (1)$$

其对偶图也是平面图，因此也应满足欧拉公式：

$$n^* - m^* + f^* = 2 \quad (2)$$

因为对偶关系，因此：

$$n = f^*$$

$$f = n^*$$

又因为此二图同构，因此

$$n = n^*, m = m^*$$

所以： $n = f$ ，并且 $2n - m = 2$

据此可以找到一些自对偶图： K_1 ， $G(2,2)$ - 有两种图像， K_4

习题十三

1、构造 (n, m) 欧拉图，使其满足条件：(1) m, n 奇偶性相同；(2) m, n 奇偶性相反

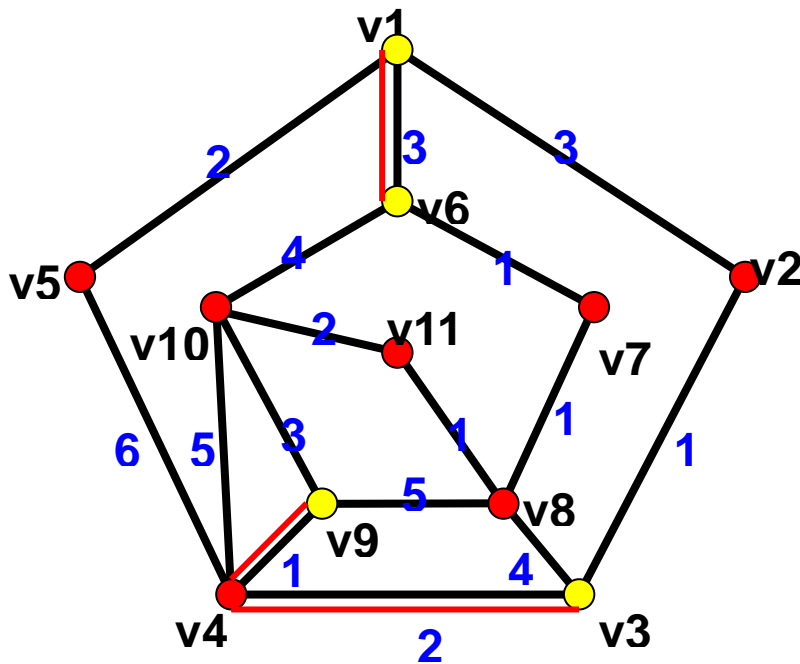
答：略

2、设 $G = (V, E)$ 是一个具有 $2k (k > 0)$ 个奇数度结点的连通图。证明： G 中必存在 k 条边不相重的简单道路 P_1, P_2, \dots, P_k ，使得 $E = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_k)$

证明：把 $2k$ 个奇数度结点分成两两一组的 k 组，然后每组结点新加一条边，所得图为欧拉图，故存在欧拉回路 C ；然后去掉欧拉回路 C 中的 k 条新加入的边，得到 k 条互无重复边的道路 P_1, P_2, \dots, P_k ，即为所求

5、在图 13-10 中求中国邮递员问题的解

解：



如上图标号：

图中有 4 个奇数度结点 v_1, v_6, v_9, v_3 ，求两两之间最短长度：

$P_{v_1 v_6} = 3$ ($v_1 v_6$), $P_{v_1 v_9} = 7$ ($v_1 v_2 v_3 v_4 v_9$),

$P_{v_1 v_3} = 4$ ($v_1 v_2 v_3$), $P_{v_6 v_9} = 7$ ($v_6 v_7 v_8 v_9$),

$P_{v_3 v_6} = 6$ ($v_3 v_8 v_7 v_6$), $P_{v_3 v_9} = 3$ ($v_3 v_4 v_9$),

$P_{v_1 v_6}$ 和 $P_{v_3 v_9}$ 满足最小性要求，

复制 $v_1 v_6$ 和 $v_3 v_4 v_9$ 的边，图中欧拉回路即为所求解

6、设 G 是有两个奇数度点的连通图，设计一个构造 G 的欧拉道路的算法

解：此算法只要在书中欧拉回路的算法中，添加起点为奇数结点即可，详细描述略

9、证明：凡有割点的图都不是哈密顿图

证明：假设 e 为图 G 的割点，根据割点的定义， $\omega(G - e) > 1$ ，因此不满足哈图的必要条件；所以不是哈图

13、假定在 $n (\geq 2)$ 个人的团体中，任何 2 人合起来认识其余的 $n-2$ 个人，证明：

(1) 这 n 个人可以排成一排，使得站在中间的每个人的两旁都是自己认识的人，站在两端的人旁边各有 1 个认识的人

(2) 当 $n \geq 4$ 时，这 n 个人可以围成一个圆圈，使得每个人两旁都是自己所认识的人

证明：如果团体中的个人看成是结点，而人与人之间的关系看成是边，那么就构成一个认识与否

的图，对于问题（1），就转化为此图中存在哈道路问题；问题（2），就转化为图中存在哈圈的问题，现说明如下：

在此题中，任何 2 人合起来认识其余的 $n-2$ 个人蕴含任何人最多只有一人不认识，因为如果 a ，不认识 b 和 c ，那么 b 和 c 就不能认识完剩下的全部人，因此在图既为 $d(u) \geq n-2$

那么，任意两个结点 u, v ， $d(u) + d(v) \geq n-2 + n-2$ ，因为 $n \geq 2$ ，所以 $d(u) + d(v) \geq n-1$ ，根据书中定理，此图存在哈道路

如果 $n \geq 4$ ，那么 $d(u) + d(v) \geq n-2 + n-2 \geq n$ ，根据书中定理，此图存在哈圈

习题十四

4、设 $S=\{a, b, c\}$, 运算 “ \cdot ” 由表 14-2 定义;

判断代数系统 $\langle S, \cdot \rangle$ 是否为广群, 半群, 含么半群, 群

答:

由运算表可知: “ \cdot ” 封闭, 所以是广群;

由表可知:

$\forall x, y \in S, x \cdot y = y$, 所以 $(x \cdot y) \cdot z = z, x \cdot (y \cdot z) = x \cdot z = z$, 所以结合律成立, 所以是半群;

由表可知:

a, b, c 皆为左么元, 无右么元, 所以 $\langle S, \cdot \rangle$ 是半群

5、表 14-3 中所列运算定义在实数集合 R 上, 请在下表的各栏上填上该运算是否具有指定性质

	+	-	\times	max	min	$ x-y $
封闭性	√	√	√	√	√	√
结合性	√	\times	√	√	√	\times
交换性	√	\times	√	√	√	√
存在么元	√	\times	√	\times	\times	\times
存在零元	\times	\times	√	\times	\times	\times
每元有逆元	√	\times	\times	\times	\times	\times

答:

+: 是封闭的, 有结合性, 可交换, 0 为么元, 无零元, 每个数的相反数为其逆元 $a, -a$

-: 是封闭的, 没有结合性 $(3-2)-1 \neq 3-(2-1)$, 不可交换 $3-2 \neq 2-3$, 没有么 (不可交换), 没有零元, 没有逆元 (无么)

\times : 是封闭的, 有结合性, 可交换, 1 为么元, 0 为零元, 0 没有逆元

Max: 是封闭的, $\max(\max(a, b), c) = \max(a, \max(b, c))$ 有结合性, $\max(a, b) = \max(b, a)$ 具有交换性, 无么元, 无零元, 无逆元

Min: (同上)

$|x-y|$: 是封闭的, $||5-3|-2| \neq |5-|3-2||$ 没有结合性, $|x-y|=|y-x|$ 可交换, 没有么 $|-1-0| \neq -1$, 没有零, 没有逆

习题十五

3、在实数集 R 上定义二元运算 “ $*$ ” 如下: $\forall a, b \in R, a*b = a + b + ab$; 证明: $\langle R, * \rangle$ 是含幺半群

证明:

因为定义运算中只包含初等运算 $+$, \times , 所以是封闭的;

因为对任意实数 a, b, c , $(a*b)*c = (a+b+ab) + c + (a+b+ab)c = a*(b*c)$ 具有结合性;

0 是幺元, $a*0 = a + 0 + 0 \cdot a = a = 0*a$

所以是含幺半群

(注: -1 没有逆元, 因此不是群)

4、设半群 $\langle A, \cdot \rangle$ 中任何两个不同元素关于运算 “ \cdot ” 不可交换; 证明: 对任何 $a \in A, a \cdot a = a$

证明: (注: 应该是非平凡半群, 即元素个数 ≥ 2) 假设存在 $a \in A, a \cdot a \neq a$, 设 $a \cdot a = b$, 那么 $(a \cdot a) \cdot a = b \cdot a = a \cdot (a \cdot a) = a \cdot b$ (运用半群的结合性), 所以 a, b , 可交换; 与题设矛盾, 假设不成立; 因此原命题结论成立

6、证明: 群中只有幺元是幂等元

证明: 假设 a 是幂等元, 那么对任意群中元素 $b, ba = baa$, 根据消去率, $b = ba$; 同理 $ab = aab$, 所以 $b = ab$, 根据幺元的定义, $a = e$; 既群中幂等元是幺元

9、在整数集 Z 上用加法运算 $+$ 和-定义新运算 “ Δ ” 如下: $\forall a, b \in Z, a \Delta b = a + b - 2$. 证明: $\langle Z, \Delta \rangle$ 是群

证明: 封闭性、结合性证明略。

设幺元为 $e, e \Delta a = e + a - 2 = a, \Rightarrow e = 2$.

对 a 的逆 b , 有 $a \Delta b = 2$, 即 $a + b - 2 = 2$, 可见 $b = 4 - a$

综上, $\langle Z, \Delta \rangle$ 是群

11、设 $\langle S, * \rangle$ 和 $\langle T, * \rangle$ 都是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 令 $S \cap T = \{x | x \in S \wedge x \in T\}$, $ST = \{s*t | s \in S \wedge t \in T\}$. ($*$ 可交换); 证明: $\langle S \cap T, * \rangle$ 和 $\langle ST, * \rangle$ 也都是 $\langle G, * \rangle$ 的子群

证明:

已知 $\langle S, * \rangle$ 和 $\langle T, * \rangle$ 都是 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 任取 $a, b \in S \cap T$, 所以 $a * b^{-1} \in S, a * b^{-1} \in T$, 即 $a * b^{-1} \in S \cap T$, 所以 $\langle S \cap T, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群

对于 $\langle ST, * \rangle$, 已知 $ST = TS$, 任取 $s_1 * t_1, s_2 * t_2 \in ST$,

$$\begin{aligned}(s_1 * t_1) * (s_2 * t_2)^{-1} &= (s_1 * t_1) * (t_2^{-1} * s_2^{-1}) = s_1 * t_3 * s_2^{-1} \\ &= s_1 * s_2^{-1} * t_3 \\ &= s_3 * t_3 \in ST\end{aligned}$$

所以 $\langle ST, * \rangle$ 是 $\langle G, * \rangle$ 的子群

16、证明: 每个阶数大于 1 的群必含有阶数大于 1 的交换子群

证明: 因为群 G 的阶数大于 1, 任取 $a \in G \wedge a \neq e$, 构成 $S = \langle a \rangle$, 那么 S 及为满足要求的交换子群; 因为

(1) $\langle a \rangle$ 是循环群, 所以是交换群, 并且是 G 的子群

(2) $e, a \in \langle a \rangle \wedge a \neq e$, 所以 $\langle a \rangle$ 的阶数大于 1

17、证明: 循环群的子群必是循环群

证明:

设 G 的生成元为 a , H 为 G 的子群, 并且 H 中具有最小正幂的元是 a^k ,

(1) 如果 $k = 1$, 那么 a 就是子群的生成元, 所以是循环子群

(2) 如果 $k \neq 1$, 那么

$G = \langle a \rangle, H \subseteq G, H = \{e, a^k, a^{2k}, a^{3k}, \dots\}$, 设 a^k 是 H 中具有最小正指数的元,

则 $\forall a^m \in H$, 令 $m = tk + r$ ($0 \leq r < k$), 则 $a^m = (a^k)^t a^r$,

由 k 的选择知, $r=0$, 即 $a^m=(a^k)^t a^r$, H 由 a^k 生成; 因为, 假设 $r \neq 0$, 又因为 $0 \leq r < k$, 那么 $(a^k)^{-t} a^m = a^r \in H$, 与 k 为最小正指数矛盾

18、证明: 群中的每个元素和它的逆元有相同的周期

证明: 设任意元素 a 的周期为 n , 那么 $(-a)^n = a^{-n} = -(a^n) = e$, 所以 n 是 $-a$ 的周期的倍数, 假设 m 是 $-a$ 的周期, 且 $m < n$, 那么 $a^n (-a)^m = a^r = e$, $0 < r < n$, 与 n 是 a 的周期矛盾, 所以 $m = n$, 所以逆元的和原元素有相同的周期

30、设 $\langle G, \cdot \rangle$ 是群, a 是 G 中一个固定元素, 定义映射 $f: G \rightarrow G$ 使得对任何 $x \in G$, $f(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$. 求证: f 是 G 的自同构映射

证明:

容易证明 f 是 G 的同态映射, $f(x \cdot y) = a \cdot x \cdot y \cdot a^{-1} = a \cdot x \cdot a^{-1} \cdot a \cdot y \cdot a^{-1} = f(x) \cdot f(y)$

再证明 f 是双射,

证单射: $f(x) = f(y)$, $a \cdot x \cdot a^{-1} = a \cdot y \cdot a^{-1} \Rightarrow x = y$

证满射: 令 $a \cdot x \cdot a^{-1} = y$, $x = a^{-1} \cdot y \cdot a$, 即任意 y , 可以找到 $x = a^{-1} \cdot y \cdot a$, 使得 $f(x) = y$

习题十六

1、设 S 是由有限个实数组成的非空集合；证明： $\langle S, +, \times \rangle$ 不是环，其中 $+$, \times 是实数的加法和乘法运算

证明：因为在有限实数集上，如果 $S \neq \{0\}$ ，那么加法和乘法都不封闭；但 $S = \{0\}$ 时，是环

3、设 A 依次为下列数集合，试确定 $\langle A, +, \times \rangle$ 是否成环、整环或域

(1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x \geq 0\}$

答：在非负整数集合内，无加法逆元存在，不是环

(2) $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

答： $\langle A, + \rangle$ 是加群（闭，结，幺，逆）， $\langle A, \times \rangle$ 是含幺半群（闭，结，1 为幺，0 没有逆元），同时， $\langle A - \{0\}, \times \rangle$ 是群，所以是域

(3) $A = \{x \mid (\exists y) [y \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x = 2y]\}$

答： A 是由偶数集合，是环，但 $\langle A, \times \rangle$ 半群无幺元，所以不是整环，不是域

(4) $A = \{a/b \mid a, b \text{ 为正整数, 且 } (a, b) = 1\}$

答： A 为正有理数，无加法逆元存在，不构成环

习题十七

2、设 n 为正整数, D_n 为 n 的所有正因子构成的集合, 画出 $\langle D_6, | \rangle$ 、 $\langle D_8, | \rangle$ 、 $\langle D_{30}, | \rangle$ 对应的 Hasse 图, 并证明它们都是格

证明: (图略)

$\langle D_6, | \rangle$ 菱形

$\langle D_8, | \rangle$ 链

$\langle D_{30}, | \rangle \cong 2\{a, b, c\}$

他们都满足格的定义, 有最大元, 最小元, 任意两个元素都可求最大下界最小上界

5、证明: 在任何格中下述结论成立:

(1) 如果 $a \wedge b \wedge c = a \vee b \vee c$, 则 $a=b=c$

证明: 因为 $a \wedge b \wedge c \leq a \leq a \vee b \vee c$, 而 $a \wedge b \wedge c = a \vee b \vee c$, 所以 $a \wedge b \wedge c = a \vee b \vee c = a$

同理, $a \wedge b \wedge c = a \vee b \vee c = a = b = c$

(2) $a \vee [(a \vee b) \wedge (a \vee c)] = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

证明: 因为 $a \leq a \vee b$, $a \leq a \vee c$, 所以 $a \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, 所以 $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$

8、设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是格, " \leq " 是对应的偏序, a, b, c, d 是 L 中任意元素, 证明:

(1) $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \leq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$

证明:

因为 $a \wedge b \leq a$, $c \wedge d \leq c$, 所以 $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \leq (a \vee c)$

同理 $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \leq (b \vee d)$

所以 $(a \wedge b) \vee (c \wedge d) \leq (a \vee c) \wedge (b \vee d)$

(2) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

证明:

因为 $a \leq a \vee b$, $a \leq c \vee a$, 所以 $a \leq (a \vee b) \wedge (c \vee a)$

同理 $b \leq (b \vee c) \wedge (a \vee b)$

所以 $a \wedge b \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

同理 $b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$,

$c \wedge a \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$,

所以 $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$

10、确定下列各 Hasse 图对应的格中哪些是分配格, 哪些是有补格

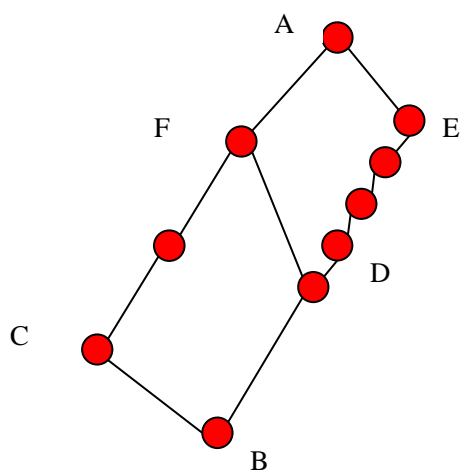
答: (图略)

图 a, 其子格不包含 5 点禁格, 所以是分配格, 但有元素没有补元, 不是有补格

图 b, 其子格不包含 5 点禁格, 所以是分配格, 除最大元与最小元外, 其它元素没有补元, 不是有补格

图 c, 其子格包含 5 点禁格, 所以不是分配格, 其中有元素没有补元, 所以不是有补格

15、作一个十元格的 Hasse 图, 使其中某些元素有多个补元, 某些元有一个补元, 某些元没有补元



答：在上图中，A,B 互为补元，补元唯一；E, D 都是 C 的补元；F 没有补元

17、设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是有补分配格， $x, y, z \in L$ ；证明：

(1) 如果 $x \leq y, y \wedge z = 0$, 则 $z \leq -x$

证明：因为 $x \leq y$, 所以 $x \wedge y = x$, 因此 $-(x \wedge y) = -x$, 及 $-x \vee -y = -x$, $-y \leq -x$

因为 $y \wedge z = 0$, 所以 $-y \vee (y \wedge z) = (-y \vee y) \wedge (-y \vee z) = -y \vee z = -y \vee 0 = -y$

所以 $z \leq -y \leq -x$, $z \leq -x$

=====特殊符号=====

集合： $\cap \cup \oplus \sim \subseteq \times \emptyset \neq - \#\# \in \notin \subseteq \subset \supseteq \supset \cap \cup \oplus \neq$

逻辑： $\sim \wedge \vee \nabla \rightarrow \leftrightarrow \leftrightarrow \Leftrightarrow \Rightarrow \forall \exists \exists! \therefore \therefore$

代数： $\approx \equiv \div \times \leq \geq < > \infty \sqrt{} \cdot$

关系： $\circ \circ \quad I_A \quad I_A^n \quad R^n$ 图论： $\delta \Delta \cong \infty \infty \omega$