四川大学期末考试标准答案（闭卷）

（2018~2019 学年第 1 学期） A 卷

课程号：311153050 课程名称：离散数学任课教师：林兰，代术成，何坤， 李晓华 ，李燕

适用专业年级：软件工程 2017 级学号：________ 姓名：________

考生承诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、 不带手机进入考场；

3、 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

题 号	一(20%)	二(20%)	三(20%)	四(30%)	五(10%)			
得 分								
卷面总分			教师签名		阅卷时间			

注意事项：1. 请务必将本人所在学院、姓名、学号、任课教师姓名等信息准确填写在试题纸和添卷纸上；

2. **请将答案全部填写在本试题纸上；**

3. 考试结束，请将试题纸、添卷纸和草稿纸一并交给监考老师。

评阅教师	得分

一、单项选择题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

提示：在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，请将其代码填写在下表中。错选、多选或未选均无分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C/D	B	A	C	C	D	D	A	B	B/D

1、下列语句中是命题的是（ ）。

A、一切皆有例外； B、他说他正在说谎； C、命题描述符是非命题； D、1+101=110。

2、 已知二元关系 R 满足 $R^3=R$， 则下列关系( )具有传递性

A、R； B、R^{-2}； C、 R^3； D、R^{-3}。

3、判断下列命题哪个为真?( )

A、在一群人的两两扳手腕儿比赛中，幺元为臂力小者； B、任何集合至少存在一个真子集；

C、置换可表示所有的双射函数； D、 A， B， C 均为假命题。

4、在平面图 $G(V,E)$ 中 $|V|=10,|E|=12$，和 8 个面。则 G 连通分支数为（ ）。

A、1； B、4； C、5； D、3。

5、设集合 A=$\{z \mid (z\geq 2)\wedge(z<100)\wedge(z\in N)\}$， $x,y\in A$，下面哪种运算关于集合 A 是封闭的？ ()

注：1、印制试卷时同时提交《四川大学期末试卷审批表》。

2、本试卷审批表同试卷一并归档保存。

A、 $x*y=\max\{x,x+y\}$； B、 $x*y=GCD\{x,y\}$，即x，y的最大公约数;

C、 $x*y=\min\{x,y\}$； D、 $x*y=LCM\{x,y\}$，即x，y的最小公倍数。

6、具有如下定义的代数系统$\langle G,*\rangle$，（ ）不构成群。

A、$G=\{1,10\}$，*是模11乘； B、$G=\{1,3,4,5,9\}$，*是模11乘；

C、$G=Q$（有理数集)，*是普通加法； D、$G=Q$（有理数集)，*是普通乘法。

7、*是定义在Z上的二元运算，$\forall x,y\in Z, x*y=xy+x-y$，则*的幺元和零元分别是（ ）。

A、不存在，0 B、0，1 C、1，不存在 D、不存在，不存在。

8、有向图G中有10个顶点，该图关联矩阵的秩为7，则连通分支数为（ ）。

A、3； B、4； C、5； D、2。

9、设R是平面上直线集合L上的垂直关系，则R是（ ）

A、自反的; B、反自反的; C、反对称的; D传递的。

10、在自然数集N上，下列哪种运算是可结合的？（ ）

A、$a*b=a-b$；B、$a*b=\max\{a,b\}$；C、$a*b=a+2b$；D、$a*b=a\cdot b(\bmod 3)$。

评阅教师	得分

二、填空题（本大题共10空，每空2分，共20分）。

1、设G是连通平面图，有5个顶点，6个面，从G中最多删去(5)边而不改变其连通性。

2、设9阶无向图G中，每个节点的点度数不是5就是6，该图最多有（ 26 ）条边。

3、设S=Q×Q，Q为有理数集合，*为S上的二元运算：对任意(a，b)，(c，d)∈S，有(a，b)*(c，d)=(ac，ad+b)， S关于二元运算*的单位元为（(1，0)），当a≠0时，(a，b)关于*的逆元为（($\frac{1}{a},-\frac{b}{a}$)）。

4、设无向图G=<V，E>，|E|=12。有6个3度顶点，其他点度数均小于3。问G中至少有（ 9 ）个顶点。

5、设集合A={a，b，c}，从A到A的二元关系中，存在（ $2^3\times 2^3$ ）个对称关系；存在（ $2^3\times 3^3$ ）个反对称关系； 有（ 506 ）个二元关系不能表示为置换。

6、设A为集合，则$<2^A,\subseteq>$是格，若$x,y\in 2^A$，则x,y最大下界是（ x∩y ），最小上界是（ x∪y ）

评阅教师	得分

三、计算题（本大题共2小题，每小题10分，共20分）

设 A＝{a，b，c，d}，R 是 A 上的二元关系，且 R＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>}，

求 r(R)、s(R) 和 s(t(R))

解　r(R)＝R∪I_A＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<a，a>，<b，b>，<c，c>，<d，d>}

s(R)＝R∪R^{-1}＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<c，b>，<d，c>}

R^2＝{<a，a>，<a，c>，<b，b>，<b，d>} R^3＝{<a，b>，<a，d>，<b，a>，<b，c>}　R^4＝R2

t(R)＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，d>，<a，a>，<a，c>，<b，b>，<b，d>，<a，d>}

S(t(R))＝{<a，b>，<b，a>，<b，c>，<c，b>，<c，d>，<d，c>，<a，a>，<a，c>，<c，a>，<b，b>，<b，d>，<d，b>，<a，d>，<d，a>}

2. 设 p,q,r 是实数，$\circ$ 为 R 上的二元运算，$\forall a,b \in R$，　$a \circ b = pa + qb + r$ 。问 p,q,r 满足什么条件，使得$\circ$运算分别适合交换律和结合律？

1）交换律：

$$a \circ b = b \circ a$$
$$pa + qb + r = pb + qa + r$$
$$(p-q)a = (p-q)b$$

对于任意的a,b 均成立，只有 p=q 才有交换律。

2）结合律

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$
$$p(pa + qb + r) + qc + r = pa + q(pb + qc + r) + r$$
$$p^2 a + pqb + pr + qc + r = pa + pqb + q^2 c + qr + r$$
$$(p^2 - p)a + (q - q^2)c + (p-q)r = 0$$

对于任意的a,b,c 均成立，$\{p^2 - p = 0\} \wedge \{q - q^2 = 0\} \wedge \{(p-q)r = 0\}$

所以当$\begin{cases} p=0 \\ q=1 \\ r=0 \end{cases}$，或$\begin{cases} p=1 \\ q=0 \\ r=0 \end{cases}$，或$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \\ r=\text{任意} \end{cases}$，或$\begin{cases} p=1 \\ q=1 \\ r=\text{任意} \end{cases}$ 才有~~交换~~律 结合律

评阅教师	得分

四、证明题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

1、设简单平面图 G 中顶点数 n=7，边数 m=15。求证 G 是连通的。 证明连通分支数为1

证明：设 G 具有 k 个连通分支 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，　G_i 的顶点数为 n_i，边数为 m_i。

先证每个连通分支的顶点数均大于 1，否则说明 G 中有孤立节点。

由于 G 是简单图，从而要使 G 的边数是 15，则 G 只有两个连通分支，其中一个是孤立节点导出的，另一个是 K_6，但 K_6 不是平面图，故每个连通分支的顶点都大于 1。

同理可得每个连通分支的顶点都大于 2。

由此可得，G 的每个连通分支至少有 3 个顶点，从而 $m_i \le 3n_i - 6$，

即 $$m = \sum_{i=1}^{k} m_i \le \sum_{i=1}^{k} (3n_i - 6) = 3n - 6k$$

$15 \le 21\text{-}6k$，即 $k \le 1$，从而有 $k=1$，故 G 是连通的

2、设 $<G,*>$ 是一群，$x \in G$。定义：$a \circ b = a * x * b$，$\forall a, b \in G$。证明 $<G,\circ>$ 也是一群。

证明：1）　显然 $\circ$ 是 G 上的二元运算（即满足封闭性），

2）$\forall a, b, c \in G$，有

$(a \circ b) \circ c = (a * x * b) * x * c = a * x * (b * x * c) = a \circ (b \circ c)$ 运算是可结合的。

3）x^{-1} 是 $<G,\circ>$ 的单位元。事实上，$\forall a \in G$，有

$a \circ x^{-1} = a * x * x^{-1} = a$；$x^{-1} \circ a = x^{-1} * x * a = a$

4）最后证明，$\forall a \in G$，$x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}$ 是 a 在 $<G,\circ>$ 中的逆元。事实上，

$a \circ (x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}) = a * x * x^{-1} * a^{-1} * x^{-1} = x^{-1}$

$(x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}) \circ a = x^{-1} * a^{-1} * x^{-1} * x * a = x^{-1}$

5）由以上证明，$<G,\circ>$ 是群。

3、设<G，*>是一个群，H_1，H_2 是 G 的两个子群。证明 $H=H_1 \cap H_2$ 是 G 的子群。

证明

1)非空性和幺元存在：由于 H_1，H_2 是 G 的两个子群，所以有：$e \in H_1$，$e \in H_2$，即有 $e \in H_1 \cap H_2$；（2 分）

2)封闭性：对 $\forall a$，$b \in H$，有 a，$b \in H_1 \cap H_2$，

即 a，$b \in H_1$，a，$b \in H_2$，

由于 H_1，H_2 都是 G 的子群，所以有：

$a*b \in H_1$，$a*b \in H_2$，即有：$a*b \in H_1 \cap H_2$

3)逆元存在：对 $\forall a \in H$，有 $a \in H_1 \cap H_2$，即 $a \in H_1$，$a \in H_2$，由于 H_1，H_2 都是 G 的子群，所以有：$a^{-1} \in H_1$，$a^{-1} \in H_2$，即有：$a^{-1} \in H_1 \cap H_2$。

由 1)、2)、3)知：<H，*>是<G，*>的一个子群。

评阅教师	得分

五、分析题（本大题共1小题，共10分）

设A为有限集，$|A|=3$，A上所有关系可由关系图表示。可否根据关系图中有向边的条数及其方向分析具有反自反的且反对称关系的传递性？ 若能，请给出判断依据并说明理由。

解：能。

设a，b，c∈A，R为A到A上的二元关系，满足点a，b，c无环，即反自反。

因为 （aRb∧bRc）→aRc 满足反对称关系

所以 对于公式（aRb∧bRc）→aRc

1)当aRb=0，bRc=0，aRc=0时，公式值为1，

满足传递性，即0条边时具有传递性。

2)当aRb=0，bRc=0，aRc=1时，公式值为1，

当aRb=0，bRc=1，aRc=0时，公式值为1，

当aRb=1，bRc=0，aRc=0时，公式值为1，

满足传递性，即有向边数为1条时具有传递性。

3)当aRb=1，bRc=1，aRc=0时，公式值为0，

即有向边数为2条首尾相连的边时不具有传递性。

4)当aRb=0，bRc=1，aRc=1时，公式值为1，

当aRb=1，bRc=0，aRc=1时，公式值为1，

即2条有向边只要不构成首尾相连状态则具有传递性。

5)当aRb=1，bRc=1，aRc=1时，公式值为1，

即3条有向边构成矢量三角形时具有传递性，其余情况的3条有向边不具有传递性。